O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NARMANOV ABDIG’APPOR YAKUBOVICH

ANALITIK GEOMETRIYA KURSI

O’zbekiston Respublikasi Oliy o’quv yurtlariaro muvofiqlashtiruvchi kengash tomonidan bakalavriatning 5460100-Matematika, 5440200-Mexanika, 5480100 – "Amaliy matematika va informatika, 5460200 –Statistika yonalishlari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT-2006

Annotatsiya

Bu darslik universitetlarning matematika, mexanika, tadbiqiy matematika va informatika, statistika yo'nalishlari uchun mo'ljallangan va amaldagi yangi bakalavrlar dasturiga muvofiq muallifning O’zbekiston Milliy Universitteida o’qigan ma’ruzalari asosida yozilgan. Darslik oltita qismdan iborat bo'lib, unda vektorlar algebrasi, tekislikda koordinatalar sistemasini almashtirish, to'g'ri chiziqlar va tekisliklar, ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlar nazariyalari yoritilgan.

[illegible]

Этот учебник предназначен для направлений бакалавриата «Математика», «Механика», «Прикладная математика и информатика», «Статистика». Он написан на основе существующей программы по учебному предмету «Аналитическая геометрия» с учетом опыта преподавания этого предмета на протяжении многих лет в Национальном университете Узбекистана. Учебник состоит из шести глав, в которых изложены векторная алгебра, преобразования декартовых систем координат, уравнения прямых и плоскостей, теория линий второго порядка, теория поверхностей второго порядка.

Abstract

This textbook is intended for directions of a bachelor degree of "Mathematician", "Mechanic", " the Applied mathematics and informatics", "Statistics". It is written on the basis of the existing program on a subject " Analytical geometry " in view of experience of teaching of this subject during many years at National university of Uzbekistan. The textbook consists of six chapters in which it is stated vector algebra, transformations of the Cartesian systems of coordinates, the equations of straight lines and planes, the theory of lines of the second order, the theory of surfaces of the second order.

Muallif- fizika-matematika fanlari doktori,professor,O'zbekiston Milliy Universiteti geometriya kafedrasi mudiri A.Ya. Narmanov

Taqrizchilar:
fizika-matematika fanlari doktori , dotsent Bahodir Shoimqulov
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent Rasulmat Yunusmetov

Muharrir- filologiya fanlari nomzodi G.N. Tavaldiyeva

MUNDARIJA

Kirish

ANALITIK GEOMETRIYA PREDMETI HAQIDA

Tekislik yoki fazoda koordinatalar sistemasini kiritganimizda, geometrik figuraga tegishli nuqtalar koordinatalarga ega bo'ladi. Agar figuraga tegishli nuqtalarning koordinatalari biror algebraik tenglamani qanoatlantirsa, u algebraik tenglama bilan aniqlanuvchi geometrik figura deyiladi. Masalan, markazi $A(a,b)$ nuqtada bo'lgan va radiusi R ga teng aylana tenglamasi $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Analitik geometriya kursida o'rganish metodlarining asosini kooordinatalar metodi tashkil qiladi. Biz asosan figuralarni ularning tenglamalari yordamida o'rganamiz, ya'ni algebraik tenglamalarini o'rganish bilan shugullanamiz. Bu erda algebraik metodlar asosiy rolni o'ynaydi. Biz asosan birinchi va ikkinchi darajali tenglamalar bilan ish ko'ramiz. Analitik geometriya kursida o'rganiladigan geometrik figuralar sinfi unchalik katta bo'lmasa ham, birinchi va ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlanuvchi geometrik figuralar fan va texnikada juda katta rol o'ynaydi .

Birinchi darajali algebraik tenglamalar bilan aniqlanuvchi geometrik figuralar – to'gri chiziq va tekislikdir. Ushbu asosiy geometrik figuralar bilan siz elementar geometriya kursidan tanishsiz. Tekislikda ikkinchi darajali tenglamalar ikkinchi tartibli chiziqlarni, fazoda esa ikkinchi tartibli sirtlarni aniqlaydi. Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, aylana ikkinchi tartibli chiziqdir.

Fazoda $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$ tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalar to'plami esa sferadan iborat bo'lib, u ikkinchi tartibli sirtdir.

Analitik geometriya kursida vektorlar algebrasi ham o'rganiladi. Vektor tushunchasi muhim fundamental tushunchalardan bo'lib, faqatgina analitik geometriya kursida emas, balki matematikaning boshqa bo'limlarida ham muhim rol o'ynaydi.

Bu darslik muallifning O'zbekiston Milliy universitetining mexanika-matematika fakultetida o'qigan ma'ruzalari asosida yozilgan. Darslik universitetlarning mexanika va matematika yo'nalishlarining bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan.

I BOB

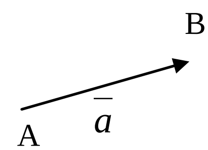
VEKTORLAR ALGEBRASI

1§. Vektorlar va ular ustida amallar

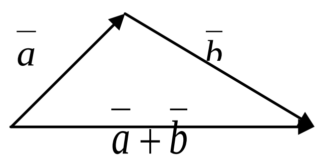
Ta'rif-1.*Yo'nalishga ega bo'lgan kesma vektor deb ataladi.*

Biz vektorni $\overline{AB}$ ko'rinishida yoki bitta kichik lotin harfi bilan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ko'rinishida belgilaymiz. Vektorni $\overline{AB}$ ko'rinishida belgilasak A, B nuqtalar mos ravishda vektorning boshi va oxiri joylashgan nuqtalardir, vektorning uzunligi $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar vektorning boshi va oxiri bitta nuqtada bo'lsa, u nol vektor deyiladi. Nol vektor yo'nalishga ega emas, uning uzunligi esa nolga teng. Nol vektor $\bar{0}$ ko'rinishida yoziladi.



Chizma-1



Chizma-2

Ta'rif-2. Ikkita $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$ va $\bar{b} = \overrightarrow{CD}$ vektorlardan $\bar{b} = \overrightarrow{CD}$ vektor boshini $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor oxiriga qo'yilganda $\overrightarrow{AB}$ vektor boshidan $\overrightarrow{CD}$ vektor oxiriga yo'naltirilgan vektor, bu vektorlarning yigindisi deyiladi va $\bar{a} + \bar{b}$ ko'rinishida yoziladi.

Yuqorida keltirilgan vektorlarni qo'shish qoidasi uchburchak qoidasi deyiladi.

Ta'rif-3. *Berilgan λ haqiqiy son va* $\bar{a}$ *vektorning ko'paytmasi shunday vektorki, uning uzunligi* $/\lambda//\bar{a}/$*ga teng, yo'nalishi: λ>0 bo'lganda* $\bar{a}$ *vektor yo'nalishi bilan* *bir xil, λ<0 bo'lganda esa $\overline{a}$ vektor yo'nalishiga qaramaqkarshi bo'ladi. Ko'paytma $\lambda\overline{a}$ ko'rinishida yoziladi.*

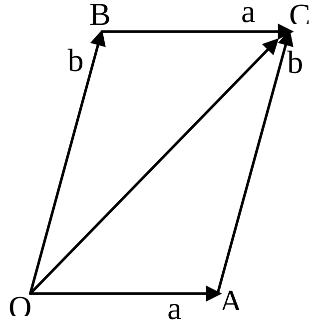
Vektorlar algebrasi deganda, vektorlar to'plamida vektorlarni qo'shish va skalyar songa ko'paytirish amallari tushuniladi. Biz V bilan hamma vektorlar to'plamini belgilaymiz. Bunda vektorlarimiz bir to'g'ri chiziqda, bir tekislikda yoki fazoda yotgan bo'lishi mumkin.

Vektorlarni qo'shish va skalyar songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

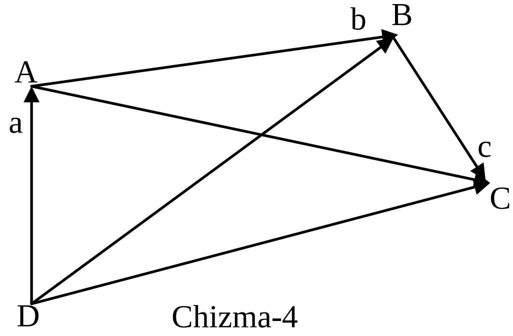
1. $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V$ uchun; $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ –kommutativlik.
2. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$ uchun; $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ -assosiativlik.
3. $\forall \overline{a} \in V$ uchun $\exists \overline{b} \in V$ $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}, \overline{b} = -\overline{a}$
4. $\forall \overline{a} \in V$ uchun; $\overline{a} \cdot 1 = \overline{a}$ -birlik element.
5. $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V$ hamda $\forall \lambda \in R$ uchun $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$
6. $\forall \lambda, \mu \in R$ va $\forall \overline{a} \in V$ uchun: $\overline{a}(\lambda + \mu) = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$
7. $\forall \lambda, \mu \in R$ va $\forall \overline{a} \in V$ uchun $\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$
8. $\forall \overline{a} \in V$ uchun $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$

Bu xossalarning ba'zilarini isbotlaymiz, ba'zilarining isbotini esa o'quvchilarga havola qilamiz.

Birinchi xossani isbotlash uchun ixtiyoriy ikkita $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarning boshini bitta O nuqtaga joylashtiramiz va



Chizma-3



Chizma-4

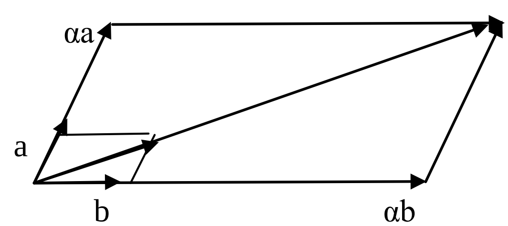
Chizmadagi $OABC$ parallelogrammni hosil qilamiz.Bu parallelogrammdagi OAB uchburchakdan $\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$ tenglik, OCB uchburchakdan esa $\overline{OB} = \overline{b} + \overline{a}$ tenglikni hosil qilamiz(Chizma-3).

Ikkinchi xossani isbotlash uchun $\overline{a}$ vektorning boshini O nuqtaga, $\overline{b}$ vektorning boshini $\overline{a}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz va $\overline{c}$ vektorning boshini esa $\overline{b}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz. Chizmadan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{OC} \qquad \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{OC}$$

Har bir $\overline{a} = \overline{AB}$ vektor uchun $\overline{b} = \overline{BA}$ vektor $\overline{a}$ vektorga qarama qarshi yo'nalgan, uzunligi esa $\overline{a}$ ning uzunligiga teng vektordir. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{O}$ tenglikni hosil qilamiz.

Beshinchi xossani isbotlash uchun $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirib, ular yordamida quyidagi $ABCD$ parallelogrammni hosil qilamiz.



Chizma-5

Berilgan λ son uchun $\lambda\overline{a}$ va $\lambda\overline{b}$ vektorlarga qurilgan $ABCD$ parallelogramm $ABCD$ parallelogrammga o'xshashdir. Shuning uchun uning diagonali uzunligi $ABCD$ parallelogramm diagonali uzunligidan $|\lambda|$marta “kattadir”.

Bundan esa $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$ tenglikni hosil qilamiz.

Oltinchi xossani isbotlash uchun $\lambda\mu > 0$ va $\lambda\mu < 0$ hollarni qaraymiz. Birinchi holda λ va μ sonlarining ishorasi bir xil bo'ladi. Shuning uchun ularning ikkalasi ham yoki manfiy yoki musbat bo'ladi. Biz ularning ikkalasi ham manfiy bo'lgan holni qaraylik. Bu holda $\overline{a}(\lambda+\mu)$, $\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ vektorlar $\overline{a}$ vektorga qarama qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak ular bir xil yo'nalishga ega. Ularning uzunliklari esa $|\lambda+\mu||\overline{a}|$ ga tengdir.Agar λ va μ sonlari musbat son bo'lsa, yuqoridagi mulohaza takrorlanadi. λ va μ sonlarining ishoralari har xil bo'lsa biz yana ikkita holni qaraymiz:

$\lambda+\mu>0$ va $\lambda+\mu<0$. $\lambda+\mu>0$ bo'lganda $\overline{a}(\lambda+\mu)$, $\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}, \lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ vektorlar $\overline{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalishga ega. $\mu\overline{a}$ vektorning boshini $\lambda\overline{a}$ vektorning oxiriga joylashtirib, ularning uzunliklari ham tengligini ko'ramiz.Chizmaga qarang. Qolgan hollar yuqoridagidek mulohazalar asosida tekshiriladi.

Ta'rif-4*. Bir to'g'ri chiziqqa parallel vektorlar kollinear vektorlar deyiladi.*

Vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lsa $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ ko'rinishda, agar qarama qarshi yo'nalishga ega bo'lsa $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$ ko'rinishda belgilaymiz.

Tasdiq- 1*.Nol vektordan farqli $\overline{a},\overline{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun $\lambda\in R$ son $^{-}$ mavjud bo'lib,$\overline{a}=\lambda\overline{b}$ tenglikning bajarilishi zarur va etarlidir.*

Isbot. Vektorlar uchun $\overline{a}=\lambda\overline{b}$shart bajarilsa, $\overline{a},\overline{b}$ vektorlar kollinearligini isbotlash sodda bo'lganiligi uchun uni isbotlashni o'quvchilarga havola etamiz .Bu shartninig zarurligini ko'rsatamiz. Agar $\overline{a},\overline{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, ularni parallel ko'chirish natijasida bitta to'g'ri chiziqqa joylashtirish mumkin. Shuning uchun ular l to'g'ri chiziqda yotadi va ularning boshi O nuqtada deb hisoblaymiz. Agar $\overline{a},\overline{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lsa $\lambda=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$ uchun $\overline{a}=\lambda\overline{b}$ tenglik bajariladi. Agar $\overline{a},\overline{b}$ vektorlar qarama qarshi yo'nalishga ega bo'lsa $\lambda=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$ uchun $\overline{a}=\lambda\overline{b}$tenglik bajariladi.

Ta'rif-5. *Vektor ($\bar{a}$ - vektor) yotgan to'gri chiziq α tekislikka parallel bo'lsa, $\bar{a}$ vektor α tekislikka parallel deyiladi.*

Ta'rif-6. *Uchta $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar bitta tekislikka parallel bo'lsa,ular komplanar vektorlar deyiladi.*

Tabiiyki,agar vektorlar komplanar bo'lsa,ularni parallel ko'chirish natijasida bitta tekisllikka joylashtirish mumkin.

2§. Chiziqli erkli va chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasi

Bizga $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, ..., \bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi va n ta $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sonlar berilgan bo'lsa, $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + ... + \lambda_n \bar{a}_n$ vektor $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ vektorlarning chizikli kombinasiyasi deb ataladi. Chiziqli kombinasiyada qatnashayotgan sonlarning birortasi noldan farqli bo'lsa, u notrivial chiziqli kombinasiya deb ataladi.

Ta'rif. *Berilgan $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, ..., \bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi uchun kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sonlar mavjud bo'lib,*

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + ... + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, ..., \bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi chizqli bog'lanishli deyiladi.

Izoh. Vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, uning birorta notrivial chiziqli kombinasiyasi nolь vektor bo'ladi.

Teorema-1. *Ikkita vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun bu oila vektorlarining kollinear bo'lishi zarur va etarlidir*.

Isbot. Oilaga tegishli ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar chizikli bog'lanishli bo'lsa, kamida bittasi noldan farkli λ_1, λ_2 sonlari mavjud bo'lib, $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} = \bar{0}$ tenglik bajariladi. Agar $\lambda_1 \neq 0$ bo'lsa, $\bar{a} = -(\lambda_1 / \lambda_2)\bar{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa birinchi tasdiqqa ko'ra $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning kollinear ekanligini ko'rsatadi.

Va aksincha, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kollinear bo'lsin. Ularning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirsak, ular bitta to'gri chiziqda yotadi. Bu to'gri chiziqda vektorlar boshi joylashgan nuqtani koordinata boshi sifatida olib, koordinatalar sistemasini kiritamiz. Vektorlarning oxirlarini A va V harflar bilan belgilaymiz: $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$. Vektorlardan bittasi, misol uchun $\bar{a}$ noldan farqli vektor bo'lsin. Demak, $\bar{a} \neq \bar{0}$ va O nuqta AB kesmani biror λ nisbatda bo'ladi: $BO/OA = \lambda$ yoki $BO = \lambda OA$

Endi $\bar{b}$=-$\lambda\bar{a}$ tenglikni ko'rsatamiz. Agar $\bar{a}, \bar{b}$vektorlar yo'nalishi bir xil bo'lsa, O nuqta AB kesmaga tegishli emas va λ<0. Agar $\bar{a}, \bar{b}$ vektorlar yo'nalishi qarama qarshi bo'lsa, λ>0 bo'ladi. Shuning uchun $\bar{b}$ va -$\lambda\bar{a}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil. Ularning uzunliklari ham teng:

$$|\bar{b}| = |\overrightarrow{BO}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{OA}| = |\lambda|\,|\bar{a}| = |-\lambda\bar{a}|.$$

Demak, bu vektorlar tengdir. Endi $\bar{b}$=-$\lambda\bar{a}$ tenglikdan $-\lambda\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli oilani tashkil qiladi.

Teorema-2.

1) *Vektorlar oilasiga nol vektor tegishli bo'lsa, bu oila chiziqli bog'lanishlidar.*
2) *Vektorlar oilasi birorta chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasini o'z ichiga olsa, bu oila ham chiziqli bog'lanishlidir.*

Isbot.

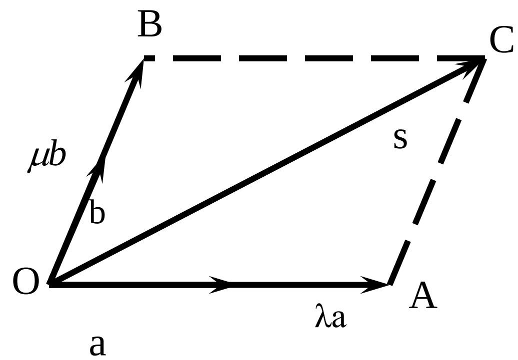
1) Berilgan $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, ..., \bar{a}_n\}$ oilada $\bar{a}_i = \bar{0}$ bo'lsa, $\lambda_i = 0$, λ_j=1 ,$i \neq j$ sonlar uchun

$$\lambda_{i_1}\overline{a_{i_1}} + \lambda_{i_2}\bar{a}_{i_2} + \lambda_{i_3}\bar{a}_i + ... + \lambda_{i_m}\bar{a}_{i_m} = \bar{0}$$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2) Berilgan $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, ..., \bar{a}_n\}$ oilada bir nechta $\overline{a_{i_k}}$, $k = 1,2,...m,\ m < n$, vektorlar chiziqli boglanishli oilani tashkil qilsa, ularning birorta notrivial chiziqli kombinasiyasi nol vektor bo'ladi :

$$\lambda_{i_1}\overline{a_{i_1}} + \lambda_{i_2}\bar{a}_{i_2} + \lambda_{i_3}\bar{a}_i + ... + \lambda_{i_m}\bar{a}_{i_m} = \bar{0}$$

.



Chizma-6

Biz agar $\lambda_j = \lambda_{j_k}$, $j = j_k$ va $\lambda_j = 0$, $j \neq j_k$ tengliklar bilan n ta $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ sonlarni aniqlasak

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Teorema-3. *Uchta vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va etarlidir.*

Isbot. Oilaga tegishli uchta $\bar{a}, \bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ularning komplanarligini isbotlaymiz. Chiziqli bog'lanishlilikning ta'rifiga asosan, kamida bittasi noldan farqli α,β,γ sonlar uchun

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Aniqlik uchun γ noldan farqli bo'lsin, unda avvalgi tenglikdan

$$\bar{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\bar{a} - \frac{\beta}{\gamma}\bar{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikda $\lambda=\alpha/\gamma$, $\mu=\beta/\gamma$ belgilashlarni kiritib

$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ tenglikni hosil qilamiz Agar $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlarning boshi bitta umumiy O nuqtaga joylashtirilgan bo'lsa, oxirgi tenglikdan $\bar{c}$ vektor $\lambda\bar{a}$ va $\mu\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogarmm diagonaliga tengligi kelib chiqadi. Bu esa ular bitta tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlardir.

Va aksincha, $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. Ular chiziqli bog'liqligini isbotlaymiz.

Berilgan uchta vektorlar orasida kollinear vektorlar bo'lgan holni chiqarib tashlaymiz. Teorema-1 ga asosan, ushbu vektorlar jufti chiziqli boglik bo'lar edi va berilagan uchta vektor ham chiziqli bogliklligi kelib chiqar edi. Shuning uchun $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar orasida hech bir jufti kollinear bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz (xususan, ular orasida nol vektor ham yo'q). Vektorlarni bitta tekislikka ko'chirib, ularning boshlarini O nuqtaga joylashtiramiz (Chizmaga qarang). Keyin $\bar{c}$ vektorning S uchi orqali $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga parallel to'gri chiziqlar o'tkazamiz, vektor yotgan to'gri chiziqning $\bar{b}$ vektorga parallel to'gri chiziq bilan kesishish nuqtasini A deb belgilaymiz va $\bar{b}$ vektor yotgan to'gri chizikning $\bar{a}$ vektorga parallel to'gri chiziq bilan kesishish nuqtasini V deb belgilaymiz. (Ushbu nuqtalarning mavjudligi, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kollinear emasligidan kelib chiqadi). Vektorlarni ko'shishning parallelogramm koidasiga ko'ra $\bar{c}$ vektor $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ vektorlar summasiga teng, ya'ni

$$\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

$\overline{OA}$ vektor noldan farkli $\bar{a}$ vektorga kollinear (u bilan bir to'gri chiziqda yotuvchi), demak, shunday λ haqiiy son topiladiki,

$$\overline{OA} = \lambda\bar{a}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Xuddi shunga o'xshash, $\overline{OB} = \lambda\bar{b}$ tenglik ham o'rinli. Bu tengliklardan

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$$

tenglik kelib chiqadi.Oxirgi tenglikni $\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}+(-1)\overline{c}=\overline{0}$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikdagi λ, μ va –1 sonlarining kamida bittasi noldan farqli bo'lganligi sababli, oxirgi tenglik $\overline{a},\overline{b}$ va $\overline{c}$ vektorlarning chiziqli bog'lanishligini ifodalaydi. Teorema isbotlandi.

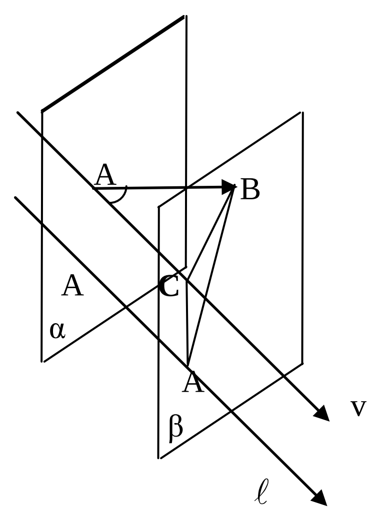
Natija-1. *Agar $\overline{a},\overline{b}$ va $\overline{c}$ vektorlar komplanar bo'lmasa, ular chiziqli erkli bo'ladilar.*

Natija-2. *Ixtiyoriy uchta komplanar bo'lmagan vektorlar orasida ikkita kollinear vektorlar bo'la olmaydi. Shuningdek ular orasida nol vector ham bo'lmaydi.*

3§.Vektorlarning o'qqa proeksiyasi

Vektorning o'kka proeksiyasi vektorning yo'nalishiga qarab musbat, manfiy yoki nolga teng bo'lgan son bo'lib, $\overline{a}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi quyidagi qoida bo'yicha aniqlanadi:Chizma

Agar $\overline{a}=\overline{AB}$ bo'lsa, A va B nuqtalarning ℓ o'qdagi ortogonal proeksiyalarini mos ravishda A', B' bilan belgilaymiz. $A'B'$ kesmaning ℓ o'qdagi kattaligi $\overline{a}$ vektorning ℓ o'qdagi proeksiyasi deb ataladi. Proeksiya uchun



Chizma-7

$$np_{\ell}\overline{a}=|\overline{a}|\cos\varphi$$

tenglik o'rinli bo'lib,bu erda φ –berilgan $\overline{a}$ vektor va ℓ o'q orasidagi burchakdir.

Proeksiyaning xossalari:

1. $np_{\ell}\lambda\overline{a}=\lambda np_{\ell}\overline{a}$, $\lambda\in R^1$

2. pr $np_{\ell}(\overline{a}+\overline{b})=np_{\ell}\overline{a}+np_{\ell}\overline{b}$

Isbot. 1. Birinchi $np_\ell \lambda \bar{a} = \lambda np_\ell \bar{a}$ tenglikni isbotlash uchun quyidagi hollarni qaraymiz:

a) $\lambda = 0$ bo'lsa $\lambda\bar{a} = \bar{0}$ tenglik o'rinli bo'ladi va natijada $A' = B'$ munosabatdan

$$\text{pr}_\ell \lambda\bar{a} = 0 \quad \text{va} \quad \text{pr}_\ell \lambda\bar{a} = \lambda \text{pr}_\ell \bar{a} = 0$$

tengliklar kelib chiqadi.

b) $\lambda > 0$ bo'lsa, $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ munosabatdan $\varphi=\psi$ tenglik kelib chiqadi;bu erda φ va ψ mos ravishda $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ℓ o'q bilan hosil qilgan burchaklaridir. Bu holda $|\lambda\bar{a}| = \lambda|\bar{a}|$ va demak $np_\ell(\lambda\bar{a}) = |\lambda\bar{a}|\cos\psi = \lambda np_\ell \bar{a}$.

в) $\lambda<0$ bo'lsa, $\lambda\bar{a}$ va $\bar{a}$ vektorlar uchun $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $\psi = \varphi + \pi$ tenglikdan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$np_\ell(\lambda\bar{a}) = |\lambda\bar{a}|\cos(\varphi + \pi) = -\lambda|\bar{a}|\cos(\varphi + \pi) = \lambda np_\ell \bar{a}.$$

2. $np_\ell(\bar{a} + \bar{b}) = np_\ell \bar{a} + np_\ell \bar{b}$ tenglikni isbotlashni keyinroqqa qoldirib, skalyar ko'paytmani o'rganishga o'tamiz.

4§. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$ ifodaga aytiladi. Bu erda φ - $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan bevosita quyidagi fakt kelib chiqadi:

Xossa -1. Ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun ularning o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va etarlidir.

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2},\ \bar{a} \perp \bar{b}$$

Xossa- 2. $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$

Xossa -3. Kommutativlik $\left(\bar{a}\ ,\ \bar{b}\right)=\left(\bar{b}\ ,\bar{a}\right)$.

Xossa- 4. $\left(\lambda\bar{a}\ ,\ \bar{b}\right)=\lambda\left(\bar{a}\ ,\bar{b}\right)$, $\lambda\in$R

Xossa -5. $\left(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\bar{c}\right)+\left(\bar{b},\bar{c}\right)$

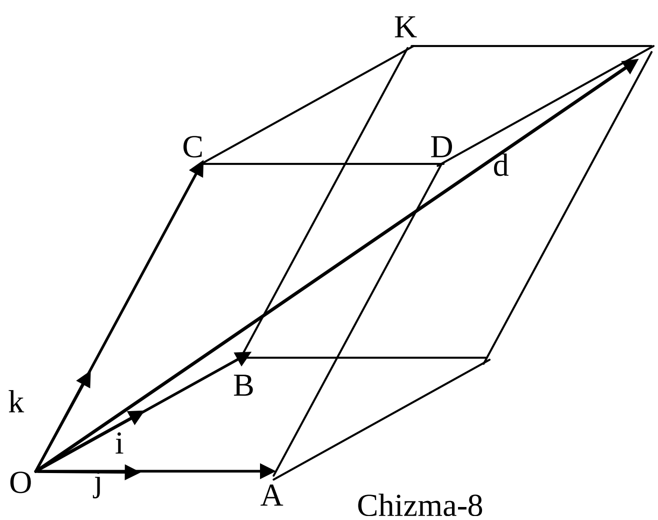
Beshinchi xossa isboti proeksiyaning ikkinchi xossasidan kelib chiqadi:

$$\left(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right)=\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\left|\bar{c}\right|\cos\varphi=$$

$$=np_{\bar{c}}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\left|\bar{c}\right|=\quad np_l\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\left|\bar{c}\right|=np_l\,\bar{a}\cdot\left|\bar{c}\right|+np_l\,\bar{b}\cdot\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cos\alpha+\left|\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cos\varphi$$

5§. Bazis va vektorning koordinatalari

Ta'rif. *Berilgan* $\left\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n\right\}$ *vektorlar oilasi chiziqli erkli bo'lib, ixtiyoriy vektorni ularning chiziqli kombinasiyasi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu oila bazis deyiladi.*



Chizma-8

Quyidagi muhim faktlar o'rinlidir:

Xossa -1.Tekislikda har qanday ikkita nokollinear vektorlar bazisni tashkil qiladi.

Xossa- 2.Fazoda har qanday uchta nokomplnar vektorlar bazisni tashkil qiladi.

Bu xossalarning birinchisi 1- teoremaning bevosita natijasidir.

Ikkinchi xossani isbotlaymiz:

Bizga uchta nokomplanar $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ikkinchi punktda isbotlagan teoremaga ko'ra ular chiziqli oilani tashkil qiladi. Endi ixtiyoriy $\overline{d}$ vektorni olib, uni $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlar orqali chiziqli ifodalash mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlarning boshlarini O nuqtaga joylashtiramiz va $\overline{d}$ vektorning oxiridan $\overline{a}, \overline{b}$ vektorlar tekisligiga, $\overline{a}, \overline{c}$ vektorlar tekisligiga va $\overline{c}, \overline{b}$ vektorlar tekisligiga parallel tekisliklar o'tkazamiz. O'tkazilgan tekisliklarning $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlar yotgan to'g'ri

chiziqlar bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda A, B, C harflar bilan belgilaymiz.Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\overline{d} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

tenglikni olamiz. Bu yerda $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ vektorlar mos ravishda $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlarga kollinear bo'lganligi uchun shunday λ, μ, ν sonlar mavjudki

$$\overline{OA} = \lambda \overline{a}, \quad \overline{OB} = \mu \overline{b}, \quad \overline{OC} = \nu \overline{c}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.Bu tengliklarni hisobga olib

$$\overline{d} = \lambda \overline{a} + \mu \overline{b} + \nu \overline{c}$$

tenglikni olamiz.

Ta'rif. Bizga $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ bazis berilib, $\overline{a}$ vektor uchun

$$\overline{a} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + \ldots + a_n \overline{e_n}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sonlar $\overline{a}$ vektorning koordinatalari deyiladi.

Xossa -6. Har bir vektor berilgan bazisda o'zining koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi.

Berilgan $\overline{a}$ vektor uchun ikkita

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + \ldots + a_n\overline{e_n}$$

$$\overline{a} = b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + \ldots + b_n\overline{e_n}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa ularning birini ikkinchisidan hadma had ayirib

$$\overline{a} = (a_1 - b_1)\overline{e_1} + (a_2 - b_2)\overline{e_2} + \ldots + (a_n - b_n)\overline{e_n}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bazisni tashkil kiluvchi $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lganligi

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0,\ ...,\ a_n - b_n = 0$$

munosabat hosil bo'ladi.

6§.Affin koordinatalar sistemasi

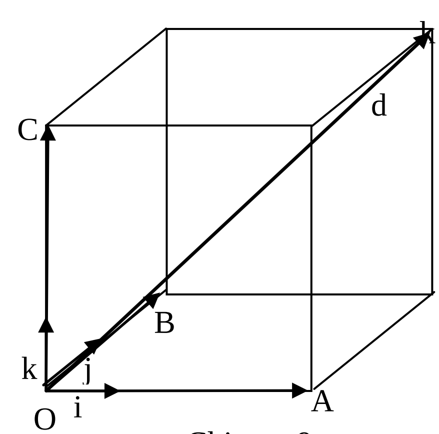
Fazoda yoki tekislikda affin koordinatalar sistemasini kiritish uchun birorta bazis va bitta nuqta tanlanadi. Agar $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e}_3\}$ bazis va O nuqta berilgan bo'lsa, $\overline{OM}$ vektorning $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e}_3\}$ bazisdagi koordinatalari M nuqtaning affin koordinatalari deyiladi.

Ta'rif-1*. Berilgan* $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ *bazis uchun*

$$\left(\overline{e_i}, \overline{e_j}\right) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$ *bajarilsa,* $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$*–ortonormal bazis deyiladi.*

Ta'rif*. Ortonormal bazis yordamida berilgan koordinatalar sistemasi to'gri burchakli yoki dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi.*

Teorema*. Dekart koordinatalar sistemasida vektorning berilgan bazisdagi koordinatalari, uning koordinatalar o'qlariga tushirilgan proeksiyalari bilan ustma-ust tushadi.*



Chizma-9

Isbot. Bizga $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ ortonormal bazis berilgan bo'lsa, bularning boshlarini O nuqtaga joylashtirib

$OXYZ$ koordintalar sistemasini kiritaylik. Agar

$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ bo'lsa, $\overline{a}$ vektorning boshini koordinata boshiga joylashtirib, uning oxirini M bilan belgilaymiz. Agar M nuqtaning koordinata o'qlariga ortogonal proeksiyalarini A, B, C harflari bilan belgilasak $\overline{OA} = x\overline{i}$, $\overline{OB} = y\overline{j}$, $\overline{OC} = z\overline{k}$ tengliklarni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ kesmalarning kattaliklari mos ravishda x, y, z sonlariga teng bo'lgani uchun $x = np_{Ox}\,\overline{a}$, $y = np_{Oy}\,\overline{a}$, $z = np_{Oz}\,\overline{a}$ munosabatlarni hosil qilamiz.

Натижа $-1.$ $\quad pr_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = pr_l\,\overline{a} + pr_l\,\overline{b}$

Исбот. Bizga l-o'q berilgan bo'lsin: shunday $OXYZ$ koordinatalar sistemasi kiritamizki, OX koordinata o'qi l bilan ustma-ust tushsin.Agar

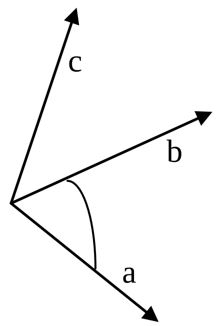
$\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}$ $\overline{b} = x_b\overline{i} + y_b\overline{j} + z_b\overline{k}$, $\overline{a} + \overline{b} = (x_{a+b})\overline{i} + (y_{a+b})\overline{j} + (z_{a+b})\overline{k}$

bo'lsa, teoremaga ko'ra $np_l\,\overline{a} = x_a$ va $np_l = x_b$, $np_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = x_{a+b}$ tengliklarni hosil qilamiz. Lekin vektorlarni qo'shganda ularning koordinatalari mos ravishda qo'shilgani uchun $np_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = x_a + x_b$ munosabatni olamiz.

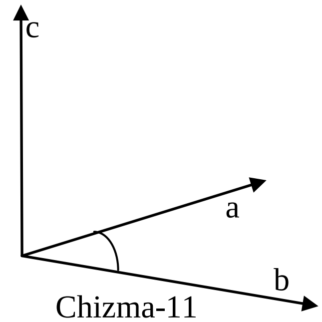
7§. *Vektor va aralash ko'paytma*

Ta'rif-1. *Tartiblangan* $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ *uchlikda* $\overline{c}$ *vektor oxiridan* $\overline{a}, \overline{b}$ *vektorlar tekisligiga qaraganimizda* $\overline{a}$ *dan* $\overline{b}$ *ga qisqa burilish yo'nalishi soat mili yo'nalishiga qarama-qarshiyo'nalgan bo'lsa, bu uchlik o'ng uchlik deb ataladi. Agar bu yo'nalish soat mili yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa,* $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$*uchlik chap uchlik deyiladi.*

Bizga $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ o'ng (va $\{\bar{b},\bar{a},\bar{c}\}$ chap) uchlik berilgan bo'lsin.



Chizma-10



Chizma-11

Ta'rif-2. *Ikkita* $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ kabi belgilanadi va:

1) $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ ning uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga tengdir: $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}|\ |\bar{b}| \sin\varphi,\ \ \varphi = \bar{a}^{\wedge}\bar{b};$

2) $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lishi kerak: $\left[\bar{a},\bar{b}\right]\perp\bar{a},\ \left[\bar{a},\bar{b}\right]\perp\bar{b};$

3) $\bar{a},\ \bar{b}$ vektorlar va vektor ko'paytma $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ o'ng uchlik hosil qiladi:

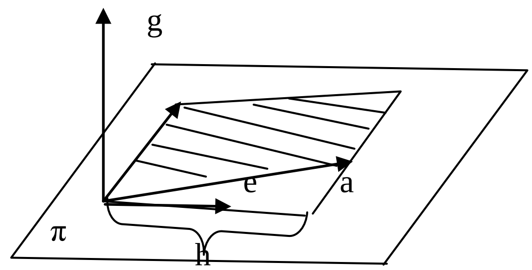
Vektor ko'paytmaning xossalari:

1) $\left[\bar{a},\bar{b}\right] = -\left[\bar{b},\bar{a}\right];$

2) $\left[\lambda\bar{a},\bar{b}\right] = \lambda\left[\bar{a},\bar{b}\right] = -\left[\lambda\bar{b},\bar{a}\right],\ \lambda\in R;$

3) $\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right] = \left[\bar{a},\bar{c}\right] + \left[\bar{b},\bar{c}\right];$ 4). $\left[\bar{a},\bar{b}\right] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\,//\,\bar{b}.$

Tasdiq-1. (Yordamchi fakt).Berilgan α tekislikda $\bar{c}$ vektor va unga perpendikulyar birlik $\bar{e}$ vektor berilgan bo'lsin. Agar $\bar{g}$ vektor α tekislikka *perpendikulyar* va $\bar{e}, \bar{c}, \bar{g}$ o'ng uchlik bo'lsa, α tekislikda yotuvchi har qanday $\bar{a}$ vektor uchun $\left[\bar{a}, \bar{c}\right] = np_{\bar{e}}\, \bar{a} \cdot \left|\bar{c}\right| \bar{g}$ tenglik o'rinlidir.



Chizma-12

Isbot. 1)Vektorlar tengligini ko'rsatish uchun ularning yo'nalishlari bir xil va uzunliklari tengligini ko'rsatamiz. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra uninig uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{c}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga tengdir: $\left|\left[\bar{a}, \bar{c}\right]\right| = S$. Chap tomondagi vektorning uzunligi esa $\left| np_e \bar{a} \right| \left|\bar{c}\right|$ ga tengdir. Agar parallelogrammning asosi sifatida $\bar{c}$ vektorni olsak, uning yuzasi $\left|c\right| h$ ga tengdir. Bu erda h balandlik bo'lib, $\left| np_{\bar{e}} \bar{a} \right| = h$ tenglik o'rinlidir.Demak vektorlarning uzunligi tengdir. Endi ularning yo'nalishi bir xil ekanligini ko'rsatamiz. Agar $\bar{a}, \bar{c}, \bar{g}$ -o'ng uchlik bo'lsa, $\bar{g}$ va $\left[\bar{a}, \bar{c}\right]$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega. Bu holda $\bar{a}$ va $\bar{e}$ vektorlar $\left|\bar{c}\right|$ vektorning bir tomonida joylashgan va $np_e \bar{a} > 0$ bo'ladi. Agar $\bar{a}, \bar{c}, \bar{g}$ -chap uchlik bo'lsa, $np_e \bar{a} < 0$ va $np_e \bar{a} \left|\bar{c}\right| \bar{g}$ vektor $\bar{g}$ vektorga qarama qarshi yunalgandir. Demak, $np_{\bar{e}} \bar{a} \left|\bar{c}\right| \bar{g}$ vektor yunalishi $\left[\bar{a}, \bar{c}\right]$ vektor yunalishi bilan bir xil bo'ladi. Natijada $\left[\bar{a}, \bar{c}\right] = np_{\bar{e}}\, \bar{a} \cdot \left|\bar{c}\right| \bar{g}$ tenglikni hosil qildik.

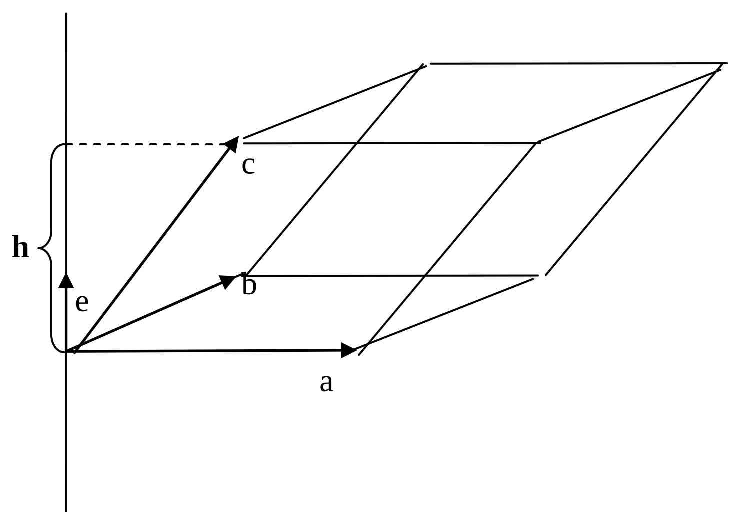
Ta'rif-3. *Uchta* $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ *vektorlarning aralash ko'paytmasi deb,* $\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$ *miqdorga aytiladi va kuyidagi ko'rinishda belgilanadi:* $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \equiv \left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$.

Tasdiq-2. *Berilgan nokomplanar (chiziqli erkli)* $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ *vektorlar o'ng uchlikni tashkil qilsa, ularning aralash kupaytmasi ularga qurilgan parallelipipedning hajmiga, aks holda esa hajmning manfiy ishora olinganiga teng*dir.

Isbot: Biz $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarga qurilgan parallelipipedning hajmini V bilan belgilaymiz. Agar S bilan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzasini belgilasak, $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = S\bar{e}$ tenglik o'rinli bo'ladi . Bu yerda $\bar{e}$ vektor $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ ko'paytma bilan bir xil yo'nalgan birlik vektordir. Skalyar ko'paytmani proeksiya yordamida yozsak,

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = S\left|\bar{e}\right| np_{\bar{e}}\bar{c}$$

tenglikni hosil qilamiz.



Chizma-13

Bu yerda $np_{\bar{e}}\bar{c}$ absolyut qiymati bo'yicha $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarga qurilgan va asosi $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammdan iborat parallelipipedning balandligiga tengdir. Agar $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ o'ng uchlikni tashkil qilsa, $np_{\bar{e}}\bar{c} = h$, agar $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$

chap uchlikni tashkil qilsa, $np_{\bar{e}}\bar{c} = -h$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda h qaralayotgan parallelipipedning balandligidir. Shuning uchun $V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = S\,h$ formulani hisobga olsak biz bevosita tasdiq isbotini olamiz.

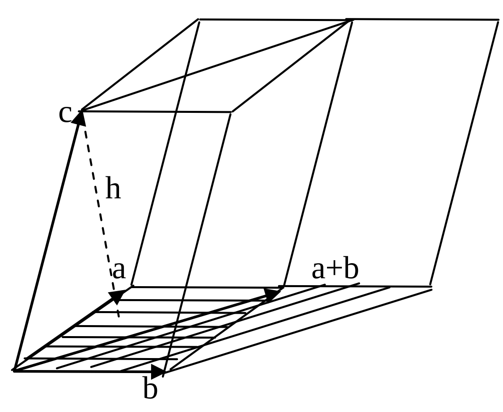
Endi biz vektor ko'paytma xossalarini isbotlashga kirishamiz.

1-xossa isboti $\bar{a},\bar{b},[\bar{a},\bar{b}]$ va $\bar{a},\bar{b},[\bar{b},\bar{a}]$ uchliklarning orientasiyalari har xil ekanligidan kelib chiqadi: birinchi uchlik o'ng orientasiyaga , ikkinchi uchlik chap orientasiyaga egadir.

2-xossani isbotlash uchun ikkita holni ko'ramiz $\lambda > 0$ va $\lambda < 0$.

Birinchi holda $\bar{a}$ va $\lambda\bar{a}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega va shuning uchun $\bar{a},\bar{b},[\lambda\bar{a},\bar{b}]$va $\bar{a},\bar{b},[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar bir hil orientasiyaga ega. Demak $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\lambda[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar uzunliklari teng va bir xil yo'nalishga ega.

Ikkinchi holda $\bar{a}$ va $\lambda\bar{a}$ vektorlar yo'nalishlari qarama qarshi va $\bar{a},\bar{b},[\lambda\bar{a},\bar{b}]$va $\bar{a},\bar{b},[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar uchliklari har xil orientasiyaga ega bo'ladi.Bundan esa $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$va $[\bar{a},\bar{b}]$vektorlar qarama qarshi yo'nalishga ega ekanligi kelib chiqadi.Demak, $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\lambda[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega va uzunliklari tengdir.



Chizma-14

3 −□ossa isbotini keltiramiz.

a) $\overline{a},\overline{b},$ va $\overline{c}$ komplanar vektorlar , $\overline{e},\overline{c},\overline{g}$ −o'ng uchlik bo'lib, $\overline{e},\overline{g}$ vektorlar 1−tasdiq shartlarini qanoatlantiruvchi vektorlar bo'lsa, ikkita vektor ko'paytmani

quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$\left[\overline{a},\overline{c}\right]= np_{\overline{e}}\ \overline{a}\left|\overline{c}\right|\overline{g}$ va $\left[\overline{b},\overline{c}\right]= np_{\overline{e}}\ \overline{b}\left|\overline{c}\right|\overline{g}$.

Endi proeksiya □ossasidan foydalanib

$\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]= np_{\overline{e}}\ (\overline{a}+\overline{b})\left|\overline{c}\right|\overline{g} = np_{\overline{e}}\ \overline{a}\left|\overline{c}\right|\overline{g}\ \text{Ķ}\ np_{\overline{e}}\ \overline{b}\left|\overline{c}\right|\overline{g}$

tenglikni hosil qilamiz.

b) $\overline{a},\overline{b},$ va $\overline{c}$ komplanar komplanar vektorlar emas;

Bu holda $\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right],$ $\left[\overline{a},\overline{c}\right]$ $\left[\overline{b},\overline{c}\right]$ vektorlarning barchasi $\overline{c}$ vektorga perpendikulyar bo’lganligi uchun ular komplanar oilani tashkil etadi.Demak ular chiziqli bog’lanishli bo’ladi, ya'ni kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sonlari mavjud bo’lib

$$\lambda_1\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]+\lambda_2\left[\overline{a},\overline{c}\right]+\lambda_3\left[\overline{b},\overline{c}\right]=\overline{0}$$

tenglik o’rinli bo’ladi.Bu tenglikdan

$$\lambda\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]=-\lambda_2\left[\overline{a},\overline{c}\right]-\lambda_3\left[\overline{b},\overline{c}\right]$$

tenglikni hosil qilib, uning ikkala tomonini $\overline{b}$ ga skalyar ko'paytiramiz va

$$\lambda_1(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}\,\overline{b}=-\lambda_2\ \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi aralash ko'paytma haqidagi tasdiqqa ko'ra

$$(\overline{a}+\overline{b})\ \overline{c}\ \overline{b} \quad \text{va} \quad \overline{a}\ \overline{c}\ \overline{b}$$

aralash ko'paytmalarning absolyut qiymatlari mos ravishda $V_{(a+b)cb}$, V_{acb} hajmlarga tengdir.

Bu parallelipipedlarning asoslari sifatida mos ravishda $\overline{a}+\overline{b},\overline{b}$ va $\overline{a},\overline{b},$ vektorlarga qurilgan parallelogrammlarni olsak, ularning balandligi tengligini ko'ramiz. Shuning uchun $V_{acb} = S_1 h$ va $V_{(a+b)cb} = S_2 h$ tengliklardan va ularning asoslari yuzalari ham tengligidan bu hajmlarning tengligi kelib chiqadi.

Endi $(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{c}\,\bar{b}$ va $\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$ aralash ko'paytmalar bir xil ishoralarga ega bo'lishi, $\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}, \bar{b}$ uchlik orientasiyasi $\bar{a}\,, \bar{c}, \bar{b}$ uchlik orientasiyasi bilan ustma-ust tushishidan kelib chiqadi. Demak, $(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{c}\,\bar{b} = \bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$. Bundan esa $\lambda_1 = -\lambda_2$ munosobatni hosil qilamiz. Xuddi shunday usul bilan $\lambda_1 = -\lambda_3$ tenglikni isbotlaymiz.

Demak,

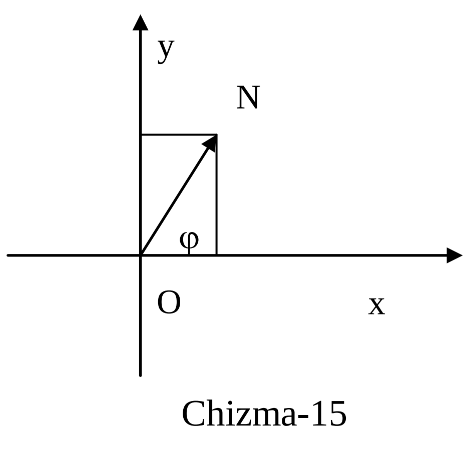
$$\left[\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}\right] = \left[\bar{a}, \bar{c}\right] + \left[\bar{b}, \bar{c}\right]$$

tenglik o’rinlidir.

4-xossaning isboti $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar parallel bo’lganda ular orasidagi burchakning sinusi nolga tengligidan kelib chiqadi.

8§. Vektor va aralash ko'paytmani koordinatalar orqali ifodalash

O'ng uchlikni tashkil qiluvchi ortonormal $\bar{e}_1$ $\overline{e_2}, \overline{e_3}$ bazis berilgan bo'lsa,



Chizma-15

$\bar{a}, \bar{b},$ va $\bar{c}$ vektorlarni

$$\bar{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3} \ ,$$

$$\bar{b} = b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + b_3\overline{e_3} \ ,$$

$$\bar{c} = c_1\overline{e_1} + c_2\overline{e_2} + c_3\overline{e_3}$$

ko'rinishda yozib, skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarni hisoblaymiz.

Skalyar ko'paytma uchun

$$(\overline{a},\overline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

tenglik hosil bo'ladi.

Vektor ko'paytmani hisoblashda

$$\left[\overline{e_1},\overline{e_2}\right] = \overline{e_3}\ ,\quad \left[\overline{e_3},\overline{e_1}\right] = \overline{e_2}\ ,\ \left[\overline{e_2},\overline{e_3}\right] = \overline{e_1}$$

munosabatlarni hisobga olib

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right] = (a_2b_3 - a_3b_2)\overline{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overline{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overline{e_3}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Qulaylik uchun vektor ko'paytmani koordinatalari orqali

$$\left[\overline{a}\ ,\overline{b}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

ko'rinishda yozish qabul qilingan.

Bundan foydalanib aralash ko'paytma uchun

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

formulani hosil qilamiz.

9§. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi

Tekislikda kutb koordinatalar sistemasini kiritish uchun birorta O nuqtani va bu nuqtadan o'tuvchi o'qni tanlab olamiz.Tanlangan nuqtani qutb boshi,o'qni esa qutb o'qi deb ataymiz va uni ℓ bilan belgilaymiz.Tekislikda berilgan ixtiyoriy O nuqtadan farqli M nuqta uchun ρ bilan $|OM|$ masofani, φ bilan esa ℓ o'q bilan OM nur orasidagi burchakni belgilaymiz. Bu kattaliklar M nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va M(ρ,φ) ko'rinishda belgilanadi.

Tekislikning O nuqtadan farqli nuqtalari bilan qutb koordinatalari o'rtasidagi moslik o'zaro bir qiymatli bo'lishi uchun ρ va φ kattaliklar uchun quyidagi chegara qo'yiladi: 0 <ρ< +∞ , 0≤ $\varphi < 2\pi$.

Agar (x, y) Dekart koordinatalar sistemasini 15-Chizmadagidek kiritsak, quyidagi

$$x = \rho\cos\varphi, \quad x = \rho\sin\varphi$$

bog'lanishlarni olamiz.Berilgan M nuqtaning Dekart koordinatalari ma'lum bo'lsa,uning qutb koordinatalari topish uchun

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

formula bo'yicha birinchi qutb koordinatani topamiz.Ikinchi qutb koordinatani topish uchun nuqtaning M nuqtaning qaysi chorakda joylashganligini bilishimiz kerak va

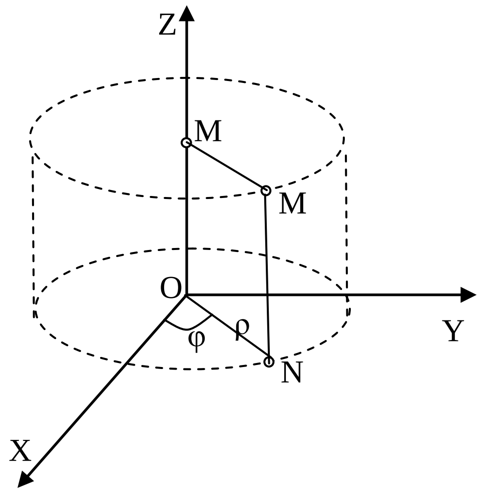
$$\varphi = arctg\frac{y}{x}, \ \varphi = arcctg\frac{x}{y}$$

tengliklardan foydalanishimiz kerak.

10§. Silindrik koordinatalar sistemasi

Fazoda silindrik koordinatalar sistemasisini kiritish uchun biz fazoda bitta tekislikni va unga tegishli O birorta nuqtani tanlashimiz kerak.Tanlangan tekislikda O nuqtani qutb boshi sifatida olib bu tekislikda qutb koordinatalari kiritamiz.Berilgan tekislikka perpendikulyar va O nuqtadan o'tuvchi o'qni OZ o'qi sifatida olib,fazoda silindrik koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz:

fazoda berilgan M nuqtaning tekislikdagi proyeksiyasini N bilan , uning OZ o'qdagi proeksiyasini M' bilan belgilaymiz. Silindrik koordinatalar sifatida (ρ,φ,z) kattaliklarni olamiz. Bu yerda (ρ,φ)- N nuqtaning berilgan tekislikdagi qutb koordinatalari, z esa OM' kesma kattaligidir.



Chizma-16

Agar biz fazoda OXY tekislik sifatida tanlangan tekislikni, OX o'q sifatida qutb o'qini olib dekart koordinatalar sistemasini kiritsak

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad x = \rho\sin\varphi \text{ , z =z}$$

bog'lanishlarni olamiz. Bu yerda ρ, φ o'zgaruvchilar uchun

$$0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

munosabatlar o'rinlidir.

Fazoda silindrik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo bitta o'qqa ega bo'lgan ichma-ich joylashgan (konsentrik) silindrlarga ajraladi. Fazoning har bir nuqtasi bu silindrlarning faqat bittasiga tegishli bo'ladi. Agar nuqtaning silindrik koordinatalari ρ, φ, z bo'lsa, bu nqta yotgan silindrning radiusi ρ ga teng bo'ladi. Agar nuqta silindrlar o'qiga tegishli bo'lsa, u tegishli bo'lgan silindrning radiusi nolga teng bo'ladi. Yuqoridagi tanlangan dekart koordinatalar sistemasida silindrlarning o'qi Oz o'qidan iboratdir. Bu dekart koordinatalar sistemasida konsentrik silindrlar tenglamasi

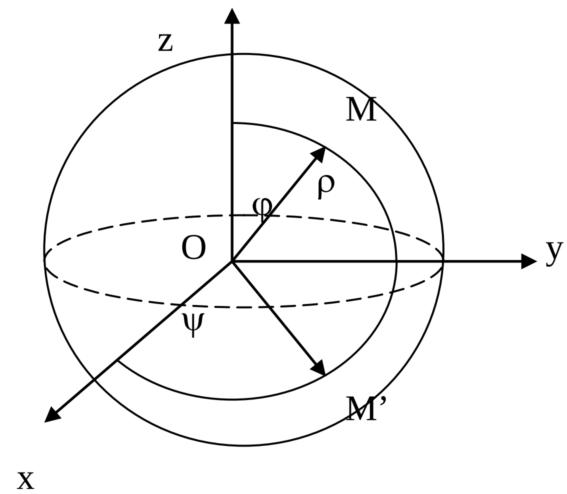
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

ko’rinishda bo’ladi.

11§. Sferik koordinatalar sistemasi

Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritish uchun $Oxyz$-Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan deb hisoblab,berilgan M nuqta uchun markazi koordinata boshida bo'lgan va radiusi $\rho = |OM|$ ga teng bo'lgan sferani qaraymiz.Berilgan M nuqtaning Oxy tekisligiga proeksiyasini M' bilan, $\overline{OM}$ vektor va Oz o'qi orasidagi burchakni φ bilan, $\overline{OM'}$ vektor va Ox orasidagi burchakni ψ bilan belgilaymiz. Burchaklarni aniqlashda φ burchak shunday tanlanadiki ,Oz o'qining musbat yo'nalishi tomonidan qaraganimizda, Ox o'qini $\overline{OM'}$ nur bilan ustma ust tushirish uchun soat mili yo'nalishiga qarshi yo'nalishda φ burchakka burish kerak. Yuqorida aniqlangan ρ, φ, ψ kattaliklar M nuqtaning sferik koordinatalari deyiladi. Bunga sabab, fazoning koordinatalari $\rho = const$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalari to'plami sferani tashkil qiladi. Fazoning har bir nuqtasi radiusi koordinata boshidan shu nuqtagacha bo'lgan masofaga teng bo'lgan sferada yotadi. Nuqtaning dekart koordinatalari bilan sferik koordinatalari orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\ y = \rho \sin\varphi \cos\psi, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2} \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



Chizma-17

Odatda fazo nuqtalari blan ularning sferik koordinatalari oraksidagi moslik o'zaro bir qiymatli bo'lishi uchun ular uchun

$$0 \le \rho < \infty\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 < \psi < \pi$$

chegaralar qo'yiladi.

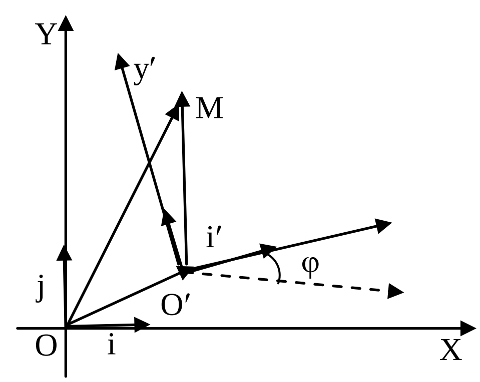
Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo markazi bitta nuqtada bo’lgan sferalarga ajraladi. Agar nuqtaning sferik koordinatalari ρ, φ, ψ bo’lsa, u yotgan sferaning radiusi ρ ga teng bo’ladi. Bu masofa nuqtadan koordinatalar boshigacha bo’lgan masofaga tengdir. Nuqta ρ radiusli sferada yotgan bo’lsa, φ va ψ burchaklar uning sferadagi vaziyatini aniqlaydi.

12§. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish

Orientasiya: Bir vektordan ikkinchisiga qisqa burilish yo'nalishi soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lsa, bu vektorlar o'ng ikkilik, aks holda chap ikkilik tashkil qiladi deyiladi. Bazis sifatida biror ikkilik tanlansa, biz orientasiya tanlab olingan deb hisoblaymiz. Bizga $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ va $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ ortonormal bazislar berilgan bo'lsin. Bu bazislar yordamida kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasilarini mos ravishda Oxy va $O'x'y'$ bilan belgilaylik. Nuqtaning "eski" va "yangi" koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz. "Yangi» koordinatalar sistemasi markazining «eski» koordinata sistemasidagi koordinatalarini (a,b) bilan belgilaylik.

chizma-18

Tekislikda M nuqta berilgan bo'lib,uning Oxy va $O'x'y'$ sistemalardagi koordinatalari mos ravishda (x, y) va (x', y') juftliklardan iborat bo'lsin.



chizma-19

Biz quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j},\ \overline{O'M} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}',\ \overline{OO'} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

Har bir vektorni $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ bazis orqali ifodalash mumkinligi uchun

$$\bar{i'} = a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j} \ , \ \bar{j'} = a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j} \qquad (1)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu ifodalarni

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \ , \ \overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

tengliklarga qo'yib

$$x\bar{i} + y\bar{j} = a\bar{i} + b\bar{j} + a_{11}x'\bar{i} + a_{12}x'\bar{j} + a_{21}y'\bar{i} + a_{22}y'\bar{j}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bazis vektorlari $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ chiziqli erkli oilani tashkil etganligi uchun yuqoridagi munosabatdan

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a$$

$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + b$$

formulalarni olamiz. Endi a_{ij} koffisientlarni topish uchun ikkita holni qaraymiz.

Birinchi hol: $\{\bar{i}, \bar{j}\}$va $\{\bar{i'}, \bar{j'}\}$ bazislar bir xil orientasiyaga ega. Bu holda agar φ bilan $\bar{i}$ va $\bar{i'}$ vektorlar orasidagi burchakni belgilasak, $\bar{j}$ va $\bar{j'}$ vektorlar orasidagi burchak ham φ ga teng bo'ladi. Yuqoridagi (1) tengliklarning har ikkalasini $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib

$$a_{11} = \cos\varphi \ , a_{12} = \sin\varphi \ , \ a_{21} = -\sin\varphi \ , \ a_{22} = \cos\varphi$$

formulalarni olamiz.Agar $\{\bar{i}, \bar{j}\}$va $\{\bar{i'}, \bar{j'}\}$ bazislar har xil orientasiyaga ega bo'lsa, $\bar{j}$ va $\bar{j'}$ vektorlar orasidagi burchak $\pi - \varphi$ ga teng bo'ladi. Bu holda (1) tengliklarning har birini $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib

$$a_{11} = \cos\varphi \ , a_{12} = \sin\varphi \ , \ a_{21} = \sin\varphi \ , \ a_{22} = -\cos\varphi$$

formulalarni hosil qilamiz. Bu formulalarni (2) formulalarga qo'yib mos ravishda quyidagi ikkita formulalarni olamiz:

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a \\
y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b
\end{aligned} \qquad (3)
$$

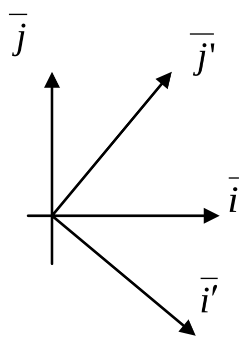
Bu holda o'tish determinanti uchun

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1
$$

tenglik o'rinli.

Ikkinchi holda bazislarning orientasiyalari har □il va koordinatalarni almashtirish formulalari

$$
\begin{cases}
x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + a \\
y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + b
\end{cases} \qquad (4)
$$



Chizma-20

ko'rinishda bo'ladi.

Bu holda o'tish determinanti uchun

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -1
$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak koordinatalar sistemesini almashtirganimizda o’tish matritsasinig determinanti musbat bo’lsa, oriyentatsiya o’zgarmaydi. Agar o’tish matritsasining determinanti manfiy bo’lsa, oriyentatsiya qarama-qarshi oriyentatsiyaga o’zgaradi.

13§.Birinchi bob bo'yicha oraliq nazorat uchun topshiriqlar namunalari

Variant № 1

1. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ tenglikni isbotlang.

2. Berilgan $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ vektorlar uchun $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=-5$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=-11$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=20$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorni toping.

3. Uchburchakning $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ va $C(3;-2;1)$ uchlari berilgan. Uning B uchidagi burchagini toping.

Variant № 2

1. $(\alpha+\mu)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\mu\vec{a}$ tenglikni isbotlang.

2. Uchburchakning $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$ va $C(1;-2;1)$ uchlari berilgan. A uchining tashqi burchagini toping.

3. Berilgan $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelipiped hajmini toping.

Variant № 3

1. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ tenglikni isbotlang.

2. Berilgan $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchunn α ning qiymati qanday bo'lishi kerak .

3. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi φ burchak $\frac{\pi}{6}$ ga tengligi va $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarga

qurilgan parallelogram yuzasi topilsin topilsin.

Variant № 4

1. $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ tenglikni isbotlang.

2. Uchburchakning $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ va $C(3;-2;1)$ uchlari berilgan.

Uning B uchidagi tashqi burchagini toping.

3.O'ng uchlik tushunchasini keltiring.

Variant № 5

1. Ikkita nokollinear vektorlarning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.

2. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi φ burchak $\frac{\pi}{6}$ ga tengligi va $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak topilsin.

3.Chap uchlik tushunchasini keltiring

Variant № 6

1. Uchta nokollinear vektorlarning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.

2. . $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzini toping.

3.Vektor ko'paytmaning ta'rifini keltiring.

Variant № 7

1. Bazis va koordinatalar. Dekart koordinatalar sistemasi.

2.Berilgan $\vec{a}=\{1,0\},\vec{b}=\{1,1\}$ vektorlar orqali $\vec{c}=\{-1,0\}$vektorni chiziqli ifodalang.

3. Aralash ko'paytmani aniqlang.

Variant № 8

1. Skalyar ko'paytmaning dekart koordinatalardagi ifodasi keltirib chiqaring.

2. Uchburchakning $A(3;4;-1)$, $B(2;0;3)$ va $C(-3;5;4)$ uchlari berilgan. Uchburchakning yuzi hisoblansin.

3. Berilgan $\overline{a}=\{2,-1,3\}$, $\overline{b}=\{1,4,2\}$ vektorlarning vector ko'paytmasini toping.

Variant № 9

1.Vektor ko'paytmaning dekart koordinatalardagi ifodasini keltirib chiqaring.

2. Fazoda $M(-5;7;-6)$ va $N(7;-9;9)$ nuqtalar berilgan.Berilgan $\vec{a}=\{1;-3;1\}$ vektorning $\overrightarrow{MN}$ vektor yo'nalishdagi o'qqa proeksiyasini toping.

3. Berilgan $\overline{a}=\{2,-1,3\}$, $\overline{b}=\{1,4,2\}$ vektorlarning kollinyar bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlang.

Variant № 10

1. Aralash ko'paytmaning dekart koordinatalardagi ifodasini keltirib chiqaring.

2. Uchlari $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$,$C(3;2;-1)$,$D(4;1;3)$ nuqtalarda bo'lgan tetraedr hajmi hisoblansin.

3. Berilgan $\overline{a}=\{2,-1,3\}$, $\overline{b}=\{1,4,2\}$, $\overline{c}=\{3,1,-1\}$ vektorlarning komplanar bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlang.

Variant № 11

1.Skalyar ko'paytmaning xossalarini keltiring.

2. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi φ burchak $\frac{\pi}{6}$ ga tengligi va $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorlari orasidagi burchak topilsin.

3. Berilgan $\overline{a} = \{2, -1, 3\}$, $\overline{b} = \{1, 4, 2\}$, $\overline{c} = \{3, 1, -1\}$ vektorlarga qurilgan parallellopipedning hajmini toping.

Variant № 12

1.To'g'ri chiziqda koordinatalar sistemasini kiriting.

2. Berilgan $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchunn α ning qiymati qanday bo'lishi kerak .

3. Berilgan $\overline{a} = \{2, -1, 3\}$, $\overline{b} = \{1, 4, 2\}$, $\overline{c} = \{3, 1, -1\}$ vektorlarning o'ng yoki chap uchlik hosil qilshini aniqlang.

Variant № 13

1.Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini kiriting.

2. Uchlari $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$ nuqtalarda bo'lgan tetraedr balandligi hisoblansin.

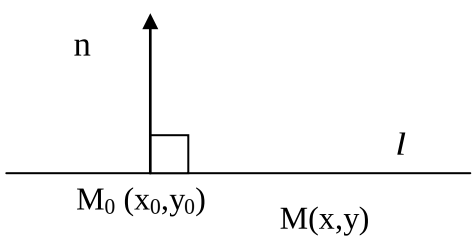
3. Berilgan $\overline{a} = \{2, -1, 3\}$, $\overline{b} = \{1, 4, 2\}$, $\overline{c} = \{3, 1, -1\}$ vektorlarning bir tekislikga parallel bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlang.

II BOB

TO'G'RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

1§. Tekislikda to'g'ri chiziqlar

1.To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi



Chizma-21

Tekislikda Oxy Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsin.Agar tekislikda biror ℓ to'gri chiziq berilgan bo'lsa, unda yotgan nuqtalar koordinatalari birinchi darajali $Ax+By+C=0$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.Tekislikda yangi $O'x'y'$ koordinatalar sistemasini shunday kiritamizki ℓ to'gri chiziq abtsissa o'qi bilan ustma-ust tushsin.Yangi $O'x'y'$ koordinatalar sistemasida ℓ to'gri chiziqdagi nuqtalarning koordinatalari $y'=0$ tenglamani qanoatlantiradi.Biz $O'x'y'$ koordinatalar sistemasidan eski Oxy koordinatalar sistemasiga o'tsak yuqoridagi tenglama $Ax+By+C=0$ ko'rinishga ega bo'ladi.Bu yerda koeffisientlar quyidagi munosabatni qanoatlantiradi: $A^2+B^2>0$

Teskari masala qo'yamiz, ya'ni berilgan tenglamaga $Ax+By+C=0$ ko'ra to'gri chiziqni aniqlaymiz.

Koordinatalari $Ax+By+C=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi $M(x_{0,}y_0)$ nuqtani olamiz.Agar ℓ bilan $M(x_{0,}y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\bar{n}=\{A,B\}$ vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziqni belgilasak, $M(x,y)$ nuqta ℓ to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun $\overline{M_0M}$ vektor $\bar{n}=\{A,B\}$vektorga ortogonal bo'lishi zarur va etarlidir.Ortogonallik shartini skalyar ko'paytma orqali yozsak

$$A x + By + C = 0, \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglama to’g’ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.Agar (1) tenglamada $A = 0$ bo’lsa, (1) tenglama Ox o’qiga parallel to’g’ri chiziqni, $B = 0$ va $C = 0$ bo’lgan hollarda mos ravishda Oy o’qiga parallel va koordinata boshidan o’tuvchi to’g’ri chiziqlarni olamiz.

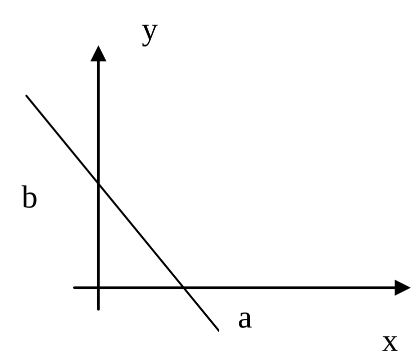
Bizga berilgan (1) tenglamaning hamma koeffisientlari noldan farqli bo’lsa, tenglamani

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1 \qquad (2)$$

ko’rinishda yozib va $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$ belgilashlar kiritib, uni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

ko’rinishga keltiramiz. Bu tenglama to’g’ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deyiladi.Bu holda to’g’ri chiziq koordinata boshidan o’tmaydi va koordinata o’qlaridan kattaliklari mos ravishda a va b larga teng bo’lgan kesmalarni ajratadi.Bu tenglama to’g’ri chiziqni chizish uchun qulaydir.



Chizma-22

2§. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

To'g'ri chiziqqa parallel har qanday vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.Agar to'g'ri chiziqning bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektori berilgan bo'lsa,uning tenglamasini tuzish masalasini qaraylik.Agar $\bar{a}=\{\ell,m\}$ yo'naltiruvchi vektor bo'lib, $M(x_0,y_0)$nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsa, to'g'ri chiziqning har bir $M(x,y)$ nuqtasi uchun $\overline{M_0M}$ vektor $\bar{a}=\{\ell,m\}$ vektorga kollinear bo'lishi kerak.Kollinearlik shartini yozsak quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m} \qquad (4)$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Yuqoridagi (4) tenglamaning o'ng va chap tomonlarini t bilan belgilasak quyidagi parametrik tenglamalarni olamiz:

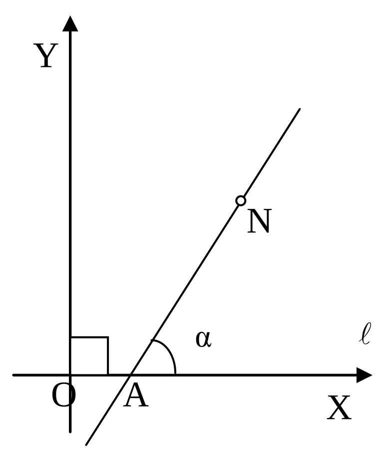
$$x=x_0+\ell t, \quad y=y_0+mt$$

Agar abssissa o'qiga parallel bo'lmagan L to'g'ri chiziq OX o'qini A nuqtada kesib o'tsa,abssissa o'qi bilan to'g'ri chiziq orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.Burchak φ yagona ravishda tanlanishi uchun to'g'ri chiziqning birorta yo'naltiruvchi $\bar{a}=\{\ell,m\}$vektorini tanlab burchakni OX o'qidan yo'naltiruvchi vektorga soat mili yo'nalishiga qarshi yo'nalishda hisoblaymiz.Bu burchakning tangensini k bilan belgilasak

$$k=\frac{m}{l}$$

tenglikni hosil qilamiz.To'g'ri chiziqning birorta $M(x_0,y_0)$ nuqtasini bilsak,uning tenglamasini

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (5)$$



Chizma-23

ko'rinishda yoza olamiz. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz. Agar L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ va } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchak ularning $\overline{n_1} = \{A_1, B_1\}$, $\overline{n_2} = \{A_2, B_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakga tengdir. Vektorlar orasidagi burchak bizga ma'lum bo'lgan

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{6}$$

formula bilan hisoblanadi. Agar L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \quad \text{va} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} \tag{7}$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning yo'naltiruvchi $a_1 = \{l_1, m_1\}$ va $a_2 = \{l_2, m_2\}$ vektorlari orasidagi burchakka tengdir.Bu holda ham to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak skalyar ko'paytma yordamida

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \tag{8}$$

formula bilan hisoblanadi. To'g'ri chiziqlarning parallel yoki perpendikulyar bo'lishi mos ravishda ularning normal vektorlari (agar ular (5) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa) yoki yo'naltiruvchi vektorlarning (agar ular (7) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa) parallel yoki perpendikulyar bo'lishiga ekvivalentdir. Shuning uchun

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ va } A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

tengliklar to'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlaridir.

Mustaqil ish-1. Agar to'g'ri chiziqlar (7) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning parallel yoki perpendikulyar bo'lishi shartlarini yozing.

To'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$y = k_1 x + b_1 \text{ va } y = k_2 x + b_2 \qquad (9)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lca, ularning abssissa o'qi bilan hosil qilgan burchaklarini α_1 va α_2 bilan belgilasak, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak φ uchun

$$\varphi = \alpha \quad - \alpha_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (10)$$

formula orqali

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

munosabatni hosil qilamiz.

Mustaqil ish-2. To'g'ri chiziqlar (9) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular uchun paralellik va perpendikulyarlik shartlarini yozing.

3§ Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa

Bizga l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, koordinata boshidan o'tuvchi va l to'g'ri chiziqga perpendikulyar to'g'ri chiziqni L bilan, ularning kesishish nuqtasini M_0 bilan belgilaymiz. Agar $\bar{n}$ bilan L to'g'ri chiziqning birlik yo'naltiruvchi vektorini belgilasak , u

$$\bar{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}$$

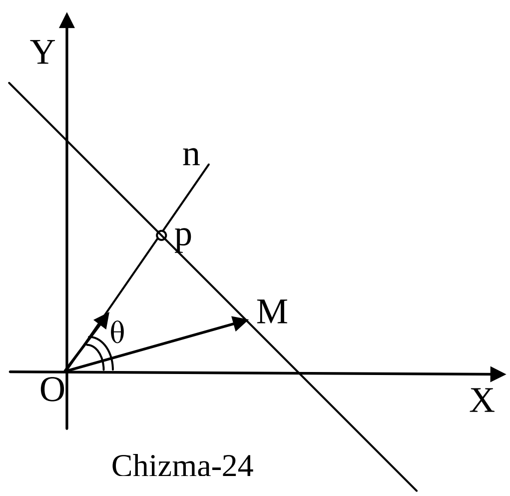
ko'rinishga ega bo'ladi.

Tekislikning $M(x,y)$ nuqtasi l to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun $\overline{OM}$ vektorning L to'g'ri chiziqqa proeksiyasi $\overline{OM_0}$ vektorning uzunligiga teng bo'lishi zarur va etarlidir. Agar $\overline{OM_0}$ vektorning uzunligini p bilan belgilasak

$$np_{\bar{n}}\overline{OM}=p$$

tenglikni hosil qilamiz. Proeksiyani skalyar ko'paytma orqali ifodalash natijasida biz

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$$



Chizma-24

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

Agar $M(x,y)$ nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, N_0 bilan $M(x,y)$ nuqtaning L to'g'ri chiziqdagi proeksiyasini belgilasak, $\overline{M_0N_0}$ kesma kattaligi uchun quyidagi $M_0N_0=ON_0-OM_0=ON_0-p$ tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $ON_0=np_{\bar{n}}OM$ bo'lganligi uchun

$$M_0N_0=x\cos\theta+y\sin\theta-p$$

formula M_0N_0 kattalikni hisoblash imkonini beradi. Bu kattalik $M(x,y)$ nuqtaning l to'g'ri chiziqdan chetlashishi deyiladi. Chetlashishning absolyut qiymati $M(x,y)$ nuqtadan l to'g'ri chiziqga bo'lgan masofaga tengdir.Demak nuqtadan to'g'ri qiziqgacha bo'lgan masofani hisoblash uchun to'g'ri chiziq tenglamasini normal ko'rinishga keltirish keyin esa nuqta koordinatalarini normal tenglamaning chap tomonidagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'yish etarlidir.

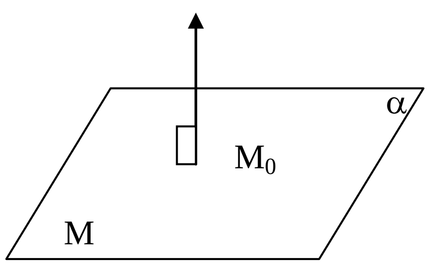
To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltirish uchun uning ikkala tarafini

$$t = \mp \frac{1}{\sqrt{A^2 + B_2}}$$

ifodaga koʹpaytirish zarur boʹladi. Bu yerda $tC = -p$ tenglik bajarilishi kerak. Shuning uchun t ifodaning ishorasi C ning ishorasiga qarama–qarshi boʹlishi lozimdir.

4§. Fazoda tekislik va to'gri chiziq tenglamalari

4.1 Tekislikning umumiy tenglamasi



Chizma-25

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan va unda α tekislik berilgan bo'lsin. Bu tekislikka tegishli nuqtalar koordinatalari birinchi darajali chiziqli tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.Tekislikka tegishli $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani olib, α tekislikka perpendikulyar birorta vektorni $\bar{n}$ bilan belgilasak, $M(x, y, z)$ nuqta α tekislikka tegishli bo'lishi uchun $\overline{M_0M}$ vektorning $\bar{n}$ vektorga perpendikulyar bo'lishiga teng kuchlidir.Demak $M(x, y, z)$ nuqtaning koordinatalari

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0$$

tenglamani qanoatlantirishi kerak.Agar D= Ax_0+ By_0+Cz_0 belgilashni kiritsak

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

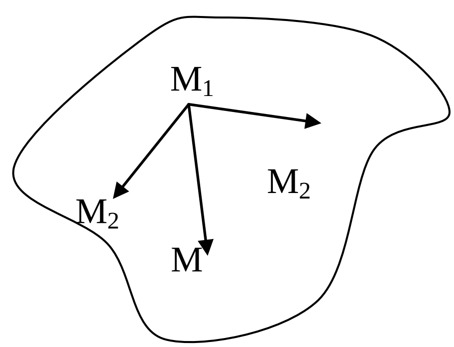
tenglamani hosil qilamiz.

Teskari masala qo'yamiz: $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama berilgan bo'lsa, koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami tekislikni hosil qilishini ko'rsatamiz. Koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi birorta $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani olib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\bar{n} = \{A, B, C\}$ vektorga perpendikulyar tekislikni α bilan belgilasak, bu tekislikdagi nuqtalarning koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantirishini ko'ramiz.Va aksincha, koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning har biri α tekislikga tegishlidir.

4.2 Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lsa,ulardan o'tuvchi α tekislik tenglamasini tuzaylik.Fazoning $M(x, y, z)$ nuqtasi α tekislikka tegishli bo'lishi M_1M, M_1M_2, M_1M_3 vektorlarlarning komplanar bo'lishiga teng kuchlidir.Bu vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishini koordinatalar orqali yozsak

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Chizma-26

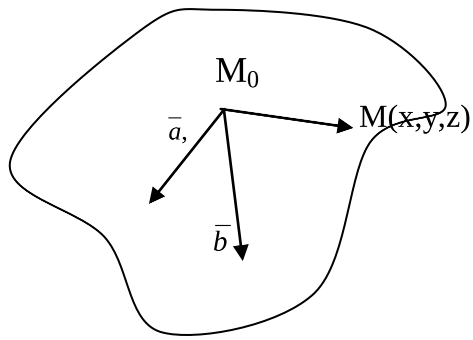
tenglamani hosil qilamiz.

4.3 Berilgan nuqtadan o'tuvchi va ikki vektorga parallel tekislik tenglamasi

Bizga fazoda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va nokollinear $\overline{a},\overline{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin.Berilgan nuqtadan o'tuvchi va $\overline{a},\overline{b}$ vektorlarga parallel α tekislik tenglamasini tuzaylik.Bu holda $M(x,y,z)$ nuqta α tekislikka tegishli bo'lishi uchun $\overline{M_0M}$, $\overline{a},\overline{b}$ vektorlarning komplanar bo'lishi zarur va etarlidir.

Agar $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ bo'lsa,aralash ko'paytmani koordinatalar orqali yozsak

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$



Chizma-27

tenglamani hosil qilamiz.

4.4 Ikki tekislikning o'zaro vaziyati

Bizga dekart koordinatalari kiritilgan fazoda α va β ikkita tekislik-larmos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin :

$$\alpha: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \beta: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

Bu tekisliklar orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir.Ularning $\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakning kosinusini

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formula buyicha xisoblashni bilamiz.Tekisliklarning parallellik sharti ularning vektorlari paralleligiga teng kuchlidir.SHuning uchun bu shart

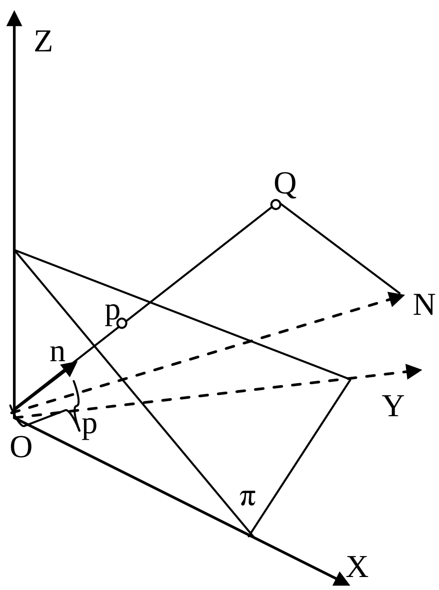
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ko’rinishda yoziladi.Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti ularning normal vektorlari perpendikulyarligiga teng kuchli va

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

ko’rinishda yoziladi.

5 §. Nuqtadan tekislikkacha bo’lgan masofani hisoblash



Chizma-27

Fazoda α tekislik berilgan bulsa,koordinata boshidan bu tekislikka perpendikulyar ℓ to’g’ri chiziq utkazamiz va bu to’g’ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini M_0 bilan belgilaymiz.To’g’ri chiziqning $\overline{OM_0}$ vektorga parallel yo’naltiruvchi birlik $\bar{e}$ vektorini

$$\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

ko’rinishda yozishimiz mumkin.Bu yerda $\bar{e}$ vektorning koordinata o’qlari bilan hosil qilgan burchaklari mos ravishda α, β, γ harflari bilan belgilangan.Agar M_0 nuqta koordinata boshi bilan ustma ust tushsa, $\bar{e}$ vektor sifatida ℓ to’g’ri chiziqqa parallel ixtiyoriy vektorni olish mumkin.Bu vektorning tanlanishi ℓ to’g’ri chiziqda yo’nalishni aniqlaydi va ℓ to’g’ri chiziqni o’qqa aylanadi. Fazoning $M(x, y, z)$ nuqtasi α tekislikka tegishli bo’lishi uchun $\overline{OM}$ vektorning ℓ o’qqa proeksiyasi $\overline{OM_0}$ vektor uzunligiga teng bo’lishi lozimdir.Demak

$$np_{\bar{e}}\overline{OM} = p$$

tenglik o’rinli bo’ladi.Bu yerda p- koordinata boshidan α tekislikkacha bo’lgan masofa).Bu tenglikda $\bar{e}$ vektorning birlik vektor ekanligini hisobga olib,tenglikni

$$np_{\bar{e}}\overline{OM} = \left(\bar{e},\overline{OM}\right)$$

ko’rinishda yozamiz.Skalyar kupaytmani koordinatalar orqali ifodalasak,yuqoridagi tenglik

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

ko’rinishga keladi.Bu tenglama tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Bu tenglama yordamida berilgan $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan α tekislikgacha bo’lgan masofani hisoblash mumkin.Berilgan $M(x_0, y_0, z_0)$nuqtadan α tekislikgacha bo’lgan masofani d bilan , $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning ℓ o’qdagi proeksiyasini N bilan belgilasak , yo’nalishga ega bo’lgan $\overrightarrow{M_0N}$ kesmaning kattaligi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning α tekislikdan chetlanishi deyiladi.Bu chetlashishni δ
bilan belgilasak

$$\delta = M_0N = ON - OM_0$$

tenglik o’rinli bo’ladi.Bu yerda $p = OM_0$ tenglikni hisobga olsak

$$\delta = ON - p$$

tenglikni hosil qilamiz.Bu tenglikda $\overline{OM}$ vektorning ON proyektsiyasini
skalyar ko’paytma orqali yozsak

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$$

formulani olamiz.Bundan esa d uchun

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

formulani topamiz.

Biz oldingi paragraflarda tekislikda nuqtadan to’g’ri chiziqqacha masofa formulasini ham keltirgan edik.To’g’ri chiziq va tekislik tenglamalarini vektor ko’rinishda yozib biz ikkita formulani bitta formula ko'rinishida yozishimiz ham mumkin.Haqiqatan tekislikning (to'g'ri chiziqning) normal vektorini $\overline{n}=\{A,B,C\}$ (to'gri chiziq uchun $\overline{n}=\{A,B\}$) ko'rinishda ,tekislikka tegishli (to'g'ri chiziqqa tegishli) nuqta radius vektorini r_0 bilan belgilasak, tekislik (to'g'ri chiziq) tenglamasini

$$\left(\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{n}\right)=0$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.Radius –vektori $\overline{r_1}$ bo'lgan $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan tekislikkacha (to'g'ri chiziqqacha) bo'lgan masofa skalyar ko'paytmaning moduliga tengdir:

$$d=\left|\left(\overline{r_1}-\overline{r_0},\quad \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|}\right)\right|.$$

6§. Fazoda to'gri chiziq tenglamalari

Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoda bizga ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'sa, $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ vektor ℓ to'gri chiziqqa parallel vektorlardan bittasi bo'lsin, $M(x_0,y_0,z_0)$ esa to'gri chiziqqa tegishli birorta nuqta bo'lsin.Berilgan $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtaning radius−vektorini r_0 bilan belgilasak, fazoda radius-vektori $\overline{r}$ bo'lgan $M(x,y,z)$ nuqtaning to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi $\overline{r}-\overline{r_0}$ va $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ vektorlarning parallelligiga teng kuchlidir.Bu shartni

$$\overline{r}=\overline{r_0}+\overline{a}t \qquad (1)$$

ko'rinishda yozib,to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi tenglamasini olamiz..Bu yerda t parametr $-\infty$ dan ∞ gacha o'zgarganda $\overline{r}$ vektor oxiri ℓ to'g'ri chiziq nuqtalarini hosil qiladi.Yuqoridagi tenglamani koordinatalar orqali yozsak

$$x = x_0 + a_1 t \quad , y = y_0 + a_2 t \quad , z = z_0 + a_3 t$$

tengliklarni hosil qilamiz.Bu tenglamalar to'g'ri chiziqning parametric tenglamalari deyiladi.Agar bu tenglamalardan t ni yo'qotsak

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (2)$$

tenglama kelib chiqadi.Bu tenglama ℓ to'gri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

6.1 Ikki nuqtadan o'tuvchi to'gri chiziq tenglamasi

Fazoda radius-vektorlari $\overline{r_1}, \overline{r_2}$ bo'lgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, bu nuqtalardan o'tgan ℓ to'g'ri chiziq uchun $\overline{r_2} - \overline{r_1}$ vektor yo'naltiruvchi vektor bo'ladi.Yuqoridagi (1) tenglamadagi vektor o'rniga $\overline{r_2} - \overline{r_1}$ vektorni qo'ysak, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta sifatida $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtani olsak ℓ to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi parametrik tenglamasini

$$\overline{r} = \underline{\overline{r_1} + \left(\overline{r_2} - \overline{r_1}\right)t} \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin.Agar (3) tenglamada t parametrni yo'qotib uni koordinatflar orqali yozsak ℓ to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4)$$

ko'rinishda hosil qilamiz.

6.2 To'g'ri chiziq ikkita tekislikning umumiy qismidir

Bizga ℓ to'gri chiziq kanonik

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

tenglama yordamida berilgan bo’lsin.Bu tenglamadan quyidagi ikkita tenglamalarni hosil qilamiz

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}\quad , \quad \frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3} \qquad (5)$$

Bu tenglamalarni

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0 \quad , \quad a_3(y-y_0)-a_2(z-z_0)=0$$

ko’rinishda yozsak ℓ to’gri chiziq

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0 \text{ va } a_3(y-y_0)-a_2(z-z_0)=0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi tekisliklarning kesishishidan iborat bo’lishini ko’ramiz.Agar bizga ikkita α va β tekisliklar

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ va } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

tenglamalar bilan berilib

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

matrisaning rangi 2ga teng bo’lsa,ular parallel bo’lmaydi va birorta ℓ to’g’ri chiziq bo’ylab kesishadi .Bu to’g’ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun uning birorta nuqtasini va bitta yo’naltiruvchi vektorini bilishimiz etarli.Biz koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiruvi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani topib, ℓ to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori sifatida $\overline{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\overline{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ vektorlarning vektor ko’paytmasini olamiz,chunki bu vektor ko’paytma ℓ to’g’ri chiziqqa parallеldir.

7§. Fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash

Bizga fazoda ℓ to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta berilgan bo'lsin.Biz bilamizki to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orqali bitta tekislik o'tkazish mumkin.Tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblashni oldingi paragraflarda o'rgangan edik.Buning uchun biz to'g'ri chiziqning tekislikdagi tenglamasini va nuqtaning tekislikdagi koordinatalarini bilishimiz kerak.Lekin bu ish har doim qulay bo'lmaganlini uchun biz bevosita ℓ to'g'ri chiziqning

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t$$

tenglamasidan foydalanmokchimiz.Bizga to'g'ri chiziqning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va uning yo'naltiruvchi $\bar{a}$ vektori ma'lum. Agar N nuqta ℓ to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va N nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq ℓ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va N nuqtalar orasidagi masofa $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofadir.Biz $\overline{NM_1}$ vektorni

$$\overline{NM_1} = d\bar{e}_1$$

ko'rinishda yoza olamiz.Bu yerda $d = |NM_1|$, $\bar{e}_1$ esa $\overline{NM_1}$ vektor bilan bir xil yo'nalishga ega bo'lgan birlik vektordir.Xuddi shunday $\bar{a}$ vektorni

$$\bar{a} = |\bar{a}|\bar{e}_2$$

ko'rinishda yozib, $\overline{NM_1}$ va $\bar{a}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi uchun

$$\left[\overline{NM_1}, \bar{a}\right] = d|\bar{a}|\left[\bar{e}_1, \bar{e}_2\right]$$

tenglikni olamiz.Bu tenglikdan

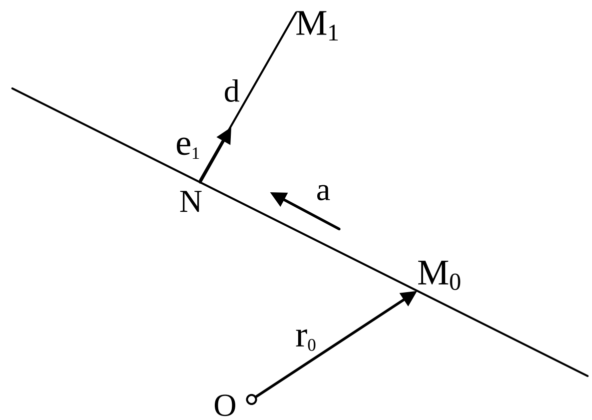
$$d = \frac{\left|\left[\overline{NM_1}, \bar{a}\right]\right|}{|\bar{a}|}$$

formulani hosil qilamiz.Lekin bu formulada N nuqta koordinatalari noma'lum bo'lganligi uchun biz undan bevosita foydalana olmaymiz.Lekin chizmadan kurinib turibdiki,biz $\overline{NM_1}$ vektorni

$$\overline{NM_1} = \overline{r_1} - (\overline{r_0} + \overline{a}t_1)$$

ko'rinishda yoza olamiz.Bu yerda t_1-parametrning N nuqtaga mos keluvchi qiymatidir.Endi bu ifodani yo'qoridagi formulaga qo'yib va $\overline{a}t_1, \overline{a}$ vektorlarning vektor kupaytmasi nol' vektor ekanligini hisobga olsak

$$d = \frac{\left|\left[\overline{r_1} - \overline{r_0}, \overline{a}\right]\right|}{\left|\overline{a}\right|}$$



Chizma-28

formulani olamiz.Bu formulani koordinatalar orqali yozsak, u

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

ko'rinishga keladi.

8§. To'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati

Bizga ikkita ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad \text{va} \quad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$$

kanonik tenglamalar yordamida berilgan bo’lsin.Bu tenglamalarni vektor ko’rinishda yozsak ular

$$\overline{r} = \overline{r_1} + \overline{a}t \qquad \text{va} \qquad \overline{r} = \overline{r_2} + \overline{a}s$$

ko’rinishlarga keladi.

Parallellik.Bu to’g’ri chiziqlar bir tekislikda yotib kesishmasa ular parallel to’g’ri chiziqlar deyiladi.Agar biz uchta $\overline{r_2} - \overline{r_1} = \overline{M_1 M_2}$, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarning bir tekislikda yotishi shartini yozsak

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz.To’g’ri chiziqlar parallel bo’lmaganligi uchun $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar o’zaro kollinear emas.

Ayqash to’g’ri chiziqlar . To’g’ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa ular ayqash to’g’ri chiziqlar deyiladi.Bu holda $\overline{r_2} - \overline{r_1} = \overline{M_1 M_2}$, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar komplanar bo’lmaganligi uchun

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tengsizlik o’rinli bo’ladi.

Agar to’g’ri chiziqlar kesishsa $\overline{r_2} - \overline{r_1} = \overline{M_1 M_2}$, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar komplanar bo’ladi,

$\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar esa kollinear emas.

9 §. Ikkita ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

Biz ikkita

$$\overline{r} = \overline{r_1} + \overline{a}t \qquad \text{va} \qquad \overline{r} = \overline{r_2} + \overline{b}s$$

tenglamalar bilan berilgan ℓ_1, ℓ_2 ayqash to'g'ri chiziqlar orsadagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqarmoqchimiz.Ikkita ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

$$d = \inf d(A, B), A \in \ell_1, B \in \ell_2$$

formula bo'yicha aniqlanadi.Bu yerda** $d(A,B)$**- A va B nuqtalar orasidagi masofadir.Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa ular orasidagi masofa nolga teng bo'ladi.Parallel ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani hisoblash uchun bitta $A \in \ell_1$ no'qtani olib undan ℓ_2 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash etarlidir.To'g'ri chiziqlar ayqash bo'lgan holda biz avvalo mos ravishda ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lgan A_0 va B_0 nuqtalar mavjud bo'lib,bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar ekanligini ko'rsatamiz.Buning uchun biz $\overline{A_0B_0}$ vektorni

$$\overline{A_0B_0} = (\overline{r_2} + \overline{b}s_0) - (\overline{r_1} + \overline{a}t_0)$$

ko'rinishda yozib, uning $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarga perpendikulyarlik shartlarini yozamiz.Bu shartlarni skalyar ko'paytma orqali yozsak,ular

$$\left(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{a}\right) + \left(\overline{a}, \overline{b}\right)s_0 - \left(\overline{a}, \overline{a}\right)t_0 = 0 \qquad (5)$$

$$\left(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{b}\right) + \left(\overline{b}, \overline{b}\right)s_0 - \left(\overline{a}, \overline{b}\right)t_0 = 0$$

ko'rinishga keladi.Bu tengliklar s_0, t_0 noma'lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasidan iboratdir.Bu sistemaning asosiy determinanti Δ noldan farqli,chunki

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\bar{a},\bar{a}) & (\bar{a},\bar{b}) \\ (\bar{a},\bar{b}) & (\bar{b},\bar{b}) \end{vmatrix} = [\bar{a},\bar{b}]^2 > 0$$

munosabat o'rinlidir.Demak (5) sistema yagona echimga ega,ya'ni (A_0, B_0) juftlik yagonadir.Endi A_0B_0 kesma uzunligi to'g'ri chiziqlar orasidagi masofaga tengligini ko'rsatamiz.Buning uchun mos ravishda ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli va radius –vektorlari

$$\bar{r_1} + \bar{a}t \quad , \bar{r_2} + \bar{b}s$$

vektorlardan iborat A, B nuqtalar uchun

$$|AB| \geq |A_0B_0|$$

tengsizlikni isbotlaymiz.

Bu tengsizlikni isbotlash uchun $\overline{AB}$ vektorni

$$\overline{AB} = (\bar{r_2} - \bar{r_1}) + (\bar{b}s - \bar{a}t) = (\bar{r_2} - \bar{r_1} + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0) + (s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}$$

ko'rinishda yozamiz.Bu ifodada

$$\overline{A_0B_0} = \bar{r_2} - \bar{r_1} + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0$$

tenglik o'rinli.Ikkita o'zaro perpendikulyar $\bar{p}, \quad \bar{q}$ vektorlar uchun

$$(\bar{p} + \bar{q})^2 = \bar{p}^2 + \bar{q}^2$$

tenglik o'rinlidir.Bu tenglik umumlashgan Pifagor teoremasi deyiladi.

Bu tenglikni

$$\bar{p} = \overline{A_0B_0} \ , \quad \bar{q} = (s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}$$

vektorlar uchun yozsak

$$\overline{AB}^2 = (\bar{r_2} - \bar{r_1} + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0)^2 + [(s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}]^2$$

tenglikni olamiz.Bu tenglikdan esa

$$\overline{AB}^2 \geq \left(\overline{r_2} - \overline{r_1} + \overline{b}s_0 - \overline{a}\,t_0\right)^2 = \overline{A_0B_0}^{\;2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Endi A_0B_0 kesma uzunligini hisoblash uchun formula keltirib chiqaramiz.Shu maqsadda $\overline{A_0B_0}, \overline{a}, \overline{b}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini tekshiramiz.Aralash ko'paytma moduli uchun

$$\left|\overline{A_0B_0}\;\overline{a}\;\overline{b}\;\right| = \left|A_0B_0\right|\left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right|$$

tenglik o'rinli ekanligini bilamiz.Bundan esa

$$d = \left|A_0B_0\right| = \frac{\left|\overline{A_0B_0}\;\overline{a}\,\overline{b}\right|}{\left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right|}$$

munosabatni olamiz. Aralash ko'paytmadagi $\overline{A_0B_0}$ vektorni

$$\overline{A_0B_0} = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_0}$$

ko'rinishda yozamiz.Bu yerda $A_1 \in \ell_1, A_2 \in \ell_2$ va $\overline{OA_1} = \overline{r_1}, \overline{OA_2} = \overline{r_2}$ .Shuning uchun $\overline{A_0A_1}$ vektor $\overline{a}$ vektorga, $\overline{B_0B_1}$ vektor esa $\overline{b}$ vektorga paralleldir.Bularni hisobga olsak

$$d = \frac{\left|\overline{A_1B_1}\;\overline{a}\,\overline{b}\right|}{\left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right|}$$

formula kelib chiqadi.Bu formulani koordinatalar yordamida yozsak ,u

$$d = \frac{abs\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}}$$

ko'rinishga keladi.

Mustaqil ish uchun topshiriq. Berilgan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik berilgan $\overline{CE}$ kesmani kesishi shartini yozing.

10 §. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyati

Bizga ℓ to’g’ri chiziq

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

tenglama bilan, tekislik

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tenglama bilan berilgan bo’lsa, ularning tenglamalari bo’yicha o’zaro vaziyatini aniqlamoqchimiz.

Tekislik va to’g’ri chiziq orasidagi burchak to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori va tekislik normal vektori orasidagi burchakning $\frac{\pi}{2}$ gacha bo’lgan to’ldiruvchisiga tengdir,ya’ni agar $\bar{a}=\{a_1, a_{2,}\, a_3\}$ va $\bar{n}=\{A, B, C\}$ vektorlar orasidagi burchak ψ ga teng bo’lsa,tekislik va to’g’ri chiziq orasidagi φ burchak $\frac{\pi}{2}-\psi$ ga tengdir.Bu burchak

$$\sin\varphi=\frac{Aa_1+Ba_2+Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

formula bo’yicha hisoblanadi. Tekislik va to’g’ri chiziqning paralellik sharti

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$$

tenglikga, perpendikulyarlik sharti esa

$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}$$

munosabatga teng kuchlidir.

Agar

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \quad \text{va} \qquad Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$$

tengliklar bajarilsa ℓ to’g’ri chiziq α tekislikda yotadi.

11 § Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1.Uchta tekislik

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa,ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

2.Ikkita parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa,ular hosil qilgan burchakning bissektrisalari tenglamalarini tuzing.

3.Berilgan $M(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $y=k\,x+b$ to'g'ri chiziq bilan ma'lum φ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

4. Uchta to'g'ri chiziq

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa,ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

5.Ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo’lsa,ular hosil qilgan ikki yoqli burchaklar uchun bissektorial tekisliklar tenglamalarini tuzing.

6. Ikkita parallel bo’lmagan tekisliklar

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo’lsa,berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ **va** $M_2(x_2, y_2, z_2)$ **nuqtalarning tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.**

7.Berilgan tekislikning berilgan kesmani kesishi shartini yozing.

8.Ikkita parallel bo’lmagan to’g’ri chiziqlar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo’lsa, koordinata boshi va berilgan $M_1(x_1, y_1)$ **nuqtaning to’g’ri chiziqlar hosil qilgan burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.**

9. Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ **nuqtadan o’tuvchi va** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ **tekislikka perpendikulyar to’g’ri chiziqning tenglamasini yozing.**

10. To’g’ri chiziq $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$ **tenglama bilan berilgan bo’lsa, bu to’g’ri chiziq va unga tegishli bo’lmagan** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ **nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasini yozing.**

11. Affin koordinatalar sistemasini aniqlovchi bazis vektorlari orasidagi burchak $\frac{\pi}{3}$ **ga teng bo’lsa,**

$$4x-5y+7=0 \quad \textbf{va} \quad 9x+4y-11=0$$

tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

12. Affin koordinatalar sistemasi o'qlari orsasidagi burchak $\frac{\pi}{3}$ **ga**

teng bo'lsa,uchlari $A(-1,2)$**,** $B(1,1)$ **,** $C\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ **nuqtalarda bo'lgan**

uchburchakning AB **tomoni va** C **uchidan tushirilgan medianasi orsaidagi**

burchakni toping.

13.Quyidagi uchta to'g'ri chiziq bitta nuqtada kesishadimi?

$$3x-y-1=0\ ,2x-y+3=0\ ,x-y+7=0$$

14. Ikkita to'g'ri chiziq

$$x-3y+10=0,$$

$$2x+y-8=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi qismi $P(0,1)$ **nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.**

15. Uchburchak tomonlari

$$2x-y+3=0,\ x+5y-7=0 \quad \textbf{va} \quad 3x-2y+6=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, uning balandliklari tenglamalarini tuzing.

16.To'rtburchak tomonlari

$$x-y=0,\ x+3y=0,\ x-y-4=0,\ 3x+y-12=0$$

tenglamalari bilan berilgan.To'rtburchak diagonallari tenglamalarini tuzing.

17.Uchburchak tomonlari

$$2x-5y-2=0 \quad x+y-8=0 \quad , \; 5x-2y-5=0$$

tenglamalar bilan berilgan.Uchburchak ichida shunday nuqta topingki, bu nuqta bilan uchburchak uchlarini tutashtiruvchi to’g’ri chiziqlar uchburchakni teng yuzali uchburchaklarga ajratsin.

18.To’g’ri chiziq

$$12x+5y-52=0$$

tenglama bilan berilgan bo’lsa,unga parallel va undan 2 birlik masofada bo’lgan to’g’ri chiziq tenglamasini tuzing.

19.Ikkita ayqash to’g’ri chiziq

$$\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1} \quad \textbf{va} \quad \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

tenglamalar bilan berilgan.Ularning umumiy perpendikulyari tenglamasi tuzilsin.

20. To’g’ri chiziq

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$$

tenglama bilan berilgan bo’lsa,unga koordinata boshidan tushirilgan perpendikulyar tenglamasini tuzing.

21. To’g’ri chiziq

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$$

tenglama bilan berilgan bo’lsa,unga $A(4,0,-1)$ **nuqtadan tushirilgan perpendikulyar tenglamasini tuzing.**

22.Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o’tuvchi va

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tekislikga perpendikulyar to’g’ri chiziq tenglamasini yozing.

23.Tomonlari

$$18x+6y-17=0,\ \ 14x-7y+15=0,\ \ 5x+10y-9=0$$

tenglamalar bilan berilgan uchburchakning burchaklarini toping.

24.Quyidagi to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping:

1) $8x-3y-1=0,\ \ 4x+y-13=0$

2) $3x+7y-15=0,\ 9x+21y-32=0$

3) $5x-2y+13=0,\ \ x+3y-11=0$

25.Quyidagi uchta to'g'ri chiziqlar bir nuqtadan o'tadimi?

1) $3x-y-1=0$,$2x-y+3=0, x-y+7=0$

2) $x+3y-1=0$,$5x+y-10=0$,$3x-5y-8=0$

3) $3x-y+6=0$,$4x-3y-5=0$,$2x-y+5=0.$

26.Uchburchak tomonlari

$x+2y+3=0$,$3x-7y+9=0$,$5x-3y-11=0$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning balandliklari kesishgan nuqtani toping.

27. To'rtburchak tomonlari

$$x+3y=0,\ \ x-y=0,\ \ \ x-y-4=0,\ \ 3x+y-12=0$$

tenglamalar bilan berilgan. To'rtburchakning diagonallari tenglamasini tuzing.

28. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{va} \quad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0 \end{cases}$$

29. Ushbu $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ va $\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziqlarga umumiy perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

30. Quyidagi to'g'ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasini toping.

1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ va $3x-3y+2z-5=0$

2) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ va $x+2y-4z+1=0$

3) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ va $3x-y+2z-5=0$

31.Berilgan $(3,1,-2)$ nuqtadan va

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$$

to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

32. Berilgan $A(4,-3,1)$ nuqtaning $x+2y-z-3=0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

33. Berilgan $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ to'g'ri chiziqning $x-y+3z+8=0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

34. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$ to'g'ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasini tuzing.

35. Berilgan to'g'ri chiziq berilgan tekislikda yotadimi?

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$, $4x+3y-z+3=0$

2) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$, $5x-8y-2z-1=0$

3) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$, $3x-2y-z-1=0$

36. Berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$, $4x+3y-z+3=0$

2) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$, $5x-8y-2z-1=0$

3) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$, $3x-2y-z-1=0$

37. Berilgan $A(4,-3,1)$ nuqtadan $x+2y-z-3=0$ tekislikgacha bo'lgan masofani toping.

38. Ushbu $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ va $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

39. To'g'ri chiziqlarning tenglamalarini kanonik ko'rinishga keltiring.

$$1)\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

40. To'rtburchak tomonlari

$$x+3y=0, \quad x-y=0, \quad x-y-4=0, \quad 3x+y-12=0$$

tenglamalar bilan berilgan. To'rtburchak burchaklari bissektrisalarining tenglamalarini tuzing.

41.To'g'ri to'rtburchakning uchta tomoni

$$x+y=0, \quad x-y=0, \quad x-y-4=0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning yuzasi 10 ga teng bo'lsa, to'rtburchakning to'rtinchi tomoni tenglamasini tuzing.

42.Uchburchak tomonlari

$$x+2y+3=0 \ ,3x-7y+9=0 \ ,5x-3y-11=0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning medianalari kesishgan nuqtani toping.

III BOB
IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR

1§. Parabolaning kanonik tenglamasi

Tekislikda biror dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi lozim.Bu shartni $a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2 > 0$ ko'rinishda yozish mumkin.

Ta'rif — 1. Tekislikda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli chiziq deyiladi.

Misollar.

Tekislikda koordinatalari $x^2 + y^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami faqat bitta nuqtadan iborat.

2) Tekislikda koordinatalari $x^2 - y^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkita to'g'ri chiziqdan iborat.

3) Tekislikda koordinatalari $xy - 1 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikki qismdan iborat va maktab kursidan ma'lumki, u giperbola deb ataldi.

Ta'rif — 2. Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini biror dekart koordinatalar sistemasida

$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u parabola deb ataladi. Tenglamadagi p soni parabola parametri deyiladi.

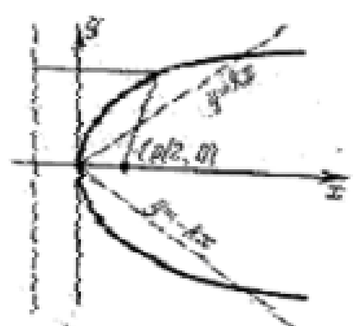
Misol. Siz maktab kursidan $y = x^2$ tenglama bilan berilgan parabolani yaxshi bilasiz. Bu tenglamani kanonik ko'rinishga keltirish uchun

$$x' = y, y' = x$$

almashtirish bajaramiz. Natijada $y'^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} x'$ tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $p = \frac{1}{2}$.

Mustaqil ish – 1. O'quvchiga tanish $y = ax^2 + bx + c$ *tenglama bilan berilgan parabolani chizing va tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.*

Biz ikkinchi tenglamani tekshirish yordamida parabolaning xossalarini o'rganamiz va uni chizamiz. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, agar (x, y) koordinatali nuqta parabolga tegishli bo'lsa, $(x, -y)$ nuqta ham parabolaga tegishli bo'ladi. Demak parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi parabolaga tegishli, x manfiy qiymatlarni qabul qilmaganligi uchun parabola Oy o'qining o'ng tomonida joylashgan. Bu mulohazalardan foydalanib biz chizmada parabolani quyidagi ko'rinishda tasvirlashimiz mumkin.



Chizma

Tekislikda $x+\frac{p}{2}=0$ tenglama bilan berilgan to'gri chiziq parabolaning direktisasi , $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta esa uning fokusi deb ataladi.

Parabola xossalari:

1^0 . Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan direktisagacha bo'lgan masofa fokusgacha bo'lgan masofaga tengdir.

Parabola nuqtasidan $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqtagacha bo'lgan masofani r bilan, direktisagacha bo'lgan masofani d bilan belgilab $r=d$ tenglikni isbotlaymiz.

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2}$$

ifodada $y^2=2px$ tenglikdan foydalansak va $x\geq 0$ munosabatni hisobga olsak

$$r=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}$$

formulani hosil qilamiz.

Direktrisagacha bo'lgan masofani hisoblash uchun nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasidan foydalanib

$$d=\left|-x-\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2}=r$$

tenglikni hosil qilamiz.

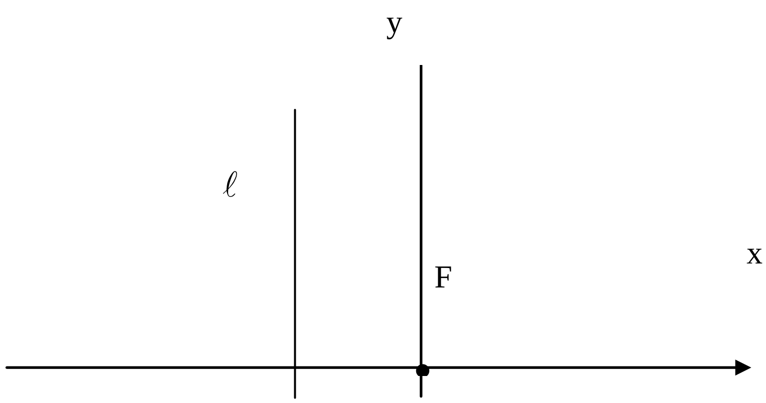
2^0 . *Parabolaning geometrik aniqlanishi.*

Berilgan to'gri chiziq va unda yotmaydigan nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plami paraboladir.

Tekislikda ℓ to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan F nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p bilan belgilab va F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ravishda o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olib koordinatalar sistemasini kiritamiz. Abssissa o'qining musbat yo'nalishi ℓ to'g'ri chiziqdan F nuqta tarafga yo'nalgan, koordinata boshini ℓ to'g'ri chiziq va F nuqta o'rtasiga quyidagi chizmadagi kabi joylashtiramiz. Ordinata o'qi esa ℓ to'g'ri chiziqqa paralleldir. Natijada ℓ to'g'ri chiziq: $x+\frac{p}{2}=0$ tenglamaga, F nuqta esa $\left(\frac{p}{2},0\right)$ koordinatalarga ega bo'ladi.Tekislikning $M(x,y)$ nuqtasidan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning shu
nuqtadan F nuqtagacha bo'lgan masofaga tengligidan

$$y^2=2px$$

tenglamani hosil qilamiz.



Chizma-1.a

§ − 2. Ellips

Ta'rif − 3. Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta Oxy dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(3)

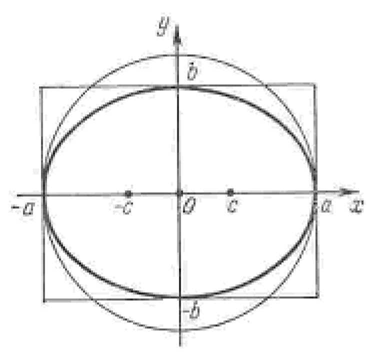
ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, u ellips deb ataladi. Bu erda koeffisientlar $a \geq b > 0$ munosabatni qanoatlantiradi.

Bu tenglamani o'rganish natijasida ellipsni chizamiz va uning xossalarini keltirib chiqaramiz. Tenglamadan ko'rinib turibdiki x, y o'zgaruvchilar $-a \leq x \leq a$, $-b \leq x \leq b$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Abssissa o'qida yotuvchi $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari, $x \pm \frac{a}{e} = 0$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisalari deb ataladi.Bu yerda $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ bo'lib, e soni ellipsning ekssentrisiteti deyiladi. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lib, koordinata boshi uning simmetriya markazidir.

Ellips xossalari:

1. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas va $2a$ ga tengdir.

   Bu xossa bevosita hisoblash yordamida $r_1 + r_2 = 2a$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi.



Chizma-2.

2. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrisalargacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas va e soniga tengdir.

Bu xossa bevosita $\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=e$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi.

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+c^2+2xc+b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}=$$

$$\sqrt{x^2-\frac{x^2b^2}{a^2}+2aex+a^2}=\sqrt{x^2\frac{\left(a^2-b^2\right)}{a^2}+2aex+a^2}=|xe+a|$$

$$d_1=\left|-x-\frac{a}{e}\right|=\left|x+\frac{a}{e}\right|=\frac{|xe+a|}{e}\Rightarrow\quad \frac{r_1}{d_1}=e$$

2. Ellipsning geometrik aniqlanishi.

Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarining yigindisi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

Isbot.Tekislikda $F_{1,}F_2$ nuqtalar berilgan.Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda r_1,r_2 ko'rinishda belgilab

$$r_1+r_2=const=2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarinng geometrik o'rnini aniqlashimiz kerak. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilasak, $r_1+r_2>2a$ tengsizlikdan $a>c$ munosabat kelib chiqadi. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz.Berilgan F_1,F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish F_1 nuqtadan F_2 nuqtaga qarab yo'nalgan bo'ladi. Koordinata boshini F_1,F_2 nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib, ordinata o'qi sifatida abssissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ,\qquad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikga qo'yib

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshirib, hadlarni ixchamlashtirib va yana bir marta kvadratga oshirib

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu erda $b^2=a^2-c^2$ belgilash kiritilgan.

3. Bizga l to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta F berilgan bo'lsa, tekislikda berilgan nuqtagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas birdan kichik e soniga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

Bu faktni isbotlash uchun berilgan F nuqtadan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazib, uni abssissa o'qi sifatida olamiz. Natijada abssissa o'qini F nuqta ikki qismga ajratadi.Berilgan F nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning e soniga ko'paytmasini p bilan belgilab, quyidagi tengliklar bilan

$$a=\frac{p}{1-e^2} \text{ va } c=ea, \quad b=\sqrt{a^2-c^2}$$

a , b c sonlarni kiritamiz.Koordinata boshini abssissa o'qining $\boldsymbol{l}$ to'g'ri chiziqni kesmaydigan qismida F nuqtadan c birlik masofada joylashtiramiz. Natijada koordinata boshidan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$p_1+c=\frac{p}{e}+ea=\frac{a(1-e^2)}{e}+ea=\frac{a}{e}$$

kattalikka teng bo'ladi. Bu erda p_1 bilan F nuqtadan $\boldsymbol{l}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa belgilangan. Demak $\boldsymbol{l}$ to'g'ri chiziq tenglamasi

$$x-\frac{a}{e}=0$$

ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi koordinata o'qini $\boldsymbol{l}$ to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazib, tekislikning $M(x, y)$ nuqtasidan F nuqtagacha bo'lgan masofani r bilan, $\boldsymbol{l}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga d bilan belgilasak,

$$r = ed$$

tenglikdan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamani olamiz.

§−3. *Giperbola kanonik tenglamasi*

Ta'rif−4. Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta Oxy Dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

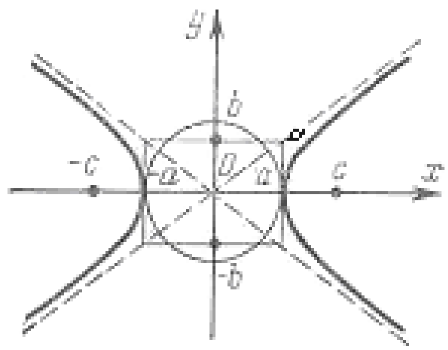
ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu chiziq giperbola deb ataladi. Bu erda koeffisientlar $a \geq b > 0$ munosabatni qanoatlantiradi.

Giperbola tenglamasini tekshirish natijasida quyidagilarni olamiz:

1) x, y o'zgaruvchilar $|x| \geq a$, $-\infty < y < \infty$ tengsizliklarni qanoatlantiradi.Abssissa o'qidagi $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ nuqtalar giperbolaning fokuslari, $x \pm \frac{a}{e} = 0$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisalari deyiladi.Bu erda $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a} > 1$ bo'lib, e soni giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi.

2) Tenglamada x, y o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik

joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi giperbolaning simmetriya markazidir.



Chizma-3.

Giperbola xossalari :

1. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli o'zgarmas va $2a$ ga tengdir.

2. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrisalargacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas va e soniga tengdir.

Bu xossa bevosita $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi. Giperbolaning $M(x, y)$ nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(ex+a)^2}, r_2 = \sqrt{(ex-a)^2}$$

tengliklar o'rinlidir.Bu erda ildiz chiqarish amalini bajarsak

agar $x > 0$ bo'lsa $r_1 = a + ex$, $r_2 = -a + ex$

agar $x < 0$ bo'lsa $r_1 = -a - ex$, $r_2 = a - ex$

tengliklarni hosil qilamiz.Natijada agar $x > 0$ bo'lsa

$r_1 - r_2 = 2a$, agar $x < 0$ bo'lsa $r_1 - r_2 = -2a$ tenglik o'rinli bo'ladi.Demak ixtiyoriy x uchun

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3.Tekislikda ikkita nukta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalari ayirmasining moduli o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola bo'ladi.

Tekislikda $F_{1,}F_2$ nuqtalar berilgan. Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda r_1, r_2 ko'rinishda belgilab

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami giperbola ekanligini isbotlaymiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz va tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Berilgan F_1, F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish F_1 nuqtadan F_2 nuqtaga qarab yo'nalgan. Koordinata boshini $F_{1,}F_2$ nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib,ordinata o'qi sifatida abssissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(ex+a)^2},\, r_2 = \sqrt{(ex-a)^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikga qo'yib

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni kvadratga oshirib va zaruriy algebraic almashtirishlarni bajarib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

munosabatni olamiz. Bu yerda $b^2 = c^2 - a^2$ belgilash kiritilgan.

4.Bizga l to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta F berilgan bo'lsa, tekislikda berilgan nuqtagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas birdan katta e soniga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola bo'ladi.

Bu xossani isbotlash o'quvchilar uchun topshiriq sifatida havola etamiz. Biz yuqorida $e<1$ bo'lganda ellips hosil bo'lishini ko'rsatgan edik. Bu yerda p soni ellipsdagi kabi, giperbolaning katta va kichik yarim o'qlari

$$a=\frac{p}{e^2-1}\ ,\quad b=\sqrt{c^2-a^2}$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Bu yerda c soni $c=ea$ tenglik bilan aniqlanadi.

4§. Parabola, ellips va giperbolaning ba'zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari

1. *Koordinata boshi chiziqning uchida bo'lgan hol:*

a) Ellips kanonik ko'rinishdagi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa,

$$x'=x+a,\quad y'=y \qquad (2)$$

almashtirish bajarsak, yangi $O'x'y'$ koordinatalar boshi ellipsning chap $(-a,0)$ uchida joylashadi va (1) tenglama

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamani

$$y'^2=2px'+qx'^2 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda $p=\frac{b^2}{a}$, $q=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$ bo'lib, $-1\leq q<0$ munosabat bajariladi. Agar giperbolaning

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

tenglamasida

$$x'=x-a, y'=y \qquad (6)$$

almashtirish bajarsak tenglama

$$y'^2=2px'+qx'^2 \qquad (*)$$

ko'rinishda bo'lib, koeeffisientlar uchun

$$q=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1>0, \quad p=\frac{b^2}{a}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Agar $(*)$ tenglamada $q=0$ bo'lsa parabola tenglamasini hosil qilamiz.

Demak giperbolalar, ellipslar va parabolalar tenglamalarini $(*)$ ko'rinishda yozish mumkin.

2. Qutb koordinata sistemasidagi tenglamalar

a) Parabola

$$y^2 = 2px$$

kanonik tenglama bilan berilgan bo'lsa, qutbni parabola fokusiga joylashtirib, qutb o'qi sifatida abssissa o'qini olib parabola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozaylik.Agar biz

$$x' = x - \frac{p}{2}, \qquad y' = y$$

almashtirishlar bajarsak

$$x' = r\cos\varphi, \qquad y' = r\sin\varphi$$

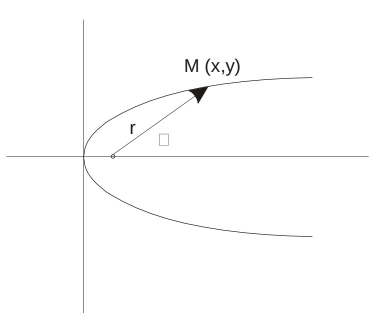
tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu yerda r, φ nuqtaning qutb koordinatalari bo'lib, agar nuqta parabolaga tegishli bo'lsa, r uning fokal radiusiga tengdir. Biz

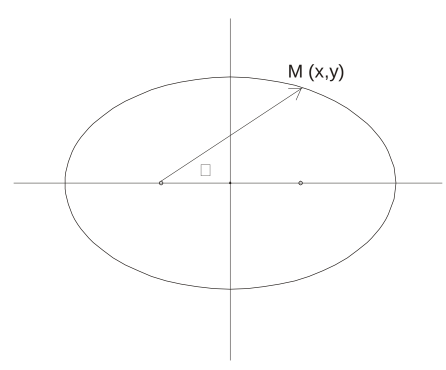
$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$$

tenglikda r ning nuqtadan direktrisagacha bo'lgan masofaga tengligini hisobga olib $r = x + \frac{p}{2}$ ifodani yuqoridagi tenglikka qo'ysak

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabat parabolaning qutb





koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir.

b) Ellipsning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun qutbni ellipsning chap fokusiga joylashtirib, abssissa oʻqini qutb oʻqi sifatida olamiz. Ellipsning

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

kanonik tenglamasini qutb koordinatalar sistemasiga oʻtkazish uchun

$$\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y \end{cases}$$

almashtirishlar yordamida yangi $O'x'y'$ dekart koordinatlar sistemasini kiritamiz. Bu koordinatalar sistemasi va qutb koordinatalar orasidagi bogʻlanish boshi

$$x' = r\cos\varphi, \quad y' = r\sin\varphi$$

formulalar yordamida beriladi. Ellipsning M nuqtasi uchun chap fokal radius uning qutb radiusiga tengligidan foydalanib

$$MF_1 = r = ex + a$$

tenglikni yozamiz. Bu tenglikdagi $r = ex + a$ ifodani

$$x + c = r\cos\varphi$$

tenglikka qoʻysak

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = a - ec$$

tenglikdan foydalandik.

c) Giperbola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun uning har qismi uchun mos ravishda qutb koordinatalar sistemasi kiritamiz. Uning oʻng qismi uchun qutb boshini giperbolaning ung fokusiga joylashtiramiz va abssissa oʻqini qutb oʻqi sifatida olamiz. Giperbola nuqtasi uchun qutb radiusi r uning oʻng fokal radiusiga teng boʻlganligi uchun

$$r = ex - a$$

ifodani hosil qilamiz.Biz bilamizki,agar dekart $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi uchun qutb boshi koordinata boshida joylashgan va qutb oʻqi $O'x'$ abssisa oʻqi bilan ustma−ust tushsa,qutb koordinatalar sistemasi va $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi orasidagi bogʻlanish

$$x' = r\cos\varphi$$
$$y' = r\sin\varphi$$

formulalar yordamida beriladi.Bu yangi $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi va giperbola

tenglamasi berilgan Oxy koordinatalar sistemasi orasidagi bogʻlanish esa

$$x' = x - c$$
$$y' = y$$

koʻrinishda boʻladi.Biz bu tengliklarning birinchisidan foydalanib

$$x - c = r\cos\varphi$$

tenglikni hosil qilamiz.Yuqoridagi $r = ex - a$ ifodani bu tenglikga qoʻysak

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglikdan foydalandik.

Biz giperbola chap shoxining tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun qutb boshini chap fokusga joylashtiramiz va abssissa o'qini qarama—qarshi yonalish bilan qutb o'qi sifatida olamiz.Biz agar

$$x' = -x - c$$
$$y' = y$$

formulalar bilan yangi dekart koordinatalar sistemasi kiritsak,ular uchun

$$x' = r\cos\varphi$$
$$y' = r\sin\varphi$$

formulalar o'rinli bo'ladi.Bu yerda qurb radiuas chap fokal radiusga teng bo'lganligi
uchun

$$r = -ex - a$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Bu tenglikdagi r ning ifodasini yuqoridagi formulardan kelib chiqadiagan

$$-x - c = r\cos\varphi$$

tenglikga qo'yib

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz.Bu yerda ham

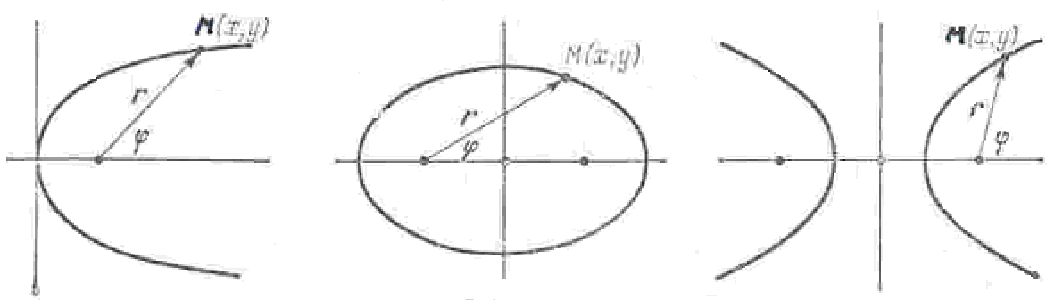
$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglik o'rinlidir.

Demak, qutb koordinatalar sistemasida mos ravishda tanlanganda har qanday ikkinchi tartib chiziq tenglamasini

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

ko'rinishda yozish mumkin ekan.Bu tenglama $e=1$ bo'lsa parabola, $e<1$ bo'lganda ellips va nihoyat $e>1$bo'lganda giperbola tenglamasidir.



Chizma-4

5§.Ellips, giperbola va parabolaning urinmalari

Bu chiziqlarning har biri o'ziga tegishli har bir nuqtaning atrofida birorta differensiallanuvchi funksianing grafigi bo'ladi. Shuning uchun, bu chiziqlar urinmalarining tenglamalarini tuzishda biz maktab kursidan ma'lum bo'lgan

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

tenglamadan foydalanishimiz mumkin. Misol uchun ellipsning ordinatalari manfiy bo'lmagan nuqtalardan iborat qismi

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\ , \quad -a \le x \le a$$

funksianing grafigi bo'ladi. Bu funksianinig hosilasini topsak, u

$$y' = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu ifodalarni hisobga olib, ellipsga tegishli (x_0, y_0)nuqtadagi urinma tenglamasini yozamiz:

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Bu tenglamada

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

tenglikni hisobga olsak, yuqoridagi tenglama

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

ko’rinishga keladi.

Giperbola va parabola uchun urinma tenglamalarini keltirib chiqarish o’quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etiladi. Ularning (x_0, y_0)nuqtadagi urinmalari tenglamalari mos ravishda quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

$$y_0 y = p(x+x_0)$$

6§. Ellips, giperbola va parabolaning optik xossalari

Biz ellipsning quyidagi optik xossasini isbotlaymiz

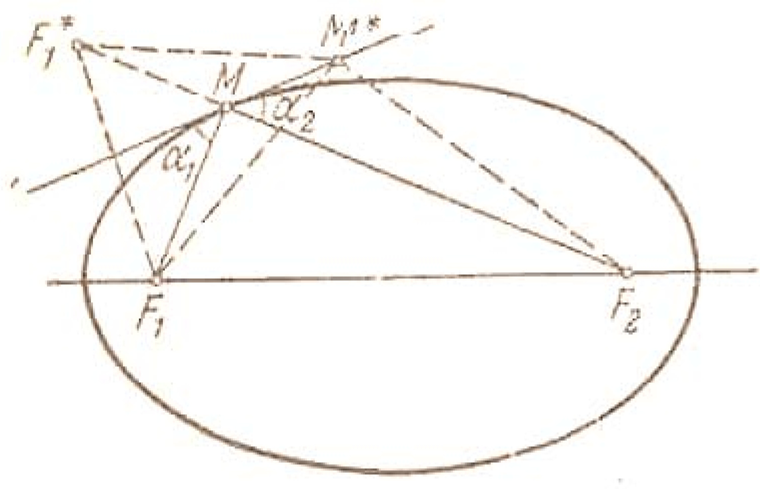
Teorema. Ellipsning bitta fokusidan chiquvchi nur sinishdan so’ng ikkinchi fokusga tushadi.

Isbot. Ellipsning chap F_1 fokusidan chiquvchi nur uning M nuqtasida sinib F_2 fokusga tushishini ko’rsatish uchun MF_1 va MF_2 **to’g’ri chiziqlarning** M nuqtadan o’tuvchi urinma bilan teng burchaklar hosil qilishini ko’rsatishimiz kerak. Biz ellipsning M nuqtasidan o’tuvchi urinmasini ℓ bilan, ℓ to'g'ri chiziqga nisbatan F_1 nuqtaga simmetrik bo’lgan nuqtani F_1^* bilan belgilaymiz. Agar $\alpha_1 \neq \alpha_2$ bo’lsa, $F_1^* F_2$ to’g’ri chiziqning urinma bilan kesisich nuqtasini M nuqtasi bilan ustma –ust tushmaydi. Shuning uchun

$$\left|F_1 M^*\right| + \left|F_2 M^*\right| = \left|F_1^* F_2\right| < \left|F_1 M\right| + \left|F_2 M\right| = 2a$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.Bu yerda a - ellipsning katta yarim o'qi.

Biz M^* nuqtani urinma bo'ylab M nuqtadan uzoqlashtira boshlaymiz. Bunda $|F_1M^*|+|F_2M^*|$ yig'indi o'sa boshlaydi. Boshlang'ich holatda bu yig'indini qiymati, yuqaridai tengsizlikka ko'ra $2a$ dan kichik bo'lganligi uchun, yig'indi o'sish natijasida qandaydir N nuqtada $2a$ ga teng bo'ladi. Bu nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalarning yig'indisi $2a$ ga teng bo'lganligi uchun, u ellipsga tegishli

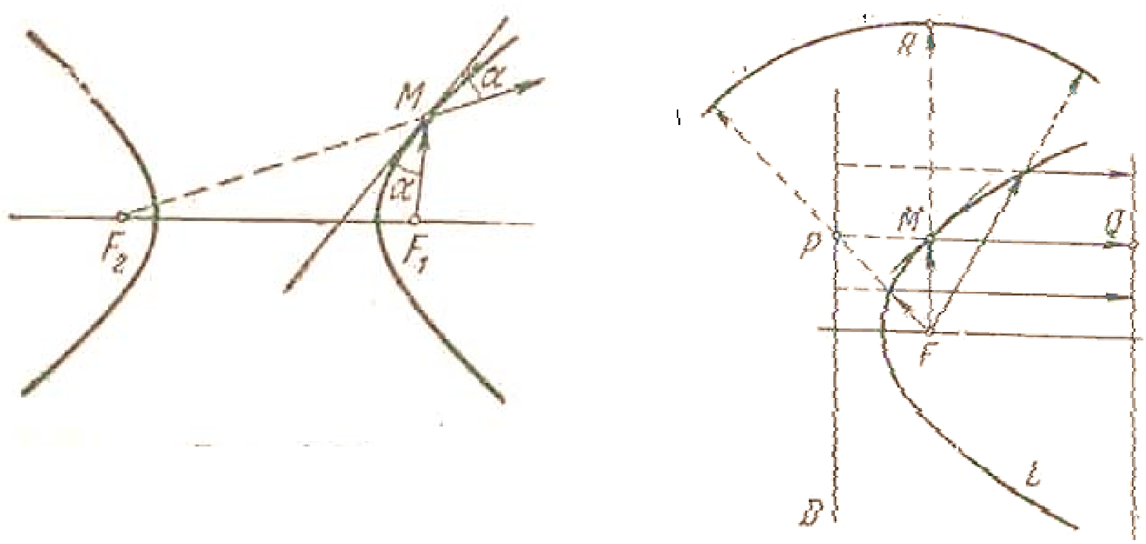


Chizma-5

nuqta boladi.

Bundan esa ℓ urinma ellipsni ikkita nuqtada kesishi kelib chiqadi. Ellipsning har ir urinmasi uni faqat bitta nuqtada k esib o'tganligi uchun biz ziddiyat hosil qildiq. Demak $\alpha_1=\alpha_2$ tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Giperola va parabola uchun optik xossalsr qo'yidagi teoremalarda keltirilgan. Giperbola uchun optik xossa ellipsning optik xossasig o'xshaydi. Parabola uchun esa, optik xossa boshqasha formilirovka qilinadi. Agar biz yorig'lik manbaini, parabolaning fokusiga joylashtirsak, undan tarqaluvchi yorig'lik nurlari paraolaga urinib singandan so'ng direktrisaga perpendikulyat to'g'ri chiziqlar bo'ylab harakatlanadi. Bu ghiziqlarning optik xossalari fan vatexnikada ko'p qo'llaniladi. Misol uchun siz bilasizki paralaning optik xossasi antennalar yasashda ishlatiladi.



Chizma-6

Giperbola va paraolaning optik xossalarini isbotlash o'quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

Izoh. Giperbola va parabolaning urinmalari ham ellpsning urinmasi singari, ularni faqat bitta nuqtada kesib o'tadi.

Teorema−2. Giperbolaning bitta fokusidan chiquvchi nur sinishdan so'ng ikkinchi fokusga tushadi.

Teorema-3. Parabolaning fokusidan chiqubchi nur sinishdan so'ng uning o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanadi.

7 §. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Giperbolaning urinmasi uning asimptotalari bilan yuzasi o'zgarmas uchburchak hosil qilishini ko'rsating.
2. $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ to'g'ri chiziq bilan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning urinish shartini yozing.
3. Giperbolaning nuqtasidan uning asimptotalarigacha bo'lgan masofalarning ko'paytmasi o'zgarmas(hamma nuqtalar uchun bir xil)ekanligini ko'rsating.
4. Ellips kanonik tenglama bilan berilgan bo'lsa,uning (x_0, y_0) nuqtasidan o'tgan urinma tenglamasi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

   ko'rinishda bo'lishini isbotlang.
5. Ellips urinmasining burchak koeffisienti k ga teng bo'lsa, uning urinish nuqtasini toping.
6. Tosh gorizont bilan o'tkir burchak hosil qilgan yo'nalishda otildi va parabola yoyi bo'yicha harakat qilib, boshlang'ich holatidan 16 metr uzoqlikda erga tushdi. Uning eng yuqori holati 12 metr balandlikda bo'lsa, parabolaning parametrini topig.
7. Parabolaning fokusidan o'tuvchi vatarlar o'rtalaritning geometrik o'rnini toping.
8. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylanalar markazlarining geometrik o'rnini toping.
9. Har qanday ellips aylananing proeksiyasi ekanlitini isbotlang.
10. Ellips

$$\rho^2=\frac{288}{16-7\cos^2\varphi}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning uzunligi 10 ga teng bo'lgan

diametri fokal o'q bilan qanday burchak tashkil qiladi.

11.Giperbola $\rho=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$

tenglama bilan berilgan bo'lsa,uning asimptotalari va direktrisalari tenglamasini tuzing.

12.Giperbolaning chap qismi uchun mos qutb koordinatalar sistemasini kiriting va uning tenglamasini yozing.

13.Asimptotasi $y=\pm\frac{1}{2}x$ **bo'lgan va** $(12;3\sqrt{3})$ **nuqtadan o'tuvchi giperbola tenglamasii tuzing.**

14. Ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **tenglama bilan berilgan bo'lsin. Berilgan ellips** 90^0 **burchak**

ostida ko'rinadigan nuqtalarning geometrik o'rnini toping.

12. Giperbola $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ **tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning uzunligi 20 ga teng bo'lgan diametr tenglamasini tuzing.**

13. Quyidagi chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini yozing.

a). $\rho=\dfrac{2}{13-12\cos\varphi}$

b). $\rho=\dfrac{2}{3-3\cos\varphi}$

v). $\rho = \dfrac{2}{4 - 5\cos\varphi}$

g). $\rho = \dfrac{2}{\sqrt{5} - 3\cos\varphi}$**.**

14. Giperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning parallel diametrlarining o'rtalarining geometrik o'rnini toping.**

15. Ellipsning birinchi fokusidan chiquvchi nurlar elliptik ko'zguga urilib, qaytgan nurlar ikkinchi fokusda yig'ilishini isbotlang.

16. Quyidagi ellpislarning umumiy urinma tenglamalarini tuzing:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \textbf{ va } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

17.Quyidagi tenglamalar bilan berilgan pa $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqning $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaga urinish shartini yozing.

18.rabolalarning uchlarini,parametrlarini va o'qlari yonalishlarini toping:

1) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$

2) $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$

3) $y^2 + 8x - 16 = 0$

4) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$

5) $y = Ax^2 + Bx + C$

6) $y = x^2 - 8x + 15$

7) $y = x^2 + 6x$

19 .Ellips $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, $2x - y + 17 = 0$ to'gri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tenglamasini tuzing.

20. Agar $4x - 5y - 40 = 0$ to'g'ri chiziq $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ ellipsga urinishi ma'lum bo'lsa, urinish nuqtasini toping.

IV BOB

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING UMUMIY TENGLAMALARI

1 § Ikkinchi tartibli chiziqlarning markazi

Biz bu bobda tekislikda dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni tekshirish bilan shug'ullanamiz. Bu ishni koordinatalar sistemasini o'zgartirish va (1)tenglamani soddalashtirish yordamida amalga oshiramiz. Birinchi navbatda parallel ko'chirishda (1) tenglama koeffitsientlari qanday o'zgarishini tekshiramiz. Buning uchun

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \qquad (2)$$

formulalar yordamida almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda koordinata o'qlarining yo'nalishlari o'zgarmaydi,faqat koordinata boshi $O'(x_0, y_0)$ nuqtaga ko'chadi.Bu formulalardan x, y larni topib va (1) ga qo'yib

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada koeeffisientlar uchun

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22},$$

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \; a'_{33} = F(x_0, y_0) \quad (4)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $F(x, y)$ bilan (1) tenglamaning chap tomonidagi ifoda belgilangan.

Yuqoridagi (3) formulalardan ko'rinib turibdiki, paralllel ko'chirishda ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeefisientldar o'zgarmaydi. Agar $O'(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

sistemani qanoatlantirsa, (3) tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi.

Bundan tashqari, agar $O'(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirsa, $O'(x_0, y_0)$ nuqta ikkinchi tartibli chiziq uchun simmetriya markazi bo'ladi. Haqiqatan ham bu holda koordinatalar markazini $O'(x_0, y_0)$ nuqtaga ko'chirsak, tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi. Shuning uchun yangi koordinatalar sistemasida

$$F(x', y') = F(-x', -y')$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Demak $O'(x_0, y_0)$ nuqta chiziq uchun simmetriya markazidir. Va aksincha ,agar birorta A nuqta chiziq uchun simmetriya markazi bo'lsa uning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.Koordinata boshini A nuqtaga joylashtirib, yangi x , y koordinatalar sistemasini kiritamiz. Agar $M(x, y)$ nuqta chiziqqa tegishli bo'lsa,

$$F(x, y) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Koordinata boshi simmetriya markazi bo'lgani uchun

$F(-x,-y)=0$ tenglik ham o’rinli bo’ladi. Bu tengliklarni ikkinchisini birinchisidan ayirib

$$a_{12}x+a_{23}=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar a_{13}, a_{23} koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo’lsa, bu tenglama to’g’ri chiziqni aniqlaydi, ya’ni ikkinchi tartibli chiziqning hamma nuqtalari bir to’g’ri chiziqda yotadi. Agar ikkinchi tartibli chiziq bir to’g’ri chiziqda yotmasa, bu koeffisientlarning har ikkalasi ham nolga teng bo’ladi. Bu esa A nuqtaning koordinatalari (5)sistemani qanoatlantirishini ko’rsatadi. Bu faktlarni hisobga olsak quyidagi ta’rifning geometrik ma’nosi yaxshi tushinarli bo’ladi.

Ta’rif-1 .Tekislikdagi $M_0(x_0, y_0)$ ***nuqtaning koordinatalari (5)*** *sistemani qanoatlantirsa, u (1) tenglama bilan berilgan ikkkinchi tartibli chiziqning markazi deyiladi.*

Tabiiyki, (5) sistema yagona echimga ega bo'lishi, cheksiz ko'p echimga ega bo'lishi yoki umuman echimga ega bo'lmasligi mumkin. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{21}^{2}\neq 0$$

munosabat o’rinli bo’lsa, (5) sistema yagona echimga ega bo’ladi. Agar

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat o’rinli bo’lsa sistema cheksiz ko’p echimga,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat bajarilsa sistema echimga ega emas. Bularni e’tiborga olib, biz ikkinchi tartibli chiziqlarni uchta sinfga ajratamiz:

a) yagona markazga ega bo’lgan chiziqlar;

b) cheksiz ko’p markazga ega bo’lgan chiziqlar;

v) markazga ega bo'lmagan chiziqlar;

Biz quyidagi determinantlarni kiritamiz

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bu erda $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$. belgilashlar kiritilgan. Yagona markazga ega chiziqlar uchun $\delta \neq 0$, yagona markazga ega bo'lmagan chiziqlar uchun $\delta = 0$. Chiziqlar cheksiz ko'p markazga ega bo'lishi uchun $\Delta = 0$ tenglik bajarilshi kerak.

Uchinchi tartibli determinantni

$$\Delta = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yozib olsak, oxirgi determinant δ ga tengdir. Agar $\delta = 0$ bo'lsa, birorta k soni uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k \ , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabat bajariladi. Bu tenglikni hisobga olib

$$\Delta = \left(a_{13} - ka_{23}\right)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $\Delta = 0$ tenglik ham bajarilsa

$$a_{13} - k\,a_{23} = 0 \qquad \text{va} \qquad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

tengliklardan kamida bittasi o’rinli bo’ladi. Bu tengliklarning birinchisi o’rinli bulsa

$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ munosabatdan $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$ munosobat kelib chikadi.

Agar

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

bulsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ va $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ tengliklardan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosobat kelib chikadi.Demak $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ tengliklarning bir vaqtda bajarilishi

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

shartga teng kuchlidir. Natijada biz quyidagi tasdiqni hosil qilamiz:

Tasdiq-1. Ikkinchi tartibli chiziq

a) $\delta \neq 0$ *bo’lsa yagona markazga ega,*

b) $\delta = 0$ *va* $\Delta = 0$ *bo’lsa cheksiz ko’p markazga ega va markazlar to’plami bitta to’gri chizikni tashkil etadi;*

v) $\delta = 0$ *va* $\Delta \neq 0$ *bo’lsa markazga ega emas.*

Tasdiq-2. Yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq markazi unga tegishli bo'lishi uchun $\Delta = 0$ *tenglikning bajarilishi zarur va etarlidir.*

Isbot.Ikkinchi tartibli chiziq markazi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lib,u chiziqqa tegishli bo'lsa

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

va

$$a_{11}x_0^{\ 2} + 2a_{12}x_0\,y_0 + a_{22}y_0^{\ 2} + 2\,a_{13}x_0 + 2\,a_{23}\,y_0 + a_{33} = 0 \qquad (7)$$

tengliklar bajariladi. Yuqoridagi (6) tenglikning birinchisini x_0 ga, ikkinchisini y_0 ga ko'paytirib, (7) tenglikdan ayirsak

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak $(x_0, y_0, 1)$ uchlik

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

bir jinsli sistemaning notrivial echimidir. Bu esa $\Delta = 0$ shartga teng kuchlidir.Aksincha $\Delta = 0$ bo'lsa, (8) sistema notrivial (x_0, y_0, z_0)echimga egadir.Bu uchlikda $z_0 \neq 0$, chunki $\delta \neq 0$ .Biz $z_0 = 1$ deb hisoblay olamiz, chunki $\delta \neq 0$ bo'lganligi uchun har bir z_0 uchun (x_0, y_0)juftlik mavjud. Yuqoridagi (8) sistemada $z_0 = 1$ bo'lganda (x_0, y_0)juftlik markaz koordinatalari ekanligi kelitb chiqadi. Bundan tashqari (8)sistemadan foydalanib

$$a_{11}x_0^{\ 2} + 2a_{12}x_0\, y_0 + a_{22}y_0^{\ 2} + 2\,a_{13}x_0 + 2\,a_{23}\, y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni olish mumkin.

2§.Ikkinchi tartibli chiziq va to'gri chiziqning o'zaro vaziyati

Bizga (1) tenglama bilan aniqlangan ikkinchi tartibli chiziq va

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \end{aligned} \qquad (9)$$

parametrik tenglamalar yordamida ℓ to'gri chiziq berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq va ikkichi tartibli chiziqning kesishish nuqtalarini topish uchun (9) ifodalarni (1) ga qo'yamiz. Natijada quyidagi

$$\left(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2\right)t^2 + 2\left(a_{11}lx_0 + a_{12}\left(ly_0 + mx_0\right) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m\right)t + \\ + F\left(x_0, y_0\right) = 0 \qquad (10)$$

kvadrat tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglamada ikkinchi darajali had oldidagi ifoda to’g’ri chiziqning yo’nalishiga bog’liq xolos. Ba’zi yo’nalishlar uchun bu ifoda nolga teng bo’ladi va yuqoridagi tenglama chiziqli tenglamaga aylanadi. Ba’zi yo’nalishlar uchun bu ifoda nolga teng emas va yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo’ladi.

Ta’rif-1. Berilgan $\{\ell, m\}$ *yo’nalish uchun*

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \qquad (11)$$

tenglik bajarilsa,bu yo’nalish asimpotik yo’nalish,

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0 \qquad (12)$$

munosabat bajarilsa noasimptotik yo’nalish deyiladi.

To’g’ri chiziqning yo’nalishi noasimptotik bo’lsa,yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo’ladi.Demak bu to’g’ri chiziq (1) chiziq bilan ikkita yoki bitta umumiy nuqtaga ega bo’lishi mumkin. Noasimptotik yo’nalishdagi to’g’ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bitta nuqtada kesishsa,u urinma deb ataladi.

To’g’ri chiziqning yo’nalishi asimptotik bo’lsa, yuqoridagi tenglama chiziqli tenglama bo’ladi. Demak bu holda to’g’ri chiziq (1) bilan bitta nuqtada kesishadi, yoki to’g’ri chiziqning hamma nuqtalari (1)ga tegishli bo’ladi.Agar ikkinchi darajali had koeffisienti nolga teng bo’lib, ozod had noldan farqli bo’lsa,to’g’ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmaydi. Asimptotik yo’nalishdagi to’g’ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota deyiladi.

Biz

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

tenglamada $\ell \neq 0$ bo'lsa, $k = \dfrac{m}{\ell}$ belgilash kiritib uni

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

ko'rinishda, agar $m \neq 0$ bo'lsa, $k = \dfrac{\ell}{m}$ belgilash kiritib uni

$$a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$$

ko'rinishda yozamiz. Ikkala holda ham diskriminant uchun

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\delta$$

tenglik o'rinli. Demak $\delta > 0$ bo'lsa asimptotik yo'nalish mavjud emas.Bu holda (1) chiziq elliptik chiziq deyiladi,agar $\delta = 0$ bo'lsa, asiptotik yo'nalish bitta va bu holda (1) chiziq parabolik, $\delta < 0$ bo'lsa ikkita asimptotik yo'nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

Yuqoridagi (11) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsient

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)x + (a_{12}\ell + a_{22}m)y + a_{13}\ell + a_{22}m = 0 \qquad (13)$$

ko'rinishga ega. Agar

$$\begin{aligned} a_{11}\ell + a_{12}m = 0 \\ a_{21}\ell + a_{22}m = 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

tengliklar bir vaqtda bajarilmasa, (13) tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi.
Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalish uchun(14) tengliklar bajarilsa, $\{\ell, m\}$ yo'nalish maxsus yo'nalish deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziq uchun $\delta \neq 0$ bo'lsa,(14) sistema faqat trivial echimga ega va demak yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar uchun maxsus yo'nalishlar yo'q.

Ta'rif-2.Maxsus bo'lmagan $\{\ell, m\}$ yo'nalish uchun (13) tenglama aniqlovchi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziqning $\{\ell, m\}$ yo'nalishga qo'shma diametri deb ataladi.
Diametr tushunchasining korrekt aniqlanganligini ko'rsatamiz. Avvalo $\{\ell, m\}$ yo'nalish asimptotik yo'nalish bo'lgan holni qaraylik. Bu holda

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

tenglikning chap tomoni uchun

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = (a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m \qquad (14)$$

tenglik o'rinli. Demak

$$(a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m = 0 \qquad (15)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikdan

$$\frac{\ell}{-(a_{12}\ell + a_{22}m)} = \frac{m}{a_{11}\ell + a_{12}m} \qquad (16)$$

proporsionallik munosabati kelib chiqadi.

Diametr uchun $\{-(a_{12}l + a_{22}m), a_{11}l + a_{12}m\}$ vektor yo'naltiruvchi vektor bo'lganligi uchun diametr $\{\ell, m\}$ yo'nalishga parallel bo'ladi . Diametrga tegishli nuqtalar uchun (11) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffisent nolga teng bo'ladi. Demak bu holda diametr ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota bo'ladi (kesishmaydi) yoki diametrga tegishli hamma nuqtalar (1) chiziqda yotadi.

Noasimptotik $\{\ell, m\}$ yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq (1) chiziqni ikkita M_1 va M_2 nuqtalarda kesib o'tsa , M_1M_2 kesmaning o'rtasini $M_0(x_0, y_0)$ bilan belgilab to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt$$

ko'rinishda yozamiz. Parametrning M_1, M_2 nuqtalarga mos keluvchi qiymatlarini t_1, t_2 bilan belgilasak, ular (10) tenglamaning ildizlari bo'ladi va Viet teoremasigi ko'ra $t_1 + t_2 = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning diametrga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak noasimptotik $\{\ell, m\}$ yo'nalishga parallel vatarlarning o'rtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu yo'nalishga qo'shma diametr bo'ladi.

Noasimptotik $\{\ell, m\}$ yo'nalishga ega bo'lgan va qo'shma diametrga tegishli $M_0(x_0, y_0)$ o'tuvchi to'g'ri chiziq (1) chiziqni M_1 va M_2 nuqtalarda kesib o'tsa, bu nuqtalarga mos keluvchi parametrning qiymatlari (10) tenglamaning ildizlari bo'ladi. To'g'ri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi diametrga tegishli bo'lganligi uchun (10) tenglamada birinchi darajali had oldidagi koeffisient nolga teng bo'ladi. Viet teoremasiga ko'ra $t_1 + t_2 = 0$ bo'lganligi uchun $M_0(x_0, y_0)$ nuqta M_1M_2 kesmaning o'rtasi bo'ladi. Demak, diametr tushunchasi korrekt aniqlangan.

Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalishga qo'shma diametr tenglamasini

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\ell + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0 \qquad (17)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglamadan ko'rnib turibdiki, har qanday diametr (1) chiziq markazidan o'tadi.

§3. Qo'shma yo'nalishlar va bosh yo'nalishlar

Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalishga qo'shma diametr yo'nalishi $\{\ell', m'\}$ uchun

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m) \qquad (18)$$

munosabat o'rinli. Bu munosabatni

$$(a_{11}l + a_{12}m)l' + (a_{12}l + a_{22}m)m' = 0 \qquad (19)$$

ko'rinishda yoki

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0 \qquad (20)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Ta'rif- 1. Ikkita $\{\ell, m\}$ va $\{\ell', m'\}$ yo'nalishlar uchun (20) munosabat bajarilsa, bu yo'nalishlar (1) chiziqga nisbatan qo'shma yo'nalishlar deyiladi.

Bu munosabatda (1) tenglama koeffisentlari qatnashadi.Koeffisientlar esa koordinatalar sistemasiga bog'liq. Ikkita $\{\ell, m\}$ va $\{\ell', m'\}$ yo'nalishlar biror koordinatalar sistemasida (1) chiziqga nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'lsa,ular ixtiyoriy koordinatalar sistemasida (1) chiziqga nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'lishini ko'rsatamiz.

Biz Oxy koordinatalar sistemasidan $O'x'y'$ koordinatalar sistemasiga

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned} \qquad (21)$$

almashtirishlar yordamida o'tsak,(1) tenglama

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \qquad (22)$$

ko'rinishga keladi. Ikkita $\{\ell, m\}$ va $\{\ell', m'\}$ yo'nalishlar uchun qo'shma bo'lish sharti bo'lgan (21) tenglikni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

belgilash kiritib

$$(l', m')A\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0 \qquad (24)$$

ko'rinishda , (1) tenglamani esa.

$$(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0 \qquad (25)$$

ko’rinishda yozish mumkin.Almashtirishlar formulasini

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad (26)$$

belgilash kiritib, matrisalar va vektorlar yordamida yozsak

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

ko’rinishda bo’ladi. Ikkinchi tartibli chiziqning (25) tenglamasiga (27) formuladagi ifodani qo’ysak va

$$(x,y) = \left[C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right]^T, \qquad A = A^T \text{ va} (a,b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (c,d)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

tengliklarni hisobga olsak, (25) tenglama quyidagicha o’zgaradi:

$$\left[C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right]^T A\left[C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right]+2(a_{13},a_{23})\left[C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right]+a_{33}=0$$

$$(x',y')C^T AC\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(x',y')C^T A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+(x_0,y_0)AC\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+$$
$$+(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+2(a_{13},a_{23})C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+2(a_{13},a_{23})\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+a_{33}=0$$

$$(x',y')C^T AC\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+2[(a_{13},a_{23})+(x_0,y_0)A]C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(x_0,y_0)A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+$$
$$+2(a_{13},a_{23})\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+a_{33}=0. \tag{28}$$

Bu tenglamalarning oxirgisidan ko'rinib turibdiki yangi koordinatalar sistemasidagi koeffisientlardan iborat

$$A'=\begin{pmatrix}a'_{11} & a'_{12}\\ a'_{21} & a'_{22}\end{pmatrix} \quad \text{matrisa} \quad A'=C^T AC$$

qoida bo'yicha o'zgaradi va

$$(a'_{13},a'_{23})=[(a_{13},a_{23})+(x_0,y_0)A]C$$
$$a'_{33}=(x_0,y_0)A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+2(a_{13},a_{23})\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+a_{33} \tag{29}$$

tengliklar o'rinli ekanligini ko'rish mumkin.

Biz $\overline{a}$ vektorning eski koordinatalarini a_1, a_2 bilan,yangi koordinatalarini a_1', a_2' bilan belgilasak,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Bu tenglikni hisobga olib $\overline{a} = \{\ell, m\}$, $\overline{b} = \{\ell', m'\}$ vektorlarning yangi koordinatalarini $\{\ell_1, m_1\}$, $\{\ell_1', m_1'\}$ bilan belgilasak

$$(\ell', m')A\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = (\ell', m')C^T AC\begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = (\ell_1', m_1')A'\begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Bu tenglikdan (24) tenglik

$$(\ell_1', m_1')A'\begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (30)$$

tenglikga teng kuchli ekanligi koordinatalar sistemasiga bog'liq emas.kelib chiqadi.Demak $\overline{a}$, $\overline{b}$ vektorlarning (1) chiziqqa nisbatan qo'shma bo'lishi

Ikkinchi tartibli chiziqning markazi tushunchasi koordinatalar sistemasiga bog'liq emasligini biz 1-paragrafda geometrik ravishda ko'rsatgan edik.Hozir esa yuqoridagi almashtirishlar formulasini keltirganimizdan keyin bu faktni algebraik isbotlashimiz mumkin.Haqitan ham biz sistemani

$$(x, y)A + (a_{13}, a_{23}) = (0,0) \qquad (31)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.Ikkinchi tomondan yangi koordinatalar sistemasida bu tenglik ko'rinishda

$$(x', y')A' + (a'_{13}, a'_{23}) = (0,0) \qquad (32)$$

ko'rinishda bo'ladi.Yuqoridagi almashtirish formulalarni hisobga olib,uning (31) tenglikga teng kuchli ekanligini ko'rsatamiz.Bu tenglikda

$$(x', y') = \left[C^{-1}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T, \ A' = C^T AC, \ (a'_{13}, a'_{23}) = [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C$$

almashtirishlarni bajarsak,u

$$\left[C^{-1}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T C^T AC + [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C = (0,0) \qquad (33)$$

ko'rinishga keladi.Bu tenglikda

$$\left[C^{-1}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T = [(x, y) - (x_0, y_0)](C^{-1})^T$$

tenglikni hisobga olsak, (34) tenglik

$$[(x, y)A + (a_{13}, a_{23})]C = (0,0) \qquad (34)$$

ko'rinishda yoziladi.Bu t□nglikdagi matrisaning d□t□rminanti noldan farqli bo'lganligi uchun,bu t□nglik (31) t□nglikga t□ng kuchlidir.

Ta'rif – 1.Birorta yo'nalish o'ziga p�rp�ndikulyar yo'nalishga qo'shma bo'lsa,u bosh yo'nalish d�yiladi.

Bu ta'rifga ko'ra $\{\ell, m\}$ yo'nalish bosh yo'nalish bo'lishi uchun u $\{-m, \ell\}$
yo'nalishga qo'shma bo'lishi kerak.Albatta, agar $\{\ell, m\}$ yo'nalish bosh yo'nalish bo'lsa, $\{-m, \ell\}$ yo'nalish ham bosh yo'nalish bo'ladi.B�rilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalishning bosh yo'nalish bo'lish sharti

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0$$

tenglikda $\{\ell', m'\}$vektorni $\{-m, \ell\}$ bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{12}\,\ell^2 + (a_{22} - a_{11})\ell\, m - a_{21}\, m^2 = 0 \qquad (35)$$

Agar $\{\ell, m\}$ maxsus yo'nalish bo'lsa,

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}$$

tenglik o'rinli bo'ladi va yuqoridagi (35) shart bajarilgan.Biz bilamizki, faqat $\delta = 0$ bo'lgan hollardagina ikkinchi tartibli chiziq maxsus yo'nalishga ega bo'lib, u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptotik yo'nalish bo'ladiDemak yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun asimptotik yo’nalish bosh yo’nalish bo’ladi.Albatta maxsus yo’nalishga perpendikulyar yo’nalish ham bosh yo’nalish bo’ladi.Boshqa bosh yo’nalishlar yo’q.Demak yagona markazga ega bo’lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun o’zaro perpendikulyar faqat ikkita bosh yo’nalish mavjuddir.

Yuqoridagi (35) tenglikda $a_{12} = 0$ va $a_{11} = a_{22}$ munosabatlar bajarilsa,bu tenglik ixtiyoriy $\{\ell, m\}$ yo’nalish uchun bajariladi.Demak bu holda ixtiyoriy yo’nalish bosh yo’nalish bo’ladi.Agar $a_{12} \neq 0$ bo’lsa,(35) tenglik

$k = \frac{\ell}{m}$ (va $k = \frac{m}{\ell}$) ifoda uchun kvadrat tenglama bo’ladi.Bu tenglamada diskriminant uchun

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2{}_{12} > 0$$

munosabat o’rinli bo’lgani uchun u ikkita ildizga ega va demak ikkinchi tartibli chiziq uchun ikkita o’zaro perpendikulyar bosh yo’nalish mavjud.

4§.Umumiy tenglamalarni soddalashtirish

Biz bu paragrafda umumiy

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni aniqlash va uni yasash bilan shug’ullanamiz.

1^0 *.YAgona markazga ega bo’lgan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini soddalashtirish.*

Bu holda parallel ko’chirish yordamida koordinata boshini ikkinchi tartibli chiziqning markaziga joylashtiramiz.Natijada tenglamada birinchi hadlar yo’qoladi.Koordinata o’qlarini o’zaro perpendikulyar bosh yo’nalishlar bo’yicha yo’naltiramiz.Yo’nalishlarning o’zaro qo’shma bo’lishi invariant xossa bo’lganligi uchun yangi koordinatalar sistemasida $\{1,0\}$va$\{0,1\}$yo’nalishlar o’zaro qo’shma bo’ladi.Bu shart

$$a'_{12}=0$$

tenglikka teng kuchlidir.Demak bu holda ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasi

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}=0 \qquad (36)$$

ko’rinishga keladi.Bu tenglamada $a'_{11}\neq 0\ a'_{22}\neq 0, a'_{33}$koffisient esa nolga teng bo’lishi ham,nolga teng bo’lmasligi ham mumkin.Agar a'_{33}koffisient esa nolga teng bo’lsa,(36) tenglama

$$Ax'^2+By'^2=0 \qquad (37)$$

ko’rinishga keladi.Agar A,B koffisientlar har xil ishoralarga ega bo’lsa,bu tenglama ikkita kesishuvchi to’g’ri chiziqni aniqlaydi.Koffisientlar bir xil ishoralarga ega bo’lsa,bu tenglamani bitta nuqtani aniqlaydi.

Yuqoridagi (36) tenglamada a'_{33}koffisient esa nolga teng bo’lmasa,(36) tenglama

$$Ax'^2+By'^2=1 \qquad (38)$$

ko'rinishga k□ladi.Bu t□nglama esa koeffisi□ntlarning ishorasiga qarab,ellipsni yoki gip□rbolani aniqlaydi.D□mak yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi to'rtta chiziqlarning biridan iborat:

Ellips

1) giperbola;

2) ikkita kesishuvchi to’g’ri chiziq;

3) bitta nuqta .

2^0. *.Yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini soddalashtirish.*

Biz bu holda yangi ordinata o'qini maxsus bo'lmagan bosh yo'nalish bo'yicha yo'naltiramiz.Bu yo'nalish noasimptotik ekanligini bilamiz.Abssissa o'qi sifatida ordinata o'qi yo'nalishiga qo'shma diametrni olamiz.YAngi koordinata-lar sistemasida ordinata o'qi yo'nalishi $\{0,1\}$ koordinatalar ega bo'ladi va bu yo'nalishga qo'shma diametr tenglamasi

$$a'_{12}\,x' + a_{22}\,y' + a'_{23} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu tenglama $y' = 0$ tenglamaga teng kuchli bo'lganligi uchun

$$a'_{12} = 0 \; a'_{23} = 0 \; a_{22} \neq 0$$

munosabatlarni olamiz.Bundan tashqari

$$\delta = a'_{11}a'_{22} - {a'_{12}}^2 = 0$$

tenglikni hisobga olsak $a'_{11} = 0$ kelib chiqadi.Natijada yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi

$$a'_{22}\,{y'}^2 + 2a'_{13}\,{x'}^2 + a_{33} = 0 \qquad (39)$$

ko'rinishga keladi.Bu tenglamada $a'_{22} \neq 0$ munosabat o'rinlidir. Bu chiziq uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{31} & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = -a'_{22}{a'_{13}}^2$$

bo'lganligi uchun ,agar $a'_{13} \neq 0$ bo'lsa ikkinchi tartibli chiziq markazga ega bo'lmaydi,agar $a'_{13} = 0$ bo'lsa ikkinchi tartibli chiziq cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'g'ri chiziqni tashkil qiladi.

Agar ikkinchi tartibli chiziq markazga ega bo'lmasa,yuqoridagi (39)tenglamada $a'_{13} \neq 0$ va ikkinchi tartibli chiziq abssissa o'qini $x' = -\frac{a'_{33}}{2a'_{13}}$ nuqtada kesib o'tadi.Biz koordinata boshini shu nuqtaga ko'chirib,tenglamani

$$a'_{22}\, y'^2 + 2a'_{13}x' = 0 \quad (40)$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamada a'_{13} koeffisientning ishorasi a'_{22} koffisient ishorasiga qarama-qarshi bo'lsa,(40) tenglama

$$y'^2 = 2\,p\,x' \qquad (41)$$

ko'rinishga keladi.Bu tenglamada $p > 0$ bo'lganligi uchun ,u parabolani aniqlaydi. Agar a'_{13} koffisient ishorasi a'_{22} koffisient ishorasiga bilan bir xil bo'lsa, (41)tenglamada $p < 0$ bo'lganligi uchun , u bo'sh to'plamni aniqlaydi.

Yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqning (39) tenglamasida a'_{13} koffisient nolga teng bo'lsa, (39) tenglama

$$a'_{22}\, y'^2 + a'_{33} = 0 \qquad (42)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada $a'_{22} \neq 0$, a'_{33} koffisient esa nolga teng bo'lishi ham,nolga teng bo'lmasligi ham mumkin.Agar a'_{33} koffisient esa nolga teng bo'lsa,(43) tenglama

$$y'^2 = 0 \quad (43)$$

ko'rinishga keladi va ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Yuqoridagi (42) tenglamada a'_{33} koffisient nolga teng bo'lmasa , (42) tenglama

$$y'^2 = c \qquad (43)$$

ko'rinishga keladi.Agar a'_{33} koffisientning ishorasi $a'_{22} \neq 0$ koeffisient ishorasiga qarama-qarshi bo'lsa, (43) tenglamada $c > 0$ bo'ladi va u ikkita parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Agar a'_{33} koffisientning ishorasi $a'_{22} \neq 0$ koeffisient ishorasi bilan bir xil bo'lsa, (43) tenglamada $c < 0$ bo'ladi va u bo'sh to'plamni aniqlaydi.

D□mak yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi uchta chiziqlarning biridan iborat:

1) parabola (markazga ega emas);
2) ikkita parallel to'g'ri chiziq (markazlar to'g'ri chizig'iga ega);
3) ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziq (markazlar to'g'ri chizig'iga ega) .

5 §. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1.Giperbola

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

tenglama bilan berilgan.Uning asimptotalarini toping.

2.Ikkinchi tartibli chiziq

$$(ax + by + c)^2 - (a_1x + b_1y + c_1)^2 = 0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa,u ikkita to'g'ri chiziqdan iborat ekanligini ko'rsating.
3.To'g'ri chiziqlarga ajralmaydigan ikkita ikkinchi tartibli to'g'ri chiziq
beshta nuqtada kesishsa,ularning ustma-ust tushishini ko'rsating.
4.Birorta to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan uchta nuqtada kesishsa,ikkinchi tartibli chiziq bir juft to'g'ri chiziqdan iborat ekanligini
ko'rsating.
5.Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning markazini toping.

a) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$

b) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$

v) $2x^2-3xy-y^2+3x+2y=0$

g) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$

d) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$

6.Ikkinchi tartibli chiziq va uning diametri mos ravishda

$$3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0 \text{ va } x+2y-2=0$$

tenglamalar berilgan.Bu diametrga qo'shma diametr tenglamasini tuzing.

7. Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning ko'rinishini aniqlang.

a) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$ J: Giperbola

b) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$ J: Ellips

v) $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$ J: Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

g) $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$ J: Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

d) $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ J: Giperbola

8. Berilgan beshta (0;0), (0;2), (-1;0), (-2;1), (-1;3) nuqtalardan o'tuvchi ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini tuzing.

9. Koordinatlar boshi $O'(1;0)$ nuqtaga ko'chirilsa, u holda ushbu

$$x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$$

ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi qanday ko'rinishga keladi.

10. Ellipsga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchak tomonlari, ellipsning o'qlariga parallel bo'lishini isbotlang.

11. Quyidagi giperbolalarning asimptotalarini toping.

a) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$

J: $6x - 2y + 5 = 0$ va $2x + 2y - 1 = 0$

b) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

J: $6x + 14y + 11 = 0$ va $2x + 2y - 1 = 0$

v) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$

J: $5y+3=0$ va $25x-5y+13=0$

g) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$

J: $2x-3y+1=0$ va $x-1=0$

12. Ellips tenglamasi

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$$

ko'rinishda va ikkita qo'shma diametrlardan biri katta o'q bilan 30^0 burchak hosil qiladi. Diametrlarning yo'nalishlari orasidagi burchak topilsin. J: $\varphi=120^0$

13. Ellips tenglaiasi

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{3}=1$$

ko'rinishda va ikkita qo'shma diametrlari orasidagi burchak 60^0 ga teng bo'lsa, diametrlarning uzunliklari topilsin. .

J: $2a'=4\sqrt{2},\ 2b'=2\sqrt{5}$

14. Giperbola tenglamasi

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$$

ko'rinishda bo'lsa, uning 45 burchak hosil qiluvchi qo'shma diametrlarining tenglamasini tuzing.

15. Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning bosh o'qlarini toping.

a) $3x^2+2xy+3y^2+6x-2y-5=0$

J: $2x+2y+1=0$ va $x-y+2=0$

b) $5x^2+24xy-2y^2+4x-1=0$

J: $28x+21y+4=0$ va $33x-44y-6=0$

v) $x^2-3xy+y^2+1=0$

J: $x+y=0$ va $x-y=0$

16.Parabola $x^2=6y$ tenglama yordamida berilgan.Uning $4x-y-5=0$ to'g'ri chiziq yo'nalishiga qo'shma diametri tenglamasini tuzing.

J: $x-12=0$

17. Parabola $y^2=2px$ tenglama yordamida berilgan.Uning parabola o'qi bilan 45^0 burchak tashkil qiluvchi vatarlarga qo'shma diametri tenglamasi tuzilsin.

J: $y-p=0$

18. Parabola

$$x^2-6xy+9y^2-12x+14y-7=0$$

tenglama yordamida berilgan.Uning absissa o'qiga qo'shma diametr tenglamasini tuzing.

J: $x-3y-6=0$

V BOB

IKKINCHI TARTIBLI SIRTLARNING KANONIK TENGLAMALARI

1§. Ellipsoid va giperboloidlar

1^0. Ellipsoid

Fazoda dekart koordinatalari sistemasi kiritilgan bo'lib,unda ikkinchi darajali $F(x,y,z)$ ko'phad yordamida berilgan

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

tenglamani qaraylik.Fazoda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deb ataladi.

Ta'rif-1. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u ellipsoid deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b \geq c > 0$ *munosabat bajarilishi talab qilinadi.*

Ellipsoid tenglamasidan ko'rinib turibdiki, u koordinata o'qlariga nisbatan **simmetrik joylashgan,koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.**

Ellipsoidning shaklini chizish uchun uning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimini qaraymiz.Masalan,uni $z=h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h|<c$ bo'lganda kesimda

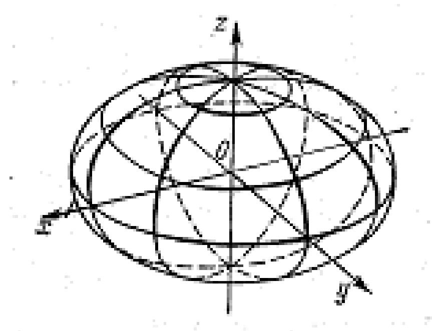
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu tenglamani

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Xuddi shunday,ellipsoidni $Oxz\,,Oyz$ tekisliklariga parallel tekisliklar bilan bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olib,ellipsoidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-1

Ta'rif-2. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3)$$

ko’rinishda yozish mumkin bo’lsa , u ikki pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ *munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.*

Ikki pallali giperboloid tenglamasidan ko’rish mumkinki,uchinchi o’zgaruvchi $z \leq c$ va $z \geq c$ tengsizliklarni qakoatlantirishi kerak. Demak
ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat va uning nomi shakliga mosdir.Agar ikki pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h| > c$ bo’lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo’ladi.Bu ellipsning yarim o’qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \qquad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

kattaliklarga tengdir.

Agar ikki pallali giperboloidni $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} + 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi.Bu giperbolaning yarim o’qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\quad , \qquad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Xuddi shunday ikki pallali giperboloidni $x=h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+1$$

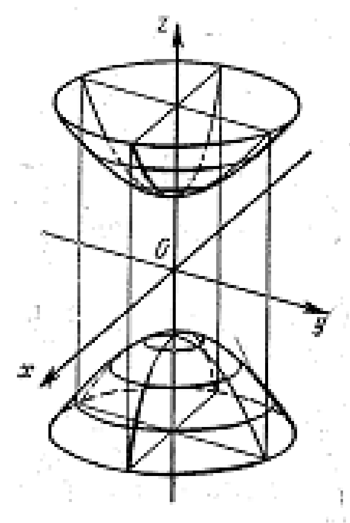
tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning

yarim o’qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\quad , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Bundan tashqari (3) tenglamadan ko'rish mumkinki, giperboloid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan,koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi.Bularni hisobga olib uni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-2. Ikki pallali giperboloid

Ta'rif-3. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u bir pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ *munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.*

Bir pallali giperboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan,koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bir pallali giperboloidni $z = h$ *tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday* h *uchun kesimda*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu ellipsning

yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir.Agar $h = 0$ *bo'lsa,kesimda eng kichkina ellips hosil bo'ladi.Bu ellips bir pallali giperboloidning bo'g'zi deb ataladi.*

Bir pallali giperboloidni $x = h$, $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, mos ravishda $|h| < a$ va $|h| < b$ bo'lganda kesimda

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$$

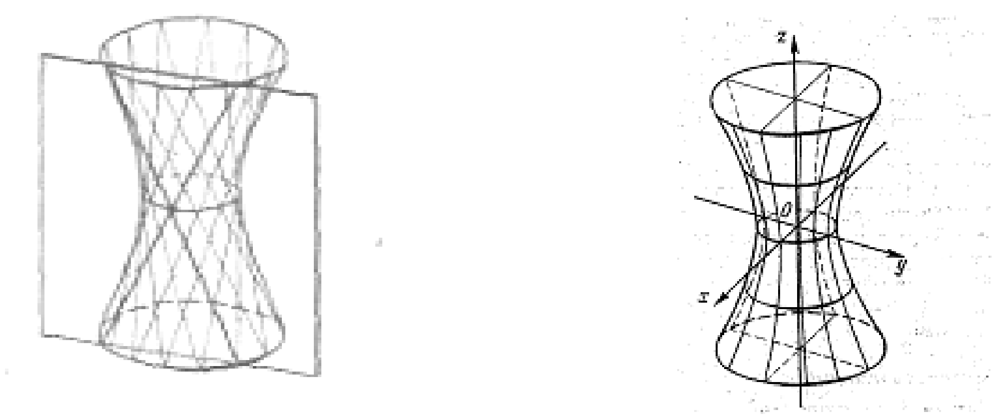
tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalar hosil bo'ladi.Bu giperbolalardan birinchisining yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar $|h| = a$ *yoki* $|h| = b$ *bo'lsa,kesimda mos ravishda*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \ \ va \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi.Bu faktlarni hisobga olib bir pallali giperboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin



Chizma-3

Ta’rif-4. Sirtning xar bir nuqtasidan shu sirtda yotuvchi to’g’ri chiziq o’tsa, bunday sirt chiziqli sirt deyiladi.

Sirt chegaralagan bo’lsa,unda to’g’ri chiziq yotmaydi va shuning uchun u chiziqli sirt bo’lmaydi.Demak ellipsoid chiziqli sirt bo’lmaydi.

Teorema-1. Bir pallali giperboloid chiziqli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan giperboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Isbot. *Bir pallali giperboloidning* $M(x_0, y_0, z_0)$ *nuqtasidan* $\{l, m, n\}$ *yo'nalishdagi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned} \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu to'g'ri chiziq bir pallali giperboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + nt)^2}{c^2} = 1$$

tenglik t ning har qiymatida bajarilishi kerak.Bu tenglikda

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

munosabatni hisobga olsak

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0 \text{ va } \quad \frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} - \frac{nz_0}{c^2} = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Yo'nalishni aniqlovchi $\{l, m, n\}$ vektorning hamma koordinatalari nolga teng bo'lmaganlini uchun yuqordagi tenglikning birinchisidan $n \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.Biz umumiylikni chegaralamasdan $n = c$ deb olamiz.Bundan esa l, m lar uchun

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

shartlarni olamiz.Agar biz

$$x_0 = x_1 + l\frac{z_0}{c}\ ,\ y_0 = y_1 + m\frac{z_0}{c} \qquad (6)$$

tengliklar bilan $(x_1, y_1, 0)$ nuqtani aniqlasak

$$\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2} = 0 \qquad (7)$$

tenglikni olamiz.Bundan tashqari

$$\frac{\left(x_1 + l\frac{z_0}{c}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_1 + m\frac{z_0}{c}t\right)^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} +$$
$$+ 2\left(\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2}\right)\frac{z_0}{c} + \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 1\right)\frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

tenglikdan

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

munosabat kelib chiqadi.Demak$(x_1, y_1, 0)$ *nuqta giperboloidning bo'g'ziga tegishlidir.Yuqoridagi (6) tenglikdan*

$$\frac{l}{m} = \frac{-a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

munosabat kelib chiqadi.Biz agar

$$l = -\frac{a}{b}y_1 u\ , \qquad m = \frac{b}{a}x_1 u$$

tengliklar bilan $\{l,m,c\}$ *vektorning* l,m *koordinatalarini aniqlasak,*

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}\right)u^2$$

munosabatni hisobga olib (8)tenglikdan $u=\pm 1$ *qiymatlarni topamiz.Demak biz qidirayotgan to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalari*

$$x=x_0-u\frac{a}{b}y_1t$$

$$y=y_0+u\frac{b}{a}x_1t$$

$$z=z_0+ct$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu to'g'ri chiziqlar $t=-\frac{z_0}{c}$ *bo'lganda* $(x_1,y_1,0)$ *nuqtadan*

o'tadi.Haqiqatan ham (6) tengliklardan

$$x_1=x_0+u\,\frac{a}{b}\,y_1\frac{z_0}{c}$$

$$y_1=y_0+u\,\frac{b}{a}\,x_1\frac{z_0}{c}$$

munosabatlarni hosil qilish mumkin.Teorema isbotlandi.

2§. Konus va uning kesimlari

Taъrif-3. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u konus deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b > 0$*,* $c > 0$ *munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.*

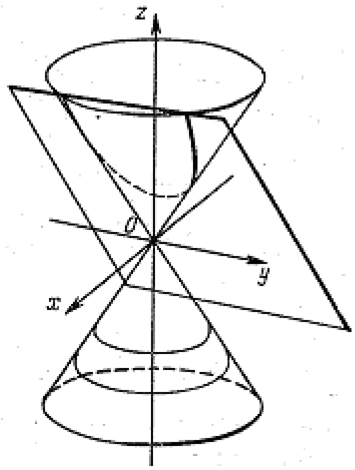
Konus tenglamasidan ko'rinib turibdiki,u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan,koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.Bundan tashqari,agar $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ nuqta konusga tegishli bo'lsa, $O(0,\, 0,\, 0)$ va $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqdagi har bir nuqta konusga tegishlidir.Haqiqatan ham, bu to'g'ri chiziqqa tegishli nuqta (tx_0, ty_0, tz_0) ko'rinishga ega va bevosita

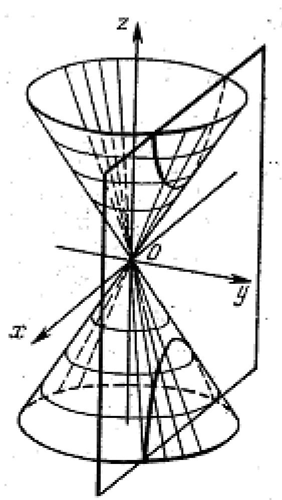
$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-\frac{z_0{}^2}{c^2}\right)=0$$

tenglikni tekshirib ko'rish mumkin.

.Konusning har bir yasovchisi bu ellipsni bir marta (faqat bitta nuqtada) kesib o'tadi.Konusda yotuvchi va bu xossaga ega bo'lgan chiziqlar konusning yasovchisi deyiladi. Bu ellipslarning markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq konusning o'qi deyiladi.

Yuqoridagi kanonik tenglamada konusning o'qi Oz o'qi bilan ustma—ust tushadi.Koordinata boshi ham konusga tegishli,konusning hamma yasovchilari *bu nuqtadan o'tadi. Konusning hamma yasovchilari o'tuvchi nuqta uning uchi deb ataladi.*





Chizma-4.

Ta'rif-4. Konusni uning uchidan o'tmaydigan tekisliklar bilan kesish natijasida hosil bo'lgan chiziqlar konus kesimlar deyiladi.

Teorema-2. Aylanadan boshqa hamma konus kesimlar tekislikda berilgan nuqtagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnidir.

Isbot. Konusni α *tekislik bilan kesganimizda hosil bo'lgan chiziqni* γ *bilan belgilaylik. Konusga ichki chizilgan va* α *tekislikka urinuvchi sferanining tekislik blan kesishish nuqtasini* F *bilan belgilaymiz. Ichki chizilgan sfera konusga aylana bo'ylab urinadi. Bu aylana yotuvchi tekislikni* ω *bilan belgilaymiz. Konus kesimga tegishli ixtiyoriy* M *nuqta olib, undan o'tuvchi yasovchi bilan* ω *tekislikning kesishish nuqtasini* B *bilan belgilaymiz. Konus kesimga tegishli* M *nuqtadan* α *va* ω *tekisliklar kesishishidan hosil bo'lgan* δ *to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazamiz. Sferaga* M *nuqtadan o'tkazilgan urinmalar kesmalari bo'lgani uchun* $FM = BM$ *tenglik o'rinli bo'ladi. Berilgan* M *nuqtadan* ω *tekislikgacha bo'lgan masofani* $h(M)$ *bilan belgilasak,*

$AM = \dfrac{h(M)}{\sin\varphi}$ $\qquad BM = \dfrac{h(M)}{\sin\psi}$ *tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu yerda* φ $-$ α *va* ω *tekisliklar orasidagi burchak,* ψ $-$ *konus yasovchis va* ω *tekislik orasidagi burchak,* A *nuqta esa* M *nuqtadan* δ *to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar asosidir. Yuqoridagi tengliklardan*

$$\frac{FM}{AM} = \frac{BM}{AM} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = e$$

munosabatni olamiz. Bu munosabatdan ko'rinib turibdiki, $\dfrac{FM}{AM}$ *nisbat* M *nuqtaga bog'lik emas. Teorema isbotlandi.*

Konus kesim uchun F nuqta uning fokusi δ to'hri chiziq esa direktrisa deyiladi. YUqoridagi nisbat 1 dan kichik yoki teng bo'lganda konus kesimning hamma nuqtalari fokus bilan birgalikda direktrisaning bir tarafida yotadi.Haqiqatdan ham direktrisaning boshqa tarafida yotuvchi M' nuqta uchun

$$\frac{FM'}{AM'} > \frac{BM'}{AM'} \geq 1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar yuqoridagi nisbat 1 dan katta bo'lsa, direktrisaning har ikkala tarafida konus kesimga tegishli nuqtalar bor. Demak, bu holda konus kesim ikki qismdan iborat .

Biz bilamizki, agar $e<1$ bo'lsa konus kesim ellips bo'ladi. Biz III bobda bu faktni isbotlaganmiz. Agar $e=1$ bo'lsa, konus kesim parabola bo'ladi. Konus kesim uchun $e>1$ bo'lsa, u giperbola bo'ladi.

Biz III bobda o'rgangan ikkinchi tartibli chiziqlarning(ellips, parabola va giperbola) har biri ikkinchi teoremaga ko'ra, konusning birorta tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lar ekan. Bu faktni algebraik metod bilan isbotlash ham mumkin.

Konusni $z=h$ tenglama bilan aniqlanuvchi tekislik bilan kessak , kesimda yarim o'qlari mos ravishda

$$\frac{a}{c}|h|, \quad \frac{b}{c}|h|$$

kattaliklarga teng bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Agar biz konusni $x=h$, $y=h$ tenglamalar bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda yarim o'qlari mos ravishda

$$\frac{c}{d}|h|, \qquad \frac{a}{d}|h| \;\; va \;\; \frac{c}{a}|h|, \qquad \frac{b}{a}|h|$$

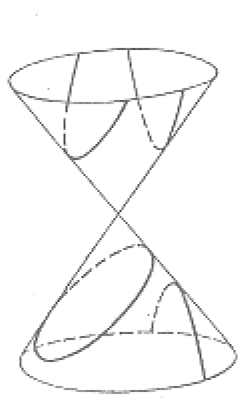
kattaliklarga teng bo'lgan giperbolalar hosil bo'ladi. Konus keimda parabola hosil bo'lishini ko'rsatish uchun, uni $z = \frac{c}{a}x + h, h \neq 0$ *tenglama bilan aniqlanuvchi tekislik bilan kesamiz. Natijada kesimda*

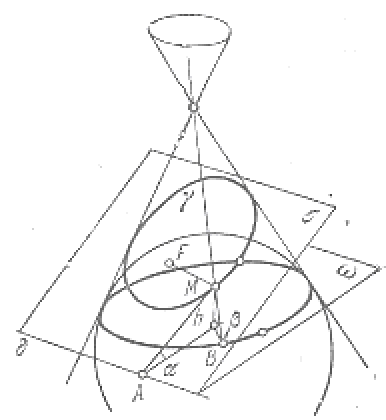
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{\left(\frac{c}{a}x + h\right)^2}{c^2} = 0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkinchi tartibli chiziqni hosil qilamiz.Koordinatalar systemasini almashtirish yordamida bu tenglamani

$$y^2 = 2\frac{hb^2}{ac}\left(x + \frac{ha}{2c}\right)$$

ko'rinishga keltirsak,uning parabola ekanligini ko'ramiz.





Chizma-5.

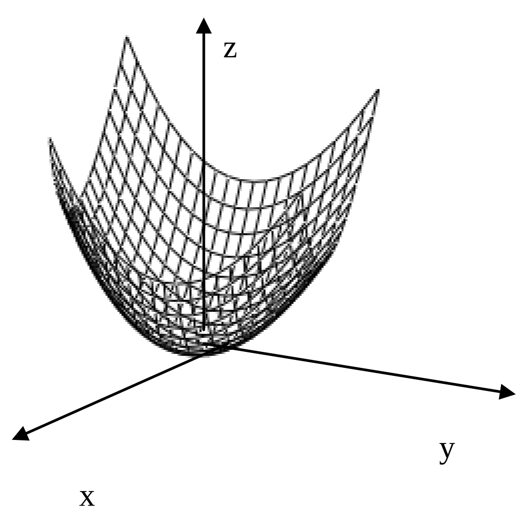
3§. Paraboloidlar

Ta'rif-5. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u elliptik paraboloid deb ataladi.Bu tenglamada $p,\ q > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Elliptik paraboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki,koordinata boshi unga tegishli, yOz va xOz tekisliklari elliptik paraboloidning simmetriya tekisliklari bo'ladi. Elliptik paraboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $h > 0$ bo'lganda kesimda yarim o'qlari mos ravishda $\sqrt{2hp}$, $\sqrt{2hq}$ kattaliklarga teng bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Elliptik paraboloidni $x = h$, $y = h$ tenglamalap bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda fokal parametrlari mos ravishda p ,q kattaliklarga teng bo'lgan parabolalar hosil bo'ladi.Bu parabolalarning uchlari mos ravishda $\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$ va $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$ nuqtalarda joylashgan. Bu xossalarni hisobga olib, elliptik paraboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-6.

Ta'rif-6. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

(4)

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u giperbolik paraboloid deb ataladi. Bu tenglamada $p > 0,\ q > 0$, *munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.*

Giperbolik paraboloid ham yOz va xOz tekisliklarlarga nisbatan simmetrik joylashgandir.Agar giperbolik paraboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $h > 0$ bo'lganda kesimda yarim o'qlari mos ravishda

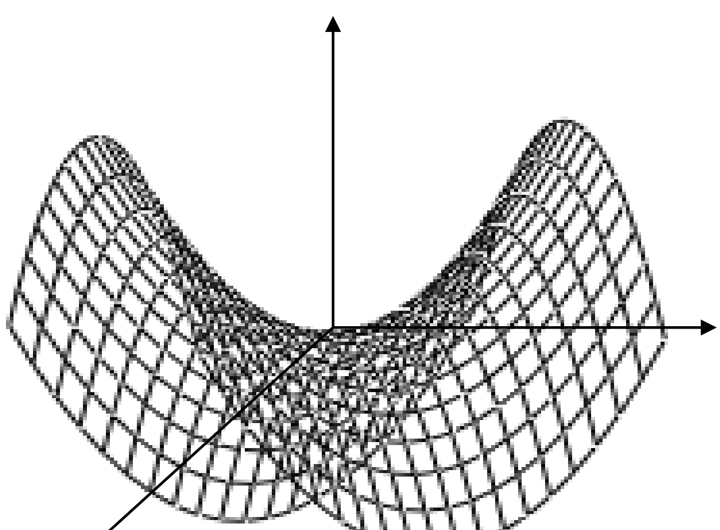
$$\sqrt{2hp}\ ,\sqrt{2hq}$$

kattaliklarga teng bo'lgan giperbola hosil bo'ladi.Agar $h < 0$ bo'lsa,kesimda haqiqiy o'qi Ox o'qqa,mavhum o'qi Oy o'qqa parallel va yarim o'qlari mos ravishda $\sqrt{-2hq}$, $\sqrt{-2hp}$ kattaliklarga teng bo'lgan giperbola paydo bo'ladi.Kesuvchi tekislik xOy tekisligi ustma-ust tushsa,kesimda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri hosil bo'ladi.

Giperbolik paraboloidni o'qiga parallel tekisliklar bilan kesssak kesimda parabolalarni olamiz.



Chizma-7.

Masalan kesuvchi tekislik $x=h$ tenglama bilan berilsa,kesimda fokal parametrlari q ga teng va uchi $\left(h,0,\frac{h^2}{2p}\right)$ nuqtada bo'lgan parabola hosil bo'ladi.

Teorema-1. Giperbolik paraboloid chiziqli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan paraboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Isbot. Giperbolik paraboloidga tegishli $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ nuqtadan o'tuvchi va

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}$$

tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziq paraboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0+tl)^2}{p}-\frac{(y_0+tm)^2}{q}=2(z_0+tn)$$

tenglik parametrning har bir qiymatida bajarilishi kerak.Bu tenglikni

$$t^2\left(\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}\right)+2t\left(\frac{lx_0}{p}-\frac{my_0}{q}-n\right)=0$$

ko'rinishda yozib,undan

$$\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}=0 \qquad \text{va} \qquad \frac{lx_0}{p}-\frac{my_0}{q}-n=0$$

tengliklarni hosil qilamiz.Bu tengliklardan $\{l,m,n\}$ yo'nalish uchun

$$l:m:n=\sqrt{p}:u\sqrt{q}:\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

munosabatni hosil qilamiz.Bu erda $u=\pm1$ tenglik bajarilgan.Demak giperbolik paraboloidning har bir nuqtasidan unda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.Bu to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalarini

$$\begin{aligned} x &= x_0+t\sqrt{p} \\ y &= y_0+ut\sqrt{q} \qquad\qquad (5) \\ z &= z_0+t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) \end{aligned}$$

ko'rinishda yozish mumkin.Bu parametrik tenglamalarda

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\neq 0$$

munosabat bajarilsa,

$$t=t_1=-\frac{z_0}{\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

bo'lganda (5)to'g'ri chiziqlar $z=0$ *tekislikni kesib o'tadi. Bu tekislikda*

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad va \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \qquad (6)$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar ham yotadi.Demak (5) to'g'ri chiziq (6) to'g'ri chiziqlarning bittasini kesib o'tadi.Buni aniqlash uchun

(5) ifodalarni (6) tenglamalarga qo'ysak

$$\left(\frac{x_0 + t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}} + u\frac{y_0 + ut_1\sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) + 2t_1 = 0$$

tenglikni olamiz.Demak (5) to'g'ri chiziq

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + u\frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \qquad (7)$$

to'g'ri chiziqni kesib o'tadi.Bu to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{aligned} x &= \tau\sqrt{p} \\ y &= -\tau u\sqrt{q} \end{aligned} \qquad -\infty < \tau < +\infty$$

ko'rinishda yozish mumkin. Yuqoridagi (5) va (7) to'g'ri chiziqlarning kesishish

$\left(x_0 + t_1\sqrt{p},\, y_0 + ut_1\sqrt{q}\right)$ *nuqtada kesishadi va bu nuqtaga parametrning*

$$\tau_1 = \frac{x_0 + t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

qiymati mos keladi.

Agar $t' = t - t_1$ *belgilashni kiritib, (5) to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini*

$$x = x_0 + t\sqrt{p} = \left(x_0 + t_1\sqrt{p}\right) + (t - t_1)\sqrt{p} = (t' + \tau_1)\sqrt{p}$$

$$y = y_0 + tu\sqrt{q} = \left(y_0 + t_1 u\sqrt{q}\right) + u(t - t_1)\sqrt{q} = u(t' - \tau_1)\sqrt{q}$$

$$z = z_0 + t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = (t - t_1)\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = 2t'\tau_1$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar $\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} = 0$ *bo'lsa, giperbolik paraboloidning (4) tenglamasidan* $z_0 = 0$ *tenglik kelib chiqadi. Demak bu holda (5) to'g'ri chiziq* $z = 0$ *tekislikda yotadi. Yuqoridagi keltirib chiqarilgan xossalarni quyidagicha yozishimiz mumkin.*

Teorema – 2. Giperbolik paraboloidning har bir yasovchisi $z = 0$ tekislikda yotadi yoki bu tekislikni kesib o'tadi.YAsovchining parametrik tenglamalarini

$$x = (t + \tau)\sqrt{p},$$
$$y = u(t - \tau)\sqrt{q},$$
$$z = 2t\tau$$

ko'rinishda yozish mumkin.Bu erda $u = \pm 1$. Agar yasovchi $z = 0$ tekislikda yotsa $\tau = 0$,yasovchi $z = 0$ tekislikda yotmasa $\tau = \frac{d}{\sqrt{p+q}}$, d – (5) va (7) to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan koordinata boshigacha bo'lgan masofa.

4 §. Silindrlar

Ta'rif-7. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

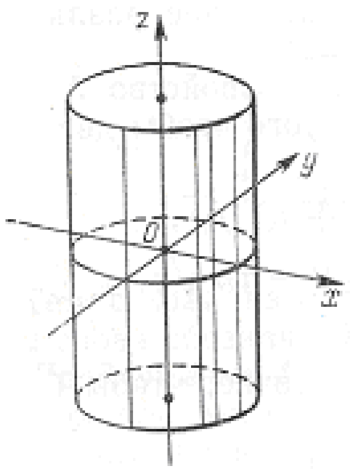
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u elliptik silindr deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b > 0$, *munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.*

Elliptik silindr tenglamasida x, y o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun koordinata boshi uning simmetriya markazi bo'ladi,koordinata tekisliklari esa simmetriya tekisliklaridir.

Silindrning simmetriya markazidan yasovchilarga parallel o'tadigan *to'g'ri chiziq silindrning o'qi deyiladi.Elliptik silindrni (8) tenglama yordamida aniqlaganimizda uning o'qi Oz o'qi bilan ustma−ust tushadi.Bu sirtniuning o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kessak,kesimda ellipslar hosil bo'ladi.*

Mustaqil ish uchun topshiriq. Elliptik silindr tenglamasida $a=b$ bo'lsa,uni o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kessak,kesimda aylanalar hosil bo'ladi.Lekin $a \neq b$ bo'lganda ham uni yasovchilarga parallel bo'lmagan tekislik bilan kesib aylana hosil qilish mumkin.Bu faktni isbotlang.



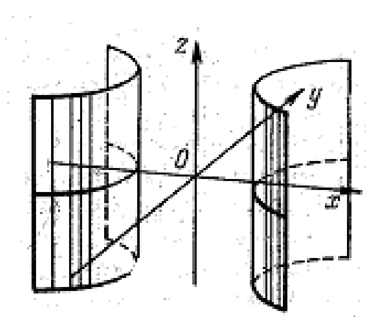
Chizma-8. Elliptik silindr

Ta'rif-8. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u giperbolik silindr deb ataladi. Bu tenglamada $a > 0,\ \ b > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Giperbolik silindr tenglamasida x, y o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun elliptik silindr kabi koordinata boshi uning simmetriya markazi bo'ladi,koordinata tekisliklari esa simmetriya tekisliklaridir. Giperbolik silindrni unig o'qiga perpendikulyar tekisliklar
bilan kessak,kesimda (9) tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi.

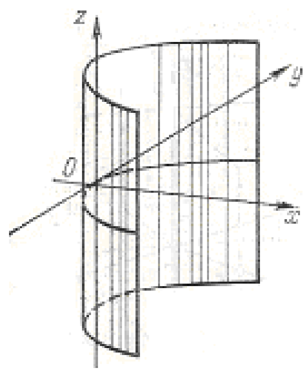


Chizma-9. Giperbolik silindr

Ta'rif-9.. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$y^2 = 2px \quad p > 0 \qquad (10)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u parabolik silindr deb ataladi..

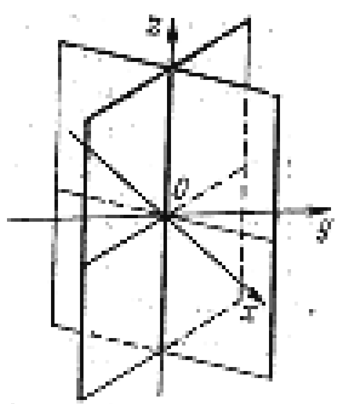


Chizma-10

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (11)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u ikkita kesishuvchi tekislikdan iborat bo'ladi.

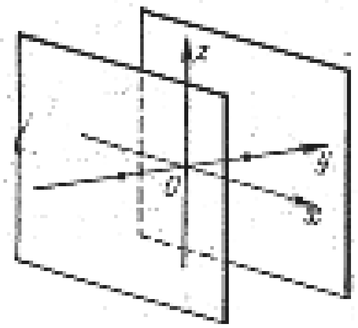


Chizma-11.

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$y^2 - b^2 = 0 \qquad (12)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u ikkita parallel tekislikdan iborat bo'ladi.



Chizma-12.

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasni biorta dekart koordinatalari sistemasida

$$y^2 = 0 \qquad (13)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u ikkita ustma-ust tushuvchi tekislikdan iborat bo'ladi.

5§. Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi

Bizga ikkinchi tartibli sirt

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa,unga tegishli $M(x_0, y_0, z_0)$ *nuqtadagi urinma*
tekislik tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif$-$10. Ikkinchi tartibli sirtda yotuvchi va M_0 nuqtadan o'tuvchi hamma chiziqlarning shu nuqtadagi urinmalari yotuvchi tekislik Sirtning M_0 nuqtadagi urinma tekisligi deyiladi.

Urinma tekislik tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun M_0 *nuqtadan o'tuvchi* α *tekislik bilan sirtni kesganimizda hosil bo'lgan kesimni (chiziqni)* γ *bilan , uning* M_0 *nuqtadagi urinmasini* l *bilan belgilaymiz.*

Urinmaga tegishli nuqtani $M(x,y,z)$ *bilan,* γ *chiziqda* M_0 *nuqtaga etarli yaqin nuqtani* N *bilan belgilab,* M_0 *va* N *nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqda* $M(x,y,z)$ *nuqtaga eng yaqin nuqta* $M'(x',y',z')$ *bo'lsin. Biz* N *nuqtaning koordinatalarini*

$$x_N = x_0 + t(x' - x_0)$$
$$y_N = y_0 + t(y' - y_0)$$
$$z_N = z_0 + t(z' - z_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Koordinatalar uchun bu ifodalarni (1) tenglamaga qo'ysak

$$F\left(x_0 + t(x' - x),\ y_0 + t(y' - y_0),\ z_0 + t(z' - z_0)\right) = 0 \quad (1)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikning chap tomonidagi ifodada $t \to 0$ *da* x', y', z' *o'zgaruvchilar mos ravishda* x_0, y_0, z_0 *kattaliklarga intiladi.Yuqoridagi tenglikni* t *ga bo'lib va* $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ *tenglikni hisobga olib,* $t \to 0$ *da limitga o'tsak*

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (14)$$

tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglama sirtning M_0 *nuqtadagi urinma tekisligi tenglamasidir.*

6 §. Sirtning diametral tekisligi

Biz ikkinchi tartibli chiziqlar uchun diametr tushunchasini kiritgan edik. Ikkinchi tartibli sirt uchun esa diametr tekislik tushunchasini kiritamiz. To'g'ri chiziq ikkinchi tartibli sirtni ikki M, N *nuqtada kesib o'tsa,* MN *kesma ikkinchi tartibli sirt uchun vatar bo'ladi.*

Teorema — 1. Parallel vatarlarning o'rtalari bir tekislikda yotadi.

Isbot. Ikkinchi tartibli sirt uchun maxsus tanlangan $Oxyz$ *dekart koordinatalar sistemasi mavjudki, uning tenglamasida* xy, xz, yz *ifodalar qatnashmaydi. Bu faktni isbotlash uchun*

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

belgilash kiritib

$$f(x,y,z) = \frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya hamma o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli , ya'ni

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = f(x,y,z), \qquad \lambda \in R^1$$

tenglik o'rinlidir. Bundan tashqari f *funksiya birlik sferada chegaralangan va sferaning birorta* M_0 *nuqtasida bu sferadagi eng kichik qiymatga erishadi.*

Funksiya bir jinsli bo'lgani uchun, u koordinata boshidan chiquvchi nurlarda funksiyaning qiymati o'zgarmaydi. Demak M_0 *nuqtada funksiya o'zining aniqlanish sohasidagieng kichik qiymatiga erishadi.*

Koordinatalar boshini o'zgartirmagan holda Oz' *o'qni* $\overline{OM_0}$ *vektor bo'yicha yunaltirib, yangi* $Ox'y'z'$ *koordinatalar sistemasini kiritamiz. Yangi koordinatalar sistemasida funksiya*

$$f(x',y',z') = \frac{a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Maxrajda turgan ifoda nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa ning kvadrati bo'lgani uchun. Uning ko'rinishi o'zgarmaydi. Yangi koordinatalar sistemasida M_0 *nuqta* $(0,0,z_0)$ *koordinatalarga ega va*

$$f(0,y',z_0)=\frac{a'_{22}y'^2+2a'_{23}y'+a'_{33}z_0'^2}{z_0^2+y^2}$$

tenglik o'rinli. Demak

$\left.\frac{df(0,y',z_0)}{dy'}\right|_{y'=0}=0$ *tenglikdan* $a'_{23}=0$ *munosabat kelib chiqadi. Yuqoridagidek* $f(x',0,z_0)$ *Funksiyaning* M_0 *nuqtada minimumga erishishidan foydalanib,* $a'_{13}=0$

tenglikni olamiz. Natijada ikkinchi tartibli sirt tenglamasi

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{33}z'^2+a'_{44}=0$$

ko'rinishga keladi. Bu erda faqat x',y' *o'zgaruvchilarga bog'liq ifodada* $x'y'$ *ko'paytmani yo'qatish uchun koordinatalar sistemasini qanday o'zgartirishni biz IV bobda o'rgandik. Buning uchun koordinata boshini o'zgartirmasdan yangi,* Ox'', Oy'' *o'qlarni o'zaro qo'shma qilib tanlasak,* Oz' *o'q yo'nalishini o'zgartirmasak, sirt tenglamasi*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \quad (15)$$

ko'rinishga keladi.

Endi bevosita teorema isbotiga kirishamiz. Buning uchun

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$$

to'g'ri chiziqqa parallel vatar o'rtasining koordinatalarini $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$

bilan belgilasak , uning uchi koordinatalari mos ravishda

$$x=\overline{x}+\lambda t,\quad y=\overline{y}+\mu t,\ \ z=\overline{z}+\nu t\ \ va\ \ x=\overline{x}-\lambda t\,, y=\overline{y}-\mu t\,, z=\overline{z}-\nu t \qquad (16)$$

ko'rinishda bo'ladi. Vatar uchlari sirtga tegishli bo'lgani uchun, ularning koordinatalari (15) tenglamani qanoatlantiradi. Ularni (15) tenglamaga qo'ysak,

$$a_{11}\overline{x}^2+a_{22}\overline{y}^2+a_{33}\overline{z}^2+2a_1\overline{x}+2a_2\overline{y}+2a_3\overline{z}+a+2t(\lambda a_{11}\overline{x}+\mu a_{22}\overline{y}$$
$$+\nu a_{33}\overline{z}+\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3)+t^2\left(a_{11}\lambda^2+a_{22}\mu^2+a_{33}\nu^2\right)=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda t *ning ishorasini o'zgartirsak ham, u o'rinli bo'ladi. Demak, birinchi darajali had koeffitsienti nolga teng bo'ladi:*

$$\lambda\left(a_{11}\overline{x}+a_1\right)+\mu\left(a_{22}\overline{y}+a_2\right)+\nu\left(a_{33}\overline{z}+a_3\right)=0 \quad (17)$$

Bundan esa vatar o'rtasining koordinatalari (17) tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Ta'rif − 11. Parallel vatarlarning o'rtalaridan o'tuvchi tekislik sirtning diametrial tekisligi deb ataladi.

Diametrial tekislikning tenglamasini ixtiyoriy dekart koordinatalar sistemasida yozish uchun (16) ifodalarni

$$F(x,y,z)=0$$

tenglamaga qo'yib

$$2F(x,y,z)\pm 2t(\lambda F_x(x,y,z)+\mu F_y(x,y,z)+\nu F_z(x,y,z))+$$
$$+t^2(a_{11}\lambda^2+a_{12}\mu^2+a_{33}\nu^2+2a_{12}\lambda\mu+2a_{23}\mu\nu+2a_{31}\nu\lambda)=0$$

tenglikni olamiz.Bu tengliklik bajarilishi uchun t *oldidagi koeffitsient nolga teng bo'lishi kerak.Demak diametrial tekislik tenglamasini*

$$\lambda F_x + \mu F_y + \lambda F_z = 0 \qquad (18)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ravshanki, agar ikkinchi tartibli sirt simmetriya markaziga ega bo'lsa, har qanday diametrial tekislik bu markazdan o'tadi.

Demak ikkinchi tatibli sirt markazi

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0 \qquad (19)$$

tenglamalar sistemasi yordamida aniqlanadi.

Paraboloidning diametrial tekisligi uning o'qiga parallel bo'ladi. Bu holda $a_{33} = 0$ *bo'lganligi uchun (18) tenglamada* z *o'zgaruvchi qatnashmaydi.*

Elliptik va giperbolik silindrlar uchun ularning o'qlaridagi hamma nuqtalar markaz bo'lgani uchun har qanday diametrial tekislik sirt o'qi orqali o'tadi.

7§. Sirtning simmetriya tekisligi

Ta'rif − 12.Bizga α tekislik berilgan bo'lib,sirtga tegishli ixtiyoriy

M nuqta uchun α tekislikka nisbatan bu nuqtaga simmetrik nuqta ham sirtga tegishli bo'lsa, α tekislik sirtning simmetrik tekisligi deyiladi.

Diametrial tekislik tenglamasidan foydalanib sirtning simmetriya tekisligi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Simmetriya tekisligiga perpendikulyar yo'nalishdagi o'zaro parallel vatarlar o'rtalari simmetriya tekisligiga tegishli bo'lganligi uchun $\bar{a} = \{l, m, n\}$ *vektorga perpendikulyar simmetriya tekisligi tenglamasi (18) ga ko'ra*

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0 \qquad (20)$$

ko'rinishda bo'ladi.Simmetriya tekisligiga $\bar{a} = \{l, m, n\}$ *vektor perpendikulyar*
bo'lganligi uchun

$$\frac{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n}{l} = \frac{a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n}{m} = \frac{a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n}{n} \qquad (21)$$

proposionallik o'rinli bo'ladi. Simmetriya tekisligiga perpendikulyar yo'nalishni (20) tenglikdan aniqlash uchun (21) nisbatni k *bilan belgilab, ekvivalent sistemani hosil qilamiz*

$$\begin{cases} (a_{11} - k)l + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{21}l + (a_{22} - k)m + a_{23}n = 0 \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - k)n = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

l, m, n *lar bir vaqtda nolga teng bo'lmaganligi uchun*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan k *ni topib (22) sistemaga qo'yamiz va undan* $\{l, m, n\}$ *yo'nalishni topamiz.*

Biz sirtning simmetriya tekisligini bilsak, ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirish uchun qulay, ya'ni kanonik koordinatalar sistemasini topish qiyin bo'lamaydi.

8 §. Mustaqil ish uchun topshiriqlar.

1.Koordinata boshini sirtning simmetriya markaziga ko'chirish yordamida quyidagi sirtlarning tenglamasini soddalashtiring.

1) $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0;$

2) $y^2+3xy+2yz+zx+3x+2y=0;$

3) $x^2+2y^2-z^2+2x-2y+2z+1=0$

2. Ikkinchi tartibli sirt $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ tenglama bilan berilgan. Bu sirtning M(2, 1, −1) nuqtadan o'tuvchi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi vatarining tenglamasini yozing.

3. Ikkinchi tartibli sirt $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$ tenglama bilan berilgan.Bu sirtga (−6; 2; 6) nuqtada urinuvchi tekislik tenglamasini yozing.

4. Ellipsoid $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ tenglama bilan berilgan. Unining (−2; 1; −1F2) nuqtadagi normali tenglamasini yozing.

5. Ikkinchi tartibli sirt $2x^2+5y^2+8z^2+12yz+6zx+2xy+8x+14y+18z=0$ tenglama bilan berilgan. Bu sirtning 1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-5}$ to'g'ri chiziqqa; 2) Ox o'qiga; 3)Oy o'qiga; 4)Oz o'qiga parallel vatarlarga qo'shma diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

6. $x^2+3z^2-6xy+8x+5=0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli sirtning $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

7. Ikinchi tartibli sirtning bitta $M(2,0,-1)$ nuqtasi, markazi $C(0,0,-1)$ va Oxy tekislik bilan kesimi

$$\begin{cases} x^2 - 4xy - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ma□lum bo'lsa,uning tenglamasini tuzing.

8. Ikkinchi tartibli sirtning berilgan tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziqni tekshiring

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad 4x - 3y - 12z - 6 = 0$

2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \quad x + 4z - 4 = 0$.

9. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ paraboloidning $3x + 2y - 4z = 0$ tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli yasovchilarini toping.

10. Berilgan $M(6,2,8)$ nuqtadan o'tuvchi va $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ sirtda yotuvchi to'g'ri chiziqlarni toping.

VI BOB

CHIZIQLI VA AFFIN FAZOLAR

1-§. Chiziqli fazolar

Birorta bo'sh bo'lmagan V t o'plam berilgan bo'lsin. Biz V to'plamning elementlari nimadan iborat ekanligi haqida ma'lumot bermagan holda,unda quyidagi ikkita amal kiritilgan bo'lishini talab qilamiz.

Birinchi amal: bu to'plamga tegishli har qanday ikkita elementga berilgan qoidaga ko'ra bu to'plamning bitta elementi mos qo'yilgan;Biz shartli ravishda V to'plamning a, b elementlariga mos qo'yilgan elementni $a + b$ ko'rinishda yozamiz.

Ikkinchi amal: berilgan haqiqiy son va to'plamning berilgan elementiga V to'plamning bitta elementi mos qo'yilgan. Biz shartli ravishda V to'plamning a elementiga va λ haqiqiy songa mos qo'yilgan V to'plamning elementini λa ko'rinishda yozamiz.

Misol-1.Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan barcha haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamini V bilan belgilab ,unda yuqoridagi ikkita amalni kiritaylik. Berilgan ikkita f va g funksiyalar uchun $f + g$, λf
funksiyalarni quyidagi qoidalar bilan kiritamiz:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Bu tengliklarning o'ng tomonida mos ravishda funksiyalarning qiymatlari qo'shilgan va funksiyaning qiymati haqiqiy songa ko'paytirilgan.

Biz birinchi bobda vektorning tor ma'nodagi geometrik ta'rifini kiritgan edik.Matematikada vektor tushunchasi biz keltirgan ta'rifga nisbatan juda keng.Vektorning keng ma'nodagi ta'rifini keltirish uchun biz avvalo chiziqli fazo tushunchasini kiritishimiz kerak.

Ta'rif-1.Berilgan to'plamdagi yuqorida kiritilgan ikkita amal uchun

1) Ixtiyoriy a, b, c ***elementlar uchun*** $a+(b+c)=(a+b)+c$ ***tenglik ,***

2) Ixtiyoriy a, b ***elementlar uchun*** $a+b=b+a$ ***tenglik ,***

3) to'plamga tegishli shunday o ***element mavjudki har qanday*** a ***element uchun*** $a+o=a$ ***tenglik ,***

4)Har bir a ***element uchun shunday*** $-a$ ***element mavjudki*** $a+(-a)=o$ ***tenglik,.***

5)Har qanday λ, μ ***haqiqiy sonlar uchun va va har bir*** a ***element uchun***

$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ ***tenglik ,***

6) Har qanday λ, μ ***haqiqiy sonlar uchun va va har bir*** a ***element uchun***

$(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$ ***tenglik ,***

7) Har qanday λ ***haqiqiy son va ixtiyoriy*** a,b ***elementlar uchun*** $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ ***tenglik ,***

8) Har bir a ***element uchun*** $1\cdot a=a$ ***tengliklar o'rinli bo'lsa, to'plam chiziqli fazo ,uning elementlari esa vektorlar deb ataladi.Uchinchi aksiomada mavjudligi ta'kidlangan*** o ***element chiziqli fazoning nol' elementi yoki nol' vektor deyiladi.***

Yuqoridagi misolda ko'rish mumkinki,keng ma'noda funksiya ham vektor bo'ladi.Albatta bir to'g'ri chiziqda yotgan vektorlar (yo'nalishga ega bo'lgan kesmalar),bir tekislikda yoki fazoda yotgan vektorlar chiziqli fazolardir.Biz ular uchun yuqorida keltirilgan sakkizta aksiomalarning bajarilishini birinchi bobda isbotlaganmiz.Chiziqli fazolarga juda ko'plab misollar keltirish mumkin.

Mustaqil ish uchun topshiriq-1.

1.Berilgan $[a,b]$ *kesmada aniqlangan va* k marta differensiallanuvchi funksiyalar to'plami chiziqli fazo ekanligini ko'rsating.

2.Bir o’zgaruvchili hamma ko’phadlar to’plami chiziqli fazo ekanligini ko’rsating.

Misol-2.Tartiblangan n ta haqiqiy sonlar ketma-ketliklari to’plamini R^n bilan belgilab,unda chiziqli amallarni,ya’ni ”qo’shish”va songa
“ko’paytirish” amallarini quyidagicha kiritamiz:
ikkita $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ elementlar uchun ularga mos qo’yilgan element $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} + \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n\}$ tenglik bilan, λ haqiqiy son va $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ element uchun “ko’paytirish” amalini $\lambda\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n\}$ tenglik bilan aniqlaymiz.Bu amallar yuqoridagi 1-8 akiomalarni qanoatlantiradi.Bu chiziqli fazo biz uchun nihoyatda muhim ekanligini keyigi paragraflarda ko’ramiz.

1)Bizga chiziqli fazo berilgan bo’lsa, 3-aksiomada mavjudligi talab qilingan nol vektor yagonadir.Haqiqatan,agar ikkita o_1 va o_2 nol elementlar mavjud bo’lsa,ixtiyoriy a element uchun $o_1 + a = a$ va $o_2 + a = a$ tengliklar o’rinli bo’ladi.Birinchi tenglikni $a = o_2$ element uchun,ikknchi tenglikni $a = o_1$ element uchun yozsak,biz $o_1 + o_2 = o_2$, $o_2 + o_1 = o_1$ tengliklarni hosil qilamiz.Bu tengliklardan $o_1 = o_2$ tenglik kelib chiqadi.

2)Chiziqli fazoda har bir a element uchun unga qarama-qarshi $-a$ element yagonadir.
Agar a element uchun ikita b, c elementlar mavjud bo’lib $a + b = o$ va $a + c = o$ tengliklar o’rinli bo’lsa,

$$b = o + b = (a + c) + b = (a + b) + c = o + c = c$$

tenglik o’rinlidir.

3)Chiziqli fazoga tegishli ixtiyoriy a, b elementlar uchun

$$a + x = b$$

tenglama yagona $x = b + (-a)$ echimga ega.

Haqiqatan $a + x = b$ bo'lsa, x element uchun $x = (a + x) + (-a) = b + (-a)$ Tenglik o'rinli va $a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = o + b$ bajariladi.

4) Chiziqli fazo elementini nol soniga ko'paytirsak nol element hosil bo'ladi, ya'ni $0a = o$ tenglik o'rinlidir. Haqiqatan $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a = o$ munosabatdan $0a = 0a - 0a = o$ tenglik kelib chiqadi.

5) Chiziqli fazoning nol vektoriniixtiyoriy songa ko'paytirsak nol vektor hosil bo'ladi,ya'ni $\forall \lambda \in R$ uchun $\lambda o = o$ tenglik o'rinlidir.Haqiqatan $\lambda o = \lambda(o + o) = \lambda o + \lambda o,$ munosabatdan

$\lambda a = \lambda a - \lambda a = o.$ tenglik kelib chiqadi.

6)Chiziqli fazoning ixtiyoriy a elementini -1 soniga ko'paytirsak unga qarama-qarshi $-a$ element hosil bo'ladi,ya'ni $(-1)a = -a$ tenglik o'rinlidir.

Haqiqatan $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = o.$munosabatdan $(-1)a = -a$ tenglik kelib chiqadi.

7)Chiziqli fazo aksiomalarining ikkinchisi boshqa aksiomalar va qarama-qarshi element yagonaligidan kelib chiqadi.

Haqiqatan $(a + b) - (b + a) = a + b + (-1)(b + a) = a + (b - b) - a = a - a = o$ munosabatdan $b + a = a + b$ tenglik kelib chiqadi.

Bizga chiziqli fazoda m ta vektordan iborat $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oila va $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.Bu vektorlar yordamida hosil qilingan

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \qquad (1)$$

vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vektorlarning chiziqli kombinasiyasi deyiladi.

Birorta b vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vektorlarning chiziqli kombinasiyasi bo’lsa, b vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vektorlar orqali chiziqli ifodalangan deyiladi.

Ta’rif-2. Chiziqli fazoning $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***elemenglar uchun kamida bittasi noldan farqli*** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ ***haqiqiy sonlar mavjud bo’lib,*** $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ ***munosabat o’rinli bo’lsa,*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***vektorlar oilasi chiziqli bog’lanishli,aks holda esa bu oila chiziqli erkli deyiladi.***

Biz tor ma’nodagi vektorlar uchun chiziqli bog’lanishli va chiziqli erkli oilalarning xossalari bilan birinchi bobda tanishdik. Keng ma’nodagi vektorlar uchun ham bu xossalar saqlanadi.Ularning asosiylarini keltiramiz.

1) Birorta b vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vektorlarning chiziqli kombinasiyasi bo’lsa, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oilaga tegishli har bir vektor $b_1, b_2, \ldots, b_m$ lar orqali chiziqli ifodalansa, b vektor $b_1, b_2, \ldots, b_m$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi.

2)V□kt□rl□r □il□si chiziqli b□g'l□nishli qism □il□g□ eg□ bo'ls□, bu chiziqli b□g'l□nishli bo'l□di.

3) Vektorlar oilasiga nol vektor tegishli bo’lsa,bu oila chiziqli bog’lanishli bo’ladi.

T□□r□m□–1.V□kt□rl□r □il□si chiziqli b□g'l□nishli bo'lishi uchun bu □il□d□gi k□mid□bitt□v□kt□r q□lg□nl□ri □rq□li chiziqli if□d□l□nishi ***zarur va etarlidir.***

Isbot. Chiziqli fazoning $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vektorlar oilasi chiziqli bog’lanishli bo’lsa, kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ haqiqiy sonlar mavjud bo’lib,

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ tenglik o’rinli bo’ladi.

Agar $\lambda_1 \neq 0$ bo'lsa,

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_2 - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1}a_m$$ tenglikni hosil qilamiz.

Va aksincha $a_1 = k_2 a_2 + \cdots k_m a_m$ tenglikdan $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = k_2, \cdots, \lambda_m = k_m$ sonlar uchun $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ tenglikni hosil qilamiz.

Teorema-2.***Chiziqli fazoda*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***oilaning har bir vektori*** $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ***vektorlar orqali chiziqli ifodalanib,*** $m > n$ ***bo'lsa,*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***oila chiziqli bog'lanishli bo'ladi.***

Isbot. Teorema shartiga ko'ra

$$\begin{array}{l}\lambda_{11}, \lambda_{12}, \cdots, \lambda_{1n}, \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \cdots, \lambda_{mn},\end{array}$$

haqiqiy sonlar mavjud bo'lib,

$$\begin{array}{l}a_1 = \lambda_{11}b_1 + \lambda_{12}b_2 + \dots \lambda_{1n}b_n, \\ a_2 = \lambda_{21}b_1 + \lambda_{22}b_2 + \dots \lambda_{2n}b_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m = \lambda_{m1}b_1 + \lambda_{m2}b_2 + \dots \lambda_{mn}b_n,\end{array}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Biz

$$\begin{array}{l}\lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \dots \lambda_{m1}x_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{1n}x_1 + \lambda_{2n}x_2 + \dots \lambda_{mn}x_m = 0,\end{array}$$

tenglamalar sistemasini qarasak,bu sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'p, ya'ni $m > n$ bo'lganligi uchun bu sistema notrivial $x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \dots,\ x_m^{(0)}$ echimga ega. Bu echim elementlari yordamida hosil qilingan $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorlarning chiziqli kombinasiyasi uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$\begin{array}{l}x_1^{(0)}a_1 + x_2^{(0)}a_2 + \dots x_m^{(0)}a_m = x_1^{(0)}(\lambda_{11}b_1 + \lambda_{12}b_2 + \dots \lambda_{1n}b_n) + \\ + x_2^{(0)}(\lambda_{21}b_1 + \lambda_{22}b_2 + \dots \lambda_{2n}b_n) + \dots + x_m^{(0)}(\lambda_{m1}b_1 + \lambda_{m2}b_2 + \dots \lambda_{mn}b_n) = \\ = \left(\lambda_{11}x_1^{(0)} + \lambda_{21}x_2^{(0)} + \dots \lambda_{m1}x_m^{(0)}\right)b_1 + \dots + \left(\lambda_{1n}x_1^{(0)} + \lambda_{2n}x_2^{(0)} + \dots \lambda_{mn}x_m^{(0)}\right)b_n = \\ = 0b_1 + \dots + 0b_n = o.\end{array}$$

Demak $a_1, a_2, \dots, a_m$ oila chiziqli bog'lanishli bo'ladi.

Chiziqli fazo elementlari uchun ham kollinear va komplanar vektorlar tushunchalarini kiritish mumkin.Buning uchun chiziqli bog'lanishlilik tushunchasidan foydalanamiz.

Ta'rif-3.Ikkita vektordan iborat vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ular kollinear vektorlar,uchta vektordan iborat vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ular komplanar vektorlar

deyiladi.

Bizg□ m□'lumki,bir t□kislikd□ yotuvchi h□r q□nd□y ucht□ v□kt□r v□ uch o'lch□mli f□z□d□ h□r q□nd□y to'rtt□ v□kt□r chiziqli b□g'l□nishli bo'l□di.

Endi chiziqli fazoda bazis tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif-4.Chiziqli fazoda har qanday vektorni $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***vektorlar orqali ifodalash mumkin bo'lsa,*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***oila to'liq oila deyiladi.***

Agar chiziqli fazoda chekli sondagi elementardan iborat to'liq oila mavjud bo'lsa, fazo chekli o'lchamli deyiladi.

Ta'rif-5.Chiziqli fazoda chiziqli erkli to'liq oila shu fazoning bazisi deyiladi.

Teorema -3.*Bizga* V ***chiziqli fazoda*** $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ***bazis va*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***oila berilgan bo'lsin.Berilgan*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***oila chiziqli erkli bo'lsa,*** $m \le n$ ***bo'ladi, agar*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***oila to'liq bo'lsa,*** $m \ge n$ ***bo'ladi.***

Isbot.Chiziqli fazo bazisi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila to'liq bo'lganligi uchun $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oilaning har bir vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oilaning vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi. Yuqoridagi 2- teoremaga ko'ra agar $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oila chiziqli erkli bo'lsa, $m \le n$ bo'ladi.

Agar $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oila to'liq bo'lsa, u holda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisning har qanday vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oilaning vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi. YAna 2-teoremaga ko'ra $e_1, e_2, \ldots, e_n$ chiziqli erkli bo'lgaligi uchun $m \ge n$ bo'ladi.

Bu teoremadan quyidagi muhim fakt kelib chiqadi:

Teorema -4. Chekli o'lchamli chiziqli fazo bazislari bir xil sondagi vektorlardan iborat bo'ladi.

Biz keyingi paragraflarda faqat chekli o'lchamli chiziqli fazolar bilan ish ko'ramiz va chekli o'lchamli V chiziqli fazoning o'lchamini $\dim V$ bilan belgilaymiz.

Teorema -5. Chekli o'lchamli chiziqli fazoda n ta vektordan iborat oila ($n = \dim V$) bazis bo'lishi uchun bu oilaning to'liq yoki chiziqli erkli bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot. Biz agar birorta $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila to'liq bo'lsa, chiziqli erkli bo'lishini va aksincha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila chiziqli erkli bo'lsa, uning to'liq ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Agar $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila to'liq va chiziqli bog'lanishli bo'lsa, unda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oiladan mos vektorni o'chirib $n-1$ vektordan tashkil topgan to'liq vektorlar oilasini hosil qilamiz.Bu esa 3-teoremaga ziddir. Demak, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila to'liq bo'lsa u chiziqli erkli bo'lar ekan.

Endi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila chiziqli erkli bo'lsin. Biz bu oilaning to'liq ekaligini ko'rsatamiz, ya'ni ixtiyoriy $a \in V$ vektor $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila vektorlari orqali chiziqli ifodalanishini ko'rastishimiz kerak.Buning uchun $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ oilani qaraylik, bu oila $n+1$ ta vektordan iborat va yuqoridagi 3-teorema ga ko'ra $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'ladi.. Demak, $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ oila vektorlaridan bittasi qolgan vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi. Teorema shartiga ko'ra $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oila chiziqli erkli bo'lganligi uchun faqat a vektorgina qolgan vektorlar orqali chiziqli ifodalanishi mumkin. Teorema isbotlandi.

Chiziqli V fazoda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $a \in V$ vektor uchun shunday $a^1, a^2, \ldots, a^n$ sonlar mavjud bo'lib, bu vektorni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \ldots + a^n e_n \qquad (1)$$

Ta'rif-6. Birinchi tenglikdagi $a^1, a^2, \ldots, a^n$ sonlari a vektorning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdag koordinatalari deb ataladi.

Teorema -6.Ixtiyoriy vektor berilgan bazisdagi koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi.Vektorlar qo'shilganda ularning koordinatalari qo'shiladi,vektorni songa ko'paytirganda ko'paytma vektor koordinatalari mos ravishda ko'paytiriluvchi vektor koordinatalari bilan ko'paytirilayotgan son ko'paytmalaridan iborat.

Isbot.Biz a vektor uchun bazis vektorlar orqali ikkita chiziqli

$$a = a^1e_1 + a^2e_2 + ... + a^ne_n$$

$$a = b^1e_1 + b^2e_2 + ... + b^ne_n$$

ifodalarga ega bo'lsak,bu tengliklardan

$$0 = (a^1 - b^1)e_1 + a^2e_2 + ... + a^ne_n$$

tenglikni olamiz. Bazisni tashkil qiluvchi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan

$$a^1 = b^1 \quad , \ a^2 = b^2, \cdots, \ a^n = b^n$$

tengliklar kelib chiqadi.Demak har qanday vektor o'zining koordinatalri bilan yagona ravishda aniqlanadi.

Biz agar ikkita

$$a = a^1e_1 + a^2e_2 + ... + a^ne_n \quad , b = b^1e_1 + b^2e_2 + ... + b^ne_n$$

vektorlarning yig'indisini

$$a + b = a^1e^1 + a^2e^2 + \cdots + a^ne_n + b^1e_1 + \cdots + b^ne_n = a^1e_1 + b^1e_1 + \cdots + a^ne_n + b^ne_n =$$
$$= \left(a^1 + b^1\right)e_1 + \cdots + \left(a^n + b^n\right)e_n.$$

ko'rinishda yozsak, $a + b$ vektorning koordinatalari mos ravishda a va b vektorlarning koordinatalari yig'indilariga tengligini ko'ramiz.

Ixtiyoriy a vektor va k soni uchun chiziqli fazo aksiomalaridan foydalanib

$$ka = k\left(a^1 e_1 + \cdots + a^n e_n\right) = \left(ka^1\right) e_1 + \cdots + \left(ka^n\right) e_n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni yig'indi belgisidan foydalanib, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$ka = k\left(\sum_{i=1}^{n} a^i e_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} ka^i e_i\right).$$

Teorema isbotlandi.

Qulaylik uchun yig'indida yuqori indeks va quyi indeks bir xil sonda qatnashgan holda shu indeks bo'yicha yig'indi belgisi tushirib quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$a = a^i e_i,\ ka = (ka^i)e_i .$$

Keyingi paragraflarda yozuvni qisqartirish maqsadida biz bu belgilashdan foydalanamiz.

Ta'rif 7. ***Bizga V va V chiziqli fazolar va o'zaro bir qiymatli $\varphi : V \to V'$ akslantirish berilgan bo'lib, ixtiyoriy $a, b \in V$ vetorlar va ixtiyoriy k haqiqiy son uchun $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ $\varphi(Ra) = R\varphi(a)$ tengliklar bajarilsa, φ akslantirish izomorfizm deb ataladi.***

Agar V va V' chiziqli fazolar o'rtasida izomorfizm mavjud bo'lsa V va V' fazolar izomorf fazolar deyiladi va $V \approx V'$ ko'rinishda yoziladi.Fazolar o'rtasidagi izomorflik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'ladi,ya'ni quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

a) $V \approx V$, b) $V \approx V' \Rightarrow V' \approx V$;s).$V \approx V',\ \ V' \approx V'' \Rightarrow V \approx V''$

Biz V chiziqli fazoda $\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ bazis yordamida har bir $a \in V$ vektorni uning koordinatalari yordamida $a^1, \ldots, a^n$ yagona ravishda aniqlaymiz. Ikkinchi tomondan $(a^1, \ldots, a^n)$ ketma-ketlik R^n fazo elementidir. Natijada $\varphi(a) = (a^1, \ldots, a^n)$ formula yordamida $\varphi : V \to R^n$ izomorfizmni aniqlaymiz.Bu akslantirish uchun $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ka) = k\varphi(a)$. tengliklar 5-teoremadan kelib chiqadi. Demak quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorem 7.Har qanday n o'lchamli chiziqli fazo R^n fazoga izomorfdir.

2§. Affin fazolar

Ta'rif 8.Bizga X to'plam va n o'lchamli V chiziqli fazo berilib , X to'plamning nuqtalarininghar bir A, B juftiga birorta V chiziqli fazoga tegishli $\overline{AB}$ vektor mos qo'yilgan bo'lib:

1) X to'plamning har bir A nuqtasi va har bir $a \in V$ uchun yagona $B \in X$ nuqta mavjud bo'lib $\overline{AB} = a$ tenglik,

2)Ixtiyoriy uchta A, B, C nuqtalar uchun $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ tenglik bajarilsa, X to'plam n o'lchamli affin fazo deyiladi.

Bu ta'rifning ikkinchi shartidan $A = B = C$ bo'lganda $\overrightarrow{AA} = 0$ tenglikni, $C = A$ bo'lganda $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ tenglikni hosil qilamiz.Biz bir o'lchamli affin

fazoni to'g'ri chiziq, ikki o'lchamli affin fazoni tekislik va uch o'lchamli affin fazoni fazo deb ataymiz.

Ta'rif 9*.Affin fazoda berilgan* 0 nuqta va *V chiziqli fazoning* $e_1, \ldots, e_n$ bazisidan iborat $\{O, e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ oila affin fazodagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va $0\, e_1 \ldots e_n$ ko'rinishda belgilanadi.

Bizga affin fazoda A nuqta berilgan bo'lsa, $\overrightarrow{0A}=a^1e_1+\ldots+a^ne_n$ tenglikdagi $a^1,\ldots,a^n$ sonlari A nuqtaning affin koordinatalari deyiladi.

Affin fazolarda to'g'ri chiziq tushunchasiga ta'rif bera olamiz.Agar affin fazoda M_0 nuqta va mos chiziqli fazoda a vektor berilgan bo'lsa, $\overrightarrow{M_0M}$ vektor a vektorga kollinear bo'ladigan affin fazodagi M nuqtalar to'plami M_0 nuqtadan o'tuvchi va a vektorga parallel to'g'ri chiziq deyiladi.

Teorema 8.Affin fazoning o'zaro farqli ikkita nuqtasidan bitta to'g'ri chiziq o'tadi.

Isbot.Bizga M_0 va M_1 nuqtalar berilgan bo'lsa $\overrightarrow{M_0M_1}=a$ vektorga parallel va M_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq M_0 va M_1 nuqtalardan o'tuvchi yagona to'g'ri chiziqdir.

Berilgan M_0 va M_1 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq nuqtalari $M_0M=tM_0M_1$ tenglikdan aniqlanadi.Bu tenglikdan har bir M nuqta t parametrning bitta qiymati bilan aniqlanishi kelib chiqadi.Masalan $M=M_0$ nuqta parametrning $t=0$ qiymatiga, $M=M_1$ nuqta esa parametrning $t=1$ qiymatiga mos keladi.Parametrning $0<t<1$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtalar M_0 va M_1 nuqtalar orasida yotuvchi nuqtalar deyiladi. Berilgan M_0 va M_1 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning M_0 va M_1 nuqtalar orasida yotuvchi nuqtalar to'plami boshi M_0 nuqtada va oxiri M_1 nuqtada bo'lgan kesma deyiladi va $\overrightarrow{M_0M_1}$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rif-10.Chiziqli fazo elementlarining har bir juftiga bitta haqiqiy sonni mos qo'yuvchi $a,b\to(a,b)$ ***funksiya uchun:***

1.Ixtiyoriy $a,b,c\in V$ ***vektorlar uchun*** $(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$ ***tenglik.***

2. Ixtiyoriy k ***haqiqiy son va*** a,b ***vektorlar uchun*** $k(a,b)=(ka,b)=(a,kb)$ ***tenglik;***

3.Har qanday ikkita a,b ***vektor uchun*** $(a,b)=(b,a)$ ***tenglik***

4. Ixtiyoriy noldan farqli** a **vektor uchun** $(a,a)=a^2>0$ **munosabat
bajarilsa, (a,b) **miqdor** a,b **vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi.**

Chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, $|a|=\sqrt{(a,a)}$ formula yordamida vektor uzunligini aniqlaymiz.Vektorlar orasidagi burchakning kosinusi

$$\cos\varphi=\frac{(a,b)}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}$$

tenglikdan aniqlanadi.Bu erda $a^2=(a,a)$ belgilash qabul qilingan. Bu formula korrekt aniqlanganligini ko'rsatish uchun $|ab|\le|a||b|$ tengsizlikni isbotlashimiz kerak.Bu tengsizlik Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi $(ab)^2\le a^2b^2$ tengsizlikga teng kuchlidir.Bu tengsizlikni isbotlash uchun $f(t)=(a+tb)^2$ funksiyani qaraymiz.Bu funksiyani $f(t)=a^2+2t(ab)+t^2b^2$ ko'rinishda yozsak, uning diskriminanti uchun

$$(ab)^2-a^2b^2\le 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi.Bu tengsizlik esa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ekvivalentdir. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan

$$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\le|a|^2+2|a|.|b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2$$

va

$$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\ge|a|^2-2|a|.|b|+|b|^2=(|a|-|b|)^2$$

tengsizliklarni hosil qilamiz.Bu tengsizliklardan

$$||a-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Ta'rif-11.Affin fazoga mos keluvchi chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, yevklid fazosi deyiladi.

Yevklid fazosida $ABC-$ixtiyoriy uchburchak berilgan bo'lsa, $a = AB, b = BC$ belgilashlar kiritib va $a+b = AC$ tenglikni hisobga olib uchburchak tomonlari uchun

$$\left|\,|AB| - |BC|\,\right| \le |AC| \le |AB| + |BC|$$

tengsizlikni hrsil qilamiz.

Agar $0ACB-$parallelogramm bo'lsa, $a = 0A,\ b = 0B$ belgilashlar kiritib va $0C = a+b, \overrightarrow{AB} = b-a$ tengliklarni hisobga olib

$$|OC|^2 + |AB|^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2\left(a^2+b^2\right) = 2\left(|OA|^2 + |OB|^2\right) = |OA|^2 +$$
ten

$$+|AC|^2 + |BC|^2 + |OB|^2$$

glikni hosil qilamiz. Demak parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi uning tomonlari kvadratlari yig'indisiga teng.

Ta'rif 12. Berilgan a ***va*** b ***vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, ular ortogonal vektorlar deyiladi***.

Agar vektorlar ortogonal bo'lsa, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ tenglik o'rinli bo'ladi. Uchburchakning tomonlari uchun $a = 0A,\ b = 0B,$ belgilashlar kiritib va $b - a = AB$ tenglikni hisobga olib,Pifagor teoremasini hosil qilamiz:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2.$$

Bizga V chiziqli fazoda $e_1,\dots,e_n$ bazis berilgan bo'lsa,

$$x = x^1e_1 + x^2e_2 + \cdots + x_ne_n, y = y^1e_1 + y^2e_2 + \cdots + y^ne_n$$

vektorlarning skalyar ko'paytmasini

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n}(x^i e_i)(y^j e_i) = \sum_{i,j=1}^{n}(e_i e_i) x^i y^j$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.Agar $g_{ij} = (e_i, e_j)$ belgilash kiritsak skalyar ko'paytma uchun

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j \qquad (1)$$

ifodani olamiz.Tekshirib ko'rish mumkinki

$g_{ij} = (e_i, e_j)$ matrisa simmetrik matrisadir. Masalan $n = 3$ bo'lganda

skalyar ko'paytma

$$\begin{aligned}(x, y) &= g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + g_{13}x^1y^3 + g_{21}x^2y^1 + g_{22}x^2y^2 + \\ &+ g_{23}x^2y^3 + g_{31}x^3y^1 + g_{32}x^3y^2 + g_{33}x^3y^3 = g_{11}x^1y^1 + \\ &+ g_{12}(x^1y^2 + x^2y^1) + +g_{13}(x^1y^3 + x^3y^1) + g_{22}x^2y^2 + \\ &+ g_{23}(x^2y^3 + x^3y^2) + g_{33}x^3y^3,\end{aligned}$$

ko'rinishga keladi. Bu erda

$g_{11} = (e_1, e_1),\ g_{22} = (e_2, e_2),\ g_{12} = g_{21} = (e_1, e_2),\ g_{23} = g_{32} = (e_2, e_3),$
$g_{13} = g_{31} = (e_1, e_3),\ g_{23} = (e_3, e_3)$ bo'lib,skalyar ko'paytmaini

$$(x, y) = \sum_i g_{ii} x^i y^i + \sum_{i<j} g_{ij} (x^i y^j + x^j y^i)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Biz agar $x=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix} g_{11}\cdots g_{1n} \\ g_{21}\cdots g_{2n} \\ g_{n1}\cdots g_{nn} \end{pmatrix}.$ matrisalar kiritsak,

skalyar ko'paytmani $x^{\mathrm{T}}Gy$ ko'rinishda yozishimiz mumkin.Bu erda $x^{\mathrm{T}}=(x^1,\dots,x^n)$ -transponirlangan matrisa.Matrisalarni ko'paytirish amalllarini bajarsak

$$x^{\mathrm{T}}Gy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x^i y^j$$

tenglikni hosil qilamiz.Demak

$$(x,y)=x^{\mathrm{T}}Gy$$

tenglik o'rinlidir.Agar $x=y$ bo'lsa,

$$(x,x)=x^2=g_{ij}x^i x^j=\sum_i g_{ii}(x^i)^2+2\sum_{i<j}g_{ij}x^i x^j=x^{\mathrm{T}}Gx$$

ifodani hosil qilamiz.Algebra kursidan bilamizki

$$x^{\mathrm{T}}Gy$$

ifoda bichiziqli forma deb ataladi. Skalyar ko'paytma uchun $(x,y)=(y,x)$ tenglik o'rinli bo'lganligi uchun bu forma simmetrik formadir.Har bir x vektor $(x,x)=x^2\geq 0$ bo'lganligi uchun (x) musbat aniqlangan bichiziqli formadir.Demak skalyar ko'paytma berilgan bazisda musbat aniqlangan bichiziqli formadan iboratdir.Bu forma bazisning metrik formasi deyiladi.Albatta bazis o'zgarganda metrik forma o'zgaradi. Koeffisientlarning o'zgarish qonunini tekshirish uchun x vektorning $e_1, \ldots, e_n$ va $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ bazisdagi koordinatalaridan iborat

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}$$

matrisalarni kiritib va $e_1, \ldots, e_n$ bazisdan $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ bazisga o'tish matrisasini $C = (C^i_{j'})$ – bilan belgilab

$$x = Cx' \quad (x,x) = x^2 = x^{\mathrm{T}}Gx$$

tengliklardan

$$(x,x) = (x'^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})G(Cx') = x'^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}GC)x' \tag{2}$$

munosabatni olamiz.Bu tenglikdan

$$G' = C^{\mathrm{T}}GC. \tag{3}$$

bog'lanish kelib chiqadi.Bu munosabatni koeffisientlar orqali yozsak, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$g_{i'j'} = \sum_{i,j=1}^{n} c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij} \ . \tag{4}$$

Ta'rif-13 Berilgan $e_1, \ldots, e_n$ ***bazis uchun***

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, bu bazis ortonormal bazis deyiladi.

Ortonormal bazisning vektorlari o'zaro ortogonal bo'lib, ularning uzunliklari birga tengdir.

Ta'rif-14 Berilgan x vektor uchun $x_1=(x, e_1), \dots, x_n=(x, e_n)$ ***skalyar ko'paytmalar*** $e_1, \dots, e_n$ ***bazisga nisbatan x vektorning Fur'e koeffisientlari deyiladi.***

Albatta agar $x=0$ bo'lsa, uning Fur'e koeffisientlari uchun $x_1=0, \dots, x_n=0$ tengliklar o'rinli bo'ladi, lekin $x_1=0, \dots, x_n=0$ tengliklardan $x=0$ tenglik kelib chiqmaydi.Agar har bir x vektor uchun $x_1=0, \dots, x_n=0$ tengliklardan $x=0$ kelib chiqsa, bazis yopiq bazis deyiladi.

Teorema 9 . Ortonormal bazisda har bir x vektor uchun

$$x_1^2+\cdots+x_n^2 \le |x|^2$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, $x' = x - x_1e_1 - \dots - x_ne_n$ ***vekt***or $e_1, \dots, e_n$ ***vektorlarga ortogonaldir.***

Teoremaning birinchi qismini isbotlash uchun

$$|x'|^2 = x^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

tenglikni ko'rsatish etarlidir. Bu tenglikni isbotlash uchun bevosita hisob-kitob ishlarini bajaramiz:

$$0 \le | x' |^2 = x'^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{m} x_ie_i\right)\left(x - \sum_{j=1}^{m} x_je_j\right)$$

$$= x^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i(xe_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_ix_j(e_ie_j) =$$

$$= x^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = x^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

Teoremaning ikkinchi qismi

$$(e_i, x - x_1e_1 - \cdots - x_me_m) = (e_i, x) - x_i(e_i, e_i) = x_i - x_i = 0$$

tenglikdan kelib chiqadi.Bu erda $i = 1, \dots, n.$

Ta'rif – 15. Ortonormal bazisni ixtiyoriy vektor bilan to'ldirganimizda, u ortonormal bo'lmay qolsa, bu bazis maksimal bazis deyiladi.

Teorema – 10. Ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ *bazis uchun quyidagilar teng kuchlidir:*

1) $e_1, \ldots, e_n$ ***maksimal oiladar;***

2) $e_1, \ldots, e_n$ ***yopiq oiladar***

3) $e_1, \ldots, e_n$ ***to'liq oiladar ;***

4) Har qanday x ***vektor uchun***

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu erda $x_1, \ldots, x_n$ ***koordinatalar Fur'e koeefisientlariga tengdir.***

5) Har qanday x ***vektor uchun***

$$x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

tenglik o'rinlidir.

6) Har qanday x, y ***vektorlar uchun***

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. 1). Berilgan ortonormal bazis $e_1, \ldots, e_n$ maksimal bo'lib, yopiq bo'lmasa, Fur'e koeffisientlari nolga teng bo'lgan noldan farqli x vektor mavjud bo'ladi. Agar $e_1, \ldots, e_n$ oilaga $\frac{x}{|x|}$ vektorni qo'shsak, yana ortonormal bazis hosil bo'ladi. Demak maksimal oila yopiq oiladir.

2) Yopiq $e_1, \ldots, e_n$ oila to'liq bo'lmasa, ular orqali chiziqli ifodalanmaydigan x vektor mavjud bo'ladi. Bu vektor yordamida

$$x' = x - x_1e_1 - ... - x_ne_n$$

vektorni qursak,u noldan farqli, lekin uning Fur'e koeffisientlari nolga tengdir.

3) Agar $x = k_1e_1 + \cdots + k_ne_n$, bo'lsa, $x_i = (x, e_i) = k_i(e_ie_i) = k_i$

tenglik o'rinlidir.

4).Agar $x = \sum_i x_ie_i$ va $y = \sum_i y_je_j$, bo'lsa,

$$(x, y) = \left(\sum_i x_ie_i, \sum_j y_je_j \right) = \sum_i \sum_j x_iy_j(e_i, e_j) = \sum_i x_iy_i.$$

tenglik o'rinlidir.

5).Yuqoridagi tenglikda $x = y$ bo'lsa,

$$x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

tenglikni hosil qilamiz.

6).Agar ortonormal bazis $e_1, \ldots, e_n$ bazisga yana bitta x vektorni qo'shib,yana ortonormal bazis hosil qilsak, x vektor uchun

$$1 = x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0,$$

tenglik hosil bo'ladi.Teorema tsbotlandi.

Bizga n o'lchamli X affin fazo berilgan bo'lib,unga mos V chiziqli fazoda skalyar ko'paytma ko'paytma kiritilgan bo'lsin,ya'ni V yevklid fazosi bo'lsin.Bu holda X ham yevklid fazosi deyiladi.Faqat bu holda X ning elementlari nuqtalardan iborat ekanligini yoddan chiqarmas-ligimiz kerak. X da V dagi $e_1, \ldots, e_n$ ortonormal bazis yordamida kiritilgan $0\, e_1, \ldots, e_n$ koordinatalar sistemasi to'g'ri burchakli yoki dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi.Biz yuqorida ko'rdikki, ortonormal bazisda vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(x,y)=x_1y_1+...+x_ny_n,$$

formula yordamida, vektorning uzunligi

$$x^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$$

formula yordamida hisoblanadi.Natijada yevklid fazosida ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash uchun

$$|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$$

formulani olamiz.Bu erda $x_1, \ldots, x_n - A$ nuqtaning koordinatalari, $y_1, \ldots, y_n$ B nuqtaning koordinatalaridir.Agar bizga birorta $e_1, \ldots, e_n$ bazis berilgan bo’lsa,uning yordamida ortonormal bazis qurishning Gram-Shmidt usulini keltiramiz.Agar $e_1, \ldots, e_n$ bazisning $e_1, \ldots, e_k$ vektorlari ortonormal bo’lsa, $k+1$ - vektor

$$e'_{k+1} = e_{k+1} - x_1 e_1 - \cdots - x_k e_k,$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu erda $x_1, \ldots, x_k$ - lar $x = e_{k+1}$ vektorning $e_1, \ldots, e_k$ vektorlarga nisbatan Fur’e koeeffisientlaridir.Hosil bo’lgan vektor $e_1, \ldots, e_k$ vektorlarning har biriga ortogonaldir.Uni o’zining uzunligiga bo’lib qo’ysak,birlik vektor hosil qilamiz.Keyin prosessni davom ettirib ortonormal bazisni olamiz.Albatta jarayonning boshida $k = 0$, shuning uchun birinchi vektorni

$e'_1 = \frac{e}{|e|}$ formula yordamida quramiz.Ikkinchi vektor esa

$e'_2 = e_2 - x_1 e'_1$ formula yordamida aniqlanib,keyin esa u o’zining uzunligiga bo’linadi.Bu erda $x_1 = (e_2, e'_1)$.

T□'rif– 16.Bizg□ ikkit□ □rt□n□rm□l b□zis b□rils□,ul□rning birid□n ikkinchisig□o'tish m□tris□si □rt□g□n□l m□tris□d□yil□di.

Ortonormal bazisda metrik forma koeeffisientlari birlik matrisadan iborat bo’lganligi uchun quyidagi teorema o’rinlidir.

Teorema -11.Berilgan** C **matrisa ortogonal bo’lshii uchun

$$C^{\mathrm{T}}C = E \qquad \textbf{(5)}$$

tenglikning bajarilishi zarur va etarlidir.

Isbot.Bizga ortogonal C matrisaberilgan bo’lsin.Agar bu matrisa ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ bazisdan ortonormal $e'_1, \ldots, e'_n$ bazisga o’tish matrisasi bo’lsa,

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \cdots + c_{1n}e_n \\ e'_2 &= c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \cdots + c_{2n}e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \cdots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

tengliklar o’rinli bo’ladi.Bazis $e'_1, \ldots, e'_n$ ortonormal bo’lganligi uchun

$$(e'_i, e'_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

tengliklar o’rinlidir. Bu tengliklardan $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ta

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \ldots + c_{ni}c_{nj} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

tengliklarni olamiz.Bu tengliklar ***(5)tenglikka teng kuchlidir.Va aksincha agar*** C matrisa uchun $C^{\mathrm{T}}C = E$ tenglik o’rinli bo’lsa, $e_1, \ldots, e_n$ bazisdan yuqoridagi formullar yordamida hosil qilingan $e'_1, \ldots, e'_n$ bazis ortonormal bo’ladi.Teorema isbotlandi.

Teorema -12.Berilgan C ***matrisa ortogonal bo'lshii uchun quyidagilardan birortasining bajarilishi zarur va etarlidir:***

1**)Matrisa va transponirlangan matrisalar ko'paytmasi birlik matrisadir:**

$$CC^{\mathrm{T}} = E\text{,} \quad C^{\mathrm{T}}C = E$$

***2)* Har bir** i **-ustun uchun** $c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \cdots + c_{ni}^2 = 1$**tenglik o'rinlidir.**

3) Har bir i **-satr uchun** $c_{i1}^2 + c_{2i}^2 + \cdots + c_{ni}^2 = 1$ **tenglik o'rinlidir.**

4) Teskari matrisa transponirlangan matrisaga tengdir: $C^{-1} = C^{\mathrm{T}}$.

Bu teorema isboti o'quvchilarga mashq sifatida havola qilinadi. Ortogonal matrisa uchun $CC^{\mathrm{T}} = E$ tenglikdan $\det C^{\mathrm{T}} = \det C$ munosabatni hisobga olib, $(\det C)^2 = 1$ tenglikni olamiz. Bundan esa $\det C = \pm 1$tenglik kelib chiqadi.

Ortogonal matrisalar to'plami oddiy matrisalarni ko'paytirish qoidasiga nisbatan gruppa hosil qiladi.Bu gruppa $0(n)$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $n = 2$ bo'lsa, ortogonallik sharti

$$c_{11}^2 + c_{11}^2 = 1, \; c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0, \;\; c_{12}^2 + c_{12}^2 = 1$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu shartlardan birinchisi va oxirgisidan α va βburchaklar mavjud bo'lib,

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos\alpha, \qquad & c_{21} &= \sin\alpha, \\ c_{12} &= \cos\beta, \qquad & c_{22} &= \sin\beta \end{aligned}$$

tengliklar bajarilishi kelib chiqadi.Yuqoridagi tengliklarning ikkinchisidan esa

$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = 0$$

munosabatni hosil qilamiz.Bu munosabat esa

$$\cos(\beta - \alpha) = 0$$

tenglikka teng kuchlidir.Demak

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \qquad \text{va} \qquad \beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

tengliklarning birortasi o'rinlidir.Bundan esa C matrisaning determinanti birga teng bo'lsa,u

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ko'rinishga,uning determinanti minus birga teng bo'lsa,u

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega ekanligi kelib chiqadi.Biz C matrisaning bu ko'rinishlardan foydalanib,tekislikda bir xil orientasiyaga ega dekart koordinatalar sistemasini almashtirish uchun bizga yaxshi tanish bo'lgan

$$x = \cos\alpha \; x' - \sin\alpha \; y' + x_0',$$
$$y = -\sin\alpha \; x' + \cos\alpha \; y' y_0,$$

formulalarni olamiz.Bu erda (x_0, y_0)– yangi koordinatalar boshi, α esa yangi va eski abssissa o'qlari orasidagi burchakdir.

§ 3. *Mustaqil ish uchun topshiriqlar*

1. Chiziqli fazoda mos ravishda $a_1 = \{1,1,0,0\}, a_2 = \{0,1,1,0\}, a_3 = \{0,0,1,1\}$ va $b_1 = \{1,0,1,0\}, b_2 = \{0,2,1,1\}, b_3 = \{1,2,1,2\}$ bazislarga ega V_1 va V_2 qism fazolar yig'indisi va kesishmasining bazisini toping.

2. Chiziqli fazoda mos ravishda $a_1 = \{1,2,0,1\}, a_2 = \{1,1,1,0\}$ va $b_1 = \{1,0,1,0\}, b_2 = \{1,3,0,1\}$ bazislarga ega V_1 va V_2 qism fazolar yig'indisi va kesishmasining bazisini toping.

3. To'gri chiziq va gipertekislik mos ravishda $x_1 = 8t, x_2 = 4t, x_3 = 3t, x_4 = -3t$ va $2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ tenglamalar bilan berilgan.Berilgan $x = \{1,2,3,4\}$ vektorni to'g'ri

chiziqqa tegishli y vektor va gipertekislikka tegishli z vektorlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalang.

4. Tekislikning $(-1,1,0,1,5),(2,-1,3,4,0),(1,2,7,6,1)$ nuqtalardan o'tishi ma'lum bo'lsa, uning parametrik va umumiy tenglamalari tuzilsin.

5. Umumiy tenglamasi bilan berilgan

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5-3=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5-6=0 \end{cases}$$

tekislikning parametrik tenlamasini yozing.

6. Birinchi to'g'ri chiziq $(1,0,-2,1)$ nuqta va $\{1,2,-1,-3\}$ vektor bilan, ikkinch tekislik esa $(0,1,1,-1)$ nuqta va $\{2,3,-2,-4\}$ vektor bilan aniqlangan bo'lsa, ularni o'z ichiga oluvchi eng kichik o'lchamli tekislik tenglamasini yozing.

7. Ikkita $x_1=1+t, x_2=2+t, x_3=3+t, x_4=4+t,$ $x_1=0, x_2-x_3+1=0, x_4-3=0$ to'g'ri chiziq o'z ichiga oluvchi eng kichik o'lchamli tekislik tenglamasini yozing.

8. To'rt o'lchamli fazoda

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-3=0 \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4-2=0 \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4-7=0 \end{cases}$$

sistema bilan berilgan tekislik va $5x_1+7x_2+9x_3+2x_4-20=0$ to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini aniqlang.

9. To'rt o'lchamli fazoda $5x_1+9x_3+2x_4-20=0,$ $x_2=0$ tekislik va

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-3=0 \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4-2=0 \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4-7=0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziq berilgan. Ularning o'zaro vaziyatini aniqlang.

10. To'g'ri chiziq va tekislik mos ravishda $x_1=1+t, x_2=2+2t, x_3=3+3t, x_4=4+4t$ va $x_1+x_2+1=0,$ $x_3-x_4=0$ tenglamalar bilan berilgan. ularning kesishmasligini ko'rsating va to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib berigan tekislikdan o'tuvchi eng kichik o'lchamli tekislik tenglamasini yozing.

11. Ortonormal bazisga nisbatan uchta $\{1,2,2,1\},\{1,1,-5,3\},\{3,2,8,-7\}$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlarga tortilgan qism fzoning bazisini toping va uni fazoning bazisigacha to’ldiring.

12. Besh o'lchamli fazoda ortonormal bazisga nisbatan

$x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$ gipertekislik berilgan. Birinchi to'rttasi berilgan gipertekislikda yotuvchi yangi bazis toping.

13. Gipertekislik $2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ va $x = \{2,0,4,6\}$ vektor berilgan. x vektorni berilgan gipertekislikka tegishli y vektor va shu gipertekislikka ortogonal z vektorlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalang.

14. Yevklid fazosi V da x_1, x_2 vektorlar, V ning qism fazosi V' da y_1, y_2 vektorlar va V' ga ortogonal bo'lgan z_1, z_2 vektorlar berigan. Agar $x_2 - x_1$ V' fazoga tegishli bo'lsa, $z_1 = z_2$ munosabat o'rinliligini isbotlang.

15. O'zining $\{1,1,1,1\}, \{1,2,2,-1\}$ bazislari bilan berilgan qism fazoga $\{4,-1,3,4\}$ vektorning ortogonal proeksiyasini toping.

16. Tenlamalar sistemasi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

bilan berilgan qism fazoga $\{7,-4,-1,2\}$ vektorning ortogonal proeksiyasini toping.

17. To'rt o'lchamli fazoda $x_1 = x_2,\ x_3 = x_4,\ x_2 = 2x_3$ to'g'ri chiziq va $3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

18. To'rt o'lchamli yevklid fazosida $\{1,1,1,1\}, \{1,-1,1,-1\}$ vektorlarga hamda $\{2,2,1,0\}, \{1,-2,2,0\}$ vektorlarga qurilgan qism fazolar orasidagi burchak topilsin.

19. Berilgan $M(5,1,0,8)$ nuqtadan $A(1,2,3,4), B(2,3,4,5), C(2,2,3,7)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi va asosi topilsin.

20. Berilgan $M(4,2,-5,1)$ nuqtadan

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi va asosi topilsin.

21. Berilgan $A(1,1,1,1), B(2,2,0,0), C(1,2,0,1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik va $D(1,1,1,2), E(1,1,2,1)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini aniqlang, ularning umumiy perpendikularining tenglamasini yozing va uzunligini toping.

Adabiyotlar

1.Baxvalov .S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to'plami.Toshkent,2006,546 bet.
2. Il'in V.A. Poznyak E.G. Analiticheskaya geometriya.M., Nauka, 1981, 232s.
3.Pogorelov A.V.Analitik geometriya. Toshkent, O'qituvchi,1983, 206 bet.
4.Postnikov M.M. Analiticheskaya geometriya.M.,Nauka,1979,336 s.
5.Suberbiller O.N. Zadachi i uprajneniya po analiticheskoy geometrii. Sankt-Peterburg -Moskva, Izd. Lan', 2003 g.336 str.
6.Kletenik D.V.Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. M. Nauka.1998,
7.Kravchenko K. Resheniya zadach po analiticheskoy geometrii. *http:FF* www.a − geometry.narod.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS