O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

A. YA. NARMANOV, A. S. SHARIPOV, J. O. ASLONOV

DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA KURSIDAN MASALALAR TO‘PLAMI

(O‘quv qo'llanma)

TOSHKENT
„UNIVERSITET“
2014

UDK 514.75
14(075.8)
№26

Ya. Narmanov, A. S. Sharipov, J. O. Aslonov. Differensial geometriya va topologiya kursidan masalalar to‘plami. Toshkent, “Universitet” nashriyoti, 2014 yil, 200 bet.

KBK 22.151

Ushbu o‘quv qo‘llanma bakalavriatning matemaika va mexanika yo’nalshlari uchun amaldagi o‘quv rejasi asosida yo‘zilgan. U differensial geometriya va topologiya fanidan amaliy mashg’ulotlar olib borishda foydalanishga mo‘ljallangan. Bu o‘quv qo‘llanma uch qismdan iborat bo‘lib, unda umumiy topologiya elementlari, chiziqlar nazariyasi hamda sirtlar nazariyasi bo‘yicha mashq va masalalar keltirilgan. O‘quv qo‘llanma bakalavriat va magistrtatura talabalari uchun mo‘ljallangan.

Taqrizchilar: Fizika-matematika fanlari doktori M. Sh. Mamatov
Fizika-matematika fanlari doktori R.B.Beshimov

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o ‘rta maxsus ta‘lim vazirligining 2013 yil 13 martadagi 82-sonli buyrug‘iga asosan 5130100 – matematika va 5140300 – mexanika yo‘nalishlari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

ISBN – 978 – 9943 – 4306 – 1 – 7

KIRISH

Mazkur o‘quv qo‘llanma bakalavriat va magistratura talabalari uchun “Differensial geometriya va topologiya” kursi bo‘yicha amaliy mashg’ulotlar olib borishda foydalanish uchun mo‘ljallangan. O‘quv qo‘llanma uchta bobdan iborat bo‘lib, birinchi bob umumiy topologiya elementlariga bag‘ishlangan. Ikkinchi va uchinchi boblarda chiziqlar va sirtlar nazariyasi bo‘yicha mashq va masalalar keltirilgan.

Ma’lumki, “Differensial geometriya va topologiya” kursi matematika yo‘nalishi uchun asosiy ixtisoslik fanlaridan biridir. Differensial geometriya va topologiya kursi bo‘yicha o‘zbek tilida professor M.A. Sobirov va A.Y. Yusupovlarning 1965 yilda chop etilgan “Differensial geometriya kursi” nomli darsligi mavjud. Undan hozir ham talabalar foydalanib kelmoqda. Biroq, keyingi vaqtlarda o‘quv rejasining o‘zgarishi, differensial geometriya fanining tez rivojlanishi hamda mustaqil respublikamizda ta’lim sohasidagi qator qonunlarning qabul qilinishi ko‘pgina fanlardan, shu jumladan, differensial geometriyadan ham yangi darslik yozilishini taqozo qilmoqda.

Differensial geometriya va topologiya kursi bo‘yicha o‘zbek tilida ikkinchi “Differensial geometriya”nomli darslik professor A. Ya. Narmanov tomonidan yaratilib, 2003 yilda chop etilgan edi. Ammo respublikamizda differensial geometriya va topologiya kursi bo‘yicha mashq va masalalar to‘plami o‘zbek tilida chop etilmagan. Shu muammoni hal qilish maqsadida, mualliflar jamoasi, professor A.Ya.Narmanov rahbarligida, O‘zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakultetida olib borgan ilmiy-pedagogik faoliyati asosida, ushbu masalalar to‘plamini yaratdilar. Mazkur o‘quv qo‘llanmada nazariy asos sifatida A. Ya. Narmanovning “Differensial geometriya” nomli darsligidan foydalanish nazarda tutilgan.

O‘quv qo‘llanmadan “Differensial geometriya va topologiya” kursi boyicha amaliy mashg’ulotlarda mexanika yo’nalishi bo‘yicha tahsil olayotgan talabalar ham foydalanishlari mumkin.

I BOB. UMUMIY TOPOLOGIYA ELEMENTLARI
1 §. Metrik fazolar

Metrik fazolar topologik fazolarning muhim sinfini tashkil etadi. Bu fazolarda ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi kiritiladi va buning yordamida nuqtalarning bir-biriga yaqinligi o‘rganiladi. Metrik fazolarda ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasidan foydalanib, nuqtadan to‘plamgacha masofa tushunchasi aniqlanadi. Birinchi kursda o‘rganilgan Yevklid fazolari metrik fazoga misol bo‘ladi.

Asosiy tushunchalar

Bo‘sh bo‘lmagan X - to‘plam berilgan bo‘lsin.

1.1.-ta’rif. Bizga $d : X \times X \to R^1_+$ funksiya berilib, u quydagi

1) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ shartlarni qanoatlantirsa, $d-$ funksiya X to‘plamdagi metrika yoki masofa, (X, d) juftlik esa metrik fazo deyiladi.

1.2.-ta’rif. Metrik fazoda $x_0 \in (X, d)$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo‘lsin. Markazi berilgan x_0 nuqtada, radiusi r ga teng ochiq shar $B_r(x_0) = \{x \in (X, d) | \, d(x, x_0) < r\}$ to‘plamdan, markazi x_0 nuqtada, radiusi r ga teng yopiq shar $B_r^*(x_0) = \{x \in (X, d) | \, d(x, x_0) \leq r\}$-to‘plamdan, markazi x_0 nuqtada radiusi r ga teng sfera esa $S_r(x_0) = \{x \in (X, d) | \, d(x, x_0) = r\}$ to‘plamdan iboratdir.

Bizga $A \subset (X, d)$ qism to‘plam va $x \in (X, d)$ nuqta berilgan bo‘lsa, x nuqtadan A to‘plamgacha bo‘lgan masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Birorta chekli radiusli $B_r(x_0), 0 < r < \infty$ ochiq shar uchun quyidagi munosabat $A \subset B_r(x_0)$ bajarilsa, u holda A to‘plam chegaralangan deyiladi.

I.3- ta’rif. Bizga $A \subset (X, d)$ qism to‘plam va $x \in (X, d)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar $r > 0$ soni mavjud bo‘lib, $B_r(x) \subset A$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, x nuqta A to‘plamning ichki nuqtasi deyiladi. A to‘plamning barcha ichki nuqtalari to‘plami uning ichi deyiladi va $\operatorname{int} A$ kabi belgilanadi.

1.4.- ta’rif. Berilgan A to‘plamning har bir nuqtasi ichki nuqta bo‘lsa, u ochiq to‘plam deyiladi.

1.5.- ta’rif. Biror $x \in (X, d)$ nuqta va $A \subset (X, d)$ to‘plam uchun $d(x, A) = 0$ munosabat bajarilsa, x nuqta A to‘plamning urinish nuqtasi deyiladi. A to‘plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat to‘plam uning yopig’i deyiladi va $\overline{A}$ ko‘rinishda belgilanadi.

1.6.- ta'rif. Berilgan $A \subset (X,d)$ to'plamning to'ldiruvchisi, ya'ni $X \setminus A$ to'plam ochiq bo'lsa, A to'plam yopiq to'plam deyiladi. Tekshirib ko'rish mumkinki, A to'plamning yopiq bo'lishi $A = \overline{A}$ munosabatga teng kuchlidir.

1.7.- ta'rif. Berilgan (X,d) metrik fazoning barcha ochiq to'plamlari oilasi bu fazoning d metrika yordamida kiritilgan topologiyasi deyiladi.

1.8.- ta'rif. Bizga (X,d) metrik fazoda $Y \subset (X,d)$ qism to'plam berilgan bo'lsa, d metrika yordamida Y to'plamnini metrik fazoga aylantirish mumkin. $\rho : Y \times Y \to R_+^1$ metrika, $\rho(x,y) = d(x,y)$ tenglik yordamida aniqlanadi. Bu holda (Y,ρ) fazo (X,d) fazoning qism fazosi deyiladi.

1.9.- ta'rif. Bizga (X,d) metrik fazoda $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligi va $x \in (X,d)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu $\{x_n\}$ ketma-ketlik va x nuqta uchun $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

1.10.-ta'rif. Bizga (X,d) metrik fazoda $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy yetarlicha kichik, musbat $\varepsilon > 0$ son uchun $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lib, n_0 sonidan katta barcha m va n natural sonlar uchun $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental (Koshi ketma-ketligi) deyiladi. Agar (X,d) fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, (X,d) to'la metrik fazo deyiladi.

1.11.-ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun chekli sondagi ε radiusli sharlarning birlashmasidan iborat metrik fazo to'liq chegaralangan metrik fazo deyiladi.

Masalalar yechish namunalari

1-masala Bizga $H = \{\{x_i\} \mid x_i \in R, \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Berilgan H to'plamda $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$ funksiya metrika bo'lishini isbotlang (bu yerda $x = \{x_i\},\ y = \{y_i\} \in H$).

Yechish. Avval kiritilgan funksiya ma'noga ega ekanligini tekshirishimiz kerak, ya'ni $d(x,y)$ metrikaning ifodasida qatnashgan qatorni yaqinlashishga tekshirishimiz kerak. Buning uchun haqiqiy sonli chekli $a_1, a_2, ..., a_k$ va $b_1, b_2, ..., b_k$ ketma- ketliklar uchun o'rinli bo'lgan

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}$$

Koshi tengsizligidan foydalanamiz.

Har bir $x = \{x_i\},\ y = \{y_i\} \in H$ nuqtalar juftligi va ixtiyoriy musbat butun k soni uchun ushbu

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^2-2\sum_{i=1}^{k}x_iy_i+\sum_{i=1}^{k}y_i^2\le\sum_{i=1}^{k}x_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}y_i^2}+\sum_{i=1}^{k}y_i^2=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}y_i^2}\right)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2}\right)^2$$

munosabatlar o'rinli. Modomiki oxirgi tengsizlik ixtiyoriy musbat butun k soni uchun o'rinli ekan, $d(x,y)$ metrikaning ifodasida qatnashgan qator yaqinlashadi.

Ravshanki, $d(x,y)$ funksiya metrikaning 1), 2) shartlarini qanoatlantiradi. Endi 3) shartni tekshirishimiz kerak.

Bizga ixtiyoriy $x=\{x_i\}$, $y=\{y_i\}$ va $z=\{z_i\}\in H$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Endi $x^k=\{x_1,x_2,...,x_k,0,0,...\}$, $y^k=\{y_1,y_2,...,y_k,0,0,...\}$, $z^k=\{z_1,z_2,...,z_k,0,0,...\}$ va $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$, $c_i=x_i-z_i$ kabi belgilashlar kiritamiz. Koshi tengsizligidan foydalanib quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$\left[d(x^k,z^k)\right]^2=\sum_{i=1}^{k}c_i^2=\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{k}a_i^2+2\sum_{i=1}^{k}a_ib_i+\sum_{i=1}^{k}b_i^2\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{k}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}+\sum_{i=1}^{k}b_i^2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}\right)^2=\left[d(x^k,y^k)+d(y^k,z^k)\right]^2.$$

Oxirgi tengsizlikdan ixtiyoriy $k=1,2,...$ uchun ushbu tengsizlik o'rinli ekani kelib chiqadi

$$d(x,y)+d(y,z)\ge d(x^k,y^k)+d(y^k,z^k)\ge d(x^k,z^k),$$

o'z navbatida quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z).$$

Demak, H to'plamda kiritilgan $d(x,y)$ funksiya metrika hosil qilar ekan.

2-masala. Bizga (X,d) metrik fazo va uning qism to'plami $A\subset(X,d)$ berilgan bo'lsin. Berilgan metrik fazo o'zining metrikasi yordamida topologik fazoga aylantirilgan bo'lsin. Olingan $x\in X$ nuqta A to'plamning urinish nuqtasi bo'lishi uchun A to'plamda x nuqtaga yaqinlashuvchi ketma-ketlikning mavjud bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

Yechish. Zarurligi. Berilgan A to'plamning yopig'i $\overline{A}$ to'plamdan x nuqta olaylik. Har bir natural i soni uchun $x_i\in A\bigcap B_{\frac{1}{i}}(x)$ nuqta olamiz. Ketma-ketlikning limiti ta'rifiga ko'ra, x nuqta va (x_n) ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$ munosabat o'rinli bo'lsa, x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi. Ravshanki, $d(x,x_i)<\frac{1}{i}$ munosabat barcha natural i sonlar uchun o'rinli va bundan esa $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$ tenglik kelib chiqadi. Demak, x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ekan.

Yetarliligi. Yetarliligini isbotlash uchun berilgan A to‘plamning yopig’i $\overline{A}$ to‘plamga tegishli bo‘lmagan x nuqta uchun unga yaqinlashuvchi ketma-ketlik mavjud emasligini isbotlash kifoya.

Modomiki, $x \notin \overline{A}$ ekan, shunday $r > 0$ soni topiladiki, uning uchun $A \cap B_r(x) = \varnothing$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Natijada, ixtiyoriy $x' \in A$ nuqta uchun $d(x,x') \geq r$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa x nuqtaga intiluvchi A to‘plamning nuqtalaridan iborat $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud emasligi kelib chiqadi.

Misol va masalalar

1. Berilgan (X,d) metrik fazo uchun quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

a) $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$ bu yerda $x,y,z \in (X,d)$;

b) $d(x,Z) \leq d(x,y) + d(Z,y)$, bu yerda $Z \subset (X,d)$;

c) $|d(x,Z) - d(Z,y)| \leq d(x,y)$, bu yerda $Z \subset (X,d)$.

2. Biror bo‘sh bo‘lmagan X- to‘plam va bu to‘plamda quyidagicha funksiya
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y \\ 1, & \text{agar } x \neq y \end{cases}$$
berilgan bo‘lsin. Berilgan $d(x,y)$- funksiya metrika ekanligi isbotlansin. Bu metrika diskret metrika, fazo esa, diskret fazo deyiladi.

3. Bizga (X,d) metrik fazo berilgan bo‘lsin. U holda $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ va $d_2(x,y) = \min\{d(x,y),1\}$ lar ham metrika bo‘lishi va ularning bir xil topologiya tashkil qilishi hamda (X,d_1), (X,d_2) metrik fazolarning Koshi ketma-ketliklari bir xil ekanligi ko‘rsatilsin.

4. Bizga X sifatida o‘lchami n ga teng bo‘lgan to‘plam, ya’ni $X = \{x | x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in R^1\}$ (keyinchalik $X = R^n$ kabi belgilaymiz) va $d_1(x,y) = (\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ funksiya berilgan bo‘lsin. Berilgan $d_1(x,y)$- funksiya metrika ekanligi isbotlansin. Bu metrika Yevklid metrikasi deb ataladi.

5. Bizga $X = R^n$ to‘plam va $d_2(x,y) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{|x_i - y_i|\}$ funksiya berilgan bo‘lsin. Berilgan $d_2(x,y)$- funksiya metrika ekanligi isbotlansin.

6. Barcha haqiqiy sonlar to‘plami R ushbu $d(x,y) = \sqrt{|x - y|}$ metrika bilan metrik fazo bo‘ladimi?

7. Yuqoridagi R^n da aniqlangan $d_1(x,y)$ va $d_2(x,y)$ metrikalar bir xil topologiya aniqlashini isbotlang. Bu topologiya Yevklid topologiyasi deb ataladi. Berilgan R^n to‘plam va bu topologiya birgalikda Yevklid fazosi deb

ataladi va R^n bilan belgilanadi. Bundan so'ng, R^n topologik fazo sifatida Yevklid topologiyasi bilan qaraladi.

8. Barcha haqiqiy sonlar to'plami R da $d_1(x,y)=|x-y|$ va $d_2(x,y)=|arctgx-arctgy|$ metrikalar kiritilgan. Bu metrikalar yordamida hosil qilingan topologiyalarning ustma-ust tushishi va Koshi ketma-ketliklarini esa turlicha ekanligi ko'rsatilsin.

9. Bizga $[0;1]$ kesmada uzluksiz funksiyalar to'plami $C_{[0,1]}$ va $d_3(f,g)=\max\limits_{x\in[0;1]}|f(x)-g(x)|$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu $d_3(f,g)$- funksiya metrika ekanligi ko'rsatilsin.

10. Bizga $[0;1]$ kesmada uzluksiz funksiyalar to'plami $C_{[0,1]}$ va $d_4(f,g)=\int\limits_0^1|f(t)-g(t)|dt$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu $d_4(f,g)$- funksiya metrika ekanligi ko'rsatilsin.

11. Yuqoridagi masalalarda kiritilgan $d_4(f,g)$ metrikada limitga ega bo'lgan, $d_3(f,g)$ metrikada esa limitga ega bo'lmagan $C_{[0,1]}$ fazoda ketma-ketlik tuzilsin.

12. Metrik fazo (X,d) ning $Y\subset X$ qism to'plami yopiq bo'lishi uchun $(X\setminus Y)$ ning ochiq bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin (bunda yopiq to'plam sifatida yopig'i bilan ustma-ust tushuvchi to'plam olinsin).

13. Metrik fazodagi har qanday chekli to'plam yopiq to'plam ekanligi isbotlansin.

14. Ochiq shar ochiq to'plam ekanligi, yopiq shar va sfera yopiq to'plam ekanligi isbotlansin.

15. Ushbu $\overline{B_r(x_0)}\neq B_r^*(x_0)$ munosabatni qanoatlantiruvchi sharlar mavjud bo'lgan metrik fazo topilsin.

16. Har qanday (X,d) metrik fazoda

a) chekli sondagi ochiq to'plamlar kesishmasi;

b) ixtiyoriy sondagi ochiq to'plamlar birlashmasi ochiq to'plam ekanligi isbotlansin.

17. Metrik fazo (X,d) ning $A\subset X$ qism to'plami yopiq bo'lishi uchun, uning ixtiyoriy yopiq shar bilan kesishmasi yopiq to'plam bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

18. Ushbu $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}A\cap\operatorname{int}B$ munosabat o'rinli ekanligi isbotlansin.

19. Metrik fazoda har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning fundamental ekanligi ko'rsatilsin.

20. Metrik fazoda Y to'plam yopiq bo'lishi uchun Y dagi nuqtalardan iborat barcha yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning limiti Y ga tegishli bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

21. Metrik fazoning ixtiyoriy to‘plamining yopig’i yopiq to‘plamligi ko‘rsatilsin.

22. Bizga (X, d) metrik fazo va uning $X^{'}$ qism fazosi berilgan bo‘lsin. Qism fazo $X^{'} \subset X$ ning $U^{'}$ to‘plami ochiq (yopiq) bo‘lishi uchun ushbu $U^{'} = U \bigcap X^{'}$ tenglikni bajarilishi zarur va yetarli ekanligi ko‘rsatilsin (bu yerda U X dagi ochiq (yopiq) to‘plam).

23. Metrik fazoda radiusi 7 ga teng bo‘lgan shar, radiusi 3 ga teng bo‘lgan shar ichida joylashsa, ularning ustma-ust tushishi isbotlansin.

24. Metrik fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo‘lsa, uning limiti yagonaligi isbotlansin.

25. Quyidagi hollarning har birida Yevklid fazosi (R^1, d_1)da berilgan A to‘plamning yopig’i topilsin:

1) $A = Q$ (bu yerda Q - barcha ratsional sonlar to‘plami);

2) $A = tgZ$ (bu yerda Z -barcha butun sonlar to‘plami);

3) $A = \sin Z$;

4) $A = arctg(tgZ)$;

5) $A = \arccos(\sin Z)$;

6) $A = e^{Q}$;

7) $A = \ln(1 + Q_+)$ (Q_+ -manfiy bo‘lmagan ratsional sonlar to‘plami);

8) $A = \{m + n\alpha\}$ $m, n \in Z, \alpha$ -irratsional son;

9) $A = \left\{ \dfrac{p^2}{q^2}; p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$;

10) $A = \left\{ 2^{\frac{p}{q}}; p, q \in N \right\}$.

Quyidagi hollarda esa Yevklid fazosi (R^2, d_1)da berilgan A to‘plamning yopig’i topilsin:

11) $A = e^{iz}$;

12) $A = \left\{ (x, \sin\dfrac{1}{x}); x > 0 \right\}$.

26. Bir o‘lchamli Yevklid fazosi (R^1, d_1)da ichma-ich joylashgan, uzunligi nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi nuqta yoki yopiq shar ekanligi ko‘rsatilsin.

27. Bir o‘lchamli Yevklid fazosi (R^1, d_1)da berilgan to‘plam ochiq bo‘lishi uchun, u o‘zaro kesishmaydigan, sanoqli sondagi ochiq intervallarning birlashmasidan iborat bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

28. Ikki o‘lchamli Yevklid fazosi (R^2, d_1)da bitta nuqtasini chiqarib tashlagandan so’ng ochiq bo‘lib qoladigan yopiq to‘plamga misol keltiring.

29. Metrik fazoda kesishmasi ochiq bo‘lmagan to‘plamdan iborat bo‘lgan ochiq to‘plamlar sistemasiga misol keltiring.

30. Metrik fazoda birlashmasi yopiq bo‘lmagan to‘plamdan iborat bo‘lgan to‘plamlar sistemasiga misol keltiring.

31. Har qanday chekli to‘plamdagi metrika aniqlangan topologiya diskret metrika aniqlagan topologiya bilan ustma-ust tushishi ko‘rsatilsin.

32. Diskret metrika bilan berilgan fazodagi ixtiyoriy to‘plamning ham ochiq, ham yopiq ekanligi ko‘rsatilsin.

33. Ikki o‘lchamli Yevklid fazosi (R^2, d_1) da $S^1 = \{(x,y) | x = r\cos\beta, y = r\sin\beta | \beta \in [0:2\pi]\}$ to‘plam berilgan. Ma’lumki, bu to‘plam aylanadan iborat. Ushbu $\mathrm{S}^1 \subset \mathrm{R}^2$ aylanadagi $\beta = n\alpha\pi$ (α-irratsional son), $n \in Z$, burchakka mos keluvchi nuqtalar to‘plamini A bilan belgilaymiz. Bu to‘plamning yopig’i uchun $\overline{A} = S^1$ munosabatning o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

34. Metrik fazoda chekli sondagi chegaralangan to‘plamlarning birlashmasi chegaralanganligi isbotlansin. Bu fakt to‘plamlar soni chekli bo‘lmagan holda o‘rinli emasligiga ishonch hosil qiling.

35. To‘liq chegaralangan metrik fazo chegaralanganligi ko‘rsatilsin. Teskarisi o‘rinli bo‘lmasligi misollar yordamida ko‘rsatilsin.

36. Ma’lumki, barcha ratsional sonlar to‘plami Q bir o‘lchamli Yevklid fazosi (R^1, d_1) ning qism fazosi bo‘ladi. Ushbu (Q, d_1) fazoning to‘la bo‘lmagan metrik fazo ekanligi isbotlansin.

37. Metrik fazo $(C_{[0:1]}, d_3)$ ning to‘la metrik fazo ekanligi isbotlansin.

38. Metrik fazo to‘la bo‘lishi uchun undagi ichma-ich joylashgan radiusi nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo‘sh bo‘lmasligi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

39. Ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo‘sh bo‘lgan to‘la metrik fazoga misol keltiring.

2 §. Topologik fazolar

Topologiya tushunchasi XIX asrning N.I.Lobachevskiy, B. Riman, A. Puankare, D. Gilbert kabi buyuk matematiklari ishlarida paydo bo‘lgan. Shakllarning geometrik xossalari ularning metrik xossalari (o‘lchamlari, burchaklari, va hokazo) bilan to‘liq aniqlanmaydi. Topologik usullar yordamida shakllarning geometrik xossalari yorqin namoyon bo‘ladi.

Metrik fazolarda asosiy tushunchalar atrof hamda ochiq to‘plam tushunchalari yordamida kiritilgan edi. Bunda atrof va ochiq to‘plam tushunchalari masofa orqali aniqlangan edi. Endi ochiq to‘plam tushunchasi topologiya aksiomalari orqali aniqlanib, nuqtaning atrofi sifatida shu nuqtani o‘z ichiga olgan ochiq to‘plam tushuniladi.

Asosiy tushunchalar

Bizga biror X to‘plam berilgan bo‘lib, $\tau=\{X_\alpha\}$ oila X to‘plamning ba’zi qism to‘plamlaridan iborat bo‘lsin. Bu oila chekli sondagi elementlardan iborat bo‘lishi yoki uning elementlari cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin. Shuning uchun biz indeks o‘zgaruvchisi α ning qanday to‘plamga tegishli ekanligini ko‘rsata olmaymiz. .

2.1.-ta’rif. Berilgan τ-oila quyidagi

1) $X\in\tau$ (ma’lumki, har qanday to‘plam o‘zining qismi bo‘ladi, shuning uchun u τ oilaga tegishli bo‘lishi ham, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin);

2) $\varnothing\in\tau$ (bo‘sh to‘plam har qanday to‘plamning qismi bo‘ladi, shuning uchun u τ oilaga tegishli bo‘lishi ham, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin);

3) berilgan τ oilaga tegishli ixtiyoriy ikki to‘plamning kesishmasi τ oilaga tegishli, ya’ni $U,V\in\tau \Rightarrow V\bigcap U\in\tau$;

4) berilgan τ oilaga tegishli qism to‘plamlardan iborat ixtiyoriy $\{X_{\alpha_\beta}\}$ oila uchun birlashma $\bigcup\limits_\beta X_{\alpha_\beta}$ ham τ oilaga tegishli

shartlarni qanoatlantirsa, (X,τ)-juftlikni topologik fazo deb, τ oilani esa bu fazodagi topologiya deb ataymiz; τ oilaga tegishli qism to‘plamlar ochiq to‘plamlar deyiladi.

Demak, birorta to‘plamni topologik fazoga aylantirish uchun uning yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi qism to‘plamlaridan iborat birorta oilani aniqlash yetarlidir. Agar (X,τ) topologik fazo bo‘lsa, X fazoning elementlari nuqtalar deb ataladi.

Bizga (X,τ) topologik fazo va $A\subset X$ qism to‘plam berilgan bo‘lsin.

2.2.-ta’rif. Biror $x\in A$ nuqta uchun shunday ochiq U to‘plam mavjud bo‘lib, $x\in U\subset A$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, x nuqta A to‘plamning ichki nuqtasi, x nuqta tegishli bo’lgan ixtiyoriy ochiq` to‘plam x nuqtaning atrofi deyiladi.

2.3-ta’rif. Berilgan A to‘plamning barcha ichki nuqtalaridan tashkil topgan to‘plam uning ichi deyiladi va $\operatorname{int} A$ kabi belgilanadi.

Tasdiq. Berilgan A to‘plam ochiq bo‘lishi uchun, u o‘zining ichi bilan ustma-ust tushishi, ya’ni $A=\operatorname{int} A$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarli.

2.4.-ta’rif. Agar A to‘plamning to‘ldiruvchisi $X\setminus A$ ochiq bo‘lsa, A to‘plam yopiq to‘plam deyiladi.

2.5-ta’rif. Biror $x\in X$ nuqtaning ixtiyoriy $U(x)$ atrofi uchun $U(x)\bigcap A\neq\varnothing$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bu x nuqta A to‘plamning urinish nuqtasi deyiladi.

2.7.-ta’rif. Berilgan A to‘plamning barcha urinish nuqtalari to‘plami uning yopig’i deyiladi va $\overline{A}$ kabi belgilanadi.

2.8.-ta’rif. Biror $x\in X$ nuqtaning ixtiyoriy $U(x)$ atrofi uchun

$U_x \cap A \neq \varnothing$ va $U_x \bigcap (X \setminus A) \neq \varnothing$ munosabatlar bajarilsa, x nuqta A to‘plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi. Berilgan A to‘plamning barcha chegaraviy nuqtalari to‘plami A to‘plamning chegarasi deyiladi va ∂A kabi belgilanadi.

2.9.-ta’rif. Bizga (X,τ_1) va (X,τ_2) topologik fazolar berilgan bo‘lib, $\tau_1 \subset \tau_2$ munosabat bajarilsa, τ_1-topologiya τ_2-topologiyaga nisbatan kuchsizroq topologiya deyiladi va $\tau_1 \leq \tau_2$ yoki $\tau_2 \geq \tau_1$ kabi belgilanadi.

2.10.-ta’rif. Bizga (X,τ) topologik fazo va uning $\{U_\alpha\} \subset \tau$ ochiq qism to‘plamlari oilasi berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy ochiq U to‘plamni $U = \bigcup_\beta U_\beta$, $U_\beta \in \{U_\alpha\}$ ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, $\{U_\alpha\}$ oila (X,τ) topologik fazoning bazasi deyiladi.

2.10'.-ta’rif. Bizga (X,τ) topologik fazo va uning $\tau_1 = \{U_\alpha\} \subset \tau$ ochiq qism to‘plamlari oilasi berilgan bo‘lsin. Agar τ_1 oiladan olingan barcha chekli sondagi ochiq to‘plamlar kesishmasidan hosil bo‘lgan oila, ya’ni mumkin bo‘lgan barcha $U_1 \bigcap U_2 \bigcap ... \bigcap U_k$, (bu yerda barcha $i = 1,2,...,k$ lar uchun $U_i \in \tau_1$) kesishmalardan hosil bo‘lgan oila (X,τ) topologik fazoning bazasini tashkil qilsa, u holda τ_1 oila (X,τ) topologik fazoning predbazasi(oldbazasi) deyiladi.

2.11.-ta’rif. Bizga $\{U_\alpha(x)\} -$ x nuqtaning atroflaridan tuzilgan oila berilgan bo‘lsin. Agar x nuqtaning ixtiyoriy $U(x)$ atrofi uchun $U_{\alpha_0}(x) \in \{U_\alpha(x)\}$ atrof mavjud bo‘lib, $x \in U_{\alpha_0}(x) \subset U(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $\{U_\alpha(x)\}$ oila x nuqta atroflari uchun baza deyiladi.

2.12.-ta’rif. Berilgan topologik fazo ixtiyoriy x nuqtasining atroflari uchun sanoqli baza mavjud bo‘lsa, (X,τ) da sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilgan deyiladi. (X,τ)-topologik fazoning sanoqli bazasi mavjud bo‘lsa, (X,τ) topologik fazoda sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan deyiladi.

2.13.-ta’rif. Topologik fazoda $A \subset (X,\tau)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar $\overline{A} = X$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, A to‘plam hamma yerda zich deyiladi.

2.14.-ta’rif. Berilgan (X,τ) topologik fazoning sanoqli va hamma yerda zich qism to‘plami mavjud bo‘lsa, u separabel topologik fazo deyiladi.

2.15-ta’rif. Bizga (X,τ) topologik fazo va uning nuqtalaridan iborat $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik, $x \in X$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar x nuqtaning ixtiyoriy $U(x)$ atrofi uchun shunday N natural son mavjud bo‘lib, $n \geq N$ bo‘lganda, $x_n \in U(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi.

2.16-ta’rif. Topologik fazoda $A \subset (X,\tau)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Biror $x \in A$ nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo‘lib, $U \bigcap A = \{x\}$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bu x nuqta A to‘plamning ajralgan nuqtasi deyiladi.

2.17-ta'rif. Topologik fazoda $A \subset (X,\tau)$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar $x \in \overline{A}$ nuqtaning ixtiyoriy U atrofida A to'plamning x nuqtadan farqli nuqtalari mavjud bo'lsa, bu x nuqta A to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalalar yechish namunalari

1- masala. Bizga (X,τ) topologik fazo berilgan bo'lsin. Topologik fazo aksiomalaridan foydalanib, yopiq to'plamlar uchun quyidagi xossalarni isbotlang:

1) X yopiq to'plam;
2) bo'sh to'plam yopiq to'plam;
3) chekli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plam;
4) ixtiyoriy sondagi yopiq to'plamlarning kesishmasi yopiq to'plam.

Yechish. 1) Bo'sh to'plam topologiyaga tegishli, topologiyaga tegishli to'plamni ochiq deb ataganmiz. X esa, ochiq to'plamning to'ldiruvchisi sifatida yopiq to'plam, chunki uni $X = X \setminus \varnothing$ ko'rinishida yozish mumkin.

2) X to'plam topologiyaga tegishli, topologiyaga tegishli to'plamni ochiq deb ataganmiz. Bo'sh to'plam esa ochiq to'plamning to'ldiruvchisidan iborat bo'lganligi sababli, yopiq to'plam, chunki uni $\varnothing = X \setminus X$ ko'rinishida yozish mumkin.

3) Endi chekli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plam ekanligini isbotlaymiz. Bizga $\{F_\alpha\}$ yopiq to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin. Bu oiladan ixtiyoriy tarzda chekli sondagi to'plamlar ajratib olib, ularning birlashmasi yopiq ekanligini isbotlashimiz kerak.

Berilgan yopiq to'plamlar sistemasidan ixtiyoriy olingan yopiq to'plamlarni $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ..., F_{\alpha_n}$ kabi belgilaylik. Endi $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$ to'plamni yopiqligini isbotlashimiz kerak. Buning uchun $X \setminus F$ to'plamni ochiqligini isbotlash yetarli. Ma'lumki, ushbu $X \setminus F = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_{\alpha_i})$ munosabat har doim o'rinli. Tenglikning o'ng tomonida chekli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi turibdi. Modomiki, (X,τ) topologik fazo ekan, yuqoridagi kesishma ochiq to'plamdan iborat bo'ladi. Demak, $X \setminus F$ to'plam ochiq to'plamdir. Bundan F to'plamning yopiqligi kelib chiqadi.

Natijada, chekli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plam ekanligini isbotlandi.

4) Navbatda ixtiyoriy sondagi yopiq to'plamlarning kesishmasi yopiq to'plam bo'lishini isbotlashimiz kerak. Bizga $\{F_\alpha\}$ yopiq to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin. Bu oiladan ixtiyoriy tarzda to'plamlar ajratib olib, ularning kesishmasi yopiq ekanligini isbotlashimiz kerak.
Berilgan yopiq to'plamlar sistemasidan ixtiyoriy olingan yopiq to'plamlar oilasini $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ...$ kabi belgilaylik.

Endi $F=\bigcap_i F_{\alpha_i}$ to‘plamni yopiqligini isbotlashimiz kerak. Buning uchun $X \setminus F$ to‘plamni ochiqligini isbotlash yetarli.

Ma’lumki, ushbu $X \setminus F = X \setminus \left(\bigcap_i F_{\alpha_i}\right) = \bigcup_i \left(X \setminus F_{\alpha_i}\right)$ munosabat har doim o‘rinli. Tenglikning o’ng tomonida ixtiyoriy sondagi ochiq to‘plamlarning birlashmasi turibdi. Modomiki, (X,τ) topologik fazo ekan, yuqoridagi birlashma ochiq to‘plamdan iborat bo‘ladi. Demak, $X \setminus F$ to‘plam ochiq to‘plamdir. Bundan F to‘plamning yopiqligi kelib chiqadi.

Natijada, ixtiyoriy sondagi yopiq to‘plamlarning kesishmasi yopiq to‘plam ekanligini isbotlandi.

2-masala. Sanoqlilkning birinchi aksiomasi bajarilmagan topologik fazoga misol keltiring.

Yechish. Bizga $X = R^1$ haqiqiy to’g’ri chiziq va $Y=(R^1 \setminus N)\bigcup\{y_0\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin (by yerda $y_0 \notin R$). Berilgan X to‘plamning har bir x nuqtasiga quyidagi munosabat bilan

$$f(x)=\begin{cases} x, \ \text{agar} \ \ x \in X \setminus N \\ y_0, \ \text{agar} \ \ x \in N \end{cases}$$

nuqtani mos qo‘yilgan bo‘lsin.

Quyidagi yopiq to‘plamlar $\tau_Y=\{A \subset Y : f^{-1}(A) \ \text{to'plam} \ X \ \text{da yopiq}\}$ oilasi yordamida Y to‘plamda kiritilgan topolgiya qaraymiz. Yuqoridagi $f: X \to Y$ akslantirish yopiq ekanligini ko‘rsatish qiyin emas. Ravshanki, y_0 nuqtaning Y topologik fazodagi atroflari $(U \setminus N)\bigcup\{y_0\}$ ko‘rinishda bo‘ladi (bu yerda U to‘plam N to‘plamni o‘z ichiga oluvchi X topologik fazodagi ochiq to‘plam).

Endi y_0 nuqtaning ixtiyoriy $(U_1 \setminus N)\bigcup\{y_0\}$, $(U_2 \setminus N)\bigcup\{y_0\}$, $(U_3 \setminus N)\bigcup\{y_0\}$,... atroflari ketma-ketligini qaraymiz. Har bir $i=1,2,3,...$ uchun $x_i > i$ shartni qanoatlantiruvchi $x_i \in U_i \setminus N$ nuqta tanlaymiz. Ushbu $U = X \setminus \{x_1, x_2, x_3,...\}$ to‘plam N to‘plamni o‘z ichiga oluvchi X topologik fazodagi ochiq to‘plamdir. Shuday qilib, y_0 nuqtaning $V=(U \setminus N)\bigcup\{y_0\}$ atrofini hosil qildik. Bu hosil qilingan atrof $\{x_1, x_2, x_3,...\}$ ketma- ketlikning birorta ham elementini o‘z ichiga olmaydi. Demak, Y topologik fazo y_0 nuqtaning atrofida sanoqli bazaga ega emas, ya’ni sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilmas ekan.

Misol va masalalar

1. Ikkita elementdan iborat to‘plamning barcha topologiyasini yozing.

2. Bizga X -ixtiyoriy to‘plam berilgan bo‘lsin. Ochiq to‘plamlar sistemasi sifatida uning barcha qism to‘plamlari sistemasini olamiz. Bu sistema topologiya tashkil etishini tekshiring. Bu topologiya diskret topologiya deyiladi. Bu topologiya bilan berilgan fazoni diskret topologik fazo deyiladi.

Agar ochiq to‘plamlar sifatida $\{\varnothing, X\}$ juftligi olinsa, u ham topologiya tashkil etishi isbotlansin. Buni (oddiy) trivial topologiya deyiladi.

3. Bizga (X,τ) topologik fazo va uning $A\subset(X,\tau)$ qism to‘plami berilgan bo‘lsin. U holda quyidagilar isbotlansin:

1) $\overline{A} = A\bigcup\partial A$;

2) $\partial(A\bigcup B)\subset\partial A\bigcup\partial B$;

3) $\partial(A\bigcap B)\subset\partial A\bigcup\partial B$;

4) $\partial\overline{A}\subset\partial A$;

5) $\partial(X\setminus A)=\partial A$;

6) $\partial(\operatorname{int} A)\subset\partial A$;

7) $\operatorname{int} A = A\setminus\partial A$.

8) $\overline{A} = \operatorname{int} A\bigcup\partial A$

2), 3), 4), 6) hollarning teskarisi o‘rinli emasligiga misol keltiring.

4. Metrik fazoda to‘plamning urinish nuqtasi ta’rifi shu metrika hosil qilgan topologiyadagi ta’rifiga ekvivalentligi isbotlansin.

5. Topologik fazoda $A\subset(X,\tau)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda, A to‘plam yopiq bo‘lishi uchun $\overline{A}=A$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarligi isbotlansin.

6. Topologik fazoda to‘plam yopig’ining yopiq to‘plam ekanligi ko‘rsatilsin.

7. Topologik fazoda $A, B\subset(X,\tau)$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. U holda, ushbu $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$ munosabatning bajarilishi ko‘rsatilsin.

8. Topologik fazoda ixtiyoriy Y to‘plam uchun $\overline{\overline{Y}}=\overline{Y}$ tenglikning o‘rinli ekanligi ko‘rsatilsin.

9. Topologik fazoda $Y\subset(X,\tau)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda, $\tau_Y=\{H : H = Y\bigcap G, G\in\tau\}$ oila Y da topologiya aniqlashi isbotlansin. (Y bu topologiya bilan qism fazo deyiladi, τ_y esa τ yordamida Y ga keltirilgan topologiya deyiladi.)

10. Topologik fazoda $Y_1, Y_2\in\tau$ ochiq to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar Y_1 va Y_2 lar hamma yerda zich bo‘lsa, ularning kesishmasidan iborat $Y=Y_1\bigcap Y_2$ to‘plam ham hamma yerda zich ekanligi isbotlansin.

11. Sanoqlilikning birinchi (ikkinchi) aksiomasi bajarilmagan topologik fazoga misol keltiring.

12. Topologik fazoning qism to‘plami bo‘lgan Y to‘plam biror ochiq to‘plamning yopig’i bo‘lishi uchun, u o‘z ichining yopig’iga teng bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

13. Yevklid fazosi R^n da sfera sharning chegarasi ekanligi ko‘rsatilsin.

14. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan topologik fazoda sanoqlilikning birinchi aksiomasini bajarilishi ko‘rsatilsin.

15. Yevklid fazosi R^n da ochiq sharning yopig’i yopiq shar, sfera esa ochiq hamda yopiq sharlarning chegarasi ekanligi isbotlansin.

16. Berilgan X to‘plamdagi ixtiyoriy topologiyalar oilasining kesishmasi, shu X to‘plamda topologiya bo‘lishi ko‘rsatilsin.

17. Topologik fazoda $A \subset (X, \tau)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda, quyidagi munosabatlarni isbotlang:

1) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A$;

2) $X \setminus A = \overline{X \setminus A}$.

18. Topologik fazoda berilgan ixtiyoriy $A, B \subset (X, \tau)$ to‘plamlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli ekanligi isbotlansin:

1) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

2) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$.

Aksincha, 1) $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$ va 2) $\overline{A} \setminus \overline{B} \supset \overline{A \setminus B}$ munosabatlar bajarilmasligiga misol keltiring.

19. Bizga (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) topologik fazolar berilgan bo‘lib, Y topologik fazo X topologik fazoning qism fazosi bo‘lsa, Z topologik fazo esa, Y topologik fazoning qism fazosi bo‘lsa, u holda Z topologik fazo X ning ham qism fazosi ekanligi isbotlansin.

20. Topologik fazoda berilgan A qism to‘plamini ikkita yopiq to‘plamlarning ayirmasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘lishi uchun, $\overline{A} \setminus A$ to‘plamning yopiq bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

21. Topologik fazoda berilgan to‘plamni o‘z ichiga olgan eng kichik yopiq to‘plam uning yopig’i ekanligi isbotlansin.

22. Topologik fazoda berilgan to‘plamining ochiq qism to‘plamlari ichida eng kattasi uning ichi ekanligi isbotlansin.

23. Ratsional koeffitsientli ko‘phadlar to‘plami $C_{[a,b]}$ ning hamma yerida zich va sanoqli to‘plam ekanligi isbotlansin.

24. Topologik fazo X ning Y qism fazosi diskret bo‘lishi uchun uning barcha nuqtalari ajralgan bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

25. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan topologik fazo separabel fazo ekanligi isbotlansin.

Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilmagan separabel fazoga misol keltiring.

26. Metrik fazo separabel fazo bo‘lishi uchun unda sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilishi zarur va yetarli ekanligi ko‘rsatilsin.

27. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan topologik fazoda har qanday topologiya bazasi qandaydir sanoqli bazani o‘z ichiga olishi isbotlansin.

28. Bizga (X, τ) topologik fazo va uning $A \subset (X, \tau)$ ochiq qism to‘plami berilgan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $B \subset (X, \tau)$ to‘plam uchun ushbu $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ munosabatni bajarilishi isbotlansin.

A ochiq bo‘lmaganda bu munosabat o‘rinli bo‘lmasligiga misol keltiring.

29. To‘plam ham ochiq, ham yopiq bo‘lishi uchun uning chegarasi bo‘sh bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin .

30. Bizga (X,τ) topologik fazo va uning $A\subset(X,\tau)$ qism to‘plami berilgan bo‘lsin. U holda A to‘plamning ochiq bo‘lishi uchun $\partial A=\overline{A}\setminus A$ munosabat bajarilishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

31. Bizga (X,τ) topologik fazo va uning $A\subset(X,\tau)$ qism to‘plami berilgan bo‘lsin. U holda A yopiq bo‘lishi uchun, $\partial A=A\setminus(\operatorname{int}A)$ bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

32. Topologik fazodagi barcha chegaralangan sonli (x_n) ketma-ketliklar to‘plami X bilan belgilaylik. U holda $X\times X$ to‘plamda aniqlangan $d(x,y)=\sup|x_n-y_n|$ funksiya metrika ekanligi va (X,d) metrik fazo separabel bo‘lmagan fazo ekanligi isbotlansin.

33. Bizga X topologik fazo, $Y\subset X$ qism fazo va ixtiyor $A\subset Y$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar Y topologik fazoda x nuqta A to‘plamning limit nuqtasi ekanligi ma’lum bo‘lsa, X topologik fazoda ham x nuqta A to‘plamning limit nuqtasi bo‘lishi ko‘rsatilsin.

34. Bizga $X_1,X_2,...X_n$ topologik fazolar berilgan bo‘lsin. U holda, bu topologik fazolarning $X_1\times X_2\times...\times X_n$ to’g’ri ko‘paytmasi sanoqlilikning birinchi(ikkinchi) aksiomasini qanoatlantirishi uchun ko‘paytuvchilarning har biri sanoqlilikning birinchi(ikkinchi) aksiomasini qanoatlantirishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

35. Bizga X topologik fazo va $A\subset X$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Berilgan A to‘plam yopiq bo‘lishi uchun, u o‘zining barcha limit nuqtalarini o‘z ichiga olishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

36. Topologik fazoda $U\subset X$ ochiq to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda $A=\overline{U}\setminus U$ to‘plam X topologik fazoning hech qayerida zich emasligi isbotlansin.

37. Topologik fazoda A yopiq to‘plam berilgan bo‘lsin. Berilgan A to‘plam X topologik fazoning hech qayerida zich bo‘lmagan to‘plam bo‘lishi uchun, $X\setminus A$ to‘plam X topologik fazoning hamma yerida zich bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin. Agar A to‘plamning yopiqligini talab qilmasak, tasdiq o‘rinli bo‘ladimi?

38. Bizga X topologik fazo, uning qism fazosi Y va X topologik fazoda hech qayerda zich bo‘lmagan A to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda, $A_1=A\bigcap Y$ to‘plam Y qism fazoning hech qayerida zich emasligi isbotlansin.

39. Bizga X topologik fazo va uning $Y\subset X$ qism fazosi hamda X topologik fazoning bazasidan iborat bo‘lgan $\{U_\alpha\}$ oila berilgan bo‘lsin. U holda, $U_\alpha'=\{U_\alpha\bigcap Y\}$ oila Y fazodagi topologiya bazasi ekanligi isbotlansin.

40. Topologik fazoda hech qayerda zich bo‘lmagan to‘plamning yopig’i ham hech qayerda zich emasligi ko‘rsatilsin.

41. Berilgan X topologik fazo qanday shartni qanoatlantirganda, uning hamma yerida zich to‘plami o‘zi bilan ustma-ust tushadi, ya’ni ushbu $\overline{A} = X \Rightarrow X = A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi?

42. Biror X to‘plam va undagi $\{\tau_\alpha\}$ topologiyalar oilasi berilgan bo‘lsin. U holda, $\tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$ oila ham X to‘plamda topologiya bo‘lishini isbotlang.

43. Biror (X,d) metrik fazoda $A = \{a_1, a_2, ...\}$ sanoqli va hamma yerda zich to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda, $\left\{B_{\frac{1}{n}}(a_n)\right\}$ oila X metrik fazodagi topologiyaning bazasi ekanligi ko‘rsatilsin.

44. Metrik fazoda ochiq sharning yopig’i yopiq shar bo‘lishi uchun radiusi sharning radiusi bilan, markazi sharning markazi bilan ustma-ust tushgan sfera uning chegarasi bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

45. Sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilgan topologik fazoda A to‘plam yopiq bo‘lishi uchun, A to‘plam elementlaridan tuzilgan barcha yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning limitlari A to‘plamga tegishli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi ibotlansin.

46. Biror (X,τ) topologik fazoda $\{U_\alpha\}$ ochiq to‘plamlar oilasi topologiya bazasi bo‘lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin:

ixtiyoriy V ochiq to‘plam va ixtiyoriy $x \in V$ nuqta uchun $x \in U \subset V$ shartlarni qanoatlantiruvchi $U \in \{U_\alpha\}$ to‘plam mavjud.

47. Bizga X topologik fazo va uning Y qism fazosi hamda $A \subset Y$ to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda A to‘plamning Y fazodagi yopig’i, uning X topologik fazodagi yopig’i bilan Y fazoning kesishmasiga tengligi isbotlansin.

48. Topologik fazoda hech qayerda zich bo‘lmagan ochiq to‘plamning bo‘sh to‘plam ekanligi ko‘rsatilsin.

49. Biror X to‘plam va unda kiritilgan topologiyalar oilasi $\{\tau_\alpha\}$ berilgan bo‘lib, bu sistemaga tegishli ixtiyoriy ikkita $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}$ topologiyalar uchun ulardan kuchliroq $\tau_{\alpha_3} \in \{\tau_\alpha\}$ topologiya mavjud bo‘lsa, u holda $\tau = \bigcup_\alpha \tau_\alpha$ ham X to‘plamda topologiya tashkil qilishi isbotlansin (masalan, bu munosabat ixtiyoriy ikkitasini solishtirish mumkin bo‘lgan $\{\tau_\alpha\}$ oilasi uchun o‘rinli).

3 §. Uzluksizlik

Topologiyaning asosiy tushunchalaridan biri uzluksizlik tushunchasidir. Bu tushuncha matematik analizda ham uchraydi, lekin topologiyada uzluksizlik tushunchasi har tomonlama to‘liq rivojini topadi. Uzluksizlik yordamida topologik akslantirish tushunchasi aniqlanadi.

Topologiyada uzluksizlik tushunchasi ochiq to‘plamlar yordamida kiritiladi. Shuning uchun bu yerdagi tasdiqlarni isbotlashda topologik usullar qo‘llaniladi.

Asosiy tushunchalar

Bizga X, Y topologik fazolar va X topologik fazoni Y topologik fazoga akslantiruvchi $f:X\to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. X topologik fazoning x_0 nuqtasining f akslantirishdagi aksini $y_0=f(x_0)$ kabi belgilaylik.

3.1.-ta’rif. Berilgan f akslantirishda y_0 nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo‘lib, $f(U)\subset V$ munosabat bajarilsa, f akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar f akslantirish X topologik fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u uzluksiz akslantirish deyiladi.

3.2.-ta’rif. Berilgan $f:X\to Y$ akslantirishda ixtiyoriy ochiq (yopiq) to‘plamning aksi ochiq (yopiq) to‘plam bo‘lsa, f ochiq (yopiq) akslantirish deyiladi.

3.3.-ta’rif. Berilgan $f:X\to Y$ akslantirish uzluksiz bo‘lib, unga teskari akslantirish f^{-1} mavjud va uzluksiz bo‘lsa, f-gomeomorfizm yoki topologik akslantirish deyiladi. X va Y topologik fazolar esa, o‘zaro geomeomorf yoki topologik ekvivalent fazolar deyiladi.

3.4.-ta’rif. Bizga $(X,\tau_x),(Y,\tau_y)$ topologik fazolar berilgan bo‘lsin. X va Y fazolarning nuqtalaridan iborat Z to‘plam $\tau=\{U\bigcup V \mid U\in\tau_x, V\in\tau_y\}$ topologiya bilan birgalikda X va Y topologik fazolarning bog’lanmagan yig’indisi deyiladi.

3.5.-ta’rif. Bizga X topologik fazo va unda $x,y\in X$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Agar $f:[0:1]\to X$ uzluksiz akslantirish uchun $f(0)=x$ va $f(1)=y$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda f akslantirish boshi x nuqtada va oxiri y nuqtada bo‘lgan yo‘l deb ataladi.

3.6.-ta’rif. Bizga $f:X\to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. $V\subset Y$ to‘plamni ochiq deymiz, shu holda va faqat shu holdaki, agar $f^{-1}(V)$ ochiq bo‘lsa. Bu $f:X\to Y$ akslantirish yordamida kiritilgan topologiya faktor topologiya, berilgan f akslantirish esa faktor akslantirish deyiladi. Y to‘plam kiritilgan topologiya bilan topologik fazo shartlarini qanotlantiradi.

3.7.-ta’rif. Berilgan $f:X\to Y$ akslantirish uchun $f(X)=Y$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bu akslantirish ustiga akslantirish, agar $f(X)\subset Y$ bo‘lsa, ishiga akslantirish deyiladi.

Masalalar yechish namunalari

1-masala. Berilgan (X,τ_X) topologik fazoni (Y,τ_Y) topologik fazoga akslantiriruvchi $f:X\to Y$ akslantirish uchun quyidagi shartlarning ekvivalentligini isbotlang:

a) $f:X\to Y$ akslantirish uzluksiz.

b) (Y,τ_Y) topologik fazo ixtiyoriy ochiq qism to‘plamining proobrazi(asli) X topologik fazoda ochiq.

c) (Y,τ_Y) topologik fazo predbazasi (oldbazasi) ixtiyoriy elementining proobrazi(asli) (X,τ_X) topologik fazoda ochiq.

d) (Y,τ_Y) topologik fazo bazasi ixtiyoriy elementining proobrazi(asli) (X,τ_X) topologik fazoda ochiq.

e) berilgan (X,τ_X) va (Y,τ_Y) topologik fazolarda ixtiyoriy $x\in X$ va ixtiyoriy $V\in D(f(x))$ atrof uchun, $f(U)\subset V$ munosabat bajariladigan shunday $U\in B(x)$ atrof topish mumkin bo‘ladigan $x\in X$ nuqtaning X topologik fazoda $\{B(x)\}_{x\in X}$, $y=f(x)$ nuqtaning Y topologik fazoda $\{D(y)\}_{y\in Y}$ atroflar oilasi mavjud.

f) (Y,τ_Y) topologik fazo ixtiyoriy yopiq qism to‘plamining proobrazi(asli) X topologik fazoda yopiq.

g) ixtiyoriy $A\subset X$ to‘plam uchun ushbu $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ munosabat o‘rinli.

h) ixtiyoriy $B\subset Y$ to‘plam uchun ushbu $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$ munosabat o‘rinli.

i) ixtiyoriy $B\subset Y$ to‘plam uchun ushbu $f^{-1}(IntB)\subset Intf^{-1}(B)$ munosabat o‘rinli.

Yechish. a) munosabatdan b) munosabatni keltirib chiqaraylik. Ya’ni, $f:X\to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo‘lsin. Berilgan akslantirishning uzluksizligidan foydalanib, (Y,τ_Y) topologik fazo ixtiyoriy ochiq qism to‘plamining proobrazi (asli) X topologik fazoda ochiq ekanligini ko‘rsatamiz. Uzluksiz akslantirishning ta’rifiga ko‘ra, $f:X\to Y$ akslantirish X topologik fazoning har bir nuqtasida uzluksiz.

Modomiki, $f:X\to Y$ akslantirish X topologik fazoning har bir nuqtasida uzluksiz ekan, ixtiyoriy $x\in X$ nuqta obrazi(aksi) bo‘lgan $y=f(x)\in Y$ nuqtaning ixtiyoriy $V_{f(x)}\subset Y$ atrofi uchun $x\in X$ nuqtaning shunday U_x atrofi topiladiki, bu atroflar uchun ushbu $f(U_x)\subset V_{f(x)}$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Endi, (Y,τ_Y) topologik fazodan olingan ixtiyoriy V ochiq qism to‘plamining proobrazi(asli) X topologik fazoda ochiq ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy olingan $x \in f^{-1}(V)$ nuqtani ichki nuqta ekanligini ko‘rsatamiz. Oxirgi munosabatdan $f(x) \in V$ kelib chiqadi.

Demak, V ochiq to‘plamni $f(x)$ nuqtaning atrofi deyish mumkin. Endi $f: X \to Y$ akslantirish uzluksiz ekanligini hisobga olsak, ixtiyoriy $V \subset Y$ ochiq to‘plamning proobrazi uchun, x nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrof uchun $U_x \subset f^{-1}(V)$ munosabat o‘rinli. Bundan esa, ushbu $x \in U_x \subset f^{-1}(V_{f(x)})$ munosabatga ega bo‘lamiz va x nuqtaning ichki nuqta ekanligi kelib chiqadi. Olingan x nuqtaning ixtiyoriyligidan $f^{-1}(V_{f(x)})$ to‘plamning ochiqligi kelib chiqadi.

Endi b) munosabatdan c) munosabatni keltirib chiqaraylik, ya’ni (Y, τ_Y) topologik fazo ixtiyoriy ochiq qism to‘plamining proobrazi(asli) X topologik fazoda ochiqligidan foydalanib, (Y, τ_Y) topologik fazo predbazasi(oldbazasi) ixtiyoriy elementining proobrazi (X, τ_X) topologik fazoda ochiqligini isbotlaymiz.

Bizga (Y, τ_Y) topologik fazoning $\tau_1 = \{U_\alpha\}$ ochiq to‘plamlar oilasidan iborat predbazasi berilgan bo‘lsin deb faraz qilaylik. Modomiki, (Y, τ_Y) topologik fazo ixtiyoriy ochiq qism to‘plamining proobrazi(asli) X topologik fazoda ochiq ekan, berilgan predbazadan olingan ixtiyoriy $U \in \tau_1$ ochiq to‘plamning proobrazi $f^{-1}(U)$ ham ochiq bo‘ladi.

Endi c) munosabatdan d) munosabatni kelib chiqishini isbotlaylik. Bizga (Y, τ_Y) topologik fazoning $\tau_1 = \{U_\alpha\}$ ochiq to‘plamlar oilasidan iborat predbazasi berilgan bo‘lib, undan olingan ixtiyoriy $U \in \tau_1$ ochiq to‘plamning proobrazi $f^{-1}(U)$ ham ochiq deb faraz qilaylik. Berilgan (Y, τ_Y) topologik fazoning $\tau_1 = \{U_\alpha\}$ oilaga tegishli to‘plamlarning mumkin bo‘lgan barcha chekli sondagi $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k$, (bu yerda barcha $i = 1,2,...,k$ lar uchun $U_i \in \tau_1$) kesishmalaridan hosil bo‘lgan oiladan iborat bazasini qaraylik. Ushbu $f^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \cap ... \cap f^{-1}(U_k)$ tenglikdan baza elementlarining proobrazlari X topologik fazoda ochiq bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi d) munosabatdan e) munosabatni keltirib chiqaraylik, ya’ni (Y, τ_Y) topologik fazo bazasi ixtiyoriy elementining proobrazi (X, τ_X) topologik fazoda ochiq ekanligidan, berilgan (X, τ_X) va (Y, τ_Y) topologik fazolarda ixtiyoriy $x \in X$ va ixtiyoriy $V \in D(f(x))$ atrof uchun, $f(U) \subset V$ munosabat bajariladigan shunday $U \in B(x)$ atrof topish mumkin bo‘ladigan $x \in X$ nuqtaning X topologik fazoda $\{B(x)\}_{x \in X}$, $y = f(x)$ nuqtaning Y topologik fazoda $\{D(y)\}_{y \in Y}$ atroflar oilasi mavjudligini isbotlaylik.

Ma’lumki, ixtiyoriy $V \in D(f(x))$ atrof uchun, shunday Y topologik fazoning bazasiga tegishli W atrof topiladiki, bu atroflar uchun $f(x)\in W\subset V$ munosabat bajariladi. Masala shartiga ko‘ra, $f^{-1}(W)$ to‘plam X topologik fazoda ochiq va $x\in f^{-1}(W)$ munosabatdan baza ta’rifiga ko‘ra, shunday $U\subset f^{-1}(W)$ bazaga tegishli atrof topiladi. U holda ushbu $f(U)\subset f(f^{-1}(W))\subset W\subset V$ munosabatga ega bo‘lamiz. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Navbatdagi ishimiz berilgan (X,τ_X) va (Y,τ_Y) topologik fazolarda ixtiyoriy $x\in X$ va ixtiyoriy $V\in D(f(x))$ atrof uchun, $f(U)\subset V$ munosabat bajariladigan shunday $U\in B(x)$ atrof topish mumkin bo‘ladigan $x\in X$ nuqtaning X topologik fazoda $\{B(x)\}_{x\in X}$, $y=f(x)$ nuqtaning Y topologik fazoda $\{D(y)\}_{y\in Y}$ atroflar oilasi mavjud ekanligidan (Y,τ_Y) topologik fazo ixtiyoriy yopiq qism to‘plamining proobrazi X topologik fazoda yopiqligini isbotlaymiz.

Bizga (Y,τ_Y) topologik fazoda $B=\overline{B}$ yopiq to‘plam berilgan bo‘lsin, uning proobrazi $f^{-1}(B)$ to‘plamning yopiqligini isbotlashimiz kerak. Ushbu munosabat $f^{-1}(B)=X\setminus f^{-1}(Y\setminus B)$ o‘rinli bo‘lgani uchun, $f^{-1}(Y\setminus B)$ to‘plamning X topologik fazoda ochiqligini isbotlash yetarli. Buning uchun $f^{-1}(Y\setminus B)$ to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi ichki nuqta ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Ravshanki, ixtiyoriy $x\in f^{-1}(Y\setminus B)$ nuqta uchun $f(x)\in Y\setminus B$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bundan esa, $V\subset Y\setminus B$ munosabat bajariladigan $V\in D(f(x))$ atrof mavjudligi kelib chiqadi. Masala shartiga ko‘ra, $f(U)\subset V$ munosabat bajariladigan shunday $U\in B(x)$ atrof topish mumkin. Natijada, ushbu $x\in U\subset f^{-1}\big(f(U)\big)\subset f^{-1}(V)\subset f^{-1}(Y\setminus B)$ munosabatlarga ega bo‘lamiz Bu esa, $f^{-1}(Y\setminus B)$ to‘plamning ochiqligini, $f^{-1}(B)$ esa yopiqligini ko‘rsatadi.

Endi f) munosabatdan g) munosabatni keltirib chiqaraylik, ya’ni (Y,τ_Y) topologik fazo ixtiyoriy yopiq qism to‘plamining proobrazi(asli) X topologik fazoda yopiqligidan, ixtiyoriy $A\subset X$ to‘plam uchun ushbu $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ munosabat o‘rinli ekanligini keltirib chiqaraylik. Buning uchun $f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$ to‘plamning A to‘plamni o‘z ichiga oluvchi yopiq to‘plamligidan, $\overline{A}\subset f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$ munosabat kelib chiqadi. Bu yerdan o‘z navbatida $f(\overline{A})\subset f(f^{-1}(\overline{f(A)}))\subset\overline{f(A)}$ munosabatlarni hosil qilamiz. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

g) munosabatdan h) munosabatni keltirib chiqaraylik, ya’ni ixtiyoriy $A\subset X$ to‘plam uchun ushbu $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ munosabat o‘rinli ekanidan foydalanib, ixtiyoriy $B\subset Y$ to‘plam uchun ushbu $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$ munosabat o‘rinliligini keltirib chiqaraylik.

Yuqoridagi munosabatni keltirib chiqarish uchun $A = f^{-1}(B)$ munosabatga ushbu munosabatni $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ qo‘llash natijasida ushbu $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$ munosabatni hosil qilamiz, bu yerdan esa isbotlash kerak bo‘lgan $\overline{f^{-1}(B)} \subset f(\overline{B})$ munosabat kelib chiqadi.

Endi h) munosabatdan i) munosabatni keltirib chiqaraylik, ya’ni ixtiyoriy $B \subset Y$ to‘plam uchun, ushbu $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ munosabat o‘rinli ekanidan foydalanib, ixtiyoriy $B \subset Y$ to‘plam uchun ushbu $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int} f^{-1}(B)$ munosabat o‘rinliligini keltirib chiqaraylik. Buning uchun, $Y \setminus B$ to‘plamga $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ munosabatni qo‘llab, ushbu $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$ munosabatni hosil qilamiz. Bundan esa, quyidagi munosabatlar hosil qilamiz:

$$f^{-1}(\operatorname{int} B) = f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} =$$
$$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{int} f^{-1}(B)$$

Natijada, ushbu $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int} f^{-1}(B)$ munosabat kelib chiqdi.

Masalani to‘liq yechimini hosil qilish uchun i) munosabatdan a) munosabatni keltirib chiqarishimiz kerak, ya’ni ixtiyoriy $B \subset Y$ to‘plam uchun, ushbu $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int} f^{-1}(B)$ munosabat o‘rinli ekanidan f akslantirishning uzluksizligini keltirib chiqaraylik.

Bizga $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in X$ nuqta obrazi(aksi) bo‘lgan $y = f(x) \in Y$ nuqtaning ixtiyoriy atrofini $f(x) \in V \subset Y$ deb belgilaylik, u holda $x \in f^{-1}(V)$ ekani kelib chiqadi. Bu $V \subset Y$ to‘plam uchun $V = \operatorname{int} V$ munosabat o‘rinli ekani ma’lum. Berilgan $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int} f^{-1}(B)$ munosabatdan foydalanib, ushbu $f^{-1}(V) \subset \operatorname{int} f^{-1}(V)$ munosabatni hosil qilamiz Bundan esa, quyidagi $f^{-1}(V) = \operatorname{int} f^{-1}(V)$ tenglik kelib chiqadi. Natijada, $f^{-1}(V)$ to‘plamning ochiqligini hosil qildik. Agar $U = f^{-1}(V)$ deb belgilasak, ushbu munosabat $x \in U \subset f^{-1}(V)$ hosil qilamiz. Bundan esa $f(U) \subset V$ munosabat kelib chiqadi. Bu $f : X \to Y$ akslantirishning $x \in X$ nuqtada uzluksiz akslantirish ekanligini beradi. Olingan $x \in X$ nuqtaning ixtiyoriyligidan $f : X \to Y$ akslantirish X topologik fazoning har bir nuqtasida uzluksizligi kelib chiqadi.

Modomiki, $f : X \to Y$ akslantirish X topologik fazoning har bir nuqtasida uzluksiz ekan, u uzluksiz akslantirish bo‘ladi. Masala to‘liq yechildi.

Misol va masalalar

1. Metrik fazo (X, d) va uning qism to‘plami $A \subset X$ berilgan bo‘lsin. Agar A-bo‘sh bo‘lmagan to‘plam bo‘lsa, u holda $f(x) = d(x, A)$ akslantirishning uzluksizligi ko‘rsatilsin.

2. Bizga X, Y topologik fazolar va X topologik fazoni Y topologik fazoga akslantiruvchi $f: X \to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. Berilgan f akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun Y topologik fazodagi ixtiyoriy G ochiq qism to‘plamning proobrazi $f^{-1}(G)$ berilgan X topologik fazoda ochiq to‘plam bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi ko‘rsatilsin.

3. Bizga X, Y topologik fazolar va X topologik fazoni Y topologik fazoga akslantiruvchi $f: X \to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. Berilgan f akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun Y topologik fazodagi ixtiyoriy yopiq qism to‘plamning proobrazi X topologik fazoda yopiq to‘plam bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi ko‘rsatilsin.

4. Uzluksiz akslantirishlarning superpozitsiyasi uzluksiz akslantirishligi isbotlansin.

5. Topologik fazolar X, Y va $f: X \to Y$ uzluksiz, biyektiv akslantirish berilgan bo‘lsin. Agar X topologik fazoda ajralgan nuqta mavjud bo‘lmasa, u holda Y topologik fazoda ham ajralgan nuqta mavjud emasligi isbotlansin.

6. Berilgan $f: [0;1] \to [0;1]$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg’almas nuqtaga ega ekanligi isbotlansin.

7. Teskarisi uzluksiz bo‘lmagan o‘zaro bir qiymatli uzluksiz akslantirishga misol keltiring.

8. Topologik fazolar X, Y va $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo‘lsin. U holda $G = \{(x, f(x))\}$ to‘plam f akslantirish grafigi deyiladi. G to‘plamning X topologik fazoga gomeomorfligi isbotlansin.

9. Berilgan (X, τ_X) topologik fazoni (Y, τ_Y) topologik fazoga akslantiriruvchi $f: X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarliligini isbotlang:

(X, τ_X) topologik fazoning ixtiyoriy $A \subset X$ to‘plami uchun ushbu $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ munosabat o‘rinli.

10. Berilgan (X, τ_X) topologik fazoni (Y, τ_Y) topologik fazoga akslantiriruvchi $f: X \to Y$ akslantirishda Y topologik fazoning bazasiga tegishli to‘plamlarning proobrazi X da ochiq to‘plamlar bo‘lsa, $f: X \to Y$ akslantirishning uzluksiz ekanligi isbotlansin.

11. Ushbu (X, d) metrik fazoning $d(x, y)$ metrikasi $X \times X$ to‘plamda uzluksiz ekanligi isbotlansin.

12. Berilgan (X, τ_X) topologik fazoni (Y, τ_Y) topologik fazoga akslantiriruvchi $f: X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarliligini isbotlang:

(X, τ_X) topologik fazoning ixtiyoriy $A \subset Y$ to‘plami uchun ushbu $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$ munosabat o‘rinli.

13. Berilgan (X, τ_X) topologik fazoni (Y, τ_Y) topologik fazoga akslantiriruvchi $f: X \to Y$ akslantirish ochiq bo‘lishi uchun (Y, τ_Y) topologik fazoning ixtiyoriy $B \subset Y$ to‘plami uchun ushbu $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarliligi isbotlansin.

14. Berilgan (X,τ_X) topologik fazoni (Y,τ_Y) topologik fazoga akslantiriruvchi $f: X \to Y$ akslantirish ochiq bo‘lishi uchun (Y,τ_Y) topologik fazoning ixtiyoriy $B \subset Y$ to‘plami uchun ushbu $f^{-1}(\partial B) = \partial(f^{-1}(B))$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarliligi isbotlansin.

15. Berilgan (X,τ_X) topologik fazoni (Y,τ_Y) topologik fazoga akslantiriruvchi $f: X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun, ixtiyoriy yaqinlashuvchi $x_n \to x$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarliligi isbotlansin.

16. Topologik fazolarni birini ikkinchisiga akslantiriruvchi akslantirish uzluksiz, yopiq akslantirish bo‘lsa, uning faktor akslantirish ekanligi isbotlansin.

17. Bizga X,Y topologik fazolar berilgan bo‘lib, bunda X topologik fazo X_1, X_2 yopiq to‘plamlarning birlashmasidan iboratligi ma’lum, ya’ni $X = X_1 U X_2$. U holda, $f: X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun uning X_1 va X_2 qism fazolarda uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

18. Biri to‘la, ikkinchisi esa to‘la bo‘lmagan o‘zaro gomeomorf metrik fazolarga misol keltiring.

19. Bizga X,Y topologik fazolar va $f: X \to Y$ yopiq akslantirish berilgan. Bu akslantirish uchun $f(X) \subset Y_1$ (bu yerda $Y_1 \subset Y$) munosabat o‘rinli bo‘lib, f-yopiq akslantirish ekanligi ma’lum bo‘lsa, $f: X \to Y_1$ akslantirish ham yopiq bo‘lishini isbotlang.

20. Bizga X,Y topologik fazolar va $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan. Agar $X_1 \subset X$ va $f_1 = f\big|_{X_1}: X_1 \to Y$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, quyidagi tasdiqlar o‘rinli ekanligi isbotlansin:

1) f_1 akslantirish uzluksiz;

2) agar X_1 to‘plam X topologik fazoda yopiq to‘plam va f akslantirish yopiq akslantirish bo‘lsa, u holda f_1 yopiq akslantirishdir;

3) agar X_1 to‘plam X topologik fazoda yopiq to‘plam va f akslantirish ochiq akslantirish bo‘lsa, u holda f_1 ochiq akslantirishdir;

21. Ushbu X,Y topologik fazolarda berilgan $f: X \to Y$ akslantirish yopiq bo‘lishi uchun Y topologik fazoning ixtiyoriy $y \in Y$ nuqtasi va $f^{-1}(y)$ nuqta tegishli bo‘lgan ixtiyoriy U ochiq to‘plami uchun, y nuqtaning shunday V_y airofi mavjud bo‘lib, $f^{-1}(V_y) \subset U$ munosabat bajarilishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

22. Ushbu X,Y topologik fazolarda berilgan $f: X \to Y$ akslantirish yopiq bo‘lishi uchun ixtiyoriy $A \subset X$ to‘plam uchun, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

23. To'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy ikkita ochiq (yopiq) interval o'zaro gomeomorfligi isbotlansin.

24. Bizga X,Y topologik fazolar, $f:X\to Y$ akslantirish va X topologik fazodagi $U=\{U_\alpha\}$ topologiya bazasi berilgan bo'lsin. Berilgan f akslantirish ochiq akslantirish bo'lishi uchun, $U=\{U_\alpha\}$ oiladan olingan ixtiyoriy U_α to'plamning $f(U_\alpha)$ aksi Y topologik fazodada ochiq bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

25. Uzluksiz ustiga $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ akslantirshlar mavjud bo'lgan o'zaro gomeomorf bo'lmagan X,Y topologik fazolarga misol keltiring.

26. Ushbu X,Y topologik fazolar berilgan. $X\times Y$ to'g'ri ko'paytmaning X ga proeksiyasi uzluksiz, ochiq va yopiq akslantirish ekanligi isbotlansin.

27. Bizga X,Y topologik fazolar va $f:X\to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Berilgan f akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun quyidagi munosabatning bajarilishi zarur va yetarliligi isbotlansin:

ixtiyoriy $A\subset Y$ qism to'plam uchun $f^{-1}(\operatorname{int} A)\subset \operatorname{int}(f^{-1}(A))$ munosabat o'rinli.

28. Topologik akslantirishlarning superpozitsiyasi topologik akslantirish bo'lishini isbotlang.

29. Berilgan $f:R^n\to R^m$ akslantirish chiziqli bo'lsa, uning uzluksiz ekanligi ko'rsatilsin.

30. Bizga X,Y topologik fazolar berilgan. Agar $f:X\to Y$ uzluksiz va biyektiv akslantirish bo'lsa, quyidagi shartlar ekvivalentligi isbotlansin:

1) f-faktor akslantirish;
2) f-ochiq akslantirish;
3) f-yopiq akslantirish;
4) f-gomeomorf akslantirish.

31. Ushbu X,Y topologik fazolar hamda $f:X\to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $X_1\subset X$ va $\overline{X_1}=X$ munosabatlar o'rinli ekanligi ma'lum bo'lsa, $\overline{f(X_1)}=f(X)$ munosabat ham o'rinli ekanligi isbotlansin.

32. Bizga X,Y topologik fazolar, $f:X\to Y$ uzluksiz, ustiga akslantirish va $X_1\subset X$ qism to'plam berilgan. Agar $f:X_1\to Y$ akslantirish faktor ustiga akslantirish ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda $f:X\to Y$ akslantirishning faktor akslantirish ekanligi isbotlansin. Teskari jumla o'rinlimi?

33. Topologik fazolar X,Y , $f:X\to Y$ akslantirish hamda $Y_1\subset Y$ qism to'plam berilgan bo'lsin. f akslantirish uzluksiz bo'lsa, u holda $f : X \to Y_1$ akslantirishning uzluksiz ekanligi isbotlansin.

34. Bizga X,Y topologik fazolar va $f:X\to Y$ akslantirish berilgan. Agar $f(x)\subset Y_1$ munosabat o'rinli bo'lib, f akslantirish ochiq akslantirish ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda $f:X\to Y_1$ akslantirish ham ochiq akslantirish bo‘lishini isbotlang.

35. Yevklid fazosidagi shar shu fazoning o‘ziga gomeomorfligini isbotlang. Soddalik uchun R^2 fazoni qarang.

36. Aylananing yopiq doiraga gomeorf emasligi isbotlansin.

37. Bizga $\{X_\alpha\}$ topologik fazolar oilasi, X to‘plam va $f_\alpha : X \to X_\alpha$ akslantirishlar berilgan bo‘lsin. Berilgan X to‘plamda har bir f_α akslantirish uzluksiz bo‘lgan barcha topologiyalar ichida eng kuchsiz topologiya mavjudligi ko‘rsatilsin. Bu topologiyani f_α oila yordamida keltirilgan kuchsiz topologiya deb ataymiz.

38. Oldingi masalada kiritilgan topologiyani quyidagicha aniqlash mumkinligini ko‘rsating:

Ixtiyoriy Y topologik fazo va $f : Y \to X$ akslantirish uchun $f_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ superpozitsiya har bir α da uzluksiz bo‘lishi uchun $f : Y \to X$ uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli bo‘ladigan X to‘plamda yagona topologiya mavjud.

39. Bizga (X,τ) topologik fazo $X_1 \subset X$ va $f(X_1) \subset X$ $(f(x) = x)$ joylashtirish berilgan bo‘lsin. Berilgan X topologik fazoda f akslantirish yordamida keltirilgan topologiya (37-misolga qarang) τ_{X1} bilan ustma-ust tushishini isbotlang.

40. Bizga $\{X_\alpha\}$ topologik fazolar oilasi, X to‘plam va $f_\alpha : X_\alpha \to X$ akslantirishlar berilgan bo‘lsin. Berilgan X to‘plamda har bir f_α akslantirish uzluksiz bo‘lgan barcha topologiyalar ichida eng kuchli topologiya mavjudligi ko‘rsatilsin. Bu topologiyani f_α oila yordamida keltirilgan kuchli topologiya deb ataymiz.

41. Oldingi masaladagi kiritilgan topologiya quyidagicha aniqlash mumkinligini ko‘rsating:

Ixtiyoriy Y topologik fazo va $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. X to‘plamda, $f : X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun $f \circ f_\alpha : X_\alpha \to Y$ superpozitsiya har bir α da uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli bo‘ladigan yagona topologiya mavjud.

42. Bizga $X_1,...,X_n$ topologik fazolar berilgan bo‘lsin. Agar berilgan topologik fazolarning to’g’ri ko‘paytmasini $X = X_1 \times ... \times X_n$ kabi va $f_i : X \to X_i$ sifatida tabiiy proeksiyani belgilasak, u holda 40-masaladagi f_i akslantirishlar oilasi yordamida keltirilgan kuchli topologiya, $X_1,...,X_n$ topologik fazolarning dekart ko‘paytmasidagi topologiya ekanini isbotlang.

43. Yevklid fazolari R^n va R^m gomeomorf bo‘lishi uchun $n = m$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

44. Bir o‘lchamli Yevklid fazosi R^1 va R^n fazo $n \neq 1$ bo‘lganda o‘zaro gomeomorf emasligi ko‘rsatilsin.

45. O‘lchami n ga teng bo‘lgan R^n Yevklid fazosida yopiq shar va yopiq kub gomeomorfligi ko‘rsatilsin.

46. Berilgan R^{n+1} Yevklid fazosida bitta nuqtasi chiqarib tashlangan sfera R^n fazoga gomeomorfligini isbotlang.

47. Bitta nuqtasi chiqarib tashlangan R^n va $S^{n-1}\times R$ to‘plamlar o‘zaro gomeomorfligi ko‘rsatilsin.

48. Bitta nuqtasi chiqarib tashlangan aylananing ochiq intervalga gomeomorfligi isbotlansin.

49. Bizga E,F,G topologik fazolar, $f:E\to F$ va $g:F\to G$ uzluksiz akslantirishlar berilgan bo‘lsin. Agar f suryektiv akslantirish va $\mathrm{g}\circ \mathrm{f}$ topologik akslantirish ekanligi ma’lum bo‘lsa, u holda f va g topologik akslantirishlar ekanligi ko‘rsatilsin.

50. T harfi L harfiga gomeomorf emasligi isbotlansin.

51. Haqiqiy proyektiv to’g’ri chiziq RP aylanaga gomeomorf ekanini ko‘rsating.

52. Gomeomorf bo‘lmagan X va Y topologik fazolarga misol keltiringki, bunda X topologik fazo biror $Y_1\subset Y$ qism fazosiga, Y topologik fazo esa biror $X_1\subset X$ qism fazosiga gomeomorf bo‘lsin.

53. To’g’ri chiziqda ochiq interval, yarim ochiq interval va yopiq intervallar o‘zaro juft-jufti bilan gomeomorf emasligi isbotlansin.

54. Yevklid fazosi R^1 da quyidagi funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring va grafigini chizing:

1) $f(x)=d(x,Q)$;

2) $f(x)=d(x,I)$;

3) $f(x)=d(x,Q\cap[-1;1])$;

4) $f(x)=d(x,e^Q)\quad e^Q=\{e^a : a\in Q\}$.

Bu yerda Q-barcha ratsional sonlar to‘plami, va $I=[0;1]\subset R$.

4 §. Bog’lanishli fazolar

Ma’lumki, chiziqli bog’lanishli topologik fazolar matematikada muhim o‘rin tutadi. Bu paragrafdagi misol va masalalar bog’lanishlilik xossasiga bag’ishlangan bo‘lib, bu xossa boshqa topologik xossalardan farq qiladi. Xususan, bog’lanishlilikdan boshqa topologik xossalar kelib chiqmaydi, va aksincha bog’lanishlilik xossasi boshqa topologik xossalarning natijasi emas. Bog’lanishli topologik fazolardan so’ng chiziqli bog’lanishlilik tushunchasi va chiziqli bog’lanishlilik komponenta tushunchasi kiritiladi.

Asosiy tushunchalar

Bizga (X,τ) topologik fazo, $A\subset X$ qism to‘plam berilgan bo‘lsin.

4.1.-ta'rif. Ikkita ochiq G_1 va G_2 qism to'plamlar mavjud bo'lib, quyidagi

$$1)\ A=(G_1\cap A)\cup(G_2\cap A)$$
$$2)(G_1\cap A)\cap(G_2\cap A)=\varnothing$$
$$3)G_1\cap A\neq\varnothing, G_2\cap A\neq\varnothing$$

shartlar bajarilsa, A to'plam bog'lanishsiz to'plam deyiladi. Agar yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi ochiq G_1 va G_2 qism to'plamlar mavjud bo'lmasa, A to'plam bog'lanishli to'plam deyiladi.

Endi, $A=X$ holni qaraylik. Bu holda, ushbu $X\cap G_1=G_1$, $X\cap G_2=G_2$ munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun yuqoridagi shartlar quyidagicha ko'rinishini oladi:

$$1)\ X=G_1\cup G_2$$
$$2)G_1\cap G_2=\varnothing$$
$$3)G_1\neq\varnothing,\ G_2\neq\varnothing.$$

Boshqacha qilib aytganda,

4.2.-ta'rif. X topologik fazo ochiq va o'zaro kesishmaydigan, bo'sh bo'lmagan G_1 va G_2 to'plamlar mavjud bo'lib, $X=G_1\cup G_2$ munosabat bajarilsa, X bog'lanishsiz topologik fazo deyiladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi G_1 va G_2 ochiq to'plamlar mavjud bo'lmasa, X fazo bog'lanishli fazo deyiladi.

4.3.-ta'rif. Topologik fazoda $x\in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan x nuqtani o'z ichiga olgan eng katta bog'lanishli to'plam shu nuqtaning bog'lanishlilik komponentasi deyiladi.

4.4-ta'rif. Topologik fazoning ixtiyoriy ikki nuqtasini yo'l bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u chiziqli bog'lanishli topologik fazo deyiladi.

4.5.-ta'rif. Berilgan topologik fazoning har bir nuqtasi atroflarining bog'lanishli to'plamlaridan iborat bazasi mavjud bo'lsa, u lokal bog'lanishli fazo deyiladi.

4.6.-ta'rif. Topologik fazoning har bir nuqtasi atroflari uchun chiziqli bog'lanishli to'plamdan iborat bazasi mavjud bo'lsa, u lokal chiziqli bog'lanishli fazo deyiladi.

Masala yechish namunalari

1-masala. Bog'lanishli to'plamning yopig'i ham bog'lanishlidir.

Yechish. Bizga (X,τ) topologik fazo va uning bog'lanishli qism to'plami $A\subset X$ berilgan bo'lsin. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $A\subset X$ bog'lanishli, lekin $\overline{A}$ bog'lanishsiz to'plam bo'lsin. U holda bog'lanishsiz to'plam ta'rifiga ko'ra, (X,τ) topologik fazoda ochiq G_1 va G_2 qism to'plamlar mavjud bo'lib, ular uchun quyidagi:

$$\overline{A}=(G_1\cap\overline{A})\cup(G_2\cap\overline{A})$$
$$(G_1\cap\overline{A})\cap(G_2\cap\overline{A})=\varnothing$$
$$G_1\cap\overline{A}\neq\varnothing, G_2\cap\overline{A}\neq\varnothing$$
munosabatlar bajariladi. Har qanday to‘plamlar uchun $A\subset\overline{A}$ munosabat o‘rinli bo‘lganligi uchun, yuqoridagi munosabatlarni hisobga olsak, quyidagi:
$$A=(G_1\cap A)\cup(G_2\cap A)$$
$$(G_1\cap\overline{A})\cap A=G_1\cap A$$
$$(G_2\cap\overline{A})\cap A=G_2\cap A$$
tengliklar o‘rinliligi kelib chiqadi.

Bundan tashqari, G_1 va G_2 ochiq to‘plamlar hamda $G_1\cap\overline{A}\neq\varnothing$ va $G_2\cap\overline{A}\neq\varnothing$ munosabatlardan ushbu $G_1\cap A\neq\varnothing$, $G_2\cap A\neq\varnothing$ munosabatlar kelib chiqishini ko‘rsatish qiyin emas. Va nihoyat $(G_1\cap\overline{A})\cap(G_2\cap\overline{A})=\varnothing$ tenglikdan $(G_1\cap A)\cap(G_2\cap A)=\varnothing$ tenglik kelib chiqadi. Yuqoridagi munosabatlar birgalikda A to‘plamning bog’lanishsiz to‘plam ekanligini ko‘rsatadi. Bu ziddiyatdan $\overline{A}$ to‘plamning bog’lanishli ekanligi kelib chiqadi.

2-masala. Berilgan X topologik fazo $X=\bigcup_{\alpha} X_\alpha$ ko‘rinishda tasvirlangan bo‘lib, $\bigcap_{\alpha} X_\alpha\neq\varnothing$ munosabat bajarilsa, X bog’lanishli topologik fazo ekanligi ko‘rsatilsin (bu yerda har bir X_α bog’lanishli to‘plam).

Yechish. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni X ochiq, bo‘sh bo‘lmagan va o‘zaro kesishmaydigan A,B to‘plamlarning birlashmasidan iborat bo‘lsin. U holda $X_\alpha=(X_\alpha\cap A)\cup(X_\alpha\cap B)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Har bir X_α bog’lanishliligidan $X_\alpha\cap A=\varnothing$, $X_\alpha\cap B=\varnothing$ munosabatlardan bittasi o‘rinli bo‘ladi, ya’ni X_α yoki A to‘plamda yoki B to‘plamda yotadi. A va B to‘plamlar bo‘sh bo‘lmagani uchun $a\in A, b\in B$ nuqtalar topish mumkin. Agar $a\in X_{\alpha_0}$ deb faraz qilsak, $X_{\alpha_0}\subset A$ munosabat, $b\in X_{\alpha_1}$ desak, $X_{\alpha_1}\subset B$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Natijada $X_{\alpha_0}\cap X_{\alpha_1}=\varnothing$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa, masala shartiga zid. Demak, X bog’lanishli topologik fazo ekan.

Misol va masalalar

1. Lokal bog’lanishli bo‘lmagan, bog’lanishli topologik fazoga misol keltiring.

2. Bog’lanishli to‘plamning uzluksiz akslantirishdagi aksi bog’lanishli to‘plam bo‘lishi isbotlansin.

3. Lokal bog’lanishli topologik fazoda bog’lanishlilik komponenta ochiq to‘plam ekanligi isbotlansin.

4. Berilgan X topologik fazoning ixtiyoriy $x,y\in X$ nuqtalarini o‘z ichiga oluvchi C_{xy} bog'lanishli to'plam mavjud bo'lsa, X bog'lanishli topologik fazo ekanligi isbotlansin.

5. Ixtiyoriy chiziqli bog'lanishli topologik fazo, bog'lanishli ekanligi isbotlansin.

6. Tekislikda hech bo'lmaganda, bitta koordinatasi ratsional bo'lgan nuqtalar to'plami bog'lanishli bo'ladimi?

7. Tekislikda faqat bitta koordinatasi ratsional bo'lgan nuqtalar to'plami bog'lanishli bo'ladimi?

8. Tekislikda ikkala koordinatasi ratsional bo'lgan nuqtalar to'plami bog'lanishli bo'ladimi?

9. Umumiy markazga ega ratsional radiusli aylanalar to'plami bog'lanishli bo'ladimi?

10. Yevklid fazosi R^n da

1) sfera;

2) sharning ichi;

3) sharning to'ldiruvchisi bog'lanishli ekanligi isbotlansin.

11. To'g'ri chiziqda:

1) $Z =$(barcha butun sonlar to'plami); 2) $\left\{0;\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{n};...\right\}$;

3) $[a;b]$; 4) $Q=$(barcha ratsional sonlar to'plami) lokal bog'lanishli to'plam bo'ladimi?

12. Yevklid fazosi R^1 da cheksiz qism to'plam bo'lgan lokal bog'lanishsiz to'plamga misol keltiring.

13. Quyidagi $A\subset B\subset \overline{A}$ munosabat o'rinli bo'lib, A to'plam bog'lanishli bo'lsa, u holda B to'plam ham bog'lanishli bo'lishi isbotlansin.

14. Topologik fazo chekli sondagi bog'lanishlilik komponentalarga ega bo'lsa, u holda ular ochiq bo'lishi isbotlansin.

15. Topologik fazo X bog'lanishli fazo bo'lib, $f: X\to Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsa, f akslantirishning grafigi bog'lanishli ekanligi ko'rsatilsin.

16. Chiziqli bog'lanishli bo'lmagan bog'lanishli to'plamga misol keltiring.

17. Berilgan A va B to'plamlar bog'lanishli bo'lib, $A\cap \overline{B}\neq\varnothing$ munosabat bajarilsa, u holda $A\cup B$ bog'lanishli bo'lishini isbotlang.

18. To'g'ri chiziqda $A\subset R^1$ qism to'plam bog'lanishli bo'lishi uchun uning intervaldan iborat bo'lishi zarur va yetarli ekanligi ko'rsatilsin. (Bu yerda interval deganda, yopiq, ochiq, yarim ochiq, bir tarafi cheksiz, ikki tarafi cheksiz intervallar tushuniladi).

19. Topologik fazolarning to'g'ri ko'paytmasi bog'lanishli bo'lishi uchun ularning har biri bog'lanishli bo'lishi kerakligi isbotlansin.

20. Bog'lanishli topologik fazolarning to'g'ri ko'paytmasi bog'lanishli topologik fazo ekanligi isbotlansin.

21. Yevklid fazosi R^n bog'lanishli fazo ekanligi isbotlansin.

22. Yevklid fazosi R^n da $A = R^n \setminus \{a_1,..., a_k\}$ $(k \in N)$ to'plam bog'lanishli ekani isbotlansin (bu yerda $n \geq 2$).

23. Bizga X topologik fazo berilgan bo'lsin. Agar x va y nuqtalarni o'z ichiga oladigan bog'lanishli $A \subset X$ to'plam mavjud bo'lsa, $x \sim y$ deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati ekani isbotlansin.

24. 23-masaladagi kiritilgan ekvivalentlik munosabatiga nisbatan ekvivalentlik sinfi bog'lanishlilik komponentasi ekanligi isbotlansin.

25. Bog'lanishlilik komponentasi yopiq to'plam ekanligi isbotlansin.

26. Har qanday bog'lanishli to'plam birorta bog'lanishlilik komponentasiga qism to'plam ekanligi isbotlansin.

27. Berilgan X topologik fazoning ixtiyoriy x va y nuqtalari uchun $A_1,...,A_n$ (bu yerda $n \in N$ soni x va y nuqtalarga bog'liq) bog'lanishli to'plamlar mavjud bo'lib, u quyidagi

1) $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ $(V_i = \overline{1, n-1})$ 2) $x \in A_1$, $y \in A_n$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda X bog'lanishli topologik fazo ekani isbotlansin.

28. Har xil ikki nuqtalar uchun ular tegishli bo'lgan bog'lanishlilik komponentalari kesishmaydi yoki ustma-ust tushishi isbotlansin.

29. Topologik fazo yagona bog'lanishlilik komponentasidan iborat bo'lishi uchun, uning bog'lanishli fazo bo'lishi zarur va yetarli ekanligi ko'rsatilsin.

30. Chiziqli bog'lanishli, lekin lokal chiziqli bog'lanishli bo'lmagan topologik fazoga misol keltiring.

31. Chiziqli bog'lanishli, lekin lokal bog'lanishli bo'lmagan topologik fazoga misol keltiring.

32. Topologik fazo lokal bog'lanishli bo'lishi uchun uning ixtiyoriy ochiq to'plamining bog'lanishlilik komponentasi ochiq bo'lishi zarur va yetarliligini isbotlang.

33. Yevklid fazosi R^n lokal bog'lanishli fazo ekanligi isbotlansin.

34. Bizga X topologik fazo va X_1 uning bog'lanishsiz yopiq qism to'plami berilgan bo'lsin. X_1 topologik fazoni ikkita o'zaro kesishmaydigan, bo'sh bo'lmagan yopiq to'plamlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin ekanligi isbotlansin.

35. Bizga X topologik fazo va X_1 uning ochiq, bog'lanishsiz qism to'plami berilgan bo'lsin. X_1 topologik fazoni ikkita bo'sh bo'lmagan o'zaro kesishmaydigan ochiq to'plamlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin ekanligi isbotlansin.

36. Bizga X - Xausdorf topologik fazo va bog'lanishli $X_1 \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. Agar X_1 bittadan ortiq nuqtani o'z ichiga olgan to'plam bo'lsa, u holda bu to'plamda ajralgan nuqtalar mavjud emasligi isbotlansin.

37. Topologik fazoda X_1, X_2 yopiq to‘plamlar berilgan bo‘lib, $X_1 \bigcup X_2$ va $X_1 \bigcap X_2$ to‘plamlar bog’lanishli ekani ma’lum bo‘lsa, X_1 va X_2 to‘plamlar ham bog’lanishli ekanligi isbotlansin.

38. 37-masalada kamida bitta to‘plam yopiq bo‘lmasa, X_1 va X_2 to‘plamlar bog’lanishli bo‘lishi shart emasligiga misol keltiring.

39. Topologik fazoda barcha i lar uchun $X_i \bigcap X_{i+1} \neq \varnothing$ shartni qanoatlantiruvchi $\{X_i\}$ bog’lanishli to‘plamlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. $X = \bigcup_i X_i$ to‘plamning bog’lanishli ekani isbotlansin.

40. Topologik fazoda barcha i lar uchun $X_i \bigcap X_{i+1}$ bog’lanishli bo‘lgan, $\{X_i\}$ bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlardan tashkil topgan oila berilgan bo‘lsin. U holda $X = \bigcup_i X_i$ to‘plamning bog’lanishli ekanligi isbotlansin.

41. Bizga X topologik fazoda X_1 yopiq to‘plam berilgan bo‘lsin. X_1 qism fazoning bog’lanishlilik komponentasi X topologik fazoda yopiq to‘plam ekanligi isbotlansin.

42. Yevklid fazosi R^n $(n \geq 3)$ dan chekli sondagi R^k fazoning $(k \leq n-2)$ qism to‘plamlarini chiqarib tashlaganda hosil bo‘lgan qism fazo bog’lanishli bo‘lishi isbotlansin. Bu yerda $R^k \subset R^n$ deb qaraladi.

43. Tekislikdan chekli sondagi to’g’ri chiziqlar chiqarib tashlaganda hosil bo‘lgan to‘plam bog’lanishlilik komponentasining maksimal soni aniqlansin.

44. Berilgan X topologik fazo bog’lanishsiz fazo bo‘lishi uchun $X = A \bigcup B$, $\overline{A} \bigcap B = \varnothing$, $A \bigcap \overline{B} = \varnothing$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi $A, B \subset X$ to‘plamlarning mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

45. Bizga $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish va X bog’lanishli fazo berilgan bo‘lsin. U holda f akslantirish grafigining bog’lanishli ekanligi isbotlansin.

46. Berilgan $f : [0:1] \to R^1$ akslantirish uzluksiz bo‘lib, $f(0) \cdot f(1) < 0$ shartni qanoatlantirsin. U holda, $f(\xi) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $\xi \in (0;1)$ nuqta mavjudligini isbotlang. Bu masalani 45-masaladan foydalanib yeching.

47. Bizga X topologik fazo va uning bog’lanishi to‘plamlari oilasi $\{A_\alpha\}$ berilgan bo‘lib, ixtiyoriy A_{α_1} va A_{α_2} to‘plamlari uchun $\overline{A}_{\alpha_1} \bigcap A_{\alpha_2} \neq \varnothing$, $A_{\alpha_1} \bigcap \overline{A}_{\alpha_2} \neq \varnothing$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ to‘plam bog’lanishli ekanligi ko‘rsatilsin.

48. Bizga X topologik fazo va $A, B \subset X$ yopiq (ochiq), bo‘sh bo‘lmagan va o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Berilgan to‘plamlar uchun $\overline{A} \bigcap B = \varnothing$, $\overline{B} \bigcap A = \varnothing$ munosabatlar o‘rinli ekanligi isbotlansin.

49. Bog’lanishli to‘plamning asli bog’lanishsiz bo‘lgan uzluksiz akslantirishga misol keltiring.

5 §. Topologik fazolarda ajraluvchanlik

Topologik fazo ta'rifi umumiy tushunchalardan bo'lib, barcha topologik fazolarda o'rinli bo'ladigan qiziqarli teoremalarni isbotlash qiyin. Bu paragrafda nuqtalarni, nuqta va to'plamni hamda to'plamlarni bir-biridan ajratish haqidagi aksiomlar va ular yordamida keltirib chiqarish mumkin bo'lgan xossalar o'rganiladi.

Asosiy tushunchalar

5.1-ta'rif. Berilgan X topologik fazoning ixtiyoriy $x,\ y \in X,\ (x \neq y)$ nuqtalari uchun shu nuqtalardan faqat bittasini o'z ichiga oluvchi ochiq to'plam mavjud bo'lsa, X topologik fazo T_0 topologik fazo deyiladi.

5.2 -ta'rif. Berilgan X topologik fazoning ixtiyoriy $x,\ y \in X,\ (x \neq y)$ nuqtalari uchun x nuqtaning y tegishli bo'lmagan atrofi, y nuqtaning x tegishli bo'lmagan atrofi mavjud bo'lsa, X topologik fazo T_1 topologik fazo deyiladi.

5.3-ta'rif. Topologik fazoda ixtiyoriy o'zaro farqli ikki nuqta o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, bu fazo Xausdorf topologik fazosi, (T_2 fazo) deyiladi.

5.4-ta'rif. Topologik fazoda $F_1,\ F_2 \subset (X,\tau)$ o'zaro kesishmaydigan to'plamlar berilgan bo'lsin. Mos ravishda bu to'plamlarni o'z ichiga oluvchi, o'zaro kesishmaydigan ochiq V_1, V_2 to'plamlar mavjud bo'lsa, u holda F_1 va F_2 to'plamlarni bir-biridan ajratish mumkin deyiladi.

5.5-ta'rif. Bizga T_1 fazo bo'lgan (X,τ) topologik fazo berilgan bo'lib, uning ixtiyoriy yopiq qism to'plamini shu to'plamga tegishli bo'lmagan nuqtadan ajratish mumkin bo'lsa, X topologik fazo regulyar topologik fazo (T_3 fazo) deyiladi.

5.6-ta'rif. Topologik fazo T_1 fazo bo'lib, uning ixtiyoriy yopiq qism to'plami $F \subset (X,\tau)$ va F to'plamga tegishli bo'lmagan x nuqta uchun $\varphi(x)=0, \varphi(y)=1$, $y \in F$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud bo'lsa, X to'liq regulyar topologik fazo (T_4 fazo) deyiladi.

5.7-ta'rif. Bizga (X,τ) topologik fazo berilgan bo'lsin. Agar u T_1

topologik fazo bo'lib, uning o'zaro kesishmaydigan ixtiyoriy ikkita qism to'plamlarini bir-biridan ajratish mumkin bo'lsa, X normal topologik fazo (T_5 fazo) deyiladi.

Masala yechish namunalari

1-masala. Topologik fazolar ichidan T_0 topologik fazo bo‘lmaydiganlariga misollar keltiring.

Yechish. 1) Antidiskret topologik fazoni T_0 fazo bo‘lmaydigan topologik fazoga misol qilib keltirish mumkin. Haqiqatan ham, antidiskret topologik fazoning topologiyasi $\tau = \{\varnothing, X\}$ to‘plamdan iborat. Antidiskret topologik fazoning ixtiyoriy olingan $x,\ y \in X,\ (x \neq y)$ nuqtalari uchun shu nuqtalardan faqat bittasini o‘z ichiga oluvchi ochiq to‘plam mavjud emas. Chunki, bu fazoning ochiq to‘plamlari faqat $\varnothing, X$ to‘plamlardan iborat xolos, shuning uchun ixtiyoriy olingan $x,\ y \in X,\ (x \neq y)$ nuqtalardan bittasini o‘z ichiga oluvchi to‘plam albatta ikkinchisini ham o‘z ichiga oladi.

2) Bizga elementi bittadan ko‘p bo‘lgan X to‘plam va $X \setminus X_0$ ayirmaning elementi bittadan ko‘p bo‘ladigan $X_0 \subset X$ qism to‘plam berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $A \subset X$ qism to‘plam uchun $\operatorname{int} A = A \cap X_0$ va $\operatorname{int} X = X$ munosabat o‘rinli deb faraz qilaylik. Bu usul bilan aniqlangan to‘plamning ichi tushunchasi quyidagi

1) $\operatorname{int} X = X$;
2) $\operatorname{int} A \subset A$;
3) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;
4) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$

shartlarni qanoatlantiradi. Ravshanki, bu usul bilan aniqlangan to‘plamning ichi tushunchasi yordamida X to‘plamda topologiya aniqlash mumkin. Berilgan X_0 to‘plamning barcha qism to‘plamlari va X to‘plamning faqat o‘zi yuqorida kiritilgan topologiyaga nisbatan ochiq to‘plamdir. Ixtiyoriy olingan $x,\ y \in X,\ (x \neq y)$ nuqtalardan bittasini o‘z ichiga oluvchi to‘plam albatta ikkinchisini ham o‘z ichiga olishini tekshirib ko‘rish unchalik qiyin emas.

Agar X_0 sifatida bo‘sh to‘plamni olsak, u holda X antidiskret topologik fazodan iborat bo‘ladi.

2-masala. Ma’lumki, har qanday T_1 topologik fazo T_0 topologik fazo bo‘ladi, lekin teskarisi har doim ham o‘rinli emas. Bunga misol keltiring.

Yechish. Bizga elementi bittadan ko‘p bo‘lgan X to‘plam va uning biror $x_0 \in X$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Har bir bo‘sh bo‘lmagan $A \subset X$ qism to‘plam uchun $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$ va $\overline{\varnothing} = \varnothing$ munosabat o‘rinli deb faraz qilaylik. Bu usul bilan aniqlangan to‘plamning yopig’i tushunchasi quyidagi

1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$; 2) $A \subset \overline{A}$; 3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 4) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

shartlarni qanoatlantiradi. Ravshanki, bu usul bilan aniqlangan to‘plamning yopig’i tushunchasi yordamida X to‘plamda topologiya aniqlash mumkin. Berilgan $\{x_0\}$ nuqtadan iborat to‘plamning faqat o‘zi yuqorida kiritilgan topologiyaga nisbatan X topologik fazoda yopiq to‘plamdir, boshqa har qanday bir nuqtali to‘plam ochiq to‘plamdir, lekin yopiq emas.

Ixtiyoriy $y \in X$, $(x_0 \neq y)$ nuqtaning har qanday atrofi x_0 nuqtani o‘z ichiga oladi, lekin x_0 nuqtani atrofi sifatida $\{x_0\}$ nuqtadan iborat to‘plamni olsak, u holda y tegishli bo‘lmagan x_0 nuqtaning atrofi mavjud ekan.

Demak, ushbu X topologik fazo T_0 fazo, lekin T_1 fazo bo‘lmagan topologik fazoga misol bo‘la oladi.

Misol va masalalar

1. Berilgan (X, τ) topologik fazo Xausdorf fazosi bo‘lishi uchun $D = \{(x, x)\} \subset X \times X$ to‘plamning yopiq bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

2. Xausdorf fazosining hamma yerida zich bo‘lgan $\overline{A} = X$, qism to‘plami $A \subset X$ berilgan bo‘lsin. Agar $f : X \to Y$ va $g : X \to Y$ uzluksiz akslantirishlar va A to‘plamdan olingan ixtiyoriy nuqta $x \in A$ uchun $f(x) = g(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, f va g akslantirishlarning ustma-ust tushishi isbotlansin.

3. Topologik fazoni Xausdorf fazosiga akslantiruvchi $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. Berilgan f-akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun, $\{(x, f(x))\} \subset X \times Y$ to‘plam $X \times Y$ da yopiq bo‘lishi zarur va yetarliligi ko‘rsatilsin.

4. Topologik fazolarning $X \times Y$ to’g’ri ko‘paytmasi Xausdorf fazosi bo‘lishi uchun ko‘paytuvchilarning har biri, ya’ni X va Y topologik fazolarning Xausdorf fazolari bo‘lishi zarur va yetarliligini ko‘rsating.

5. Xausdorf fazosida har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga egaligi isbotlansin.

6. Topologik fazo T_1-fazo bo‘lishi uchun, uning ixtiyoriy bir nuqtasidan iborat to‘plami shu topologik fazoda yopiq bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi ko‘rsatilsin.

7. Berilgan X topologik fazo regulyar bo‘lishi uchun, uning ixtiyoriy $x \in X$ nuqtasi va uning ixtiyoriy U_X atrofi uchun, x nuqtaning $\overline{V_x} \subset U_x$ munosabatni qanoatlantiruvchi V_x atrofi mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

8. Topologik fazo normal bo‘lishi uchun, uning ixtiyoriy yopiq qism to‘plami $F \subset X$ va F to‘plamning ixtiyoriy U_F atrofi uchun $\overline{V_F} \subset U_F$ shartni qanoatlantiruvchi V_F atrofining mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

9. Topologik fazo normal bo‘lishi uchun, uning ixtiyoriy $F, G \subset X$

yopiq, kesishmaydigan qism to‘plamlarining $\overline{U_F} \cap \overline{U_G} = \varnothing$ shartni qanoatlantiruvchi U_F va U_G atroflarini mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekani isbotlansin.

10. Xausdorf fazosi bo‘lmagan T_1 fazoga misol keltiring.

11. Regulyar bo‘lmagan Xausdorf fazosiga misol кeltiring.

12. To‘liq regulyar bo‘lmagan regulyar topologik fazoga misol keltiring.

13. Normal bo‘lmagan, to‘liq regulyar topologik fazoga misol keltiring.

14. Normal bo‘lmagan regulyar topologik fazoga misol keltiring.

15. Har qanday metrik fazo normal bo‘lishi isbotlansin.

16. Bizga X topologik fazo va uning Y qism fazosi berilgan bo‘lsin. Agar

1) X topologik fazo T_i $(i = 1,2,3,4)$ topologik fazo bo‘lsa, u holda Y ham mos ravishda T_i $(i = 1,2,3,4)$ topologik fazo bo‘lishi isbotlansin.

2) X-normal topologik fazo va Y uning yopiq qism fazosi bo‘lsa, u holda Y normal qism fazo bo‘lishi isbotlansin.

17. Ma’lumki, X normal topologik fazo, $F, G \subset X$ uning yopiq, o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlari bo‘lsa, $f(F) = 0,\ f(G) = 1$ munosabatlarni qanoatlantiradigan uzluksiz f funksiya topiladi. Agar X topologik fazo T_1 fazo bo‘lib, ixtiyoriy yopiq, o‘zaro kesishmaydigan F, G qism to‘plamlari uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz funksiya mavjud bo‘lsa, X normal bo‘lishi isbotlansin.

18. Berilgan X topologik fazo $T_{i+1}(i = 1,2,3,4)$-fazo bo‘lsa, u holda X mos ravishda $T_i(i = 1,2,3,4)$ fazo bo‘lishi isbotlansin.

19. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan, regulyar fazo normal fazo bo‘lishi isbotlansin.

20. Bizga X Xausdorf fazosi va $f : X \to X$ uzluksiz akslantirish berilgan bo‘lsin. U holda $A = \{\, x \mid f(x) = x \}$ yopiq to‘plam ekanligi isbotlansin.

21. Berilgan X topologik fazo T_1-fazo ekanligi ma’lum bo‘lsa, uning $A \subset X$ qism to‘plamining limit nuqtalari to‘plami yopiq ekanligi isbotlansin.

22. Sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilgan X topologik fazo va $x \in X$ nuqta berilgan bo‘lsin deb faraz qilaylik. Berilgan x nuqta $A \subset X$ to‘plamning limit nuqtasi bo‘lishi uchun, ixtiyoriy n natural son uchun $x_n \neq x$ shartni qanoatlantiruvchi, shu x nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

23. Sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilgan X Xausdorf topologik fazo va Y Xausdorf fazosi berilgan bo‘lsin deb faraz qilaylik. Agar $f : X \to Y$ akslantirish va yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $x_n \to x$ munosabatdan $f(x_n) \to f(x)$ ekanligi kelib chiqishi ma’lum bo‘lsa, f-uzluksiz akslantirish ekanligi isbotlansin.

24. Topologik fazoda har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonaligi ma'lum bo'lsa, u holda u T_1 topologik fazo ekanligi isbotlansin.

25. Topologik fazoda sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilgan bo'lsin deb faraz qilaylik. Berilgan topologik fazo Xausdorf fazosi bo'lishi uchun, undagi har-qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagona bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

26. Bizga X normal topologik fazo va uni $f: X \to Y$ uzluksiz, ustiga (sur'yektiv), yopiq akslantirish berilgan bo'lsin. U holda Y-normal fazo ekanligi isbotlansin.

27. Normal topologik fazoning $A \subset X$ yopiq qism to'plami va $f: A \to R$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin, hamda, X normal topologik fazoda aniqlangan uzluksiz $F: X \to R$ akslantirish A to'plamda f bilan ustma-ust tushsin. Agar ixtiyoriy $x \in A$ nuqta uchun $|f(x)| \le C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in X$ uchun $|F(y)| \le C$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiya mavjudligi isbotlansin.

28. Normal topologik fazoning $A \subset X$ yopiq qism to'plami va $f: A \to I^n$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin). U holda A to'plamda f bilan ustma-ust tushuvchi, $F: X \to I^n$ uzluksiz akslantirish mavjudligi isbotlansin. Bu yerda I^n, n -o'lchamli kub.

29. Topologik fazoning har bir $Y \subset X$ qism fazosi normal fazo bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda, berilgan topologik fazoning $A, B \subset X$ qism to'plamlari uchun $\overline{A} \cap B = \varnothing, \overline{B} \cap A = \varnothing$ munosabatlar bajarilsa, bu to'plamlarning o'zaro kesishmaydigan atroflari mavjud ekanligi isbotlansin.

30. Chekli T_1 topologik fazoning diskret fazo bo'lishini isbotlang .

31. Ixtiyoriy ikkita bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plamlarining kesishmasi bo'sh bo'lmagan T_1-fazoga misol keltiring.

32. Bizga X-regulyar fazo, $Y \subset X$-sanoqli diskret qism fazo berilgan bo'lsin. Har bir $y \in Y$ nuqta uchun $y_1 \ne y_2$, $U_{y_1} \cap U_{y_2} = \varnothing$ shartni qanoatlantiruvchi $\{U_y\}$ atroflar oilasi mavjudligi ko'rsatilsin.

33. Topologiyalari ushbu $\tau_1 < \tau_2$ munosabatni qanoatlantiruvchi, birinchichisi (X, τ_1) regulyar topologik fazo, ikkinchisi (X, τ_2)-regulyar bo'lmagan topologik fazo bo'ladigan $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ topologik fazolar toping.

34. Turli limitlarga ega bo'lgan yaqinlashuvchi ketma-ketliklar mavjud bo'ladigan T_1-fazoga misol keltiring.

35. Sanoqlilkning birinchi aksiomasi bajarilmagan topologik fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagona bo'lishi shart emasligiga misol keltiring.

36. Topologik fazo Xausdorf fazosi bo‘lishi uchun, uning har bir nuqtasi o‘zining atroflari yopig’larining kesishmasidan iborat bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

6 §. Kompakt to‘plamlar va fazolar

Bu paragrafdagi o‘rganiladigan masalalar kompakt to‘plamlar va fazolarga bag’ishlangan. Kompakt fazolar juda muhim topologik fazolar sinfi bo‘lib, ular ixtiyoriy ochiq qobig’idan chekli qism qobiq ajratish mumkin bo‘lgan topologik fazolar deb ta’riflanadi. Kompakt fazolar sinfi Yevklid fazolarining barcha yopiq, chegaralangan qism to‘plamlarini o‘z ichiga oladi. Yevklid fazolarining bu qism to‘plamlarida o‘rinli bo‘lgan xossalari ko‘p hollarda barcha kompakt fazolar uchun o‘rinli bo‘ladi.

Asosiy tushunchalar

6.1.-ta’rif. Bizga (X,τ) topologik fazo, $A\subset X$ qism to‘plam va birorta $\{A_\alpha\}$ ochiq to‘plamlar oilasi berilgan bo‘lsin. Berilgan oila uchun $A\subset\bigcup_\alpha A_\alpha$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\{A_\alpha\}$ oila A to‘plamning ochiq qobig’i deyiladi.

6.2.-ta’rif. Ochiq qobiq chekli (sanoqli) sondagi to‘plamlardan iborat bo‘lsa, u chekli (sanoqli) ochiq qobiq deb ataladi. Agar $\{U_\beta\}$ qobiqning har bir elementi $\{V_\alpha\}$ oilaga tegishli bo‘lsa, $\{U_\beta\}$ oila $\{V_\alpha\}$ qobiqning qism qobig’i deyiladi.

6.3.-ta’rif. Berilgan A to‘plamning ixtiyoriy ochiq qobig’idan chekli qobiq ajratish mumkin bo‘lsa, A kompakt to‘plam deyiladi.

6.4.-ta’rif. Bizga (X,τ) topologik fazo va $\{U_\alpha\}$ ochiq to‘plamlar oilasi berilgan bo‘lib, $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$ munosabat bajarilsa, $\{U_\alpha\}$ oila (X,τ) topologik fazoning ochiq qobig’i deyiladi.

6.5.-ta’rif. Topologik fazoning ochiq qobiqlari $\{U_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$ oilalar berilgan bo‘lsin. Agar har bir α uchun $\beta=\beta(\alpha)$ mavjud bo‘lib, $U_\alpha\subset V_\beta$ munosabat bajarilsa, $\{U_\alpha\}$ qobiq $\{V_\beta\}$ qobiqning ichiga joylashtirilgan qobiq deyiladi.

Tabiiyki, 6.3.-ta’rifda agar $A=X$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda kompakt fazo ta’rifini hosil qilamiz:

6.6.-ta’rif. Berilgan topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qobig’idan chekli qobiq ajratish mumkin bo‘lsa, u kompakt fazo deyiladi.

6.7.-ta’rif. Berilgan topologik fazoning ixtiyoriy sanoqli ochiq qobig’idan chekli qobiq ajratish mumkin bo‘lsa, berilgan topologik fazoda sanoqli kompaktlilik xossasi o‘rinli deyiladi.

6.8.-ta'rif. Topologik fazoni sanoqli sondagi kompakt to'plamlar yig'indisi sifatida yozish mumkin bo'lsa, u σ-kompakt fazo deyiladi.

6.9.-ta'rif. Topologik fazoda ixtiyoriy ketma-ketlik yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikka ega bo'lsa, bu topologik fazo sekvensial kompakt fazo deyiladi.

6.10.-ta'rif. Berilgan topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasi yopig'i kompakt to'plam bo'lgan atrofga ega bo'lsa, bu topologik fazo lokal kompakt fazo deyiladi.

6.11.-ta'rif. Bizga $\{U_\alpha\}$-to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin. Berilgan oilaga tegishli ixtiyoriy chekli sondagi to'plamlar kesishmasi bo'sh bo'lmasa, $\{U_\alpha\}$ oila markazlashgan oila deyiladi.

Masala yechish namunalari

1-masala. Bizga X, Y topologik fazolar va $A \subset X, B \subset Y$ kompakt to'plamlar bo'lsa, $A \times B$ to'g'ri ko'paytma ham $X \times Y$ fazoda kompakt to'plam bo'lishini isbotlang.

Yechish. Avval $(x, y) \to x$ qoida bilan aniqlangan $pr: X \times Y \to X$ akslantirish(proeksiya)da yopiq to'plamning aksi yopiq to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

Buning uchun F to'plam $X \times Y$ ko'paytmaning yopiq qism to'plami bo'lsin deb faraz qilaylik. Bu F to'plamning obrazi $pr(F)$ ning X topologik fazoda yopiq to'plam ekanligini ko'rsatish uchun uning to'ldiruvchisi $G = X \setminus pr(F)$ ning ochiq to'plam ekanligini ko'rsatish kerak. Avval olingan F to'plamdan $x_0 \in G$ nuqta olamiz. Bu nuqta uchun $(x_0, Y) \subset X \times Y \setminus F$ munosabat bajariladi. $X \times Y \setminus F$ ochiq to'plam ekanligidan ixtiyoriy $y \in Y$ uchun (x_0, y) juftlik birorta $U(x_0, y) = V_y(x_0) \times V_y$ atrofi bilan $X \times Y \setminus F$ to'plamda yotadi. Bu yerda $V_y(x_0)$ to'plam x_0 nuqtaning X topologik fazodagi atrofi bo'lib, u $V_y(x_0) \subset G$ munosabatni qanoatlantiradi. Demak, G ochiq to'lpamdir. Bundan esa $pr(F)$ to'plamning yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi.

Endi, agar $\{U_\alpha\}$ oila $A \times B$ to'plamning ochiq qobig'i bo'lsa, undan $A \times B$ uchun chekli qobiq ajratish mumkinligini isbotlash kerak. Har bir α uchun $U_\alpha = U_\alpha^1 \times U_\alpha^2$ ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $U_\alpha^1 \subset X, U_\alpha^2 \subset Y$ ochiq to'plamlardir. Birorta $x \in A$ nuqta uchun $\{x\} \times B$ ni qaraylik. $\{x\} \times B$ to'plam B ga gomeomorf bo'lgani uchun kompakt to'plamdir. Shuning uchun $\{U_\alpha\}$ oiladan $\{x\} \times B$ uchun chekli qobiq ajratish mumkin. $U_{\alpha_1}^x, U_{\alpha_2}^x, .., U_{\alpha_k}^x$ to`plamlar $\{x\} \times B$ uchun $\{U_\alpha\}$ dan ajratilgan chekli qobiq bo`lsa, $G_x = \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}^x$ ochiq to`plam bo`lganligi uchun uning to`ldiruvchisi $F_x = X \times Y \setminus G_x$ yopiq to`plamdir. Yuqorida isbotlaganimizga ko'ra, prF_x yopiq to`plamdir. $A_x$ to`plam prF_x to'plamning to'ldiruvchisi bo'lsa, u

$A_x \times B \subset G_x$ munosabatni qanoatlantiradi. Demak, $U^x_{\alpha_1}, U^x_{\alpha_2}, .., U^x_{\alpha_k}$ oila $A_x \times B$ uchun ham $\{U_\alpha\}$ qobiqdan ajralgan chekli qobiqdir. Endi $\{A_x : x \in A\}$ oila A to‘plam uchun qobiq va A kompakt bo‘lgani uchun undan A uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Bu oiladan A uchun ajralgan chekli qobiq $A_{x_1}, A_{x_2}, ..., A_{x_n}$ to‘plamlardan iborat bo‘lsin. Demak, $\bigcup_{i=1}^{m} A_{x_i} \supset A$. Biroq, har bir $A_{x_i} \times B$ uchun $\{U_\alpha\}$ dan chekli $U^{x_i}_{\alpha_1}, U^{x_i}_{\alpha_2}, .., U^{x_i}_{\alpha_k}$ qobiq ajratish mumkin. Lekin, $\bigcup_{i=1}^{m} (A_{x_i} \times B) \supset A \times B$ bo‘lganligi uchun $\{U_\alpha\}$ dan $A \times B$ uchun ham chekli qobiq ajratish mumkin. Demak, $A \times B$ kompakt to‘plamdir.

2-masala. Bizga X-Xausdorf fazo va uning kompakt qism to‘plami $A \subset X$ berilgan bo‘lsin. Har bir $x \in X \setminus A$ nuqta uchun, shunday ochiq kesishmaydigan G_1 va G_2 to‘plamlar mavjud bo`lib, $A \subset G_1$, $x \in G_2$ munosabatlar o‘rinli bo`lishini isbotlang.

Yechish. Buning uchun A ga tegishli ixtiyoriy $y \in A$ nuqtani olsak, Xausdorf aksiomasiga ko`ra shunday ochiq kesishmaydigan $G_x, G_y$ to`plamlar mavjudki $x \in G_x, y \in G_y$ munosabat o‘rinli bo`ladi. Ma’lumki, $\{G_y : y \in A\}$ oila $A$ to`plam uchun ochiq qobiq bo`ladi va $A$ kompakt bo`lganligi uchun bu oiladan A to`plam uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiqqa tegishli to`plamlar $G_{y_1}, G_{y_2}, ..., G_{y_m}$ lar bo`lsin deb faraz qilaylik. Bu ochiq to`plamlar bilan kesishmaydigan x nuqtaning atroflari mos ravishda $G_x(y_1), G_x(y_2), G_x(y_3), ..., G_x(y_m)$ to`plamlardan iborat bo`lsin. Agar $G_1 = \bigcup_{i=1}^{m} G_{y_i}, G_2 = \bigcap_{i=1}^{m} G_x(y_i)$ tengliklar o‘rinli bo`lsa, bu tengliklardan ushbu munosabatlar $A \subset G_1, x \in G_2$ va $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$ bajarilishini osongina kelib chiqarish mumkin.

Misol va masalalar

1. Xausdorf fazoda har qanday kompakt qism to‘plamning yopiq bo‘lishi isbotlansin.

2. Bir o‘lchamli Yevklid fazosi R^1 da yopiq interval kompakt ekanligi isbotlansin.

3. Kompakt fazoning yopiq qism to‘plami kompakt ekanligi isbotlansin.

4. O‘lchami n ga teng bo‘lgan Yevklid fazosida yopiq kub $Q_r = \{x \in R^n : |x| \le r\}$ kompakt ekanligi isbotlansin.

5. Kompakt metrik fazoda o‘zaro kesishmaydigan, yopiq $A \in (X, d)$ va $B \in (X, d)$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. U holda, $d(A, B) > 0$ munosabat o‘rinli ekanligi isbotlansin.

6. Topologik fazoda chekli sondagi kompakt to'plamlarning birlashmasi kompakt to'plam ekanligi isbotlansin.

7. Shunday topologik fazo va uning kompakt to'plamlari oilasiga misol keltiringki, ularningsh birlashmasi kompakt bo'lmasin.

8. Bizga (X,τ) topologik fazo berilgan bo'lsin. Berilgan (X,τ) topologik fazoning ixtiyoriy chekli qism to'plami kompakt bo'lishi isbotlansin.

9. O'lchami n ga teng bo'lgan Yevklid fazosida to'plam kompakt bo'lishi uchun, uning yopiq va chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

10. Topologik fazo kompakt bo'lishi uchun ixtiyoriy markazlashgan yopiq to'plamlar sistemasining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

11. Ixtiyoriy sondagi kompakt to'plamlarning kesishmasi kompakt to'plam bo'lishi isbotlansin.

12. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qobig'i, sanoqli sondagi ochiq to'plamlardan iborat qobiqni o'z ichiga olishi ko'rsatilsin.

13. Kompakt to'plamning uzluksiz akslantirishdagi obrazi kompakt bo'lishi isbotlansin.

14. Berilgan topologik fazo sanoqli kompaktlilik xossasiga ega bo'lishi uchun, uning har bir cheksiz qism to'plami kamida bitta limit nuqtaga ega bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

15. Har qanday kompakt fazo sanoqli kompaktlilik xossasiga ega bo'lishi isbotlansin.

16. Sanoqli kompaktlilik xossasiga ega bo'lib, lekin kompakt bo'lmagan fazoga misol keltiring.

17. Berilgan topologik fazo sanoqli kompaktlilik xossasiga ega bo'lishi uchun, uning ixtiyoriy sanoqli sondagi yopiq to'plamlaridan iborat markazlashgan sistema elementlarining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

18. Metrik fazoda $\{A_i\}$ bo'sh bo'lmagan kompakt to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar berilgan to'plamlar oilasi $\{A_i\}$ quyidagi

1) $A_1 \supset A_2 \supset ....$;

2) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$;

3) $d(A_n) = \varepsilon_n \to 0$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda $\bigcap\limits_{i} A_i$ -to'plam bitta nuqtadan iboratligi isbotlansin. Bu yerda $d(A)$ bilan A to'plamning diametri belgilangan.

19. Topologik fazoda $\{K_n\}$ markazlashgan kompakt, Xausdorf fazolar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. U holda, ushbu munosabat $\bigcap_n K_n \neq \varnothing$ o‘rinli ekanligi isbotlansin.

20. Bizga X, Y topologik fazolar va $f: X \to Y$ uzluksiz, biyektiv akslantirish berilgan bo‘lsin. Agar X kompakt va Y Xausdorf fazosi ekanligi ma’lum bo‘lsa, u holda f topologik akslantirish (gomeomorfizm) ekanligi isbotlansin.

21. Har qanday metrik fazo kompakt bo‘lishi uchun, uning sanoqli kompaktlilik xossasiga ega bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

22. Kompakt fazoda berilgan uzluksiz funksiyaning chegaralanganligini va o‘zining ekstremal qiymatlariga erishishini isbotlang.

23. Bizga X metrik fazo va A to‘liq chegaralangan qism fazo berilgan bo‘lsin. U holda $\overline{A}$ to‘liq chegaralangan bo‘lishi ko‘rsatilsin.

24. Metrik fazo kompakt bo‘lishi uchun uning to‘liq chegaralangan va to‘la bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

25. Kompakt bo‘lgan Xausdorf fazoning normal fazo ekanligi isbotlansin.

26. Bizga X lokal kompakt, Xausdorf fazosi berilgan bo‘lsin. X fazoning barcha kompakt qism fazolari oilasi bilan X fazo topologiyasi moslashganligi isbotlansin. Bunday fazoni k-fazo deyiladi.

27. O‘lchami n ga teng bo‘lgan Yevklid fazosi R^n k-fazo ekanligi isbotlansin.

28. Har qanday metrik fazo k-fazo ekanligi ko‘rsatilsin.

29. Bizga X-kompakt k-fazo va Y lokal kompakt Xausdorf fazosi berilgan bo‘lsin. U holda, $X \times Y$ fazo kompakt fazoligi isbotlansin.

30. To‘la metrik fazoning qism to‘plami nisbiy kompakt bo‘lishi uchun (ya’ni yopig’i kompakt to‘plam), uning to‘liq chegaralangan qism fazo bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

31. Metrik fazoda A va B bo‘sh bo‘lmagan nisbiy kompakt to‘plamlar berilgan bo‘lsin. U holda, $\{d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ chegaralangan to‘plam ekanligi ko‘rsatilsin.

32. Metrik fazoda ixtiyoriy nisbiy kompakt to‘plamning chegaralanganligi isbotlansin.

33. Topologik fazoda chekli sondagi nisbiy kompakt to‘plamlarning birlashmasi nisbiy kompakt bo‘lishi isbotlansin.

34. Ixtiyoriy sondagi nisbiy kompakt to‘plamlarning kesishmasi nisbiy kompakt ekanligi isbotlansin.

35. Metrik fazo kompakt bo‘lishi uchun uning sekvensial kompakt bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

36. Sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilgan fazo sekvensial kompakt fazo bo‘lishi uchun, uning sanoqli kompaktlilik xossasiga ega bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi ko‘rsatilsin.

37. Sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilgan kompakt fazo sekvensial kompakt fazo ekanligi isbotlansin.

38. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan fazo kompakt bo‘lishi uchun, uning sanoqli kompaktlilik xossasiga ega bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

39. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan fazo kompakt bo‘lishi uchun uning sekvensial kompakt bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

40. Har qanday kompakt topologik fazo lokal kompakt fazo bo‘lishi isbotlansin.

41. Bir o‘lchamli Yevklid fazosi R^1 da barcha ratsional sonlar to‘plami to‘liq bog’lanishsiz qism fazo bo‘lishi ko‘rsatilsin (har qanday bog’lanishlilik komponentasi bir nuqtali to‘plamdan iborat fazo to‘liq bog’lanishsiz fazo deyiladi).

42. Bizga X kompakt fazo, $\{A_\alpha\}$-uning yopiq qism to‘plamlari sistemasi va ushbu $U \supset A = \bigcap_\alpha A_\alpha$ munosabatni qanoatlantiruvchi ochiq U to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda, $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap ... \cap A_{\alpha_n} \subset U$ shartni qanoatlantiruvchi $A_{\alpha_1},...,A_{\alpha_n}$ to‘plamlar mavjudligini va bunda $\{A_\alpha\}$ dan olingan ixtiyoriy ikkita to‘plamning kesishmasi, shu sistemadagi uchinchi to‘plamni o‘z ichiga olsa, bu sistemadan shunday A_{α_0} to‘plam topiladiki, $A_{\alpha_0} \subset U$ munosabat o‘rinli ekanligi isbotlansin.

43. Ajralgan nuqtalarga ega bo‘lmagan kompakt to‘plam kontinium quvvatli ekanligi isbotlansin.

44. Bizga X, Y topologik fazolar va $Y^X = \{f \mid f : X \to Y$ uzluksiz$\}$ akslantirishlar to‘plami berilgan bo‘lsin deb faraz qilaylik, $A \subset X$ va $B \subset Y$ to‘plamlar uchun $< A, B >= \{f \mid f \in Y^X$ va $f(A) \subset B\}$ deb belgilash kiritaylik. U holda Y^X da $\{< K, U >\}-$oila bazasi bo‘lgan topologiya mavjudligini isbotlang (bu yerda $K \subset X -$ kompakt to‘plam, $U \subset Y -$ochiq to‘plam). Bunday topologiyani kompakt-ochiq topologiya deyiladi.

45. Ushbu $y = kx + b$ (bu yerda $k, b \in [0:1]$) ko‘rinishdagi funksiyalar to‘plamini X deb belgilab, X to‘plamda kompakt- ochiq topologiya kiritsak, X -kompakt fazo bo‘lishi isbotlansin.

46. Ushbu $y = kx^2$ (bu yerda $k \in [0:3]$) ko‘rinishdagi funksiyalar to‘plamini X deb belgilab, X to‘plamda kompakt ochiq topologiya kiritsak X kompakt fazo bo‘lishi isbotlansin.

47. Bizga X kompakt metrik fazo va uning $\{U_\alpha\}$ -ixtiyoriy ochiq qobig’i berilgan bo‘lsin. Quydagi shartni qanoatlantiruvchi ε-soni mavjudligi isbotlansin:

ε-radiusli sharga joylashtirish mumkin bo‘lgan ixtiyoriy A to‘plamni $\{U_\alpha\}$ – qobiqning biror U to‘plamiga joylashtirish mumkin, ya’ni $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$ oilani

(U_α) qobiqning ichiga joylashtirish mumkin. Bunday ε -soni Lebeg soni deyiladi.

48. Topologik fazoda $\overline{A_n} \subset A_{n-1}$ $(n > 1, n \in N)$ shartni qanoatlantiruvchi kompakt $\{A_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. U holda ushbu $\bigcap_n A_n \neq \varnothing$ munosabat o‘rinli bo‘lishini isbotlang. Agar $\overline{A_n} \subset A_{n-1}$ $(n > 1, n \in N)$ shartni $A_n \subset A_{n-1}$ $(n > 1, n \in N)$ shart bilan almashtirilsa, tasdiq o‘rinli bo‘lmasligini misol yordamida ko‘rsating.

49. Lokal kompakt fazoning yopiq qism to‘plami lokal kompakt qism fazo ekanligi isbotlansin.

50. Lokal kompakt Xausdorf fazosining ochiq qism to‘plami lokal kompakt qism fazo bo‘lishi isbotlansin.

51. Lokal kompakt Xausdorf fazosi to‘liq regulyar fazo ekanligi isbotlansin.

52. Bizga X lokal kompakt fazo berilgan bo‘lib, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ munosabat bajarilsin (bu yerda K_n-kompakt to‘plam). U holda, X -parakompakt fazoligi isbotlansin.

Ta’rif. Berilgan X topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qobig’idan lokal chekli ochiq qobiq ajratish mumkin bo‘lsa, X-parakompakt fazo deyiladi.

53. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan lokal kompakt fazo parakompakt fazo ekanligi isbotlansin.

54. Kompakt metrik fazo separabel fazo ekanligi isbotlansin.

55. Bizga X, Y metrik fazolar, $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish va X-kompakt fazo berilgan bo‘lsin. X-kompakt fazoning ixtiyoriy $\{U_\alpha\}$ qobig’i uchun Lebeg soni ε mavjud bo‘lib, har qanday ε-radiusli sharning ichiga joylashtirish mumkin bo‘lgan $A \subset X$ uchun $f(A) \subset U$, $U \in \{U_\alpha\}$ munosabat bajarilishi isbotlansin.

56. Yopig’i kompakt bo‘lmagan kompakt to‘plam mavjud bo‘lgan topologik fazoga misol keltiring.

57. Kompakt bo‘lmagan metrik fazoda uzluksiz va chegaralanmagan funksiya mavjudligi isbotlansin.

58. O‘lchami n ga teng bo‘lgan Yevklid fazosi R^n lokal kompakt va σ kompakt bo‘lishi isbotlansin.

59. Bizga X kompakt Xausdorf fazosi berilgan bo‘lsin. X fazoning topologiyasini hosil qiluvchi metrika mavjud bo‘lishi uchun X fazoda sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

60. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan X topologik fazo berilgan bo‘lsin. X ning topologiyasini hosil qiluvchi metrika mavjud bo‘lishi uchun, X-regulyar fazo bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

61. Kompakt Xausdorf fazosi va C uning biror bog'lanishlilik komponentasi berilgan bo'lsin. C to'plam C ni o'z ichiga olgan, bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq bo'luvchi to'plamlarning kesishmasidan iboratligi isbotlansin.

62. Topologik fazo kompakt bo'lishi uchun uning ixtiyoriy markazlashgan to'plamlari sistemasining umumiy urinish nuqtasi mavjud bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

II BOB. CHIZIQLAR NAZARIYASI
1 §. Egri chiziq va uning berilish usullari

Biz bu paragrafda differensial geometriya kursining asosiy tushunchalaridan bo‘lgan egri chiziq tushunchasini kiritamiz va ularning tenglamalarini ba’zi bir xususiyatlarini (chizmalarini chizish uchun kerak bo‘ladigan) topishga doir masalalar keltiramiz. Bulardan tashqari, bu paragrafda parametrik ko‘rinishda va qutb koordinatalar sistemasida berilgan chiziqlarni yasashga doir masalalar keltirilgan.

Asosiy tushunchalar

1.1.-ta’rif. Fazodagi (yoki tekislikdagi) γ to‘plam birorta ochiq intervalning topologik (gomeomorf) akslantirishdagi aksi bo‘lsa, ya’ni birorta $f:(a;b)\to R^3$ akslantirish uchun, $f((a;b))=\gamma$ tenglik o‘rinli bo‘lib, $f:(a;b)\to\gamma$ topologik akslantirish bo‘lsa, γ elementar egri chiziq deb ataladi.

Bu ta’rifga ko‘ra, ochiq $(a;b)$ intervalga tegishli ixtiyoriy t nuqtaga mos keluvchi nuqtani $\gamma(t)$ bilan belgilasak, bu nuqtaning koordinatalarini $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funksiyalar bilan belgilasak, u holda

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad a < t < b \\ z = z(t), \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar γ chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi.

Differensial geometriya kursida egri chiziq parametrik tenglamalar yordamida o‘rganiladi, ya’ni γ chiziqni aniqlovchi f akslantirish tanlanib, uning parametrik tenglamalari yoziladi, bu holda γ chiziqni parametrlangan elementar egri chiziq deb ataymiz.

1.2.-ta’rif. Berilgan γ elementar egri chiziqni differensiallanuvchi $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funksiyalar yordamida parametrlash mumkin bo‘lsa, u silliq elementar egri chiziq deb ataladi.

Izoh: Zarur bo‘lgan hollarda, biz yuqori tartibli hosilalarning mavjud va uzluksiz bo‘lishini talab qilamiz.

1.3.-ta’rif. Bog‘lanishli γ to‘plamga tegishli har qanday M nuqtaning birorta U_M atrofi mavjud bo‘lib, γ to‘plamning U_M atrofdagi qismi elementar egri chiziq bo‘lsa, γ sodda egri chiziq deb ataladi.

1 - tasdiq. Har qanday sodda egri chiziq yoki elementar egri chiziqdir, yoki aylanaga gomeomorfdir.

1.4.-ta’rif. Bizga sodda γ egri chiziq berilgan bo‘lib, M esa unga tegishli nuqta bo‘lsin. Agar U_M to‘plam M nuqtaning atrofi bo‘lsa, $U_M \cap \gamma$ kesishmani M nuqtaning γ chiziqdagi atrofi deb ataladi.

1.5.-ta’rif. Sodda egri chiziqning lokal topologik akslantirishdagi obrazi umumiy egri chiziq deyiladi.

2 - tasdiq. Silliq $x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$ funktsiyalar hosilalari har bir $t\in(a;b)$ uchun $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0$ shartni qanoatlantirsa, (1) tenglamalar sistemasi umumiy egri chiziqni aniqlaydi.

Bu umumiy egri chiziq (a,b) intervalning $f:t\to(x(t),y(t),z(t))$ akslantirishdagi aksidir.

3 - tasdiq. Bizga differensiallanuvchi $\varphi(x,y)$ funktsiya berilgan bo‘lib, koordinatalari $\varphi(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamini $M=\{(x,y):\phi(x,y)=0\}$ deb belgilaylik. Agar $(x_0;y_0)\in M$ nuqtada $\varphi_x^2+\varphi_y^2>0$ munosabat bajarilsa, (x_0,y_0) nuqtaning shunday atrofi mavjudki, M to‘plamning bu atrofdagi qismi elementar egri chiziq bo‘ladi.

4 - tasdiq. Silliq elementar γ egri chiziqning parametrik tenglamalari (1) ko‘rinishda bo‘lib, $t_0\in(a,b)$ uchun $x'(t_0)\neq 0$ bo‘lsa, (x_0,y_0,z_0) nuqtaning kichik atrofida γ ni,

$$\begin{cases} y=\varphi(x), \\ z=\psi(x), \quad a<x<b \end{cases}$$

tenglamalar yordamida aniqlash mumkin.

Bu yerda, $x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0)$

5 - tasdiq. $F(x,y,z)$ va $G(x,y,z)$ uch o‘zgaruvchili silliq funksiyalar, M esa koordinatalari

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami bo‘lsin. Agar $(x_0,y_0,z_0)\in M$ nuqtada

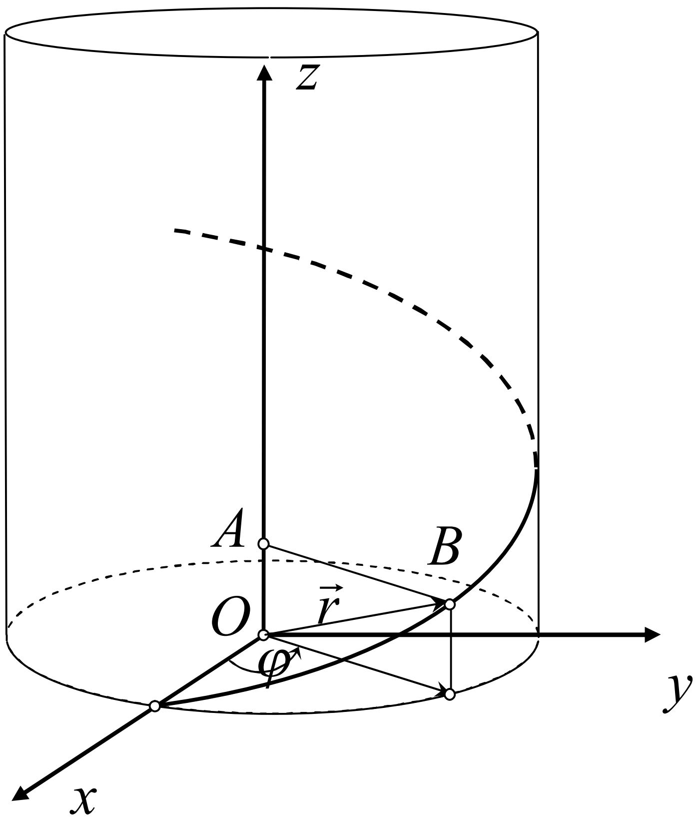
$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga teng bo‘lsa, (x_0,y_0,z_0) nuqtaning shunday atrofi mavjudki, M ning bu atrofdagi qismi silliq elementar egri chiziq bo‘ladi.

1.6.-ta’rif. Silliq γ egri chiziqni unga tegishli har qanday nuqtaning birorta atrofida ixtiyoriy $t\in(a;b)$ uchun $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0$ shartni qanoatlantiruvchi differensiallanuvchi $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalar yordamida parametrlash mumkin bo‘lsa, u regulyar egri chiziq deb ataladi.

Masalalar yechish namunalari

1-masala. O‘zgarmas a uzunlikka ega bo‘lgan AB kesma Oz o‘qiga perpendikular bo‘lib, uning A uchi shu o‘qda yotadi. Kesma, A uchi aylanish burchagiga proporsional yo‘lni bosib boradigan holda, Oz o‘qi bo‘yicha siljib, shu o‘q atrofida aylanadi. Usbu harakat natijasida kesmaning B uci chizgan chizig‘i ***vint chizig‘i*** deyiladi. Vint chizig‘ining tenglamasini tuzing.



1 – rasm

Yechish. Shartga ko‘ra, $AB = a$ va $OA = \lambda\varphi$, bunda $\lambda = const$. Harakatdagi kesma boshlang‘ich paytda Ox o‘qida bo‘ladi, deb faraz qilsak, vint chizig‘idagi B nuqtaning vaziyati φ parametr bilan to‘la aniqlanadi. Ushbu chiziq tenglamasini tuzamiz:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{r} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}.$$

Ikkinchi tarafdan, $\overrightarrow{AB} = a(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) = a\vec{e}(\varphi)$ va $\overrightarrow{OA} = \lambda\varphi\vec{k}$ munosabatlarni hisobga olsak, vint chizig‘i radius – vektorning ifodasini hosil qilamiz (bu yerda $\vec{e}(\varphi)$ birlik vektor bo‘lib, XOY tekisligida yotadi).

Demak, vint chizig‘ining tenglamasi

$$\vec{r}(\varphi) = a\vec{e}(\varphi) + \lambda\varphi\vec{k}$$

yoki koordinat ko‘rinishda

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \\ z = \lambda\varphi \end{cases}$$

bo‘ladi.

Vint chizig‘ining o‘zi yasovchilari Oz o‘qiga parallel bo‘lgan $x^2 + y^2 = a^2$ silindrda yotadi, chunki AB kesmaning uzunligi o‘zgarmaydi (1-rasm).

Misol va masalalar

1. Berilgan ikki nuqtagacha masofalari kvadratlari yig‘indisi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

2. Berilgan ikki nuqtagacha masofalari kvadratlari ayirmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

3. Ixtiyoriy nuqtasidan $A(4,0)$ nuqtagacha bo‘lgan masofa $B(1,0)$ nuqtagacha bo‘lgan masofadan ikki marta katta bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

4. Katetlari a,b ga teng to‘g‘ri burchakli uchburchak harakat qilganda uning o‘tkir burchakli uchlari o‘zaro perpendikular to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha sirpanadi. Bu harakat natijasida uchburchak to‘g‘ri burchagining uchi chizadigan chiziq tenglamasi tuzilsin.

5. Tekislikdagi umumiy dekart koordinatalar sistemasining Ox, Oy o‘qlarida A, B nuqtalar berilgan bo‘lsin. Berilgan A, B nuqtalardan o‘tuvchi AB to‘g‘ri chiziqda yotgan $P(x_0, y_0)$ nuqtadan Ox, Oy o‘qlarni mos ravishda C, D nuqtalarda kesib o‘tadigan ixtiyoriy kesuvchi o‘tkaziladi. So‘ngra, CB, AD to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M bilan belgilangan bo‘lsin. Kesuvchi to‘g‘ri chiziq P nuqta atrofida aylanganda M nuqta chizgan chiziq tenglamasi tuzilsin.

6. Berilgan uchta nuqtagacha bo‘lgan masofalar kvadratlarining yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

7. To‘g‘ri to‘rtburchak tomonlarigacha masofalari kvadratlarining yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin. Bunda, to‘rtburchakning uchlaridan biri geometrik o‘ringa tegishli deb faraz qilinadi.

8. Ikkita aylana berilgan. Bu aylanalarga o‘tkazilgan urinmalar uzunliklari bir xil bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

9. Markazi koordinatalar boshida, radiusi r ga teng aylana va unda yotmaydigan $A(a,0)$ nuqta berilgan. Har biridan A nuqtagacha bo‘lgan masofa shu nuqtalardan aylanaga o‘tkazilgan urinma uzunligiga teng bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

10. Bizga l to‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan O nuqta berilgan bo‘lib, berilgan l to‘g‘ri chiziqdagi o‘zgaruvchan nuqtani P nuqta deb belgilangan bo‘lsin. Ushbu $OP : OM = k$ shartni qanoatlantiruvchi OP nurdagi M nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin. Bu yerda $k-$ berilgan son.

11. Tekislikda $F(3,0)$ nuqta, Oy o‘qiga parallel va Ox o‘qidan $\frac{25}{3}$ ga teng kesma ajratgan to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan F nuqtagacha bo‘lgan masofaning berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofaga nisbati $\frac{3}{5}$ kabi bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

12. Tekislikda $F(5,0)$ nuqta va ordinata o‘qiga parallel bo‘lgan va Ox o‘qidan $\frac{9}{5}$ ga teng kesma ajratgan to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan F nuqtagacha bo‘lgan masofaning berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofaga nisbati $\frac{3}{5}$ kabi bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

13. Markazi koordinata boshida bo‘lgan aylana berilgan. Agar aylanada yotgan barcha nuqtalarning ordinatalarini k marta kamaytirilsa, qanday chiziq hosil bo‘ladi?

14. Aylananing berilgan yo‘nalishga parallel vatarlarini berilgan nisbatda (birga teng bo‘lmagan) bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

15. Markazlari O koordinata boshida, radiuslari a, b ga teng aylanalar berilgan. Uchi koordinata boshida bo‘lgan nur O nuqta atrofida aylanish natijasida berilgan aylanalarni mos ravishda A, B nuqtalarda kesib o‘tadi. Hosil bo‘lgan B nuqtadan abssissa o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi, A nuqtadan esa, ordinata o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Bu ikki to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini M bilan belgilaylik. Hosil bo‘lgan M nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

16. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasining koordinata o‘qlari va ularni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan o‘zgarmas S yuzali to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning to‘g‘ri burchagi uchidan gipotenuzasiga perpendikular tushirilgan. Perpendikular asosining geometrik o‘rni topilsin.

17. Uzunligi o‘zgarmas bo‘lgan kesmaning uchlari to‘g‘ri burchakning tomonlari bo‘ylab sirpanadi. M nuqta kesmani mos ravishda uzunligi a, b ga teng bo‘lgan bo‘laklarga ajratadi. Kesmaning harakati davomida M nuqta chizgan chiziq tenglamasi topilsin.

18. Berilgan $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ nuqtalargacha masofalarning ko‘paytmasi a^2 ga teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin (***Kassini ovali***).

19. Kassini ovali (oldingi masalaga qarang) ta’rifida ishtirok etgan a^2 kattalik F_1, F_2 nuqtalar orasidagi masofa yarmisining kvadratiga teng bo‘lsa, bu chiziq ***Bernulli lemniskatasi*** deb ataladi. Qutb va qutb o‘qi sifatida mos ravishda F_1F_2 kesmaning o‘rtasini va F_1F_2 to‘g‘ri chiziqni olib Bernulli lemniskatasining tenglamasi tuzilsin.

20. Ushbu $x^2+y^2=R^2$ aylana urinmalarining koordinata o‘qlari orasida joylashgan kesmalari o‘rtalarining geometrik o‘rni topilsin.

21. To‘g‘ri to‘rtburchakning ikki tomoni koordinata o‘qlari bilan ustma-ust tushadi. To‘g‘ri to‘rtburchak diagonalining uzunligi o‘zgarmas l ga teng bo‘lib qolaveradigan holda shaklan o‘zgaradi. Koordinata boshiga qarama-qarshi uchidan diagonalga tushirilgan perpendikular asoslarining geometrik o‘rni *astroida* deb ataladi. To‘g‘ri to‘rtburchakning qo‘zg‘almas tomonlarini koordinata o‘qlari sifatida olib, astroidaning tenglamasi tuzilsin..

22. Qutb o‘qiga perpendikular bo‘lgan va undan $OA=a$ ga teng kesma ajratgan to‘g‘ri chiziqning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi tuzilsin.

23. Radiusi a ga teng bo‘lgan aylananing O nuqtasini qutb, OA diametrini qutb o‘qi sifatida olib, aylananing qutb koordinatalar sistemadagi tenglamasi tuzilsin.

24. Diametri d ga teng aylanada yotgan O nuqta atrofida nur aylanadi. Nurni o‘z ichiga olgan to‘g‘ri chiziq aylanani o‘zgaruvchan P nuqtada kesib o‘tadi. OP nurda P nuqtadan boshlab nur yo‘nalishida $PM=b$ kesma qo‘yiladi. Nurning O nuqta atrofida aylanishida M nuqta chizib bergan chiziq tenglamasi tuzilsin (bu chiziq ***Paskal chig‘anog‘i*** deb ataladi).

25. Radiusi a ga teng bo‘lgan aylanada ixtiyoriy O nuqta olinadi. Olingan O nuqta atrofida nur aylanadi va aylanani o‘zgaruvchi A nuqtada kesib o‘tadi. Bu nurda A nuqtaning ikki tarafida $AM_1=AM_2=2a$ kesma qo‘yiladi. Harakat davomida hosil bo‘lgan M_1,M_2 nuqtalarning geometrik o‘rni ***kardioida*** deb ataladi. Qutb sifatida O nuqta va qutb o‘qi sifatida aylananing OK diametrini olib, kardioidaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi tuzilsin, keyin dekart koordinatalar sistemasiga o‘tilsin.

26. Bizga O nuqta va undan $OA=a$ masofadagi to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan O nuqta atrofida aylanadigan nur to‘g‘ri chiziqni o‘zgaruvchi B nuqtada kesib o‘tadi. Bu nurda B nuqtaning ikki tomonida $BM_1=BM_2=b$ kesmalar ajratiladi. Nur O nuqta atrofida aylanganida M_1,M_2 nuqtalarning geometrik o‘rni ***Nikomed konxoidasi*** deb ataladigan chiziqni hosil qiladi. Qutb boshi sifatida O nuqtani va shu nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan OA perpendikularni qutb o‘qi sifatida olib, Nikomed konxoidasining tenglamasi tuzilsin. So‘ngra koordinatalar boshi sifatida O nuqtani, abssissa o‘qi sifatida OA to‘g‘ri chiziqni olib, dekart koordinatalar sistemasiga o‘tilsin.

27. Tekislikda O nuqta va undan $OA=a$ masofadagi to‘g‘ri chiziq berilgan. A nuqta atrofida nur aylanib to‘g‘ri chiziqni o‘zgaruvchi B nuqtada kesib o‘tadi. Bu nurda B nuqtaning ikki tarafida $BM=BM'=BO$ kesma qo‘yiladi. Nur aylanganda M,M' nuqtalarning geometrik o‘rni ***strofoida*** deb ataladigan chiziqni hosil qiladi. Strofoida tenglamasi tuzilsin.

28. Qutb sifatida qo‘zg‘almas K nuqta va qutb o‘qi sifatida qo‘zg‘almas nuqtani aylana markazi bilan tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq olingan holda, qo‘zg‘almas K nuqtadan berilgan aylana urinmalariga o‘tkazilgan perpendikular asoslarining geometrik o‘rni tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida tuzilsin. Bunda qo‘zg‘almas K nuqtadan aylana markazigacha masofa a ga teng va aylana radiusi b ga teng deb olinsin.

29. Radiusi a ga teng bo‘lgan aylanada O nuqta olingan va bu nuqtaga diametral qarama-qarshi bo‘lgan K nuqtadan aylanaga urinma o‘tkazilgan. Olingan O nuqta atrofida nur aylanadi. Bu nur aylana va urinmani mos ravishda A, B nuqtalarda kesib o‘tadi. Bu nurda O nuqtadan urinma va aylana orasida joylashgan kesma uzunligiga teng $|OM| = |AB|$ kesma qo‘yiladi. Nur aylangandagi M nuqtaning geometrik o‘rni ***Diokles sissoidasi*** deyiladi. Qutb deb O nuqtani va OK nurni qutb o‘qi sifatida olib sissoidaning qutb koordinatalar sistemadagi tenglamasi tuzilsin, keyin dekart koordinatalar sistemasiga o‘tilsin.

30. Aylanada O nuqta olingan va O nuqta orqali OA diametr o‘tkazilgan. O nuqta atrofida nur aylanadi va u aylanani o‘zgaruvchi B nuqtada kesib o‘tadi. Bu nurda B nuqtaning har ikki tarafiga $BM_1 = BM_2 = AB$ kesma qo‘yiladi. Nur aylanishi natijasida M_1, M_2 nuqtalar harakat qiladi. Bu M_1, M_2 nuqtalar geometrik o‘rnining tenglamasi tuzilsin. Aylana radiusi a ga teng deb olinsin.

31. Uzunligi $2a$ ga teng kesmaning uchlari to‘g‘ri burchak tomonlari bo‘ylab sirpanadi. To‘g‘ri burchak uchidan kesmaga tushirilgan perpendikular asosining geometrik o‘rni (bu chiziq ***to‘rt yaproqli gul*** deb ataladi) tenglamasi qutb va dekart koordinatalar sistemalarida tuzilsin.

32. Radiusi a ga teng bo‘lgan aylanada O nuqta olingan va bu nuqtaga diametral qarama-qarshi bo‘lgan K nuqtada urinma o‘tkazilgan. Olingan O nuqta atrofida to‘g‘ri chiziq aylanadi va u aylana bilan urinmani mos ravishda A, B nuqtalarda kesib o‘tadi. A nuqtadan urinmaga parallel, B nuqtadan OK diametrga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Bu to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtalarining geometrik o‘rni topilsin. Koordinatalar boshi deb O nuqta, abssissa o‘qi sifatida OK diametr olinsin. Hosil bo‘lgan chiziq ***Mariya Anezi zulfi*** **deb ataladi**.

33. Ixtiyoriy nuqtasidan ikki o‘zgarmas A, B nuqtalargacha bo‘lgan r_1, r_2 masofalar orasida $r_2 = ar_1 + b$ munosabat o‘rinli bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin. Bu chiziq ***Dekart ovali*** deyiladi. Bunda A qutb, AB to‘g‘ri chiziq qutb o‘qi sifatida, va $|AB| = c$ deb olinsin. Bu yerda a, b, c -o‘zgarmas sonlar.

34. Tekislikdagi O nuqta atrofida o‘zgarmas ω burchak tezlik bilan nur aylanadi. Bu nur bo‘yicha o‘zgarmas v tezlik bilan M nuqta harakatlanadi. Harakatlanayotgan M nuqtaning geometrik o‘rni tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida tuzilsin. Bunda boshlang‘ich momentda M nuqta O nuqta bilan, nur esa qutb o‘qi bilan ustma-ust tushadi. Bu chiziq ***Arximed spirali*** deyiladi.

35. Tekislikda OL nur O nuqta atrofida o‘zgarmas burchak tezligi ($\omega = const$) bilan aylanadi. M nuqta esa shu OL to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, tezligi OM masofaga proporsional ravishda harakatlanadi. Harakatlanayotgan M nuqtalarning geometrik o‘rni tenglamasi tuzilsin Bu chiziq ***logarifmik spiral*** deyiladi.

36. Markazi C nuqtada bo‘lgan, radiusi esa a ga teng aylana Ox o‘qi bo‘ylab sirpanmasdan harakatlanadi. Aylananing boshlang‘ich momentda koordinatalar boshida yotgan M nuqtasi chizgan chizig‘ining parametrik tenglamalari tuzilsin. Parametr sifatida aylananing Ox o‘qiga urinish A nuqtasiga borgan CA radius bilan M nuqtaga borgan CM radius orasidagi burchak olinsin. Hosil bo‘ladigan chiziq ***sikloida*** deb ataladi.

37. Radiusi a ga teng aylana Ox o‘qi bo‘ylab sirpanmasdan harakatlanadi. Aylananing markazidan d masofada aylanaga mahkamlangan M nuqta chizgan chiziqning parametrik tenglamalari tuzilsin. Hosil bo‘ladigan chiziq $a < d$ $(a > d)$ holda, ***cho‘zilgan (qisqartirilgan) sikloida*** deb ataladi.

38. Radiusi r ga teng doira R radiusli doira bo‘ylab uning tashqarisida harakatlanadi. Harakatdagi doirada olingan ixtiyoriy nuqtaning chizgan chizig‘i ***episikloida*** deb ataladi. Bu chiziqning parametrik tenglamasi tuzilsin. Qo‘zg‘almas doira markazini koordinatalar boshi sifatida, t parametr sifatida esa abssissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan qo‘zg‘almas aylananing qo‘zg‘aluvchi aylana bilan urinish nuqtasiga yo‘nalgan radiusi orasidagi burchak olinsin. Boshlang‘ich holatda harakatlanuvchi doira qo‘zg‘almas doira bilan, qo‘zg‘almas doiraning abssissa o‘qi bilan kesishish A nuqtasida urinsin.

39. Radiusi r ga teng aylana R radiusli aylana bo‘ylab uning ichkarisida sirpanmasdan harakatlanadi. Harakatdagi aylanada olingan ixtiyoriy nuqta chizgan chizig‘ining tenglamasi tuzilsin. Bu chiziq ***giposikloida*** deb ataladi.

40. Oldingi masalada (39-masala) $R = 4r$ shart o‘rinli bo‘lgan holda, giposikloida ***astroida*** nomli chiziqdan iboratligini ko‘rsating.

41. 39- masalada $R = 2r$ shart o‘rinli bo‘lgan holda giposikloida qo‘zg‘almas aylananing diametridan iboratligini ko‘rsating.

42. O‘zgarmas uzunlikdagi kesmaning bir uchi $x^2 + y^2 = r^2$ aylana bo‘ylab, ikkinchi uchi esa Ox o‘qi bo‘ylab sirpanadi. Kesmaning a, b uzunlikdagi bo‘laklarga bo‘luvchi nuqta chizgan chiziq tenglamasi tuzilsin. Bu chiziq ***Shatunli mexanizm*** deb ataladi.

43. Ushbu $x^2 + y^2 = r^2$ aylana bo‘ylab to‘g‘ri chiziq sirpanadi. To‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich vaziyati $x = r$ dan iborat. To‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqta trayektoriyasi tenglamasi tuzilsin. Nuqtaning boshlang‘ich holati sifatida $(r, 0)$ nuqta olinsin. Bu chiziq ***aylananing evolventasi*** deyiladi.

44. Berilgan ikki aylanaga urinadigan aylananing markazlari geometrik o‘rni topilsin. Quyidagi hollar qaralsin:

1) Berilgan aylanalardan biri ikkinchisining ichida yotadi;
2) Berilgan aylanalardan biri ikkinchisining ichida yotmaydi;

3) Berilgan aylanalarning biri to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lib, ikkinchi aylana bilan kesishmaydi.

45. Quyidagi nuqtalar $M(-1;-1), N(4;2), P(1;2),$ ushbu $x=t^3-2t, y=t^2-2$ chiziqda yotishini tekshiring. Chiziqning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va oshkormas ko‘rinishdagi tenglamasi tuzilsin.

46. Parametr sifatida a) koordinata boshi va aylana nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini; b) Ox o‘qi bilan aylana markazi va uning nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni olib $x^2+y^2-2ax=0$ aylananing parametrik tenglamasi tuzilsin.

Quyidagi chiziqlarni yasang:

47 $x=t^2-t+1,\ y=t^2+t+1.$

48. $x=t^2-2t+3,\ y=t^2-2t+1.$

49. $x=a\sin^2 t,\ y=b\cos^2 t.$

50. $x=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}.$

51. $x=3^t+3^{-t},\ y=3^t-3^{-t}.$

52. $x=\dfrac{a-t}{a+t},\ y=\dfrac{t}{a+t}.$

53. $x=a\ln t,\ y=\dfrac{a}{2}(t+\dfrac{1}{t}).$

54. $x=a+R\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y=b+R\dfrac{2t}{1+t^2}.$

Quyida qutb koordinatalar bilan qanday chiziqlar berilganini toping.

55. $r=4.$

56. $r=2a\cos\varphi.$

57. $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}.$

58. $r=\dfrac{b}{\sin\varphi}.$

59. $r=\dfrac{13}{5-3\cos\varphi}.$

60. $r=\dfrac{16}{3-5\cos\varphi}.$

61. $r=\dfrac{2}{1-\cos\varphi}.$

62. $r^2\cos 2\varphi=a^2.$

63. $r=b\sin\varphi.$

64. $r=\sec^2(\varphi/2).$

65. $r=\operatorname{cosec}^2(\varphi/2).$

2 §. Vektor funksiyalar uchun differensial hisob

Differensial geometriya va topologiya fanida vektor analizi muhim o‘rin tutadi. Shuning uchun bu paragrafda qisqacha vektor-funksiyalar xossalariga doir misol va masalalar keltiramiz.

Asosiy tushunchalar

Bizga biror G to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar G to‘plamning har bir nuqtasiga aniq bitta vektor mos qo‘yilgan bo‘lsa, G to‘plamda vektor-funksiya berilgan deyiladi. Bu moslikni $p \to \bar{r}(p)$ ko‘rinishda yozish mumkin.

2.1-*ta’rif.* Berilgan $\vec{r}(p)$ vektor-funksiya va o‘zgarmas $\vec{a}$ vektor uchun $p \to p_0$ da $\left|\vec{r}(p) - \vec{a}\right| \to 0$ munosabat bajarilsa, $\vec{r}(p)$ vektor-funksiya $p \to p_0$ da $\vec{a}$ limitga ega deyiladi va $\lim\limits_{p \to p_0} \bar{r}(p) = \bar{a}$ ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$ bo‘lib, $(\vec{a}, \vec{a})$ esa skalyar ko‘paytmadir.

Tasdiq. Fazoda kiritilgan dekart koordinatalar sistemasida berilgan vektorlarning komponentalari $\vec{r}(p) = \{x(p), y(p), z(p)\}$, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ bo‘lsa, ushbu tenglik $\lim\limits_{p \to p_0} \bar{r}(p) = \bar{a}$ quyidagi uchta munosabatga ekvivalentdir:

$$\lim_{p \to p_0} x(p) = a_1, \ \lim_{p \to p_0} y(p) = a_2, \ \lim_{p \to p_0} z(p) = a_3$$

Vektor funksiyalar uchun uzluksizlik va differensiallanuvchanlik tushunchalari skalyar funksiyalar uzluksizligi va differensiallanuvchiligi tushunchalari kabi kiritiladi.

2.2-ta’rif. Ushbu $\lim\limits_{p \to p_0} \bar{r}(p) = \bar{r}(p_0)$ munosabat bajarilsa, $\vec{r}(p)$ vektor-funksiya p_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Vektor- funksiya aniqlangan G to‘plam sonlar o‘qining qism to‘plami bo‘lsa, $\vec{r}(p)$ vektor-funksiya bir o‘zgaruvchili vektor-funksiya bo‘ladi. Agar $p_0 \in G$ nuqta uchun

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{r}(p_0 + h) - \bar{r}(p_0)}{h}$$

mavjud bo‘lsa, uni $\vec{r'}(p)$ bilan belgilaymiz va $\vec{r}(p)$ vektor-funksiyaning p_0 nuqtadagi hosilasi deb ataymiz.

Tekislikdagi biror soha vektor-funksiya aniqlangan G to‘plam sifatida olingan bo‘lsa, u sohadagi nuqta uchun $p = (u, v)$ belgilash kiritamiz. Bu holda $\vec{r}(p)$ va uning koordinata funksiyalari $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ ikki o‘zgaruvchili funksiyalar bo‘ladi. Yuqoridagi hosila tushunchasidan foydalanib, $\vec{r}_u(u,v) = \{x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)\}$ va

$\vec{r}_v(u,v)=\{x_v(u,v),y_v(u,v),z_v(u,v)\}$ tengliklarni hosil qilamiz.

Bir o‘zgaruvchili $\vec{r}(t)$ vektor-funksiya uchun integral tushunchasini kiritaylik. Agar $\vec{r}(t)$ vektor-funksiya uchun differensiallanuvchi $\vec{\rho}(t)$ vektor-funksiya mavjud bo‘lib, $\vec{r}(t)=\vec{\rho}\,'(t)$ tenglik bajarilsa, $\rho(t)$ vektor-funksiya $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va quyidagi

$$\vec{\rho}(t)=\int \vec{r}(t)dt$$

ko‘rinishda yoziladi.

Endi $n-$marta differensiallanuvchi $\vec{r}(t)$ vektor funksiya uchun Teylor qatorini keltiramiz. Buning uchun fazoda dekart koordinatalar sistemasini aniqlovchi ortonormal $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ bazisda

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

tenglikni yozib, $x(t),y(t),z(t)$ funksiyalar uchun Teylor qatorini yozamiz:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+x'(t)\Delta t+x''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+...+x^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_1(t,\Delta t)$$

$$y(t+\Delta t)=y(t)+y'(t)\Delta t+y''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+...+y^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_2(t,\Delta t)$$

$$z(t+\Delta t)=z(t)+z'(t)\Delta t+z''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+...+z^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_3(t,\Delta t)$$

Bu tengliklardan

$$\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}(t)+\vec{r}\,'(t)\Delta t+\vec{r}\,''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+...+\vec{r}^{\,(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$$

qatorni hosil qilamiz. Bu yerda

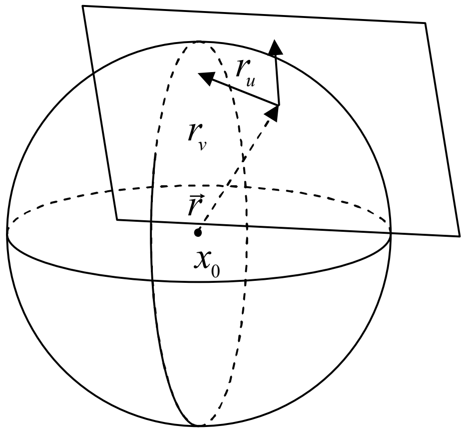
$$\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)=\{\varepsilon_1(t,\Delta t),\varepsilon_2(t,\Delta t),\varepsilon_3(t,\Delta t)\}$$

va $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)|=0$ munosabatlar o‘rinli.

Misol va masalalar yechish namunalari

1-masala. Bizga tekislikdagi birorta G sohada aniqlangan differensiallanuvchi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiya berilgan bo‘lsin. Berilgan $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning uzunligi o‘zgarmas bo‘lishi uchun, $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ tengliklarning bajarilishi zarur va yetarliligini isbotlang (2-rasm).

Yechish. Zarurligi. Tasdiqni zarurligini isbotlash uchun $|\vec{r}|^2=(\vec{r},\vec{r})$ tenglikdan foydalanamiz. Berilgan vektor-funksiyaning uzunligi o‘zgarmas bo‘lsin deb faraz qilaylik, ya’ni $|\vec{r}(u,v)|=const$ tenglik bajarilsin.



$2-$rasm

U holda

$$0=\frac{d}{du}|\vec{r}|^2=\frac{d}{du}(\vec{r},\vec{r})=2(\vec{r},\vec{r}_u)$$

$$0=\frac{d}{dv}|\vec{r}|^2=\frac{d}{dv}(\vec{r},\vec{r})=2(r,\vec{r}_v)$$

tengliklardan ushbu $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ tengliklar kelib chiqadi.

Yetarliligi. Endi $\vec{r}\perp\vec{r}_u$, $\vec{r}\perp\vec{r}_v$ bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda

$$\frac{d}{du}|\vec{r}|^2=2(r,\vec{r}_u)=0,\ \frac{d}{du}|\vec{r}|^2=2(r,\vec{r}_v)=0$$

tengliklardan $|\vec{r}(u,v)|$ funksiyaning o‘zgarmas ekanligi kelib chiqadi. Masala to‘liq yechildi.

2-masala. Tekislikdagi birorta G sohada aniqlangan differensiallanuvchi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning $\vec{r}_u$, r_v vektorlarning ikkalasiga ham kollinear bo‘lishi uning yo‘nalishi o‘zgarmas ekanligiga teng kuchli ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Agar $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lsa, uni $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{e}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\lambda(u,v)-$ skalyar funksiya bo‘lib, $\vec{e}-$o‘zgarmas birlik vektordir. Bu ko‘rinishdan $\vec{r}_u=\lambda_u(u,v)\vec{e}$, $\vec{r}_v=\lambda_v(u,v)\vec{e}$ tengliklarni hosil qilamiz.

Demak, $\vec{r}(u,v)$ vektor $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ vektorning ikkalasiga ham kollineardir. Endi $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_u$, $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_v$, tengliklar o‘rinli deb faraz qilib, $\vec{e}(u,v)=\dfrac{\vec{r}(u,v)}{|\vec{r}(u,v)|}$ vektorning o‘zgarmas vektor ekanligini ko‘rsataylik. Buning uchun $\frac{d}{du}\vec{e}=\vec{0},\ \frac{d}{dv}\vec{e}=\vec{0}$ tengliklarni isbotlaymiz. Bo‘linmaning hosilasi formulasidan ushbu tenglikka,

$$\frac{d}{du}\vec{e}=\frac{\vec{r}_u|\vec{r}|-\vec{r}\,\frac{(\vec{r},\vec{r}_u)}{|\vec{r}|}}{\left|\vec{r}^2\right|}=\frac{\vec{r}_u|\vec{r}|^2-\vec{r}(\vec{r},\vec{r}_u)}{|\vec{r}|^3}=\frac{\lambda^2|\vec{r}_u|^2\vec{r}_u-\lambda^2|\vec{r}_u|^2\vec{r}_u}{|\vec{r}|^3}=\vec{0},$$

xuddi shunga o‘xshash

$$\frac{d}{dv}\vec{e}=\frac{\mu^2|\vec{r}_v|^2\vec{r}_v-\mu^2|\vec{r}_v|^2\vec{r}_v}{|\vec{r}|^3}=\vec{0}$$

tenglikni olamiz. Bulardan esa oldingi masalaga asosan $\vec{e}$ birlik vektorning o‘zgarmasligi kelib chiqadi.

Demak, $\vec{r}(u,v)=|\vec{r}(u,v)|\vec{e}$ bo‘lib, $\vec{r}$ vektorning yo‘nalishi o‘zgarmasdir.

3-masala. Birorta G sohada aniqlangan differensiallanuvchi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning xususiy hosilalari $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ vektorlar nol vektor bo‘lishi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning o‘zgarmas vektor bo‘lishiga teng kuchli ekanligini ko‘rsataing.

Yechish. Xususiy hosilalar uchun

$$\vec{r}_u=\vec{0},\ \vec{r}_v=\vec{0}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lsa, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning koordinata funksiyalari uchun

$$x_u=0,\qquad x_v=0$$
$$y_u=0,\qquad y_v=0$$
$$z_u=0,\qquad z_v=0$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Demak, $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ funksiyalar o‘zgarmas funksiyalardir. Bundan esa

$$\vec{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$$

vektorning o‘zgarmas ekanligi kelib chiqadi.

Aksincha, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning o‘zgarmas vektor ekanligidan $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ funksiyalar o‘zgarmas bo‘lishi kelib chiqadi. Bundan esa

$$\vec{r}_u=\vec{0},\ \vec{r}_v=\vec{0}$$

tengliklar hosil bo‘ladi.

Misol va masalalar

Berilgan vektor funksiyalar uchun $\lim\limits_{M\to M_0}\vec{r}_i(M)=\vec{a}_i \quad (i=1,2,3)$, $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=\lambda$ munosabatlar ma'lum bo'lsa, quyidagilarni isbotlang:

1. $\lim\limits_{M\to M_0}(\vec{r}_1(M)\pm\vec{r}_2(M))=\vec{a}_1\pm\vec{a}_2$;

2. $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)\vec{r}_1(M))=\lambda\vec{a}_1$;

3. $\lim\limits_{M\to M_0}(\vec{r}_1(M),\vec{r}_2(M))=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$;

4. $\lim\limits_{M\to M_0}[\vec{r}_1(M),\vec{r}_2(M)]=[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$;

5. $\lim\limits_{M\to M_0}(\vec{r}_1(M),\vec{r}_2(M),\vec{r}_3(M))=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$.

6. Vektor funksiyaning uzluksizligi uning komponentalarining uzluksizligiga teng kuchliligini isbotlang.

7. Berilgan $\vec{r}=\vec{r}(M)$ vektor funksiyaning uzluksizligidan $|\vec{r}|=|\vec{r}(M)|$ funksiyaning uzluksizligi kelib chiqadimi? Teskarisi o'rinlimi?

Ushbu $\vec{r}_i(M)$ vektor funksiyalarning va $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtada uzluksizligidan quyidagi:

8. $\vec{r}_1(M)\pm\vec{r}_2(M)$;

9. $(\vec{r}_1(M),\vec{r}_2(M))$;

10. $f(M)\vec{r}_1(M)$;

11. $[\vec{r}_1(M),\vec{r}_2(M)]$;

12. $(\vec{r}_1(M),\vec{r}_2(M),\vec{r}_3(M))$ funksiyalarning uzluksizligi kelib chiqadimi?

13. Vektor funksiyaning silliqligi uning tashkil etuvchilarining silliqligiga teng kuchliligini isbotlang.

14. Vektor funksiya uchun $\vec{r}^{(k)}(t)=\left(x_1^{(k)}(t),x_2^{(k)}(t),\dots,x_n^{(k)}(t)\right)$ munosabat o'rinliligini isbotlang.

Berilgan $\vec{r}_i : I\to R^3$ vektor funksiya va C^1 sinfga tegishli $f: I\to R$ funksiya uchun quyidagi munosabatlarni isbotlang:

15. $(\vec{r}_1\pm\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'\pm\vec{r}_2{}'$;

16. $(f\vec{r})'=f'\vec{r}+f\vec{r}\,'$;

17. $(\vec{r}_1,\vec{r}_2)'=\left(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2\right)+\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2{}'\right)$;

18. $[\vec{r}_1,\vec{r}_2]'=\left[\vec{r}_1{}',\vec{r}_2\right]+\left[\vec{r}_1,\vec{r}_2{}'\right]$;

19. $(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)'=(\vec{r}_1{}',\vec{r}_2,\vec{r}_3)+(\vec{r}_1,\vec{r}_2{}',\vec{r}_3)+(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3{}')$.

Quyidagi bir o‘zgaruvchili vektor funksiyalarning hosilalarini toping:

20. $\vec{r}^{\,2}$;

21. $\vec{r}\,'^{2}$;

22. $[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']$;

23. $(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')$;

24. $[[\vec{r}\,', \vec{r}\,''], \vec{r}\,''']$;

25. $\sqrt{\vec{r}^{\,2}}$.

26. Ellipsning ixtiyoriy *M* nuqtasiga o‘tkazilgan urinma shu nuqtadagi fokal radiuslar tashkil etgan burchak bissektrisasi bo‘lishini isbotlang.

27. Berilgan $\vec{r}(t) = (t^2 + 8,\ 4t - 7,\ t + 5)$ vektor funksiya uchun $\vec{r}\,'(t_0)$ chiziqli akslantirish 2 sonini (4,8,2) vektorga o‘tkazuvchi t_0 qiymat topilsin.

28. Berilgan $\vec{r} = \vec{r}(M)$ vektor funksiyaning silliqligidan $|\vec{r}| = |\vec{r}(M)|$ funksiyaning silliqligi kelib chiqadimi?

Ixtiyoriy $\vec{r} = \vec{r}(M)$ vektor funksiya uchun quyidagi:

29. $|\vec{r}\,'| = |\vec{r}|'$;

30. $\vec{r} \cdot \vec{r}\,' = |\vec{r}| \cdot |\vec{r}\,'|$ munosabatlar o‘rinlimi?

31. Berilgan $\vec{r} = \vec{r}(M)$ vektor funksiyaning biror intervalda hosilasi nolga teng bo‘lishi uchun uning o‘zgarmas, ya’ni *t* ga bog‘liq bo‘lmasligi zarur va yetarli ekanini isbotlang.

32. Biror intervalning barcha nuqtalarida $\vec{r}(t)$ va $\vec{r}\,'(t)$ vektorlar o‘zaro ortogonal bo‘lishi uchun, $|\vec{r}(t)| = const$ bo‘lishi zarur va yetarli ekanini isbotlang.

33. Ixtiyoriy C^1 sinfga tegishli $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(\vec{r}(t) \neq \mathbf{0})$ vektor funksiya o‘zgarmas yo‘nalishga ega bo‘lishi uchun, t ning o‘zgarish sohasida $\vec{r}(t)$ va $\vec{r}\,'(t)$ vektorlar kollinear bo‘lishi zarur va yetarli ekanini isbotlang.

34. Ixtiyoriy C^2 sinfga tegishli $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha nuqtalarida

$$\vec{r}\vec{r}\,'\vec{r}\,'' = 0, [\vec{r}, \vec{r}\,'] \neq \mathbf{0}$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor funksiya aniqlagan chiziq yassi ekanini isbotlang.

35. Ixtiyoriy C^2 sinfga tegishli (a,b) intervalda aniqlangan $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor funksiya uchun $\vec{r}\,'$ va $\vec{r}\,''$ vektorlar noldan farqli va barcha $t \in (a,b)$ larda kollinear bo‘lsa, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor funksiya aniqlagan chiziq to‘gri chiziq kesmasi ekanini isbotlang.

36. Ushbu $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1 + t^2\vec{r}_2$ vektor funksiya aniqlagan chiziq, agar $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ vektorlar kollinear bo‘lmasa, parabola ekanligi isbotlansin. Bu yerda $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ vektorlar o‘zgarmas va $t \in R$.

37. Ushbu $\vec{r}=\vec{r}_0+\sin t\,\vec{r}_1+\cos t\vec{r}_2$, $t\in[0,2\pi]$ vektor funksiya aniqlagan chiziq, agar $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ vektorlar kollinear bo‘lmasa, ellips ekanligi isbotlansin.

38. Ushbu $\vec{r}=\vec{r}_0+sht\,\vec{r}_1+cht\vec{r}_2$ $t\in R$ vektor funksiya aniqlagan chiziq, agar $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ vektorlar kollinear bo‘lmasa, giperbolaning qismi ekanligi isbotlansin.

39. Moddiy nuqtaning markaziy kuch ta’siridagi harakati tekis ekanini isbotlang.

40. Silliq parametrlangan $\vec{r}(t)=(t,0,0)$ va $\vec{r}_1(t)=(t^2,0,0)$ vektor funksiyalarning aksi to‘gri chiziqdan iborat bo‘lsa ham ular ekvivalent emasligini isbotlang.

41. Quyidagi yassi figuralar sodda egri chiziq ekanligini isbotlang va ularning birorta parametrlash usulini ko‘rsating: 1) to‘gri chiziq; 2) aylana, 3) ellips, 4) parabola 5) giperbolaning bitta shoxi.

Ushbu $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ vektorlar o‘zgarmas va $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ vektorlar kollinear emasligini bilgan holda, quiyidagi vektor-funksiyalarning aksini toping:

42. $\vec{r}=\vec{r}_0+u\vec{r}_1+u^2\vec{r}_2+v\vec{r}_3$;

43. $\vec{r}=\vec{r}_0+\cos u\vec{r}_1+\sin u\vec{r}_2+v\vec{r}_3$;

44. $\vec{r}=\vec{r}_0+(u+\frac{1}{u})\vec{r}_1+(u-\frac{1}{u})\vec{r}_2+v\vec{r}_3$;

45. $\vec{r}=\vec{r}_0+u\cos v\vec{r}_1+u\sin v\vec{r}_2+u^2\vec{r}_3$.

46. Tekislik elementar sirt ekanligini isbotlang.

Quyidagi figuralar R^3 da sirt bo‘lishini ko‘rsating va ularning parametrlash usulini yozing:

47. Sfera;

48. Ellipsoid;

49. Elliptik parapoloid;

50. Bir pallali giperboloid;

51. Ikki pallali giperboloid;

52. Elliptik silindr;

53. Parabolik silindr;

54. Giperbolik silindr;

55. Uchga ega bo‘lmagan konus.

56. Bizga C^k sinfga tegishli $f:U\to R^2$ funksiya berilgan bo‘lsin (bu yerda U R^2 dagi soha). U holda f funksiyaning grafigi, ya’ni $S=\{(x,y,z)\in R^3\,|(x,y)\in U, z=f(x,y)\}$ to‘plam C^k sinfga tegishli elementar sirt ekanligini va $\vec{r}(u,v)=(u,v,f(u,v))$ esa uning parametrlash usuli ekanligini isbotlang.

57. Ixtiyoriy S sirt o‘zining ixtiyoriy nuqtasi atrofida biror funksiyaning grafigi bo‘lishini isbotlang.

3 §. Egri chiziq urinmasi va normali

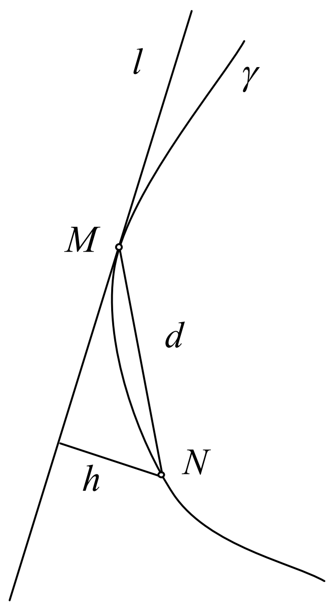
Egri chiziq urinmasi tushunchasi maktab kursida kiritiladi. Birinchi kursda esa xususiy hollar, ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlarga o‘tkazilgan urinma tushunchasi o‘rganiladi.

Differensial geometriya va topologiya fanida avval (chiziqlar nazariyasida) urinmaning umumiyroq, lekin klassik ta’rifi orqali, xossalari o‘rganiladi. Sirtlar nazariyasida esa, urinma tushunchasi urinma vektor orqali aniqlanadi. Keyinchalik bu tushuncha ko‘pxillikning urinma fazosini aniqlash uchun kerakli muhim tushuncha ekanligi amalda ko‘rsatiladi.

Asosiy tushunchalar

Bizga γ elementar egri chiziq va unda biror M nuqta berilgan bo‘lsin. Berilgan chiziqning M nuqtasida o‘tkazilgan urinmasi tushunchasini kiritamiz. Buning uchun M nuqtadan l to‘g‘ri chiziqni o‘tkazaylik, N bilan M ga yaqin bo‘lgan γ chiziqning birorta nuqtasini belgilaylik. Egri chiziqdagi M va N nuqtalar orasidagi masofani d bilan, N nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani h bilan belgilaylik.

3.1-ta’rif. Berilgan γ egri chiziqning N nuqtasi M nuqtasiga intilganda $\frac{h}{d}$ ifoda nolga intilsa, l to‘g‘ri chiziq, γ egri chiziqning M nuqtasida o‘tkazilgan **urinmasi** deyiladi (3-rasm).



3 − rasm

Tasdiq. Regulyar egri chiziq har bir nuqtasida yagona urinmaga ega. Agar γ egri chiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, $M(t_0)$ nuqtadagi urinma $\vec{r}\,'(t_0)$ vektorga parallel bo‘ladi.

Yuqoridagi tasdiqdan foydalanib urinma ta’rifini quyidagicha ifodalash mumkin.

3.2-ta’rif. Regulyar γ egri chiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan aniqlansa, $M(t_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{r}\,'(t_0)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq γ ning $M(t_0)$ nuqtasida o‘tkazilgan ***urinmasi*** deb ataladi.

3.3-ta’rif. Egri chiziqning M nuqtasidan o‘tuvchi va urinmaga perpendikular ravishda o‘tadigan tekislik egri chiziqning M nuqtasidagi normali deb ataladi.

Izoh. Masala tekislikda qaralayotgan bo‘lsa egri chiziqning normali to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi. Regulyar γ egri chiziq $\vec{r}=\vec{r}(t)$ tenglama bilan aniqlansa, uning $M(t_0)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$\vec{\rho}(t)=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}\,'(t_0),\ (\lambda\text{-parametr})$$

normali tenglamasi

$$(\vec{\rho}(t)-\vec{r}(t_0),\vec{r}\,'(t_0))=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Regulyar egri chiziq parametrik tenglamalar yordamida, ya’ni,

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \qquad a<t<b \\ z=z(t) \end{cases}$$

sistema yordamida aniqlangan bo‘lsa, $M(t_0)$ nuqtadan o‘tuvchi urinma tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

normali tenglamasi esa

$$(x-x_0)x'(t_0)+(y-y_0)y'(t_0)+(z-z_0)z'(t_0)=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda $x_0=x(t_0),\quad y_0=y(t_0),\quad z_0=z(t_0)$.

Regulyar egri chiziq $y=y(x),\quad z=z(x)$ tenglamalar yordamida berilsa, uning urinma tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}\ ,$$

normali tenglamasi esa

$$x-x_0+(y-y_0)y'(x_0)+(z-z_0)z'(x_0)=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar fazodagi egri chiziq

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

tenglamalar yordamida aniqlangan va $\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$ matritsaning rangi ikkiga teng bo‘lsa, $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi urinma tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_x \end{vmatrix}}\ ,$$

normali tenglamasi

$$(x-x_0)\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}+(y-y_0)\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_x\end{vmatrix}=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda xususiy hosilalar $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada hisoblangan.

Misol va masalalar yechish namunalari

1-masala. Tekislikda $y = x^2 + 4x + 3$ funksiyaning grafigidan iborat chiziq berilgan bo‘lsin. Chiziqning abssissasi $x = -1$ ga teng bo‘lgan M nuqtadagi urinma va normali tenglamasini tuzing (4-rasm).

Yechish. Avvalo M nuqtaning ordinatasini topamiz: $y_0 = (-1)^2 + 4\cdot(-1) + 3 = 0$. Endi chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 4t + 3, \quad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

ko‘rinishda yozib, $t = -1$ nuqtadagi hosilalarning qiymatlarini hisoblaymiz: $x'(-1) = 1,\ y'(-1) = 2$. Natijada chiziqning urinmasi va normali tenglamalarini mos ravishda ushbu ko‘rinishda

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} \text{ va } \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1}$$

yoza olamiz.

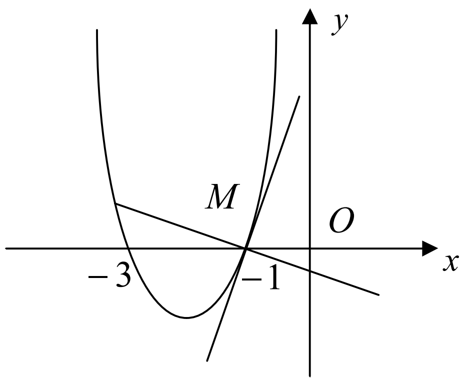
Chiziq tenglamasi vektor ko‘rinishda

$$\vec{r} = \{t;\ t^2 + 4t + 3\}$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa, urinma va normali tenglamalarni vektor ko‘rinishda mos ravishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\vec{\rho} = \{-1;0\} + \{1;2\}\lambda,$$

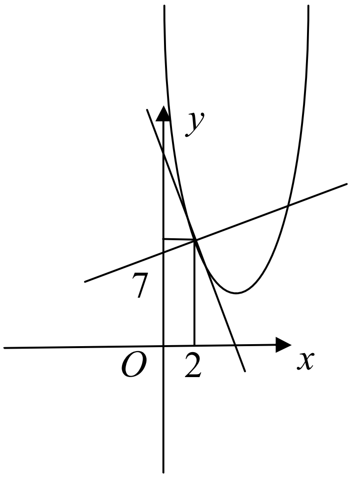
$$\vec{\rho} = \{-1;0\} + \{-2;1\}\lambda.$$



4-rasm

2-masala. Parabola $y = x^2 - 6x + 15$ funksiyaning grafigidan iborat bo‘lsa, uning qaysi nuqtalaridagi urinmalari $x - 2y + 18 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi.

Yechish. Parabolaning $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tenglamasi ushbu $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2x_0-6}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadan $2(x_0-3)x - y - 2(x_0-3)x_0 + y_0 = 0$ tenglikni, to‘g‘ri chiziqlarning perpendikular ekanligidan esa $1\cdot 2(x_0-3) - 2(-1) = 0$ shartni hosil qilamiz. Bundan $x_0 = 2$ qiymatni topamiz. Endi izlanayotgan nuqtaning ordinatasini aniqlaymiz: $y_0 = 2^2 - 6\cdot 2 + 15 = 7$.



5-rasm

Demak, (2; 7) nuqtada o‘tkazilgan urinma berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lar ekan. Haqiqatan ham, bu nuqtada o‘tkazilgan urinma tenglamasi $2x+y-11=0$ ko‘rinishda bo‘lib, u berilgan $x-2y+18=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi (5-rasm).

3-masala. Chiziq $x=e^t, y=e^{-t}, z=t^2$ parametrik tenglamalarga ega bo‘lsa, parametrning $t=1$ qiymatiga mos keluvchi nuqtada o‘tkazilgan urinma va normal tekislik tenglamalarini tuzing.

Yechish. Berilganlardan foydalanib, parametrning $t=1$ qiymatiga mos keluvchi chiziq nuqtasi va urinma vektorining koordinatalarini aniqlaymiz:

$x_0=e^1=e$, $y_0=e^{-1}=\frac{1}{e}$, $z=1$; $x_0'=e^1=e,\ y_0'=-e^{-1}=-\frac{1}{e},\quad z_0'=2.$

Endi, berilgan chiziqning urinmasi va normali tenglamalarini mos ravishda quyidagicha yozamiz:

$$\frac{x-e}{e}=\frac{y-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}=\frac{z-1}{2},\quad e(x-e)-\tfrac{1}{e}(y-\tfrac{1}{e})+2(z-1)=0\,.$$

Misol va masalalar

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlarning ko‘rsatilgan nuqtalarda urinma va normallarini toping:

1. $y=x^2+4x+3$, abssissasi -1, 0, 1 bo‘lgan A,B,C nuqtalarda;

2. $y=x^2$, abssissasi 0, 1 bo‘lgan A,B nuqtalarda;

3. $y=\sin x$, abssissasi $0,\frac{\pi}{2},\pi$ bo‘lgan nuqtalarda;

4. $y=tgx$, abssissasi 0, $\frac{\pi}{4}$ bo‘lgan nuqtalarda;

5. $x=t^3-2t,\ y=t^2+1,\ A(t=1)$ nuqtada;

6. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ ixtiyoriy nuqtasida;

7. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ ixtiyoriy nuqtasida;

8. $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ ixtiyoriy nuqtasida;

9. $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ y=\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ ixtiyoriy nuqtasida;

10. $x^3+y^3-3axy=0$, $A\left(\frac{3a}{2};\frac{3a}{2}\right)$ nuqtada;

11. $(x^2+y^2)x-ay^2=0$, $A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ nuqtada;

12. $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=C$, ixtiyoriy nuqtasida;

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ixtiyoriy nuqtasida;

14. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ixtiyoriy nuqtasida;

15. $y^2=2px$, ixtiyoriy nuqtasida;

16. $r=a\varphi$, ixtiyoriy nuqtasida;

17. $r=2a\cos\varphi$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ bo‘lgan A nuqtada.

18. Ushbu $y=x^2$ parabolaga qaysi nuqtada o‘kazilgan urinma Ox o‘qi bilan 45^0 li burchak tashkil etadi?

19. Biror nuqtada $y=x^3$ tenglama bilan berilgan chiziqqa o‘kazilgan urinma Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan $\frac{3\pi}{4}$ li burchak tashkil etishi mumkinmi?

20. Ixtiyoriy nuqtada $y=x^5+2x^3+x-1$ tenglama bilan berilgan chiziqqa o‘kazilgan urinmaning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$oraliqda bo‘lishini isbotlang.

21. $y=x^2$ parabolaning $y=4x-5$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan urinmasini toping.

22. Ushbu $y=x^2-6x+5$ tenglama bilan berilgan parabolaga qaysi nuqtada o‘kazilgan urinma $x-2y+8=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi?

23. Ushbu $y=x^2+bx+c$ parabola abssissasi $x=2$ bo‘lgan nuqtada $y=3x-5$ to‘g‘ri chiziqqa urinishi ma’lum bo‘lsa, b va c o‘zgarmas sonlarni toping.

24. Ushbu $y=ax^2+bx+c$ parabola abssissasi $x=1$ bo‘lgan nuqtada $y=4x-1$ to‘g‘ri chiziqqa urinishi va $A(0;1)$ nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘lsa, a, b, c o‘zgarmas sonlarni toping.

25. Ushbu $y=x^3+3x^2-1$ tenglama bilan berilgan chiziqqa uning $y=3x^2$ parabola bilan kesishish nuqtasida o‘tkazilgan urinma va normali tenglamalarini yozing.

26. Ushbu $y=\frac{1}{1+x^2}$ tenglama bilan berilgan chiziqqa uning

$y=\dfrac{1}{1+x}$ giperbola bilan kesishish nuqtasida o‘tkazilgan urinmasi tenglamasini yozing.

27. Abssissalari teng (nolga teng emas) bo‘lgan qanday nuqtalarda $y=x^2, y=x^3$ chiziqlarga o‘tkazilgan urinmalar parallel bo‘ladi?

28. Berilgan $y=x^n$ (n-musbat butun son) chiziqning faqat bitta normali koordinata boshidan o‘tishini ko‘rsating.

29. Ushbu $x=t^2-1, y=t^3+1$ tenglama bilan berilgan chiziqning $2x-y+3=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan urinmasini toping.

30. Ushbu $x=t^3, y=t^2$ tenglama bilan berilgan chiziqning $M(-7,-1)$ nuqtadan o‘tadigan urinmalarini toping.

31. Ushbu $y=a\sin\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $y=atg\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $y=a\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)$ tenglamalar bilan berilgan chiziqlar Ox o‘qini a ga bog‘liq bo‘lmagan burchak ostida kesib o‘tishini isbotlang.

32. Berilgan $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ astroidaning koordinata boshidan eng uzoq masofada joylashgan urinmalari tenglamalari tuzilsin.

33. Berilgan $x^2-y^2=a^2$ giperbola ixtiyoriy N nuqtasida o‘tkazilgan normalining Ox o‘qi bilan kesishgan nuqtasi K ekanligi ma’lum bo‘lsa, $KN=ON$ tenglikni isbotlang.

34. Yassi chiziqning hamma normallari qo‘zg‘almas nuqtadan o‘tsa bu chiziqning aylana yoki uning qismi ekanligini isbotlang.

35. Aylana evolventasi $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$ (2-bob 1-§ 43-masalaga qarang) ning hamma normallari koordinata boshidan bir xil uzoqlikda joylashganligini isbotlang.

Quyidagi chiziqlarning kesishish nuqtalarining koordinatalarini va orasidagi burchaklarini toping:

36. $y^2=4x, x^2=4y$;

37. $x^2+y^2=9, x^2+y^2-6x=9$;

38. $x^2+y^2+2x=7,\ y^2=4x$;

39. $x^2+y^2=8, y^2=2x$;

40. $x^2+y^2=8x,\ y^2(2-x)=x^3$;

41. $y=\sin x, y=\cos x$.

Quyidagi chiziqlarning to‘g‘ri burchak ostida kesishishini isbotlang:

42. $y=x-x^2,\ y=x^2-x$;

43. $y^2=2ax+a^2,\ y^2=-2bx+b^2$;

44. $x^2-y^2=a, xy=b$.

45. Simmetriya o‘qlari umumiy bo‘lib, birining uchi ikkinchisining fokusida joylashgan parabolalar orasidagi burchak topilsin.

46. Ushbu $r = r(\varphi)$ tenglama bilan berilgan chiziqqa o‘tkazilgan urinma va urinish nuqtasining radius vektori orasidagi burchak tangensi $tg\mu = \dfrac{r}{\dfrac{dr}{d\varphi}}$ formula yordamida aniqlanishini isbotlang.

47. Kardioidaning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urinma va urinish nuqtasining radius vektori orasidagi burchagi qutb burchagining yarmiga tengligini isbotlang.

48. Ushbu $y = 2a(1-\cos\varphi)$ kardioidaning qutbdan o‘tuvchi vatarlari uchlarida o‘tkazilgan urinmalari o‘zaro perpendikularligini isbotlang.

49. Arximed spirali $r = a\varphi$ ga o‘tkazilgan urinma va urinish nuqtasining radius vektori orasidagi burchagi $\varphi \to \infty$ bo‘lganda 90^0 ga intilishini isbotlang.

50. Logarifmik spiral $r = ca^{\varphi}, a > 0$ ning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urinma va urinish nuqtasining radius vektori orasidagi burchak μ o‘zgarmas ekanligini isbotlang.

51. Faqat aylanalar va logarifmik spirallar 50- masaladagi xossaga ega ekanligini isbotlang.

52. Bernulli lekniskatasi $r^2 = 2a^2\cos\varphi$ ning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urinma va urinish nuqtasining radius vektori orasidagi burchak $2\varphi + \dfrac{\pi}{2}$ ga teng ekanligini isbotlang. Bunda φ urinish nuqtasining qutb burchagi.

53. Qutb koordinatalar sistemasida ikkita $r = r(\varphi)$ va $r_1 = r_1(\varphi)$ chiziqlar berilgan. Agar $rr_1 + r'r_1' = 0$ shart o‘rinli bo‘lsa, berilgan chiziqlar to‘g‘ri burchak ostida kesishishini isbotlang.

Quyidagi chiziqlar to‘g‘ri burchak ostida kesishishini isbotlang:

54. $r = ae^{\varphi}, r = be^{-\varphi}$;

55. $r = a(1+\cos\varphi),\ r = a(1-\cos\varphi)$;

56. $r = a\sec^2\dfrac{\varphi}{2},\ r = a\operatorname{cosec}^2\dfrac{\varphi}{2}$.

57. Berilgan $y = y(x)$ chiziqning M nuqtada o‘tkazilgan urinmasi Ox o‘qini T nuqtada, normali esa N nuqtada kesib o‘tishi hamda M nuqtaning Ox o‘qidagi proyeksiyasi P ekanligi ma’lum. U holda, quyidagi tengliklarni isbotlang:

$MT = \left|\dfrac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},\ MN = |y|\sqrt{1+y'^2},\ PT = \left|\dfrac{y}{y'}\right|,\ PN = |y'|$. Bu yerda MT urinmaning, MN normalning, PT urinma ostining va PN normal ostining uzunliklari.

Quyidagi chiziqlarning urinmasi, normali, urinma osti, normal osti uzunliklari topilsin:

58. $y = tgx$, abssissasi $\frac{\pi}{4}$ bo‘lgan M nuqtada;

59. $y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$, ixtiyoriy nuqtada.

60. Normal ostisining uzunligi o‘zgarmas k ga teng bo‘lgan chiziqlar topilsin.

61. Urinma ostisining uzunligi o‘zgarmas k ga teng bo‘lgan chiziqlar topilsin.

62. Normalining uzunligi o‘zgarmas bo‘lgan yagona chiziq markazi Ox o‘qida yotgan aylana ekanligi isbotlansin.

63. Urinmasining uzunligi o‘zgarmas a ga teng bo‘lgan chiziqlar topilsin.

64. Traktrisa va Ox o‘qi bilan chegaralangan yuza chekliligini isbotlang.

Quyidagi chiziqlarning koordinata boshidagi urinish tartibi aniqlansin:

65. $y = \sin x, y = tgx;$

66. $y = x\sin x, y = x^{3};$

67. $y = \sin x, y = x^{4} - \frac{1}{6}x^{3} + x.$

68. Quyidagi chiziqlarning $A(1;1)$ nuqtadagi urinish tartibi aniqlansin: $x^{2} + y^{2} - 6x - 6y + 10 = 0$ va $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$.

69. Berilgan $x^{2} + y^{2} = 2$ aylana bilan $M(1;1)$ nuqta ikkinchi tartibli urinishga ega $y = x^{2} + ax + b$ parabola aniqlansin.

70. Koordinata boshida $y = x^{2}$ parabola bilan ikkinchi tartibli urinishga ega aylana tenglamasi tuzilsin.

71. Berilgan $y = \ln x$ tenglama yordamida aniqlangan chiziq bilan (1;0) nuqtada eng yuqori tartibli urinishga ega bo‘lgan parabola tenglamasi tuzilsin.

72. Uchi bilan $y = 1 - \cos x$ tenglama yordamida aniqlangan chiziqqa (0;0) nuqtada eng yuqori tartibli urinishga ega bo‘lgan giperbola tenglamasi tuzilsin.

73. Berilgan $y = f(x)$ tenglama yordamida aniqlangan chiziqqa $A(0, f(0))$ nuqtada n- tartibli urinishga ega bo‘lgan $y = a_{0} + a_{1}x + ...a_{n}x^{n}$ chiziq topilsin.

74. Uchlari $x = R(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t)$ sikloidaning uchi $A(\pi R, 2R)$ bilan ustma-ust tushuvchi hamda u bilan eng yuqori tartibli urinishga ega bo‘lgan ellips, parabola, giperbola tenglamalari tuzilsin.

4 §. Asimptotalar. Maxsus nuqtalar. Chiziqlarni tekshirish va yasash. O‘rama

Differensial geometriyada o‘rganiladigan chiziqlar ichida bir tomonlama yoki ikki tomonlama cheksizlikka ketadigan chiziqlar tushunchasi kiritiladi. Bunday chiziqlarning cheksizlikka ketadigan shoxlari biror to‘g‘ri chiziqqa yaqinlashishi mumkin. Yuqoridagi xossaga ega bo‘lgan chiziqlarni yasash uchun, ularga shoxlari cheksizlikka intilganda yaqinlashadigan to‘g‘ri chiziqlarni (asimptotalarni) bilish zarur bo‘ladi. Shuning uchun chiziq asimptotalarini o‘rganish muhim hisoblanadi.

O‘rama tushunchasi nafaqat differensial geometriyada, balki differensial tenglamalarda ham asosiy o‘rin egallaydi.

Asosiy tushunchalar

Bizga biror γ yopiq bo‘lmagan egri chiziq o‘zining biror parametrlash usuli $x = x(t),\ y = y(t)\ \ (a < t < b)$ bilan berilgan bo‘lsin.

4.1- ta’rif. Berilgan chiziqning parametri t uchun ushbu $t \to a$ yoki $t \to b$ munosabatlardan faqat bittasi o‘rinli ekanligidan $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ munosabat kelib chiqsa, u holda berilgan chiziq bir tomonlama cheksizlikka intiladi deyiladi. Agar berilgan chiziqning parametri t uchun ushbu $t \to a$, $t \to b$ munosabatlar birdaniga o‘rinli bo‘lganda $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ munosabat bajarilsa, berilgan chiziq ikki tomonlama cheksizlikka intiladi deyiladi.

4.2- ta’rif. Berilgan γ egri chiziq parametrining t qiymatiga mos keluvchi $M(t)$ nuqtasidan biror l to‘g‘ri chiziqqacha masofani $d(t)$ kabi belgilaylik. Agar γ egri chiziqning parametri t uchun $t \to a$ munosabatdan ushbu $d(t) \to 0$ munosabat kelib chiqsa, u holda l to‘g‘ri chiziq γ egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

1-Tasdiq. Biror parametrlash usuli $x = x(t),\ y = y(t)\ \ (a < t < b)$ bilan berilgan va $t \to a$ da cheksizlikka intiluvchi γ egri chiziq asimptotaga ega bo‘lishi uchun, parametr $t \to a$ da

1) ushbu munosabatlardan biri $y(t)(x(t))^{-1}$, $x(t)(y(t))^{-1}$ chekli limitga ega bo‘lishi, aniqlik uchun $y(t)(x(t))^{-1} \to k$ munosabat o‘rinli bo‘lishi:

2) birinchi shart bajarilganda ushbu $y(t) - kx(t)$ ifodaning biror limitga intilishi zarur va yetarli. Agar bu limitni l deb belgilasak, u holda $y - kx - l = 0$ tenglama asimptota tenglamasi bo‘ladi.

Endi ordinata o‘qiga parallel asimptotani qidiramiz. Berilgan chiziqning Oy o‘qiga parallel asimptotasi mavjud deb faraz qilamiz. Chiziqning M nuqtasi cheksizlikka intilganda, $y(t) = \infty$ bo‘lib, $x(t)$ qandaydir bir o‘zgarmas

a songa intiladi. Bu a sonini $\lim_{t\to t_0} x(t) = x(t_0) = a$ munosabatdan topamiz. U holda Oy o‘qiga parallel asimptotaning tenglamasi $x - a = 0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash, chiziqning Ox o‘qiga parallel asimptotasini hosil qilish uchun, chiziqning M nuqtasi cheksizlikka intilganda, $x(t) = \infty$ bo‘lib, $y(t)$ qandaydir bir o‘zgarmas b songa intiladi. Bu b sonini $\lim_{t\to t_0} y(t) = y(t_0) = b$ munosabatdan topamiz. U holda izlangan asimptotaning tenglamasi $y - b = 0$ bo‘ladi.

2-Tasdiq. Berilgan chiziq bir (ikki) tomonlama cheksizlikka intilganda uning urinmasining limiti mavjud bo‘lsa, bu limit (limitlar) chiziq asimptotasi (asimptotalari) deyiladi.

Teskarisi har doim ham o‘rinli bo‘lavermaydi, ya’ni chiziq asimptotasi mavjud bo‘lib, u urinmaning limiti bo‘lmasligi mumkin. Masalan, $y = \frac{\cos x^2}{x}$ funksiya grafigidan iborat chiziq $x \to \infty$ da Ox o‘qidan iborat asimptotaga ega, lekin bu chiziq urinmasining burchak koeffitsiyenti $y' = -2\sin x^2 - \frac{\cos x^2}{x^2}$ esa $x \to \infty$ da hech qanday limitga intilmaydi. Chunki $\frac{\cos x^2}{x^2} \to 0$ bo‘lsa-da, $\sin x^2$ ning limiti yo‘q, u $x \to \infty$ da -1 va 1 sonlari orasida tebranib turadi.

Matematik analiz kursidan $y = f(x)$ ko‘rinishidagi funksiya grafigini yasash usuli ma’lum. Endi biz $F(x;y) = 0$ ko‘rinishidagi tenglama bilan berilgan chiziqlarni yasash usulini keltiramiz.

Biror tenglama bilan berilgan chiziqni yasash uchun uning:

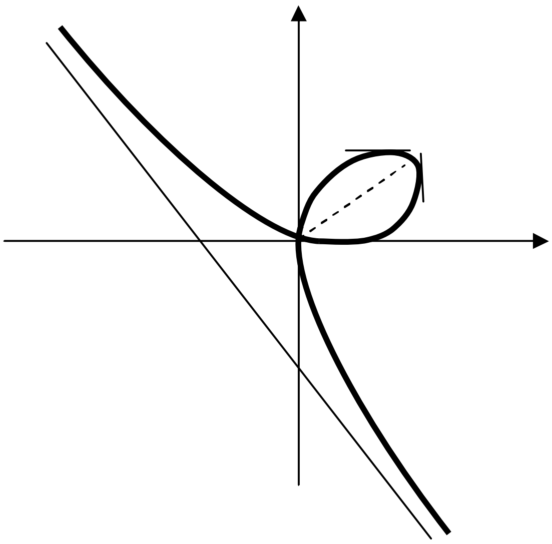
1) aniqlanish sohasini;
2) koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini;
3) koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrikligini;
4) koordinata o‘qlariga parallel urinmalarini;
5) maxsus nuqtalarini;
6) egilish nuqtalarini;
7) qavariq va botiqligini;
8) asimptotalarini;
9) mumkin bo‘lgan hollarda bir nechta yordamchi nuqtalarni topish kerak.

4.3- ta’rif. Bizga bir (ikki) parametrli chiziqlar oilasi berilgan bo‘lsin, ya’ni chiziq tenglamasida bitta (ikkita) parametr qatnashsin. Ba’zan bunday oila uchun o‘zining har bir nuqtasida oila chizig‘iga urinadigan va shu urinish nuqtalaridan tashkil topgan chiziq mavjud bo‘ladi. Bunday chiziq berilgan oila uchun *o‘rama* deyiladi.

Misol va masalalar yechish namunalari

1-masala. Ushbu $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{t^3+1} \\ y=\dfrac{3at^2}{t^3+1} \end{cases}$ tenglamalar sistemasi bilan berilgan chiziq (Dekart yaprog'i) ning asimptotalari topilsin.

Yechish. Sistemaga tegishli tenglamalardan ko'rinib turibdiki, parametrning $t=-1$ qiymatida funksiyalar aniqlanmagan, ya'ni sistemadagi funksiyalarning maxrajlari nolga aylanadi, lekin suratlari chekli bo'ladi. Shuning uchun funksiyalar parametrning bu qiymatida cheksizlikka intiladi. Demak, parametrning qiymati -1 ga intilganda chiziq asimptotaga ega bo'ladi.



6-rasm

Endi $t\to-1$ uchun asimptotaning k burchak koeffitsiyenti va l ozod hadini topamiz:

$$k=\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to-1}\frac{\frac{3at^2}{t^3+1}}{\frac{3at}{t^3+1}}=\lim_{t\to-1}t=-1,\ k=-1$$

$$l=\lim_{t\to t_0}\left[y(t)-kx(t)\right]=\lim_{t\to-1}\left[\frac{3at^2+3at}{t^3+1}\right]=\lim_{t\to-1}\left[\frac{3at(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}\right]=$$

$$=\lim_{t\to-1}\left[\frac{3at}{t^2-t+1}\right]=-a;\quad l=-a.$$

Yuqorida topilganlarni e'tiborga olib, asimptota tenglamasi $x+y+a=0$ ko'rinishda ekanligini aniqladik.

Berilgan chiziqning Oy va Ox o'qlariga parallel asimptotalari yo'qligi ravshan (6-rasm).

2- masala. Ushbu $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$ chiziqning asimptotalari topilsin.

Yechish. Berilgan chiziqning tenglamasidan ko‘rinib turibdiki, $t = 1$ qiymatda $x = -1$ va $y = \infty$ qiymatlarga ega bo‘lamiz. Demak, $x + 1 = 0$ to‘g‘ri chiziq berilgan chiziqning Oy o‘qiga parallel asimptotasidir.
Bu chiziqning Ox o‘qiga parallel asimptotasi mavjud emas.

Endi, berilgan chiziqning koordinata o‘qlariga parallel bo‘lmagan asimptotasini topamiz. Parametrning $t = \infty$ qiymatiga $x = \infty$ va $y = \infty$ qiymatlar mos keladi. Demak, $t_0 = \infty$ ekan. Asimptotaning burchak koeffitsiyentini topamiz:

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2}{(t-2)(t-1)} = 1, \ k = 1$$

$$l = \lim_{t \to t_0} [y(t) - kx(t)] = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{t^2}{t-1} - t + 2 \right] = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{3t-2}{t-1} \right] = 3; \quad l = 3.$$

Shunday qilib, izlangan asimptotaning tenglamasi $y = x + 3$ yoki $y - x - 3 = 0$ tenglamadan iborat ekan.

3- masala. Ushbu $x^4 - x^2 y + y^3 = 0$ tenglama bilan berilgan chiziq yasalsin.

Yechish. Biror tenglama bilan berilgan chiziqni yasash uchun uning:

1) Tenglama aniqlanish sohasi $x \in R$ dan iborat.

2) Koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz. Buning uchun $y = 0$ qiymatda $x^4 = 0$, so‘ngra $x = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Endi $x = 0$ desak $y = 0$ ekaniga ega bo‘lamiz. Demak, berilgan chiziqning koordinata o‘qlari bilan koordinata boshida kesishadi.

3) Koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrikligini tekshiramiz. Biz $F(x, y) = x^4 - x^2 y + y^3$ tenglamadan ushbu $F(-x, y) = (-x)^4 - (-x)^2 y + y^3 = x^4 - x^2 y + y^3 = F(x, y)$ munosabatni hosil qilamiz. Bu esa berilgan chiziqning Oy o‘qiga nisbatan simmetrikligini bildiradi. Lekin $F(x, -y) = x^4 - x^2(-y) + (-y)^3 = x^4 + x^2 y - y^3 \neq F(x, y)$ bu munosabatdan berilgan chiziqning Ox o‘qiga nisbatan simmetrik emasligi kelib chiqadi.

4) Koordinata o‘qlariga parallel urinmalarini aniqlaymiz. Buning uchun $\begin{cases} F_x'(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ sistemani yechib, bunday nuqtalar sifatida $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4}\right)$ va $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4}\right)$ nuqtalarni hosil qilamiz.

Quyidagi sistemani $\begin{cases} F'_y(x,y)=0 \\ F(x,y)=0 \end{cases}$ yechish bilan esa urinmalar Oy o‘qiga parallel bo‘lgan $M_3\left(\frac{2\sqrt{3}}{9};\ \frac{2}{9}\right)$ va $M_4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};\ \frac{2}{9}\right)$ nuqtalarga ega bo‘lamiz.

5) Endi berilgan chiziqning maxsus nuqtalarini qidiramiz. Maxsus nuqtalarni topish uchun $\begin{cases} F'_y(x,y)=0 \\ F'_x(x,y)=0 \end{cases}$ sistemani yechamiz. Sistemaning yechimlari (0;0), $\left(\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{6}\right)$ va $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{6}\right)$ ekanligiga osongina ishonch hosil qilish mumkin. Endi bu topilgan nuqtalarning berilgan chiziqda yotishini tekshiramiz. Topilgan nuqtalarning koordinatalarini $F(x,y)=0$ tenglamaga qo‘yamiz. Natijada, faqat (0;0) nuqta chiziqda yotishi kelib chiqadi. Shuning uchun, faqat (0;0) nuqta chiziqning maxsus nuqtasi bo‘ladi. Berilgan chiziqning maxsus nuqtasini tekshirish uchun funksiyaning yuqori tartibli hosilslarini hisoblaymiz:

$$F''_{xx}=12x^2-2y=0,\ F''_{xy}=-2x=0,\ F''_{yy}=6y=0.$$

$$F'''_{xxx}=24x=0,\ F'''_{xxy}=-2,\ F'''_{xyy}=0,\ F'''_{yyy}=6.$$

$$F'_x+F'_y y'=0,\ F''_{xx}+2F''_{xy}y'+F''_{yy}y'^2+F'_y y''=0.\ (*)$$

Maxsus nuqtada ushbu $F''_{xx}=F''_{xy}=F''_{yy}=F'_y=0$ munosabat o‘rinli bo‘lganidan oxirgi tenglama, ya’ni (*) tenglama ayniyatdir. Shu sababli (*) tenglamadan olingan hosila ham nolga teng bo‘ladi:

$$F'''_{xxx}+3F'''_{xxy}y'+3F'''_{xyy}y'^2+2F''_{xx}y''+F'''_{yyy}y'^2+2F''_{xy}y''^2+2F''_{yy}y'y''+$$
$$+2F''_{xy}y''+F''_{yy}y'y''+F'_y y'''=0.$$

Bu tenglikka tegishli hosila qiymatlarini qo‘ygandan so‘ng $-2\cdot 3y'+6y'^2=0$ yoki $y'^3-y'=0$ tenglikka ega bo‘lamiz. Natijada, $y'=0, y'=1,\ y'=-1$ munosabatlarni hosil qilamiz. Demak, maxsus nuqtadan chiziqning uchta shoxchasi o‘tadi. Ushbu $y'=0, y'=1,\ y'=-1$ differensial tenglamalarni integrallab, maxsus nuqtadagi chiziq urinmalarining tenglamalari $y=0$, $y=x$, $y=-x$ hosil bo‘ladi.

6) Endi berilgan chiziqning egilish nuqtalarini topamiz. Buning uchun

ushbu $\begin{cases} F(x;y)=0 \\ \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechish kerak bo‘ladi. Bu sistemani:

$$\begin{cases} x^4-x^2y+y^3=0 \\ \begin{vmatrix} 12x^2-24 & -2x & F'_x \\ -2x & 6y & F'_y \\ 4x^3-2xy & -x^2+3y^2 & 0 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

yoki $\begin{cases} x^4-x^2y+y^3=0 \\ 4x^6(1-2yx^2)+6x^4y(15+4y)+12x^3y^3(1-9y)-18y^6=0 \end{cases}$

ko‘rinishda yozib, sistema faqat $x=0,\ y=0$ yechimga egaligini ko‘ramiz. Ammo maxsus nuqtada $F'_x(0;0)=F'_y(0;0)=0$ tenglik o‘rinli. Shuning uchun bu nuqta berilgan chiziqning egilish nuqtasi bo‘lmaydi.

Demak, yasash kerak bo‘lgan chiziqning egilish nuqtasi mavjud emas.

7) Endi chiziqning botiqligini va qavariqligini tekshiramiz. Buning uchun $\begin{cases} F(x;y)=0 \\ \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}\cdot F'_y>0 \end{cases}$ sistemani yechamiz. So‘ngra topilgan tayanch nuqtalarni hisobga olib, to‘g‘ri chiziqni bir nechta intervallarga ajratamiz:

1) $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$; 2) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};0\right)$; 3) $\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$; 4) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{9};\infty\right)$

Har bir oraliqdan nuqta olib $F(x,y)=x^4-x^2y+y^3=0$ tenglamaga qo‘yamiz va uning ordinatasini topamiz. Topilgan koordinatalarni

$$y''=\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{F'^{\,3}_y} \qquad (**)$$

determinantga qo‘yamiz.

Masalan, $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ oraliqdan $x=-\sqrt{2}$ qiymatni olsak, $y=-2$ qiymat hosil bo‘ladi. Bu qiymatlarni (**) ga qo‘yamiz, ya’ni

$$y'' = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx}(-\sqrt{2};-2) & F''_{xy}(-\sqrt{2};-2) & F'_x(-\sqrt{2};-2) \\ F''_{xy}(-\sqrt{2};-2) & F''_{yy}(-\sqrt{2};-2) & F'_y(-\sqrt{2};-2) \\ F'_x(-\sqrt{2};-2) & F'_y(-\sqrt{2};-2) & 0 \end{vmatrix}}{F'^3_y(-\sqrt{2};-2)} = \frac{\begin{vmatrix} 28 & -2\sqrt{2} & -12\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -12 & 10 \\ -12\sqrt{2} & 10 & 0 \end{vmatrix}}{10^3} < 0$$

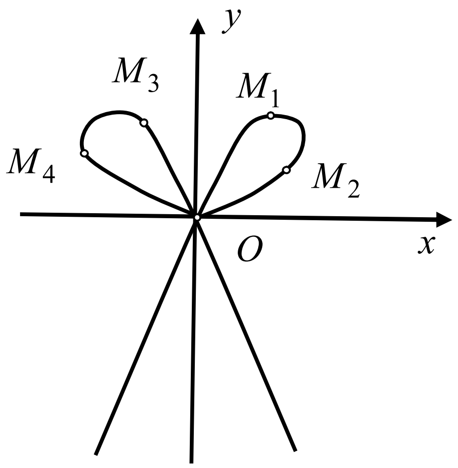
ekanligini hosil qilamiz. Demak, $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ oraliqda chiziqning botiqligi pastga yo‘nalgan. Berilgan chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrikligidan $\left(\frac{2\sqrt{3}}{9};\infty\right)$ oraliqda ham chiziqning botiqligi pastga yo‘nalgan bo‘ladi.

Endi, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};0\right)$ oraliqdan $x=-0,333$ qiymatni olsak, uchinchi darajali tenglamani yechib, y uchun uchta haqiqiy qiymat kelib chiqadi. Bu qiymatlarni taxminan $y_1 \approx 1,93$, $y_2 \approx 2,361$, $y_3 \approx 0,438$ larga teng deb oilsh mumkin. Natijada, chiziqning ushbu $M_5(-0,333;2,361)$, $M_6(-0,333;0,438)$, $M_7(-0,333;1,93)$ nuqtalarini hosil qilamiz. Topilgan qiymatlarni navbatma-navbat (**) ga qo‘yamiz va $M_5(-0,333;2,361)$ nuqta uchun $y''<0$ ekanligini hosil qilamiz.

Demak, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};0\right)$ oraliqda chiziqning $M_5(-0,333;2,361)$ nuqtadan o‘tadigan shoxining botiqligi pastga yo‘nalgan bo‘ladi. Keyingi topilgan nuqta $M_6(-0,333;0,438)$ uchun $y''>0$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};0\right)$ oraliqda chiziqning $M_6(-0,333;0,438)$ nuqtadan o‘tadigan shoxining botiqligi yuqoriga yo‘nalgan bo‘ladi. Va nihoyat $M_7(-0,333;1,93)$ nuqta uchun $y''<0$ ekanligini hosil qilamiz. Demak, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};0\right)$ oraliqda chiziqning $M_7(-0,333;1,93)$ nuqtadan o‘tadigan shoxining botiqligi pastga yo‘nalgan bo‘ladi. Berilgan chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrikligidan $\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ oraliqda ham xuddi shunga o‘xshash natijalarga kelamiz. Ya’ni, $\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ oraliqda chiziqning $M_8(0,333;2,361)$ va $M_{10}(0,333;1,93)$ nuqtalardan o‘tadigan shoxlarining botiqligi pastga yo‘nalgan, $M_9(0,333;0,438)$ nuqtadan o‘tadigan shoxining botiqligi yuqoriga yo‘nalgan bo‘ladi.

8) Berilgan chiziqning asimptotalarini topaylik. Bu chiziqning koordinata o‘qlariga parallel asimptotalari yo‘qligini osongina isbotlash mumkin. Buning uchun x va y o‘zgaruvchilarni navbat bilan cheksizlikka intilgandagi vaziyatini tekshirishimiz kerak. Agar x cheksizlikka intilsa, y ham chesizlikka intiladi va

aksincha, ya’ni $x \to \infty$ munosabatdan $y \to \infty$ munosabat va $y \to \infty$ munosabatdan $x \to \infty$ munosabat kelib chiqadi. Endi koordinata o‘qlariga parallel bo‘lmagan asimptotalarini izlaymiz. Buning uchun berilgan chiziq tenglamasining ifodasidagi y o‘zgaruvchi o‘rniga $y = kx + b$ qo‘yib, x^4 oldidagi koeffitsiyent k ga bog‘liq emasligini, bu esa berilgan chiziqning koordinata o‘qlariga parallel bo‘lmagan asimptotalari yo‘qligini bildiradi (7-rasm).



7 – rasm

3-masala. Ushbu $y = C^2(x - C)^2$ tenglama bilan berilgan chiziqlar oilasining o‘ramasi topilsin.

Yechish. Ushbu masalani yechish uchun o‘rama mavjud va u $\begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C) \end{cases}$ tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi deb faraz qilaylik. Berilgan chiziq tenglamasining o‘ng tomonidagi ifodani uning chap tomoniga o‘tkazib, $y - C^2(x - C)^2 = 0$ tenglikni, o‘rama chiziqning har bir nuqtasidan o‘tgani uchun $F(x(C); y(C); C) = y(C) - C^2(x(C) - C)^2 = 0$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatni C bo‘yicha to‘liq differensiallaymiz:
$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dC} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dC} + \frac{\partial F}{\partial C} = 0$ yoki $F'_x x'_C + F'_y y'_C + F'_C = 0$ tengliklarga ega bo‘lamiz.

O‘rama ta’rifiga ko‘ra, oila chizig‘i va o‘rama bir-biriga urinadi. Ravshanki, ularning umumiy nuqtalaridagi urinmalari ustma-ust tushadi. Shuning uchun $F'_x x'_C + F'_y y'_C = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa $F'_C = 0$ shart kelib chiqadi. Demak, maxsus nuqtaga ega bo‘lmagan chiziqlar oilasining o‘ramasi ushbu

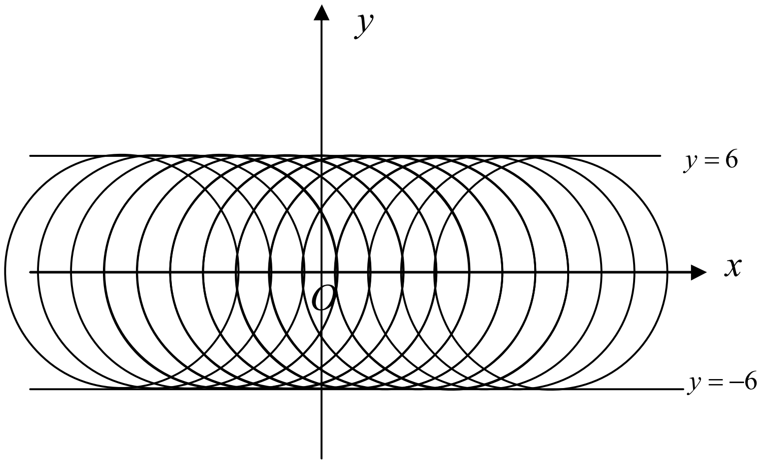
$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ F_C^{э}(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

sistema orqali ifodalanadi.

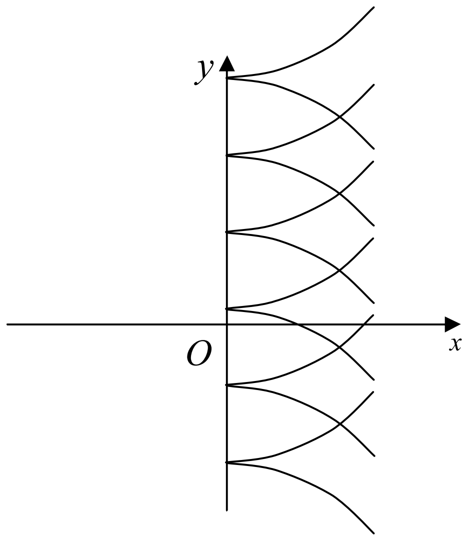
Berilgan chiziqlar oilasining o‘ramasini topish uchun

$$\begin{cases} y - C^2(x-C)^2 = 0 \\ C(x-C)(x-2C) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak ekan.



8-rasm



9-rasm

Shunday qilib, parabolalar oilasining o‘ramasi $y = 0,\ 16y - x^4 = 0$ chiziqlardan iboratligini hosil qildik.

4-masala. Ushbu $(x-C)^2 + y^2 = 36$ tenglama bilan berilgan aylanalar oilasining o‘ramasi topilsin.

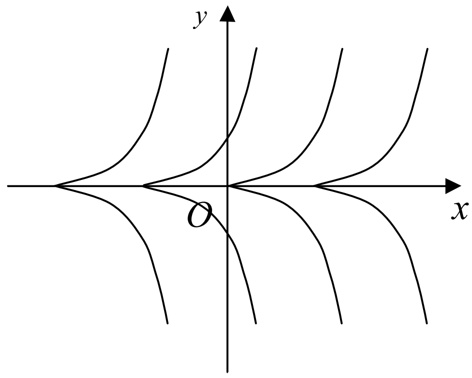
Yechish. Berilgan tenglamadan C bo‘yicha hosila olib, hosil bo‘lgan tenglamani $(x-C)^2 + y^2 = 36$ tenglama bilan birgalikda yechib, $y = \pm 6$ tenglikni olamiz. Demak, aylanalar oilasining diskriminant chizig‘i $y = \pm 6$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat ekan. Bu diskriminant chiziq berilgan aylanalar oilasining o‘ramasi bo‘ladi (8-rasm).

5-masala. Ushbu $(y-C)^2 - x^3 = 0$ yarim kubik parabolalar oilasining o‘ramasi topilsin.

Yechish. Bu oilaning o‘ramasini topish uchun ta’rifga ko‘ra berilgan oila tenglamasidan C parametr bo‘yicha hosila olamiz va oila tenglamasi bilan birgalikda yechib $x = 0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini hosil qilamiz. Bu chiziq berilgan oilaning o‘ramasini bermaydi. Chunki, $x = 0$ to‘g‘ri chiziq oila maxsus nuqtalaridan tashkil topgan (9-rasm).

6-masala. Ushbu $(x-C)^3 - y^2 = 0$ tenglama bilan berilgan parabolalar oilasining o‘ramasi topilsin.

Yechish. Ravshanki, berilgan oilaning diskriminant chizig‘i $y = 0$ to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziq nuqtalari berilgan oilaning maxsus nuqtalaridan iborat bo‘lganligi uchun bu chiziq oilaning o‘ramasi bo‘lolmaydi (10-rasm).



10-rasm

Misol va masalalar

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlarning asimptotalarini toping:

1. $y=\dfrac{2}{x-3}$;

2. $y=\dfrac{5}{x^2-16}$;

3. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$;

4. $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x}$;

5. $y=\dfrac{x^2}{x+2}$;

6. $y=\dfrac{x^3+1}{x}$;

7. $x=\dfrac{2t}{(t-1)(t-2)},\ y=\dfrac{t^2}{(t-1)(t-3)}$;

8. $x=\dfrac{2t-1}{t^2-1},\ y=\dfrac{t^2}{t-1}$;

9. $x=\dfrac{t^2}{t-1},\ y=\dfrac{t}{t^2-1}$;

10. $9x^2+4y^2=x^2y^2$;

11. $(x^2-4)y^2=x^4$;

12. $a^2x^2=(x^2+y^2)y^2$;

13. $r=\dfrac{a}{\sin\varphi}+l$;

14. $r = \dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$;

15. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

16. $y^3 + 3y^2 - x^2 = 0$;

17. $(2a - x)y^2 = x(x-a)^2$;

18. $xy(x^2 - y^2) + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlarning maxsus nuqtalarini toping:

19. $y^2 = x^3 + x^2$;

20. $y^2 = x^3 - x^2$;

21. $x^2 = y^3 + x^4$;

22. $y^2(x^2 - 9) = x^4$;

23. $y^2 = x(x-3)^2$;

24. $y^2x^2 = x^2 + y^2$;

25. $x^2 = y(y-2)^2$;

26. $4y^2 = x^5 + 5y^4$;

27. $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$;

28. $(x^2 + y^2)(y-a)^2 - l^2y^2 = 0$;

29. $(2a - x)y^2 = x(x-a)^2$;

30. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$;

31. $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$;

32. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$;

33. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlarning ko‘rsatilgan nuqtalarda urinmalari va normallari mavjudmi? Agar mavjud bo‘lsa ularning tenglamalarini yozing:

34. $x = t^2 + 1,\ y = t^4 - t^5,\ t = 0$ nuqtada;

35. $y = x\sin\dfrac{1}{x},\ x = 0$ nuqtada;

36. $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},\ x = 0$ nuqtada;

37. $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}},\ x = 1$ nuqtada;

38. $x^3 + y^3 - x^2 - y^2,\ O(0,0)$ nuqtada;

39. $xy^2 + \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2 = 0,\ A(2,0)$ nuqtada.

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlarni tekshiring va yasang:

40. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

41. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$;

42. $y = \dfrac{x^3}{2(x-)^2 - 3}$;

43. $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$;

44. $y=\sqrt{\dfrac{125-x^3}{3x}}$;

45. $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

46. $y=e^{-x^2}$;

47. $y=e^{\frac{1}{x}}$;

48. $x=\dfrac{3at}{1+t^3}, y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$;

49. $x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, y=\dfrac{t(1-t)}{1+t^2}$;

50. $x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, y=\dfrac{t^3}{1+t^2}$;

51. $x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, y=\dfrac{t\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$;

52. $x=t^2,\ y=\dfrac{2}{3}t(3-t^2)$;

53. $x=\dfrac{t^2}{1-t}, y=\dfrac{t^3}{1-t^2}$;

54. $x=\dfrac{t^2}{1-t^2}, y=\dfrac{t^3}{1-t^2}$;

55. $x=4t^2, y=3t(t^2+1)$;

56. $x=t^4, y=t^2-t^5$;

57. $x=\dfrac{t^5}{10(1-t)}, y=t^3$;

58. $x=\dfrac{t}{1-t^2}, y=\dfrac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$;

59. $x=t^2, y=t^4+t^5$;

60. $x=\dfrac{5t^2}{1+t^5}, y=\dfrac{5t^3}{1+t^5}$;

61. $x=\frac{(t+2)^2}{1+t}, y=\frac{(t-2)^2}{t-1}$;

62. $x=\frac{4t}{1-t^4}, y=\frac{4t^2}{1-t^4}$;

63. $x=2\sin t,\ y=\frac{2\cos^2 t}{2+\cos^2 t}$;

64. $x^3-y^2+1=0$;

65. $xy^2-y^2-4x=0$;

66. $x(x^2+y^2)-y^2+x=0$;

67. $xy^2=x^2+2x-\frac{5}{4}$;

68. $x^4-y^4=a^4$;

69. $y^4-4x^2y^2-6x^2-4y^2=0$;

70. $\left(x^2-y^2\right)^2=2x$;

71. $\left(x^2-y^2\right)(x-y)=1$;

72. $xy(x-y)+x+y=0$;

73. $x^2y^2+y=1$;

74. $x^3+xy^2-x^2-y^2=0$;

75. $x^2+y^2=x^2y^2$;

76. $x^4-y^4+x^2+2y^2=0$;

77. $x^3-xy^2+x^2+y^2=0$;

78. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$;

79. $xy^2=-(\frac{x}{2}-1)^2$;

80. $x\left(x^2-3y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)=0$;

81. $x^4+y^4=x^2+y^2$;

82. $x^3+xy^2+x^2-y^2=0$;

83. $x^4+y^4+x^2-y^2=0$;

84. $xy^2=(x-1)^2$;

85. $x^4+y^4-2xy=0$;

86. $x^2=y^2+x^4$;

87. $(x+1)(x+2)y^2=x^2$;

88. $y^2=x^3-2x^2+x$;

89. $\left(x^2+y^2\right)^2=xy$;

90. $x^3+y^3-x^2=0$;

91. $x^3-27(x-y)^2=0$;

92. $x^3-xy^2+ay^2=0$;

93. $x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0;$
94. $x^4 - xy^2 + ay^2 = 0;$
95. $x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0;$
96. $x^4 - x^2y + y^3 = 0;$
97. $x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0;$
98. $x^4 + y^4 = 8xy^2;$
99. $x^6 - x^4 + y^2 = 0;$
100. $x^4 - y^4 + xy = 0;$
101. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 27x^2y^2;$
102. $r = tg\dfrac{\varphi}{2};$
103. $r^2 = a^2\varphi,\ a \neq 0;$
104. $r^2\varphi = a^2,\ a \neq 0;$
105. $r^2 = a^2\varphi^4, a \neq 0;$
106. $r = a + \dfrac{l}{\varphi}, a \geq 0,\ l > 0,\ \varphi > 0;$
107. $r = a\sin\dfrac{\varphi}{2}, a > 0;$
108. $r = a\sin 3\varphi,\ a > 0.$

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlar oilalarini tekshiring va yasang:
109. $C^2x^2 + y^2 = Cx;$
110. $x^2 + 2Cy = 2xy;$
111. $x = \cos uchv,\ y = \sin ushv,\ a)\ v = const, b)\ u = const.$
112. Ixtiyoriy $\varphi(x, y) = a$, $\psi(x, y) = b$ tenglamalar bilan berilgan chiziqlar oilalarining umumiy nuqtasida $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu oilalar o‘zaro ortogonal bo‘lishi ko‘rsatilsin.
113. Quyidagi $\varphi(x, y) = a$ tenglamalar bilan berilgan chiziqlar oilasiga ortogonal bo‘lgan chiziqlar oilasi

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

tenglik bilan aniqlanishi ko‘rsatilsin.
114. To‘g‘ri chiziqlar dastasiga ortogonal bo‘lgan chiziqlar oilasi topilsin.
115. Ox o‘qiga koordinata boshida urinuvchi aylanalar oilasiga ortogonal bo‘lgan chiziqlar oilasi topilsin.

116. Ushbu $y^2 = 2ax$ parabolalar oilasiga ortogonal bo‘lgan chiziqlar oilasi topilsin.
117. berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi aylanalar oilasiga ortogonal bo‘lgan chiziqlar oilasi topilsin.

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlar oilalarining o‘ramalari topilsin:
118. $(x-C)^2 + y^2 = a^2$;
119. $(x-C)^2 + (y-C)^2 = C^2$;
120. $x\cos C + y\sin C - p = 0$;
121. $y = (x-C)^3$;
122. $y^2 - (x-C)^3 = 0$;
123. $y^3 - (x-C)^2 = 0$;
124. $3(y-C)^2 + 2(x-C)^2 = 0$;
125. $(1-C^2)x + 2Cy - a = 0$;
126. $x^2(x-a) - Cy - a = 0$.
127. Koordinata o‘qlari bilan o‘zgarmas S yuzali uchburchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlar o‘ramasi topilsin.
128. Quyidagi $x^2 + y^2 = R^2$ aylana $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqning o‘ramasi ekanligi ma’lum bo‘lsa, A, B, C sonlar qanday munosabatni qanoatlantiradi?
129. Uchlari koordinata o‘qlarida bo‘lgan uzunligi o‘zgarmas a ga teng kesmalarni o‘z ichiga oluvchi to‘g‘ri chiziqlarning o‘ramasi topilsin (bu yerda kesmalarning uchlari koordinata o‘qlari bo‘ylab sirpanadi).
130. Markazlari R radiusli aylanada joylashgan, radiusi r ga teng bo‘lgan aylanalar oilasining o‘ramalari topilsin.
131. Diametrlari berilgan parabolaning fokal radius-vektorlaridan iborat aylanalar oilasining o‘ramasi topilsin.
131. Diametrlari $y^2 = 2px$ parabolaning fokusidan o‘tuvchi vatarlaridan iborat aylanalar oilasining o‘ramasi topilsin.
132. Berilgan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning biror simmetriya o‘qiga parallel vatarlarini diametr qilib aylanalar chizilgan. Har bir oilaning o‘ramasi topilsin.
133. Berilgan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning biror simmetriya o‘qiga parallel vatarlarini diametr qilib aylanalar chizilgan. Har bir oilaning o‘ramasi topilsin.
134. Berilgan parabolaning o‘qiga perpendikular vatarlarini diametr qilib aylanalar chizilgan. Aylanalar oilasining o‘ramasi topilsin.
135. Uchlari $y^2 = 2qx$ parabolani chizuvchi, parametri p ga teng, o‘qi Ox o‘qiga parallel bo‘lgan parabolalar oilasining o‘ramasi topilsin.

136. Parametrlari α,β ushbu $\varphi(\alpha,\beta)=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi $F(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ chiziqlar oilasi o‘ramasining nuqtalari qanday shartlarni qanoatlantiradi?

137. Quyidagi $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$ tenglamani qanoatlantiruvchi chiziqlar oilasining o‘ramasi topilsin. Bu yerda $p+q=1$.

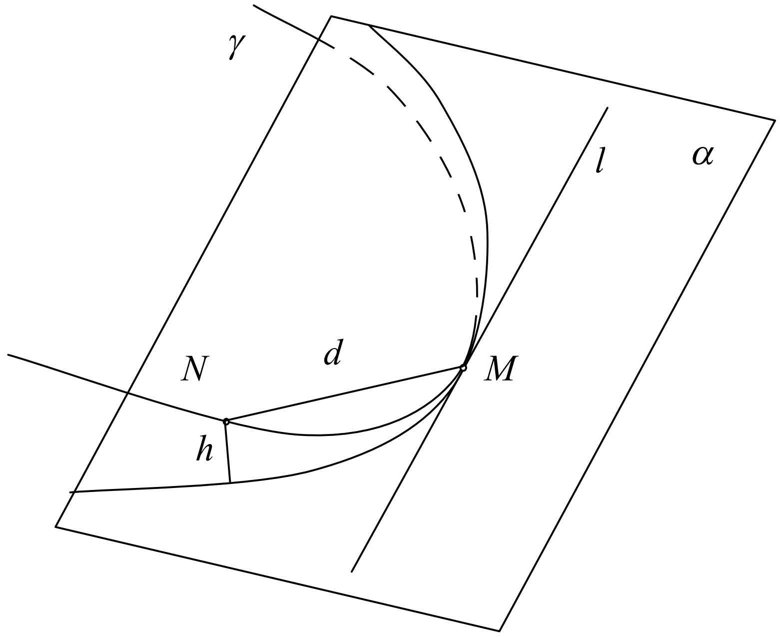
138. Parametrlari α,β ushbu $\alpha^m+\beta^m-a^m=0,\ a=const$ tenglamani qanoatlantiruvchi $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=0$ to‘g‘ri chiziqlar oilasining o‘ramasini toping. Quyidagi $m=-2,1,2$ hollarni alohida qarang.

5 §. Frene bazisi. Egri chiziqning tabiiy parametrizasiyasi

Chiziqlar nazariyasini o‘rganishda urinma muhim rol o‘ynashi hammaga ma’lum. Urinmaga perpendikular tekislikni normal tekislik deb ataganmiz. Bu paragrafda urinmaga perpendikular ikki vektor binormal va bosh normal deb ataluvchi vektorlarning xossalari o‘rganiladi.

Asosiy tushunchalar

Bizga γ egri chiziq va uning M nuqtasidan o‘tuvchi birorta α tekislik berilgan bo‘lsin. Berilgan chiziqdagi M nuqtaga yaqin N nuqta olib, M va N nuqtalar orasidagi masofani d bilan, h bilan esa N nuqtadan α tekislikkacha bo‘lgan masofani belgilaylik.



11–rasm

5.1- ta'rif. Berilgan γ chiziqdagi N nuqta M nuqtaga yaqinlashganda $\frac{h}{d^2}$ nisbat nolga intilsa, α tekislik γ chiziqning M nuqtasidagi yopishma tekisligi deb ataladi (11-rasm).

Tasdiq. Ikki marta differensiallanuvchi regulyar γ egri chiziqning har bir nuqtasidan o'tuvchi yopishma tekislik mavjud bo'lib, urinma yopishma tekislikda yotadi. Agar egri chiziq $\vec{r}=\vec{r}(t)$ tenglama yordamida aniqlangan bo'lsa, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi yopishma tekislik $\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ vektorlarga parallel bo'ladi.

Izoh. Yopishma tekislik $\vec{r}'(t_0)$ va $\vec{r}''(t_0)$ vektorlarga parallel bo'lganligi uchun, agar bu vektorlar o'zaro parallel bo'lsa, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi yopishma tekisliklar cheksiz ko'p. Lekin $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ vektorlar parallel bo'lmasa, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi yopishma tekislik yagonadir.

Ushbu $\vec{r}=\vec{r}(t)$ tenglama bilan berilgan γ chiziqning $M(t_0)$ nuqtasida o'kazilgan yopishma tekisligining vektor tenglamasi $(\vec{R}-\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0))=0$ ko'rinishda bo'ladi. Agar egri chiziq $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ parametrik tenglamalar yordamida berilsa, yopishma tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0$$

ko'rinishda bo'ladi.

Egri chiziqning $M(t_0)$ nuqtasidan urinma to'g'ri chiziqqa perpendikular holda o'tuvchi to'g'ri chiziq normal deb ataladi. Normallar ichidan biz uchun muhimlari bosh normal va binormaldir.

Yopishma tekislikda yotuvchi normal bosh normal deb ataladi, yopishma tekislikka perpendikular normal esa binormal deb ataladi.

Albatta, yopishma tekislik yagona bo'lgan holdagina bu tushunchalar ishlatiladi. Endi bosh normal va binormal tenglamalarini yozaylik. $\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ vektorlar yopishma tekislikka parallel bo'lgani uchun vektor ko'paytma $[\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)]$ binormal uchun yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Demak, binormal tenglamasi

$$\frac{X-x_0}{\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}}=\frac{Y-y_0}{\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}}=\frac{Z-z_0}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}$$

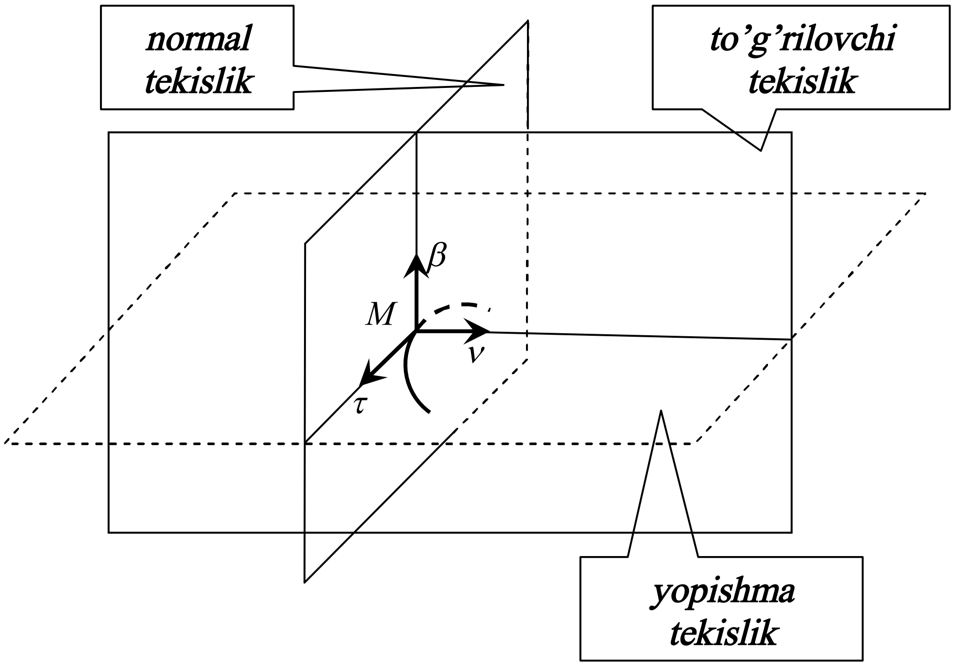
ko'rinishda bo'ladi.

Bosh normal uchun esa $[\vec{r}'(t_0), [\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)]]$ vektor ko'paytma yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Shuning uchun bosh normal tenglamasi,

$$\frac{X-x_0}{y'(t_0)\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} - z'(t_0)\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{Y-y_0}{z'(t_0)\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} - x'(t_0)\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t) & y''(t_0) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{Z-z_0}{x'(t_0)\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix} - y'(t_0)\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.



12-rasm

Xuddi shularga o‘xshash, normal tekislik tenglamasi vektor ko‘rinishda $(\vec{R}-\vec{r}(t_0),\, \vec{r}'(t_0))=0,$ koordinata ko‘rinishidagi tenglamasi esa $(X-x(t_0))x'(t_0)+(Y-y(t_0))y'(t_0)+(Z-z(t_0))z'(t_0)=0$ bo‘ladi.

Urinma va binormaldan o‘tuvchi tekislik to‘g‘rilovchi tekislik deyiladi. Uning vektor ko‘rinishidagi tenglamasi

$$\left(\vec{R}-\vec{r}(t_0), \vec{r'}(t_0), \left[\vec{r'}(t_0), \vec{r''}(t_0)\right]\right)=0$$

koordinata ko‘rinishidagi tenglamasi esa

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \text{ bo‘ladi.}$$

Urinma, bosh normal, binormal bo‘yicha yo‘nalgan birlik vektorlardan tashkil topgan uchlik Frene bazisi deyiladi (12-rasm). Ularni mos ravishda quyidagi formulalar bo‘yicha topiladi:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}'|}\;,\;\vec{\nu}=\frac{[[\vec{r}',\vec{r}''],\vec{r}']}{|[[\vec{r}',\vec{r}''],\vec{r}']|}\;,\;\vec{\beta}=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}\,.$$

Berilgan chiziqning yoy uzunligi ushbu formula orqali topiladi:

$$s=\int_{t_0}^{t}|\vec{r}'|dt=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt\,.$$

Masala yechish namunalari

1-masala. Ushbu $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \end{cases}$ tenglama bilan berilgan vint chizig‘ining $M_0(1;0;0)$ nuqtasida o‘tkazilgan:

1) urinma;
2) bosh normali;
3) binormali;
4) yopishma tekisligi;
5) normal tekisligi;
6) to‘g‘rilovchi tekisligi topilsin.

Yechish. Bu masalani yechish uchun chiziqning berilgan $M_0(1;0;0)$ nuqtasisiga parametrning qanday qiymati mos kelishini, ya’ni $\begin{cases} x=\cos t=1 \\ y=\sin t=0 \\ z=t=0 \end{cases}$ sistemaning yechimini topishimiz kerak. Ravshanki, $t_0=0$ sistemaning yagona yechimi bo‘ladi. Demak, parametrning $t_0=0$ qiymatiga chiziqning $M_0(1;0;0)$ nuqtasi mos kelar ekan. Endi talab qilinayotgan tenglamalarni tuzish uchun kerak bo‘ladigan kattaliklarni, hosilalarning parametrning $t_0=0$ qiymatiga mos keluvchi qiymatlarini hisoblaymiz. Ravshanki, birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar $\begin{cases} x'=-\sin t \\ y'=\cos t \\ z'=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x''=-\cos t \\ y''=-\sin t \\ z''=0 \end{cases}$ va ularning $t_0=0$ dagi qiymatlari mos ravishda $\begin{cases} x'(0)=0 \\ y'(0)=1 \\ z'(0)=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x''(0)=-1 \\ y''(0)=0 \\ z''=0 \end{cases}$ qiymatlarga teng bo‘ladi. Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib, unchalik qiyin bo‘lmagan hisoblashlardan so‘ng, talab qilingan tenglamalarni tuzish mumkin.

Demak, 1) urinma tenglamasi: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$;

2) bosh normali tenglamasi: $y=z=0$;

3) binormali tenglamasi: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$;

4) yopishma tekisligi tenglamasi: $y-z=0$;

5) normal tekisligi tenglamasi: $y+z=0$;

6) to‘g‘rilovchi tekisligi tenglamasi: $x=1$.

2-masala. Ushbu $x^3=3a^2y,\ 2xz=a^2$ chiziqning $y=\frac{a}{3},\ y=9a$ tekisliklar orasidagi yoyi uzunligi topilsin.

Yechish. Ravshanki, bu tekisliklar bilan berilgan chiziq bir martadan kesishadi. Birinchi $y=\frac{a}{3}$ tekislik bilan kesishish nuqtasi $M_1(a,\frac{a}{3},\frac{a}{2})$, ikkinchi $y=3a$ tekislik bilan kesishish nuqtasi $M_1(3a,9a,\frac{a}{6})$. Endi chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{1}{3a^2}t^3 \\ z=\dfrac{a^2}{2t} \end{cases}$$

ko‘rinishda yozib, yoy uzunligini hisoblaymiz.

$$s=\int_a^{3a}\sqrt{1+\frac{t^4}{a^4}+\frac{a^4}{4t^4}}dt=\int_a^{3a}\sqrt{\frac{4a^4t^4+4t^8+a^8}{4t^4a^4}}dt=\int_a^{3a}\sqrt{\frac{(a^4+2t^4)^2}{4t^4a^4}}dt=$$

$$=\int_a^{3a}\frac{a^4+2t^4}{2t^2a^2}dt=\frac{a^2}{2}\int_a^{3a}\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{a^2}\int_a^{3a}t^2dt=-\frac{a}{6}+\frac{a}{2}+9a-\frac{a}{3}=9a.$$

3-masala. Radiusi R ga teng bo‘lgan aylananing uzunligi topilsin.

Yechish. Berilgan aylananing radiusi R ga teng bo‘lganligi uchun, uning parametrik tenglamasini quyidagicha olish mumkin:

$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases},\ 0\le t\le 2\pi$. Yoy uzunligini topish formulasidan

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\left(\sin^2 t+R^2\cos^2 t\right)}dt=R\int_0^{2\pi}dt=2\pi R.$$

Misol va masalalar

Quyidagi chiziqlarning ko'rsatilgan nuqtalardagi urinmalari tenglamalari tuzilsin:

1. $x=\sec t,\; y=tgt,\; z=at,\; t=\frac{\pi}{4}$ nuqtada;

2. $x=e^{t},\; y=e^{-t},\; z=t^{2},\; t=1$ nuqtada;

3. $x=e^{t}\cos t,\; y=e^{-t}\sin t,\; z=e^{t},\; t=0$ nuqtada;

4. $x=a(t-\sin t),\; y=a(1-\cos t),\; z=4a\sin\frac{t}{2},\; t=\frac{\pi}{2}$ nuqtada.

5. Quyidagi $x=3t-t^{3}, y=3t^{2}, z=3t+t^{3}$ chiziqning qaysi nuqtalardagi urinmasi $3x+y+z=0$ tekislikka parallel bo'ladi?

6. Berilgan $x=2\cos t, y=2\sin t, z=4t$ vint chizig'ining $t=0$ nuqtadagi urinmasi va normal tekisligi tenglamasi tuzilsin.

7. Berilgan $x=t, y=t^{2}, z=t^{3}$ vint chizig'ining $t=1$ nuqtadagi urinmasi va normal tekisligi tenglamalari tuzilsin.

8. Ushbu $x=a\cos t, y=-a\sin t, z=be^{t}$ chiziq urinmalarining XOY tekisligi bilan kesishish nuqtalarining geometrik o'rni topilsin.

9. Berilgan $x=acht, y=asht, z=ct$ chiziqning ixtiyoriy nuqtasidagi urinmasi va normal tekisligi tenglamalari tuzilsin.

10. Ushbu $x=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t, y=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t, z=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$ chiziq $x^{2}+y^{2}=z^{2}$ konusda yotishi hamda uning yasovchilari bilan 45^{0} burchak hosil qilishi isbotlansin.

11. Ikki $F(x,y,z)=0, \Phi(x,y,z)=0$ sirtning kesishish chizig'i sifatida berilgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasidagi urinmasi va normal tekisligi tenglamalari tuzilsin (bunda $rang\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}=2$).

12. Viviani $x^{2}+y^{2}+z^{2}=R^{2},\; x^{2}+Rx+y^{2}=\frac{R^{2}}{4}$ chizig'ining ixtiyoriy nuqtadagi nuqtadagi urinmasi va normal tekisligi tenglamasi tuzilsin.

13. Ushbu $x^{2}=2az,\; y^{2}=2bz$ chiziqning ixtiyoriy nuqtadagi urinmasi va normal tekisligi tenglamasi tuzilsin.

14. Quyidagi $x^{2}+y^{2}-z^{2}=1, x^{2}-y^{2}-z^{2}=1$ sirtlarning kesishishidan hosil bo'lgan chiziq ixtiyoriy nuqtasidagi urinmasi va normal tekisligi tenglamasi tuzilsin.

15. Berilgan $x^{2}+y^{2}=1,\; z^{2}+y^{2}=1,\; y\neq\pm1$ chiziqning ixtiyoriy nuqtadagi urinmasi va normal tekisligi tenglamasi tuzilsin.

16. Parametrik ko'rinishda berilgan $x=a\sin^{2}t,\; y=a\sin t\cos t,\; z=a\cos t$ chiziqning ixtiyoriy nuqtadagi urinmasi va normal tekisligi tenglamasi tuzilsin.

17. Bizga $r = r(s)$ tenglama bilan aniqlangan chiziq berilgan bo‘lib, π - uning $M_0(s_0)$ nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq, hamda $d(\Delta s)$- $M(s_0 + \Delta s)$ nuqtadan π to‘g‘ri chiziqqacha masofa bo‘lsin. π to‘g‘ri chiziq $r = r(s)$ chiziqqa $M_0(s_0)$ nuqtada urinma bo‘lishi uchun $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s} = 0$ munosabat o‘rinli bo‘lishu zarur va yetarliligi isbotlansin.
18. Ushbu $r = r(t)$ tenglama bilan berilgan silliq chiziqning $M_0(t_0)$ nuqtadagi yopishma tekisligi quyidagi shartlarning ixtiyoriysi bilan aniqlash mumkinligi isbotlansin:
a) M_0 nuqtadan o‘tuvchi $r'(t_0)$, $r''(t_0)$ vektorlarga parallel tekislik;
b) π berilgan chiziqning M_0 nuqtasidagi urinmasi orqali o‘tuvchi tekislik, $\rho = \rho(s)$ -chiziqning tabiiy parametrlash usuli bo‘lib, M_0-parametrning $s = s_0$ qiymatiga mos keluvchi nuqta. $d(\Delta s)$- $M(s_0 + \Delta s)$ nuqtadan π tekislikkacha masofa. π tekislik berilgan chiziqning M_0 nuqtasidagi yopishma tekisligi bo‘lishi uchun $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli;
c) chiziq bilan M_0 nuqtada kamida ikkinchi tartibli urinishga ega bo‘lgan tekislik.
19. Regulyar chiziqning barcha yopishma tekisliklari bitta nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘lsa, uning biror tekislikda joylashishi isbotlansin.
20. Ushbu $x = t, y = t^2, z = t^3$ chiziqning $M_0(2,-\frac{1}{3},-6)$ nuqtadan o‘tuvchi yopishma tekisliklari topilsin.
21. Ushbu $x = t, y = t^2, z = t^3$ chiziqning ixtiyoriy M nuqtasidan Oz o‘qini kesib o‘tuvchi va $z = 0$ tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq uning M nuqtasida o‘tkazilgan yopishma tekislikda yotishi isbotlansin.
22. Berilgan $x = a\cos t, y = b\sin t, z = e^t$ chiziqning $t = 0$ nuqtadagi yopishma tekisligi tenglamasi tuzilsin.
23. Berilgan $x = \cos\alpha \cos t, y = \cos\alpha \sin t, z = t\sin\alpha,\ \alpha = const$ chiziqning binormallarining musbat yo‘nalishlarida uzunligi birga teng kesmalar qo‘yilgan. Bu kesmalar uchlaridan hosil bo‘lgan chiziqning yopishma tekisligi tenglamasi tuzilsin.
24. Ushbu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$ chiziqning $M(2;1;2)$ nuqtadagi yopishma tekisligi tenglamasi tuzilsin.
25. Ushbu $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = 2t$ chiziq $x^2 + y^2 - e^z = 0$ sirtda yotishi isbotlansin. Uning yopishma tekisligi sirtning urinma tekisligi bilan ustma-ust tushishi ko‘rsatilsin.
26. Ushbu $x = t,\ y = t^2,\ z = e^t$ chiziqning $t = 0$ nuqtadagi bosh normali va binormali tenglamalari tuzilsin.
27. Ushbu $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ chiziqning $t = 1$ nuqtadagi bosh normali va binormali tenglamalari tuzilsin.

28. Ushbu $x=\frac{2}{t},\ y=\ln t,\ z=-t^2$ chiziqning qaysi nuqtadagi binormali $x-y+8z+2=0$ tekislikka parallel bo‘ladi?
29. Vint chizig‘ining binormallarida uzunligi birga teng kesmalar qo‘yilgan. Bu kesmalar uchlaridan hosil bo‘lgan chiziqning vint chizig‘i ekanligi isbotlansin.
30. Ushbu $x=t\sin t, y=t\cos t,\ z=te^t$ chiziqning $t=0$ nuqtadagi urinmasi, bosh normali va binormali bo‘ylab yo‘nalgan birlik vektorlari topilsin.
31. Ushbu $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t$ chiziqning ixtiyoriy nuqtadagi urinmasi, bosh normali va binormali bo‘ylab yo‘nalgan birlik vektorlari topilsin.
32. Ushbu $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),\ z=4a\cos\frac{t}{2}$ chiziqning $t=0$ nuqtadagi urinmasi, bosh normali va binormali bo‘ylab yo‘nalgan birlik vektorlari topilsin.
33. Ushbu $x=t, y=t^2,\ z=t^3$ chiziqning $t=0$ nuqtadagi urinmasi, bosh normali va binormali bo‘ylab yo‘nalgan birlik vektorlari koordinata o‘qlarining birlik vektorlari bilan ustma-ust tushishi isbotlansin.
34. Ushbu $x=a\sin t, y=a\cos t,\ z=bt$ vint chizig‘ining urinmasi, normal tekisligi, binormali, yopishma tekisligi, bosh normali va to‘g‘rilovchi tekisligi tenglamalari tuzilsin.
35. Ushbu $x=a\sin t, y=a\cos t,\ z=bt$ vint chizig‘ining XOY tekisligi bilan kesishish nuqtasidan ixtiyoriy nuqtasigacha bo‘lgan yoyining uzunligi topilsin.
36. Aylananing tabiiy parametrli tenglamasi tuzilsin.
37. Zanjir chizig‘ining tabiiy parametrli tenglamasi tuzilsin.
38. Vint chizig‘ining tabiiy parametrli tenglamasi tuzilsin.
39. Ushbu $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),\ z=4a\cos\frac{t}{2}$ chiziqning $(0,0,4a)$ va $(2\pi a,0,-4a)$ nuqtalari orasidagi yoyi uzunligi topilsin.
40. Berilgan $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t$ chiziqning uzunligi topilsin.
41. Quyidagi $x=acht, y=asht,\ z=at$ chiziq parametrining $t=0$ va $t=t_0$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtalari orasidagi yoyi uzunligi topilsin.
42. Chiziq yoyi uzunligi differensialining silindrik koordinatalardagi ifodasi topilsin.
43. Chiziq yoyi uzunligi differensialining sferik koordinatalardagi ifodasi topilsin.

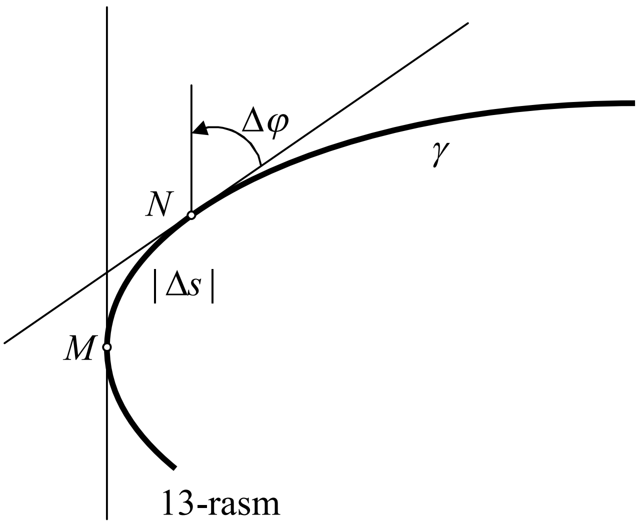
6 §. Egri chiziq egriligi va buralishi. Frene formulalari

Egri chiziq egriligi va buralishi differensial geometriyada o‘rganiladigan chiziqlarning muhim xususiyatlaridan hisoblanadi. Bu xususiyatlarning mexanika va fizikadagi tadbiqlari ham mavjud. Bu tadbiqlarni xususan, Frene formulalarining ifodasida ham ko‘rish mumkin.

Asosiy tushunchalar

Bizga γ egri chiziq va M unga tegishli nuqta berilgan bo‘lsin. Berilgan egri chiziqda M nuqtaga yaqin N nuqta olib, bu nuqtalarda o‘tkazilgan urinmalar orasidagi burchakni $\Delta\varphi$ bilan, MN yoy uzunligini Δs bilan belgilaylik.

6.1-ta’rif. Berilgan γ chiziqdagi N nuqta M ga yaqinlashganda $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ ifodaning limiti mavjud bo‘lsa, u γ chiziqning M nuqtadagi egriligi deb ataladi va $k = \lim\limits_{N\to M} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ kabi belgilanadi (13-rasm).



13-rasm

Tasdiq. Ikki marta differensiallanuvchi regulyar egri chiziqning har bir nuqtasida $k = \lim\limits_{N\to M} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ egriligi mavjud. Agar γ egri chiziq tabiiy parametr yordamida $\vec{r} = \vec{r}(s)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, $k = \left|\ddot{\vec{r}}(s_0)\right|$ tenglik o‘rinlidir. Bu yerda s_0 tabiiy parametrning γ egri chiziqning M nuqtasiga mos keluvchi qiymatidir.

Ixtiyoriy parametrlash usuli bilan berilgan γ egri chiziq uchun egrilikni hisoblash formulasi $k = \dfrac{\left|\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,''\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'^2\right|^{3/2}}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Agar egri chiziq

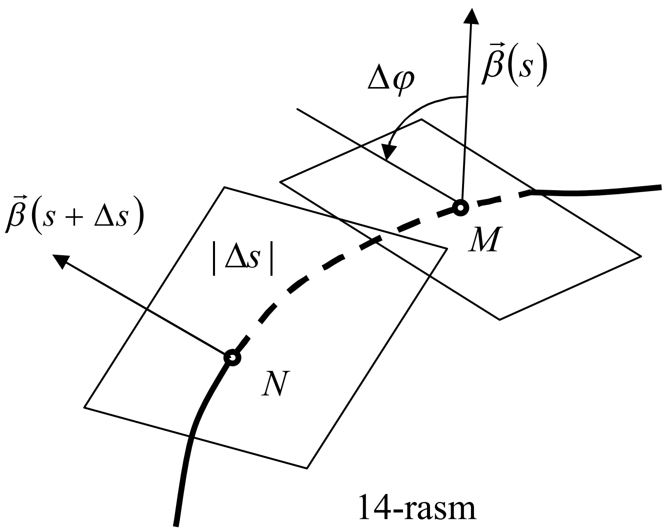
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uning egriligini topish formulasi quyidagicha

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar γ egri chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigidan iborat bo‘lsa, uning egriligini ushbu $k = \dfrac{|f''|}{\left(1 + f'^2\right)^{3/2}}$ formula bilan hisoblash mumkin.

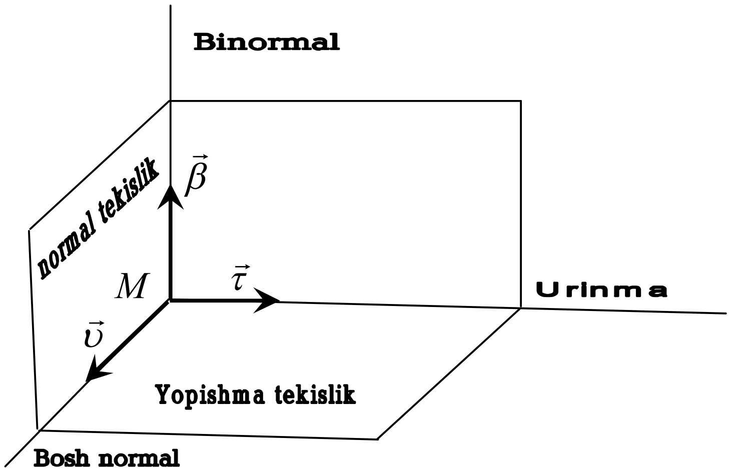
Bizga γ egri chiziq va M unga tegishli nuqta berilgan bo‘lsin. Berilgan egri chiziqda M nuqtaga yaqin N nuqta olib, bu nuqtalarda o‘tkazilgan yopishma tekisliklar orasidagi burchakni $\Delta\varphi$ bilan, MN yoy uzunligini Δs bilan belgilaylik.

6.2-ta’rif. Berilgan γ chiziqdagi N nuqta M ga yaqinlashganda $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ ifodaning limiti mavjud bo‘lsa, u γ chiziqning M nuqtadagi absolyut buralishi deb ataladi va $|\sigma| = \lim\limits_{N \to M} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ kabi belgilanadi.



14-rasm

Tasdiq. Uch marta differensiallanuvchi regulyar γ egri chiziqning M nuqtada egriligi noldan farqli bo‘lsa, $|\sigma| = \lim\limits_{N \to M} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ limit mavjud. Agar γ egri chiziq tabiiy parametr yordamida $\vec{r} = \vec{r}(s)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uning absolyut buralishi, ushbu $|\sigma| = \dfrac{|(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})|}{|\ddot{\vec{r}}|^2}$ formula bo‘yicha hisoblanadi. Buralish esa $\sigma=-\frac{(\dot{\vec r},\ddot{\vec r},\dddot{\vec r})}{k^2}$ formula bilan, ixtiyoriy parametrlash usuli bilan berilgan γ egri chiziq uchun buralishini hisoblash formulasi $\sigma=-\frac{(\vec r',\vec r'',\vec r''')}{[\vec r',\vec r'']^2}$ ko‘rinishda bo‘ladi.



15-rasm

Agar egri chiziq $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uning buralishini topish formulasi quyidagicha

$$\sigma=-\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Tabiiy parametrlash usuli bilan $\vec r=\vec r(s)$ tenglama yordamida berilgan egri chiziq urinma, bosh normal, binormallari bo‘yicha yo‘nalgan birlik vektorlar va ularning hosila vektorlari orasidagi bog‘liqlikni ifodalaydigan Frene formulalari ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} \dot{\vec\tau}=k\vec v\\ \dot{\vec v}=-k\vec\tau-\sigma\vec\beta\\ \dot{\vec\beta}=\sigma\vec v.\end{cases}$$

Misol va masalalarning yechish namunalari

1-masala. Ushbu $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ tenglama bilan berilgan vint chizig'ining $M_0(a;0;0)$ nuqtasidagi egriligi va buralishi hisoblansin.

Yechish. Bu masalani yechish uchun chiziqning berilgan $M_0(a;0;0)$ nuqtasiga parametrning qanday qiymati mos kelishini, ya'ni $\begin{cases} x = a\cos t = 1 \\ y = a\sin t = 0 \\ z = bt = 0 \end{cases}$ sistemaning yechimini topishimiz kerak. Ravshanki, $t_0 = 0$ sistemaning yagona yechimi bo'ladi. Demak, parametrning $t_0 = 0$ qiymatiga chiziqning $M_0(a;0;0)$ nuqtasi mos kelar ekan. Endi, talab qilinayotgan tenglamalarni tuzish uchun kerak bo'ladigan kattaliklarni, hosilalarning parametrning $t_0 = 0$ qiymatiga mos keluvchi qiymatlarini hisoblaymiz. Ravshanki, birinchi ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalar $\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = a\cos t \\ z' = b \end{cases}$, $\begin{cases} x'' = -a\cos t \\ y'' = -a\sin t \\ z'' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x''' = a\sin t \\ y''' = -a\cos t \\ z''' = 0 \end{cases}$ va ularning $t_0 = 0$ dagi qiymatlari mos ravishda $\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = a \\ z'(0) = b \end{cases}$, $\begin{cases} x''(0) = -a \\ y''(0) = 0 \\ z'' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x''' = 0 \\ y''' = -a \\ z''' = 0 \end{cases}$ qiymatlarga teng bo'ladi. Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib berilgan chiziqning $M_0(a;0;0)$ nuqtasidagi egriligi va buralishini hisoblaymiz:

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}^2}}{\left(0^2 + a^2 + b^2\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{(ab)^2 + a^4}}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} = \frac{a}{a^2+b^2};$$

$$\sigma = -\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix}}{a^2b^2 + a^4} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Misol va masalalar

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlarning ixtiyoriy nuqtasidagi egriliklari topilsin:

1. $y = \sin x$;

2. $y = ach\dfrac{x}{a}$;

3. $y^2 = 2px$;

4. $x = t^2,\ y = t^3$;

5. $x = a\cos t,\ y = a\sin t$;

6. $x = acht,\ y = bsht$;

7. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$;

8. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$;

9. $r = a\varphi$;

10. $r = a(1 - \cos\varphi)$;

11. $F(x, y) = 0,\ |gradF| \neq 0$;

12. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

14. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$

15. Berilgan $\vec r = \vec r(s)$ chiziq uchun quyidagi munosabatlar o‘rinliligini isbotlang:

$|\dddot{\vec r}|^2 = k^4 + k^2\sigma^2 + \dot k^2$, $\dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r} = 0$, $\dot{\vec r}\cdot\dddot{\vec r} = -k^2$, $\ddot{\vec r}\cdot\dddot{\vec r} = k\dot k$.

Bu yerda $k -$ egrilik, $\sigma -$ buralish.

16. Quyidagilarni isbotlang:

a) $\vec\tau\vec\beta\dot{\vec\beta} = \sigma$;

b) $\dot{\vec\beta}\ddot{\vec\beta}\dddot{\vec\beta} = \sigma^5\left(\dfrac{k}{\sigma}\right)^{\bullet}$;

c) $\dot{\vec\tau}\,\ddot{\vec\tau}\,\dddot{\vec\tau} = \sigma^5\left(\dfrac{k}{\sigma}\right)^{\bullet}$.

17. Chiziqning to‘g‘ri chiziq yoki uning ochiq kesmasidan iborat bo‘lishi uchun chiziqning barcha nuqtalaridagi egriligi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarliligi isbotlansin.

18. Chiziqning yassi (biror tekislikda joylashgan) bo‘lishi uchun chiziqning barcha nuqtalaridagi buralishi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarliligi isbotlansin.

Quyidagi chiziqlarning egriligi va buralishlari barcha nuqtalarda teng ekanligi isbotlansin:

19. $x = acht,\ y = asht,\ z = at$;

20. $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$.

Quyidagi chiziqlarning egriligi va buralishlari topilsin:

21. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$;

22. $x = acht,\ y = asht,\ z = at$;

23. $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \sqrt{2}t$

24. $x = 2t,\ y = \ln t,\ z = t^2$;

25. $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t$.

26. a va b ning qanday qiymatlarida $x = acht,\ y = asht,\ z = bt$ chiziqning egriligi va buralishi barcha nuqtalarda teng bo‘ladi?

27. Berilgan $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t$ chiziqning egriligi minimal qiymatni qabul qiladigan nuqtalarini toping.

28. Ushbu $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\cos\frac{t}{2}$ chiziqning egrilik radiusi minimal qiymatni qabul qiladigan nuqtalarini toping.

Quyidagi chiziqlarning yassi ekanligini ko‘rsating va ular joylashgan tekislik tenglamasini yozing:

29. $x = \frac{1+t}{1-t},\ y = \frac{1}{1-t^2},\ z = \frac{1}{1+t}$;

30. $x = a_1t^2 + b_1t + c_1,\ y = a_2t^2 + b_2t + c_2,\ z = a_3t^2 + b_3t + c_3$;

31. $x = a_1t^n + b_1t^p + c_1,\ y = a_2t^n + b_2t^p + c_2,\ z = a_3t^n + b_3t^p + c_3,\ n, p \in N$.

32. Ushbu $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = f(t)$ chiziq yassi bo‘ladigan $f(t)$ funksiya topilsin.

33. Ushbu $x^2 = 2az,\ y^2 = 2bz$ chiziq ikkita kesishuvchi tekisliklarda yotishi isbotlansin va bu tekisliklarning tenglamalari tuzilsin.

34. Umumlashgan vint chizig‘i deb urinmalari biror yo‘nalish bilan o‘zgarmas burchak hosil qiluvchi fazoviy chiziqqa aytiladi. Chiziq umumlashgan vint chizig‘i bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning birortasi bajarilishi zarur va yetarliligi isbotlansin:

a) bosh yo‘nalishlari biror yo‘nalishga perpendikular;

b) binormallari biror yo‘nalish bilan o‘zgarmas burchak hosil qiladi;

c) egriligining buralishiga nisbati o‘zgarmas.

35. Chiziq umumlashgan vint chizig‘i bo‘lishi uchun $\ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}^{(4)} = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

36. Ushbu $x^2 = 3y,\ 2xy = 9z$ chiziqning umumlashgan vint chizig‘i ekanligi ko‘rsatilsin.

37. Ushbu $x = 2t,\ y = \ln t,\ z = t^2$ chiziqning yasovchilari $\vec{a}(0,1,1)$ vektorga parallel bo‘lgan silindrik sirtda yotuvchi umumlashgan vint chizig‘i ekanligi ko‘rsatilsin.

38. Ushbu $x = at,\ y = bt^2,\ z = ct^3$ chiziqning umumlashgan vint chizig‘i bo‘lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

39. Barcha normal tekisliklari o‘zgarmas $\vec{e}$ vektorga parallel bo‘lgan chiziqning yassi ekanligi isbotlansin.

40. Barcha yopishma tekisliklari biror l to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan chiziqning yassi ekanligi isbotlansin.

41. Har xil chiziqning binormallari umumiy bo‘ladigan nuqtalari orasida moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ularning yassi ekanligi isbotlansin.

42. Har xil chiziqning urinmalari parallel bo‘ladigan nuqtalari orasida moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ularning egriligi va buralishining nisbati o‘zgarmas ekanligi isbotlansin.

III BOB. SIRTLAR NAZARIYASI

Differensial geometriya fanida asosiy bo‘limlardan biri sirtlar nazariyasi hisoblanadi. Bu bobda sirt va uning berilish usullari, urinma tekislik, kvadratik formalar va ularning turli tadbiqlari o‘rganiladi.

1 §. Sirt va uning berilish usullari

Ushbu paragrafda sirtlarning berilish usullari aniqlanib, ularning ba’zi bir xossalariga ko‘ra, tenglamalarini tuzishga doir misol va masalalar keltirilgan.

Asosiy tushunchalar

Tekislikdagi ochiq doiraga gomeomorf to‘plamni elementar soha deb ataymiz.

1.1-Ta’rif. Fazodagi F to‘plam elementar sohaning topologik akslantirishdagi aksi bo‘lsa, uni elementar sirt deb ataymiz.

Elementar sirt uchun cheksiz ko‘p parametrlash usullari mavjuddir. Birorta to‘plamning elementar sirt ekanligini ko‘rsatish uchun, uning birorta parametrlash usulini ko‘rsatish kerak.

Agar F sirt (f,G) parametrlash usuli bilan berilib, $(u,v)\in G$ uchun $f(x,y)$ nuqtaning koordinatalari $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ ko‘rinishda belgilasak,

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (1)$$

sistema F sirtning parametrik tenglamalar sistemasi deyiladi.

1.2-Ta’rif. Fazodagi bog‘lanishli F to‘plamga tegishli har bir nuqtaning birorta atrofida F elementar sirtga aylansa, F sodda sirt deyiladi.

Agar biz $\vec{r}(u,v)=\{x(u;v);y(u;v);z(u;v)\}$ vektor funksiyani kiritsak, (1) tenglamalar sistemasini bitta

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ \ (u,v)\in G \qquad (2)$$

vektor tenglama yordamida yoza olamiz. Bu tenglama F sirtning vektor ko‘rinishdagi tenglamasi deyiladi.

Bizga $G\subset R^3$ ochiq to‘plam va G da aniqlangan silliq $F(x;y;z)$ funksiya berilgan bo‘lsin. U holda $F=\{(x;y;z)\in G: f(x;y;z)=0\}$ to‘plam f funksiyaning sath to‘plami yoki sirti deyiladi. Agar $gradf\neq 0$ bo‘lsa, F sirt haqiqatdan ham, sodda sirt bo‘ladi.

1.3-Ta’rif. Berilgan F sirt uchun unga tegishli ixtiyoriy nuqta atrofida (f,G) parametrlash usuli mavjud bo‘lib, bunda $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$

funksiyalar uzluksiz xususiy hosilalarga ega va $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ matritsaning rangi ikkiga teng bo‘lsa, F sirt regulyar sirt deyiladi, parametrlash usuli esa regulyar parametrlash deyiladi.

Sirtning regulyarlik shartini $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] \neq \bar{0}$ ko‘rinishda ham yozishimiz mumkin.

1-Tasdiq. Bizga G sohada aniqlangan silliq $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, har bir nuqtada $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ tenglik o‘rinli bo‘lsa,

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

sistema regulyar sirtni aniqlaydi.

2-Tasdiq. Regulyar F sirt unga tegishli $p(u_0, v_0)$ nuqta atrofida,

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

parametrik tenglamalar yordamida berilib, p nuqtada $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ determinant noldan farqli bo‘lsa, shunday silliq $f(x,y)$ funksiya mavjudki, p nuqtaning atrofida F sirt $z = f(x,y)$ funksiyaning grafigidan iboratdir.

Izoh. Biz regulyar sirtlarning parametrlash usulini tanlaganimizda har doim $x_u, x_v,\ y_u, y_v,\ z_u, z_v$ hosilalar mavjud va uzluksiz bo‘lishini talab qilamiz.

Misol va masalalar yechish namunalari

1-masala. xOz tekisligida Oz o‘qini kesmaydigan $x = \varphi(u),\ z = \psi(u)$ chiziq berilgan. Bu chiziqni Oz o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning tenglamasi tuzilsin.

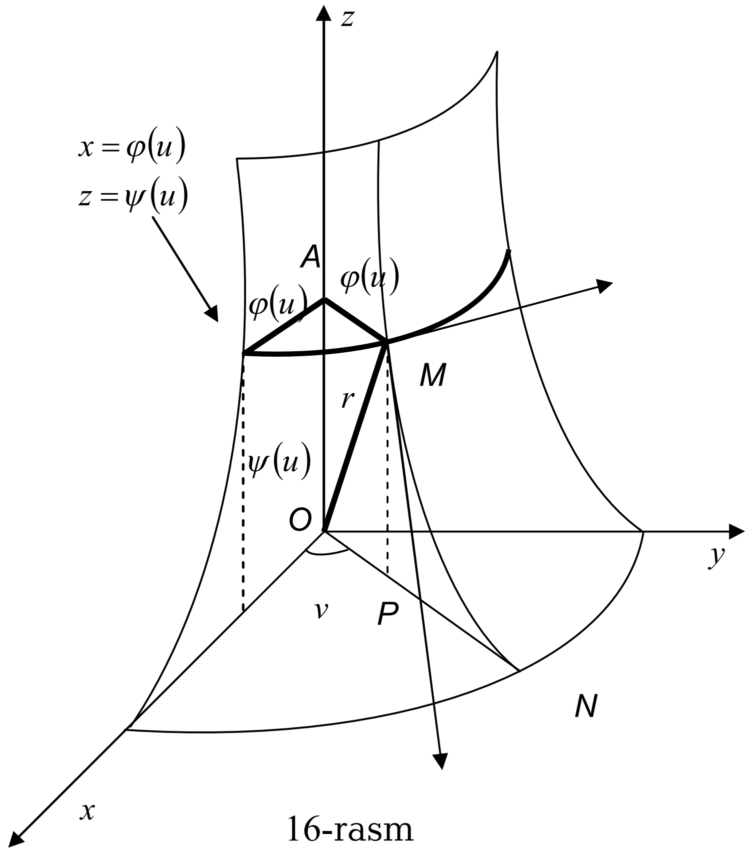
Yechish. Umumiylikka ziyon yetkazmasdan, berilgan $x = \varphi(u),\ z = \psi(u)$ chiziq uchun $\varphi(u) > 0$ shart o‘rinli deb faraz qilamiz. Egri, chiziqli koordinatalar sifatida $\angle XOP = v$ burchakni va berilgan chiziqning u parametrini olamiz (16-rasm). Chiziq ustidagi har bir $L(u)$ nuqta markazi Oz o‘qida yotgan va radiusi $x = \varphi(u)$ ga teng bo‘lgan aylanani chizadi: $MA = OP = \varphi(u)$.

Koordinat chiziqlari: $u = const$ – parallellar (aylanalar), $v = const$ – meridianlar bo‘ladi. Sirtning vektor tenglamasi:

$$\vec{r} = \varphi(u)\cos v\vec{i} + \varphi(u)\sin v\vec{j} + \psi(u)\vec{k},$$

Koordinat ko‘rinishdagi tenglamalari esa:

$$x = \varphi(u)\cos v,\ y = \varphi(u)\sin v,\ z = \psi(u).$$



16-rasm

Berilgan chiziq bilan aylanma sirtning uchinchi koordinatasi bir xildir, chunki chiziq Oz o‘q atrofida aylanmoqda.

2-masala. Oz o‘qqa perpendikular AB to‘g‘ri chiziqning shu o‘q atrofida aylanishidan va shuningdek, aylanish burchagiga proporsional tezlik bilan Oz bo‘ylab siljishidan hosil bo‘lgan sirt to‘g‘ri gelikoid deyiladi. To‘g‘ri gelikoidning tenglamasini tuzing.

Yechish. Koordinatalarni quyidagcha tanlaymiz (17-rasm):

$$MA = u,\ \angle XOP = v$$

Shartga ko‘ra $OA = av$, bunda $a = const$. Koordinata chiziqlari: $u = const$-vint chiziqlari, $v = const -$yasovchilar (harakatlanuvchi to`g`ri chiziqlar)dan iborat bo‘ladi.

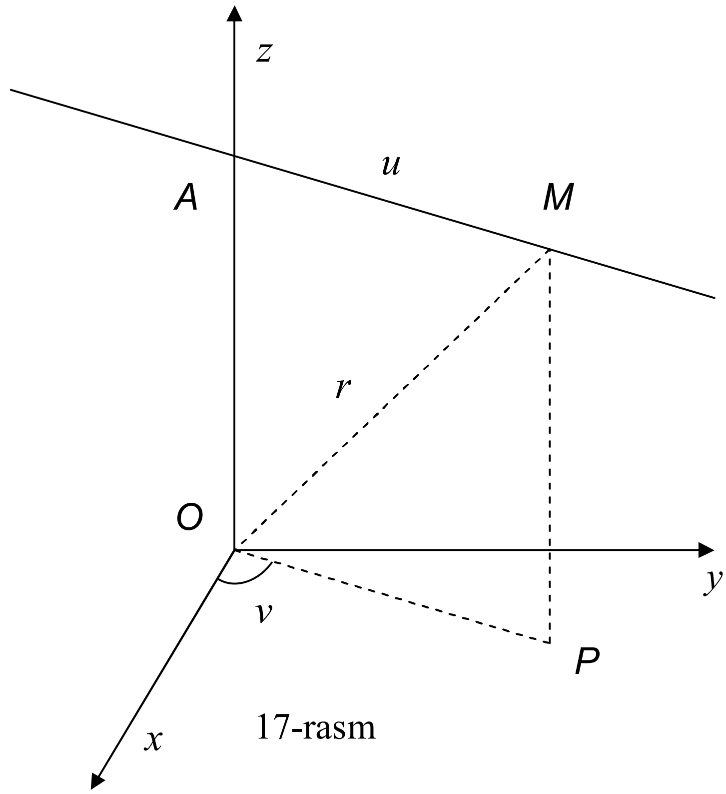
1-masaladan foydalnib gelikoidning vektor tenglamasi

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k},$$

parametrik tenglamalari esa

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$$

ko‘rinishda bo‘lishini hosil qilamiz.



17-rasm

Misol va masalalar

1. Ushbu $x=\sin u,\ z=u$ tenglama bilan aniqlangan xOz tekisligida Oz o‘qini kesmaydigan chiziq berilgan. Bu chiziqni Oz o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning tenglamasi tuzilsin.

2. Quyidagi $x=a+b\cos u,\ y=0,\ z=b\sin u$ ($0<b<a$) chiziqning Oz o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt (tor)ning tenglamasi tuzilsin.

3. Quyidagi $x=ach\dfrac{u}{a},\ y=0,\ z=u$ chiziqning Oz o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt (katenoid)ning tenglamasi tuzilsin.

4. Traktrisani $x=a\sin u,\ y=0,\ z=a(\ln tg\dfrac{u}{2}+\cos u)$ Oz o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt (psevdosfera)ning tenglamasi tuzilsin.

5. Koordinata o‘qlari sifatida $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ giperbolik paraboloidning to‘g‘ri chiziqli yasovchilarini olib, uning parametrik tenglamalari tuzilsin. Agar sirt tenglamasi $z=pxy$ ko‘rinishda olinsa, bu tenglamalar qanday ko‘rinishni oladi?

6. Yasovchilari Oz o‘qiga parallel, yo‘naltiruvchisi $x=f(u),\ y=\varphi(u), z=0$ chiziqdan iborat silindrik sirtning parametrik tenglamasi tuzilsin.

7. Giperbolik va parabolik silindrlarning parametrik tenglamalari tuzilsin.

8. Yasovchilari $\vec{e}$ vektorga parallel, yo‘naltiruvchisi $\vec{\rho}=\vec{\rho}(u)$ chiziqdan iborat silindrik sirtning tenglamasi tuzilsin.

9. Yasovchilari $\vec{a}(1,2,3)$ vektorga parallel, yo‘naltiruvchisi $x=u,\ y=u^2, z=u^3$

chiziqdan iborat silindrik sirtning parametrik tenglamasi tuzilsin.

10. Yasovchilari $\vec{a}(-1,3,-2)$ vektorga parallel, yo‘naltiruvchisi $x=\cos u,\ y=\sin u,\ z=0$ chiziqdan iborat silindrik sirtning oshkormas tenglamasi tuzilsin.

11. Yo‘naltiruvchisi $\vec{a}(l,m,n)$ vektorga parallel silindrik sirtning $f(nx-lz, ny-mz)=0$ ko‘rinishda bo‘lishi isbotlansin.

12. Yasovchilari $\vec{a}(l,m,n)$ vektorga parallel, yo‘naltiruvchisi $x^2+y^2=ay$, $z=0$ chiziqdan iborat silindrik sirtning tenglamasi tuzilsin.

13. Quyidagi $x=3u+v^2+1,\ y=2u+v^2-1,\ z=-u+2v$ sirtning

a) silindrik sirt ekanligi isbotlansin;

b) biror yo‘naltiruvchi chizig‘ining tenglamasini yozing;

c) $M(u=2, v=3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqli yasovchisini toping.

14. Uchi $M(a,b,c)$ nuqtada bo‘lgan va yo‘naltiruvchisi $x=f(u), y=\varphi(u),\ z=\psi(u)$ chiziqdan iborat konusning parametrik va oshkormas ko‘rinishdagi tenglamalari tuzilsin.

15. Ushbu $M(a,b,c)$ nuqtadan o‘tib, $y^2=2x,\ z=0$ parabolani kesuvchi to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan konusning tenglamasi tuzilsin.

16. Uchi $M(-1,0,0)$ nuqtada bo‘lgan konus $2y^2+z^2=4x$ paraboloidga tashqi chizilganligi ma’lum. Konusning tenglamasi tuzilsin.

17. Quyidagi $A(4,2,3), B(1,4,-2)$ nuqtalarning $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ sirtga tegishliligi tekshirilsin.

18. Quyidagi $x=u+\sin v,\ y=u+\cos v,\ z=u+a$ tenglama bilan qanday sirt beriladi?

19. Quyidagi $x=x_0+a\cos u\cos v,\ y=y_0+b\cos u\sin v,\ z=z_0+\sin u$ parametrik tenglamalar bilan berilgan sirtning oshkormas tenglamasi tuzilsin.

20. Quyidagi $x=\dfrac{u}{u^2+v^2},\ y=\dfrac{v}{u^2+v^2},\ z=\dfrac{1}{u^2+v^2}$ va $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u^2$ tenglamalar bitta sirtni aniqlashi isbotlansin.

Tekislikdagi quyidagi koordinata chiziqlarining ko‘rinishlari aniqlansin:

21. $x=u,\ y=v,\ z=0$;

22. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=0$;

23. $x=\cos u\operatorname{ch}v,\ y=\sin u\operatorname{sh}v,\ z=0$.

24. Bir pallali giperboloidning parametrik tenglamalarini $x=a\dfrac{uv+1}{u+v},\ y=b\dfrac{u-v}{u+v},\ z=\dfrac{uv-1}{u+v}$ ko‘rinishda yozish mumkinligi isbotlansin. Keltirilgan parametrlash usulidagi sirtning koordinat chiziqlarini aniqlang.

25. Aylanma silindrning koordinat chiziqlari

a) vint chiziqlari va aylanalardan;

b) vint chiziqlari va to‘g‘ri chiziqli yasovchilardan;

c) ikkita vint chiziqlar oilasidan

iborat bo‘ladigan parametrik tenglamalari tuzilsin.

26. Berilgan $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ chiziqning urinmalaridan hosil bo‘lgan shaklning parametrik tenglamalari tuzilsin. Bu yerda $u-$ tabiiy parametr.

27. Berilgan $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ chiziqning bosh normallaridan hosil bo‘lgan shaklning parametrik tenglamalari tuzilsin. Bu yerda $u-$ tabiiy parametr.

28. Berilgan $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ chiziqning binormallaridan hosil bo‘lgan shaklning parametrik tenglamalari tuzilsin. Bu yerda $u-$ tabiiy parametr.

29. Vint chizig‘ining $x = a\cos u,\ y = a\sin u, z = bu$ urinmalaridan hosil bo‘lgan shaklning parametrik tenglamalari tuzilsin.

30. Vint chizig‘ining $x = a\cos u,\ y = a\sin u, z = bu$ bosh normallaridan hosil bo‘lgan shaklning parametrik tenglamalari tuzilsin.

31. Vint chizig‘ining $x = a\cos u,\ y = a\sin u, z = bu$ binormallaridan hosil bo‘lgan shaklning parametrik tenglamalari tuzilsin.

2 §. Sirtning urinma tekiksligi va normali. Sirtlar oilasi. O‘rama

Ushbu paragrafda sirt turli tenglamalar yordamida berilgan holda uning urinma tekisligi va normalining tenglamalarini tuzishga doir misol va masalalar keltiriladi. Bundan tashqari, sirtlar oilasining oramasiga doir misollar ham o‘rin olgan.

Asosiy tushunchalar

2.1-ta’rif. Berilgan Φ sirtning $p(u_0;v_0)$ nuqtasidan o‘tuvchi va $\vec{r}_u(u_0;v_0)$, $\vec{r}_v(u_0;v_0)$ vektorlarga parallel tekislik p nuqtadagi urinma tekislik deb ataladi.

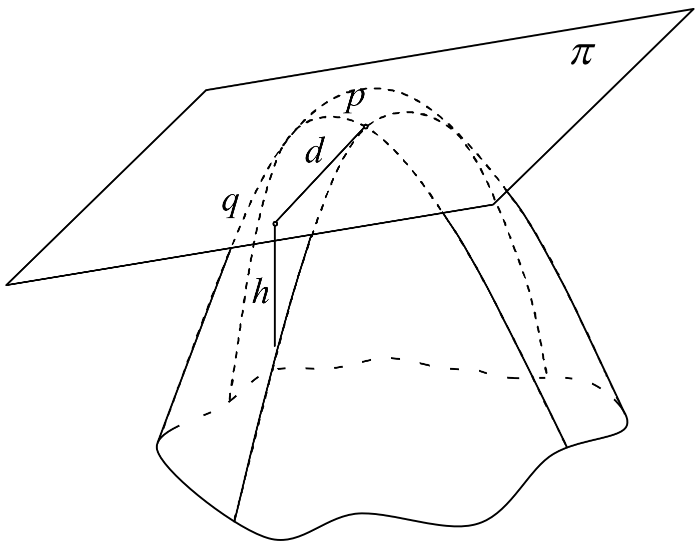
Urinma tekislik ta’rifida sirtning parametrlanish usuliga bog‘liq $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar qatnashishiga qaramasdan, urinma tekislik tushunchasi sirtning parametrlash usuliga bog‘liq emasligini quyidagi tasdiq ko‘rsatadi:

Tasdiq. Bizga sirtning $p(u_0;v_0)$ nuqtasidan o‘tuvchi π tekislik berilgan bo‘lib, q- sirtning p ga yaqin nuqtalaridan biri, d - p va q nuqtalar orasidagi masofa, h- q nuqtadan π tekislikgacha bo‘lgan masofa bo‘lsin. U holda π tekislik p nuqtadagi urinma tekislik bo‘lishi uchun,

$$\lim_{q\to p}\frac{h}{d} = 0 \qquad (*)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir (18-rasm).

2.2-ta'rif. Berilgan Φ sirtning $p(u_0;v_0)$ nuqtasidan o'tuvchi va urinma tekislikka perpendikular to'g'ri chiziq sirtning p nuqtadagi normali deb ataladi.



18-rasm

Regulyar F sirt $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ tenglama bilan aniqlansa, uning $M(u_0;v_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekisligi tenglamasi

$$(\vec{R}-\vec{r}\left(u_0,v_0\right),\vec{r}_u\left(u_0,v_0\right),\vec{r}_v\left(u_0,v_0\right))=0,$$

normali tenglamasi

$$\vec{R}=\vec{r}\left(u_0;v_0\right)+\lambda\left[\vec{r}_u\left(u_0,v_0\right),\vec{r}_v\left(u_0,v_0\right)\right] \quad (\lambda\text{-parametr})$$

ko'rinishda bo'ladi.

Regulyar sirt parametrik tenglamalar yordamida, ya'ni,

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases},\ (u,v)\in G$$

sistema yordamida aniqlangan bo'lsa, $M(u_0;v_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekisligi tenglamasi

$$\begin{vmatrix} X-x(u_0;v_0) & Y-y(u_0;v_0) & Z-z(u_0;v_0) \\ x_u(u_0;v_0) & y_u(u_0;v_0) & z_u(u_0;v_0) \\ x_v(u_0;v_0) & y_v(u_0;v_0) & z_v(u_0;v_0) \end{vmatrix}=0,$$

normali tenglamasi esa

$$\frac{X-x(u_0;v_0)}{\begin{vmatrix} y_u(u_0;v_0) & z_u(u_0;v_0) \\ y_v(u_0;v_0) & z_v(u_0;v_0) \end{vmatrix}}=\frac{Y-y(u_0;v_0)}{\begin{vmatrix} z_u(u_0;v_0) & x_u(u_0;v_0) \\ z_v(u_0;v_0) & x_v(u_0;v_0) \end{vmatrix}}=\frac{Z-z(u_0;v_0)}{\begin{vmatrix} x_u(u_0;v_0) & y_u(u_0;v_0) \\ x_v(u_0;v_0) & y_v(u_0;v_0) \end{vmatrix}}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Regulyar sirt $f(x,y,z)=0$ tenglama yordamida aniqlangan bo‘lsa, $M(x_0;y_0;z_0)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tekisligi tenglamasi

$$(X-x_0)f_x(x_0,y_0,z_0)+(Y-y_0)f_y(x_0,y_0,z_0)+(Z-z_0)f_z(x_0,y_0,z_0)=0,$$

normali tenglamasi esa

$$\frac{X-x_0}{f_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{Y-y_0}{f_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{Z-z_0}{f_z(x_0;y_0;z_0)}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2.3- ta’rif. Bizga bir (ikki) parametrli sirtlar oilasi berilgan bo‘lsin, ya’ni sirt tenglamasida bitta (ikkita) parametr qatnashsin. Ba’zan bunday oila uchun o‘zining har bir nuqtasida oila sirtiga urinadigan va shu urinish nuqtalaridan tashkil topgan sirt mavjud bo‘ladi. Bunday sirt berilgan oila uchun ***o‘rama*** deyiladi.

Bir parametrli $F(x,y,z,C)=0$ sirtlar oilasining $\begin{cases} x=x(C)\\ y=y(C)\\ z=z(C)\end{cases}$ o‘ramasi mavjud bo‘lsin deb faraz qilamiz. U holda $\begin{cases} x=x(C)\\ y=y(C)\\ z=z(C)\end{cases}$ funksiyalar ushbu $\begin{cases} F(x,y,z,C)=0\\ F'_C(x,y,z,C)=0\end{cases}$ tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak. Bu sirt diskriminant sirti deyiladi.

Ikki parametrli $F(x,y,z,C_1,C_2)=0$ sirtlar oilasining $\begin{cases} x=x(C_1,C_2)\\ y=y(C_1,C_2)\\ z=z(C_1,C_2)\end{cases}$ o‘ramasi mavjud bo‘lsa, u holda $\begin{cases} x=x(C_1,C_2)\\ y=y(C_1,C_2)\\ z=z(C_1,C_2)\end{cases}$ funksiyalar ushbu $\begin{cases} F(x,y,z,C_1,C_2)=0\\ F'_{C_1}(x,y,z,C_1,C_2)=0\\ F'_{C_2}(x,y,z,C_1,C_2)=0\end{cases}$ tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak.

Demak, sirtlar oilasining o‘ramasini diskriminant sirti orasidan topiladi. Xuddi chiziqlardagi kabi o‘rama aniqlanadi.

Misol va masalalarni yechish namunalari

1-masala. Ushbu $x^2+2y^2+z^2=1$ sirtning $x-y+2z=0$ tekislikka parallel urinma tekisligining tenglamasini aniqlang. Topilgan urinma tekislikning urinish nuqtasidagi sirtning normali tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Ma'lumki, $F(x,y,z)=0$ tenglama bilan berilgan sirtning (x_0,y_0,z_0) nuqtadagi urinma tekisligi tenglamasi

$$(x-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

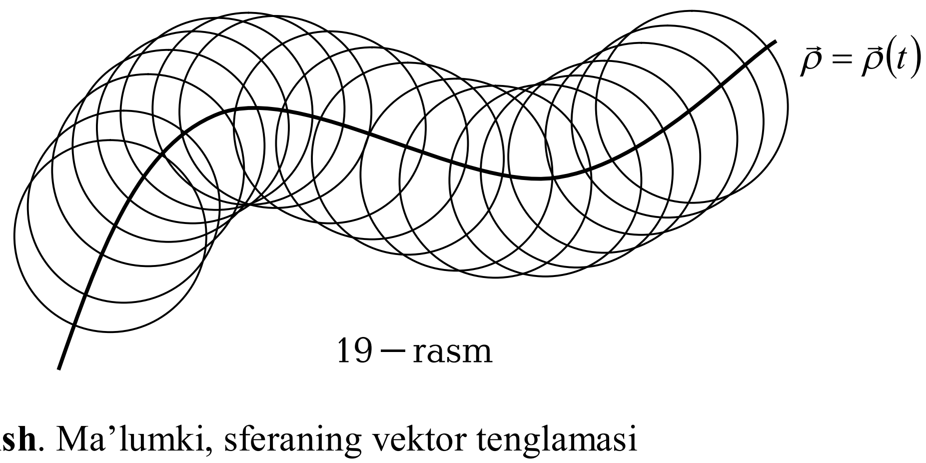
formula yordamida topiladi. Demak, berilgan sirtning (x_0,y_0,z_0) nuqtasidagi urinma tekisligi $(x-x_0)x_0+(y-y_0)2y_0+(z-z_0)z_0=0$ ko'rinishda bo'ladi. Masala shartiga ko'ra, $\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}$ munosabatni hosil qilamiz. Urinish nuqtasi sirtga tegishli bo'lganligi uchun, $x_0^2+2y_0^2+z_0^2=1$ tenglikka egamiz. Bulardan $(x_0,y_0,z_0)=\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\mp\sqrt{\frac{1}{22}},\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ nuqtani topamiz. Urinma tekisliklar tenglamalari esa $x-y+2z\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=0$ ko'rinishda bo'ladi. Endi, normal tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

formuladan foydalanib, $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\mp\sqrt{\frac{1}{22}},\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ nuqtadagi normali tenglamalari

$\frac{x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}}{1}=\frac{y\mp\sqrt{\frac{1}{22}}}{-1}=\frac{z\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}}{2}$ ekanini hosil qilamiz.

2-masala. Markazlari $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ chiziqda yotgan va radiuslari o`zgarmas bo`lgan sferalar oilasining o`ramasini toping (19-rasm).



19 − rasm

Yechish. Ma'lumki, sferaning vektor tenglamasi

$$[\vec{r}-\vec{\rho}(s)]^2-a^2=0\quad (a=const)$$

bo‘ladi. Bu tenglamani s parametr bo‘yicha differensiallab xarakteristika va qaytish qirrasi mos ravishda

$$\left[\vec{r}-\vec{\rho}(s)\right]^2-a^2=0,\quad \left[\vec{r}-\vec{\rho}(s)\right]\vec{\tau}=0 \qquad (*)$$

$$\left(\vec{r}-\vec{\rho}\right)^2=a^2,\left(\vec{r}-\vec{\rho}\right)\vec{\tau}=0,\left(\vec{r}-\vec{\rho}\right)k\vec{v}-1=0(**)$$

bo‘lishini topamiz. (*) tenglikdan ko‘rinadiki, oila xarakteristikalari: sferalarning $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ chiziq normal tekisliklar bilan kesishish chiziqlaridan iboratdir. Shunday qilib, o‘rama sirt aylanalardan tuzilgan. (**) dagi uchinchi tekislik $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ ning bosh normaliga perpendikular bo‘lib, $\vec{\rho}(s)$ nuqtadan k masofada turadi va (**) dagi ikkinchi tekislik bilan $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ ning egrilik o‘qi (binormalga parallel bo‘lib, yopishma aylana markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq) bo‘ylab kesishadi. Oilaning qaytish qirrasi esa $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ning egrilik o‘qlari bilan sferalarning kesishish nuqtalaridan tuzilgan va $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ ga “parallel” bo‘lgan ikkita chiziqdan iboratdir. Qaytish qirrasining tenglamasini (**) tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\vec{r}=\vec{\rho}+\frac{\vec{v}}{k}\pm\sqrt{a^2-\frac{1}{k^2}}\vec{\beta}\,.$$

Misol va masalalar

1. Berilgan sirtning M nuqtasidan shu sirtda yotuvchi biror to‘g‘ri chiziq o‘tsa, bu to‘g‘ri chiziq sirtning M nuqtasidagi urinma tekisligida yotishi isbotlansin.

2. Ushbu $x=u+\cos v, y=u-\sin v, z=\lambda u$ sirtda $M(u=1, v=\frac{\pi}{2})$ nuqta berilgan,

a) $u=1, v=\frac{\pi}{2}$ chiziqlarga M nuqtada o‘tkazilgan urinma to‘g‘ri chiziq va normal tekislik tenglamalari yozilsin;

b) $u=1, v=\frac{\pi}{2}$ chiziqlar orasidagi burchak topilsin;

c) $u=\sin v$ chiziqqa M nuqtada o‘tkazilgan urinma to‘g‘ri chiziq $u=1$ chiziqqa shu nuqtada o‘tkazilgan urinma bilan ustma-ust tushishi isbotlansin.

3. Vint chizig‘ining $x=a\cos u,\ y=a\sin u, z=bu$ urinmalaridan hosil bo‘lgan sirtning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan normali Oz o‘qi bilan o‘zgarmas burchak tashkil etishi isbotlansin.

4. Ushbu $x=2u-v, y=u^2+v^2, z=u^2-v^2$ sirtga $M(3,5,7)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasi tuzilsin.

5. Ushbu $x=u+v, y=u-v, z=uv$ sirtga $M(u=2, v=1)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik va normal to‘g‘ri chiziq tenglamalari tuzilsin.

6. Ushbu $x=u, y=u^2-2uv, z=u^3-3u^2v$ sirtga $M(1,3,4)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik va normal to‘g‘ri chiziq tenglamalari tuzilsin.

7. Berilgan $M(u=1, v=\frac{\pi}{2})$ nuqtada $x=u\cos v,\ y=u\sin v, z=u$ sirtga o‘tkazilgan urinma tekislik, normal to‘g‘ri chiziq va $u=2$ chiziqqa o‘tkazilgan urinma tenglamalari tuzilsin.

Quyidagi sirtlarga ko‘rsatilgan nuqtalarda urinma tekislik va normal to‘g‘ri chiziq tenglamalari tuzilsin:

8. $z=x^3+y^3$ $M(1;2;9)$ nuqtada;

9. $x^2+y^2+z^2=169$, $M(3;4;12)$ nuqtada;

10. $x^2-2y^2-3z^2=4$, $M(3;1;-1)$ nuqtada;

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $M(x_0;y_0;z_0)$ nuqtada;

12. $x=u\cos v,\ y=u\sin v, z=av$, ixtiyoriy nuqtada.

Quyidagi sirtlarga ko‘rsatilgan nuqtalarda urinma tekislik tenglamalari tuzilsin:

13. $x=a\sin u\cos v,\ y=a\sin u\sin v, z=a(\ln tg\frac{u}{2}+\cos u)$ ixtiyoriy nuqtada;

14. $x=(7+5\cos u)\cos v,\ y=(7+5\cos u)\sin v,\quad z=5\sin u,\ \cos u=\frac{3}{5},\ \cos v=\frac{4}{5},$ $\left(0<u,v<\frac{\pi}{2}\right)$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladigan $M(u,v)$ nuqtada.

15. Ushbu $xyz=1$ sirtning $x+y+z=0$ tekislikka parallel urinma tekislik tenglamasi tuzilsin.

16. Ushbu $xyz=a^3$ sirtning urinma tekisliklari koordinata tekisliklari bilan o‘zgarmas hajmli tetraedr hosil qilishi isbotlansin.

17. Konusning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urinma tekislik uning uchidan o‘tishi isbotlansin.

18. Ushbu $z=x^3+y^3$ sirtga $M(\alpha;-\alpha;0)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tekisliklar dasta hosil qilishi isbotlansin.

19. Quyidagi $x=(a+b\cos u)\cos v,\ y=(a+b\cos u)\sin v, z=b\sin u$ torning normali $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka perpendikular bo‘ladigan nuqtalarini toping.

20. Quyidagi $x^n+y^n+z^n-d^n=0$ sirtning $M(a,b,c)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tekislik koordinata o‘qlarini mos ravishda A,B,C nuqtalarda kesishi ma’lum ($a,b,c,d-$ musbat sonlar). U holda $\frac{a}{|OA|}+\frac{b}{|OB|}+\frac{c}{|OC|}=1$ tenglikni isbotlang.

21. Quyidagi $f(x-az, y-bz)=0$ sirtning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urinma tekisligi berilgan biror yo‘nalishga parallel bo‘lishi isbotlansin.

22. Berilgan $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ sirtning urinma tekisliklari koordinata boshidan o‘tishi isbotlansin.

23. Quyidagi $z = tg(xy),\ x^2 - y^2 = a$ sirtlarning kesishish nuqtalarida ortogonalligi isbotlansin.

Quyidagi sirtlar oilalarining juft-jufti bilan ortogonalligi isbotlansin ($\lambda, \mu, \nu -$ oilalarning parametrlari):

24. $4x + y^2 + z^2 = \lambda,\ y = \mu z,\ y^2 + z^2 = \nu e^x$;

25. $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu y,\ x^2 + y^2 + z^2 = \nu z$;

26. $xy = \lambda z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu,\ x^2 + y^2 + z^2 = \nu(x^2 - y^2)$.

27. Ushbu $x = u\cos v,\ y = u\sin v, z = f(v) + au$ sirt ustidagi $v = c$ chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan o‘tkazilgan urinma tekislik biror to‘g‘ri chiziqdan o‘tishi isbotlansin.

28. Sirtning barcha normallari berilgan biror nuqtadan o‘tsa, bu sirt sfera yoki sfera ustidagi soha ekanligi isbotlansin.

29. Aylanma sirtning normali meridianning bosh normali bilan ustma-ust tushishi va aylanish o‘qini kesib o‘tishi isbotlansin.

30. Barcha normallari bitta to‘g‘ri chiziqni kesuvchi sirt aylanma sirt ekanligi isbotlansin.

31. Quyidagi $yz = x,\ xz = y + 1$ chiziq $z = xy$ sirt bilan $M(0,-1,0)$ nuqtada ikkinchi tartibli urinishga ega ekanligi isbotlansin.

32. Quyidagi $x = t^3, y = t^3 + 2t,\ z = t^2$ chiziq $x^2 + y^2 = x(y + z)$ sirt bilan $M(0,0,0)$ nuqtada urinish tartibi aniqlansin.

33. Ikkinchi tartibli sirt bilan kamida ikkinchi tartibli urinishga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq sirtda yotishi isbotlansin.

34. O‘zining har bir nuqtasida yopishma tekisligi bilan kamida uchinchi tartibli urinishga ega bo‘lgan chiziq yassi ekanligi isbotlansin.

Quyidagi sirtlar oilalarining o‘ramasi topilsin:

35. $x^2 + y^2 + (z - C)^2 = 1$;

36. $x + C^2 y + z - 2C = 0$;

37. $(x - C)^2 + (y - C)^2 + (z - C)^2 = C^2,\ (C \neq 0)$;

38. Diskriminant sirti chiziqdan iborat bo‘ladigan sirtlar oilasiga misol keltiring.

39. Diskriminant sirti nuqtadan iborat bo‘ladigan sirtlar oilasiga misol keltiring.

40. Quyidagi $(x - C)^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferalar oilasining o‘ramasi va xarakteristik chizig‘i topilsin. Hosil bo‘lgan o‘ramaning qaytish qirrasi mavjudmi?

41. Quyidagi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ ellipslarning simmetriya o‘qlaridan biriga parallel vatarlarini diametr qilib sferalar yasalgan. Bu oilaning o‘ramasi topilsin.

42. Quyidagi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ giperbolalarning simmetriya o‘qlaridan biriga parallel vatarlarini diametr qilib sferalar yasalgan. Bu oilaning o‘ramasi topilsin.

43. Quyidagi $x\sin\alpha+y\cos\alpha+z=b\alpha$ (bu yerda $b=const,\ \ \alpha-$ parametr) tekisliklar oilasining qaytish qirrasi topilsin.

44. O‘ramasi $x^2+y^2=a^2z^2,\ (z\neq 0)$ konusdan iborat bo‘ladigan sferalar oilasi topilsin.

45. Markazlari $x^2+y^2=b^2,\ z=0$ aylanada joylashgan a radiusli sferalar oilasining o‘ramasi, xarakteristik chizig‘i va qaytish qirrasi topilsin.

46. Ushbu

$$\left[(x-C)^2+(y-R)^2+z^2-R^2\right]\cdot\left[(x-C)^2+(y+R)^2+z^2-R^2\right]=0\ \ \left(y^2+z^2\neq 0\right)$$

sirtlar oilasining o‘ramasi, xarakteristik chizig‘i va qaytish qirrasi topilsin.

47. Fazoviy chiziq yopishma tekisliklari oilasining o‘ramasi va xarakteristik chiziqlari topilsin. Bu oilaning qaytish qirrasi mavjudmi?

48. Fazoviy chiziq normal tekisliklari oilasining o‘ramasi, xarakteristik chiziqlari va qaytish qirrasi topilsin.

49. Fazoviy chiziq to‘g‘rilovchi tekisliklari oilasining o‘ramasi, xarakteristik chiziqlari va qaytish qirrasi topilsin.

50. Markazlari $z=0$ tekislikda yotgan, o‘zgarmas a radiusli sferalar oilasining o‘ramasi topilsin.

51. Berilgan sirtning barcha urinma tekisliklari unga chiziqlar bo‘yicha urinsa, bu chiziqlar to‘g‘ri chiziq yoki uning qismi ekanligi isbotlansin.

52. Berilgan n ta nuqtagacha masofalar yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan tekisliklar oilasining o‘ramasi topilsin.

53. Koordinata tekisliklari bilan kesishib, hajmlari teng tetraedrlarni ajratgan tekisliklar oilasining o‘ramasini toping.

54. Markazlari xOy tekislikda yotgan o‘zgarmas radiusli sferalar o‘ramasini toping.

55. Yarim o‘qlarining yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan ellipsoidlar oilasining o‘ramasi topilsin.

56. Markazlari usbu $\vec{r}=a\vec{e}(t)+bt\vec{k}$ vint chiziqda yotgan o‘zgarmas radiusli sferalarning o‘ramasi va qaytish qirrasini toping.

57. Diametrlari $x^2+y^2-2x=0,\ z=0$ aylananing koordinatalar boshidan o‘tuvchi vatarlardan iborat sferalar oilasining o‘ramasi va qaytish qirrasi topilsin.

58. Quyidagi $x\cos\alpha-y\sin\alpha+z-a\alpha=0$ (bunda $\alpha-$oila parametri), tekisliklar oilasining o‘ramasi va qaytish qirrasi topilsin.

59. Ushbu $\left(a\vec{e}(\alpha)+b\vec{k}\right)\vec{r}+c\alpha=0$ tekisliklar oilasining qaytish qirrasi topilsin.

60. Quyidagi

a) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha = a$; ($\alpha$ – parametr);

b) $a^2x+2ay+2z-2a=0$; (a – parametr)

tekisliklar oilasining o‘ramasi topilsin.

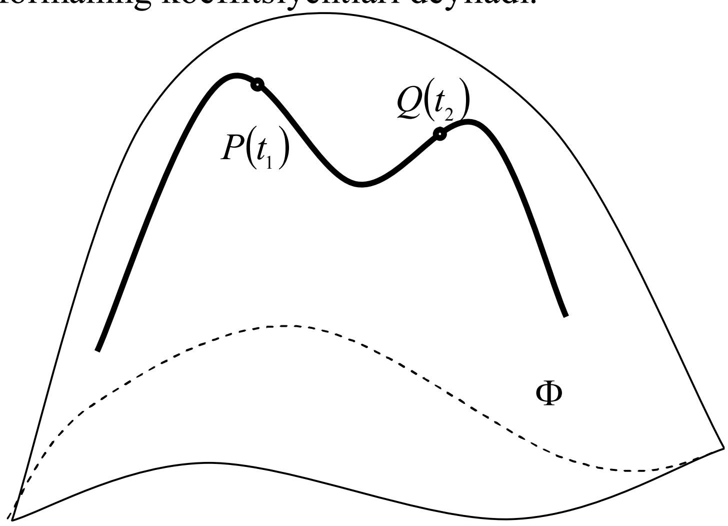
61. Yasovchilarining ortogonal trayektoriyasi ushbu $x=a\cos\varphi, y=b\sin\varphi, z=0$ ellipsdan iborat bo‘lgan yoyiluvchi sirtning tenglamasi topilsin.

3 §. Birinchi kvadratik forma

Differensial geometriyaning sirtlarni egish natijasida saqlanib qoladigan xossalarni o‘rganadigan bo‘limi ichki geometriya deb ataladi. Ichki geometriyaga sirtning birinchi kvadratik formasi, sirt ustidagi chiziq yoyi uzunligi, sirt ustidagi chiziqlar orasidagi burchak, sirt ustidagi sohaning yuzasi kabi ko‘pgina sirtning xarakteristikalari kiradi.

Asosiy tushunchalar

1.1-Ta’rif. Ushbu $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ifoda $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ tenglama bilan berilgan sirtning birinchi kvadratik formasi $E=\vec{r}_u^{\,2}=x_u^2+y_u^2+z_u^2$, $F=(\vec{r}_u,\vec{r}_v)=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$, $G=\vec{r}_v^{\,2}=x_v^2+y_v^2+z_v^2$ birinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlari deyiladi.



20 – rasm

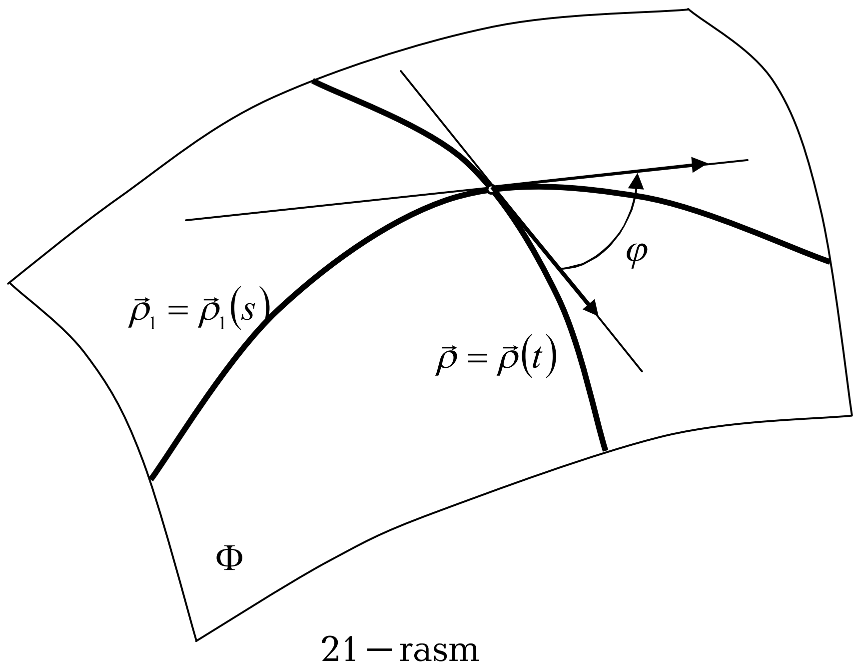
Bizga Φ sirtning (f,G) parametrlash usuli

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$$

tenglama yordamida berilib, sirtda $u = u(t)$, $v = v(t)$ tenglamalar bilan γ chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan γ chiziqning, parametrlarning t_1 va t_2 $(t_1 < t_2)$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtalari orasidagi (20-rasm) yoyi uzunligi

$$l(\gamma)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \cdot u'^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot v'^2}\, dt$$

formula bilan hisoblanadi.



21 – rasm

Berilgan Φ sirtda $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ va $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(s)$ tenglamalar bilan regulyar chiziqlar berilgan bo‘lsin. Agar bu chiziqlar kesishsa (ya’ni $\vec{\rho}(t_0) = \vec{\rho}_1(s_0)$ tenglikni qanoatlantiruvchi parametrlarning qiymatlari t_0, s_0 mavjud bo‘lsa), $\vec{\rho}\,'(t_0)$, $\vec{\rho}_1'(s_0)$ vektorlar orasidagi burchakni shu nuqtadagi egri chiziqlar orasidagi burchak deb ataymiz. Bu burchakning qiymatini φ deb belgilasak, sirt ustida $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ va $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(s)$ tenglamalar bilan berilgan chiziqlar orasidagi burchak (21-rasm) ushbu

$$\cos\varphi = \frac{Eu'(t_0)u_1'(s_0) + F(u'(t_0)v_1'(s_0) + v'(t_0)u_1'(s_0)) + Gv'(t_0)v_1'(s_0)}{\sqrt{E(u'(t_0))^2 + 2Fu'(t_0)v'(t_0) + G(v'(t_0))^2} \cdot \sqrt{E(u_1'(s_0))^2 + 2Fu_1'(s_0)v_1'(s_0) + G(v_1'(s_0))^2}}$$

formula yordamida hisoblanadi.

Bizga Φ sirtning (f, G) parametrlash usuli

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

tenglama yordamida berilib, $D' \subset G$ yopiq sohaning Φ sirtdagi aksi D ham yopiq bo‘lsin. U holda, D sohaning yuzasi $\sigma = \iint\limits_{D'} \sqrt{EG - F^2}\,dudv$ formula bilan topiladi.

Misol va masalalar yechish namunalari

1 – ***masala***. Ushbu konik $x = av\cos u, y = bv\sin u, z = v$ sirtning birnchi kvadratik formasini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$x_u = -av\sin u; y_u = bv\cos u; z = 0;$$

$$x_v = a\cos u; y_u = b\sin u; z_v = 1$$

Birinchi kvadratik forma koeffisientlarini topamiz:

$$E = a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u;$$

$$F = -a^2v\sin u\cos u + b^2v\sin u\cos u;$$

$$G = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1.$$

Demak, konik sirtning birinchi kvadratik formasi

$ds^2 = (a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u)du^2 + 2(-a^2\sin u\cos u +$
$+ b^2v\sin u\cos u + (a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1)dv^2$ ko‘rinishda bo‘lar ekan.

2 – ***masala***. $x = \cos u\cos v - \sin v, y = \sin u\cos v + \cos u, z = u$ sirt ustida $u - 2\cos v - 1 = 0$ chiziq yotadi. Bu chiziqning $M_0(3,0), M_1(1, \frac{\pi}{2})$ nuqtalari orasidagi yoyi uzunligini aniqlang.

Yechish. Chiziqning tenglamasini parametrik ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun v ni t deb belgilasak $u = 1 + 2\cos t$ bo‘ladi. Chiziq parametrik tenglamalari $u = 1 + 2\cos t, v = t.$ Endi E, F va G koeffisiyentlarini aniqlaymiz:

$$x_u = -\sin u\cos v - \cos u,$$

$$y_u = \cos u\cos v - \sin u,$$

$$z_u = 1,$$

$$x_v = -\cos u\sin v$$

$$y_v = -\sin u\sin v,$$

$$z_v = 0,$$

$$E = 2 + \cos^2 v; F = \sin v; G = \sin^2 v.$$

$\frac{du}{dt}$ va $\frac{dv}{dt}$ hosilalarni egri chiziq tenglamasidan foydalanib topishimiz lozim va topilgan $\frac{du}{dt} - 2\sin t; \frac{dv}{dt} = 1$ qiymatlarni yoy uzunligi formasiga qo‘yamiz:

$$s=\int_1^2\sqrt{(2+\cos^2 t)(-2\sin t)^2+2\sin v(-2\sin t)\cdot 1+\sin^2 v\cdot 1}dt.$$

Nuqta chiziq bo‘ylab harakatlanganda, ya’ni t parametr o‘zgarganda, u va v shu bilan birga E,F,G lar ham o‘zgaradi. Shuning uchun E,F,G qiymatlarida u va v o‘rniga t ning chiziq tenglamasidan aniqlangan qiymatlarini qo‘yamiz. Chiziqning tenglamalaridan t_1 va t_2 qiymatlarini topamiz:

$M_0(3,0)$ nuqtaga mos keluvchi parametrning qiymatini $3=1+2\cos t, v=t$ tenglamalardan topiladi: $t_1=0$ va $M_1(1,\frac{\pi}{2})$ nuqtada $1=1+2\cos t, v=t$ tenglamalardan $t_2=\frac{\pi}{2}$ topiladi. Demak,

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(2+\cos^2 t)\cdot 4\sin^2 t-4\sin^2 t+\sin^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{5\sin^2 t+4\sin^2 t\cos^2 t}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{5+4\cos^2 t}\cdot\sin^2 tdt=-\frac{1}{2}[\frac{2\cos t}{2}\sqrt{5+4\cos^2 t}+\frac{5}{2}\ln(2\cos t+$$

$$+\sqrt{5+4\cos t^2 t})]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(3+5\ln 5)$$

ya’ni $s=\frac{1}{2}(3+5\ln 5)$.

3 – masala. Ushbu $u+v, y=u-v, z=uv$ sirt ustida $u=t, v=-\frac{1}{2}t$ va $u=t, v=\frac{1}{2}t-1$ chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Berilgan chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz. Chiziqlarning berilgan tenglamalaridan t ni yo‘qotish bilan hosil qilingan $u+2v=0,\ \ u-2v-2=0$ sistemani yechib, $M_0(1,-\frac{1}{2})$ - kesishish nuqtasini topamiz. Bu yerda t_0 ning qiymati 1 ga teng. E,F,G koeffitsiyentlarni chiziqlarning kesishgan nuqtasi $M_0(1,-\frac{1}{2})$ uchun hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} x_u&=1, & x_v&=1\\ y_u&=1, & y_v&=1,\\ z_u&=v, & z_v&=u, \end{aligned}$$

$$E = 2 + v^2, E = \frac{9}{4}$$

$$F = 1 - 1 + uv, F = -\frac{1}{2}$$

$$G = 2 + u^2, G = 3.$$

Birinchi chiziqning tenglamasidan $\frac{du}{dt} = 1, \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2}$. Ikkinchi chiziq tenglamasidan $\frac{\delta u}{dt} = 1, \frac{\delta v}{dt} = \frac{1}{2}$. Topilgan qiymatlarni chiziqlar orasidagi burchaklarni hisoblash formulasiga qo‘yib, $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{35}}$ ni hosil qilamiz.

Masala va misollar

Quyidagi aylanma sirtlarning birinchi kvadratik formasi topilsin:

1. $x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, z = g(u)$ aylanish o‘qi Oz bo‘lgan aylanma sirt;

2. $x = R\cos u\cos v, y = R\cos u\sin v, z = R\sin u$ - sfera;

3. $x = a\cos u\cos v, y = b\cos u\sin v, z = c\sin u$ - aylanma ellipsoid;

4. $x = achu\cos v, y = bchu\sin v, z = cshu$ - bir pallali aylanma giperboloid;

5. $x = ashu\cos v, y = bshu\sin v, z = cchu$ - ikki pallali aylanma giperboloid.

6. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$ - aylanma paraboloid;

7. $x = R\cos v, y = R\sin v, z = u$ - aylanma silindr;

8. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = ku (u \neq 0)$ - uchga ega bo‘lmagan aylanma konus;

9. $x = (a + b\cos u)\cos v, y = (a + b\cos u)\sin v, z = b\sin u$ - tor. $(0 < b < a)$;

10. $x = ach\frac{u}{a}\cos v, y = ach\frac{u}{a}\sin v, z = u$ - katenoid;

11. $x = a\sin u\cos v, y = a\sin u\sin v, z = a(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u)(u \neq \frac{\pi}{2})$ - psevdosfera.

12. Ushbu $x = a\cos v, y = u\sin v, z = av$ to‘g‘ri gelikoidning birinchi kvadratik formasini toping.

13. Umumiy korinishda berilgan $x = u\cos v, y = u\sin v, z = f(u) + av$ gelikoidning birinchi kvadratik formasini toping.

14. Ushbu $\vec{r} = \vec{r}(u)$ (u – tabiy paramert) chiziq a) urinmalar; b) bosh normallari; c) binormallarning qismidan tashkil topgan S sirtning birinchi kvadratik formasini toping.

15. Ushbu $z = z(x, y)$ sirtning birinchi kvadratik formasini toping.

16. Quyidagi ifodalarning qaysilari biror sirt uchun birinchi kvadratik forma bo‘la olmaydi?

a) $ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2$;

b) $ds^2 = du^2 + 4dudv + 4dv^2$

c) $ds^2 = du^2 - 4dudv + 6dv^2$;

d) $ds^2 = du^2 + 4dudv - 2dv^2$;

17. Aylanma sirtda sirtning birinchi kvadratik formasi $ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$ ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘ladigan qilib egri chiziqli koordinatalarni tanlash mumkinligini isbotlang.

18. Sfera, katenoid, tor va psevdosferaning birinchi kvadratik formasini $ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$ ko‘rinishga keltiring.

19. Sirt ustida berilgan koordinata chiziqlari bir oilasining ikkinchi koordinata chiziqlari oilasi yordamida ajratgan yoy uzunliklari teng bo‘lsa, bu oilalar tashkil etgan to‘r Chebishev to‘ri deyiladi. Sirt ustidagi koordinat chiziqlari Chebishev to‘rini hosil qilishi uchun $E_v = 0, G_u = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarliligi isbotlansin

20. Sirtning birinchi kvadratik formasi $ds^2 = A(u,v)(du^2 + dv^2)$ ko‘rinishda bo‘ladigan egri chiziqli koordinatalar sistemasi izotermik deyiladi. Psevdosferada izotermik koordinatalar sistemasini toping.

21. Giperbolik paraboloid to‘g‘ri chiziqli yasovchilarning kesishish burchagi topilsin.

22. Ushbu $z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2)$ va $z = axy$ paraboloidlarning xOy tekislikdagi bitta sohaga proyeksiyalanuvchi sohalarining yuzaklari tengligini isbotlang.

23. Aylanma sirt meridianlarini o‘zgarmas α burchak ostida kesuvchi chiziqlar (loksodromlar) tenglamalarini toping.

24. Sfera loksodromlarining tenglamalari tuzilsin.

25. Sirt ustida chiziqlar oilasi $Adu + Bdv = 0$ differensial tenglama bilan berilgan. Bu oilaga ortogonal trayektoriyalarning tenglamasi $(BE - AF)du + (BF - AG)dv = 0$ differensial tenglama yordamida topilishi isbotlansin.

26. Konus to‘g‘ri chiziqli yasovchilarining ortogonal trayektoriyalarini toping.

27. Berilgan S sirt biror chiziq urinmalarining qismidan tashkil topgan sirt bo‘lsa, bu sirt to‘g‘ri chiziqli yasovchilarining ortogonal trayektoriyalarini toping.

28. Oldingi masaladagi S sirtning to‘g‘ri chiziqli yasovchilarini o‘zgarmas α burchak ostida kesuvchi chiziqlarning differensial tenglamalarini toping.

29. Sirt ustidagi $\varphi(u,v) = const$ chiziqlar oilasining ortogonal trayektoriyalarining differensial tenglamalarini toping.

30. Berilgan $x = R\cos u \cos v, y = R\cos u \sin v, z = R\sin u$ sferadagi

$u+v=const$ chiziqlar oilasi ortogonal trayektoriyalarining tenglamalarini toping.

31. Ushbu $x=u\cos v, y=u\sin v, z=u+v$ gelikoiddagi $u=Ce^{u}$ chiziqlar oilasining ortogonal trayektoriyalari topilsin.

32. Konus $x=u\cos v, y=u\sin v, z=u$ tenglamalar bilan berilgan. Berilgan konus ustidagi $v=u^2+\alpha, \alpha=const$ chiziqlar oilasining ortogonal trayektoriyalari topilsin.

33. Koordinat chiziqlari sifatida $v=const$ chiziqlar va ularning ortogonal trayektoriyalarini olib, $x=u\cos v, y=u\sin v, z=u+v$ gelikoid tenglamasini tuzing.

34. Ushbu $P(u,v)du^2+Q(u,v)dudv+R(u,v)dv^2=0$ differensial tenglama yordamida aniqlangan ikkala oilalarning o‘zaro ortogonal bo‘lish shartlarini keltirib chiqaring.

35. Ushbu $du^2-(u^2+a^2)dv^2=0$ differensial tenglama $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ to‘g‘ri gelikoid ustida ortogonal to‘rni aniqlashini isbotlang.

36. Berilgan $z=axy$ sirt to‘g‘ri chiziqli yasovchilarining ortogonal trayektoriyalari topilsin.

37. O‘zining har bir nuqtasida koordinat chiziqlari orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘luvchi chiziqlar ushbu $\sqrt{E}du\pm\sqrt{G}dv=0$ differensial tenglamalar bilan aniqlanishini isbotlang.

38. Ushbu $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ to‘g‘ri gelikoidda koordinat chiziqlari orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘luvchi chiziqlarni toping.

39. Berilgan $x=R\cos u\cos v, y=R\cos u\sin v, z=R\sin u$ sferaning parallellari va meridianlari orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘luvchi chiziqlarning tenglamasini toping.

40. Har bir nuqtada, berilgan $z=axy$ sirt to‘g‘ri chiziqli yasovchilari orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘luvchi chiziqlarning tenglamasini toping.

41. Ushbu $x=u^2+v^2, y=u^2-v^2, z=uv(|u|+|v|\neq 0)$ sirt berilgan.

a) Berilgan sirtning birinchi kvadratik formasini toping;

b) $u=2, v=1, v=au$ chiziqlar uchun yoy uzunligining differensialini toping;

c) $v=au$ chiziqlarning $u=2, u=1$ nuqtalari orasidagi yoy uzunligi topilsin.

42. Ushbu $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ to‘g‘ri gelikoid ustidagi $u+v=0, u-v=0$ chiziqlar orasidagi burchakni toping.

43. Birinchi kvadratik formasi $ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$ ko‘rinishida bo‘lgan sirt ustidagi $u=\pm\frac{av^2}{2}, v=1$ uchburchakning ichki burchaklari va perimetri topilsin.

44. Birinchi kvadratik formasi $ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$ ko‘rinishda bo‘lgan sirtdagi $u = v$ chiziqning $M_1(u_1, v_1), M_2(u_2, v_2)$ nuqtalari orasidagi yoyi uzunligini toping.

45. Birinchi kvadratik formasi $ds^2 = du^2 + dv^2$ ko‘rinishda bo‘lgan sirtda ustidagi $v = 2u, v = -2u$ chiziqlar orasidagi burchakni toping.

46. Ushbu $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$ sirtda berilgan $v = u + 1, v = 3 - u$ chiziqlar orasidagi burchakni toping.

47. Ushbu $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ to‘g‘ri gelikoid ustidagi $v = \ln(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}) + C$ chiziqlarning $M_1(u_1, v_1), M_2(u_2, v_2)$ nuqtalar orasidagi yoy uzunligini toping.

48. Ushbu $x = a\sin u\cos v, y = a\sin u\sin v, z = a(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u)$ psevdosfera ustidagi $v = \pm a\ln tg\frac{u}{2} + C$ chiziqlarning $M_1(u_1, v_1), M_2(u_2, v_2)$ nuqtalari orasidagi yoyi uzunligini toping.

49. Sfera ustida tomonlari sferaning katta aylanalari yoylaridan iborat to‘g‘ri burchakli uchburchak berilgan.U holda

a) uchburchakning yuzasi topilsin;

b) uchburchakning tomonlari orasidagi munosabat topilsin.

50. Ushbu $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ to‘g‘ri gelikoid ustidagi $u = 0, u = a, v = 1, v = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan to‘rtburchak yuzasi topilsin.

51. Ushbu $x = a\cos v, y = b\sin v, z = u$ silindri sirtning

a) birinchi kvadratik formasi;

b) $u + v = 0, u - 2v = 0$ chiziqlar orasidagi burchak;

c) $u = v$ chiziqlar $M_1(u_1, v_1), M_2(u_2, v_2)$ nuqtalar orasidagi yoyi uzunligi;

d) $u \pm v = 0, v = 2$ chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakning yuzasi topilsin.

52. Birinchi kvadratik formasi $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ ko‘rinishda bo‘lgan sirtdagi $u = \pm av, v = 1$ chiziqlar bilan chagaralangan uchburchakning yuzasi topilsin.

53. Viviani chizig‘i bilan chegaralangan qavariq sferik soha yuzasi topilsin.

54. Umumiy uchga ega ikkita katta yarim aylanalardan tashkil topgan shakl sferik ikkiburchak deyiladi. Uchidagi burchagi φ_0 bo‘gan sferik ikkibutchak yuzasi topilsin.

55. Ixtiyoriy silindrik sirtni tekislikka yotqizish mumkin ekanligini isbotlang.

56. Ixtiyoriy konussimon sirtni tekislikka yotqizish mumkin ekanligini isbotlang.

57. Ixtiyoriy tekislikka yotqizish mumkin bo‘lgan sirt biror chiziq urinmalarining qismidan iborat ekanligini isbotlang.

58. To‘g‘ri gelikoidni katenoidga yotqizish mumkin ekanligini isbotlang.

59. Birinchi kvadratik formasi $ds^2(f(u)+g(u))(du^2+dv^2)$ korinishga keltirish mumkin bo‘lgan sirtlat **Luivill sirti** deyiladi. Aylanma sirtga yotqizish mumkin bo‘lgan sirt Luivill sirti bo‘lishini isbotlang.

60. Ixtiyoriy aylanma sirtni tekislikka lokal konform akslantirish mumkinligini isbotlang.

61. Bir sirtni ikkinchi sirtga akslantirishda mos sohalarning yuzalari teng bo‘lsa, bu akslantirish **ekvireal** deyiladi. Bir sirtni ikkinchi sirtga akslantirish konform va ekvireal bo‘lsa, u holda bu akslantirish izometriya ekanligini isbotlang.

4 §. Sirtlarning sferik tasviri. Ikkinchi kvadratik forma

Sirtlarning sferik tasviri yoki sferik akslantirish tushunchasi yordamida ham berilgan sirtning Gauss egriligini topish mumkin.

Differensial geometriyada sirt nuqtalarining urinma tekislikdan chetlanishini aniqlashda yoki sirt nuqtalarini klassifikatsiyalashda sirtning ikkinchi kvadratik formasidan foydalaniladi. Bu paragrafda sirtlarning sferik tasvirini, ikkinchi kvadratik formasini, to‘la va o‘rta egriligini topishga doir misol va masalalar keltirilgan.

Asosiy tushunchalar

Bizga *Φ* sirt va uning (f, G) parametrlash usuli $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ tenglama yordamida berilgan bo‘lsin.

4.1-Ta’rif. Ushbu $ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ ifoda $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ tenglama bilan berilgan sirtning ikkinchi kvadratik formasi,

$$L=(\vec{r}_{uv},\vec{n})=\frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=(\vec{r}_{uv},\vec{n})=\frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N=(\vec{r}_{uv},\vec{n})=\frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

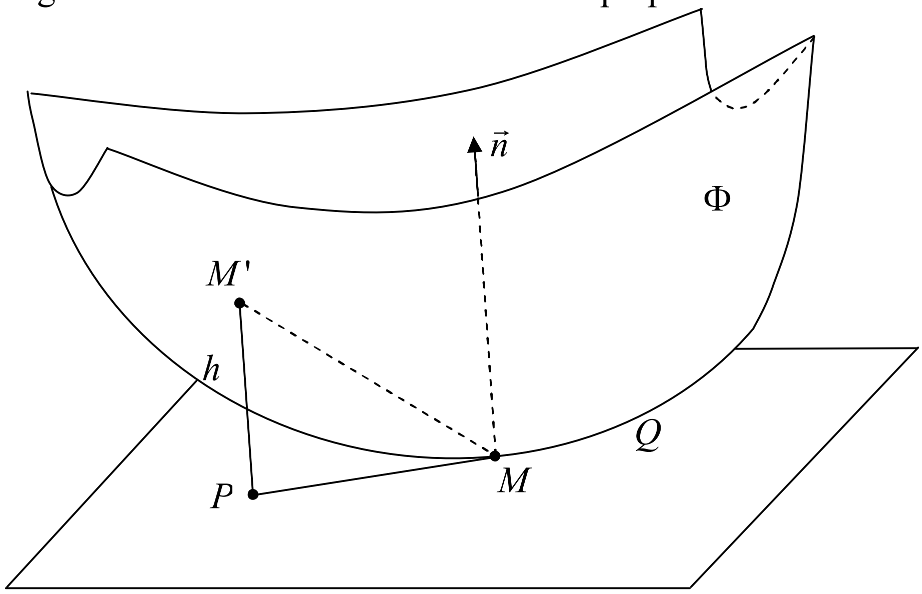
ikkinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlari deyiladi (22-rasm).

Berilgan *Φ* sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari koeffisiyentlaridan tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} L(p) & M(p) \\ M(p) & N(p) \end{pmatrix}$$

matritsalarni kiritamiz. Ma’lumki, $\det A>0$ bo‘lganligi uchun teskari A^{-1} matritsa mavjud. $A^{-1}B$ matrisa uchun quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

1-Tasdiq. $A^{-1}B$ matritsaning xos sonlari haqiqiy bo‘lib, ular har xil bo‘lganda ularga mos keluvchi xos vektorlar o‘zaro perpendikulardir.



22 – rasm

4.2-Ta’rif. Yuqoridagi matrisaning xos sonlarini λ_1, λ_2 deb, xos vektorlarini $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ kabi belgilangan bo‘lsa, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ munosabat bajarilganda $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar aniqlovchi to‘g‘ri chiziqlar p nuqtadagi bosh yo‘nalishlar deb ataladi.

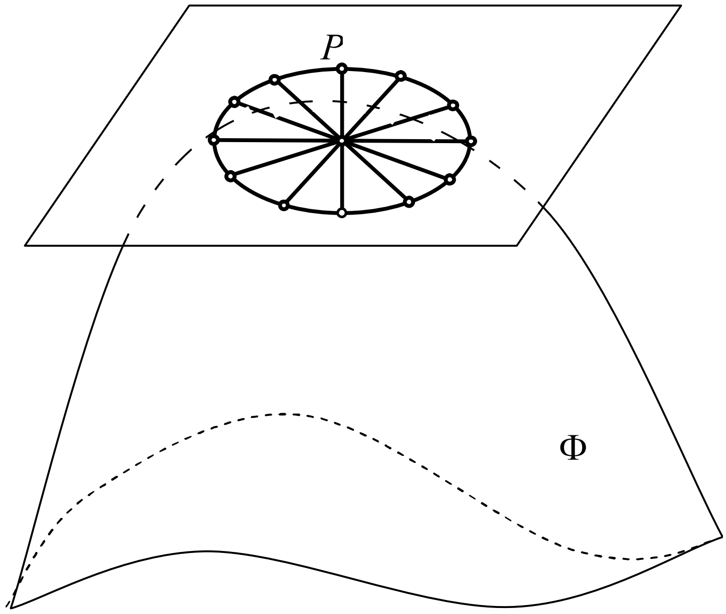
4.3-Ta’rif. Ushbu $\dfrac{II(\vec{a},\vec{a})}{I(\vec{a},\vec{a})}$ munosabat bilan aniqlangan son Φ sirtning p nuqtadagi $\vec{a}$ yo‘nalish bo‘yicha normal egriligi deyiladi va $k_n(\vec{a})$ bilan belgilanadi.

2-Tasdiq. $A^{-1}B$ matritsaning xos $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar yo‘nalishlari bo‘yicha normal egriliklar mos ravishda shu matritsaning xos sonlariga teng bo‘ladi. Bosh yo‘nalishlarga mos keluvchi normal egriliklar bosh egriliklar deb ataladi.

4.4-Ta’rif. Regulyar Φ sirtning p nuqtasidagi bosh egriliklar k_1, k_2 bo‘lsa, $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ va $K = k_1 \cdot k_2$ ifodalar mos ravishda Φ sirtning p nuqtadagi o‘rta va to‘liq (yoki Gauss) egriliklari deb ataladi. Bosh egriliklar $\det|B - \lambda A| = 0$ tenglamaning echimi ekanligini hisobga olsak

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \text{ va } H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

formulalarni hosil qilamiz. Birinchi kvadratik forma musbat aniqlangani uchun Gauss egriligining ishorasi $LN - M^2$ fodaning ishorasiga bog‘liqdir. Agar p^0 nuqtada K>0 bo‘lsa, uni elliptik nuqta, $K < 0$ bo‘lsa, giperbolik nuqta, agar $K = 0$ bo‘lsa, p ni parabolik nuqta deb ataymiz.



23 – rasm

3-Tasdiq. Ixtiyoriy $\vec{a} \in T_p\Phi$ urinma vektor uchun

$$k_n(\vec{a}) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

tenglik o‘rinlidir. Bu erda k_1, k_2-bosh egriliklar bo‘lib, aniqlik uchun $k_1 \geq k_2$ deb hisoblaymiz.

Regulyar Φ sirtning p nuqtasini fiksirlab, ixtiyoriy urinma $\vec{a}$ vektor bo‘yicha $k_n(\vec{a})$ normal egrilikni hisoblab, urinma tekislikda $\vec{a}$ yo‘nalish bo‘yicha boshi p nuqtada joylashgan uzunligi $\dfrac{1}{\sqrt{|k|}}$ ga teng bo‘lgan kesma olib, bu kesmalar uchlarining geometrik o‘rnini D’yupen indikatritsasi deb ataymiz (23-rasm). Ta’rifdan foydalanib, D’yupen indikatritsasi uchun ushbu

$$|L(u_0, v_0)x^2 + 2M(u_0, v_0)xy + N(u_0, v_0)y^2| = 1$$

tenglamani hosil qilish mumkin. Demak, D’yupen indikatritsasi ikkinchi tartibli chiziqdir. Shuning uchun, agar

a) $LN - M^2 > 0$ bo‘lsa, D’yupen indikatritsasi ellips;

b) $LN - M^2 < 0$ bo‘lsa D’yupen indikatritsasi ikkita qo‘shma giperbola;

c) $LN - M^2 = 0$ bo‘lsa D’yupen indikatritsasi 2 ta parallel to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

Misol va masalalar yechish namunalari

1 – masala. Torning sferik tasvirini toping.

Yechish. Buning uchun torning parametrik tenglamasini olamiz:

$$\begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v \\ y = (a + b\cos u)\sin v, 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi, a > b > 0. \\ z = b\sin u \end{cases}$$

So‘ngra uning birlik normal vektorini topamiz:

$$\vec{n} = \cos u \cos v \vec{i} + \cos u \sin v \vec{j} + \sin u \vec{k}.$$

Normal vektorning boshini koordinatalar boshiga keltirib uning uchlari chizgan chiziqni aniqlaymiz. Paramertlarning o‘zgarishini hisobga olsak, torning sferik tasviri ikki marta qoplaydi. Torning eng yuqori va eng quyi parallellari mos ravishda sferaning shimoliy va janubiy qutblariga o‘tadi.

2 – masala. Ushbu $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan sirtning ikkinchi kvadratik formasi aynan nolga teng bo‘lishi uchun bu sirt tekislik yoki uning qismidan iborat bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

Yechish. ***Zaruriyligi***. Masalaning shartiga ko‘ra, $\begin{cases} z_{xx} = 0 \\ z_{yy} = 0 \\ z_{xy} = 0 \end{cases}$ sistemaning yechimi tekislikni ifodalashini ko‘rsatishimiz kerak. Bu sistemadagi birinchi tenglamani integrallab, $z_x = a + \varphi(y)$ funksiyani hosil qilamiz. Topilgan funksiyadan y bo‘yicha hosila olib nolga tenglaymiz. Natijada, $z_{xy} = \varphi'(y) = 0$ va $\varphi(y) = const$ munosabatlarni olamiz. Endi $z_x = a + \varphi(y) = a + b = c$ deb belgilash kiritib, oxirgi tenglikni integrallaymiz. Hosil bo‘lgan $z = cx + \psi(y)$ ifodadan ikki marta hosila olib, nolga tenglash natijasida $\psi(y)$ funksiya chiziqli ekanligi kelib chiqadi. Nihoyat $z = cx + dy + e$ ko‘rinishdagi tekislik tenglamasiga kelamiz.

Yetarliligi. Bizda $z = ax + by + c$ tenglama bilan tekislik berilgan bo‘lsin. Bunda ikkinchi kvadratik formaning

$L = \dfrac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, M = \dfrac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, N = \dfrac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$ koeffisientlarini hisoblab, ularning aynan nolga tengligini hosil qilamiz. Tasdiq isbotlandi.

Masala va misollar

Quyidagi sirtlarning sferik tasvirini toping:

1. Sfeta.

2. Ellipsoid.

3. Elliptik paraboloid.

4. Bir pallali aylanma giperboloid.

5. Ikki pallali aylanma giperboloid.

6. Elliptik silindr.

7. Parabolik silindr.
8. Giperbolik silindr.
9. Aylanma silindr.
10. Katenoid.
11. Psevdosfera.
12. Tor.
13. $y = x^3$ silindr.
14. To‘g‘ri gelikoid.
15. Fazoviy $\vec{r} = \vec{r}(t)$ chiziq urinmalarining qismlaridan iborat sirtning sferik tasvirini toping.

Quyidagi aylanma sirtlarning ikkinchi kvadratik formasini toping:
16. $x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, z = g(u)$ aylanish o‘qi Oz bo‘lgan aylanma sirt.
17. $x = R\cos u\cos v, y = R\cos u\sin v, z = R\sin u$ - sfera.
18. $x = a\cos u\cos v, y = a\cos u\sin v, z = c\sin u$ - aylanma ellipsoid.
19. $x = achu\cos v, y = achu\sin v, z = cshu$ - bir pallali aylanma giperboloid.
20. $x = ashu\cos v, y = ashu\sin v, z = cchu$ - ikki pallali aylanma giperboloid.
21. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$ - aylanma paraboloid.
22. $x = R\cos v, y = R\sin v, z = u$ - aylanma silindr.
23. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = ku \ (u \neq 0)$ - uchga ega bo‘lmagan aylanma konus.
24. $x = (a + b\cos u)\cos v, y = (a + b\cos u)\sin v, z = b\sin u$ - tor $(0 < b < a)$.
25. $x = ach\frac{u}{2}\cos v, y = ach\frac{u}{2}\sin v,, z = v$ - katenoid.
26. $x = a\sin u\cos v, y = a\sin u\sin v, z = a(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u), (u \neq \frac{\pi}{2})$ - psevdosfera.
27. Ushbu $x = \cos v, y = u\sin v, z = av$ - to‘g‘ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasini toping.
28. Tekislikning ikkinchi kvadratik formasi egri chiziqli koordinatalarni tanlashga bog‘liq bo‘lmagan holda aynan nolga teng ekanligini isbotlang.
29. Ushbu $z = f(x, y)$ ko‘rinishda berilgan sirtning ikkinchi kvadratik formasi aynan nolga teng bo‘lsa, berilgan sirt tekislik yoki uning qismi ekanligini isbotlang.
30. Katenoid tenglamasini quyidagi
$x = \sqrt{u^2 + a^2}\cos v, y = \sqrt{u^2 + a^2}\sin v, z = a\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})$ ko‘rinishda berish mumkinligini ko‘rsating. Yuqoridagi parametrlash usulida katenoidning

ikkinchi kvadratik formasini hisoblang va koordinat chiziqlarining normal egriliklarini toping.

31. Biror fazoviy chiziqqa o‘tkazilgan urinmalarning qismlaridan iborat S sirt berilgan. Bu sirtning bosh egriliklarini toping.

32. Ushbu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ ikki pallali giperboloidning uchlaridagi bosh egriliklarini hisoblang.

33. Uchbu $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ to‘g‘ri gelikoid bosh yo‘nalishi va bosh egriligi topilsin.

34. To‘g‘ri gelikoid bosh yo‘nalishlari uning yasovchilari va vint chizig‘i orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘lishini isbotlang.

35. Ushbu $z=xy$ sirtning $M(1;1;1)$ nuqtasidagi bosh egriliklarini hisoblang.

36. Ushbu $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ sirtning $M(0;0;0)$ nuqtasidagi bosh egriliklarini hisoblang.

37. Ushbu $x=u\cos v, y=u\sin v, z=\lambda u$ sirtning ixtiyoriy nuqtasida bosh normal kesimlarning bittasi to‘g‘ri chiziq ekanligini isbotlang.

38. Berilgan $y=\frac{x^2}{2}$ sirtning

a) ixtiyoriy nuqtadagi;

b) berilgan sirt va $z=k$ tekisliklar bilan kesishishidan hosil bo‘lgan chiziq nuqtalaridagi, shu chiziqqa o‘tkazilgan urinma yo‘nalishida;

c) $M(2;2;4)$ nuqtadagi $y=\frac{x^2}{2}, z=x^2$ chiziqqa o‘tkazilgan urinma yo‘nalishidan normal kesiming egriligini toping.

39. Ushbu $x=u^2+v^2, y=u^2-v^2, z=uv$ sirtda $P(u=1;v=1)$ nuqta berilgan.

a) Berilgan sirtning P nuqtadagi bosh egriliklarini toping;

b) Ko‘rsatilgan nuqtada bosh normal kesimga o‘kazilgan PT_1, PT_2 urinmalarning tenglamarini toping;

c) $v=u^2$ chiziqqa o‘tkazilgan urinmadan o‘tuvchi P nuqtadagi normal kesim egriligini hisoblang.

40. Bizga $z=2x^2+\frac{9}{2}y^2$ sirt berilgan bo‘lsin.

a) Sirtning koordinata boshidagi Dyupen indikatrisasi tenglamasini tuzing;

b) Koordinata boshidagi urinmasi Ox o‘qi bilan 45^0 li burchak tashkil etuvchi normal kesimining egrilik radiusini toping.

41. Sirtning M nuqtasidagi urinma tekisligida bir – biri bilan $\frac{\pi}{n}$ ga teng

burchak tashkil etuvchi n ta to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Agar $\frac{1}{r_1}$ berilgan to‘g‘ri chiziqlarga urinuvchi chiziqlarning normal egriliklari bo‘lsa,
$\frac{1}{n}(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+...+\frac{1}{r_n})=H$ munosabat o‘rinli ekanligini isbotlang.

42. Aylanma ellipsoidning uchidagi M nuqtasida mumkin bo‘lgan chiziqlar o‘tkazilgan. Bu chiziqlarning M nuqtasidagi egrilik markazlaridan iborat shaklni toping.

43. Yoyiluvchan sirt barcha nuqtalaridagi to‘la egriligi nolga tengligi bilan xarakterlanishini isbotlang.

44. Ikkinchi kvadratik formasi to‘la kvadratdan iborat sirtlarni toping.

45. Aylanma sirtlarning bosh egrilik radiuslaridan biri normalning sirt va aylanish o‘qi orasidagi kesmasiga tengligini isbotlang.

46. 3 bob 3 § dagi 1 – 11 masalalarda berilgan sirtlarning to‘la egriliklarini bosh egriliklar ko‘paytmasi sifatida (kvadratik formalarini hisoblamasdan) toping.

47. Parabolani direktrisa atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan sirtda $|R_1|=2|R_2|$ munosabat o‘rinli ekanligi isbotlansin. Bu yerda R_1, R_2 - bosh egrilik radiuslari.

48. Sirt to‘la egriligining izotermik koordinatalardagi ifodasini toping.

50. Birinchi kvadratik formasi

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$$

ko‘rinishda bo‘lgan sirtning to‘la egriligi toping.

51. Ushbu $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ paraboloidning to‘la egriligini toping.

52. Birinchi kvadratik formasi $ds^2 = du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2$ ko‘rinishda bo‘lgan sirtning to‘la egriligi $K=\frac{\partial^2_{uv}\omega}{\sin\omega}$ formula yordamida hisoblanishini isbotlang.

53. Ushbu $F(x,y,z)=0$ tenglama bilan berilgan sirtning to‘la egriligini hisoblang.

54. Birinchi kvadratik formasi $ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(u^2+v^2+c^2)^2}$ ko‘rinishida bo‘lgan sirtning to‘la egrilikgi o‘zgarmas ekanligi isbotlansin.

55. Fazoviy chiziqqa o‘tkazilgan bosh normallar(binormallar)ning qismlaridan iborat sirtning to‘la egriligini toping.

56. Ushbu $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av-$ to‘g‘ri gelikoidning to‘la va egriliklarini toping. Qaysi chiziqlarda to‘la egrilik o‘zgarmas bo‘ladi?

57. Ushbu $z=f(x,y)$ sirtning to‘la va o‘rta egriliklarini toping.

58. Ushbu $z=f(\rho), \rho=\sqrt{x^2+y^2}$ aylanma sirtning to‘la va o‘rta egriliklarini toping.

59. Radiusi a teng aylanma silindrning o‘rta egriligini toping.

60. Egriligi nolga teng bo‘lmagan L chiziqni l o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan S sirt berilgan. Agar L chiziq l o‘qqa nisbatan botiq bo‘lsa, u holda S sirt elliptik nuqtalardan; agar L chiziq l o‘qqa nisbatan qavaraq bo‘lsa, u holda S sirt giperbolik nuqtalardan tashkil topganligini isbotlang.

61. Torning elliptik, giperbilik va parabolik nuqtalarini toping.

Quyidagi chiziqlarni berilgan o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan sirtlarning elliptik, giperbolik, parabolik va yassilanish nuqtalarini aniqlang (agar ular mavjud bo‘lsa):

62. $y = \sin x, (x \neq \pi k)$ sinusoida, Ox o‘qi atrofida;

63. $y = \sin x, (x \neq \pi k)$ sinusoida, Oy o‘qi atrofida;

64. $y = \ln x,$ $\left(x \neq 1\right)$ chiziq, Ox o‘qi atrifida;

65. $y = \ln x$ chiziq, Oy o‘qi atrofida;

66. $xy = 1,$ $\left(x > 0, x \neq \sqrt{-\frac{B}{A}}\right)$ giperbolaning bitta shoxchasi, $Ax + By = 0$ to‘g‘ri chiziq atrofida.

Quyidagi ikkinchi tartibli sirtlarning elliptik, giperbolik, parabolik va yassilanish nuqtalarini aniqlang (agar ular mavjud bo‘lsa):

67. Ellipsoid.

68. Bir pallali aylanma giperboloid.

69. Ikki pallali aylanma giperboloid.

70. Elliptik paraboloid.

71. Giperbolod paraboloid.

72. Elliptik silindr.

73. Paraboloid silindr.

74. Giperbolik silindr.

75. Uchga ega bo‘lmagan konus.

76. Ushbu $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ aylanma sirtining elliptik, giperbolik, parabolik va yassilanish nuqtalarini(agar ular mavjud bo‘lsa) aniqlang.

77. Ushbu $x + y = z^3$ sirtining barcha nuqtalari parabolik ekanligi isbotlang.

78. To‘la egrilik nolga teng bo‘lmagan dumaloqlanish niqtalaridan iborat yagona bog‘lanishli sirt sfera yoki uning qismi ekanligini isbotlang.

79. Sirtidagi nuqta dumaloqlanish nuqtasi bo‘lishi uchun shu nuqtada $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$ shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

80. Aylanalar sirt dumaloqlanish nuqtasining geometrik yasash usulini ko‘rsating.

81. $y = \sin x, (x \neq \pi k)$ sinusoidani Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtning dumaloqlanish nuqtalarini aniqlang.

Quyidagi sirtlarning dumaloqlanish nuqtalarini toping:

82. Aylanma ellipsoid.

83. Aylanma paraboloid.

84. Elliptik paraboloid.

85. Uch o‘qli ellipsoid.

86. Ikki pallali giperboloid.

87. Ushbu $x=\frac{u^2}{2}+v,\ y=u+\frac{v^2}{2},\ z=uv$ sirtning dumaloqlanish nuqtalari $u=v$, $u+v+1=0$ chiziqlarda yotishini isbotlang.

88. Dumaloqlanish nuqtasi $H^2=K$ tenglik bilan ifodalanishini isbotlang.

89. Yagona yassilanish nuqtasiga ega sirtga misol keltiring.

90. Yassilanish nuqtalari chiziqni tashkil etuvchi sirtga misol keltiring.

91. Barcha nuqtalari yassilanish nuqtalaridan iborat sirt tekislik yoki tekislikning qismi ekanligi isbotlansin.

5 §. Qo‘shma to‘r va asimtotik chiziqlar. Egrilik chiziqlari. Geodezik chiziqlar

Sirtlar nazariyasida qo‘shma yo‘nalishlar va asimptotik yo‘nalishlar muhim tushunchalar hisoblanadi. Sirtlardagi geodezik chiziqlar xossalariga ko‘ra tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlarga yaqin turadi.

Asosiy tushunchalar

5.1-ta’rif. Sirt ustida chiziqlarning ikkita oilasi berilib, sirtning har bir nuqtasidan bu oilalarga tegishli bittadan chiziq o‘tsa, bu ikki oila sirt ustida to‘r tashkil qiladi deyiladi.

5.2-ta’rif. Sirtning berilgan nuqtasida unga urinuvchi ikki to‘g‘ri chiziq, shu nuqtadagi egrilik indikatrisasiga nisbatan qo‘shma bo‘lsa, bu chiziqlarning yo‘nalishlari qo‘shma deyiladi.

5.3-ta’rif. Sirt ustidagi chiziqlarning ikkita oilasiga tegishli chiziqlarning kesishgan nuqtalaridagi urinmalarning yo‘nalishlari o‘zaro qo‘shma bo‘lsa, bu ikki oila qo‘shma to‘rni tashkil qiladi deyiladi.

5.4-ta’rif. Har bir nuqtasidagi urinmasi sirtning shu nuqtadagi asimptotik yo‘nalishi bo‘yicha yo‘nalgan chiziq sirtning asimptotik chizig‘i deyiladi.

Bizga Φ sirtning (f,G) parametrlash usuli

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$$

tenglama yordamida, bu sirtning urinma tekisligida ikkita $(du;dv)$ va $(\delta u;\delta v)$ yo‘nalishlar berilgan bo‘lsin. Berilgan yo‘nalishlar uchun ushbu $Ldu\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+Ndv\delta v=0$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, ular qo‘shma yo‘nalishlar bo‘ladi. Asimptotik yo‘nalish o‘z –o‘ziga qo‘shma bo‘lgani uchun u ushbu $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndvdv = 0$ tenglama bilan aniqlanadi.

5.5-ta'rif. Sirt ustidagi chiziqning har bir nuqtasidagi urinmasi sirtning shu nuqtadagi bosh yo‘nalishlaridan biri bilan ustma-ust tushsa, bunday chiziq sirtning egrilik chizig‘i deyiladi.

Bizga regulyar Φ sirt va unda yotuvchi ikki marta differensiallanuvchi parametrlangan γ egri chiziq $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin.

5.6-ta'rif. Berilgan γ chiziq parametri t ning har bir qiymatida $\vec{\rho}''(t)$ vektor sirtning $\gamma(t)$ (bu yerda $\gamma(t)$ radius vektori $\vec{\rho}(t)$ bo‘lgan nuqta) nuqtasidagi urinma tekislikka perpendikular bo‘lsa, bunday chiziq geodezik chiziq deyiladi.

Masala va misollar yechish namunalari

1-masala. Ushbu $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases}$ sirt ustidagi $u + v = const$ chiziqlar oilasiga qo‘shma bo‘lgan oila topilsin.

Yechish. Ma’lumki, biror F sirt urinma tekisligida berilgan $(a_1; a_2)$ yo‘nalishga qo‘shma yo‘nalishni $(b_1; b_2)$ deb olsak, ular uchun quyidagi munosabat o‘rinli: $La_1b_1 + 2M(a_1b_2 + a_2b_1) + Na_2b_2 = 0$.

Berilgan chiziqlar oilasi urinmasining yo‘nalishi $(-1;1)$ ekanidan, hamda F sirtning ikkinchi kvadratik formasi koeffitsiyentlari
$L = N = 0,\ \ M = -\dfrac{2}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}}$ ga tengligidan, qo‘shma yo‘nalishning differensial tenglamasi $du - dv = 0$ ekani kelib chiqadi.

Demak, $u - v = const$ chiziqlar oilasi biz izlagan oila ekan.

Masala va misollar

1. Sirt ustida $u = const,\ v = const$ koordinata chiziqlari bilan qo‘shma to‘r hosil qiluvchi chiziqlar oilasining differensial tenglamasi tuzilsin.

2. Sirt ustida $P(u,v)du^2 + Q(u,v)dudv + R(u,v)dv^2 = 0$ differensial tenglama bilan berilgan chiziqlar oilalarining qo‘sma to‘r hosil qilish shartini toping.

3. Ushbu $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ gelikoid ustidagi $v^2du^2 - u^2dv^2 = 0$ chiziqlar qo‘shma to‘r hosil qilishini isbotlang.

4. Sirtdagi ushbu $\varphi(u,v) = C$ chiziqlar bilan qo‘shma to‘r hosil qiluvchi chiziqlar oilasining differensial tenglamasi tuzilsin.

5. Ko‘chirish $r = r_1(u) + r_2(v)$ sirtining koordinat chiziqlari qo‘sma to‘r hosil qilishini isbotlang.

6. Ushbu $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$ elliptik paraboloidni $x+y=C$ tekisliklar bilan kesish natijasida hosil bo‘lgan chiziqlar oilasi bilan qo‘shma to‘r hosil qiluvchi chiziqlar oilasini toping (bu yerda $C-$ ixtiyoriy o‘zgarmas son).

7. Ushbu $xyz=1$ sirtning $M(1,1,1)$ nuqtasida $\vec{a}(1,-2,1)$ yo‘nalishga qo‘shma bo‘lgan yo‘nalish toping.

8. Sirtdagi bir parametrli chiziqlar oilasi $A(u,v)du+B(u,v)dv=0$ differensial tenglama bilan berilgan. Bu chiziqlar oilasi bilan qo‘shma to‘r hosil qiluvchi chiziqlar oilasi uchun differensial tenglama tuzing.

9. Yoyiluvchi sirtdai to‘g‘ri chiziqli yasovchilar ixtiyoriy bir parametrli chiziqlar oilasiga qo‘shma ekanligi isbotlansin.

10. Ushbu $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v+u$ gelikoid ustidagi $u+v=C$ chiziqlar oilasiga qo‘shma bo‘lgan chiziqlar oilasi topilsin.

11. Sirtdagi chiziq asimptotik bo‘lishi uchun quyidagi:

a) chiziqning har bir nuqtasidagi urinma asimptotik yo‘nalishga ega;

b) chiziqning har bir nuqtasida normal egriligi nolga teng;

c) chiziqning egriligi noldan farqli nuqtalaridagi yopishma tekisligi sirtning urinma tekisligi bilan ustma-ust tushishi shartlarning biri bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

12. Sirtdagi koordinata chiziqlari asimptotik bo‘lishi uchun ushbu $N=L=0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

13. Psevdosferaning asimptotik chiziqlarini toping va ularning Chebishev to‘ri hosil qilishini isbotlang.

14. Bizga Φ sirtda l-asimptotik chiziq berilgan. Φ sirtning l chiziq bo‘ylab o‘kazilgan bir parametrli urinma tekisliklarining xarakteristikasi l chiziqning urinmalari bilan ustma-ust tushishi isbotlansin.

15. Aylanma sirt asimptotik chiziqlari uchun differensial tenglama tuzing.

16. Katenoidning $x=chu\cos v,\quad y=chu\sin v,\ z=u$ asimptotik chiziqlarini toping.

17. Torning asimptotik chiziqlarini toping.

18. To‘g‘ri gelikoidning asimptotik chiziqlarini toping.

19. Bir pallali giperboloidning asimptotik chiziqlarini toping.

20. Sirt to‘g‘ri chiziqning Oz o‘qini va $x=u, y=u^2, z=u^3$ chiziqni kesib, xOy tekislikka parallel holda harakatlanishi natijasida hosil qilingan. Hosil bo‘lgan sirtning asimptotik chiziqlarini toping.

21. Ushbu $x=\frac{2}{1+t}, y=\frac{2}{1-t}, z=t$ chiziq $z=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$ sirtning asimptotik chizig‘i ekanligini ko‘rsating.

22. Sirt fazoviy chiziqning bosh normallaridan tuzilgan. Berilgan fazoviy chiziq hosil bo‘lgan sirtning asimptotik chizig‘i ekanligini ko‘rsating.

23. O‘rta egriligi aynan nolga teng bo‘lgan sirt minimal sirt deyiladi. Minimal sirtda asimptotik chiziqlar hosil qilgan to‘r ortogonal ekanligini isbotlang.

24. Berilgan sirtning biror nuqtasida o‘rta egriligi nolga teng bo‘lsa, bu nuqtada asimptotik chiziqlar o‘zaro perpendikular bo‘lishini isbotlang.

25. Tekislikdagi ixtiyoriy chiziq asimptotik ekanligini va aksincha, agar sirtdagi ixtiyoriy chiziq asimptotik bo‘lsa, bu sirt tekislik yoki uning qismi ekanligini isbotlang.

26. Berilgan sirtga parallel bo‘lgan sirtda, berilgan sirtdagi asimptotik chiziqlarga mos chiziqlar asimptotik bo‘lishi uchun berilgan sirt yoyiluvchi bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

27. Sirtdagi l chiziq va uning sferik aksi l' mos nuqtalarda perpendikular urinmalarga ega bo‘lishi uchun l chiziqning asimptotik bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

28. Sirtdagi chiziq egrilik chizig‘i bo‘lishi uchun quyidagi

a) chiziqning har bir nuqtasidagi urinmasi sirtning bosh yo‘nalishi bilan ustma-ust tushishi;

b) chiziqning har bir nuqtadasi normal egriligi bosh egriliklardan biriga teng bo‘lishi;

c) sirtning berilgan chiziq nuqtalaridagi normallari yoyiluvchi sirt hosil qilishi shartlarning biri bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

Quyidagi sirtlarning egrilik chiziqlari topilsin:

29. Ixtiyoriy silindrik sirt.

30. Ixtiyoriy konik sirt.

31. Ixtiyoriy aylanma sirt.

32. Ushbu $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = v$ sirt.

33. Ixtiyoriy yoyiluvchi sirt.

34. To‘g‘ri gelikoid.

35. Elliptik paraboloid.

36. Tekislik va sferada ixtiyoriy chiziq egrilik chizig‘i ekanligini isbotlang.

37. Sirtning koordinata chiziqlari egrilik chiziqlari bo‘lishi uchun $F = M = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

38. Ushbu $x = 3u - u^3 + 3uv^2, y = v^3 - 3vu^2 - 3v, z = 3\left(u^2 - v^2\right)$ sirtning koordinata chiziqlari egrilik chiziqlari ekanligini isbotlang.

39. To‘g‘ri chiziqli yasovchilari perpendikular bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqli sirtda egrilik chiziqlari mavjud emasligini isbotlang.

40. Sirtning egrilik chizig‘i nuqtalarida o‘tkazilgan normallari oilasining o‘ramasini toping.

41. Sirtdagi giperbolik nuqtalardan tashkil topgan sohada egrilik chizig‘i asimtotik chiziqlar orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘lishini isbotlang.

42. Berilgan S sirtga parallel S' sirtdagi S sirtning egrilik chiziqlariga mos chiziqlar yana egrilik chiziqlari bo‘lishini isbotlang.

43. Qanday shartlarda berilgan sirtdagi ortogonal to‘rga, unga parallel sirtdagi ortogonal to‘r mos keladi?

44. Qanday shartda ellipsoid aylanma kesimlari oilasi, uning egrilik chiziqlari sistemasini tashkil qiladi?

45. Ixtiyoriy sirtda bu sirtning egrilik chiziqlari bilan ustma-ust tushuvchi yagona qo‘shma ortogonal to‘r mavjudligini isbotlang.

46. Berilgan sirtni uning egrilik chizig‘i bo‘yicha kesuvchi sirt uchun bu chiziq egrilik chizig‘i bo‘lishi uchun sirtlar o‘zgarmas burchak ostida kesishishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

47. Sirtdagi yassi egrilik chizig‘ining sferik aksi aylana bo‘lishini isbotlang.

48. Sirtdagi l chiziq va uning sferik aksi l' mos nuqtalarda perpendikular urinmalarga ega bo‘lishi uchun l chiziqning egrilik chizig‘i bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

49. Sirtdagi geodezik chiziq quyidagi xossalar bilan to‘la ifodalanishini isbotlang:

a) chiziqning egriligi noldan farqli har bir nuqtasidagi sirtning normali chiziqning bosh normali bo‘ladi;

b) chiziqning egriligi noldan farqli har bir nuqtasidagi sirtning normali chiziqning yopishma tekisligida yotadi;

c) chiziqning har bir nuqtasidagi geodezik egriligi nolga teng;

d) chiziqning har bir nuqtasidagi egriligi normal egriligining absolut qiymatiga teng.

e) chiziqning egriligi noldan farqli har bir nuqtasidagi to‘grilovchi tekisligi sirtning urinma tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

50. Sirtdagi har qanday to‘g‘ri chiziq geodezik chiziq ekanligini isbotlang.

51. Ikkita sirt l chiziq bo‘ylab kesishadi. Agar l chiziq birinchi sirtda geodezik bo‘lsa, u ikkinchi sirtda ham geodezik bo‘lishini isbotlang.

52. Ushbu $r = r(u,v)$ sirtning geodezik chiziqlari $\left(\vec{N},\, d\vec{r},\, d^2\vec{r}\right) = 0$ (bu yerda $\vec{N}$ – sirtning normal vektori) differensial tenglama bilan ifodalanishini isbotlang.

53. Tekislikning geodezik chiziqlari faqat va faqat to‘g‘ri chiziqlar ekanligini isbotlang.

54. Silindrik sirtda geodezik chiziqlar faqat va faqat to‘g‘ri chiziqli yasovchilari va umumlashgan vint chiziqlari ekanligini isbotlang.

55. Aylanma sirtdagi meridianlar geodezik chiziq bo‘lishini isbotlang.

56. Aylanma sirtning paralleli geodezik chiziq bo‘lishi uchun meridian nuqtalarida o‘tkazilgan urinmalar aylanish o‘qiga parallel bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

57. Sferadagi geodezik chiziqlarni toping.

58. Geodezik chiziqlar asimptotik bo‘lishi uchun uning to‘g‘ri chiziq bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

59. Geodezik chiziqlar egrilik chizig‘i bo‘lishi uchun uning yassi bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

60. Yoyiluvchi sirtdagi geodezik chiziqlar to‘g‘rilovchi tekisliklarining o‘ramasi berilgan sirtning o‘zi ekanligini isbotlang.

61. Yoyiluvchi sirtdagi geodezik chiziqlarning Darbu vektori shu nuqtadagi to‘g‘ri chiziqli yasovchilari bo‘ylab yo‘nalganligini isbotlang.

62. Fazoviy chiziq to‘g‘rilovchi tekisliklari o‘ramasidan iborat sirtning geodezik chizig‘i berilgan fazoviy chiziq ekanligi isbotlansin.

63. Sirtdagi chiziqlarning geodezik egriligi $k_g = \left(\vec{m}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}\right)$ formula bilan hisoblanishini isbotlang (bu yerda $\vec{m}$ – sirtning birlik normal vektori).

64. Sirtdagi chiziqning geodezik egriligi chiziqning shu nuqtada sirtga o‘tkazilgan urinma tekislikka proyeksiyasining egriligiga tengligini isbotlang.

Quyidagi chiziqlarning geodezik egriligini toping:

65. Radiusi R ga teng sferada yotuvchi r radiusli aylana.

66. Ushbu $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ gelikoid ustidagi $u = const$ vint chizig‘i.

67. Ushbu $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(v)$ sirtdagi $u = const$ va $v = const$ chiziqlar.

68. Asimptotik chiziqning geodezik egriligi uning egriligiga teng ekanligini isbotlang.

69. Sirtdagi chiziqlarning geodezik buralishi $\sigma_g = (\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{m}}, \vec{m})$ formula bilan hisoblanishini isbotlang (bu yerda $\vec{m}$ – sirtning birlik normal vektori).

70. Sirtdagi chiziq egrilik chizig‘i bo‘lishi uchun har bir nuqtada uning geodezik buralishi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

71. Asimptotik chiziqning geodezik buralishi uning buralishiga teng ekanligini isbotlang.

Quyidagi sirtlarning geodezik chiziqlarini toping:

72. To‘g‘ri gelikoid;

73. Psevdosfera.

6 §. Skalyar va vektor maydonlar

Matematika, fizika va boshqa amaliy fanlarda uchraydigan kattaliklar ikki xil bo‘ladi. Ba’zi kattaliklar ma’lum o‘lchov birligida olingan son qiymati bilan o‘lchanadi. Masalan, vaqt, harorat, kesmaning uzunligi, yuza, hajm, massa kabi kattaliklar. Bunday kattaliklar skalyar kattaliklar deyiladi. Son qiymati va fazodagi yo‘nalishi bilan ifodalanadigan fizik kattaliklar vektor kattaliklar deyiladi. Masalan, kuch, tezlik, tezlanish va boshqa shunga o‘xshash kattaliklar. Bu paragrafda skalyar va vektor maydonlarga doir misol va masalalar keltiriladi.

Asosiy tushunchalar

6.1-ta'rif. Skalyar maydon ushbu ko'rinishdagi $u = u(P) = u(x, y, z) = u(\vec{r})$ skalyar funksiya yordamida aniqlanadi, bu yerda $P(x, y, z)$ - fazodagi nuqta, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektor esa, bu nuqtaning radius – vektori.

6.2-ta'rif. Ushbu $L_C = \{u(x, y, z) = C : (x, y, z) \in R^3, C = const\}$ to'plam skalyar maydonning sath sirti deyiladi.

6.3-ta'rif. Skalyar maydonni aniqlovchi $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, ushbu $gradu = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ vektor maydon berilgan skalyar maydonning gradiyenti deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ skalyar maydon gradiyenti $u = C$ skalyar maydon sath sirtining normali bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

Vektor maydon ushbu $\vec{a} = a(P) = \vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ vektor – funksiya bilan aniqlanadi.

6.4-ta'rif. Ushbu skalyar $div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ funksiyaga berilgan $\vec{a} = a(P) = \vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ vektor maydonning divergensiyasi deb aytiladi.

6.5-ta'rif. Ushbu $rot\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ vektor maydon berilgan $\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ vektor maydonning rotatsiyasi deyiladi.

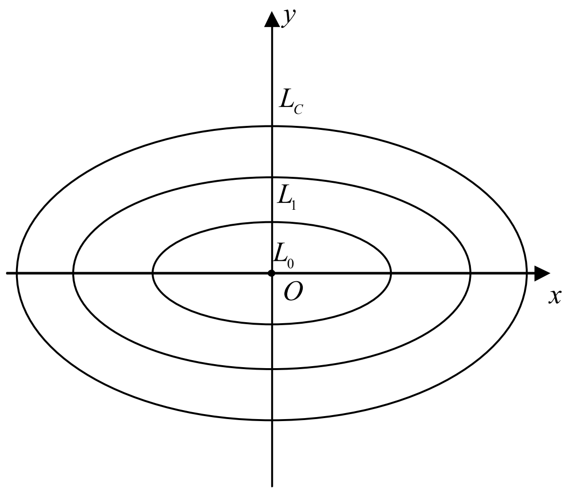
Berilgan $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ skalyar maydonning berilgan $l(a_x, a_y, a_z)$ yo'nalish bo'yicha hosilasi ushbu $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ formula yordamida hisoblanadi (bu yerda

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}).$$

Misol va masalalar yechish namunalari

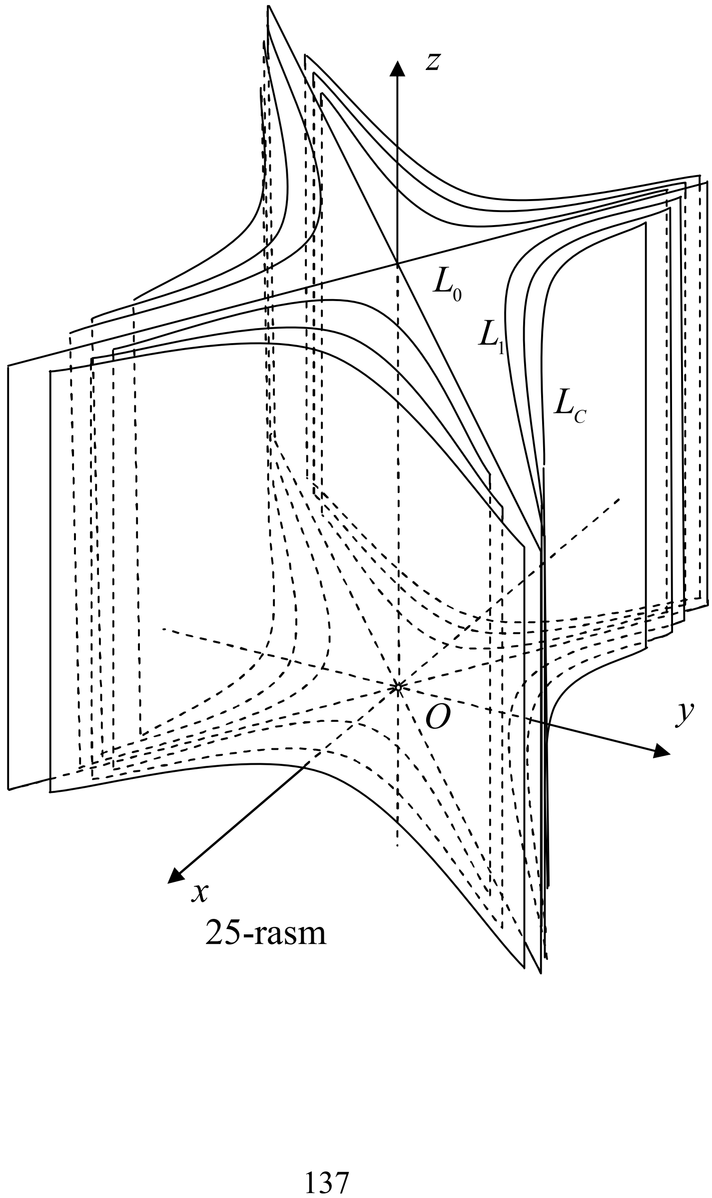
1-masala. Ushbu $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ maydonning xOy tekisligida sath chiziqlarini toping.

Yechish. Sath sirtining ta'rifiga ko'ra,
$L_C = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C : \ (x, y) \in R^2, C = const\right\}$ to'plam berilgan maydonning sath



24 − rasm

chiziqlarini ifodalaydi. Ravshanki, agar $C<0$ bo‘lsa, haqiqiy tekislikda L_C to‘plam bo‘sh to‘plamdan, $C=0$ bo‘lgan holda, $O(0;0)$ nuqtadan, $C>0$ bo‘lgan holda esa, markazi koordinata boshida bo‘lgan simmetriya o‘qlari koordinata o‘qlaridan iborat ellipslar oilasidan tashkil topadi (24-rasm).



25-rasm

2-masala. Ushbu $u=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ maydonning sath sirtlarini toping.

Yechish. Berilgan maydonning sath sirtlari $L_C=\left\{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=C:\ (x,y,z)\in R^3, C=const\right\}$ to‘plamdan iborat. Agar $C=0$ bo‘lsa, L_C to‘plam Oz o‘qi bo‘yicha keshishuvchi ikkita $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ va $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ tekisliklardan, aks holda simmetriya tekisliklari xOz va yOz koordinata tekisliklaridan, asimptotik tekisliklari $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ va $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ tekisliklardan iborat o‘zaro qo‘shma giperbolik silindrlar oilasidan tashkil topadi (25-rasm).

Misol va masalalar

Quyidagi maydonlarning sath chiziqlarini toping (faqat xOy tekisligida qarang):

1. $u=x^2+y^2$.

2. $u=x^2-y^2$.

3. $u=\frac{y}{x^2}$.

4. $u=\frac{2x}{x^2+y^2}$.

5. $u=\frac{2x-y+1}{x^2}$.

Quyidagi skalyar maydonlarning sath sirtlarini toping:

6. $u=x+y+z$.

7. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

8. $u=x^2+y^2-z^2$.

9. $u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$.

10. Ushbu $u=x^2-2x^2y+xy^2+1$ skalyar maydonning $M(1,2)$ nuqtadagi, $\bar{l}(3;4)$ vektor yo‘nalishidagi hosilasini toping.

11. Ushbu $u=xy^2+z^3-xyz$ skalyar maydonning $M(1,1,2)$ nuqtadagi, koordinata o‘qlari bilan mos ravishda $\alpha=60^0$, $\beta=45^0$, $\gamma=60^0$ burchaklar tashkil etuvchi yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

Quyidagi skalyar maydonlarning statsionar nuqtalarini toping:

12. $u=x^3+y^3-3xy$.

13. $u=2y^2+z^2-xy-yz+2x$.

Quyidagi skalyar maydonlarning gradiyentini toping:

14. a) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$; b) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; c) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

15. $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz$.

16. $u = xyze^{x+y+z}$.

17. $u = arctg\dfrac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - xz}$.

18. Ushbu $u = x^3 + y^3 - 3xy$ skalyar maydonning $M(2;1)$ nuqtadagi gradiyentini toping.

19. Ushbu $u = x^2 + y^2 + z^2$ skalyar maydonning $M(2;-2;1)$ nuqtadagi gradiyentining kattaligi va yo‘nalishini toping.

20. Ushbu $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ skalyar maydonning $A(2,0,1)$, $O(0,0,0)$ nuqtadagi gradiyentining kattaligi va yo‘nalishini toping. Qaysi nuqtada gradiyent nolga teng?

Quyidagi berilgan maydonlarning ko‘rsatilgan nuqtalardagi gradiyentlari orasidagi burchakni toping:

21. $u = \ln\dfrac{y}{x}$, $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, $B(1,1)$.

22. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $A(1,2,2)$, $B(-3,1,0)$.

23. Ushbu $u = x^2 + y^2 - z^2,\ v = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$ skalyar maydonlarning $M\left(1,1,\sqrt{7}\right)$ nuqtadagi gradiyentlari orasidagi burchakni toping.

24. Ushbu $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ skalyar maydonning $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$ vektor yo‘nalishidagi $M(1,1,1)$ nuqtadagi o‘sish yoki kamayishini aniqlang. Berilgan maydon tezligining o‘zgarish tezligini toping.

25. Ushbu $u = \ln\left(y + \dfrac{1}{x}\right)$ funksiya gradiyenti $-\dfrac{25}{16}\vec{i} + \vec{j}$ ga teng bo‘ladigan nuqta topilsin.

26. Ushbu $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ skalyar maydonning $M(x,y,z)$ nuqtadagi shu nuqta radius vektori yo‘nalishidagi hosilasini toping. Bu hosila gradiyent uzunligiga teng bo‘ladigan nuqtani aniqlang.

27. Ushbu $u = u(x,y,z)$ skalyar maydonning $v = v(x,y,z)$ maydon gradiyenti yo‘nalishidagi hosilasini toping. Qanday holda u nolga teng bo‘ladi?

Quyidagi formulalarning to‘griligini isbotlang:

28. $grad\vec{c} = \vec{0},\ \vec{c} - const$.

29. $grad\,(u + v) = grad\,u + grad\,v$.

30. $grad\,(uv) = v\,grad\,u + u\,grad\,v$.

31. $grad(cu) = c\, grad\, u$, $c - const$.

32. $grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, grad\, u - u\, grad\, v}{v^2}$.

33. $grad\, f(u) = f'(u) grad\, u$.

34. $grad\, u^n = n u^{n-1} grad\, u$

Quyidagi $r = |\vec{r}|$ ga bog'liq skalyar maydonlarning gradiyentini toping:

35. $grad\, \vec{r}$.

36. $grad\, f(\vec{r})$.

37. $grad\, \vec{r}^{\,n}$, $n -$ natural son.

38. $grad\left(\frac{1}{\vec{r}}\right)$.

39. $grad \ln \vec{r}$.

40. $grad\,(\vec{c} \cdot \vec{r})$, $\vec{c} - const$.

41. $grad \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})}$, $\vec{a}, \vec{b} - const$.

42. $grad\,(\vec{c} \times \vec{r})^2$, $\vec{c} - const$.

Quyidagi formulalarning to'griligini isbotlang:

43. $grad\, f(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial u} grad\, u + \frac{\partial f}{\partial v} grad\, v + \frac{\partial f}{\partial w} grad\, w$.

44. $(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{r}^{\,n} = n\vec{r}^{\,n}$.

45. $(v \cdot \nabla)\vec{r} = v$.

46. Ushbu $f(u.v.w)$ uchta egri chiziqli ortogonal koordinatalarga bog'liq skalyar maydon gradiyentini hisoblash formulasini toping.

47. Skalyar maydon gradiyentini hisoblash formulasining silindrik koordinatalardagi ifodasini toping.

48. Skalyar maydon gradiyentini hisoblash formulasining silindrik koordinatalardagi ifodasini toping.

Quyidagi skalyar maydonlarning gradiyentini silindrik koordinatalarda hisoblang:

49. $u = z + r\varphi$.

50. $u = zr\varphi$.

51. $u = z \sin\varphi + r$.

52. $u = z \cos\varphi + r^2$.

53. $u = z \sin^2\varphi + r^2$.

54. Skalyar maydon gradiyentini hisoblash formulasining sferik koordinatalardagi ifodasini toping.

Quyidagi skalyar maydonlarning gradiyentini sferik koordinatalarda hisoblang:

55. $u = \rho\varphi$.

56. $u = \rho\theta$.

57. $u=\rho\theta\varphi$.

58. $u=\theta\sin\varphi+\rho$.

59. $u=\theta\cos\varphi+\rho$.

Quyidagi vektor maydonlarning integral chiziqlarini toping:

60. $\vec{a}=-cy\vec{i}+cx\vec{j},\ c-const$.

61. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$.

62. $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$.

63. $\vec{a}=y\vec{i}+x\vec{j}$.

64. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Quyidagi vektor maydonlarning divergensiyasini toping

65. $\vec{r}=xyz\vec{i}+(2x+3y+z)\vec{j}+(x^2+z^2)\vec{k}$.

66. $\vec{r}=(6x^2y^2-z^3+yz-5)\vec{i}+(4x^3y+xz+2)\vec{j}+(xy-3xz^2-3)\vec{k}$.

Quyidagi formulalarning to‘griligini isbotlang:

67. $div c=0,\ c-const$.

68. $div(\vec{a}+\vec{b})=div\,\vec{a}+div\,\vec{b}$.

69. $div(c\,\vec{a})=c\,div\,\vec{a},\ c-const$.

70. $div(u\,\vec{a})=u\,div\,\vec{a}+\vec{a}\,grad\,u$.

71. $div(u\,c)=c\,grad\,u,\ c-const$.

Quyidagi vektor maydonlarning divergensiyasini toping:

72. $div\,\vec{r}$.

73. $div(f(r)\vec{r})$.

74. $div\left(\frac{\vec{r}}{|r|}\right)$.

75. $div(r^n\vec{r})$.

76. $div(grad f(r))$.

77. $div(grad\,u)$.

78. $div(u\,grad\,u)$.

79. $div(u\,grad\,v)$.

Quyidagi vektor maydonlarning divergensiyasini toping, bu yerda $\vec{c},\ \vec{c}_1-$ o‘zgarmas vektorlar:

80. $div(\vec{c},\vec{r})$.

81. $div(\vec{r}^{\,2},\vec{c})$.

82. $div(f(\vec{r}),\vec{c})$.

83. $div(\vec{r}\times\vec{c})$.

84. $div(\vec{r},\vec{c}_1)\vec{c}$.

85. $div(\vec{r},\vec{c})\vec{r}$.

86. $div(\vec{e},\vec{r})\vec{e},\ \vec{e}$ -o‘zgarmas birlik vektor.

87. $div\left(\vec{e}\times\left(\vec{r}\times\vec{e}\right)\right)$.

88. $div\dfrac{x+y+z}{xyz}\vec{r}$

Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f(r)$ funksiyani toping:

89. $div\left(gradf(r)\right)=0$.

90. $2r\,div\left(gradf(r)\right)=div\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$.

91. $div\,\vec{a}$ ning silindrik koordinatalardagi ifodasini toping.

92. $div\,\vec{a}$ ning sferik koordinatalardagi ifodasini toping.

Quyidagi vektor maydonlarning rotatsiyasini toping:

93. $\vec{a}=y^2z\,\vec{i}+z^2x\,\vec{j}+x^2y\,\vec{k}$

94. $\vec{a}=xyz\,\vec{i}+\left(2x+3y-z\right)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$

Quyidagi formulalarning to‘griligini isbotlang:

95. $rot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=rot\,\vec{a}+rot\,\vec{b}$.

96. $rot\left(u\,\vec{a}\right)=u\,rot\,\vec{a}+grad\,u\times\vec{a}$.

97. $rot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\,rot\,\vec{a}-\vec{a}\,rot\,\vec{b}$

Quyidagi vektor maydonlarning rotatsiyasini toping, bu yerda $\vec{c},\ \vec{c}_1$ – o‘zgarmas vektorlar:

98. $rot\,\vec{c}$.

99. $rot\,\vec{r}$.

100. $rot\left(\vec{r}\times\vec{c}\right)$.

101. $rot\left((\vec{r},\vec{c})\vec{r}\right)$.

102. $rot\left((\vec{r},\vec{c}_1)\vec{c}\right)$.

103. $rot\left((\vec{r}\times\vec{c})\times\vec{c}_1\right)$.

104. $rot\left(f(r)\vec{r}\right)$.

105. $rot\left(f(r)\vec{c}\right)$.

Quyidagi formulalarning to‘griligini isbotlang:

106. $rot\left(grad\,u\right)=\vec{0}$.

107. $div\left(rot\,\vec{a}\right)=0$.

108. $div\left(grad\,u\right)=\Delta u$.

109. $rotrot\,\vec{a}=grad\,div\,\vec{a}-\Delta\vec{a},\ \ \Delta\vec{a}=\Delta a_x\vec{i}+\Delta a_y\vec{j}+\Delta a_z\vec{k}$.

JAVOBLAR VA KO'RSATMALAR
I BOB
1 §

1. a) Berilgan (X,d) fazo metrik fazo bo'lgani uchun ixtiyoriy $x,y,z\in X$ nuqtalar uchun uchburchak tengsizligi o'rinli: $d(x,z)\le d(x,y)+d(z,y)$, bu yerdan
$d(x,y)\ge d(x,z)-d(y,z), -d(x,y)\le d(y,z)-d(x,z),\ |d(x,z)-d(z,y)|\le d(x,y)$
tengsizliklar kelib chiqadi.

b) Ixtiyoriy $z\in Z$ nuqta uchun $d(x,Z)\le d(x,z)$ tengsizlik o'rinli. Uchburchak tengsizligidan foydalanib, $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z),\ \forall z\in Z$ ni hosil qilamiz. $z\in Z$ nuqtaning ixtiyoriyligidan $d(x,z)\le d(x,y)+\inf\limits_{z\in Z} d(y,z)$ tengsizlik kelib chiqadi. Bundan esa
$d(x,Z)\le d(x,z)\le d(x,y)+d(y,Z),\forall z\in Z$.

c) **c**) tengsizlikni isbotlash uchun $Z\ne\varnothing$ deb faraz qilamiz. Har bir $a\in Z$ nuqta uchun ushbu
$$d(x,Z)\le d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a)$$
tengsizlik o'rinli. Bundan esa olingan $a\in Z$ nuqtaning ixtiyoriyligidan
$$d(x,Z)\le d(x,y)+d(y,Z)$$
tengsizlik kelib chiqadi. Natijada,
$$d(x,Z)-d(y,Z)\le d(x,y)$$
tengsizlikka ega bo'lamiz. Endi x nuqtani o'rniga y nuqtani olib ushbu
$$d(y,Z)-d(x,Z)\le d(x,y)$$
tengsizlikka ega bo'lamiz. Oxirgi ikki tengsizliklardan quyidagi
$$|d(x,Z)-d(Z,y)|\le d(x,y)$$
munosabat kelib chiqadi. Bu yerda, $x,y\in(X,d),\ Z\subset(X,d)$.

2. *1)- 2)* shartlar *d* funksiya aniqlanishiga ko'ra bajariladi. *3)* $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ ni isbotlaymiz. Faraz qilaylik $x\ne y$, u holda $d(x,y)=1$. Agar $x=z$ bo'lsa, $d(x,z)=0,\ d(y,z)=1$ tenglik o'rinli bo'ladi. $z=y$ bo'lganda ham xuddi shunga o'xshash tekshiriladi. $x=y=z$ bo'lganda, tenglik bajariladi. Qolgan hollarda esa tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, (X,d) metrik fazo ekan.

3. *1)* va *2)* shartlar bajarilishi ravshan. *3)* $d_1(x,z)\le d_1(x,y)+d_1(y,z)$ ekanini isbotlaymiz. Buning uchun birdan kichik kasrning surati va maxrajiga bir xil nomanfiy sonni qo'shish natijasida kasrning qiymati kichraymasligidan foydalanamiz, ya'ni
$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\le\frac{d(x,z)+d(x,y)+d(y,z)-d(x,z)}{1+d(x,z)+d(x,y)+d(y,z)-d(x,z)}=\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\le$$
$$\le\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}.$$

Demak, $d_1(x,z)\le d_1(x,y)+d_1(y,z)$ tengsizlik o‘rinli. Endi $d_2(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$ metrika ekanligini ko‘rsataylik. Buning uchun *3)* shartni tekshirish bilan chegaralanamiz. Uchburchak tengsizligini isbotlash uchun X to‘plamdan ixtiyoriy uchta x,y va z nuqta olamiz. So‘ngra $a=d_2(x,y)$, $b=d_2(y,z)$ va $c=d_2(x,z)$ kabi belgilashlar kiritamiz. Ushbu sonlarni $2;1+a;1+b$ va $a+b$ har biri 1 yoki c sonidan katta yoki teng. Bundan esa

$$\min\{2;1+a;1+b;a+b\}\ge\min\{1,c\}$$

munosabat kelib chiqadi. Bu munosabatdan esa quyidagi

$$d_2(x,y)+d_2(y,z)=\min\{1,a\}+\min\{1,b\}=\min\{2;1+a;1+b;a+b\}\ge$$
$$\ge\min\{1,c\}=d_2(x,z)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu esa uchburchak tengsizligining isbotini beradi. Masalaning ikkinchi qismini isbotlash uchun (X,d_1) metrik fazodagi ochiq to‘plamning (X,d_2) metrik fazoda ham ochiq to‘plam bo‘lishini ko‘rsatish hamda (X,d_1) metrik fazodagi fundamental ketma-ketlikning (X,d_2) da ham fundamental ketma-ketlik bo‘lishini ko‘rsatish kerak.

4. *1)* va *2)* shartlar bajarilishini osongina ko‘rsatish mumkin. *3)* shartni bajarilishini isbotlash uchun quyidagi $|(\vec{a},\vec{b})|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ skalyar ko‘paytmaning xossasidan foydalanamiz. Ushbu

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2}$$

tengsizlikni isbotlashimiz kerak. Buning uchun quyidagicha $x_i-z_i=a_i$, $z_i-y_i=b_i\Rightarrow x_i-y_i=a_i+b_i$ belgilashlar kiritamiz. U holda, yuqoridagi tengsizlik quyidagi tengsizlikka keltiriladi:

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$ skalyar ko‘paytmaning $(\vec{a},\vec{b})\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ xossasidan $(\vec{a},\vec{b})^2\le|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$ tengsizlik, bundan esa $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2$

$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$ tengsizliklarga ega bo‘lamiz. Natijada,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}+$$
$$+2\cdot\sqrt{\sum_{i=1`}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$$
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\Rightarrow d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

5. *3*) shartni, ya’ni $d_2(x,y)\le d_2(x,z)+d_2(z,y)$ tengsizlikni tekshiramiz.

Ravshanki, biror $i_0 \in N$ nomer uchun $d_2(x,y)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{|y_i - x_i|\}=|y_{i_0} - x_{i_0}|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa

$$d_2(x,y)=\max_{i=\overline{1,n}}\{|y_i - x_i|\}=|y_{i_0} - x_{i_0}| = |y_{i_0} - z_{i_0} + z_{i_0} - x_{i_0}| \le |y_{i_0} - z_{i_0}| + |z_{i_0} - x_{i_0}| \le$$
$$\max_{i=\overline{1,n}}\{|y_i - z_i|\}+\max_{i=\overline{1,n}}\{|z_i - x_i|\} = d_2(x,z)+d_2(z,y)$$

munasabat kelib chiqadi.

Demak, uchburchak tengsizligi $d_2(x,y)\le d_2(x,z)+d_2(z,y)$ o‘rinli ekan.

6. *3)*. $|x-y| \le |x-z| + |y-z|$ tengsizlikdan

$$|x-y| \le |x-z| + |y-z| + 2\cdot\sqrt{|x-z|\cdot|y-z|}$$

hosil qilamiz, natijada,

$$\sqrt{|x-y|} \le \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|y-z|} \Rightarrow d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

7. $d_1(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $d_2(x,y)=\max\{|x_i - y_i|\}$ metrikalar R^n da bir xil topologiya aniqlashini ko‘rsatishimiz kerak. Buning uchun *(R^n,d_1)* dan olingan ochiq to‘plamni *(R^n,d_2)* da ham ochiq ekanligi ko‘rsatamiz va aksincha *(R^n,d_2)* dan olingan ochiq to‘plamni *(R^n,d_1)* da ham ochiq ekanligi ko‘rsatamiz. Bizga *(R^n,d_1)* da ochiq bo‘lgan A to‘plam berilgan bo‘lsin. Ochiq to‘plamning ta’rifiga ko‘ra uning ixtiyoriy $x \in A$ nuqtasi ichki nuqta bo‘ladi. Demak, shunday $r > 0$ son mavjud bo‘lib, $B_r(x) \subset A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$d_1(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < r$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu sharning ichiga d_2 metrikada radiusi $\frac{r}{n}$ ga teng $\widetilde{B}_{\frac{r}{n}}(x)$ shar joylashtiramiz. Ravshanki, bu shar A to‘plamning ichida joylashgan bo‘ladi. Demak, *(R^n,d_1)* dan olingan ochiq A to‘plam *(R^n,d_2)* da ham ochiq ekan.

Masalaning ikkinchi qismini isbotlash uchun *(R^n,d_2)* dan olingan ochiq to‘plamni *(R^n,d_1)* da ham ochiq ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Bizga *(R^n,d_2)* da ochiq bo‘lgan A to‘plam berilgan bo‘lsin. Ochiq to‘plamning ta’rifiga ko‘ra uning ixtiyoriy $x \in A$ nuqtasi ichki nuqta bo‘ladi. Demak, shunday $r > 0$ son mavjud bo‘lib, $\widetilde{B}_r(x) \subset A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $d_2(x,y)=\max\{|x_i - y_i|\} < r$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu sharning ichiga d_1 metrikada radiusi r ga teng $B_r(x)$ shar chizamiz. Ravshanki, bu shar A to‘plamning ichida joylashgan bo‘ladi. Demak, *(R^n,d_2)* dan olingan ochiq A to‘plam *(R^n,d_1)* da ham ochiq ekan.

Bu bilan R^n da d_1 va d_2 metrikalar bir xil topologiya tashkil qilishi isbotlandi.

8. Masalaning birinchi qismini yechish uchun (R^1, d_1) dan olingan ochiq to‘plamni (R^1, d_2) da ham ochiq ekanligi ko‘rsatamiz va aksincha (R^1, d_2) dan olingan ochiq to‘plamni (R^1, d_1) da ham ochiq ekanligi ko‘rsatamiz. Bizga (R^1, d_1) da ochiq bo‘lgan A to‘plam berilgan bo‘lsin. Ochiq to‘plamning ta’rifiga ko‘ra uning ixtiyoriy $x \in A$ nuqtasi ichki nuqta bo‘ladi. Demak, shunday $r > 0$ son mavjud bo‘lib, $(x - r;\ x + r) \subset A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$d_1(x, y) = |y - x| < r$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu sharning ichiga d_2 metrikada radiusi $r_1 = \min\{d_2(x - r, x),\ d_2(x + r, x)\}$ ga teng $\widetilde{B}_{r_1}(x)$ shar chizamiz. Ravshanki, bu shar A to‘plamning ichida joylashgan bo‘ladi. Demak, (R^1, d_1) dan olingan ochiq A to‘plam (R^1, d_2) da ham ochiq ekan.

Endi (R^1, d_2) dan olingan ochiq to‘plamni (R^1, d_1) da ham ochiq ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Bizga (R^1, d_2) da ochiq bo‘lgan A to‘plam berilgan bo‘lsin. Ochiq to‘plamning ta’rifiga ko‘ra, uning ixtiyoriy $x \in A$ nuqtasi ichki nuqta bo‘ladi. Demak, shunday $r > 0$ son mavjud bo‘lib, $\widetilde{B}_r(x) \subset A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$d_2(x, y) = |\,arctgy - arctgx\,| < r$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu sharning ichiga d_1 metrikada radiusi $r_1 = \min\{d_1(x - r, x),\ d_1(x + r, x)\}$ ga teng $B_{r_1}(x)$ shar chizamiz. Ravshanki, bu shar A to‘plamning ichida joylashgan bo‘ladi. Demak, (R^1, d_2) dan olingan ochiq A to‘plam (R^1, d_1) da ham ochiq ekan. Bu bilan R^1 da d_1 va d_2 metrikalar bir xil topologiya tashkil qilishi isbotlandi.

Endi, Koshi ketma-ketligining turlicha ekanligini ko‘rsatamiz. d_1 metrika yordamida cheksiz katta ketma-ketlik olamiz: $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
$\forall M > 0, \exists n_0 \in N, n_o < n$ lar uchun $d_1(x_n, x_0) > M$, lekin ikkinchi tomondan $\forall \varepsilon > 0$ olganimizda ham $\exists n_0(\varepsilon) \in N, n_o < n$ uchun $d_2(x_n, \frac{\pi}{2}) < \varepsilon$ shuning uchun d_1 metrika bo‘yicha uzoqlashuvchi bo‘lgan ketma-ketlik d_2 metrika bo‘yicha yaqinlashadi.

9. 5-masaladan foydalaning.

10. *3)* $|f(t) - g(t)| \le |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|$ tengsizlik va aniq integralning xossasidan

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \le \int_0^1 |f(t) - h(t)| dt + \int_0^1 |h(t) - g(t)|,$$

$$d_4(f, g) \le d_4(f, h) + d_4(h, g)$$

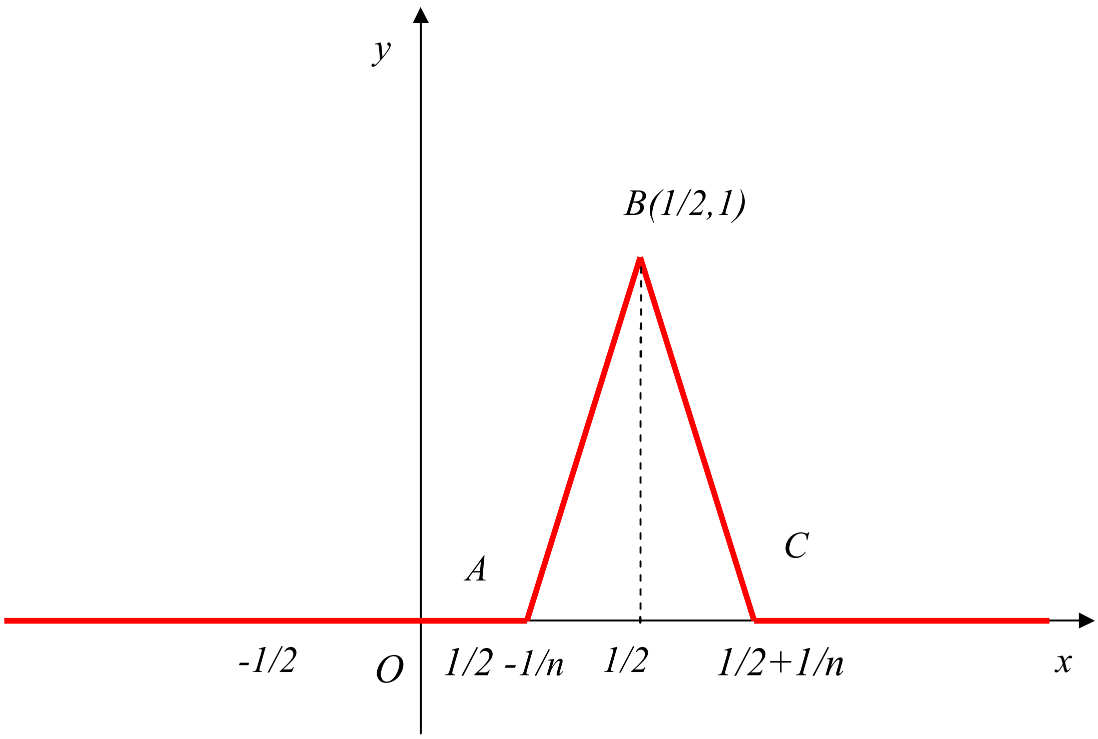
kelib chiqadi.

11. f_n funksiya tuzamiz $f_n=\begin{cases} 0, \ agar \ x\in(-\infty,\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\bigcup(\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\infty) \\ nx-\frac{n}{2}+1, \quad agar\, x\in(\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}) \\ -nx+\frac{n}{2}+1, \quad agar\, x\in(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}) \end{cases}$ (26-rasm).

$g(x)=0$ deb olamiz.

$d_4(f_n,g)=\int_0^1|f_n(t)-g(t)|dt=\int_0^1|f_n(t)|dt=\int_0^1 f_n(t)dt=$ {bu integral uchburchakning yuzasiga teng} $=\frac{1}{n}$;

$AC=\frac{2}{n}$; $h=1;S=\frac{AC\cdot h}{2}=\frac{1}{n}$; $\lim d_4(f_n,g)=0$. Ikkinchi tomondan $d_3(f_n,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-g(x)|=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}d_3(f_n,g)=1$ bunday uzluksiz funksiya mavjud emas, ya'ni f limit funksiya $\frac{1}{2}$ nuqtada uzilishga ega. Demak, f_n ketma-ketlik d_4 metrikada limitga ega, d_3 metrikada esa limitga ega emas.



26-rasm

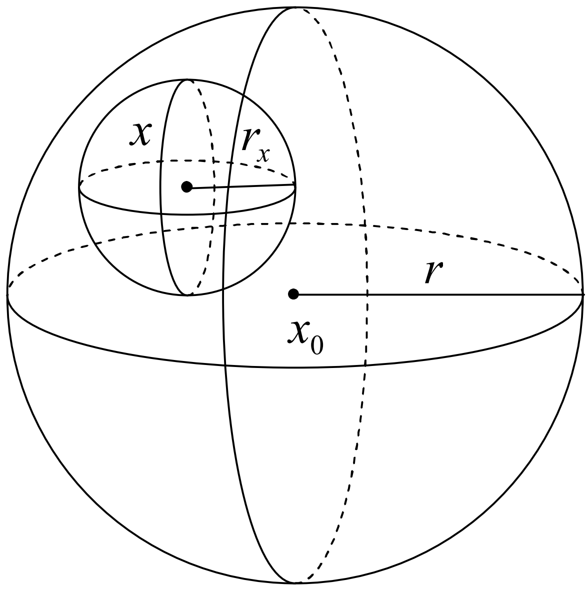
12. ***Zaruriyligi***: faraz qilaylik, Y yopiq to'plam. Yopiq to'plamning ta'rifiga ko'ra $Y=\overline{Y}\Rightarrow\forall x\in(X\setminus Y)\Rightarrow \ x\in X, x\notin Y\Rightarrow \ d(x,Y)=a\neq 0$. Markazi x

nuqtada bo‘lgan radiusi $\frac{a}{2}$ ga teng ochiq shar $B_{\frac{a}{2}}(x)\subset(X\setminus Y)$ x ni o‘z ichiga olgan atrof bo‘ladi. x nuqta ixtiyoriy bo‘lgani uchun $(X\setminus Y)$ to‘plamning ochiq to‘plam ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi: $(X\setminus Y)$ ochiq bo‘lsin. $\forall x\in(X\setminus Y)$ olamiz. $(X\setminus Y)$ ochiq bo‘lgani uchun shunday $B_r(x)$ ochiq shar mavjudki, $B_r(x)\subset(X\setminus Y)\Rightarrow x\in X, x\notin Y\Rightarrow d(x,Y)\neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, Y ning birorta ham urinish nuqtasi $(X\setminus Y)$ ga tegishli emas. Bundan Y ning barcha urinish nuqtalari o‘ziga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, $Y=\overline{Y}\Rightarrow Y$ yopiq to‘plam.

13. $M=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $M\subset X$. Har qanday metrik fazoda nuqta yopiq to‘plamdir. $\bigcup_{i=1}^{n}x_i=M\subset X$. Chekli sondagi yopiq to‘plamlarning birlashmasi yopiq to‘plam ekanligidan M ning yopiq ekanligi kelib chiqadi.

14. Ochiq sharning ochiqligini isbotlaymiz. Ixtiyor $x\in B_r(x_0)$ nuqta olib, uning ichki nuqta ekanligini ko‘rsatamiz.



27-rasm

Haqiqatan, $r_x=\min\{d(x,x_0),r-d(x,x_0)\}>0$ son uchun $B_{r_x}(x)\subset B_r(x_0)$ bo‘ladi (27-rasm), ya’ni $\forall y\in B_{r_x}(x)$ nuqta uchun
$d(x_0,y)\le d(x_0,x)+d(x,y)\le d(x_0,x)+r_x\le d(x_0,x)+r-d(x_0,x)=r,\ d(x_0,y)<r$
demak, $B_{r_x}(x)\subset B_r(x_0)$. Bundan $B_r(x_0)$ ning ochiq to‘plamligi kelib chiqadi.

Yopiq sharning yopiq to‘plam ekanligini isbotlash uchun $X \setminus B_r^*(x_0)$ to‘plamning (to‘ldiruvchisining) ochiq to‘plam ekanligini isbotlash kerak. Sferani esa $S = X \setminus ((X \setminus B^*) \bigcup B)$ ko‘rinishda ifodalash kifoya.

15. (X, d) diskret metrik fazo bo‘lsin, ya’ni v$d(x, y) = \begin{cases} 0, & agar \quad x = y \\ 1, & agar \quad x \neq y \end{cases}$.

Markazi x_0 nuqtada bo‘lgan ochiq shar $B_1(x_0) = \{y \mid d(x_0, y) < 1\}$ olaylik. Ravshanki, $B_1(x_0) = \{x_0\}$, $\overline{B_1(x_0)} = \{x_0\}$. Bu fazodagi markazi x_0 nuqtada radiusi 1 ga teng yopiq shar $B_1^*(x_0) = \{y \mid d(x_0, y) \leq 1\}$ butun fazo X bilan ustma-ust tushadi. Demak, $\overline{B_1(x_0)} \neq B_1^*(x_0)$.

16. a) $X_1, X_2, .., X_n$ ochiq to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, ularning kesishmasi $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \varnothing$ bo‘sh bo‘lmasin, u holda kesishmaga tegishli ixtiyoriy x olamiz. Bu element har bir X_i ga tegishli bo‘ladi. Har bir X_i ochiq bo‘lgani uchun $B_{r_1}(x), B_{r_2}(x), ..., B_{r_n}(x)$ sharlar mavjud bo‘lib, $B_{r_i}(x) \subset X_i$ u holda $r = \min_{i=1,n} r_i$ olamiz, u holda $B_{r_i}(x), \subset \bigcap_{i=1}^{n} X_i$. x nuqtaning ixtiyoriyligidan kesishmaning ochiq to‘plamligi kelib chiqadi.

b) $X_1, X_2, .., X_n, ..$ ochiq to‘plamlar berilgan bo‘lsin, u holda $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = M$ M ning ochiqligini ko‘rsataylik. $\forall x \in M$ olamiz. Shunday n_0 mavjudki, $x \in X_{n_0}$ *va* X_{n_0} ochiq bo‘lganligi uchun shunday $r>0$ mavjudki, $B_r(x) \subset X_{n_0} \Rightarrow B_r(x) \subset M$. x nuqtaning ixtiyoriyligidan M ning ochiqligi kelib chiqadi.

17. ***Zarurligi***: faraz qilaylik, A yopiq to‘plam. $A \bigcap B_r^*(x) = \begin{cases} \varnothing \\ \mathrm{M} \neq \varnothing \end{cases}$.

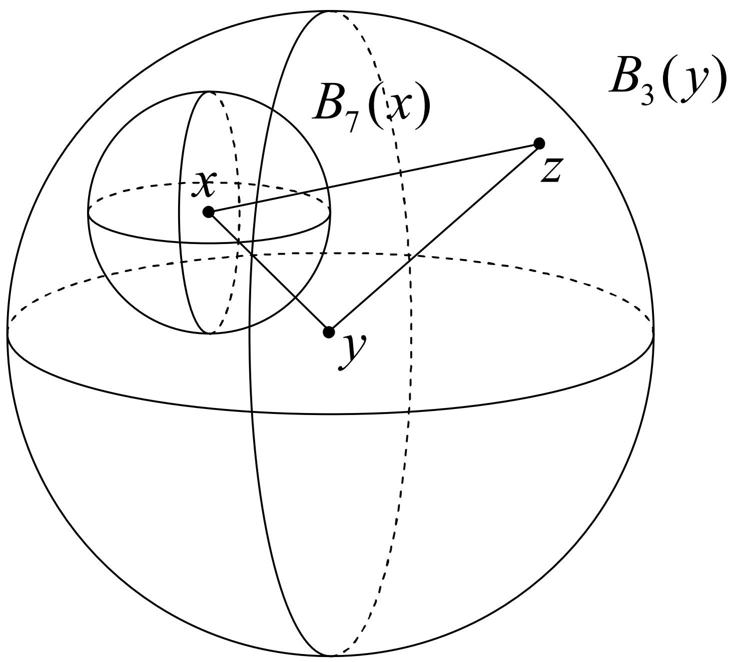
Bo‘sh to‘plam yopiq to‘plam. $M = A \bigcap B_r^*(x)$, A va $B_r^*(x)$ yopiq to‘plamlar bo‘lgani uchun kesishma yopiq to‘plam.

Yetarliligi: faraz qilaylik x nuqta A to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin, u holda $B_r^*(x) \cap A \neq \varnothing$ va yopiq. Bu nuqtaning A to‘plamga tegishliligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $(B_\varepsilon(x) \setminus x) \cap A \neq \varnothing$. U holda x nuqta $B_r^*(x) \cap A$ to‘plamning ham limit nuqtasi bo‘ladi. $B_r^*(x) \cap A$ to‘plamning yopiq ekanligidan u o‘zining barcha limit nuqtalarini o‘z ichiga oladi. Xususan x nuqta ham $B_r^*(x) \cap A$ to‘plamga tegishli bo‘ladi. Biz A to‘plamning barcha limit nuqtalari o‘ziga tegishli ekanligini ko‘rsatdik. Bundan A to‘plamning yopiqligi kelib chiqadi.

18. $\forall x \in \mathrm{int}(A \bigcap B)$ u holda shunday $B_r(x)$ topiladiki, $B_r(x) \subset A \bigcap B$ bundan $B_r(x) \subset A$, *va* $B_r(x) \subset B$ munosabatlar kelib chiqadi. Natijada, $x \in \mathrm{int}\, A, x \in \mathrm{int}\, B \Rightarrow x \in \mathrm{int}\, A \bigcap \mathrm{int}\, B \Rightarrow \mathrm{int}(A \bigcap B) \subset \mathrm{int}\, A \bigcap \mathrm{int}\, B$. Ikkinchi tomondan $\forall x \in \operatorname{int} A \bigcap \operatorname{int} B \Rightarrow x \in \operatorname{int} A, x \in \operatorname{int} B$. Ichki nuqtaning ta'rifidan shunday r_1, r_2 sonlari topiladiki $B_{r_1}(x) \in A$, $B_{r_2}(x) \in B$. $r = \min\{r_1, r_2\}$ deb olsak, $B_r(x) \subset A \bigcap B$ kelib chiqadi $\operatorname{int} A \bigcap \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \bigcap B)$ munosabatga ega bo'lamiz. Yuqoridagilardan $\operatorname{int}(A \bigcap B) = \operatorname{int} A \bigcap \operatorname{int} B$ munosabatni hosil qilamiz.

19. (X, d) metrik fazoda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik berilgan bo'lsin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun $n_0(\varepsilon) \in N$ topiladiki, barcha $n>n_0$ sonlar uchun $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $m>n$. Uchburchak tengsizligidan $d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$ munosabatni hosil qilamiz. Bundan esa $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ hamda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

20. ***Zaruriyligi.*** Y to'plam yopiq bo'lib, $\{y_n\}$ shu to'plamdagi yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lsin. Uning limitini Y ga tegishli ekanligini ko'rsatamiz. Limitning ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon) \in N$ topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $d(y_n, y) < \varepsilon$. Endi ketma-ketlik tuzilishiga ko'ra, $\forall n \in N, y_n \in Y$ bundan $d(y_n, Y) = 0$, $d(y, Y) \le d(y, y_n) + d(y_n, Y)$ munosabatlarni hisobga olib, $d(y, Y) \le \lim_{n\to\infty} (d(y, y_n) + d(y_n, Y)) = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Y yopiq bolganligi uchun $\overline{Y} = Y$ ekanligi kelib chiqadi. Buhdan esa Y ning barcha urinish nuqtalar to'plami o'ziga tegishli bo'ladi, ya'ni $d(y, Y) = 0$ dan $\forall y \in Y$ kelib chiqadi.



28-rasm

Yetarliligi. Y dagi nuqtalardan iborat ixtiyoriy yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti Y ga tegishli bo'lsin, u holda limit nuqta urinish nuqta bo'ladi.

Y ning barcha urinish nuqtalaridan iborat to‘plam uning yopilmasi bo‘ladi. Demak, $\overline{Y} = Y$, Y- yopiq.

21. $\overline{A}$ to‘plamning yopiqligini isbotlash uchun $X \setminus \overline{A}$ to‘plamning ochiq ekanligini ko‘rsatamiz, $\forall x \in X \setminus \overline{A}$ nuqta qaraylik. Demak, $x \notin \overline{A}$ shuning uchun x ning shunday $U(x)$ atrofi topiladiki, bu atrofda A ga tegishli nuqtalar yo‘q, $U(x) \cap A = \varnothing$. Shuning uchun $x \in U(x) \subset \left(X \setminus \overline{A}\right)$, ya’ni x nuqta $X \setminus \overline{A}$ to‘plamning ichki nuqtasidir. Demak, $X \setminus \overline{A}$ to‘plam ochiq, bundan $\overline{A}$ to‘plamning yopiqligi kelib chiqadi.

23. Masala shartiga ko‘ra $B_7(x) \subset B_3(y)$ o‘rinli (28-rasm). Endi, $B_3(y) \subset B_7(x)$ ekanini isbotlaymiz.
$\forall z \in B_3(y),\ d(x,z) \le d(y,z) + d(x,y) < 3 + 3 < 7$. Bundan $z \in B_7(x)$ ekani kelib chiqadi. Demak, $B_3(y) = B_7(x)$.

24. $x_n \to x, x_n \to y$, u holda uchburchak tengsizligiga ko‘ra, $0 \le d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y)$ ammo bu tengsizlikning o‘ng tomoni $n \to \infty$ da 0 ga intiladi. Demak, $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. **25. 1)** R**. 2)** R**. 3)** $[-1,1]$**. 4)** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**. 5)** $[0,\pi]$**. 6)** S^1**. 7)** $[0,\infty)$**. 8)** $[0,\infty)$**. 9)** R**. 10)** $[0,\infty)$**. 11)** $[1,\infty)$**.**

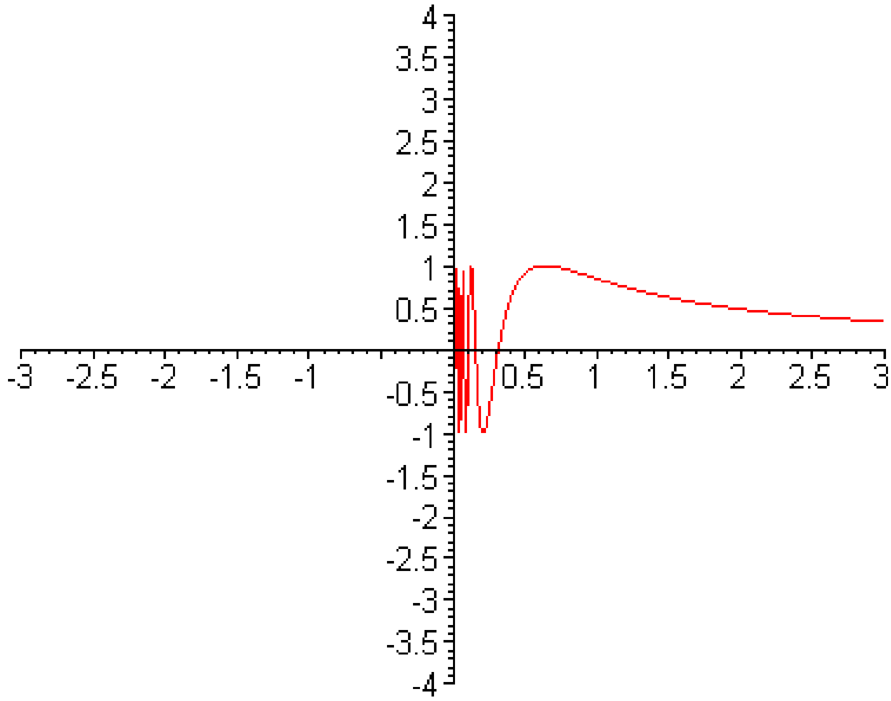
12) $\overline{A} = A \cup \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$ (29-rasm).

26. Ma’lumki, R^1 da yopiq shar yopiq kesmadan iborat bo‘ladi. Bizga $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset ... \supset [a_n,b_n] \supset ...$ yopiq kesmalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin, bunda $b_n - a_n \to 0, n \to \infty$. Endi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ va $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ sonli ketma-ketlik qaraymiz. $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ... \le b_1, b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \ge ... \ge a_1$ munosabatlardan, matematik analilizdagi teoremaga ko‘ra, $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va $\{a_n\}$ ketma-ketlikning ixtiyoriy hadi $\{b_n\}$ ketma-ketlikning ixtiyoriy hadidan oshmaydi. Faraz qilaylik, $\{a_n\} \to a_0$ va $\{b_n\} \to b_0$ bo‘lsin. Agar $a_0 = b_0$ bo‘lsa, $\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i] = \{x_0\}$, aks holda $\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i] = [a_0,b_0]$.

27. ***Zarurligi***. R^1 da $A \subset R^1$ ochiq to‘plam olaylik. $\forall x \in A$ nuqta ichki ekanligidan shunday $\varepsilon > 0$ son topiladiki, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ munosabat bajariladi. U_x deb x ni o‘z ichiga olgan eng katta ochiq intervalni belgilaylik. Ravshanki, $x \ne y$ nuqtalarni o‘z ichiga olgan eng katta ochiq intervallar kesishmaydi yoki ustma-ust tushadi. Endi A to‘plamdagi ratsional koordinatali nuqtalar uchun eng katta ochiq internallarni qaraymiz. Bu intervallar ko‘pi bilan sanoqli sonda bo‘ladi. Isbotlanganiga ko‘ra bu intervallar ichida kesishadiganlari yo‘q, aks holda ular ustma-ust tushar edi. Demak, A-sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan ochiq intervallar birlashmasidan iborat.

Yetarliligi: sanoqli sondagi ochiq to‘plamlarning birlashmasi ochiq ekanligidan kelib chiqadi.

28. 1) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=0\}$; 2) R^2. **29.** (X,d) metrik fazodan markazi x_0



29-rasm

nuqtada radiusi $\frac{1}{n}, n \in N$ bo‘lgan ochiq sharlar ketma- ketligini olaylik.

$$\left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0)\right\}, \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(x_0) = \{x_0\} \text{ -}$$

nuqta yopiq to‘plam.

30. *(X,d)* metrik fazoda markazi x_0 nuqtada radiusi n $(n \in N)$ ga teng $\{B_n^*(x_0)\}$ yopiq sharlar sistemesini olaylik. Ravshanki, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n^*(x_0) = X$ ochiq.

31. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ixtiyoriy chekli to‘plam bo‘lsin. (A,d) metrik fazoni qaraylik, $\forall a_i, a_j \in A$ $(i \neq j)$ nuqtalar uchun $d(a_i, a_j) > 0$, $0 < r < \min_{i \neq j}\{d(a_i a_j)\}$ deb olsak, $B_r(a_i) = \{a_i\}$ bo‘ladi. Ixtiyoriy $B \subset A$ to‘plam $B = \bigcup_{i=1}^{k}\{a_i\}$ ko‘rinishda bo‘ladi yoki $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_r(a_i)$, demak, ixtiyoriy B to‘plam chekli sondagi ochiq to‘plamlarning birlashmasidan iborat. Bundan B to‘plamning ochiq, ikkinchi tomondan, nuqta yopiq to‘plam ekanligidan, B to‘plamning yopiq ekanligi kelib chiqadi. Bu esa, A to‘plamda d metrika bilan aniqlangan topologiya diskret metrika yordamida aniqlangan topologiya bilan bir xilligini ko‘rsatadi.

32. (X,d) diskret metrik fazo bo‘lsin. $r(d)$ deb diskret metrika bilan aniqlangan topologiyani belgilaymiz. Ixtiyoriy $A \subset X$ to‘plam olaylik. Diskret fazoda ixtiyoriy to‘plam ochiq bo‘ladi, demak, $A \in r(d)$. Endi $X \setminus A$ to‘plamni qaraylik. $(X \setminus A) \subset X$ ekanligidan $X \setminus A$ to‘plam ochiq. Bundan A to‘plamning yopiqligi kelib chiqadi.

33. Aylanani uzunliklari $\frac{2\pi r}{k}$ ga teng k ta yoylarga ajratib, aylanadagi har qanday $k+1$ ta nuqtalardan hech bo‘lmaganda bitta yoyda bittadan ortiq nuqta joylashishidan (Dirixlening qutilar prinsipi), hamda $\beta = n\alpha\pi$ burchakni 2π bilan ratsional bog‘liq emasligidan foydalaning.

34. Avvalo ikkita chegaralangan to‘plamning birlashmasi chegaralanganligini isbotlaymiz. A_1 va A_2 to‘plamlar mos ravishda $B_{r_1}(x_1)$ va $B_{r_2}(x_2)$ sharlarning ichida joylashgan bo‘lsin. $r = r_1 + r_2 + d(x_1, x_2)$ deb olsak, $A_1 \cup A_1 \subset B_r(x_1)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan, $\forall z \in B_{r_2}(x_2)$ nuqta olamiz.

$$d(z, x_1) \le d(z, x_2) + d(x_2, x_1) < r_2 + d(x_2, x_1) < r .$$

Demak, $B_{r_2}(x_2) \subset B_r(x_1)$. $B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x_1)$ munosabatning o‘rinliligi ravshan. Bundan $A_1 \cup A_1 \subset B_r(x_1)$ ekani kelib chiqadi.

Umumiy holda $r = \sum_i r_i + \sum_{i,j} d(x_i, x_j)$ deb olish yetarli.

Chegaralangan to‘plam sifatida $B_n(x)$ sharlar olinsa, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) = X$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. X esa chegaralanmagan.

35. 34-masaladan foydalaning. **36**. (Q, d_1) dan $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ fundamental ketma-ketlik olamiz. Ravshanki, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \notin Q$. Bundan ratsional sonlar to‘plamida yaqinlashuvchi bo‘lmagan fundamental ketma-ketlik mavjudligi kelib chiqadi. Demak, (Q, d_1) to‘la bo‘lmagan metrik fazo ekan. **37**. $(C_{[0;1]}, d_3)$ fazoda $\{x_n\}$- fundamental ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni $d_3(x_n, x_m) \to 0$, $n, m \to 0$. $C_{[0;1]}$ fazodagi yaqinlashish, funksiyalarning tekis yaqinlashishiga ekvivalent bo`ladi.

Har bir berilgan $\forall t \in [0;1]$ nuqtada ushbu $\{x_n(t)\}$ sonli ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantirgani uchun bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo`ladi. Uning limitini $x_0(t)$ deb belgilaymiz. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $x_0(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo`lgani uchun $x_0(t)$ funksiya uzluksiz bo`ladi. Natijada, $d_3(x_n, x_0) \to 0$ ga intiladi, $x_0(t) \in C_{[0;1]}$. Demak, $(C_{[0;1]}, d_3)$ fazo to`la metrik fazodir.
38. ***Zarurligi***. (X, d) metrik fazo to‘la bo‘lib, unda ichma-ich joylashgan radiusi 0 ga intiluvchi $B_{r_1}(x_1), B_{r_2}(x_2)...$ yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo‘sh bo‘lsin deb faraz qilaylik. Sharlarning markazlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo‘ladi, chunki $d(x_n, x_m) < r_n$ $(n < m)$, r_n esa $n \to \infty$ da 0 ga intiladi. Fazo to‘la bo‘lgani uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik biror x_0 nuqtaga intiladi. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi mos sharlarning markazlari bo‘lgani uchun x_0

nuqta barcha sharlarga tegishli. Demak, bu sharlarning kesishmasi bo‘sh emas. Bu ziddiyat masalaning zaruriylik shartini isbotlaydi.

Yetarliligi. Bizga $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Shunday n_1 topiladiki, barcha $n > n_1$ lar uchun $d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ bo‘ladi. x_{n_1} nuqtani markaz qilib radiusi birga teng yopiq shar olib uni B_1 deb belgilaymiz. So‘ngra shunday n_2 $(n_2 > n_1)$ topiladiki, barcha $n > n_2$ lar uchun $d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ bo‘ladi. x_{n_2} nuqtani markaz qilib radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng yopiq shar olib uni B_2 deb belgilaymiz va h.k. bu jarayonni davom ettirib, ichma-ich joylashgan $\{B_k\}$ yopiq sharlar ketma-ketligini hosil qildik. B_k sharning radiusi $\frac{1}{2^{k-1}}$ ga teng. Teorema shartiga ko‘ra bu yopiq sharlar ketma-ketligining umumiy nuqtasi mavjud. Bu nuqtani x bilan belgilaymiz. Ravshanki, hosil qilingan $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikning limiti x bo‘ladi. Agar fundamental ketma-ketlik qismiy ketma-ketligining limiti x bo‘lsa, bu ketma-ketlikning o‘zi ham x ga intiladi. Shunday qilib $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Demak, (X,d) metrik fazo to‘la ekanligi isbotlandi.

39. $X = N,\ d(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x+y}, & agar\ x \neq y \\ 0, & agar\ \ x = y \end{cases}.$

(X,d) metrik fazoda $B^*_{r_n}(n)$ (bunda $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$) yopiq sharlarni

$$B^*_{r_1}(1) = X, B^*_{r_2}(2) = X \setminus \{1\}, B^*_{r_3}(3) = X \setminus \{1,2\}, \ldots, B^*_{r_n}(n) = X \setminus \{1,2,3,\ldots,n-1\} \ldots$$

qarasak, haqiqatan ham,

$$B^*_{r_1}(1) \supset B^*_{r_2}(2) \supset B^*_{r_3}(3) \supset \ldots. \supset B^*_{r_n}(n) \supset \ldots$$

munosabat o‘rinli va ularning kesishmasi bo‘sh bo‘ladi.

2 §

1. $X = \{a,b\}$. $\tau_1 = \{\varnothing, X\}, \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}, \tau_3 = \{\varnothing, X, \{b\}\}, \tau_4 = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a\}\}$

2. Top’lamlar birlashmasi va kesishmasining xossalaridan foydalaning.

3. 2) $\forall x \in \partial(A \cup B)$ nuqta olamiz. Chegaraviy nuqtaning ta’rifiga ko‘ra, $\forall U_x$ atrof uchun

$$\begin{cases} U_x \cap (A \cup B) \neq \varnothing \\ U_x \cap X \setminus (A \cup B) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (U_x \cap A) \cup (U_x \cap B) \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow$$

1) $\begin{cases} U_x \cap A \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus A) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow x \in \partial A,$

2) $\begin{cases} U_x \cap B \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus B) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow x \in \partial B$

$\partial(A \cup B) \supset \partial A \cup \partial B$ o‘rinli emas. Masalan:
$X = R, A = (0;2),\ B = (1;3), A \cup B = (0;3), \partial(A \cup B) = \{0,3\},\ \partial A \cup \partial B = \{0,1,2,3\}$.

Ikkala holda ham $x \in \partial A \cup \partial B$ kelib chiqadi. Demak, $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

4) $\forall x \in \partial \overline{A}$ ta’rifga ko‘ra $\begin{cases} U_x \cap \overline{A} \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \varnothing \end{cases}$ shu masalaning 1) qismidan foydalanamiz: $\begin{cases} U_x \cap (A \cup \partial A) \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus (A \cup \partial A)) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_x \cap A \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus \partial A) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow x \in \partial A$.

$\partial \overline{A} \supset \partial A$ munosabat bajarilmasligiga misol:
$X = R,\ A = (0;1) \cup (1;2),\ \overline{A} = [0;2],\ \partial \overline{A} = \{0;2\},\ \partial A = \{0,1,2\}$.

6) $\forall x \in \partial(\operatorname{int} A)$ nuqta olamiz. Quyidagi munosabat o‘rinli:
$\begin{cases} U_x \cap (\operatorname{int} A) \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus (\operatorname{int} A)) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_x \cap A \neq \varnothing \\ U_x \cap (X \setminus A) \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow x \in \partial A$. Bundan $\partial(\operatorname{int} A) \subset \partial A$. $\partial(\operatorname{int} A) \supset \partial A$ o‘rinli emasligiga misol:
$X = R,\ A = (0;1) \cup \{2\},\ \partial A = \{0,1,2\},\ \partial(\operatorname{int} A) = \{0,1\}$

8) Ma'lumki, $A = B$ munosabat $A \subset B, B \supset A$ munosabatlarga teng kuchlidir. Demak, $\overline{A} \subset \operatorname{int} A \cup \partial A$ va $\overline{A} \supset \operatorname{int} A \cup \partial A$ munosabatlarni isbotlashimiz kerak.

Agar $x \in \overline{A}$ bo‘lsa, x ning ixtiyoriy atrofida A to‘plamga tegishli nuqtalar mavjud. Agar x ning ixtiyoriy atrofida $X \setminus A$ ga tegishli nuqtalar ham bo‘lsa, unda $x \in \partial A$. Lekin x ning birorta U atrofida $X \setminus A$ ga tegishli nuqtalar bo‘lmasa, unda $x \in U \subset A$ va demak $x \in \operatorname{int} A$. Bundan $\overline{A} \subset \operatorname{int} A \cup \partial A$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $x \in \operatorname{int} A \cup \partial A$ bo‘lsin. Demak, $x \in \operatorname{int} A$ yoki $x \in \partial A$ munosabat bajariladi. Ikkala holda ham x ning ixtiyoriy atrofida A to‘plamga tegishli nuqtalar mavjud va demak $x \in \overline{A}$. Bundan $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ ni hosil qilamiz.

4. A to‘plamning x urinish nuqtasi uchun $d(x, A) = 0$ va $B_r(x) \cap A \neq \varnothing\ (\forall r > 0)$ munosabatlarning ekvivalent ekanligini isbotlash kerak.

5. Har doim $A \subset \overline{A}$ bo‘lganligi uchun $A \supset \overline{A}$ munosabatni isbotlash yetarli. Buning uchun $\overline{A}$ to‘plamga tegishli ixtiyoriy x nuqtani olaylik. Agar $x \in X \setminus A$ bo‘lsa, $X \setminus A$ ochiq to‘plam ekanligi va x nuqta urinish nuqtasi ekanligidan $(X \setminus A) \cap A = \varnothing$ munosabat kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik $x \in A$ ekanligini ko‘rsatadi.

6. $\overline{A}$ ning yopiq to‘plam ekanligini isbotlash uchun $X \setminus \overline{A}$ to‘plamning ochiq to‘plam ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $X\setminus\overline{A}$ to‘plamga tegishli ixtiyoriy x nuqtani qaraylik. x nuqta $\overline{A}$ to‘plamga tegishli emas va shuning uchun uning shunday U atrofi mavjudki, bu atorofda A to‘plamga tegishli nuqtalar yo‘q, ya’ni $U\cap A=\varnothing$. Shuning uchun $x\in U\subset X\setminus\overline{A}$, ya’ni x nuqta $X\setminus\overline{A}$ to‘plamning ichki nuqtasidir. Demak, $X\setminus\overline{A}$ ochiq to‘plam.

7. $\forall x\in\overline{A\cup B}$ nuqta olamiz. Ta’rifga ko‘ra $\left(f|_{X_1}\right)^{-1}(A)=X_1\cap f^{-1}(A)$ ikkala holda ham $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. Demak, $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. $\forall x\in\overline{A}\cup\overline{B}$ bo‘lsin unda $x\in\overline{A}$ yoki $x\in\overline{B}$ bo‘ladi. $x\in\overline{A}$ o‘rinli bo‘lsa $U_x\cap A\neq\varnothing\Rightarrow U_x\cap(A\cup B)\neq\varnothing\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$. $x\in\overline{B}$ bo‘lgan holda ham xuddi shunday ko‘rsatiladi. Shunday qilib, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ o‘rinli.

8. 6-masaladan bevosita kelib chiqadi.

9. 1) $X\in\tau$ bo‘lganligi va $X\cap Y=Y$ bo‘lganligi uchun $Y\in\tau_Y$.

2) $\varnothing\in\tau$ bo‘lganligi va $\varnothing\cap Y=\varnothing$ bo‘lganligi uchun $\varnothing\in\tau_Y$.

3) $H_1,H_2\in\tau_Y$ bo‘lsa, $G_1,G_2\in\tau_Y$ to‘plamlar mavjud bo‘lib,
$H_1\cap H_2=(Y\cap G_1)\cap(Y\cap G_2)=Y\cap(G_1\cap G_2)\in\tau_Y$.

4) τ_Y oilaga tegishli $\{H_\alpha\}$ to‘plamlar oilasi berilgan bo‘lsa, τ ga tegishli $\{G_\alpha\}$ to‘plamlar mavjud bo‘lib,
$\bigcup\limits_\alpha H_\alpha=\bigcup\limits_\alpha(Y\cap G_\alpha)=Y\cap(\bigcup\limits_\alpha G_\alpha)\in\tau_Y$ bo‘ladi.

10. Bizga $\forall x\in X$ va uning U atrofi berilgan bo‘lsin. Y_1 to‘plam X ning hamma yerida zich ekanligidan $U\cap Y_1\neq\varnothing$, ya’ni $y\in U\cap Y_1$ nuqta mavjudligi kelib chiqadi. $U\cap Y_1$ ochiq ekanidan hamda Y_2 to‘plam X ning hamma yerida zichligidan $U\cap Y_1\cap Y_2\neq\varnothing$, ya’ni $U\cap Y\neq\varnothing$ munosabatni hosil qilamiz. Bu esa $Y=Y_1\cap Y_2$ to‘plam X ning hamma yerida zich ekanligini bildiradi.

11. a) $X=[0,1]$, $\tau=\{A: X\setminus A-$ chekli yoki $A=\varnothing\}$. Bu topologik fazoda sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilmaydi.

b) $X=[0,1]$ to‘plamni diskret topologiya bilan olsak sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi o‘rinli emas.

14. Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi o‘rinli bo‘lganli uchun X topologik fazoda sanoqli baza mavjud. X topologik fazoda ixtiyoriy x nuqta olamiz va bu bazaning x nuqtani o‘z ichiga olgan to‘plamlarini qaraymiz. Bu to‘plamlar sanoqlidan ko‘p bo‘lmaydi. Ular x nuqta bazasinig topologiyasini hosil qiladi.

16. $\{\tau_\alpha\}$ va $\{\tau_\alpha\}$ oilalar berilgan bo‘lsin. Bu oilalarning kesishmasini $\{\tau_{\alpha\beta}\}$ deb belgilaylik. $\{\tau_{\alpha\beta}\}$ topologiya ekanligini ko‘rsatamiz. 1) $\varnothing\in\tau_{\alpha\beta}$; 2) $X\in\tau_{\alpha\beta}$ bajarilishi ravshan. 3) $\forall A_1,A_1\in\tau_{\alpha\beta}$ to‘plamlarning kesishmasi ham $\tau_{\alpha\beta}$ oilaga tegishli chunki $A_1\cap A_1\in\tau_\alpha$, $A_1\cap A_1\in\tau_\beta$; 4) $\{A_\lambda\}\in\tau_{\alpha\beta}$ bo‘lsin. $\bigcup\limits_\lambda A_\lambda\in\tau_\alpha,\bigcup\limits_\lambda A_\lambda\in\tau_\beta$ lardan $\bigcup\limits_\lambda A_\lambda\in\tau_{\alpha\beta}$ kelib chiqadi.

17. 1) $\forall x \in \overline{X \setminus A}$ nuqta olaylik. Ta'rifga ko'ra $U_x \bigcap (X \setminus A) \neq \varnothing$. Bundan $x \notin \operatorname{int} A$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $x \in \operatorname{int} A$ bo'lsa, shunday V_x atrof topiladiki, $V_x \subset A$ bajariladi. Natijada $V_x \bigcap (X \setminus A) = \varnothing$ tenglik kelib chiqadi. Bu esa x nuqtaning olinishiga zid. x nuqtaning ixtiyoriyligidan $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus (\operatorname{int} A)$ munosabatni hosil qilamiz. Endi $\forall x \in X \setminus (\operatorname{int} A)$. Bundan $x \notin \operatorname{int} A$, ya'ni x nuqtaning A da to'liq joylashadigan atrofi mavjud emas. Demak, $U_x \bigcap (X \setminus A) \neq \varnothing$ munosabat o'rinli. x nuqtaning ixtiyoriyligidan $X \setminus (\operatorname{int} A) \subset \overline{X \setminus A}$ kelib chiqadi.

18. 1) $\overline{A \bigcap B} \supset \overline{A} \bigcap \overline{B}$ munosabat bajarilmasligiga misol:

$X = R,\ A = (0;1),\ B = (1;2),\ \overline{A \bigcap B} = \varnothing,\ \overline{A} \bigcap \overline{B} = \{1\}$.

2) $\overline{A} \setminus \overline{B} \supset \overline{A \setminus B}$ munosabat bajarilmasligiga misol:

$X = R,\ A = (0;1),\ B = (1;2),\ \overline{A \setminus B} = [0;1],\ \overline{A} \setminus \overline{B} = [0;1)$.

21. Teskarisini faraz qilaylik. A to'plamni o'z ichia olgan eng kichik yopiq to'plam $B \subset \overline{A}$ bo'lsin deb faraz qilaylik, ya'ni $B \subset A$. B yopiqligidan $A \subset \overline{B} = B$ munosabat o'rinli. Bundan esa $A \subset \overline{B} \subset B$ ekani kelib chiqadi. Bu ziddiyat farazning noto'griligini, tasdiqning to'g'riligini isbotlaydi.

22. Teskarisini faraz qilamiz A to'plamning ochiq qism to'plamlari ichida $\operatorname{int} A$ ni o'z ichiga oluvchi ochiq B to'plam mavjud bo'lsin. $\operatorname{int} A \subset B \subset A$ B ga tegishli, lekin $\operatorname{int} A$ ga tegishli bo'lmagan x nuqta mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda shunday U_x atrof mavjudki, $U_x \subset B \subset A$ (B to'plamning ochiqligidan). Demak, x nuqta A to'plamning ichki nuqtasi, ya'ni $x \in \operatorname{int} A$. Bu esa ziddiyat.

23. Bu masala matematik analiz kursidagi har qanday uzluksiz funksiyani ratsional koeffisientli ko'phad bilan approksimatsiya qilish mumkin degan teoremadan kelib chiqadi.

24. ***Zaruriyligi***. X topologik fazoning Y qism fazosi diskret bo'lsin deb faraz qilaylik. $\forall y \in Y$ dan $y \in \tau_Y$ ekani kelib chiqadi. Y qism fazo ekanligidan $\exists U \in \tau$ topiladiki, $U \bigcap Y = \{y\}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bundan $\{y\}$ ajralgan nuqta ekanligi kelib chiqadi. y ning ixtiyoriyligidan Y qism fazoning barcha nuqtalari ajralgan ekanligini hosil qilamiz.

Yetarliligi. Y qism fazoning barcha nuqtalari ajralgan bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $\exists U \in \tau$ mavjudki, $U \bigcap Y = \{y\}$, bundan keltirilgan topologiya ta'rifiga ko'ra y nuqta Y da ochiqligi kelib chiqadi. Demak, Y diskret fazo ekan.

25. Faraz qilaylik $\{U_n\}$ X topologik fazoning sanoqli bazasi bo'lsin. Har bir bazaning elementidan bittadan a_n nuqta olamiz. $A = \{a_n\}$ sanoqli to'plam X ning hamma yerida zich. Demak, X topologik fazo separabel.

26. ***Zaruriyligi*** 25-masaladan kelib chiqadi.

Yetarliligi. (X,d) metrik fazo separabel bo'lsin. Bundagi hamma yerdazich to'plamni $A = \{a_n\}$ deb belgilaylik. $\{B_{\frac{1}{m}}(a_n)\}$ ochiq sharlar sistemasi

X metrik fazoning bazasi bo‘ladi. Bunda n va m bog‘liqsiz holda barcha natural sonlarni qabul qiladi. Demak, (X,d) da sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilar ekan.

27. $\{U_\alpha\}$ X topologik fazoning qoplamasi va $B=\{U_n\}$ uning sanoqli bazasi bo‘lsin. $\{U_n\}$ to‘plamlar ichidan $\{U_\alpha\}$ to‘plamlarda yotadiganlarini ajratib olamiz. Agar biror U_{n_0} bir nechta $\{U_\alpha\}$ larda yotsa ular ichidan ixtiyoriy bittasini tanlab olamiz va (U_{α_k}) deb belgilaymiz. $\{U_n\}$ sanoqli bo‘lgani uchun ajratib olgan $\{U_{n_k}\}$ to‘plamlar ham sanoqlidan ko‘p emas. Endi $\{U_{n_k}\}$ to‘plamlar X ni qoplashini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\forall x\in X$ nuqta olamiz. U holda $x\in U_\alpha$ shartni qanoatlantiruvchi U_α topish mumkin. $B=\{U_n\}$ baza bo‘lganligi uchun shunday U_n topish mumkinki, $x\in U_n\subset U_\alpha$ munosabat bajariladi. x nuqtaning ixtiyoriyligidan, hamda $U_\alpha\in\{U_{\alpha_k}\}$, $U_n\in\{U_{n_k}\}$ munosabatlardan (U_{α_k}) X ning qoplashi kelib chiqadi.

28. $\forall x\in A\bigcap B\Rightarrow\begin{cases}x\in A, A\in\tau\\ x\in \overline{B}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in \operatorname{int}A\\ x\in\overline{B}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall U_x\ uchun\ \ U_x\bigcap A\neq\varnothing\\ U_x\bigcap B\neq\varnothing\end{cases}$

$\Rightarrow U_x\bigcap A\bigcap B\neq\varnothing\Rightarrow x\in\overline{A\bigcap B}$. Demak, $A\in\tau$ uchun $A\bigcap\overline{B}\subset\overline{A\bigcap B}$ munosabat o‘rinli ekan. A ochiq bo‘lmaganda bu munosabat o‘rinli bo‘lmasligi mumkin. Haqiqatan, $X=R^1$, $A=[0,1]$, $B=(1,2)$ deb faraz qilsak, $A\bigcap\overline{B}=\{1\}$, $\overline{A\bigcap B}$.

29. $\partial A=\overline{A}\setminus\operatorname{int}A$ munosabatdan foydalanib isbotlash mumkin.

30. ***Zarurligi***. A-ochiq deb faraz qilsak, $A=\operatorname{int}A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. 3- masalaning 8) qismiga ko‘ra $\partial A=\overline{A}\setminus A$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. $\partial A=\overline{A}\setminus A$ o‘rinli bo‘lsin. 3- masala 8) qismiga ko‘ra $\partial A=\overline{A}\setminus\operatorname{int}A$ bu ikkala munosabatlarni solishtirib $A=\operatorname{int}A$ munosabatni hosil qilamiz. Demak, A – ochiq to‘plam.

31. 30- masalaga qarang.

32. (X,d) metrik fazo separabel bo‘lishi uchun unda sanoqli baza mavjud bo‘lishi zarur va yetarliligidan foydalaning.

33. Keltirilgan topologiya xossasidan foydalaning.

3 §

1. Funksiya uzluksizligining ta’rifiga ko‘ra $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta=\delta=(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $d(x,x_0)<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x\in X$ lar uchun $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ munosabat o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatishimiz kerak.
$|f(x)-f(x_0)|=|d(x,A)-d(x_0,A)|\le d(x,x_0)<\delta=\varepsilon$. Demak, $\varepsilon=\delta$ deb olsak, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ munosabat o‘rinli bo‘lar ekan.

2. ***Zarurligi***. f uzluksiz akslantirish, $G\subset Y$ ochiq to‘plam bo‘lsin. $f^{-1}(G)$ ochiq ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Agar $x\in f^{-1}(G)$ bo‘lsa, $f(x)\in G$ bo‘ladi. f akslantirish uzluksiz bo‘lganligi uchun x ning shunday U atrofi mavjudki

$U \subset f^{-1}(G)$ bo‘ladi. Bundan esa $x \in U \subset f^{-1}(G)$ kelib chiqadi. Demak, $f^{-1}(G)$ ochiq to‘plamdir.

Yetarliligi. Endi ixtiyoriy $G \subset Y$ ochiq to‘plam uchun $f^{-1}(G)$ ochiq to‘plam, $x \in X$ bo‘lsin. $y = f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofi V ni qarasak, u ochiq bo‘lgani uchun $U = f^{-1}(V)$ ochiq to‘plam bo‘ladi. Undan tashqari, $x \in f^{-1}(V)$ va $U \subset f^{-1}(V)$. Demak, f akslantirish x nuqtada uzluksizdir. Bu yerda x ixtiyoriy nuqta bo‘lgani uchun f akslantirish uzluksiz bo‘ladi.

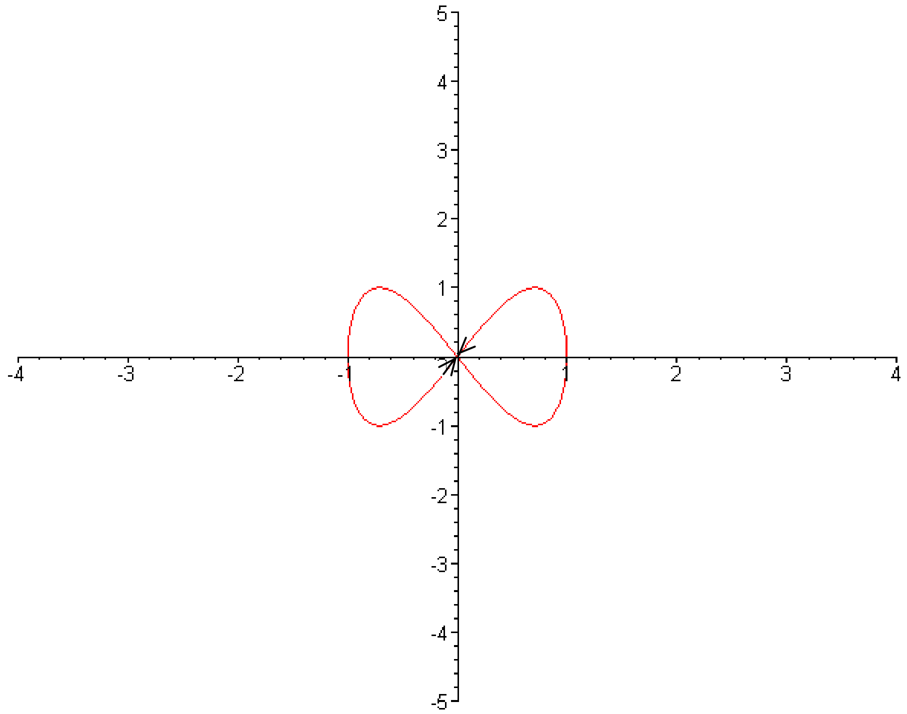
3. $f^{-1}(X \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ formuladan va 2-masaladan foydalaning.

4. 2-masaladan bevosita foydalanib isbotlanadi.

5. Teskarisini faraz qilish yo‘li bilan, ya’ni $f : X \to Y$ uzluksiz, biyektiv akslantirish berilgan bo‘lib X da ajralgan nuqta mavjud bo‘lmasin, Y da ajralgan nuqta mavjud deb oling va 2- masaladan foydalaning.

6. Uzluksiz $f : [0;1] \to [0;1]$ akslantirish birorta ham qo‘zg‘almas nuqtaga ega emas deb faraz qilaylik. Yordamchi $F(x) = f(x) - x$ funksiya kiritamiz. Farazga ko‘ra uzluksiz $F(x)$ funksiya uchun $F(0) > 0$, $F(1) < 0$ munosabatlar o‘rinli. Bundan $\exists x_0 \in [0;1]$ mavjudki, $F(x_0) = 0$. U holda $f(x_0) = x_0$ qo‘zg‘almas nuqta mavjudligi kelib chiqadi. Bu esa farazga zid.

7. $f(t) = \{\sin t, \sin 2t\}$ $t \in (0;2\pi)$ (30-rasm).



30-rasm

10. Y topologik fazoning bazasi $\{Y_\alpha\}$ bo‘lsin. Shartga ko‘ra $f^{-1}(Y_\alpha) = X_\alpha$ ochiq. Ixtiyoriy $U \in Y$ to‘plam olamiz. Ma’lumki, $U = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ o‘rinli. U

to‘plamning proobrazini ko‘raylik: $f^{-1}(U)=f^{-1}(\underset{\alpha}{U}Y_\alpha)=\underset{\alpha}{U}f^{-1}(Y_\alpha)=\underset{\alpha}{U}X_\alpha$ ochiq. Demak, f akslantirish uzluksiz.

11. $d(x,y)$ akslantirishning $X\times X$ fazoda uzluksiz ekanligi isbotlash uchun, $\forall\varepsilon>0$ son olganimizda ham, shunday $\delta>0$ son topilishi kerakki, $d(x,x_0)<\delta,\ d(y,y_0)<\delta$ munosabat o‘rinli bo‘ladigan barcha $(x,x_0),(y,y_0)\in X\times X$ nuqtalar uchun $|d(x,y)-d(x_0,y_0)|<\varepsilon$ o‘rinli ekanini ko‘rsatish zarur. Haqiqatan, agar $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ deb olsak, quyidagilar o‘rinli:

$$|d(x,y)-d(x_0,y_0)|=|d(x,y)-d(x_0,y)+d(x_0,y)-d(x_0,y_0)|<|d(x,y)-d(x_0,y)|+$$
$$+|d(x_0,y)-d(x_0,y_0)|<2\delta=\varepsilon.$$

17. ***Zaruriyligi***. Bizga $f:X\to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo‘lsin. $f|_{X_1}$ uzluksiz akslantirish ekanligini ko‘rsatamiz. Ma’lumki, $f|_{X_1}$ akslantirishning proobrazi (asli) $\left(f|_{X_1}\right)^{-1}(A)=X_1\cap f^{-1}(A)$ formula yordamida topiladi. Shuning uchun A yopiq to‘plam bo‘lsa, $f^{-1}(A)$ va $X_1\cap f^{-1}(A)$ to‘plamlar ham yopiq bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash $f|_{X_2}$ akslantirishning ham uzluksizligi ko‘rsatiladi.

Yetarlilgi. Endi $f|_{X_1}$, $f|_{X_2}$ akslantirishlar uzluksiz bo‘lsin deb faraz qilib, $f:X\to Y$ akslantirishning uzluksizligini ko‘rsatamiz. $A=\overline{A}\subset Y$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$f^{-1}(A)=f^{-1}(A)\cap X=f^{-1}(A)\cap(X_1\cup X_2)=(f^{-1}(A)\cap X_1)\cup(f^{-1}(A)\cap X_2)=$$
$$=(f|_{X_1})^{-1}(A)\cup(f|_{X_2})^{-1}(A)$$

tengliklar bajariladi. $(f|_{X_1})^{-1}(A)$ X_1 da yopiqligi hamda $X_1=\overline{X}_1$ munosabatdan $(f|_{X_1})^{-1}(A)$ ning X da yopiqligi kelib chiqadi. Xuddi shunga o‘xshash $(f|_{X_2})^{-1}(A)$ ning X da yopiqligini isbotlash mumkin. Natijada, $f^{-1}(A)$ X da yopiqligini hosil qildik.

23. *[c,d]* ning *[a,b]* ga gomeomorfligi isbotlaymiz. $f:[c,d]\to[a,b]$ akslantirish quramiz. Bu akslantirish $f(x)=\frac{(b-a)}{d-c}(x-c)+a$ chiziqli akslantirish orqali ifodalanadi. Chiziqli funksiya uzluksiz va monoton. Bundan f^{-1} mavjudligi kelib chiqadi. $f^{-1}(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ funksiya ham chiziqli, shuning uchun uzluksiz. Demak, f-gomeomorfizm.

28. 4- masaladan foydalaning. **29.** $f:R^n\to R^m$ akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun uning har bir komponentasi uzlusiz bo‘lishidan foydalaniladi. **35.** $n=2$ hol. Quyidagicha $f:D^2\to R^2$ akslantirish quramiz:

$f(x,y)=\left\{-\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$. f akslantirishning gomeomorfizm ekanligini tekshiraylik. Bu akslantirishning uzluksizligi $u(x,y)=\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}}$, $v(x,y)=\frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}$ funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi unga teskari akslantirish mavjud va uzluksizligini ko'rsataymiz. Teskari $f:R^2\to D^2$ akslantirishni

$$f^{-1}(x,y)=\left\{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu akslantirishning $\mu(x,y)=\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$, $\varphi(x,y)=\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ uzluksizligi funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi $f^{-1}(x,y)$ akslantirishning haqiqatan ham f ga teskari ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun $f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=(x,y)$ tenglikni isbotlaymiz:

$$f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=\left\{\frac{\mu(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}},\frac{\varphi(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\frac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}},\frac{\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\frac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\right\}=(x,y)$$

Demak, f akslantirish gomeomorfizmdir.

Umumiy hol. R^n da koordinata boshini D^n sharning markaziga joylashtirib, dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz. So'ngra $f:D^n\to R^n$ akslantirishni $f(x_1,x_2,...x_n)=\left\{\frac{x_1}{R-|x|},\frac{x_2}{R-|x|},...,\frac{x_n}{R-|x|}\right\}$ formula bilan aniqlaymiz (bu yerda $|x|=\sqrt{x_1^2+x_n^2+...+x_n^2}$, R-sharning radiusi). Teskari akslantirish $f^{-1}(x_1,x_2,...x_n)=\left\{\frac{Rx_1}{1+|x|},\frac{Rx_2}{1+|x|},...,\frac{Rx_n}{1+|x|}\right\}$ formula yordamida aniqlanadi. Ikkala f,f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lgani uchun f gomeomorfizmdir.

54. 1) $f(x)=0$; 2) $f(x)=\begin{cases}-x, & agar\ x<0\\ 0, & agar\ x\in[0;1]\\ x-1, & agar\ x>1\end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} -x+1, & agar\ x<-1 \\ 0, & agar\ x\in[-1;1] \\ x-1, & agar\ x>1 \end{cases}$; 4) $f(x)=\begin{cases} -x, & agar\ x<0 \\ 0, & agar\ x\geq 0 \end{cases}$

4 §

1. Tekislikdagi ushbu

$$A=\left\{(\frac{1}{n},y)\ |\ y\in[0,1],\ n\in N\right\}\bigcup\{(x,0)\ |\ x\in[0,1]\}\bigcup\{(0,y)\ |\ y\in[0,1]\}$$

to‘plamda keltirilgan topologiya kiritsak, lokal bog‘lanishli bo‘lmagan, bog‘lanishli topologik fazoga misol bo‘ladi.

2. Bizga X,Y topologik fazolar $f:X\to Y$ uzluksiz akslantirish, $A\subset X$ bog‘lanishli to‘plam berilgan bo‘lib, $f(A)$ bog‘lanishsiz to‘plam bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda, bo‘sh bo‘lmagan ochiq G_1 va G_2 to‘plamlar mavjud bo‘lib, $f(A)=(f(A)\bigcap G_1)\bigcup(f(A)\bigcap G_2),(f(A)\bigcap G_1)\bigcap(f(A)\bigcap G_2)=\varnothing$ va $f(A)\bigcap G_1\neq\varnothing,\ f(A)\bigcap G_2\neq\varnothing$ munosabatlar bajariladi. f akslantirish uzluksiz bo‘lganligi uchun $A_1=f^{-1}(G_1)$ va $A_2=f^{-1}(G_2)$ to‘plamlar X ning ochiq qism to‘plamlari bo‘ladi. $f(A)\bigcap G_1\neq\varnothing,\ f(A)\bigcap G_2\neq\varnothing$ munosabatlardan $A_1\bigcap A\neq\varnothing$ va $A_2\bigcap A\neq\varnothing$ kelib chiqadi. Bundan tashqari, $A=(A_1\bigcap A)\bigcup(A_2\bigcap A)$ munosabat ham o‘rinlidir. Demak, A-bog‘lanishsiz. Bu ziddiyatdan $f(A)$ ning bog‘lanishliligi kelib chiqadi.

4. Teskarisini faraz qilaylik, X topologik fazo, o‘zaro kesishmaydigan ochiq va bo‘sh bo‘lmagan A,B to‘plamlar birlashmasidan iborat bo‘lsin, ya’ni $X=A\bigcup B, A\bigcap B=\varnothing$. U holda $a\in A,b\in B$ nuqtalar mavjud bo‘ladi. Ikkinchi tomondan $C_{ab}=(C_{ab}\bigcap A)\bigcup(C_{ab}\bigcap B)$. Bundan $a\in(C_{ab}\bigcap A),b\in(C_{ab}\bigcap B)$. Demak, $(C_{ab}\bigcap A)$ va $(C_{ab}\bigcap B)$ to‘plamlar bo‘sh emas, o‘zaro kesishmaydi va C_{ab} da ochiq. Bu ziddiyatdan X ning bog‘lanishli topologik fazo ekanligi kelib chiqadi.

5. $f([0;1])$ 2-masalaga ko‘ra bog‘lanishli bo‘lib, x,y nuqtalarni o‘z ichiga oladi. 4-masalaga ko‘ra X bog‘lanishli topologik fazodir.

6. Bog‘lanishli bo‘ladi.

7. Bog‘lanishli emas, chunki $y=x$ to‘g‘ri chiziq tekislikni ikkiga ajratadi, lekin faqat bitta koordinatasi ratsional nuqtalar to‘plamining birorta ham elementi bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli emas.

8. Bog‘lanishli emas, chunki $x^2+y^2=\sqrt{2}$ aylana tekislikni ikkiga ajratadi, lekin ikkala koordinatasi ratsional nuqtalar to‘plamining birorta ham elementi bu aylanaga tergishli emas.

9. Bog‘lanishli emas, chunki $x^2+y^2=\sqrt{2}$ aylana tekislikni ikkiga ajratadi, umumiy markazga ega ratsional radiusli aylanalar to‘plami yuqorida ajratilgan ikkala to‘plamda ham joylashadi.

11. To‘g‘ri chiziqda

1) $Z =$(barcha butun sonlar to‘plami) lokal bog‘lanishli to‘plam. Haqiqatan ham, Z da ixtiyoriy nuqta ochiq to‘plam, chunki bu to‘plamning barcha nuqtalari o‘zining etarlicha kichik radiusli atrofidan iborat bo‘ladi.

2) $X = \left\{0; \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}; ...\right\}$ lokal bog‘lanishli to‘plam emas, chunki bu to‘plamda 0 ning yetarlicha kichik $(-\varepsilon, \varepsilon)$ atrofini qarasak, $\exists\ n_0 > 0$ mavjudki $n > n_0$ lar uchun barcha $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ munosabat bajariladi. Endi shunday $\varepsilon_1 < \varepsilon$ irratsional son topiladiki bu $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ atrof uchun $X \bigcap (-\varepsilon, \varepsilon) = \left((-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \bigcap X\right) \bigcup \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ..., \frac{1}{n+k}\right\}$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

3) $[a;b]$ lokal bog‘lanishli to‘plam.

4) $Q =$(barcha ratsional sonlar to‘plami) lokal bog‘lanishli to‘plam emas. Haqiqatan ham, $q \in Q$ nuqta olaylik, bu nuqtaning ixtiyoriy $U_q = Q \bigcap \left(q - \varepsilon, q + \varepsilon\right)$ atrofini $U_q = Q \bigcap \left(\left(q - \varepsilon, \alpha\right) \bigcup \left(\alpha, q + \varepsilon\right)\right)$ ko‘rinishda yozish mumkin (bu erda α -irratsional son).

16. X topologik fazo sifatida $y = \sin(\frac{1}{x})$ funksiya grafigi va $\{(x, y) : x = 0, -1 \le y \le 1\}$ to‘plamning birlashmasini olish mumkin.

19. Teskarisini faraz qilish usuli, ya’ni topologik fazolarning biri X_1 bog‘lanishsiz bo‘lib, ularning to‘g‘ri ko‘paytmasi $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ bog‘lanishli bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda X_1 o‘zaro kesishmaydigan ochiq va bo‘sh bo‘lmagan A, B to‘plamlar birlashmasidan iborat bo‘ladi, ya’ni $X_1 = A \bigcup B, A \bigcap B = \varnothing$. Yuqoridagi munosabatdan

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \left(A \bigcup B\right) \times X_2 \times ... \times X_n = \left(A \times X_2 \times ... \times X_n\right) \bigcup \left(B \times X_2 \times ... \times X_n\right)$$

Demak, $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ fazo o‘zaro kesishmaydigan ochiq va bo‘sh bo‘lmagan $A \times X_2 \times ... \times X_n$ va $B \times X_2 \times ... \times X_n$ to‘plamlarning birlashmasi ko‘rinishida yozildi. Bu esa ziddiyat.

23. X topologik fazo bo‘lsin. Agar x va y nuqtalarni o‘z ichiga oladigan bog‘lanishli $A \subset X$ to‘plam mavjud bo‘lsa, $x \sim y$ deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati ekani isbotlansin.

Ravshanki, masalada kiritiligan munosabatga ko‘ra $x \sim x$. Agar $x \sim y$ bo‘lsa, x va y nuqtalarni o‘z ichiga oladigan bog‘lanishli A to‘plam mavjud bo‘ladi. Shu to‘plamning o‘zi y va x ni o‘z ichiga oluvchi bog‘lanishli to‘plam bo‘lib xizmat qiladi. Demak, $x \sim y$ dan $y \sim x$ kelib chiqadi. Endi $x \sim y$, $y \sim z$ deb faraz qilaylik, u holda x va y nuqtalarni o‘z ichiga oladigan bog‘lanishli A to‘plam, y va z nuqtalarni o‘z ichiga oladigan bog‘lanishli B to‘plamlar mavjud. $A \bigcap B \ne \varnothing$ ekanligidan $A \bigcup B$ bog‘lanishli bo‘ladi. Bu to‘plam x va z

nuqtalarni o‘z ichiga oladigan bog‘lanishli to‘plamdir. Demak, $x \sim y$, $y \sim z$ munosabatlardan $x \sim z$ kelib chiqdi.

24. Umumiy nuqtaga ega bo‘lgan bog‘lanishli to‘plamlarning birlashmasi bog‘lanishli ekanligidan foydalaning.

25. H to‘plam x nuqta tegishli bo‘lga bog‘lanishlilik komponentasi bo‘lsin. Ma’lumki, $\overline{H}$ bog‘lanishli to‘plamdir. Bog‘lanishlilik komponentasi ta’rifiga ko‘ra $x \in \overline{H}$ dan $H = \overline{H}$ kelib chiqadi. Demak, H yopiq to‘plam.

26. Biror A bog‘lanishli to‘plam olaylik. Agar $a \in A$ bo‘lsa, A bog‘lanishli ekanligidan hamda bog‘lanishlilik komponentasining ta’rifidan $A \subset H_a$ kelib chiqadi.

28. $x, y \in X$ va $x \neq y$ bo‘lsa, ular tegishli bo‘lgan bog‘lanishlilik komponentalari H_x va H_y bilan belgilaylik. Agar $H_x \cap H_y \neq \varnothing$ bo‘lsa, $H = H_x \cup H_y$ to‘plam bog‘lanishli bo‘ladi va bog‘lanishlilik komponentasining ta’rifiga ko‘ra $H = H_x = H_y$ tenglik kelib chiqadi.

5 §

5. $\{x_n\}$ - yaqinlashuvchi ketma-ketlik va $\lim x_n = x$ bo‘lsin. Agar $x_n \to y$ va $y \neq x$ bo‘lsa, U_1 va U_2 bilan mos ravishda x va y nuqtalarning o‘zaro kesishmaydigan atrofini belgilaymiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlik x va y nuqtalarga yaqinlashganligi uchun shunday N_1, N_2 sonlar mavjudki, $n \geq N_1$ da $x_n \in U_1$, $n \geq N_2$ da $x_n \in U_2$ bo‘ladi. Bundan $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ bo‘lsa, $x_n \in U_1 \cap U_2$ munosabatni olamiz. Demak, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Bu ziddiyatdan $x = y$ bo‘lishi kelib chiqadi.

10. X ,-cheksiz to‘plam, $\tau = \{A \subset X : X \setminus A -$ chekli yoki $A = \varnothing\}$. Ma’lumki, (X, τ)-T_1 fazo bo‘ladi. Haqiqatan, x va y nuqtalarning atroflari sifatida $U_x = X \setminus \{y\}$ va $U_y = X \setminus \{x\}$ to‘plamlarni olsak, x ning U_x atrofi y nuqtani, y ning U_y atrofi esa x nuqtani o‘z ichiga olmaydi. Endi ixtiyoriy $x \neq y$ nuqtalarning mos ravishda U_x va U_y atroflarini qaraymiz. $U_x \cap U_y \neq \varnothing$ ekanligini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, $U_x \in \tau$, $U_y \in \tau$ bo‘lib, $U_x \cap U_y = \varnothing$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. $U_x \in \tau$, $U_y \in \tau$ bo‘lgani uchun $X \setminus U_x$ va $X \setminus U_y -$ chekli to‘plamlar ekani kelib chiqadi. Ravshanki, $(X \setminus U_x) \cup (X \setminus U_x) -$ chekli to‘plamdir. $(X \setminus U_x) \cup (X \setminus U_x) = X \setminus (U_x \cap U_y)$ munosabatdan $X \setminus (U_x \cap U_y)$ to‘plamning chekliligi kelib chiqadi. Bu esa $U_x \cap U_y = \varnothing$ farazga zid.

6 §

1. $\{U_\alpha\}$ - oila $[a,b]$ segmenning ochiq qobig‘ bo‘lsin. Agar $x \in [a,b]$ va $[a,x]$ segment uchun chekli qobiq mavjud bo‘lsa, bunday x nuqtalar to‘plamini A bilan belgilaymiz. Ravshanki, A bo‘sh emas, chunki $a \in A$. Bundan tashqari, birorta α_0 uchun $a \in U_{\alpha_0}$ bo‘lsa, a nuqta o‘zining birorta atrofi bilan U_{α_0} da yotadi. Shuning uchun A to‘plamga a nuqtadan boshqa nuqtalar ham tegishli. Demak, agar $c = \sup\{x : x \in A\}$ bo‘lsa, $c > a$ ekanligi ravshan. $c = \sup\{x : x \in A\}$ bo‘lganligi uchun $[a, c - \varepsilon]$ segment uchun chekli qobiq mavjud. Agar $[a, c - \varepsilon]$ segmentning chekli qobig‘iga c tegishli bo‘lgan U_{α_1} to‘plamni qo‘shsak, $[a, c]$ uchun chekli qobiq paydo bo‘ladi. Demak, $c \in A$. Endi $c = b$ ekanligini isbotlaylik. Agar $c < b$ bo‘lsa, ε ni shunday kichik qilib olamizki, $[c - \varepsilon; c + \varepsilon] \subset U_{\alpha_1}$ bajarilsin. Shunda $[a, c]$ segmentning chekli qobig‘i $[a, c + \varepsilon]$ uchun ham chekli qobiq bo‘ladi. Bu esa c ning aniqlanishiga ziddir. Demak, $c = b$.

2. ***Zarurligi***. Metrik fazoda to‘plam birorta shar ichida yotsa, u chegaralangan to‘plam deyiladi. A kompakt to‘plam bo‘lsa, R^n ning xausdorf fazo ekanligidan A ning yopiq to‘lam ekanligi kelib chiqadi. Endi A ning chegaralanganligini ko‘rsatamiz. Buning uchun birorta $x \in A$ nuqtani olib, markazi shu nuqtada bo‘lgan $\{B_n(x)\}$ sharlar oilasini qaraymiz, bu yerda $n = 1,2,3,...$. Bu sharlar oilasi A uchun ochiq qobiq bo‘ladi va A kompakt to‘plam bo‘lganligi uchun bu oiladan chekli qobiq ajratish mumkin. Agar chekli qobiq $B_{n_1}(x_0), B_{n_2}(x_0), ..., B_{n_k}(x_0)$ sharlardan iborat bo‘lsa, N bilan $\max\limits_{1 \le i \le k}\{n_i\}$ ni belgilaymiz. Bu yerda $B_n(x)$ markazi x nuqtada bo‘lgan radiusi n ga teng ochiq shar. Bu holda $A \subset B_N(x)$ ekanligidan A ning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. 1-masalaga ko‘ra $[-r, r]$ segment kompakt. Yopiq kub $Q_r = \{x \in R^n \mid |x| \le r\}$ ni n ta $[-r, r]$ segmentning to‘g‘ri ko‘paytmasi sifatida yozamiz. Ikkita kompakt to‘plamning to‘g‘ri ko‘paytmasi yana kompakt to‘plam ekanligidan Q_r kub ham kompakt. A to‘plam chegaralangan bo‘lganligi uchun uni o‘z ichiga oluvchi Q_r kub mavjud. A yopiq bo‘lganligi uchun uning to‘ldiruvchisi $R^n \setminus A$ ochiq to‘plam. Endi $\{U_\alpha\}$ oila A to‘plamning ochiq qobig‘i bo‘lsa, $\{U_\alpha\} \cup \{R^n \setminus A\}$ oila Q_r ning ochiq qobig‘i bo‘ladi. Q_r kompakt bo‘lganligi uchun bu oiladan chekli qobiq ajratish mumkin. Hosil bo‘lgan qobiqdan $R^n \setminus A$ to‘plamni chiqarib A to‘plam uchun $\{U_\alpha\}$ oiladan ajratilgan chekli qobiq hosil qilamiz. Demak, A to‘plam yopiq.

3. A to‘plam X kompakt fazoning yopiq qism to‘plami va $\{A_\alpha\}$ oila A to‘plam uchun ochiq qobiq bo‘lsin. A yopiq to‘plam bo‘lganligi uchun $X \setminus A$ ochiq to‘plam va $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ oila X uchun qobiq bo‘ladi. X kompakt fazo bo‘lganligi uchun $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ oiladan X uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiqqa tegishli qism to‘plamlar $F_1, F_2, ..., F_k$ bo‘lsin. Agar $\{F_i\}_1^k$ oilada $X \setminus A$ to‘plam bo‘lmasa, $\{F_i\}$ oila $\{A_\alpha\}$ dan ajratilgan A ning chekli qobig‘i bo‘ladi. Agar $\{F_i\}$ oilada $X \setminus A$ bo‘lsa, unda bu oiladan $X \setminus A$ ni chiqarib, A uchun chekli qobiq hosil qilamiz. Demak, A kompakt to‘plamdir.

6. Buni isbotlash uchun ikkita kompakt to‘plamning birlashmasi kompaktligini ko‘rsatish yetarli. Bizga A va B kompakt to‘plamlar berilgan bo‘lsin. $\{U_A\}$ va $\{U_B\}$ oilalar mos ravishda A va B to‘plamlarning ochiq qobiqlari bo‘lsa, $\{U_A\}\bigcup\{U_B\}$ birlashmadan iborat $\{U_{A\bigcup B}\}$ oilani qaraymiz. A va B kompakt to‘plamlar bo‘lganligi uchun $\{U_A\}$ va $\{U_B\}$ oilalardan chekli ochiq qism qobiqlar ajratish mumkin. Ularning birlashmasi $A\bigcup B$ uchun $\{U_{A\bigcup B}\}$ oila dan ajratilgan chekli ochiq qism qobiq bo‘ladi. Demak, $A\bigcup B$ kompakt to‘plam.

7. $X=R^n$, kompakt to‘plamlar sifatida $\{B_n^*(x_0)\}$ yopiq sharlar sistemasini olamiz. Ularning birlashmasi $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^*(x_0)=X$ bo‘lib, R^n kompakt emas.

9. A ning yopiq ekanligini ko`rsatish uchun $X\setminus A$ ning ochiq ekanligini ko`rsatamiz. Agar $x\in X\setminus A$ bo`lsa, $X$ - Xausdorf fazo va $A$ kompaktligidan shunday ochiq $G$ to`plam mavjudki, $x\in G\subset X\setminus A$ munosabat bajariladi. Demak, x nuqta $X\setminus A$ uchun ichki nuqta va x ning ixtiyoriy ekanligidan $X\setminus A$ ning ochiq to`plam ekanligi kelib chiqadi.

10. ***Zarurligi***. Teskarisini faraz qilaylik. X kompakt fazo bo‘lib, ixtiyoriy X dagi markazlashgan yopiq to‘plamlar sistemasining kesishmasi $\bigcap F_\alpha=\varnothing$ bo‘lsin. U holda $G_\alpha=X\setminus F_\alpha$ ochiq to‘plamlar bo‘ladi. Markazlashgan sistemasining ta’rifidan $\bigcap_{i=1}^{n}F_i\neq\varnothing$ munosabat, bundan esa hech qanday $G_i=X\setminus F_i$ chekli sondagi ochiq to‘plamlar sistemasi X ni qoplamasligi kelib chiqadi. Bu esa kompaktlikka zid. Demak, $\bigcap F_\alpha\neq\varnothing$.

Yetarliligi. X dagi ixtiyoriy markazlashgan yopiq to‘plamlar sistemasining kesishmasi bo‘sh emas hamda $\{G_\alpha\}$ X ning ochiq qobig‘i bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda $\{G_\alpha\}$ ning qobiq ekanligidan $F_\alpha=X\setminus G_\alpha$ yopiq to‘plamlar sistemasi $\{F_\alpha\}$ ning kesishmasi $\bigcap F_\alpha=\varnothing$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $\{F_\alpha\}$ markazlashgan yopiq to‘plamlar sistemasi emasligi hosil bo‘ladi, ya’ni $\{F_\alpha\}$ sistemadan shunday cheklita kesishmasi bo‘sh bo‘lgan F_i to‘plamlar topish mumkin. $\bigcap_{i=1}^{n}F_i=\varnothing$ ekanligidan $G_i=X\setminus F_i$ X ning qobig‘i bo‘ladi.

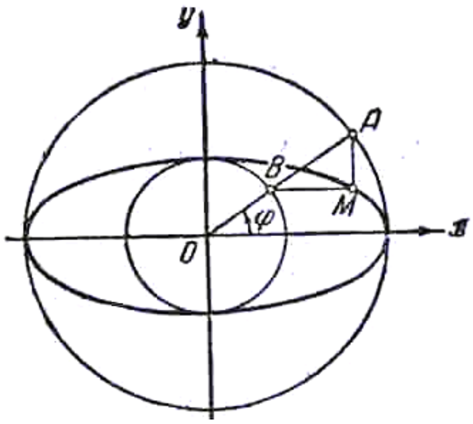
22. Ma’lumki, kompakt fazoning uzluksiz akslantirishdagi aksi(obrazi) kompaktdir. R^1 Xausdorf fazosi bo‘lganligi uchun $f(X)$ yopiq bo‘ladi. Agar $f(X)$ chegaralanmagan bo‘lganda $U_n=(-n,n)$ intervallar sistemasi $f(X)$ ni qoplar edi. Undan esa chekli qism qobiq ajratish mumkin emas. Demak, $f(X)$ chegaralangan. $a=\sup\limits_{x\in X}(f(x)\}$ deb belgilaylik. U holda, X da shunday $x_n\in X$ ketma-ketlik mavjudki, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$. $f(X)$ yopiqligidan $a\in f(X)$ kelib chiqadi, ya’ni $a=f(x_0), x_0\in X$. Xuddi shunga o‘xshash, $b=\inf\limits_{x\in X}(f(x)\}$ ham f funksiyaning qaysidir qiymati ekanligi ko‘rsatiladi.

II BOB
1 §

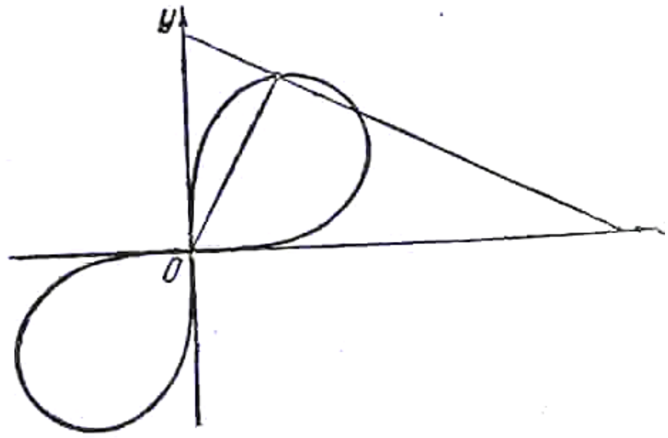
1. Aylana. **2**. To‘g‘ri chiziq. **3**. $x^2+y^2=4$ aylana. **4**. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar kesmalari. **5**. $y_0x+x_0y=0$. **6**. Markazi berilgan uchta nuqtada joylashgan teng massalar markazidan iborat aylana. **7**. To‘g‘ri to‘rtburchakka tashqi chizilgan aylana. **8**. Agar aylanalar kesishmasa, ularning markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq. Agar aylanalar kesishsa, izlangan geometrik o‘rin ularning kesishsish nuqtalaridan o‘tgan to‘g‘ri chiziqning aylanalar ichida yotmaydigan bo‘lagi, aylanalar uringan holda esa izlangan geometrik o‘rin bu aylanalarga o‘tkazilgan umumiy urinmadan iborat (urinish nuqtasidan tashqari). **9**. To‘g‘ri chiziq. **10**. Aylana. **11**. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ (ellips).

12. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (giperbola). **13**. $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{k}\right)^2}=1$ (ellips).**14**.

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}r\right)^2}=1 \text{(ellips)}.$$

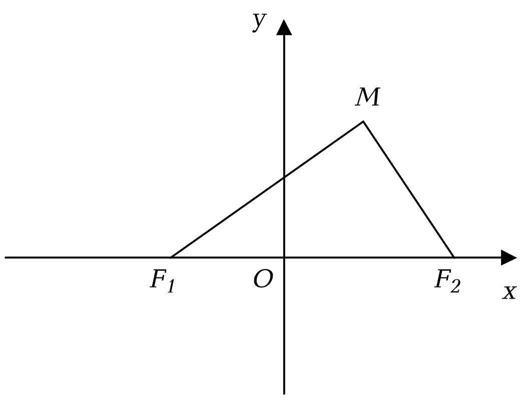


31-rasm

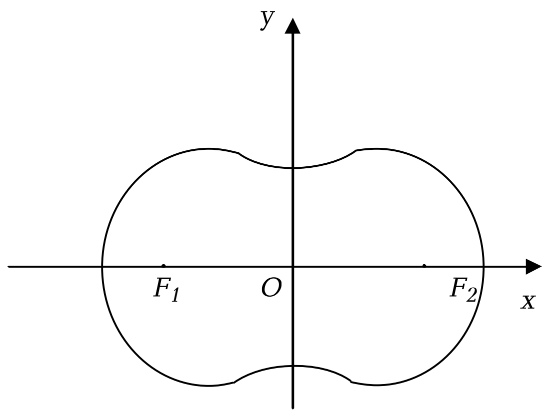


32-rasm

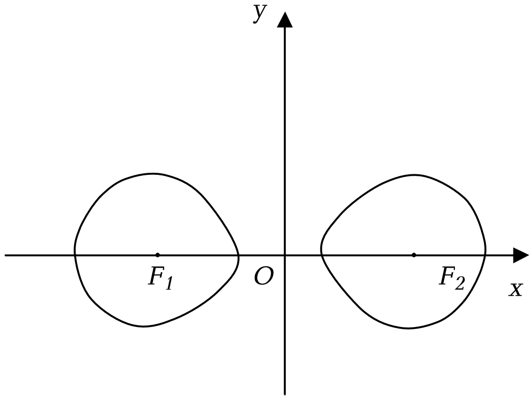
15. Ox o‘qidan OA radiusgacha bo‘lgan burchakni φ deb va x, y deb izlangan geometrik o‘ringa tegishli bo‘lgan ixtiyoriy nuqtani koordinatalarini belgilasak, geometrik o‘rinning parametrik tenglamalari $x=a\cos\varphi$, $x=b\sin\varphi$, yoki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bo‘ladi (ellips, 31-rasm).**16**. $\left(x^2+y^2\right)^2=2Sxy$ (Bernulli lemniskatasi, 32-rasm). **17**. Ellips.



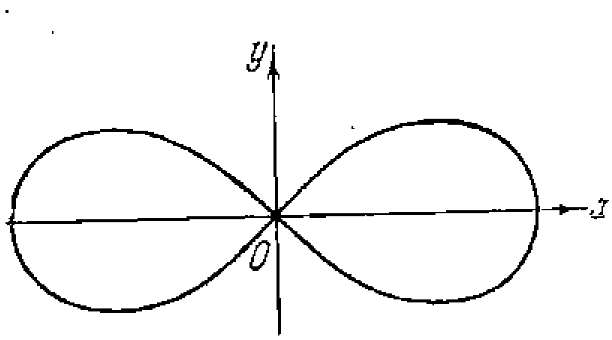
33 — rasm



34 — rasm



35 — rasm



36 — rasm

18. Bu chiziqning tenglamasini chiqarish uchun F_1 va F_2 nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni Ox o‘qi deb qabul qilamiz. So‘ngra F_1F_2 kesmaning o‘rtasidan shu F_1F_2 kesmaga perpendikular qilib Oy o‘qini o‘tkazamiz. Geometrik o‘rinning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasini olamiz. O‘zgarmas sonni b^2 bilan beigilasak, shartga ko‘ra $MF_1 \cdot MF_2 = b^2$ bo‘ladi. Ravshanki, F_1 va F_2 nuqtalar orasidagi masofa $2c$ ga teng (33-rasm).

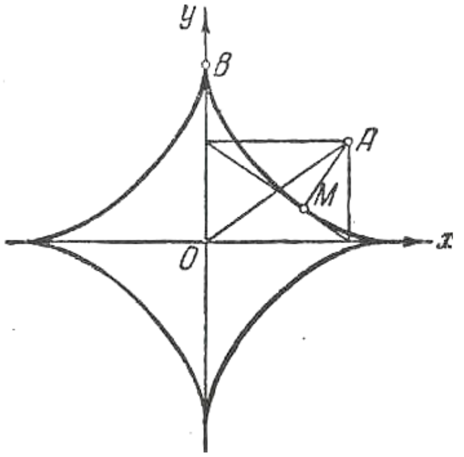
$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}, MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$

bo‘lganligi uchun, ovalning tenglamasi

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = b^2$$

shakldа bo‘ladi. Kvadratga ko‘tarib, soddalashtirgandan so‘ng, ovalning tenglamasi quyidagi ko‘rinishga keladi: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^4$

Xususiy hollar: 1) $c < b$ holga 34–rasm, 2) $c > b$ holga 35–rasm mos keladi, 3) $c = b$ bo‘lganda oval Bernulli lemniskatasi deyiladi (36–rasm). Uning



37 – rasm

tenglamasi: $(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = 0$ **19**. $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ (36-rasm). **20**. $R^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$. **21**. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (37-rasm).**22**. $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$. **23**. $r = 2a\cos\varphi$. **24**.

O nuqtani qutb deb, OA diametrni qutb o‘qi deb olib, M nuqtaning koordinatalarini ρ,φ deylik. φ deb OA qutb o‘qidan aylana borgan nurgacha bo‘lgan qutb burchagi olinadi. M nuqtaga mos kelgan P nuqtaning umumlashgan qutb koordinatalarini (ρ,φ) deb olamiz. M, P nuqtalarning qutb burchagi bir xil bo‘ladi. U holda $\rho' = a\cos\varphi$ va istalgan φ uchun $\rho = a\cos\varphi + b$ bo‘ladi. Bu esa izlangan chiziqning qutb sistemasidagi tenglamasidir.

Bu yerda 3 hol yuz berishi mumkin: 1) $b < a$ 2) $b = a$ 3) $b > a$

Birinchi va ikkinchi holda chiziq qutb orqali o‘tadi, chunki $\rho = 0$ dan

$$\cos\varphi = -\frac{b}{a} \qquad \left|-\frac{b}{a}\right| = \frac{b}{a} =\leq 1.$$

Uchinchi holda chiziq qutbdan o‘tmaydi, chunki $\rho = 0$ tenglik hech qanday φ uchun o‘rinli emas (chunki $b > a$). Paskal chig‘anog‘ining dekart sistemasidagi tenglamasini topamiz. Dekart koordinatalar sistemasining boshi deb O nuqtani, abssissa o‘qi deb OA qutb o‘qini, abssissa o‘qining musbat yo‘nalishi qutb o‘qining yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lsin. Paskal chig‘anog‘ining tenglamasini hosil qilingan

$$\rho = a\cos\varphi + b \qquad (1)$$

ko‘rinishda olsak, chiziqdagi qutbdan farqli hamma nuqtalar uchun

$$\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$

(1) tenglama $\rho = \frac{ax}{\rho} + b$ ko‘rinishni qabul qiladi. Chiziqdagi qutbdan boshqa barcha nuqtalarning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi (agar qutb chiziqqa tegishli bo‘lsa).

Oxirgi tenglamani ikkala tomonini ρ ga ko‘paytirsak, $\rho^2 = ax + b\rho$ hosil qilamiz. Bu tenglamani chiziqda yotuvchi barcha nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi (koordinatalar boshi chiziqqa tegishli bo‘lmasa ham). Oxirgi tenglamani quyidagicha yozib olish mumkin:

$$x^2 + y^2 = ax + b\rho \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 - ax = b\rho. \quad (2)$$

(2) tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2). \qquad (3)$$

Endi dekart sistemasida (3) tenglama qaysi chiziqni ifodalasa, qutb sistemasida yozilgan (1) tenglama ham shu chiziqni ifodalashini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, M nuqtaning qutb koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, shu nuqtaning dekart koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradi.

Aksincha, koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushmagan $M(x, y)$ nuqta (3) tenglama bilan ifodalangan chiziqda yotsa, u (1) tenglama bilan ifodalangan chiziqda ham yotadi. Haqiqatan ham, $M(x, y)$ nuqta (3) tenglamani qanoatlantirgan chiziqda yotsa, uning koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradi. Bu yerdan $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2\rho^2$ kelib chiqadi. Bundan esa $x^2 + y^2 - ax = \pm b\rho$ yoki $\rho^2 - a\rho\cos\varphi = \pm b\rho$ ammo M nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushmagani sababli, $\rho \neq 0$ va ρ ga bo‘lish natijasida $\rho = a\cos\varphi \pm b$ hosil qilamiz.

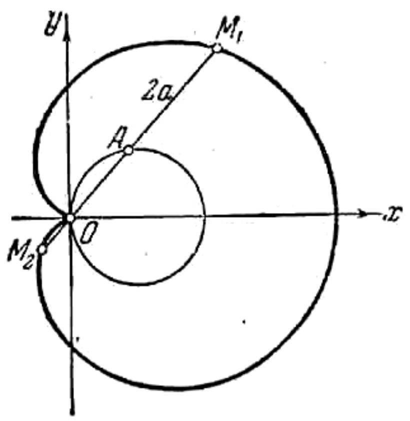
Agar $\rho = a\cos\varphi + b$ bo‘lsa, M nuqta (1) chiziqda yotadi, agar $\rho = a\cos\varphi - b$ bo‘lsa $-\rho = a\cos(\varphi + \pi) + b$. Bu holda qutb koordinatalari $(a\cos\varphi - b, \varphi)$ bo‘lgan nuqta koordinatalari $(-a\cos(\varphi + \pi) - b, \varphi + \pi)$ bo‘lgan nuqta bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, Paskal chig‘anog‘ining dekart koordinatalaridagi tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

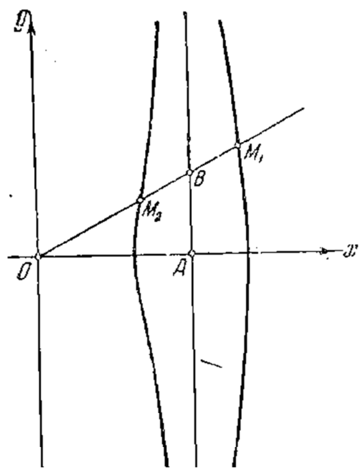
$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$

25. $r = 2a(\cos\varphi \pm 1)$, $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$ (38-rasm).

26. $r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$ yoki $(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0$ (39- rasm).

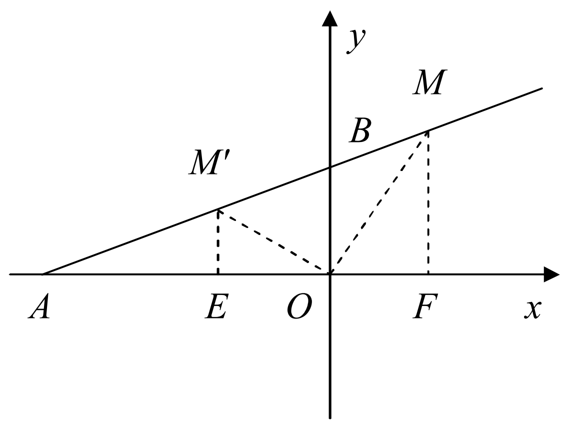
27. M va M' nuqtalardan Ox o‘qiga perpendikular tushiramiz (40- rasm). $M'OE$ va MOF – o‘xshash uchburchaklar. Shuning uchun: $\frac{FO}{M'E} = \frac{FM}{OF}$ bo‘ladi. M nuqtaning koordinatalari x va y bo‘lsin. $BM = BM'$ bo‘lganligi uchun $EO = OF = X$ bo‘ladi.



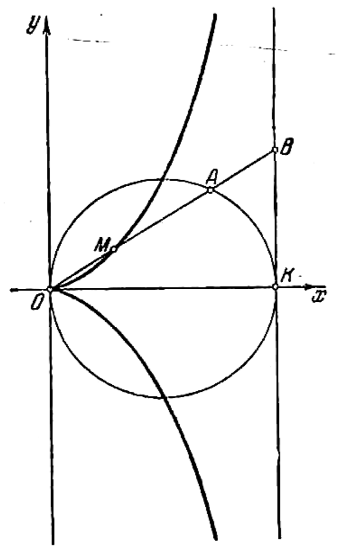


38 – rasm 39 – rasm

Shu sababli, oldingi tenglikdan $\frac{x}{M'E}=\frac{y}{x}$, bundan esa $M'E=\frac{x^2}{y}$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, $M'AE$ va MAF uchburchaklar o‘xshash bo‘lgani uchun $\frac{AE}{AF}=\frac{M'F}{MF}$ yoki $\frac{a-x}{a+x}=\frac{\frac{x^2}{y}}{y}$ bo‘ladi. Soddalashtirishdan so‘ng strafoidaning



40 – rasm



41 – rasm

tenglamasi quyidagi shaklga keladi: $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$. **28.** $r=a\cos\varphi+b$. 29. $r=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ yoki $y^2=\frac{x^2}{2a-x}$ (41 - rasm). **30.** Ikkita aylana $(x-a)^2+(y-a)^2=2a;(x-a)^2+(y+a)^2=2a$. **31.** $r=a\sin 2\varphi$ yoki $(x^2+y^2)^2=4a^2x^2y^2$ (42 - rasm).**32.** $x=2a\cos^2\varphi, y=2atg\varphi$ bu yerda φ - qutb burchagi yoki $x = \dfrac{8a^3}{y^2 + 4a^2}$ (43 – rasm).

33. $r^2(1 - a^2) - 2r(ab + c\cos\varphi) + c^2 - b^2 = 0$. **34.** $r = \dfrac{v}{\omega}\varphi$

36. $OACM$ siniq chiziqni ko‘raylik (44 - rasm).

Bu siniq chiziqni Ox o‘qiga proyeksiyalaymiz:

$$pr_{Ox}OM = pr_{Ox}OACM = pr_{Ox}OA + pr_{Ox}AC + pr_{Ox}CM$$

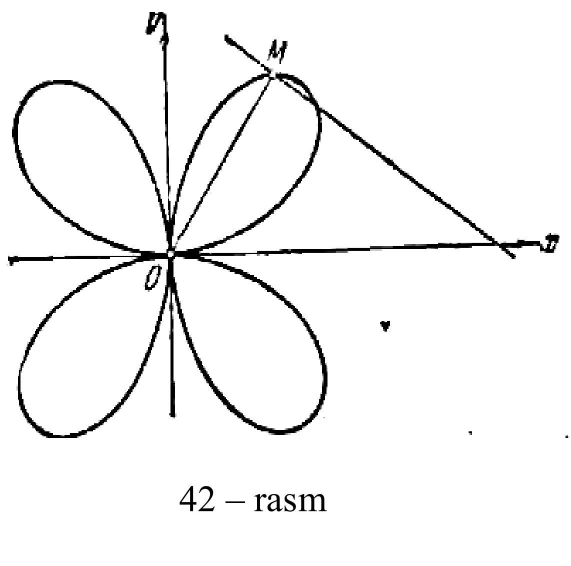
$$pr_{Ox}OM = x,\ pr_{Ox}AC = 0,\ pr_{Ox}OA = OA = \overset{\smile}{AM} = at$$

(chunki aylana sirpanmasdan harakatlanyapti).

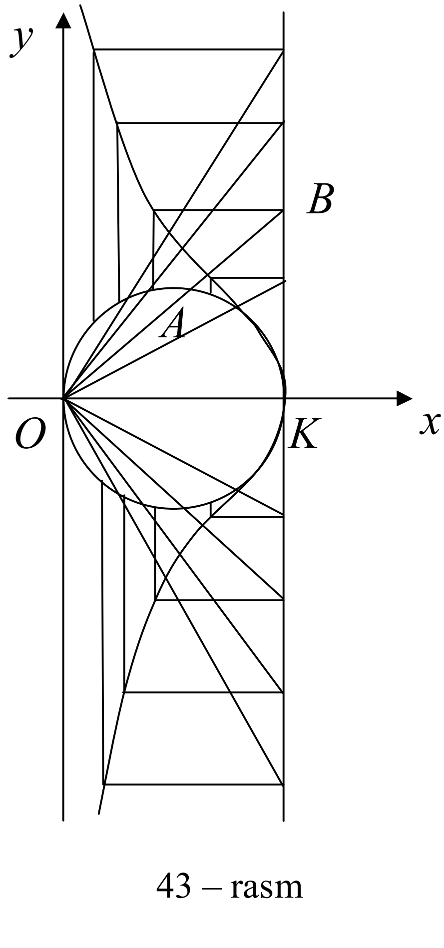
CM dan CA gacha bo‘lgan burchak t bo‘lgani uchu, Ox dan CM gacha bo‘lgan burchak $\frac{\pi}{2} + (\pi - t)$ ga teng; u holda $pr_{Ox}CM = a\cos(\frac{3}{2}\pi - t) = -a\sin t$.

Shunday qilib, $x = a(t - \sin t)$ hosil bo‘ladi. Xuddi shuningdek, $OACM$ siniq chiziqni Oy o‘qiga proyeksiyalasak:

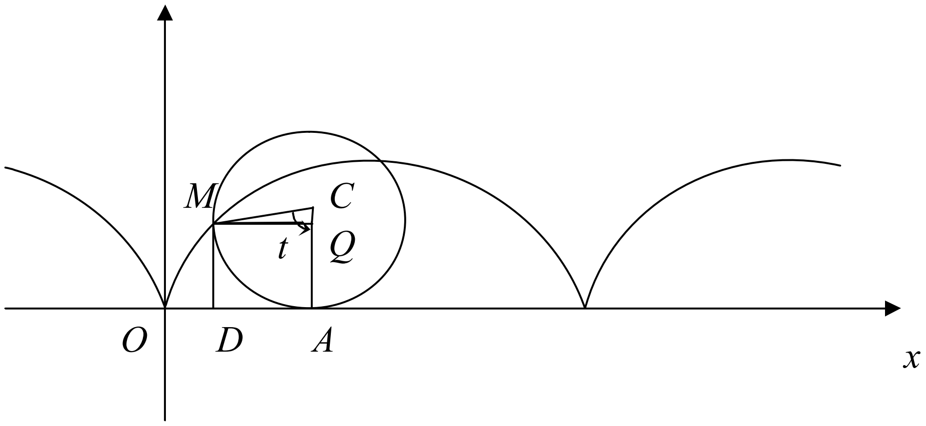
$pr_{Oy}OM = pr_{Oy}OACM = pr_{Oy}OA + pr_{Oy}AC + pr_{Oy}CM$.



42 – rasm



43 – rasm



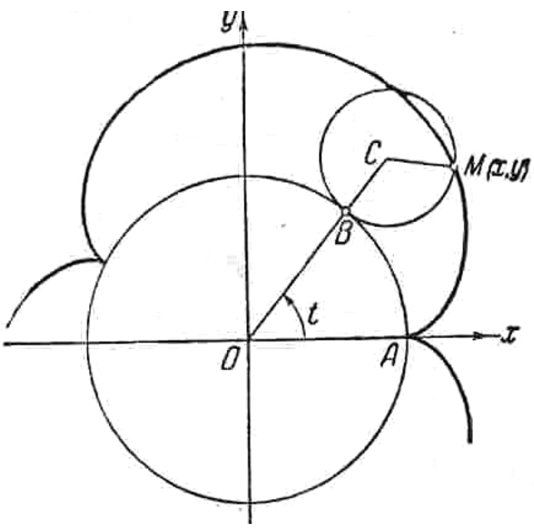
44 – rasm

Bundan $pr_{Oy}OM = y,\ pr_{Oy}AC = a,\ pr_{Oy}OA = 0$. Ox dan CM gacha burchak $\frac{3}{2}\pi - t$ gat eng bo‘lgani uchun, Oy dan CM gacha burchak $\frac{3}{2}\pi - t - \frac{\pi}{2} = \pi - t$ ga teng.

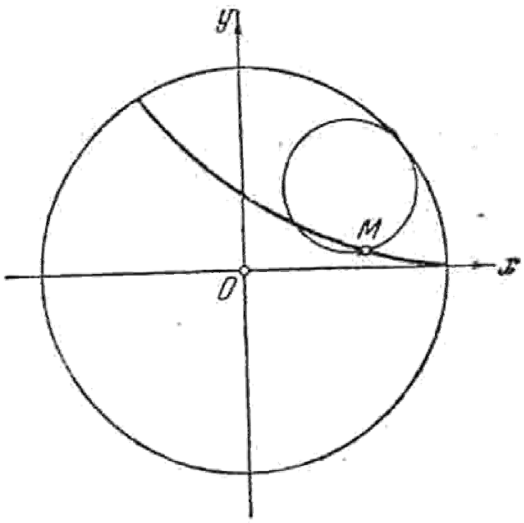
Demak, $pr_{Oy}CM = a\cos(\pi - t) = -a\cos t$. Shunday qilib: $y = a(1 - \cos t)$

Demak, sikloidaning parametrik tenglamalari quyidagicha: $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$. Bu yerda, t parametr barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi.

38. $x = (R + r)\cos t - r\cos\frac{R + r}{r}t$, $y = (R + r)\sin t - r\sin\frac{R + r}{r}t$ (episiklioda, 45 -rasm). **39.** $x = (R - r)\cos t + r\cos\frac{R - r}{r}t, y = (R - r)\sin t - r\sin\frac{R - r}{r}t$ (giposikloida,



45 – rasm

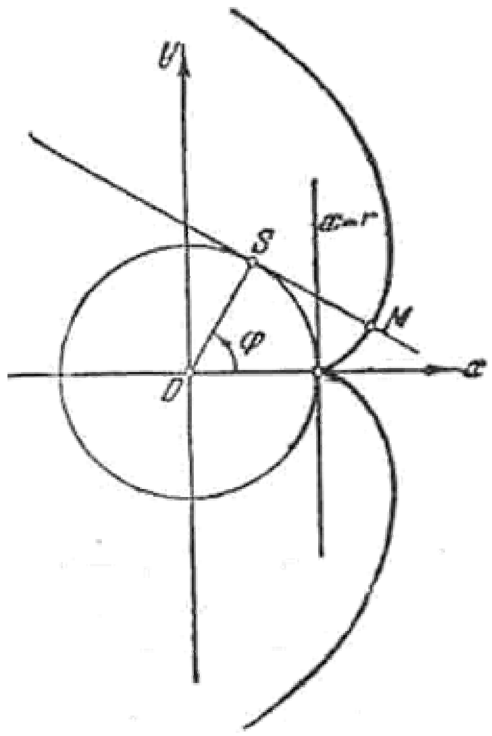


46 – rasm

46 – rasm). **42.** $4a^2x^2(1 - \frac{y^2}{b^2}) = (r^2 - a^2 - x^2 - \frac{2a + b}{b}y^2)^2.$

43. $x = r(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), y = r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ (aylana evolventasi, 47 - rasm).

44. 1) ellips; 2) giperbola; 3) parabola.



47 – rasm

45. N va M nuqtalar chiziqda yotadi, P esa yotmaydi. Berilgan chiziq Ox o‘qini $O(0;0)$ nuqtada Oy o‘qini $O(0;0)$ va $A(0;-2)$ nuqtalarda kesib o‘tadi. Oshkormas tenglamasi: $x^3+2y^2-x^2=0$. **46.** a) $x=\frac{2a}{1+k^2}, y=\frac{2ak}{1+k^2}$; b) $x=a+a\cos\varphi, y=a\sin\varphi$. **47.** Parabola. **48.** $x-y-2=0$ to‘g‘ri chiziqning $x\geq 2$ qismi. **49.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlari orasidagi qismi. **50.** Yarim aylana. **51.** Giperbolaning o‘ng shoxi. **52.** $x+2y-1=0$ to‘g‘ri chiziq. **53.** $y=ach\frac{x}{a}$ zanjir chizig‘i. **54.** $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ aylana. **55.** $x^2+y^2=R$ aylana. **56.** $(x-a)^2+y^2=a^2$ aylana. **57.** $x=a$ to‘g‘ri chiziq. **58.** $y=b$ to‘g‘ri chiziq. **59.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellips. **60.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ gepirbola. **61.** $y^2=4x+4$ parabola. **62.** $x^2-y^2=a^2$ giperbola. **63.** $x^2-y^2-bx=0$ aylana. **64.** $y^2=-4x+4$ parabola. **65.** $y^2=4x+4$ parabola.

2 §

7. Ha. Teskarisiga o‘rinli emas. Haqiqatan ham, quyidagi

$$\vec{r}(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), agar,\ x\ge 0,\ y\ge 0\\ \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), agar,\ x<0,\ y<0\end{cases}$$

vektor – funksiyasining moduli $\left|\vec{r}(x,y)\right|$ uzluksiz, ya'ni $\left|r(x,y)\right|=1$, bo'lsa ham, vektor – funksiyaning o'zi *Oy* yarim o'qida uzilishga ega.

20. $2(\vec{r},\vec{r}\,')$. **21**. $2(\vec{r}\,',\vec{r}\,'')$. **22.** $[\vec{r}\,'',\vec{r}\,''']$. **23.** $(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}^{\,(4)})$.

24. $[[r'',r'''],r''']+[[r',r''],r^{(4)}]$. **25.** $\frac{(\vec{r},\vec{r}\,')}{\sqrt{\vec{r}^{\,2}}}$ **27.** 1. **28.** Yo'q. agar $t=t_0$ da $r(t_0)=\bar{0}$ bo'lsa, $r'(t_0)\,\vec{r}$'(t_0) mavjud bo'lmaydi.

29. Yo'q. Haqiqatdan ham, quyidagi $\vec{r}$(t) = (cost,sint) vektor- funksiya uchun munosabat o'rinli emas. **30.** Ha. **42.** Parabolik silindr.
43. Elliptik silindr. **44.** Geperbolik silindr. **45.** Elliptik paraboloid.
47. $x=R\cos u\cos v, y=R\cos u\sin v, z=R\sin u.$
48. $x=a\cos u\cos v, y=b\cos u\sin v, z=c\sin u.$
49. $x=\sqrt{pu}\cos v, y=\sqrt{pu}\sin v, z=c\sin u.$
50. $x=achu\cos v, y=bchu\sin v, z=cshv.$
51. $x=ashu\cos v, y=bshu\sin v, z=cchv.$
52. $x=a\cos v, y=b\sin v, z=u.$ **53.** $x=u, y=u^2, z=v.$
54. $x=achu, y=bshu, z=v.$ **55.** $x=au\cos v, y=bu\sin v, z=cu.$

3 §

1. *A* nuqtadagi urinma $2x-y+2=0$, normal $x+2y+1=0$. *B* nuqtadagi urinma $4x-y+3=0$, normal $x+4y+12=0$. *C* nuqtadagi urinma $6x-y+2=0$, normal $x+6y-49=0$.
2. *A* nuqtadagi urinma $y=0$, normal $x=0$. *B* nuqtadagi urinma $3x-y-2=0$, normal $x+3y-4=0$.
3. *A* nuqtadagi urinma $y=x$, normal $y=-x$. *B* nuqtadagi urinma $y=1$, normal $x=\frac{\pi}{2}$. *C* nuqtadagi urinma $x-y+\pi=0$, normal $x-y-\pi=0.$
4. *A* nuqtadagi urinma $y=x$, normal $y=-x$. B nuqtadagi irinma $2x-y+1-\frac{\pi}{2}=0$, normal $x+2y-2-\frac{\pi}{4}=0$.
5. Urinma $2x-y+4=0$, normal $x+2y-3=0$.
6. Urinma $2x\sin t+2y\cos t-a\sin 2t=0$ normal $x\cos t-y\sin t-a\cos 2t=0.$

7. $t=(2k+1)\pi, k\in Z,$ bo‘lgan nuqtalarda urinma $y=2a$ normal $x=(2k+1)a\pi,$ qolgan barcha nuqtalarda urinma $x-ytg\frac{t}{2}+a(2tg\frac{t}{2}-t)=0$ normal $xtg\frac{t}{2}+y-at\,tg\frac{t}{2}=0$. Urinma $x=a(\cos t-\lambda\sin t), y=b(\sin t+\lambda\cos t),$ normal $x=(a+b\lambda)\cos t, x=(a+b\lambda)\sin t.$ **10**. Urinma $x+y-3a=0$, normal $y=x$. **11.** Urinma $4x-2y-a=0$, normal $2x+4y-3a=0$.**13.** Urinma $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$ normal $\frac{(x-x_0)a^2}{x}-\frac{(y-y_0)b^2}{y}=0.$ **15.** Urinma $yy_0=p(x+x_0),$ normal $y(x-x_0)+p(y-y_0)=0$.**16.** Urinma $(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)x-$ $-(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)y-a\varphi^2=0$, normal $(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)y+$ $+(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)x-a\varphi\ =0.$ **17.** Urinma $y-a=0$, normal $x-a=0$.**18.** $A(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$. **19.** Yo‘q. **21.** $y=4x-4.$ **22.** $A(2,-3).$ **23.** $b=-1, c=-1.$

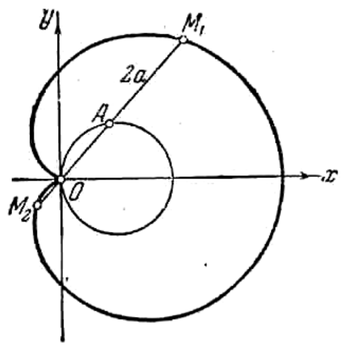
27. $M_1(\frac{2}{3},\frac{4}{9}), M_2(\frac{2}{3},\frac{8}{27}).$ **29.** $y=2x+3, y=2x+\frac{49}{27}.$ **30.** $y+1=\frac{(x+7)}{3}.$

36. $M_1(0,0), M_2(4,4), \varphi_1=\frac{\pi}{2}, \varphi_2=arctg\frac{3}{4}.$ **37.** $M_1(0,3), M_2(0,-3), \varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{4}.$

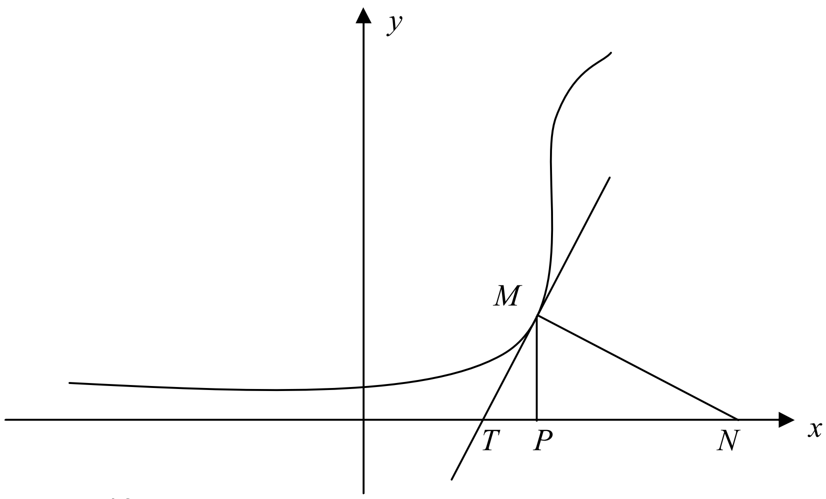
38. $M_1(1,2), M_2(1,-2), \varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{2}.$

41. $M_k(\frac{\pi}{4}+k\pi,(-1)^k\frac{3}{2}), \varphi_k=arctg2\sqrt{2}, k\in Z.$

48. ΔM_1M_2A uchburchakdan $\mu_1=\frac{\varphi}{2}, \mu_1=\frac{\varphi+\pi}{2}, \angle M_1AM_2=\mu_2-\mu_1=\frac{\pi}{2}$ (48 – rasm).



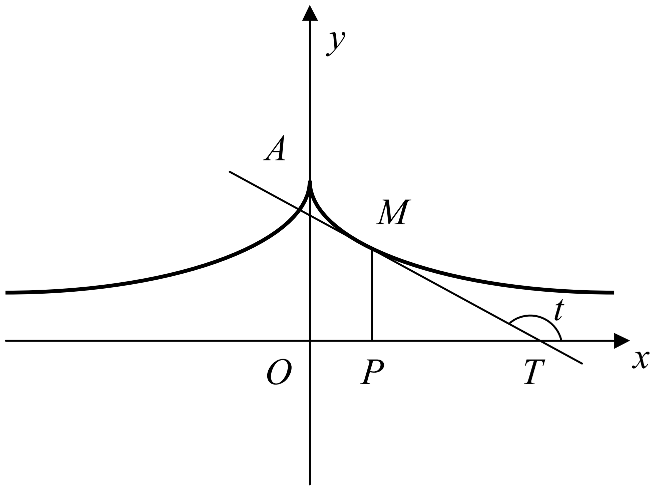
48 – rasm



49 – rasm

57. $y - y_0 = y'(x - x_0)$ urinma tenglamasida $y = 0,\ x = x_T$ deb $x_T - x = -\dfrac{y}{y'}$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan, $|PT| = \left|\dfrac{y}{y'}\right|$ ga ega bo‘lamiz. Qolgan formulalarni ham xuddi shunga o‘xshash keltirib chiqaramiz (49–rasm).

58. $|MT| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $|PT| = \dfrac{1}{2}$, $|MN| = \sqrt{5}$, $|PN| = 2$.



50 – rasm

59. $|MT| = |cthx|chx,\ |PT| = |cthx|,\ |MN| = ch^2x,\ |PN| = \dfrac{|sh2x|}{2}$. **60.** $y^2 = \pm 2kx + c$, c – const; **61.** $y^2 = ce^{\pm\frac{x}{k}}$, c – const. **62.** $a(\ln tg\dfrac{t}{2} + \cos t) + c,\ y = a\sin t,\ t -$ koordinatalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan urinma tashkil etgan burchak. Bu – traktrisa deb ataluvchi kongruyent chiziqlar oilasi(50 – rasm).

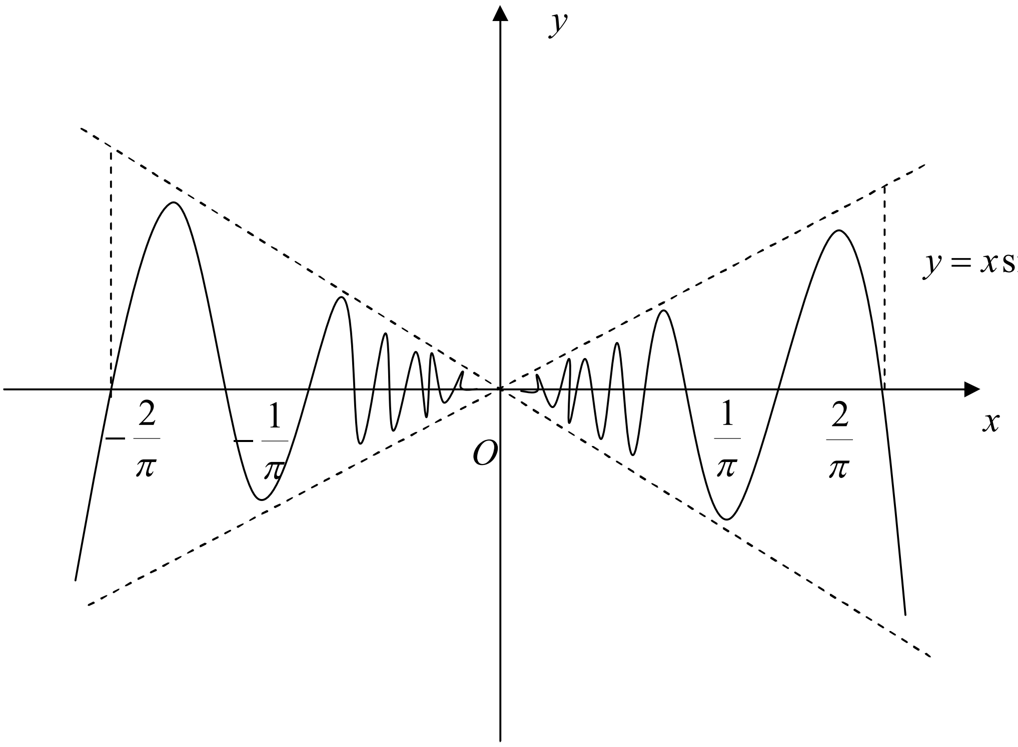
63. $S = \pi\dfrac{a^2}{2}$. **65.** Ikkinchi tartibli urinishga ega. **66.** Birinchi tartibli urinishga ega. **67.** Uchinchi tartibli urinishga ega. **68.** Uchinchi tartibli urinishga ega. **69.** $y = x^2 - 3x + 3$. **70.** $x^2 + y^2 - y = 0$. **71.** $(x + 2y)^2 - 20x + 14y + 19 = 0$. Uchinchi tartibli urinishga ega. **73.**Agar $f(x)$ $x = 0$ nuqtada n–tartibgacha hosilaga ega bo‘lsa, masala yechimga ega

$y = f(0) + f'(0)x + f''(0)\dfrac{x^2}{2!} + ... + f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}$, aks holda masala yechimga ega emas. **74.** 1) $\dfrac{(x - \pi R)}{12R^2} + \dfrac{(y + R)^2}{9R^2} = 1$**,** beshinchi tartibli urinishga ega. 2) $\dfrac{(x - \pi R^2)}{-12R^2} + \dfrac{(y - 5R^2)}{9R^2} = 1$, beshinchi tartibli urinishga ega.

3) $(x-\pi R^2)=-8R(y-2R)$, uchinchi tartibli urinishga ega.

4 §

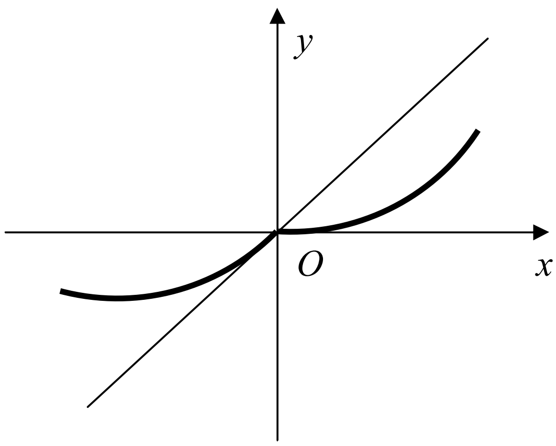
1. $x=3,\ y=0$. **2.** $x=\pm 4,\ y=0$. **3.** $y=0$. **4.** $y=x-4,\ x=0$. **5.** $y=x-2,\ x=-2$. **6.** $x=0$. **7.** $x=3,\ y=-4,\ y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$. **8.** $y=-\frac{1}{2},\ y=2x+\frac{1}{2}$.
9. $x=-\frac{1}{2},\ 2x-4y-3=0$. **19**. $O(0;0)$–o‘z – o‘zini kesish nuqtasi. **20**. $O(0;0)$– o‘z – o‘zini kesish nuqtasi. **21**. $O(0;0)$– ajralgan no‘qta. **22**. $O(0;0)$– ajralgan no‘qta. **24**. $O(0;0)$– aralgan no‘qta. **26**. $O(0;0)$– o‘z – o‘zini kesish nuqtasi. **27**. $O(0;0)$– birinchi tur qaytish nuqtasi. **28**. $O(0;0)$. **29**. $A(a,0)$ - o‘z – o‘zini kesish nuqtasi. Urinma $y=\pm x$. **30**. $O(0;0)$– birinchi tur qaytish nuqtasi.



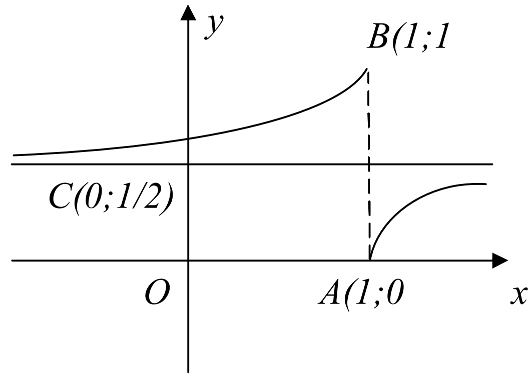
51 – rasm

31. $A(0,0)$– birinchi tur qaytish nuqtasi. Urinma $y=0$. **35 – 37**. Mavjud emas. (51–53–rasmlar).
40. Funksiya $x=\pm 1$ nuqtadan boshqa barcha x larda aniqlangan. Maxsus nuqtalari yo‘q. Koordinata boshida Ox o‘qiga urinadi. Chiziq Oy o‘qiga simmetrik bo‘lib, $x=\pm 1,\ y=1$ asimptotalarga ega. **41**. Funksiya $x=\pm\sqrt{3}$ nuqtadan boshqa barcha x larda aniqlangan. $y_{\max}=y(-3)=-\frac{9}{2},\ y_{\min}y(3)=\frac{9}{2}$.
Koordinata boshi egilish nuqtasi bo‘lib, shu nuqtada chiziq Ox o‘qiga urinadi,

asimptotalari esa $y = x,\ x = \pm\sqrt{3}$. **42**. Funksiya $x = -1$ nuqtadan boshqa barcha x larda aniqlangan. Koordinata boshi egilish nuqtasi bo‘lib, shu nuqtada va $M\left(-3;-3\frac{3}{8}\right)$ nuqtada chiziq Ox o‘qiga urinadi, asimptotalari esa $x + 1 = 0,\ x - 2y - 2 = 0$.



52 – rasm



53 – rasm

43. Funksiya $x = \pm 2$ nuqtadan boshqa barcha x larda aniqlangan. Koordinata boshi egilish nuqtasi bo‘lib, shu nuqtada Ox o‘qiga urinadi va $x = \pm 2, y = 0$ asimptotalarga ega. **44.** Aniqlanish sohasi – $(0;5]$; $M\left(\frac{5}{\sqrt[3]{4}},\frac{5}{\sqrt[3]{4}}\right)$ – egilish nuqtasi bo‘lib, shu nuqtada Ox o‘qi bilan 135^0 li burchak hosil qiluvchi urinmaga ega. $x = 0$ asimptota. **45**. Funksiya $x > 0$ da aniqlangan. $y_{\min} = y(e) = \frac{1}{e}$; $M\left(\sqrt{e^3},\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$ – egilish nuqtasi. $x = 0,\ y = 0$ asiptotalarga ega. **46**. Funksiya barcha x larda aniqlangan va musbat. $y_{\max} = y(0) = 1$, $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – egilish nuqtalari, $y = 0$ asimptota. **47**. Funksiya $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha x larda aniqlangan. $M\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{e^2}\right)$ – egilish nuqtasi, asimptotalari esa $x = 0,\ y = 1$. **48**. Chiziq $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lib, $y + x + a = 0$ asimptotaga ega. Koordinata boshida o‘z – o‘zini kesadi va $y = 0,\ x = 0$ urinmalanga ega. **49**. Chiziq yopiq bo‘lib, maxsus nuqtalarga ega emas. Koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari: $O(0;0)$, $M_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $M_2\left(t = -1 + \sqrt{2}\right)$, $M_3\left(-1;-\sqrt{2}\right)$ nuqtalarda Ox o‘qiga parallel urinmalarga ega.

$O(t=0)$, $M_4(t=\pm\infty)$ nuqtalarda urinmalar Oy o‘qiga parallel. Bu chiziq ellipsligini uning tenglamasini oshkormas ko‘rinishda yozish bilan isbotlash mumkin. **50**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lib, tekislikning, $0 < x \le 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi qismida joylashgan. $x=1$ asimptota, $O(0;0)$ – birinchi tur qaytish nuqtasi. **51**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lib, tekislining, $0 < x \le 1$ munasabatni qanoatlantiruvchi qismida joylashgan. $x=1$ asimptota. Koordinata o‘qlarni $O(0;0)$, $M_4\left(\frac{1}{2};0\right)$ nuqtalarda kesadi. Maxsus nuqtalarga ega emas. Koordinata boshida Oy o‘qiga parallel urinmaga ega. **52**. $O(0;0)$ nuqtadagi urinma Oy o‘qi bilam ustma – ust tushadi. $M_1\left(1;1\frac{1}{3}\right)$, $M_2\left(1;-1\frac{1}{3}\right)$ nuqtalarda Ox o‘qiga parallel urinmalarga ega. $M_3(3;0)$M nuqtadan chiziq ikki marta o‘tadi. Asimptotasi yo‘q. **53**. Asimptotalari $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$, $y=x+1$. Chiziq koordinata o‘qlarini faqat koordinata boshida kesib o‘tadi. Koordinata boshi chiziqning birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘ladi. $O(0;0)$, $M_1(t=\sqrt{3})$, $M_2(t=-\sqrt{3})$ nuqtalardagi urinmalalar Ox o‘qiga parallel, $M_3(t=2)$ nuqtadagi urinma esa Oy o‘qiga parallel. **54**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Asimptotalari $x=-1$, $y=\pm(x-\frac{1}{2})$. Birinchi asimptota chiziqni kesmaydi, ikkinchi va uchinchi asimptotalar esa mos ravishda $M_1\left(t=-\frac{1}{2}\right)$ va $M_2\left(t=\frac{1}{2}\right)$ nuqtalarda kesib o‘tadi. Koordinata boshi chiziqning birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘ladi. Chiziqning $M_3(t=\sqrt{3})$, $M_4(t=-\sqrt{3})$ nuqtalardagi urinmalari Ox o‘qiga parallel. **55**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Maxsus nuqtalari va asimptotalari yo‘q. $M_1\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ va $M_2\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ nuqtalar egilish nuqtalari bo‘ladi. Chiziq koordinata boshida Oy o‘qiga urinadi. **56**. Asimptotalari yo‘q. Koordinata boshi chiziqning ikkinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinmasi $x=0$ dan iborat. Chiziq Ox o‘qini $O(0;0)$ va $M_1(1;0)$ nuqtalarda kesib o‘tadi. $M_2(t=-\sqrt[3]{0{,}8})$ - egilish nuqtasi, uning $M_3(t=\sqrt[3]{0{,}4})$ nuqtadagi urinmasi Ox o‘qiga parallel bo‘ladi. **57**. $y=1$ - asimptota; $O(0;0)$ – egilish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma Ox o‘qi bilan ustma – ust tushadi. $M\left(t=\frac{5}{4}\right)$ nuqtadagi urinma Oy o‘qiga parallel bo‘ladi. **58**. Asimptotalari $x=0$, $x+y\pm 2=0$. $O(0;0)$ – egilish nuqtasi bo‘lib bu nuqtadagi urinma $x-y=0$ dan iborat. **59.** Koordinata boshi chiziqning ikkinchi tur qaytish nuqtasi. Koordinata o‘qlari bilan $O(0;0)$, $M(1;0)$ nuqtalarda kesishadi. **60**. Chiziq $y=x$ to‘g‘ri hiziqqa nisbatan simmetrik. Asimptotasi $x+y-1=0$. Koordinata boshi chiziqning birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma Ox o‘qidan iborat bo‘ladi. Bundan tashqati, $t\to\infty$ da chiziq koordinata boshiga Oy o‘qiga urinib yaqinlashadi. **61**. Asimptotalari $2x+9=0, 2x-9=0, x-y-6=0$. $M_1(4;-4)$ birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinmasi $x+y=0$ to‘g‘ri chiziqdan iborat. Chiziq Ox o‘qiga $M_2\left(\frac{16}{3};0\right)$, Oy o‘qiga $M_3\left(0;-\frac{16}{3}\right)$ nuqtada urinadi. **62**. Chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrik. Asimptotalari $y=\pm x-1$. $O(0;0)$ – uch karrali maxsus nuqta bo‘lib, bu nuqtada chiziq $x=0,\ y=0$ urinmalarga ega. $M_{1,2}\left(\pm 2\sqrt[4]{27};2\sqrt{3}\right)$– egilish nuqtalari. **63**. Chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrik. $M_{1,2}(\pm 2;0)$ birinchi tur qaytish nuqtalari bo‘lib, bu nuqtalardagi urinmalar $\pm x+y-2=0$ dan iborat. $M_3\left(0;\frac{2}{3}\right)$, $M_4(0;2)$ nuqtalarda Oy o‘qiga parallel urinmalarga ega. $M_{5,6}\left(\pm\frac{2}{5}\sqrt{5};\frac{2}{3}\right)$–egilish nuqtalari. **64**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Maxsus nuqtalari va asimptotalari yo‘q. Chiziq Ox o‘qini $M_1(-1;0)$, Oy o‘qini $M_{2,3}(0;\pm1)$ nuqtalarda kesadi. Chiziqning $M_{2,3}(0;\pm1)$ nuqtalardagi urinmalari Ox o‘qiga, $M_1(-1;0)$ nuqtadagi urinmasi esa Oy o‘qiga parallel. $M_{2,3}(0;\pm1)$ nuqtaga egilish nuqtasidir. **65**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Asimptotalari $x=1,\ y=\pm2$. Chiziq Oy o‘qiga koordinata boshida urinadi. Tekislikning $0<x\le1$ munosabatni qanoatlantiruvchi qismida chiziqning nuqtalari mavjud emas. **66**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Asimptota $x=1$, vertikal urinma $x=0$, chiziq tekislikning $0<x\le10$ munosabatni qanoatlantiruvchi qismida joylashgan. **67**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Asimptota $x=0$. $M_1\left(-\frac{5}{2};0\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2};0\right)$ nuqtalardagi chiziqning Oy o‘qiga parallel. Ikkita egilish nuqtasi mavjud. **68**. Chiziq markazi koordinata boshida, tomonlari koordinata o‘qlariga parallel va $2a$ ga teng kvadtar ichida to‘la joylashadi. Chiziq koordinata o‘qlari va ularning bissektrisalariga nisbatan simmetrik. **69**. Chiziq parabolaga o‘xshaydi. Asimptotalari $2y=\pm x$. $x^2<6$ da, $O(0;0)$– ajralgan nuqtadan tashqari, berilgan tenglamani qanoqatlantiruvchi nuqtalar mavjud emas. **70**. Asimptotalari $y=\pm x$. $O(0;0)$ va $M_1\left(\sqrt[3]{2};0\right)$ nuqtalardagi urinmalar Oy o‘qiga parallel. Ikkita egilish nuqtasi mavjud. **71**. Asimptotalari $y=\pm x$. $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}};\frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right)$, $M_2\left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}};-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$ nuqtalardagi urinmalar koordinata o‘qlariga parallel. **72**. Asimptotalari $x=0, y=x$; $O(0;0)$ nuqta egilish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma $y=-x$. $M_{1,2}(\sigma(\sqrt{2}+1)\sigma)$, $M_{3,4}(-\sigma(\sqrt{2}+1)\sigma)$; $\sigma=\pm 1$ nuqtalarda Ox o‘qiga parallel urinmalarga ega. **73**. Asimptotalari $x=0,\ y=0$. $M(0;1)$ nuqtadagi urinmasi Ox o‘qiga parallel. **74**. $x=1$ to‘g‘ri chiziq va $O(0;0)$ ajralgan nuqta. **75**. Asimptotalari $x=\pm 1$, $y=\pm 1$; $O(0;0)$ – ajralgan nuqta. **76**. Asimptotalari $y=\pm x$. $O(0;0)$– ajralgan nuqta. Chiziq Oy o‘qini $M_{1,2}(0;\pm 2)$ nuqtada kesib o‘tadi. $M_{1,2}$ nuqtalardagi urinmalar Ox o‘qiga parallel. 77. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Asimptotalari $y=x+1,\ y=-x-1,\ x=1;\ y=\pm(x+1)$ asimptotalar chiziqni $M_1(-1,0)$ nuqtada kesadi. $O(0;0)$ – ajralgan nuqta. M_1 nuqtada Oy o‘qiga, parallel urinmaga ega. Abssissasi $x==\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bo‘gan M_2, M_3 nuqtalarda esa Ox o‘qiga parallel urinmalarga ega. **78**. Asimptotalari $y-x\pm\frac{a}{\sqrt{2}}=0,\ y+x\pm\frac{a}{\sqrt{2}}=0$. Koordinata boshi ajralgan nuqta. $M_{1,2}(0;\pm a)$ nuqtalarda Ox o‘qiga, $M_{3,4}(\pm a;0)$ nuqtada esa Oy o‘qiga parallel urinmalarga ega. **79**. Chizig Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. $M_0(2;0)$ ajralgan nuqta. $M_{1,2}(-2,\pm\sqrt{2})$ nuqtadagi urinmalar Ox o‘qiga nisbatan simmetrk. Ikkita egilish nuqtasi bor $M_{3,4}(\pm a;0)$; Asimptotasi $x=0$. **80**. Asimptotalari $3x+4=0,\ 3x\pm 3\sqrt{3}y-8=0$. $O(0;0)$ – ajralgan nuqta. Chiziq Ox o‘qini $M(4;0)$ nuqtada kesib o‘tadi. Bu nuqtadagi urinma $x=4$. **81**. Chiziq marakazi koordinata boshida, tomonlari koordinata o‘qlariga parallel va uzunligi $\sqrt{2+\sqrt{8}}$ ga teng kvadrat ichida to‘la joylashadi. Chiziq koordinata o‘qlari va ularning bissektrisalariga nisbatan simmetrik. Koordinata boshi ajralgan nuqta. $M_{1,2}(0,\pm 1)$, $M_{3-6}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}\right)$ nuqtalarda Ox o‘qiga parallel urinmalarga ega. $M_{7,8}(\pm 1;0)$, $M_{9-12}\left(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nuqtalarda Oy o‘qiga parallel urinmalarga ega. **82**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik va to‘liqligicha tekislikning $-1\le x<1$ munosabatni qanoatlantiruvchi qismida joylashgan. Asimptota $x=1$. Koordinata boshi $k=\pm 1$ burchak koeffitsiyentli urinmalarning kesishish nuqtasi. Urinma Oy o‘qiga $M_1(-1;0)$ nuqtada parallel. Urinmalar Ox o‘qiga $M_{1,2}$ nuqtalarda, absissasi esa $x=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ nuqtalarda parallel. **83**. Chiziq Koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik. Koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari –, $M_{1,2}(0;\pm 1)$. Urinmalar Ox o‘qiga $M_{1,2}$ nuqtada va Oy

o‘qiga $M_{3-6}\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ nuqtalarda parallel, O(0,0) nuqta $y=\pm x$ nuqtalar bilan kesishish nuqtasi. **84**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik; $M(1;0)$– $y=\pm(x-1)$ urinma bilan kesishish nuqtasi. Asimptotasi $x=0$. **85**. Chiziq koordinata o‘qlari burchaklarning bisssektrissalariga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$– $x=0,\ y=0$ urinmalarga nisbatan simmetrik. Koordinata o‘qlari bilan boshqa kesishuvchi nuqtalari yo‘q. Urinmalar Ox o‘qiga $M_1\left(\sqrt[8]{\frac{3}{16}};\sqrt[8]{\frac{27}{16}}\right)$, $M_2\left(-\sqrt[8]{\frac{3}{16}};-\sqrt[8]{\frac{27}{16}}\right)$ nuqtalarda va Oy o‘qiga $M_3\left(\sqrt[8]{\frac{27}{16}};\sqrt[8]{\frac{3}{16}}\right)$, $M_4\left(-\sqrt[8]{\frac{27}{16}};-\sqrt[8]{\frac{3}{16}}\right)$ nuqtalarda parallel. Asimptotalarga ega emas. **86**. Chiziq koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik va $x=\pm 1,\ y=\pm\frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchak ichida joylashgan; $O(0;0)$ nuqta $y=\pm x$ urinma bilan kesishish nuqtasi. Urinmalar Ox o‘qiga $M_{3-6}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm\frac{1}{2}\right)$ nuqtada va Oy o‘qiga $M_{1,2}(\pm 1;0)$ nuqtalarda parallel. **87**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. Asimptotalar $y=\pm 1$, $x=-1, x=-2$; $O(0;0)$–o‘z – o‘zini nuqta kesishuvchi nuqta bo‘lib, bu nuqtadagi urinmalar $y\sqrt{2}=\pm x$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat. **88**. $M_{2,3}\left(\frac{1}{3};\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ nuqtalardagi urinmalar Ox o‘qiga parallel. $M_1(1;0)$– o‘z – o‘zini kesishuvchi nuqta bo‘lib, bu nuqtadagi urinmalar $y=\pm(x-1)$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat. $O(0;0)$ nuqtadagi urinma Oy o‘qiga parallel. **89**. Chiziq koordinata o‘qlarining bissektrisalariga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$ – o‘z – o‘zini nuqta kesishuvchi nuqta bo‘lib, bu nuqtadagi urinmalar $x=0,\ y=0$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat. $M_{1,2}\left(\sigma\sqrt[4]{3};\sigma\sqrt[4]{27}\right)$ nuqtalardagi urinmalar Ox o‘qiga, $M_{3,4}\left(\sigma\sqrt[4]{27};\sigma\sqrt[4]{3}\right)$ nuqtalardagi urinmalar Oy o‘qiga parallel. Bu yerda $4\sigma=\pm 1$. **90**. Chiziq $y=-x+\frac{1}{3}$ asimptota bilan $M_1\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ nuqtada kesishadi $O(0;0)$ – nuqta birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma $x=0$. $M_2(1;0)$ nuqtadagi urinma Oy o‘qiga, $M_{3,4}\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ nuqtalardagi urinma Ox o‘qiga parallel. **91**. Asimptotalari yo‘q. $O(0;0)$– birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma $y=x$. Chiziq Ox o‘qini $M_1(27;0)$ nuqtada kesib o‘tadi. $M_2(12;4)$ nuqtadagi urinma Ox o‘qiga parallel. **92**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$ - birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma $y=0$. Asimptotalar $x=a$, $x\pm y=-\frac{a}{2}$. Tekislikning $0<x\le a$ munosabatni qanoatlantiruvchi sohasida chiziq tenglamasini qanoatlantiruvchi nuqtalar mavud emas. **93**. $O(0;0)$– nuqta ikkinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma $y=0$. $M_1\left(\frac{64}{225};\frac{28672}{759375}\right)$- egilish nuqtasi. $M_2\left(\frac{16}{25};\frac{256}{3125}\right)$ nuqtadagi urinma Ox o‘qiga parallel. $M_3(1;0)$ nuqtada chiziq Ox o‘qini kesib o‘tadi. **94**. Chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$ – chiziqning uchta yoyi o‘tuvchi maxsus nuqta. Bu nuqtadagi urinmalar $y=0$, $x\pm y=0$. Egilish nuqtalari va asimptotalari yo‘q. $M_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{1}{4}\right)$, $M_{3,4}\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{9};\frac{2}{9}\right)$ nuqtalardagi urinmalar koordinata o‘qlariga parallel. **97**. Chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$ – nuqta ikkinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma $y=0$. $M_{1,2}(\pm 6;12)$, $M(\pm 6\sqrt{2};8)$ nuqtalardagi urinmalar koordinata o‘qlariga parallel. Ikkita egilish nuqtasi mavjud. **98**. Chiziq Ox o‘qiga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$ – chiziqning uch karra maxsus nuqtasi. Bu nuqtadagi urinmalar $y=0$, $x=0$. $M_2\left(\sqrt{12};\pm\sqrt{6\sqrt{12}}\right)$ nuqtalardagi urinmalar Ox o‘qiga, $M_{3,4}(4;\pm 4)$ nuqtalardagi urinmalar Oy o‘qiga parallel. **99**. Chiziq koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$ – nuqta o‘z – o‘zini kesish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinma $y=0$. Chiziq Ox o‘qini $M_{1,2}(\pm 1;0)$ nuqtalarda kesadi va bu nuqtalardagi urinmalar Oy o‘qiga parallel. $M_{3-6}(\pm\frac{\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{3}}{9})$ nuqtalardagi urinmalar Ox o‘qiga parallel. **100**. Asimptotlari $y=\pm x$; $O(0;0)$ – nuqta o‘z – o‘zini kesish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtadagi urinmalar $y=0$, $x=0$. Beshta egilish nuqtasi mavjud. **101**. Chiziq markazi koordinata boshida, tomonlari koordinata o‘qlariga parallel va 4 ga teng kvadrat ichida to‘la joylashadi. Chiziq koordinata o‘qlari va ularning bissektrisalariga nisbatan simmetrik. $O(0;0)$ – chiziqning to‘rt karra maxsus nuqtasi. Bu nuqtadagi urinmalar $y=0$, $x=0$. $M_{1-4}(\pm\sqrt{2};\pm 2)$ nuqtadagi urinma Ox o‘qiga, $M_{5-8}(\pm 2;\pm\sqrt{2})$ nuqtalardagi urinma Oy o‘qiga parallel. **104**. Agar r,φ - umumlashgan qutb koordinatalari bo‘lsa (ya’ni r har qandayishorali qiymatni qabul qilsa), u holda $r^2\varphi=a^2$ tenglama qutbga simmetrik ikkita egri chiziqni aniqlaydi. Har bir egri chiziq qutbga cheksiz tarzda, qutb o‘qiga esa asimptotik tarzda yaqinlashadi. **105**. Qutb birinchi tur qaytish nuqtasi bo‘lib, qutb o‘qi esa bu nuqtada urinma bo‘ladi. **107**. Egri chiziq

dekart koordinatalar sistemasi o‘qlariga nisbatan simmetrik, Ox o‘qini qutb o‘qi bilan ustma –ust tushadi. Chiziq Ox o‘qini $M_{1,2}(\pm a;0)$, $O(0;0)$ nuqtalarda kesib utadi, O nuqta chiziq o‘z – o‘ziga va $y=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinadi. Chiziq $M_3\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $M_4\left(0;-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ nuqtalarda o‘z – o‘zini kesadi. **109**. Oila Oy o‘qiga koordinata boshida urinuvchi ellipslardan va $y=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat. Oilaga Ox o‘qi ham tegishli. **110**. $C=0$ bo‘lgan holda $x=0,\ x-2y=0$ to‘g‘ri chiziqlar. $C\neq 0$ bo‘lgan holda asimptotalari $x=0,\ x-2y=0$ to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan o‘xshash giperbolalar. Giperbolalarning $O^*(C;C)$ markazlari $x=y$ to‘g‘ri chiziqni to‘ldiradi. Giperbolalarning bitta shoxi koordinata boshida Ox o‘qiga urinadi. **111**. a) umumiy fokusga ega ellipslar oilasi; b) umumiy fokusga ega giperbolalar oilasi; **115**. $(x-C)^2+y^2=C^2$. **116**. $x^2+\frac{y^2}{2}=C$. **117**. Kesishuvchi aylanalar oilasi. Bu oila markazlaridan iborat chiziq umumiy vatar bo‘ylab yo‘nalgan. Koordinata boshini umumiy vatar o‘rtasiga joylashtirib, Ox o‘qini shu vatar bo‘ylab yo‘naltirilsa, $(x-C)^2+y^2=C^2-a^2$ tenglama hosil bo‘lgan oilani ifodalaydi. **118**. $y=\pm a$. **119**. $y=0,\ x=0$. **120**. $x^2+y^2=p^2$. **124**. Diskriminant $x=y$ va $x-y-\frac{2}{9}=0$ to‘g‘ri chiziqlarga bo‘linadi. Birinchi chiziqning maxsus nuqtalaridan iborat, ikkinchisi o‘rama. **125**. $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ aylana. **126**. $y^2+4a(x-a)=0$ parabola. **127**. $xy=\pm\frac{S}{2}$ giperbolalar.**128**. $(A^2+B^2)R^2=C^2$. **129**. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ - astroida. **130**. a) $x^2+y^2=(R-r)^2$, $x^2+y^2=(R+r)^2$. **131**. O‘rinma $(x-\frac{3p}{4})^2+y^2=(\frac{3p}{4})^2$ aylana va berilgan parabolaning $x=-\frac{p}{2}$ direktrisasidan iborat. **134**. $y^2=2p(x+\frac{p}{2})$ parabola. Bu parabola $C\geq\frac{p}{2}$ o‘rinli bo‘lganda aylanalar uchun o‘rinma bo‘ladi. **135**. $y^2=2(p+q)x$. **136**. O‘rama nuqtalari quyidagi munosabatni qanoatlantirishi kerak: $F(x,y,\alpha,\beta)=0,\ \varphi(\alpha,\beta)=0,$ $\frac{D(F,\varphi)}{D(\alpha,\beta)}=0.$ **137**. To‘rtta to‘g‘ri chiziq $x\pm y=\pm 1$.**138**. $x^k+y^k=a^k$, $k=\frac{m}{m+1}$; $m=2$ bo‘lgan holda astroida; $m=1$ holda $(x-y)^2-a(2x+2y-a)=0$ parabola; $m=-2$ holda $x^2+y^2=a^2$ aylana.

5 §

1. $\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-\frac{a\pi}{4}}{a}$. **2.** $\frac{x-e}{e}=\frac{y-e^{-1}}{-e^{-1}}=\frac{z-1}{2}$. **3.** $x=y+1=z$.

4. $x+\frac{a}{2}(4-\pi)=y=\frac{1}{\sqrt{2}}z-a;\varphi=\frac{\pi}{4}$. **5.** $M_1(-2;12;14)$, $M_2(-2;3;-4)$.

6. $\begin{cases} x=2 \\ 2y-z=0 \end{cases}$, $y+2z=0$. **11**. Chiziqning parametrik ko‘rinishdagi tenglamasi $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ bo‘lsin. Ma’lumki, quyidayi munosabatlar o‘rinli $F(x(t),y(t)z(t))\equiv 0$, $\Phi(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$ bundan esa $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0$ munosabtni hosil qilamiz. Bu munosabatlar esa differensiallarning quyidagi nisbatini aniqlaydi:

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

Shunday qilib, urinma tenglamasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

normal tenglamasi esa quyidagi ko‘rinihga keladi:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}(Z-z)=0,$$

yoki

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

12. $\frac{X-x}{2yz}=\frac{Y-y}{z(R-2x)}=\frac{Z-z}{-Ry}$; $2yzX+z(R-2x)Y-RyZ=0$.

13. $\frac{X-x}{ay}=\frac{Y-y}{bx}=\frac{Z-z}{xy}$; $ay(X-x)+bx(Y-y)+xy(Z-z)=0$, $x^2+y^2\neq 0$.

15. $\frac{X}{x}-\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=1, xyz\neq 0$. **20.** $3x+3y+z+1=0,\ 3x-3y+z-1=0,$

$108x-18y+z-216$. **22.** $bX+aY+abZ=2ab$.

23. $[X\sin(t-a)-Y\cos(t-a)]\sin a+Z=t\sin a+\cos a$

24. $4x-y+z-9=0$. **26.** Bosh normal tenglamasi: $\frac{x}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{-1}$. Binormal tenglamasi: $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$. **27.** Bosh normal tenglamasi: $\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{9}$.

Binormal tenglamasi: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$. **28.** $A(1,\ \ln 2,\ -4)$.

30. $\vec{\tau}=\frac{\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2}}, \vec{n}=\frac{2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}}, \vec{\beta}=\frac{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{3}}$.

31. $\tau=-\frac{3}{5}\cos ti+\frac{3}{5}\sin tj-\frac{4}{5}k, n=\sin ti+\cos tj, \beta=\frac{4}{5}\cos ti-\frac{4}{5}\sin tj-\frac{3}{5}k.$

32.

$\tau=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{t}{2}i+\cos\frac{t}{2}j-k), n=\cos\frac{t}{2}i-\sin\frac{t}{2}j, \beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{t}{2}i+\cos\frac{t}{2}j+k).$

34. Urinma tenglamasi: $\frac{X-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-bt}{b}$;

normal tekislik tenglamasi: $(a\sin t)X-(a\cos t)Y-bZ+b^2t=0$;

binormal tenglamasi: $\frac{X-a\cos t}{a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{Z-bt}{a}$;

yopishma tekislik tenglamasi: $(b\sin t)X-(b\cos t)Y+aZ-abt=0$;

bosh normal tenglamasi: $\frac{X-a\cos t}{\cos t}=\frac{Y-a\sin t}{\sin t}, Z=bt$;

to‘g‘rilovchi tekislik tenglamasi: $X\cos t+Y\sin t-a=0$;

$$\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}+b\vec{k}), \vec{n}=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j},$$

$$\vec{\beta}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\vec{i}-b\cos t\vec{j}+a\vec{k}).$$

35. $s=\sqrt{a^2+b^2}t$.

38. $X=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, Y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, Z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

39. $s=8\sqrt{2}a$. **41**. $s=\sqrt{2}asht$. **42**. $ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$.

43. $ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta d\varphi^2$.

6 §

1. $k=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$. **2.** $k=\frac{a}{y^2}$. **3.** $k=\frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. **4.** $k=\frac{6}{t(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5. $k=\dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. **6.** $k=\dfrac{ab}{(a^2sh^2t+b^2ch^2t)^{\frac{3}{2}}}$. **7.** $k=\dfrac{1}{4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}$.

8. $k=\dfrac{2}{3a|\sin 2t|}$. **9.** $k=\dfrac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$. **10.** $k=\dfrac{3}{4a\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|}$. **11.** $k=\dfrac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^{\ 2}+F_y^{\ 2})^{\frac{3}{2}}}$.

12, 13. $k=\dfrac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{ab}{\left|a^2-\varepsilon x^2\right|^{\frac{3}{2}}},\varepsilon$ - ekssentrisitet.

14. $k=\dfrac{\left|P(Q\dfrac{\partial Q}{\partial x}-P\dfrac{\partial Q}{\partial y})+Q(P\dfrac{\partial P}{\partial y}-Q\dfrac{\partial P}{\partial x})\right|}{(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}$. **21.** $k=\dfrac{a}{a^2+b^2},\sigma=\dfrac{b}{a^2+b^2}$. **22.** $k=\sigma=\dfrac{1}{ach^2t}$. **23.** $k=-\sigma=\dfrac{2t}{(e^t+e^{-t})^2}$. **24.** $k=-\sigma=\dfrac{2t}{(1+2t^2)^2}$. **25.** $k=\dfrac{3}{25\sin t\cos t},\sigma=\dfrac{4}{25\sin t\cos t}$. **26.** $a=b$. **27.** Parametrning $t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $(k=0$, ± 1, $\pm 2...)$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtalar. **28.** Parametrning $t=2k\pi$, $(k=0$, ± 1, $\pm 2...)$ qiymatlariga mos keluvshi nuqtalar. **29.** $x-4y+2z+1=0$.

30. $\begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_2 & z-c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}=0$. **32.** $f(t)=c_1+c_2\sin t+c_3\cos t$.

III BOB
1 §

1. $x=f(u)\cos v, y=f(u)\sin v, z=g(u)$.
2. $x=(a+b\cos u)\cos v, y=(a+b\cos u)\sin v, z=b\sin u$.
3. $x=ach\dfrac{u}{a}\cos v, y=ach\dfrac{u}{a}\sin v, z=u$.
4. $x=\sin u\cos v, y=\sin u\sin v, z=a(\ln tg\dfrac{u}{2}+\cos u)$.
5. $x=a(u+v), y=b(v-u), z=2uv.z=pxy$ sirtning parametrik tenglamasi: $x=u, y=v, z=puv$. **6.** $x=f(u), y=\varphi(u), z=v$. **7.** Giperbolik silindr: $x=achu, y=ashu, z=v$. Parabolik silindr: $x=u, y=u^2, z=v$.

8. $\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}.$ **9.** $x=u+v, y=u^2+2v, z=u^3+3v.$ **10.** $\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+(y+\frac{3}{2}z)^2=1$ yoki parametrik ko'rinishdagi tenglamasi: $x=\cos u-v, y=\sin u+3v, z=-2v.$ **12.** $(nx-lz)^2+(ny-mz)^2=an(ny-mz)$. **13.** Masalan:b) $x=v^2+1, y=u^2-1, z=2v;$ c) $\frac{x-16}{3}=\frac{y-12}{2}=\frac{z-4}{-1}.$

14. $x-a=v[f(u)-a], y-b=v[\varphi(u)-b], z-c=v[\psi(u)-c]$ yoki $F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0.$ **15.** $(bz-cy)^2=2p(z-c)(az-cx).$ **16.** $(x+1)^2=2y^2+z^2.$

17. A tegishli, B tegishli emas. **18.** Elliptik silindr. **19.** Ellipsoid: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$ **20.** Aylanma paraboloid: $z=x^2+y^2.$

21 Ikkita parallel to'g'ri chiziqlar oilasi. **22.** Koordinata boshidan chiquvchi nurlar va markazi koordinata boshida bo'lgan konsentrik aylanar oilasi. **24.** To'g'ri chiziqli yasovchilar. **25.** a) $x=a\cos(u+v), y=a\sin(u+v), z=bu$:

$x=a\cos u, y=a\sin u, z=bu+v;$

$x=a\cos(u+v), y=a\sin(u+v), z=b(u-v)$

26. $\bar{r}=\bar{\rho}(u)+v\bar{\rho}'(u).$ **29.**

$x=a(\cos u-v\sin u), y=a(\sin u+v\cos u), z=b(u+v).$

30. To'g'ri gelikoid: $x=a(1-u)\cos v, y=a(1-u)\sin v, z=bv.$

2 §

2. a) Urinma to'g'ri chiziq $y=0, z=\lambda$ va $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-\lambda}{\lambda}$ normal tekisliklar: $x-1,(x-1)+y+\lambda(z-\lambda)=0$ **b**) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2+\lambda^2}}$. **4.** $18x+3y-4z-41=0.$

5. $3x-y-2z-4=0;$ $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}.$

6. $6x+3y-2z-7=0;$ $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{-2}$. **8.** $3x+12y-z-18=0;$ $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-9}{-1}$. **9.** $3x+4y+12z-169=0;$ $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12.}.$

10. $3x-2y+3z-4=0;$ $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$. **11.** $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$

13. $x\cos u\cos v+y\cos u\sin v-z\sin u+a(\ln tg\frac{u}{2})\sin u=0.$

14. $12x+9y+20z-230.$ **15.** $x+y+z-3=0.$ **19.** Nuqtalarning egri chiziqli koordinatalari quyidagi tenglamalar yordamida beriladi:

$tgu = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}, tgv = \frac{B}{A}$. **35.** Aylanma silindr: $x^2 + y^2 = 1$.
36. Giperbolik silindr: $xy + yz = 1$. **37.** Uchga ega bo‘lmagan konus: $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2xy - 2yz = 0$. **38.** Masalan: $(x-C)^2 + y^2 = C^2, C \neq 0$. **39.** Masalan: $(x-C)^2 + y^2 + z^2 = C^2, C \neq 0$. **40.** O‘ramasi silindr $z^2 + y^2 = 1$; xarakterisalari $z^2 + y^2 = 1$; $x - C = 0$ aylanalardan iborat, qaytish qirrasi mavjud emas. **43**. Vint chizig‘i: $x = b\cos a, y = b\sin a, z = ba$.

44. $x^2 + y^2 + (z-C)^2 = \frac{a^2C^2}{a^2+1}$.

45. Oila tenglamasi : $(x - b\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 + z^2 - a^2 = 0$. Diskriminant tenglamasi: $(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0$. $a > b$ bo‘lganda qaytish qirrasi ikkita $(0;0;\pm\sqrt{a^2 - b^2})$ nuqtalarga, $a = b$ bo‘lganda (0;0;0) nuqtaga keltiriladi.

46. O‘rama $[(y-R)^2 + z^2 - R^2][(y+R)^2 + z^2 - R^2] = 0$ ikkita silindrni ifodalaydi. Qaytish qirrasi mavjud emas.

47. Diskriminant $\begin{cases}(R - r(s))\cdot\beta(s) = 0\\ (R - r(s))\cdot n(s) = 0\end{cases}$ tenglamalar sistemasi bilan beriladi. Xarakteristikalar esa berilgan chiziqqa o‘tkazilgan urinmalardir. Qaytish qirrasi berilgan chiziqning o‘zi.

48. Diskriminant $\begin{cases}(\bar{R} - \bar{r}(s))\cdot\bar{\tau}(s) = 0\\ (\bar{R} - \bar{r}(s))\cdot\bar{n}(s)\cdot k(s) - 1 = 0\end{cases}$

tenglamalar sistemasi bilan beriladi. Xaraktrestikalari binormallarga parallel bo‘lib, chiziq egrilik markazidan o‘tadi. Qaytish qirrasi

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{1}{k}\bar{n} + \frac{1}{\sigma}\frac{1}{k}\bar{\beta}$$

chiziqning urinma sferalari markazlaridan iborat.

49. Diskriminant

$$\begin{cases}(\bar{R} - \bar{r}(s))\cdot\bar{n}(s) = 0\\ (\bar{R} - \bar{r}(s))\cdot(\sigma(s)\cdot\bar{\beta}(s) - k(s)\cdot\bar{\tau}(s) = 0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan beriladi.

3 §

1. $ds^2 = (f'^2 + g'^2)du^2 + f^2dv^2$.

2. $ds^2 = R^2(du^2 + \cos^2 u dv^2)$.

3. $ds^2 = (a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)du^2 + a^2\cos^2 u dv^2$.

4. $ds^2 = (a^2sh^2u + c^2ch^2u)du^2 + a^2ch^2udv^2$.

5. $ds^2 = (a^2ch^2u + c^2sh^2u)du^2 + a^2sh^2udv^2$.

6. $ds^2 = (1+4u^2)du^2 + u^2dv^2.$

7. $ds^2 = du^2 + R^2dv^2.$

8. $ds^2 = (1+k^2)du^2 + u^2dv^2.$

9. $ds^2 = b^2du^2 + (a+b\cos u)^2 dv^2.$

10. $ds^2 = ch^2\frac{u}{a}\mathrm{du}^2 + a^2ch^2\frac{u}{a}\mathrm{dv}^2.$

11. $ds^2 = a^2ctg^2udu^2 + a^2\sin^2 udv^2.$

12. $ds^2 = du^2 + (u^2+a^2)dv^2.$

13. $ds^2 = [1+f'^2(u)]du^2 + 2af'(u)dudv + (a^2+u^2)dv^2.$

14. a) $ds^2 = [1+k^2u^2]du^2 + 2dudv + dv^2.$

b) $ds^2 = [(1+kv)^2 + \sigma^2v^2]du^2 + dv^2.$

c) $ds^2 = [(1+\sigma^2v^2]du^2 + dv^2.$

15. $ds^2 = [1+p^2]dx^2 + 2pqdxdy + (1+q^2)dy^2; p = \partial_x z, q = \partial_y z.$

16. a), b), d) hollarda.**18**. Sfera: $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + R^2\cos^2\frac{\widetilde{u}}{R}d\widetilde{v}^2.$ Tor**:** $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + \left(a + b\cos\frac{\widetilde{u}}{b}\right)^2 d\widetilde{v}^2$. Katenoid**:** $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + \left(a^2+\widetilde{u}^2\right)d\widetilde{v}^2.$

Psevdosfera**:** $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + e^{-\frac{2\pi}{a}}d\widetilde{v}^2$. **20**. $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + e^{-\frac{2\pi}{a}}d\widetilde{v}^2$. Quyidagi $u^* = v, v^* = ae^{\frac{\pi}{a}}$ belgilashlarni amalga oshirib, $ds^2 = \frac{a^2}{\overset{*}{v}{}^2}\left(du^2+dv^2\right)$ munosabatni hosil qilamiz. **21**. $\cos\varphi = \frac{a^2xy}{\sqrt{1+a^2x^2}\sqrt{1+a^2y^2}}$. **23**. Sirtning birinchi kvadratik formasi $ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$ ko‘rinishda olsak, u holda $\cos\alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2+G(u)dv^2}}$, bu yerda $vctg\alpha = \pm\int_{t_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{G(u)}}$. **24**. Sirtning birinchi kvadratik formasini $ds^2 = du^2 + R^2\cos\frac{u}{r}dv^2$ ko‘rinishda olsak, u holda $vctg\alpha = \pm\ln tg(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2R})$. **26**. konus tenglamasini $\vec{r} = v\vec{e}(u), |\vec{e}(u)| = 1$ ko‘rinishda olib, $tg\alpha\ln v = \int|e(u)|du + C$ tenglikni hosil qilamiz.

27. $u+v = const.$ **28**. Sirtning birinchi kvadratik formasini $ds^2 = (1+k^2v^2)du^2 + 2dudv + dv^2$ ko‘rinishda olsak, u holda $ds^2 = (\sin^2\alpha + k^2v^2\cos^2\alpha)du^2 + 2\sin^2\alpha dudv + \sin^2\alpha dv^2 = 0$

29. $(E\partial_v\varphi - F\partial_u\varphi)du + (F\partial_v\varphi - G\partial_u\varphi)du = 0$. **30**. $u^2+u+1 = Ce^{-v}$, $C = const.$

36. $(1+a^2x^2)y^2 = C_1, (1+a^2y^2)x^2 = C_2$.

41.a) $ds = (8u^2+v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2+u^2)dv^2$.

b) $ds = 2\sqrt{2v^2+1}du, ds = \sqrt{8u^2+1}, ds = 2\sqrt{2a^4+a^2+2u}du$;

c) $s = 3\sqrt{2a^4+a^2+2}$

43. $p = \dfrac{10}{3}, \cos\alpha = 1, \cos\beta = \dfrac{2}{3}, \cos\gamma = \dfrac{2}{3}$.

50. $S = \dfrac{a^2}{2}[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

52. $S = a^2[\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

4 §

1., 2. Sfera. **3**. Chegarasiz yarim sfera. **5.** Chegaraga ega bo‘lmagan ikkita shar segmenti. **6.** Katta aylana. **7.** Katta aylananing yarmi (chetki nuqtalari kirmaydi). **8.** Katta aylananing ikkita simmetrik yoylari. **9.** Ikkita parallel (normalni konusdan tashqariga yo‘naltirilganda). **10.** Ikkita diametral nuqtalari olib tashlangan sfera.

11. Katta aylanasiz sfera. **13**. Bir uchi kirmaydigan katta aylananing chorak qismini ikki marta qoplaydi. **14.** Qutbsiz yarim sferani cheksiz marta qoplaydi.

16. $II = \dfrac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}[(f'g'' - f''g')du^2 + fg'dv^2]$.

17. $II = R(du^2 + \cos^2 udv^2)$. **18.** $II = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}(du^2 + \cos^2 udv^2)$.

19. $II = \dfrac{-ac}{\sqrt{a^2sh^2u + c^2ch^2u}}(du^2 - ch^2udv^2)$.

20. $II = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2ch^2u + c^2csh^2u}}(du^2 + sh^2udv^2)$.

21. $II = \dfrac{2}{\sqrt{1+4u^2}}(du^2 + u^2dv^2)$. **22.** $II = Rdv^2$. **23.** $II = \dfrac{ku}{\sqrt{1+k^2}}dv^2$.

24. $II = bdu^2 + \cos u(a + b\cos u)dv^2$. **25.** $II = -\dfrac{1}{a}(du^2 - a^2dv^2)$.

26. $II = -arctgu(du^2 - \sin^2 udv^2)$. **27.** $II = -\dfrac{2adudv}{\sqrt{u^2+v^2}}dv^2$. **32.** $k_1 = 0, k_2 = \dfrac{\sigma}{vk}$.

33. $\dfrac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2+a^2}; k_1 = -k_2 = \dfrac{a}{u^2+a^2}$. **35.** $k_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}, k_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **36.** $k_1 = \dfrac{1}{p}, k_2 = \dfrac{1}{q}$.

39. a) $k_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}, k_2 = 0$ b) $x-2=0, z-1=0;\ \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{z-1}{2}, y=0$; c) $k = \dfrac{2}{9\sqrt{5}}$.

40. a) $4x^2+9y^2=1$; b) $R=\frac{2}{13}$. **42.** Sfera. **44.** Yoyiluvchi sirt. **46. 2)** Sfera uchun: $K=\frac{1}{R^2}$. **3)** Aylanma ellipsoid uchun: $K=-\frac{c^2}{(a^2\cos^2 u+c^2\sin^2 u)^2}$. **4)** Bir pallali aylanma giperboloid uchun: $K=-\frac{c^2}{(a^2sh^2u+c^2ch^2u)^2}$. **5)** Ikki pallali aylanma giperboloid uchun: $K=\frac{c^2}{(a^2ch^2u+c^2sh^2u)^2}$. **6)** Aylanma paraboloid uchun: $K=\frac{1}{(1+4u^2)^2}$. **7)** Aylanma silindr uchun: $K=0$. **8)** Uchga ega bo‘lmagan aylanma konus uchun: $K=0$. **9)** Tor uchun: $K=\frac{\cos u}{b(a+b\cos u)}$. **10)** Katenoid uchun: $K=-\frac{1}{a^2ch^4\frac{u}{a}}$. **11)** Psevdosfera uchun: $K=-\frac{1}{a^2}$.

48. $K=-\frac{1}{A^2}(\partial_{uu}\ln A+\partial_{vv}\ln A)$. **49.** $K=-\frac{\partial_{uu}\sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. **51.** $K^{-1}=pq(1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2})^2$.

53. $K=\frac{-1}{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix}$. **54.** $K=4c$. **56.** $H=0$,

$K=-\frac{a^2}{(a^2+u^2)}$, vint chiziqlari ustmida to‘la egrilik o‘zgarmas.

57. $K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, H=\frac{(1+p^2)r+(1+q^2)r-2pqs}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$p=z_{xx}, r=z_{xx}, q=z_y, s=z_{xy}, t=z_{yy}$.

58. $K=\frac{f'f''}{\rho(1+f'^2)^2}, H=\frac{f''}{2(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{f}{2\rho(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}$. **59.** $H=-\frac{1}{2}a$. **62.** Sirtning hamma nuqtalari elliptik. **64.** $x=1, y=z=0$ maxsus nuqtalari bo‘lib, sirtni ikkita qismga ajratadi: $x>1$ da sirt nuqtalari elliptik, $x<1$ da esa giperbolik. **65.** Sirtning hamma nuqtalri giperbolik. **66.** Agar $AB\geq 0$ bo‘lsa, sirt nuqtalari qiperbolik; $AB<0$ bo‘lsa, barcha turdagi nuqtalar mavjud. **67.** Elliptik. **68.** Giperbolik. **69.** Elliptik. **70.** Elliptik. **71.** Giperbolik. **72 – 75**. Parabolik. **76.** Agar $ff''<0$ bo‘lsa, sirt nuqtalari elliptik; $ff''>0$ bo‘lsa giperbolik, $ff''=0$ bo‘lsa, parabolik. **81.** Faqat sinusoidaning uchlari chizuvchi parallel. **82.** Ikkita nuqta: ellipsoidning aylanish o‘qlari bilan kesish nuqtalari **83.** Paraboloidning uchlari.

84. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ ($p>q>0$) paraboloidning ikkita dumaloqlanish nuqtasi bor: $A_{1,2}(0,\pm\sqrt{pq-q^2},\frac{p-q}{2})$. **85.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ($a>b>c>0$), ellipsoidda to‘rtta dumaloqlanish nuqtasi mavjud: $A_{1-4}(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},0,\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}})$.

86. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ ($a>b>c>0$) ikki pallali giperboloidda to‘rtta dumaloqlanish nuqtasi mavjud: $A_{1-4}(0,\pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}},\pm c\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}})$. **89**. Masalan, ushbu $y=x^4$ chiziqni Oy o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan sirt. **90**. Masalan, ushbu $y=x^4$ silindrda Oz o‘qining barcha nuqtalari yassilanish nuqtalaridan iborat bo‘ladi.

5 §

1. $Mdu+Ndv=0, Ldu+Mdv=0$. **2.** $LR-MQ+NP=0$.
4. $(L\frac{\partial f}{\partial v}-M\frac{\partial f}{\partial u})du+(M\frac{\partial f}{\partial v}-N\frac{\partial f}{\partial u})dv=0$. **6.** $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=C_1$. **7.** $\vec{b}(1,0,-1)$.
8. $(LB-MA)du+(MB-NA)dv=0$. **10.** $v=arctgu+C$. **15.** Agar aylanma sirtni tenglamasini $x=f(u)\cos v,\ x=f(u)\sin v,\ z=\varphi(u)$ ko‘rinishda olsak, u holda $(f'\varphi''-f''\varphi')du^2+f\varphi'dv^2=0$. **16**. $u\pm v=const$. **18**. To‘g‘ri chiziqli yasovchilari va ularning ortogonal trayektoriyalari, ya’ni, vint chizig‘i. **19**. To‘g‘ri chiziqli yasovchilari. **29**. To‘g‘ri chiziqli yasovchilari va ularning ortogonal trayektoriyalari. **30**. To‘g‘ri chiziqli yasovchilari va markazi konik sirtning uchida joylashgan ixtiyoriy radiusli sfera bilan konik sirtning kesishish chizig‘i. **31.** Parallel va meridianlar. **32.** Koordinata chziqlari. **33.** To‘g‘ri chiziqli yasovchilari va ularning ortogonal trayektoriyalari. **34.** Agar gelikoid tenglamasini $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=av$ ko‘rinishda olsak, egrilik chiziqlarining tenglamasi $(a^2+u^2)dv^2-du^2=0$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bundan $v=\pm\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+c$ tenglikni hosil qilamiz. **35**. Elliptik paraboloidning tekisliklar bilan kesimlari hamda $\begin{cases}\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\\ \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{qC}=\frac{q-p}{1+C},\ (C\neq 0)\end{cases}$.

40. $R=r(s)+R_1m(s)$, bu yerda $k_1=\frac{1}{R_1}$ sirtning berilgan chiziq yo‘nalisidagi bosh egriligi. **44**. Faqat aylanma ellipsoid uchun mumkin. **57.** Sferaning katta aylanalari. **65**. $k_g = \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2}}{Rr}$. **66.** $k_g = \dfrac{|u|}{u^2 + a^2}$. **67**. $k_g\big|_{u=c} = \dfrac{|u|}{u^2 + f'^2}$, $k_g\big|_{v=c} = 0$.

72. Gelikoid tenglamasini $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ ko‘rinishda olamiz. $v = const$ gelikoidning to‘g‘ri chiziqli yasovchilari geodezik chiziqlari bo‘ladi. $dv \neq 0$ bo‘lgan holda geodezik chiziq $\dfrac{d^2u}{dv^2} - \dfrac{2u}{a^2+u^2}\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2 - u = 0$ tenglama bilan aniqlanadi. Bu tenglamani yechib $v = \displaystyle\int \frac{du}{\left(a^2+u^2\right)\sqrt{C_1 - \dfrac{1}{a^2+u^2}}} + C_2$ tenglikni hosil qialmiz. **73**. Psevdosferaning birinchi kvadratik formasini $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ ko‘rinishda olamiz. U holda geodezik chiziqlarning differensial tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{ds^2} - \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 + \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2x}{ds^2} - \dfrac{2}{y}\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dx}{ds} = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani chiziqlar qanoatlantirishi ma’lum.

Agar $x \neq const$ bo‘lsa, bu sistemani $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{1}{y} = 0$ tenglama bilan almashtirish mumkin. Natijada, hosil bo‘lgan tenglamaning umumiy yechimi $\left(x - C_2\right)^2 + y^2 = C_1^2$ topiladi.

6 §

1. $x^2 + y^2 = C$ - konsentrik aylanalar va $O(0;0)$ nuqta. **2**. $x^2 - y^2 = C$ - parabolalar va ularning asimptotalari. **3**. $y = Cx^2$ - parabolalar va $y = 0$ to‘g‘ri chiziq. **4**. $\left(x^2 + y^2\right)C = 2x$ aylanalar va to‘g‘ri chiziq. **6**. $x + y + z = C$ parallel tekisliklar. **7**. $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ - konsentrik sferalar. **8**. $x^2 + y^2 - z^2 = C^2$ - bir pallali va ikki pallali giperboloidlar va ularning umumiy asimptotik konusi.
10. 1. **11**. 5. **12**. $(0;0), (1;1)$. **13**. $N(7;2;1)$.
14. $a)$ $(2x - y - z)\vec{i} + (4y + z - x)\vec{j} + (6z - x + y)\vec{k}$.
15. $3\left(x^2 - \alpha zy\right)\vec{i} + 3\left(y^2 - \alpha zx\right)\vec{j} + 3\left(z^2 - \alpha xy\right)\vec{k}$.

16. $e^{x+y+z}\left[yz(x+1)\vec{i}+xz(y+1)\vec{j}+xy(z+1)\vec{k}\right]$. **17**. $a)\ \dfrac{1}{1+x^2}\vec{i}+\dfrac{1}{1+y^2}\vec{j}+\dfrac{1}{1+z^2}\vec{k}$.

18. $9\vec{i}-3\vec{j}$. **19**. $|grad\,u|=6,\ \cos\alpha=\dfrac{2}{3},\ \cos\beta=\dfrac{2}{3},\ \cos\gamma=\dfrac{1}{3}$. **21**. $\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

22. $\cos\varphi=-\dfrac{8}{2025}$. **23**. $\dfrac{\pi}{4}$. **24**. O‘sadi; 12. **25**. $M_1\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{1}{4}\right), M_2\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{9}{4}\right)$.

26. $a=b=c$ bo‘lsa, $\dfrac{2u}{r}$; bu yerda $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **27**. Agar $gradu\perp gradv$ bo‘lsa, $\dfrac{gradu\cdot gradv}{|gradv|}$. **35**. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ bo‘lganligi uchun:

$$grad\,r=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}=\frac{\vec{r}}{r}.$$

36. $f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$. 37. $nr^{n-2}\vec{r}$. **38**. $-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$. **39**. $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$. **41**. $\dfrac{\vec{a}(\vec{b},\vec{r})-\vec{b}(\vec{a},\vec{r})}{(\vec{b},\vec{r})^2}$.

42 $2\vec{r}(\vec{c},\vec{c})-2\vec{c}(\vec{c},\vec{r})=2\vec{c}\times(\vec{r}\times\vec{c})$. **47**. $grad\,r=\dfrac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$.

49. $\varphi\, e_r + \overline{e}_\varphi + \overline{e}_z$. **50**. $z\varphi\vec{e}_r+z\vec{e}_\varphi+r\varphi\vec{e}_z$. **51**. $\vec{e}_r+\dfrac{z\cos\varphi}{r}\vec{e}_\varphi+\sin\varphi\vec{e}_z$.

52. $2r\vec{e}_r-\dfrac{z\sin\varphi}{r}\vec{e}_\varphi+\cos\varphi\,\vec{e}_z$. **53**. $3r^2\vec{e}_r+\dfrac{z\sin2\varphi}{r}\vec{e}_\varphi+\sin^2\varphi\vec{e}_z$.

54. $grad\,u=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\dfrac{1}{\rho\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$. **55**. $\varphi\vec{e}_\rho+\dfrac{1}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi$. **56**. $\theta\vec{e}_\rho+\vec{e}_\theta$.

57. $\theta\varphi\vec{e}_\rho+\varphi\vec{e}_\theta+\dfrac{\theta}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi$. **58**. $\theta\varphi\vec{e}_\rho+\varphi\vec{e}_\theta+\dfrac{\theta}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi$. **59**. $\vec{e}_\rho+\dfrac{\varphi\cos\theta}{\rho}\vec{e}_\theta-\dfrac{\theta}{\rho}\vec{e}_\varphi$.

60. $x^2+y^2=C_1^2,\ z=C_2$. **61**. $y=C_1x,\ z=C_2x^2$. **62**. $x-y=C_1xy,\ x-z=C_2xz$.

63. $a)\ x^2-y^2=C_1,\ z=C_2x^2$. **64**. $a)\ x=C_1y,\ z=C_2x$. **65**. $yz+3+2z$.

66. $a)\ 12xy^2+4x^3-6xz$. **72**. 3. **73**. $div(f(r)\vec{r})=f(r)div\,\vec{r}+\vec{r}\cdot grad\,f(r)$; $div\,\vec{r}=3,\ grad\,f(\vec{r})=f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$ ekanligidan $div(f(r)\vec{r})=3f(r)+rf'(r)$. **74**. $\dfrac{2}{r}$.

75. $(n+s)r''$. **77**. $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$. **78**. $u\Delta u+(gradu)^2$.

79. $u\Delta u+grad\,u\cdot grad\,v$. **80**. $\dfrac{(\vec{c},\vec{r})}{r}$. **81**. $2(\vec{c},\vec{r})$. **82**. $f'(r)\dfrac{(\vec{c},\vec{r})}{r}$. **83**. 0. **84**. $(\vec{c},\vec{c}_1)$.

85. $4(\vec{c},\vec{c}_1)$. **86**. 1. **87**. 2. **88**. $\dfrac{x+y+z}{xyz}$. **89**. $div(gradf(r))=f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)=0$.

Bu tenglamaning umumiy yechimi $f(r)=c_1+\dfrac{c_2}{r}$.

91. $div\,\vec{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right].$

91. $div\,\vec{a} = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(a_\rho \rho^2 \sin\theta\right) + \rho\frac{\partial}{\partial \theta}\left(a_\theta \sin\theta\right) + \rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right].$

92. $\left(x^2 - 2xz\right)\vec{i} + \left(y^2 - 2yx\right)\vec{j} + \left(z^2 - 2yz\right)\vec{k}$. **92.** $a)\,\vec{i} + (xy - 2x)\vec{j} + (2 - xz)\vec{k}$.

98. $\vec{o}$. **99.** $\vec{o}$. **100.** $-2c$. **101.** $[\vec{c} \times \vec{r}]$.**102**$[\vec{c}_1 \times \vec{c}]$. **103.** $[\vec{c}_1 \times \vec{c}]$.**104.** $\vec{o}$.

105. $\frac{f'(r)}{r}[\vec{r} \times \vec{c}]$.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. A. Ya. Narmanov. Differensial geometriya. –Toshkent “Universitet”, 2003, 184 b.

2. M. A. Sobirov, A. Yo. Yusupov. Differensial geometriya kursi. – Toshkent “O‘quvpeddavnashr”, 1959, 422 b.

3. A. Ya. Narmanov, V. I. Pshenichnov, N.M.Jabborov, A. S. Sharipov. Umumiy topologiyadan mashq va masalalar to‘plami. –Toshkent. “Universitet”, 1996, 52 b.

4. И. В. Белько и др. Сборник задач по дифференциальной геометрии. – М.: Наука. 1979, 272 с.

5. А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёв, А.Т. Фоменко. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд–во МГУ, 1981, 184 с.

MUNDARIJA

Narmanov Abdigappar Yakubovich, Sharipov Anvarjon Soliyevich,
Aslonov Jasurbek Orziyevich

DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA KURSIDAN
MASALALAR TO‘PLAMI
(O‘quv qo‘llanma)

Muharrirlar: D. Akmalova, S.Qurbonov
Musahhih: D. Tolipov

Bosishga ruxsat etildi 22.04.2014 yil. Bichimi 60x84 1/16. Nashriyot bosma tabag‘i 13,8. Shartli bosma tabag‘i 21,0. Bahosi shartnoma asosida. Adadi 300 nusxa. Buyurtma № .

“Universitet” nashriyoti. Toshkent-100174. Talabalar shaharchasi, Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zMU ma‘muriy binosi.

O‘zbek-Amerika qo ‘shma korxonasining “GROTEKS” bosmaxonasida bosildi