ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
ALGEBRA VA GEOMETRIYA KAFEDRASI
5 460100 MATEMATIKA fanlari bakalavri ixtisosligi

G'.A.Xasanov, X.F.Sharipov

DIFFERENTSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA

fanidan ma'ruzalar matni

I-qism

Universitet o'quv-uslubiy
kengashi tominidan nashrga
tavsiya etilgan

SAMARQAND – 2014

G’.A.Xasanov, X.F.Sharipov. Differensial geometriya va topologiya fani bo’yicha ma’ruzalar matni. I-qism - Samarqand: 2014 y., 88 bet.

Mazkur ma’ruzalar matnida differensial geometriya va topologiyaning asoslariga bag'ishlangan. U umumiy topologiyaning elementlarini, vektor funksiyalar ustida amallarni, chiziqlar nazariyasining asosiy tushunchalari, u egri chiziqli koordinanatalar sistemasi, riman metrikasi, sirtlar nazariyasini o'z ichiga oladi o'z ichiga oladi.

Egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Riman metrikasi.

REJA

- Egri chiziqli koordinatalar sistemasi.
- Egri chiziqli koordinatalar sistemasiga doir misollar.
- Egri chiziqli koordinatalar sistemasida yoy uzunligini topish.
- Riman metrikasi tushunchasi.

Tayanch iboralar: egri chiziqli koordinatalar, diiffeomorfzm, koordinata chiziqlari, qutb, silindrik, sferik koordinatalar sistemasi, riman metrikasi, riman metrikasida yoy uzunligi.

Adabiyotlar: [3], 3-35, [6], 7-36, [7], 167-168.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Egri chiziqli koordinatalar sistemasi

Dekart koordinatalari x^1, x^2, x^3 bo'lgan uch o'lchamli Evklid fazosi R^3 dagi U sohani (ochiq va bog'liq to'plam) qaraymiz. R_1^3-dekart koordinatalari y^1, y^2, y^3 bo'lgan yana bir uch o'lchamli soha bo'lsin.

Ta'rif 1 $U \subset R^3$ *sohadagi regulyar egri chiziqlar koordinatalar sistemasi deb* U *sohani* R_1^3 *dagi biror* V *sohaga gomeomarf akslantiruvchi cheksiz marta differensiallanuvchi ushbu funksiyalar:*

$$y^1(x^1, x^2, x^3), \quad y^2(x^1, x^2, x^3), \quad y^3(x^1, x^2, x^3)$$

sistemasiga aytiladi. Bu yerda U sohaning har bir nuqtasida quyidagi Yakobi matritsasi determinanti

$$J(f) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

ning noldan farqli bo'lishi talab etiladi.

Shunday qilib, U sohaning har bir nuqtasi P ga uning egri chiziqli koordinatalari deb ataluvchi $y^1(P), y^2(P), y^3(P)$ sonlar uchligi mos qo'yiladi.

Shunday qilib U sohaga ikkita egri chiziqli koordinatalar sistemasi $y^1(P), y^2(P), y^3(P)$ va $z^1(P), z^2(P), z^3(P)$ berilgan bo'lsin, ya'ni ushbu $f: U \to V \subset R_1^3(y^1, y^2, y^3)$; va $g: U \to W \subset R_2^3(z^1, z^2, z^3)$; gomeomarf hamda o'zi va teskarisi defferinsiallanuvchi akslantirishlar berilgan bo'lsin. P nuqtaning $y^1(P), y^2(P), y^3(P)$ koordinatalariga $z^1(P), z^2(P), z^3(P)$ ni mos qo'yuvchi qonuniyat ushbu

$$F: V \to W; \quad F: y^i(P) \to z^i(P), \quad i = 1,2,3$$

akslantirishlantirishkarni aniqlaydi. Ravshanki, $F = gf^{-1}$ bo'ladi va shuning uchun F akslantirish biektiv, o'zi va teskarisi ham differensiallanuvchi bo'ladi. F akslantirish U sohadagi kordinatalarni almashtirish yoki $\{y^i\}$ koordinatalardan $\{z^i\}$ koordinatalarga o'tish funksiyasi deyiladi.

Agar U sohada $y^1(P), y^2(P), y^3(P)$ egri chiziqli koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, bu sohada koordinata chiziqlari aniqlangan bo'ladi:

birinchi koordinata chizig'i $y^1 = t, \quad y^2 = a_2, \quad y^3 = a_3$;

ikkinchi koordinata chizig'i $y^1 = a_1, \quad y^2 = t, \quad y^3 = a_3$;

uchinchi koordinata chizig'i $y^1 = a_1, \quad y^2 = a_2, \quad y^3 = t$.

Bu yerda $a_i = const$, t-parametr.

Egri chiziqli koordinatalar sistemasiga doir misollar

Tekislikdagi qutb koordinatalar sistemasi (ρ,φ) regulyar koordinatalar sistemasi emas. Haqiqatdan, $x^1 = \rho\cos\varphi, x^2 = \rho\sin\varphi$ bo'lgani sababli, bu almashtirishning Yakobi matrisasi quyidagicha bo'lib,

$$dF = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ & \end{pmatrix}$$

uning determinanti $J(F) = \rho$ ga teng. Demak, yakobian koordinatalar boshida nolga teng va regulyarlik sharti koordinatalar boshida buziladi.

Bundan tashqari, bu akslantirish o'zaro bir qiymatli ham emas, chunki (ρ,φ) va $(\rho,\varphi+2\pi)$ ko'rinishdagi nuqtalar tekislikda bitta nuqtaga o'tadi.

Endi qutb koordinatalari regulyar bo'ladigan U sohani ajratamiz. $R^2(\rho,\varphi)$ tekislikni qaraymiz va $y^1 = \rho, y^2 = \varphi$ bo'lsin. U soha sifatida $0 < \varphi < 2\pi,\ \ 0 < \rho < +\infty$ to'plamni; $\mathrm{R}^2(x^1, x^2)$ tekislikda V soha sifatida $x^1 \geq 0,\ \ x^2 = 0$ nurdan tashqari barcha nuqtalarni olsak, ushbu

$$f : U \to V$$

akslantirishni

$$x^1 = \rho\cos\varphi, \quad x^2 = \rho\sin\varphi$$

formulalar orqali aniqlasak, u regulyar koordinatalar sistemasini aniqlaydi.

Fazoda eng sodda egri chiziqli koordinatalar sistemasiga silindrik yoki sferik koordinatalar sistemasi misol bo'la oladi.

Uch o'lchamli fazoda silindrik koordinatalar sistemasini qaraymiz: $x^1 = \rho\cos\varphi, x^2 = \rho\sin\varphi, x^3 = z$. Koordinatalari $y^1 = \rho, y^2 = \varphi, y^3 = z$ bo'lgan $\mathrm{R}^3(y^1, y^2, y^3)$ fazoda, U soha sifatida $0 < \varphi < 2\pi,\ \ 0 < \rho < +\infty,\ \ -\infty < z < +\infty$ to'plamni, V soha sifatida fazodan $\varphi = 0,\ \ \rho \geq 0$ yarim tekislikni chiqarib tashlaganidan qolgan qismini qarasak,

$$f : U \to V \subset \mathrm{R}_1^3(x^1, x^2, x^3); \quad x^1 = \rho\cos\varphi, x^2 = \rho\sin\varphi, x^3 = z$$

akslantirish regulyar koordinatalar sistemasini aniqlaydi. Uning Yakobi matritsasi

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi uch o'lchamli fazoda sferik (ρ,θ,φ) koordinatalar sistemasini qaraymiz: $x^1=\rho\sin\theta\cos\varphi, x^2=\rho\sin\theta\sin\varphi, x^3=\cos\theta,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad 0<\rho<+\infty,\quad 0<\theta<\pi$. Bu koordinatalar sistemasining Yakobiani ushbuga teng:

$$J=\rho^2\sin\theta.$$

Egri chiziqli koordinatalar sistemasida yoy uzunligi

U sohada (y^1,y^2,y^3)-egri chiziqli koordinatalar sistemasi, $\overline{r}=\overline{r}(t)=\{x^1(t),x^2(t),x^3(t)\},\ t\in[a,b]$ silliq chiziq, (x^1,x^2,x^3) - dekart koordinatalari sistemasi bo'lsin. Ma'lumki, chiziq uzunligi

$$s=\int_a^b|\overline{r}'(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx^i(t)}{dt}\right)^2}\,dt$$

formula bilan topilar edi. x^1,x^2,x^3 o'zgaruvchilarni y^1,y^2,y^3 orqali ifodalash mumkin, shu sababli

$$\frac{dx^{'}(t)}{dt}=\frac{dx^i(y^1(t),y^2(t),y^3(t))}{dt}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{dt},\quad i=1,2,3$$

ekanligidan, ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalarda yoy uzunligi uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$s=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial x^k}{\partial y^k}\frac{\partial y^j}{dt}\frac{\partial y^k}{dt}}\,dt=$$

$$\int_a^b\sqrt{\sum_{j,k=1}^{3}g_{jk}(y^1,y^2,y^3)\frac{\partial y^j}{dt}\frac{\partial y^k}{dt}}\,dt=,$$

bunda

$$g_{jk}(y^1,y^2,y^3)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial x^k}{\partial y^k},\quad j,k=1,2,3.$$

Shunday qilib y^1,y^2,y^3 koordinatalar sistemasida yoy uzunligi $G=(g_{jk})$ simmetrik matritsa orqali aniqlanar ekan, bu yerda g_{jk}- y^1,y^2,y^3 o'zgaruvchilarning silliq funksiyasi. Agar F akslantirish U sohadagi (y^1,y^2,y^3) koordinatalardan (x^1,x^2,x^3) dekart koordinatalar sistemasiga o'tish funksiyasi bo'lsa, u holda $G=CC^T$, bu yerda $C=dF=\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$, F -akslantirishning Yakobi matritsasi, C^T- C matritsaning transponirlash natijasidir. Agar koordinatalarni almashtirsak, G matritsa xuddi kvadratik matritsasi kabi o'zgaradi.

Endi qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemasida yoy uzunligi formulalarini keltiramiz.

1) Tekislikdagi (ρ,φ) qutb koordinatalari sistemasida

$$dF=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\end{pmatrix}$$

bo'lgani uchun G matritsa quyidagicha bo'ladi.

$$G=dFdF^T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\cos\varphi\\ \sin\varphi & \rho\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho^2\end{pmatrix}.$$

Demak, qutb koordinatalarida berilgan $\bar{r}(t)=(\rho(t),\varphi(t))$ chiziq uzunligi

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$$

formula bilan topiladi.

2) Fazoda silindirk koordinatalar sistemasidan dekart koordinatalariga o'tish funksiyasining Yakobi matritsasi

$$dF=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

bo'lganligi uchun G matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \rho^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Demak, silindrik koordinatalarda berilgan $\bar{r}(t)=(\rho(t),\varphi(t),z(t))$ chiziq uzunligi

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

formula bilan topiladi.

3) Fazoda sferik koordinatalar sistemasidan dekart koordinatalariga o'tish funksiyasining Yakobi matritsasi

$$dF = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

bo'lganligi uchun G matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Demak, sferik koordinatalarda berilgan $\bar{r}(t) = (\rho(t), \theta(t), \varphi(t))$ chiziq uzunligi

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt$$

formula bilan topiladi.

Riman metrikasi tushunchasi

Biz U sohadagi har bir egri chiziqli koordinatalar sistemasi (y^1, y^2, y^3) ga elementlari silliq funksiyalardan iborat $G(y) = (g_{mp}(y))$ matritsani mos qo'ydik. bu matritsa koordinatalarni almashtirishda har bir nuqtada kvadratik formaning matritsasi kabi o'zgaradi. Bu matritsa yordamida egri chiziqli koordinatalarda chiziq yoy uzunligini topish mumkin. Endi bunday xossalarga ega funksiyalar majmuini qaraymiz. Soddalik uchun faqat uch o'lchamli Evklid fazosini qarayiz.

Ta'rif 2 *Evklid fazosinining U sohasidagi har bir (y^1, y^2, y^3) egri chiziqli koordinatalar sistemasiga mos qo'yilgan $g_{mp}(y)$ funksiyalar quyidagi shartlarni:*

1) $g_{mp}(y) = g_{pm}(y)$,

ya'ni $G(y) = (g_{mp}(y))$ matritsa simmetrik;

2) $G(y) = (g_{mp}(y))$ xosmas, (ya'ni $\det G(y) \neq 0$) va musbat aniqlangan;

3) Koordinatalarni almashtirish $F: \{y^i\} \to \{z^i\}$ da $G(y)$ matritsa kvadratik forma matritsasi kabi o'zgaradi:

$$G(z) = (dF)G(y)(dF)^T$$

qanoatlantirsa, U sohada $G(y) = (g_{mp}(y))$ riman metrikasi berilgan deyiladi.

Ta'rif 3 *Agar U sohada $G(y) = (g_{mp}(y))$ riman metrikasi va (y^1, y^2, y^3)*

koordinatalar sistemasida $\overline{r}(t)=\{y^1(t),y^2(t),y^3(t)\},\ \ t\in[a,b]$ *silliq chiziq berilgan bo'lsa, uning* $\overline{r}(a)$ *nuqtasigacha uzunligi deb ushbu*

$$s=\int_a^b\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}(y)\frac{\partial y^i}{dt}\frac{\partial y^j}{dt}}dt$$

songa aytiladi.

Agar biror $P\in U$ nuqtada $\overline{r}_1(t)$ va $\overline{r}_2(t)$ chiziqlar kesishib, ya'ni $\overline{r}_1(0)=\overline{r}_2(0),$ va $\overline{r}_1^{\,'}(0)\neq 0,\ \overline{r}_2^{\,'}(0)\neq 0$ bo'lsa, ular orasidagi burchak deb ushbu

$$\cos\varphi=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{3}g_{ij}(y)\frac{\partial y_1^i}{dt}\frac{\partial y_2^j}{dt}}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{3}g_{ij}(y)\frac{\partial y_1^i}{dt}\frac{\partial y_1^j}{dt}}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{3}g_{ij}(y)\frac{\partial y_2^i}{dt}\frac{\partial y_2^j}{dt}}}$$

tenglikdan aniqlanuvchi φ burchakga aytiladi.

Ko'pincha, yoy uzunligi o'rniga yoy differensiali uchun formula yozish qulay bo'ladi:

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}(y)\frac{\partial y^i}{dt}\frac{\partial y^j}{dt}$$

odatda, ds^2 ham metrika deb aytiladi.

Savollar

- Egri chiziqli koordinatalar sistemasining ta'rifini ayting.
- Koordinatalarni almashtirish deganda nimani tushunasiz.
- Qutb va silindrik koordinatalarning regulyarlik sohasini toping.
- Sferik koordinatalarning regulyarlik sohasini toping.
- Silindrik koordinatalar sistemasida yoy uzunligini topish formulasini keltirib chiqaring.
- Sferik koordinatalar sistemasida yoy uzunligini topish formulasini keltirib chiqaring.
- Egri chiziqli koordinatalar sistemasida yoy uzunligini topish formulasini keltirib chiqaring.
- Riman metrikasi ta'rifini ayting va misollar keltiring.
- Riman metrikasida yoy uzunligi, chiziqlar orasidagi burchakni topish formulasini yozing.

Sirt tushunchasi

REJA

- Sodda sirt tushunchasi.
- Sodda sirtlarga doir misollar.
- Lokal sodda sirt tushunchasi.

Tayanch iboralar: ochiq va bog'liq to'plam, soha chegarasi, gomeomorfizm, sodda sirt, sirt tenglamasi, koordinata chiziqlari, lokal sodda sirt.

Adabiyotlar: [2], 73-74, [6], 60-64, [7], 58-66.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Sodda sirt tushunchasi

Tekislikda D to'plam ochiq va bog'liq bo'lsa, u soha deyiladi. Biz odatda chiziqli bog'langan sohalarni qaraymiz. Agar P nuqtaning ixtiyoriy atrofida D ga tegishli bo'lgan va D ning to'ldiruvchisiga tegishli bo'lgan nuqtalar bo'lsa, P nuqta D ning chegaraviy nuqtasi deyiladi. Barcha chegaraviy nuqtalar to'plami ∂D kabi belgilanadi. Topologiyada biz $\bar{D}$ to'plamni D ning yopig'i deb atagan edik.

Tekislikdadagi yopiq sodda L chiziq tekislikni ikkita qismga ajratadi va bu qismlardan biri chegaralangan bo'ladi . Chegaralangan qismning chegarasi L chiziqdan iboratdir. Bu qism L chiziq bilan chegaralangan soha deyiladi. Agar D soha yotuvchi ixtiyoriy chiziq bilan chegaralangan soha ham D da yotsa, D bir bog'lamli soha deyiladi. Masalan, birlik ochiq doira bir bog'lamli soha, lekin soha sifatida birlik doiradan markazi chiqarib tashlangan qismini qarasak, u bir bog'lamli bo'lmaydi.

S-fazodagi to'plam bo'lsin. Agar S to'plam tekislikdagi biror bir bog'lamli D sohaning gomeomorfizmi bo'lsa, S ni sodda sirt deyiladi, ya'ni shunday gomeomorfizm F mavjud b'lib,

$$F: D \to S, \quad F(D) = S,$$

bo'ladi.

D-bir bog'lamli sohaning F gomeomorfizmdagi obrazi S bo'lsin, (ya'ni S-sodda sirt). u va v-D sohaga qarashli ixtiyoriy nuqtanuing Dekart koordinatalari, x, y, z- esa (u,v) nuqtaga mos sirt nuqtasining koordinatasi bo'lsin. U holda x, y, z- lar u va v o'zgaruvchilarning funksiyasidir:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = g(u,v), \quad (u,v) \in D. \tag{1}$$

D sohadagi F akslantirishni aniqlovchi (1) tenglamalar sistemasini S sirtning parametrik shakldagi tenglamasi deyiladi. u va v-lar esa sirtdagi egri chiziqli koordinatalar deyiladi.

(1) tnglamalar $u = const$ yoki $v = const$ bo'lganda sirtda yotuvchi chiziqlarni aniqlaydi. Bu chiziqlar sirtning koordinata chiziqlari deyiladi.

Faqatgina u o'zgaruvchi ($v = const$) bo'gan chiqni u koordinata chizig'i, faqatgina v o'zgaradigan ($u = const$) chiqni v koordinata chizig'i deb ham ataladi.

S sirt (1) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Agar φ, ψ, g funksiyalar $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa,

$$\partial S = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = g(u,v), \quad (u,v) \in \partial D\}$$

to'plam S sirtning chegarasi deyiladi.

Agar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$- koordinata o'qlarining birlik vektorlari bo'lsa, (1) tenglamalar sistemasini bitta vektor tenglama bilan almashtirish mumkin:

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = \varphi(u,v)\bar{i} + \psi(u,v)\bar{j} + g(u,v)\bar{k}, \quad (u,v) \in D. \tag{2}$$

Bu holda S sirt vektor tenglama bilan berilgan deyiladi, $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ esa sirtning radiusi vektori yoki qisqacha sirtning vektori deb ham ataladi.

Sodda sirtlarga misollar

A. Faraz qilaylik, bir bog'lamli D sohaning yopig'ida aniqlangan

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}$$

uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin.

U holda bu funksiya grafigi

$$S = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

sosda sirt bo'ladi. Bu sirtning parametrik tenglamalari

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), (x, y) \in D$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamalarning gomeomorfizmni aniqlashini tekshirish qiyin emas.

Endi t deformatsiyalash parametridan bog'liq sirtlar oilasini qaraymiz:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = t \cdot f(u, v), (x, y) \in D, 0 \le t \le 1.$$

t parametrning 0 dan 1 gacha o'zgarishida D soha uzluksiz deformatsiyalanadi: $t = 0$ bo'lganda D sohaga, $t = 1$ bajarilganda esa,

$$z = f(u, v)$$

funksiya grafigi shaklida berilgan S sodda sirtga ege bo'lamiz.

B. Tekislikdagi

$$D = \{(u, v) \in \mathrm{R}^2 : 0 < u < 4\pi, 0 < v < 1\}$$

to'g'ri to'rtburchak bir bog'lamli sohadir. Bu sohada aniqlangan ushbu

$$x = u \cos u, \quad y = u \sin u, \quad z = v$$

funksiyalar fazoda sodda sirtni aniqlaydi.

C. Sirt bir necha xil parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lishi mumkin. Masalan, ushbu

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, \quad u^2 + v^2 < R^2$$

va

$$x = \cos u \cos v, \quad x = \cos u \sin v, \quad z = R \sin u, \quad 0 < u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v \le 2\pi$$

tenglamalar markazi koordinatalar boshida raduisi R ga teng yuqori yarim sferaning turli parametrik tenglamalaridir.

Lokal sodda sirt tushunchasi.

S uch o'lchamli R^3 Evklid fazosidagi biror to'plam, P undagi biror nuqta bo'lsin. P nuqtaning S dagi atrofi deb, S dagi R^3 dan indutsirlangan topologiyaga nisbatan P nuqtani saqlovchi ochiq to'plamga aytiladi, ya'ni S to'plam bilan R^3 dagi

P nuqtani saqlovchi ochiq to'plamning kesishmasiga aytiladi.

Ta'rif 4 *Agar* R^3 *dagi bog'liq to'plam* S *ning har bir nuqtasining* S *da shunday atrofi mavjud bo'lib, bu atrof sodda sirt bo'lsa,* S *to'plam lokal sodda sirt deyiladi.*

Sfera - lokal sodda sirtdir, chunki uning har bir nuqtasining kichik atrofini ko'rsatish mumkinki, bu atrof mos ravishda kiritilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan uzluksiz funksiya grafigi bo'ladi. Lekin, sfera sodda sirt emas.

Aylananing aylana tekisligidagi yotuvchi va u bilan kesishmaydigan o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma sirt tor deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, torni o'zaro perpendikulyar tekisliklarda yotuvchi aylanalarning Dekart ko'paytmasi shaklida tasavvur qilish mumkin. Torning har bir nuqtasining kichik atrofi mavjud bo'lib, bu atrofda torni maxsus tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan uzluksiz funksiya grafigi shaklida tasvirlash mumkin, shuning tor lokal sodda sirtdir.

Lokal sodda sirtlar sinfi amaliyotda uchraydigan barcha sirtlarni qamrab olmaydi. Bu jumlani quyidagi misol tasdiqlaydi.

Lokal sodda bo'lmagan sirtga misol. (u,v) tekislikdagi ushbu

$$D=\{(u,v)\in \mathrm{R}^2 :-2<u<2, \quad 0<v<2\}$$

to'rtburchakda aniqlangan quyidagi

$$x=\frac{u^2-1}{u^2+1}, \quad y=u\frac{u^2-1}{u^2+1}, \quad z=v \tag{3}$$

funksiyalarni qaraymiz.

Koordintatalari (3) tenglamalar yordamida aniqlangan barcha $M(x,y,z)$ nuqtalar to'plami S - yo'naltiruvchisi strofidaning kesmasi

$$x=\frac{u^2-1}{u^2+1}, \quad y=u\frac{u^2-1}{u^2+1}$$

yasovchilari OZ o'qiga parllel bo'lgan silindrik sirtdan iboratdir.

D to'rtburchakning $M_-(-1,v)$ va $M_+(-1,v)$ nuqtalariga mos (3) formulalar yordamida silindrik sirtning bitta nuqtasi $(0,0,v)$ mos keladi.

Shunday qilib, qaralayotgan sirt o'z-o'zini kesishish chizig'iga ega:

$$x=0, \quad y=0, \quad z=v, \quad |v|<2$$

M_- nuqtaning shunday kichik atrofi U_- ni ajratamiz (1 chizmada vertikal shitrixlangan to'rtburchak), bu atrofga (3) formulalar yordamida S_- to'plam mos kelsin.

U_- atrofning turli (u',v') va (u'',v'') nuqtalariga S_- ning turli nuqtalari mos keladi, ya'ni S_--lakal sodda sirt (2-chizma).

Xuddi shunday usul bilan M_+ nuqtaning U_+ atrofini ko'rsatib, unga mas S_+ ning sodda sirt ekanligini ko'rsatish mumkin. Lekin, shunga qaramasdan X nuqtaning S dagi hech qanday atrofi sodda sirt bo'lmaydi (3-chizma).

Shunday qilib, (3) formula bilan aniqlangan ushbu S sirt lokal sodda sirt bo'lmas ekan. Bunday sirtlar umumiy sirtlardir.

Ta'rif 5 *S - lokal sodda sirtda aniqlangan ushbu $h: S \to R^3$ akslantirish quyidagi xossaga ega bo'lsin: har bir $X \in S$ nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, $h: U \to h(U)$ gomeomorfizm bo'lsin (ya'ni, h - lokal gomeomorfizmdir). Lokal sodda sirtning lokal gomeomorfizmdagi obrazi umumiy sirt deyiladi.*

Savollar

- Bir bog'lamli sohani ta'riflang va bir bog'lamli bo'lmagan sohaga misollar keltiring.
- Sodda sirt ta'rifini ayting.
- Sodda sirtning parametrik tenglamasini yozing.
- Sirtdagi koordinata chiziqlari ta'rifini ayting.
- Sodda sirtlarga misollar keltiring.
- Bir necha xil usulda parametrlangan sirtlarga misollar keltiring.
- Lokal sodda sirt ta'rifini ayting va misollar keltiring.
- Lokal sodda bo'lmagan sirtga misol keltiring.

Silliq sirt, sirtning urinma tekisligi va normali. Silliqlikning etarli shartlari

REJA

- Sirtning urinma tekisligi, silliq sirt.
- Silliqlikning etarli shartlari.
- Regulyar sirtlar.
- Urinma tekislik va normal to'g'ri chiziq tenglamalari.

Tayanch iboralar: silliq sirt, urinma tekislik, sirtning normal to'g'ri chizig'i, silliqlikning atarli shartlari, regulyar sirt.

Adabiyotlar: [2], 76-78, [6], 65-68, [7], 67-74.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

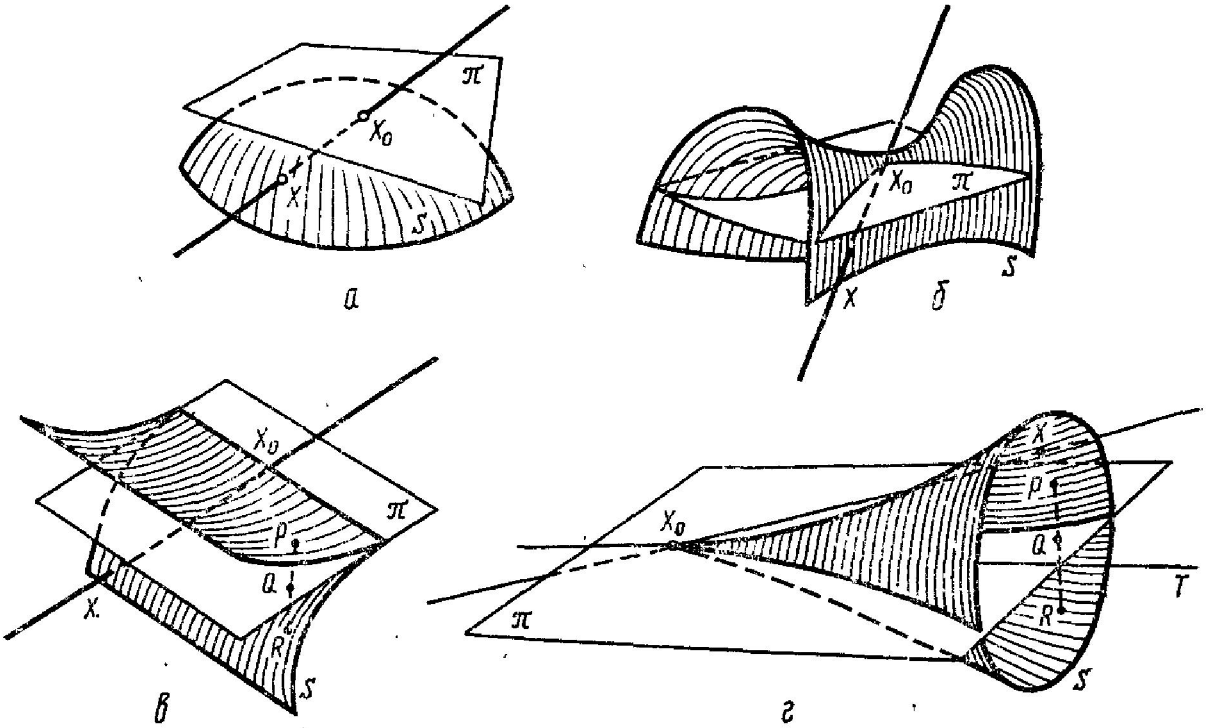
Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Sirtning urinma tekislig, silliq sirt

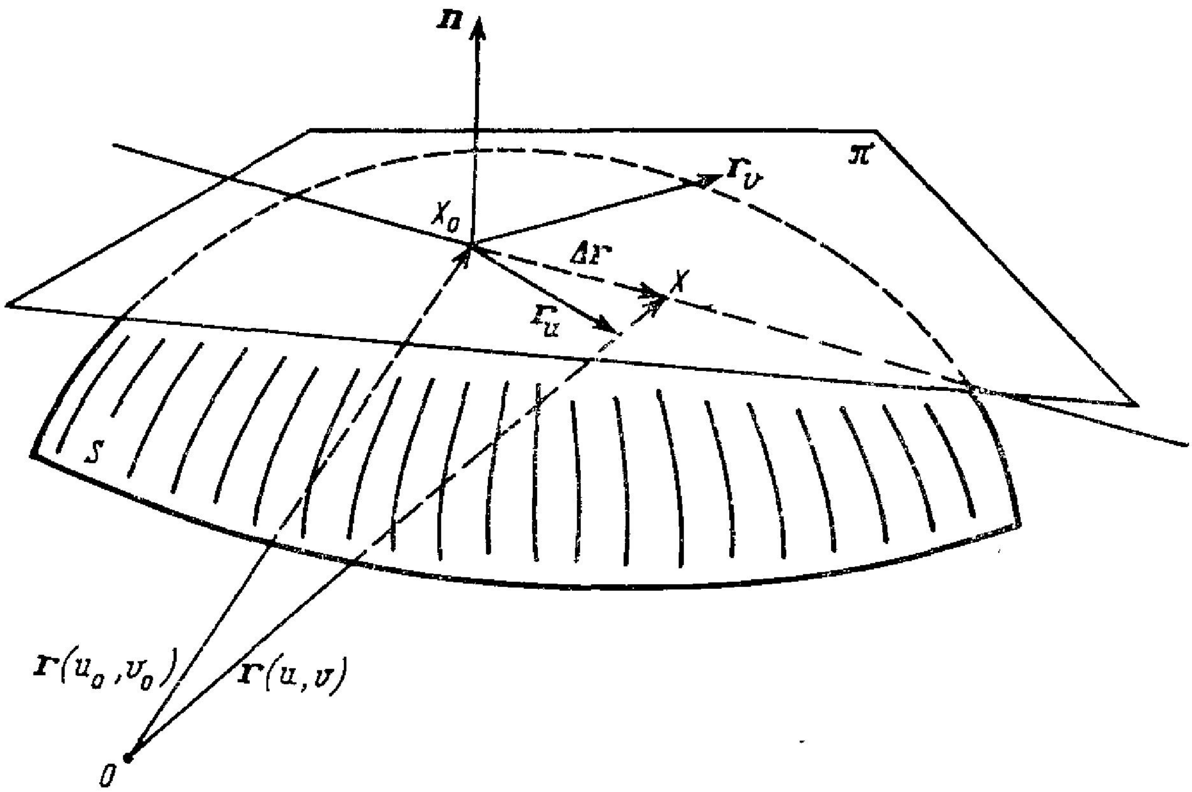
Ta'rif 6 *S sodda sirt, X_0 va X_1 uning turli nuqtalari, π - X_0 nuqta orqali o'tuvchi tekislik bo'lsin. Agar X nuqta X_0 ga intilganda XX_0 to'g'ri chziq va π tekislik orasidagi burchak nolga intilsa, π tekislik S sirtning X_0 nuqtasidagi urinma* *tekisligi deyiladi va $T_{X_0}(S)$ kabi belgilanadi.*

Ta'rif 7 *Agar S sirtning X_0 nuqtasida urinma tekislik T_{X_0} mavjud bo'lib, X_0 nuqtaning S sirtdagi biror atrofi urinma tekislikga bir qiymatli proeksiyalansa, S sirt X_0 nuqtada silliq deyiladi. Silliq bo'lmagan nuqtalar sirtning maxsus nuqtalari deyiladi. Agar sodda sirt o'zining har bir nuqtasida silliq bo'lib, urinma tekisliklar silliq o'zgarsa, sirt silliq deb aytiladi.*



Sirtning urinma tekisligi o'zgarishini quyidagicha tushunish kerak: agar X va Y lar sirtning ixtiyoriy nuqtalari bo'lsa, X nuqta Y ga intilganda $T_X(S)$ tekislik $T_Y(S)$ likga intiladi, ya'ni $T_X(S)$ va $T_Y(S)$ tekisliklarning normal vektorlari orasidagi burchak nolga intiladi.

S silliq sirtning X_0 nuqtasidan $T_{X_0}(S)$ urinma tekislikga perpendikulyar holda o'tuvchi to'g'ri chiziq sirtning X_0 nuqtasidagi normal to'g'ri chizig'i deyiladi.



Silliqlikning etarli shartlari

S sodda sirt $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ vektor tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu funksiya (u_0,v_0) nuqtada differensiallanuvchi va bu nuqtaga sirtning X_0 nuqtasi mos kelsin.

Agar $\bar{r}_u(u_0,v_0)$ va $\bar{r}_v(u_0,v_0)$- vektorlar kollenear bo'lmasa, X_0 nuqtadan $\bar{r}_u(u_0,v_0)$ va $\bar{r}_v(u_0,v_0)$ vektorlarga parallel holda o'tuvchi π tekislik sirtning X_0 nuqtasidagi urinma tekislik bo'lishini ko'rsatamiz. (u,v) nuqtaga sirtning X nuqtasi mos kelsin. $\bar{r}(u,v)$ funksiya (u_0,v_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$\overline{XX_0}=\Delta\bar{r}(u,v)=\bar{r}(u,v)-\bar{r}(u_0,v_0)=\bar{r}_u(u_0,v_0)\Delta u+\bar{r}_v(u_0,v_0)\Delta v+\bar{o}(\rho),$$

va

$$\rho=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2},\quad \rho\to 0\quad va\quad \frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\to 0\quad bo'ladi.$$

$\bar{r}_u(u_0,v_0)$ va $\bar{r}_v(u_0,v_0)$ vektorlarni X_0 nuqtaga qo'yamiz va X_0 nuqtadan bu vektorlar orqali π tekislik o'tkazamiz. Agar $X\to X_0$ bo'lganda XX_0 to'g'ri chiziq va π tekislik orasidagi burchak 90^o ga intilsa, π tekislikning urinma tekislik ekanligini ko'rsatgan bo'lamiz. Buning uchun $\frac{\Delta\bar{r}}{\rho}$ vektor va π tekislikning birlik normal vektori

$\bar{n}$ ning skalyar ko'paytmasini qaraymiz.

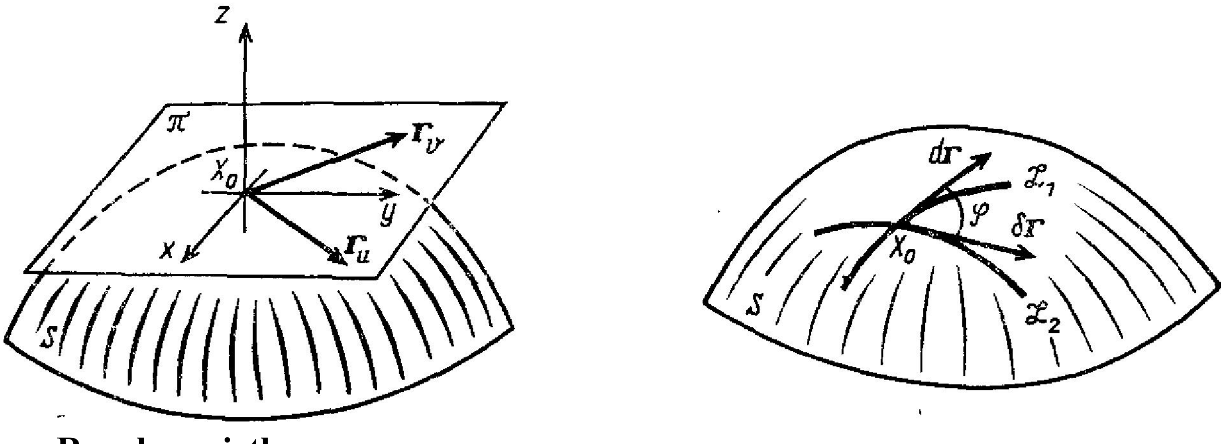
Oxirgi tenglikga asosan $\rho \to 0$ da

$$(\frac{\Delta \bar{r}}{\rho}, \bar{n}) = (\bar{r}_u, \bar{n})\frac{\Delta u}{\rho} + (\bar{r}_v, \bar{n})\frac{\Delta u}{\rho} + (\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}, \bar{n}) = (\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}, \bar{n}) \le |\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}| \to 0$$

bo'ladi, ya'ni π tekislik urinma tekislik ekan.

Shunday qilib, $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ vektor tenglama bilan berilgan funksiya (u_0, v_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, sirtning $X_0(u_0, v_0)$ nuqtasida urinma tekislik mavjud bo'lar ekan. Endi silliqlikning etarli shartlarini keltiramiz.

Teorema 8 *S sodda sirt $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ vektor tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu funksiya (u_0, v_0) nuqtada differentsiallanuvchi va bu nuqtaga sirtning X_0 nuqtasi mos kelsin. Agar $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ va $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ - vektorlar chizig'li bog'lanmagan bo'lib, $\bar{r}_u$ va $\bar{r}_v$ vektor funksiyakar (u_0, v_0) nuqtada uzluksiz bo'lsa, S sirt $X_0(u_0, v_0)$ nuqtada silliq bo'ladi. Agar $\bar{r}(u,v)$ vektor funksiya o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz hususiy hosilalari $\bar{r}_u$ va $\bar{r}_v$ mavjud bo'lib, $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \ne 0$ bo'lsa, S sirt silliq bo'ladi.*



Regulyar sirtlar

Ta'rif 9 *Agar S sirt $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ tenglama bialn b erilgan bo'lib, D sohada $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ funksiya C^k, $k \ge 2$ sinfga qarashli (ya'ni $\bar{r}(u,v)$ funksiya k - tartibli uzluksiz hususiy hosilalarga ega) hamda $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \ne 0$ bo'lsa, S sirt C^k sinfga qarashli regulyar sirt deyiladi.*

$\bar{r}_u \times \bar{r}_v \ne 0$ shart $\bar{r}_u$ va $\bar{r}_v$ vektorlarning kolleniar emasligini anglatadi, ya'ni yakobi matritsasi

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ & & \end{pmatrix}$$

ning rangi 2 ga teng. Bu holda, oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko'ra sirt har bir nuqtasining atrofida funksiya sifatida berilishi mumkin. Masalan, yakobi matritsasining ushbu minori

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \\ & \end{vmatrix}$$

biror (u,v) nuqtada noldan farqli bo'lsa, bu nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, bu atorfda

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

tenglamalarni u va v larga nisbatan echish mumkin:

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y).$$

So'ngra,

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

tenglamalarni quyidagicha yozamiz:

$$z = z(u(x,y), v(x,y))$$

yoki qisqacha

$$z = f(x,y).$$

Agar $F(x,y,z)$ haqiqiy qiymatli funksiya k - tartibli uzluksiz hususiy hosilalarga ega bo'lsa, uni C^k sinfga qarashli deyiladi.

Regulyar sirt

$$S = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : F(x,y,z) = 0, \quad gradF(x,y,z) \neq 0\}$$

shaklida ham berilishi mumkin. Har bir $M \in S$ nuqtaning biror atrofida $F(x,y,z) = 0$ tenglama $gradF(M) \neq 0$ shartga asosan, boronta o'zgaruvchiga nisbatan echilgan holda yozilishi mumkin. Haqiqatan,

$$gradF = \{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\} \neq 0,$$

masalan, $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$ bo'lsin. U holda $F(x,y,z) = 0$ tenglamani $z = f(x,y)$ shaaklida yozish mumkin.

Shunday qilib, regulyar sirt quyidagi uch xil shaklda berilishi mumkin ekan:

1) funksiya grafigi sifatida:

$$z = f(x, y), \quad f \in C^k;$$

2) oshkormas shaklda:

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : F(x, y, z) = 0, \quad gradF(x, y, z) \neq 0\};$$

3) parametrik shaklda:

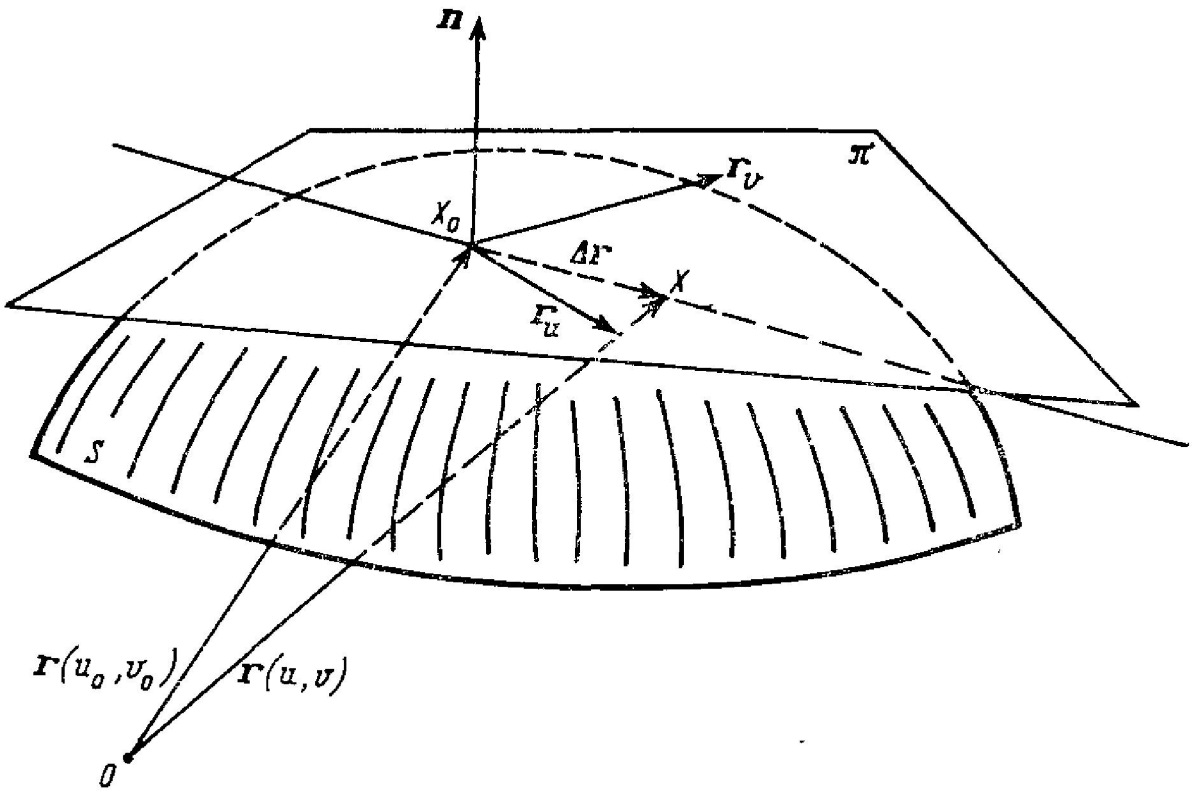
$$\overline{r} = \overline{r}(u, v), \quad \overline{r} \in C^k, \overline{r}_u \times \overline{r}_v,$$

ya'ni

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

$$rk\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

Urinma tekislik va normal to'g'ri chiziq tenglamalari



Regulyar sirtning urinma tekisligi tenglamalari sirtning berilish usullariga mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

1) sirt funksiya grafigi sifatida berilganda:

$$z - f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0);$$

2) sirt oshkormas shakldа berilganda:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, y_0)(z - z_0) = 0;$$

3) sirt parametrik shaklda berilganda:

$$(\overline{R} - \overline{r})\overline{r}_u\overline{r}_v = 0$$

yoki

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Sirtning berilgan nuqtasidan

$$\overline{m} = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{|\overline{r}_u \times \overline{r}_v|}$$

vektor uo'nalishida o'tuvchi normal to'g'ri chiziqning tenglamalari esa mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

1)

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_x'(x_0, y_0)} = z - z_0;$$

2)

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, y_0)};$$

3)

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

bu yerda barcha hususiy hosilalar (u_0, y_0) nuqtada hisoblanadi.

Savollar

- Urinma tekislik ta'rifini ayting va tenglamasini tuzing.
- Sirt qachon silliq deyiladi.

• Sirt normali ta'rifini ayting va tenglamasin yozing.
• Sirt silliqligining etarli shartini ayting.
• Vektor funksiya differentsiallanuvchanligi va urinma tekislik orasidagi bog'lanishni tushuntiring.
• Parametrik shaklda berilgan regulyar sirtning ta'rifini ayting.
• Oshkarmas shaklda berilgan regulyar sirtning ta'rifini ayting.
• Regulyar sirtning berilish usullarini ayting.

Sirtning birinchi kvadratik formasi. Sirt ustudagi chiziq yoyining uzunligi

REJA

- Sirtning birinchi kvadratik formasi. Misollar.
- Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi.

Tayanch iboralar: silliq sirt, musbat aniqlangan kvadratik forma, sirtning birinchi kvadratik formasi, funksiya shaklida berilgan sirt, aylanma sirt, sirtdagi silliq sirt, yoy uzunligi.

Adabiyotlar: [2], 108-110, [7], 74-75.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Sirtning birinchi kvadratik formasi. Misollar.

S tenglamasi $\overline{r}=\overline{r}(u,v), \quad (u,v)\in D,$ bo'lgan silliq sirt va $\overline{r}_u \times \overline{r}_v \neq 0$ bo'lsin. Sirtning birinchi kvadratik formasi deb ushbu

$$I = d\overline{r}^2$$

ifodaga aytiladi. $\overline{r}(u,v)$ vektor funksiyaning differentsiali

$$d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$$

bo'lganligi sababli, uning skalyar kvadrati quyidagiga teng:

$$d\overline{r}^2 = (\overline{r}_u du + \overline{r}_v dv)^2 = \overline{r}_u^2 du^2 + 2(\overline{r}_u, \overline{r}_v) du dv + \overline{r}_v^2 dv^2.$$

Bu ifoda S sirtning har bir nuqtasida du va dv differentsiallarning kvadratik formasidir. Birinchi kvadratik forma musbat aniqlangandir. Haqiqatdan, $\overline{r}^2 > 0$ va birinchi kvadratik forma determinanti

$$\overline{r}_u^2 \overline{r}_v^2 - (\overline{r}_u, \overline{r}_v)^2 = (\overline{r}_u \times \overline{r}_v)^2 > 0$$

bo'lgani uchun I musbat aniqlangandir.

Odatda, birinchi kvadratik forma koeffitsientlari uchun quyidagicha belgilashlar ishlatiladi:

$$E = \overline{r}_u^2, \quad F = (\overline{r}_u, \overline{r}_v), \quad G = \overline{r}_v^2.$$

Shu sababli, birinchi kvadratik formani quyidagicha yozish mumkin:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad EG - F^2 > 0.$$

Endi koeffitsentlarning koordinatalarga nisbatan ifodalarini keltiramiz.

$\overline{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}, \quad (u,v) \in D,$ hamda $\overline{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}, \quad \overline{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\},$ bo'lgani uchun koeffitsientlarni ushbu

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$
$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

formulalarni topish mumkin.

Misollar

1. Sirt differentsiallanuvchi $z = f(x,y)$ funksiya grafigi shaklida berilgan bo'lsin. O'zgaruvchi nuqtaning radius vektorini quyidagicha yozamiz:

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v) = \{x, y, f(x,y)\}.$$

U holda

$$\overline{r}_u = \overline{r}_x = \{1, 0, f_x\}, \quad \overline{r}_v = \overline{r}_y = \{1, 0, f_y\},$$

ekanligidan

$$E = \overline{r}_u^2 = 1 + f_x^2, \quad F = \overline{r}_u \overline{r}_v = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2$$

kelib chiqadi va birinchi kavdratik forma ushbu

$$I = (1+f_x^2)dx^2 + f_x f_y dxdy + (1+f_y^2)dy^2$$

shaklga ega bo'ladi.

2. Aylanma sirtlar, xOz tekisligida joylashgan L chiziqning Oz o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan sirtni qaraylik. Farz qilaylik L chiziq

$$x = f(u) > 0; \quad z = g(u)$$

parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsin. ($f(u) > 0$ shart chiziqning aylanish o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtni qaraylik.) Sirtdagi biror P nuqtaning holatini aniqlash uchun u parametrning qiymatini, ya'ni berilgan L chiziqdagi P_0 nuqta va L chziqning Oz o'qi atrofida aylanish burchagi v ni bilish etarlidir. P nuqtaning x, y, z koordinatalari u va v orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u).$$

Endi aylanma sirtning birinchi kvadratik formasini topomiz. Quyidagilardan

$$\overline{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\} = \{f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u),\}$$
$$\overline{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\} = \{-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0,\}$$

ushbuni hosil qilamiz:

$$E = f'^2 + g'^2, F = 0, G = f'^2.$$

Demak

$$I = (f'^2 + g'^2)du^2 + f'^2 dv^2.$$

Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi

$\overline{r} = \overline{r}(u,v)$ tenglama bilan berilgan S sirtdagi L chiziq quyidagicha berilishi mumkin. Faraz qilaylik, $u = u(t)$, $v = v(t)$ - $t \in [a,b]$ parametrning uzluksiz differetsiallanuvchi funksiyalari bo'lsin. U holda

$$\overline{r}(t) = \overline{r}(u(t), v(t))$$

tenglama S sirtda yotuvchi chiziqni aniqlaydi. Bu chiziqning yoy uzunligini topaylik. Yoy uzunligi differentsialini topish formulasiga ko'ra

$$ds = |d\overline{r}| = |\overline{r}'(u(t), v(t))|\, dt = \sqrt{d\overline{r}^2} = \sqrt{I},$$

bu yerdan esa ushbuga kelamiz:

$$s = \int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int_a^b \sqrt{Eu_t'^2 + 2Fdu_t' dv_t' + Gdv_t'^2}\, dt$$

Savollar

• Sirtning birinchi kvadratik formasi ta'rifini ayting.

• Sirtning birinchi kvadratik formasi musbat aniqlanganligini ko'rsating.

• Sirtning birinchi kvadratik formasi koeffitsientlari uchun ifodalarni keltirib chiqaring.

• Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi formulasini keltirib chiqaring.

• Aylanma sirtning birinchi kvadratik formasini toping.

• Funksiya grafigi shaklida berilgan sirtning birinchi kvadratik formasini toping.

Sirtdagi chiziqlar orasidagi burchak. Sirt yuzi. Sirtning ichki geometriyasi

REJA

- Sirt ustidagi chiziqlar orasidagi burchak.
- Sirtdagi soha yuzi.
- Sirtning ichki geometriyasi.

Tayanch iboralar: urinma vektor, urinma tekislik, birinchi kvadratik forma, skalyar ko'paytma, izometrik sirtlar.

Adabiyotlar: [2], 110-121, [7], 75-79.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Sirt ustidagi chiziqlar orasidagi burchak

Biz birinchi kvadratik forma $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ ning matritsasi $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ ning determinanati noldan farqli va $E>0$, $EG-F^2>0$ ekanligini o'tgan mavzuda ko'rsatgan edik. Shu sababli birinchi kvadratik forma sirtning har bir nuqtasidagi urinma tekislikda ko'paytmani aniqlaydi. Agar $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar $\overline{r}=\overline{r}(u,v)$ sirtning $\overline{r_0}=(x_0,y_0,z_0)=\overline{r}(u_0,v_0)$ nuqtasidagi urinma vektorlari bo'lsa, ular $\overline{r_u}$ va $\overline{r_v}$ vektorlar orqali ifodalanadi:

$$\overline{a}=a_1\overline{r_u}+a_2\overline{r_v};\quad \overline{b}=b_1\overline{r_u}+b_2\overline{r_v};$$

Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi sifatida ushbu

$$\begin{aligned}&<\overline{a},\overline{b}>=a_1b_1<\overline{r_u},\overline{r_u}>+a_1b_2<\overline{r_u},\overline{r_v}>+a_2b_1<\overline{r_v},\overline{r_u}>+a_2b_2<\overline{r_v},\overline{r_v}>=\\&a_1b_1E+(a_1b_2+a_2b_1)F+a_2b_2G\end{aligned}\tag{4}$$

sonni olamiz.

$u=u_1(t)$, $v=v_1(t)$ va $u=u_2(t)$, $v=v_2(t)$ chiziqlar $\overline{r}=\overline{r}(u,v)$ sirtda yotsin, hamda $du,\ dv,\ u$ va v funksiyalarning birinchi chiziq tenglamasi $u=u_1(t)$, $v=v_1(t)$ yordamida aniqlangan differentsiallari, $\delta u,\ \delta v$ esa u va v funksiyalarning ikkinchi chiziq tenglamasi $u=u_2(t)$, $v=v_2(t)$ yordamida topilgan differentsiallari bo'lsin:

$$du=u_1'(t)dt,\quad dv=v_1'(t)dt,\quad \delta u=u_2'(t)dt,\quad \delta v=v_2'(t)dt.$$

Egri chiziqlar orasidagi burchak ularning kesishish nuqtasidagi urinmalar orasidagi burchakga teng bo'lganligi sababli, ular orasidagi burchak kosinusini quyidagicha topish mumkin:

$$\cos\varphi=\pm\frac{<d\overline{r},\delta\overline{r}>}{\sqrt{d\overline{r}^2}\sqrt{\delta\overline{r}^2}}=\pm\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+\delta udv)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}.\tag{5}$$

Misol. Sirtdagi $u=const$ va $v=const$ koordinata chiziqlari orasidagi burchak topilsin.

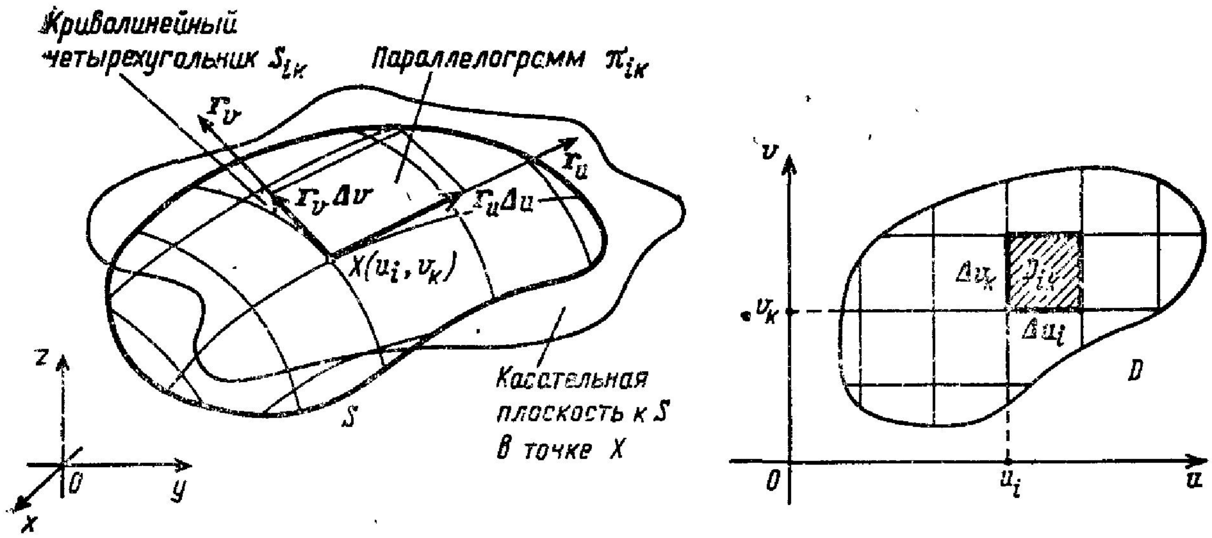
Birinchi u koordinata chizig'i uchun $v=const$ bo'lgani uchun $\delta u=0,$ bu erdan va (5) formuladan

$$\cos\varphi=\frac{Fdu\delta v}{\sqrt{Edu^2}\sqrt{G\delta v^2}}=\frac{F}{\sqrt{EG}}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, sirtdagi koordinata chiziqlari ortogonal to'r hosil qilishi uchun sirtning har bir nuqtasida $F=0$ bo'lishi zarur va etarlidir.

Eslatma. $d\overline{r}=\overline{r_u}du+\overline{r_v}dv$ vektorning sirtdagi nuqtada aniqlangan yo'nalishini odatda $(du:dv)$ kabi ham belgilanadi.

Sirtdagi soha yuzi



S sirt $\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ tenglama bilan berilgan bo'lib, D - tekislikdagi soha bo'lsin. D sohani u va v koordinata o'qlariga parallel $u = u_i,\ v = v_k$ to'g'ri chiziqlar chiziqlar bilan D_{ik} to'g'riturtburchaklarga bo'lamiz. U holda, sirtdagi $\overline{r}(u_i, v)$ va $\overline{r}(u, v_k)$ koordinata chiziqlari S sirtni S_{ik} egri chiziqli to'rtburchaklarga bo'ladi. S_{ik} to'rtburchakning yuzi urinma tekislik $T_{(u_i, v_k)}(S)$ da yotuvchi va tomoulari

$$\overline{r}_u(u_i, v_k)\Delta u_i = \overline{r}_u \Delta u_i; \quad \overline{r}_v(u_i, v_k)\Delta v_k = \overline{r}_v \Delta v_k$$

vektorlar bilan aniqlangan, yuzasi

$$\tau_{ik} = |\overline{r}_u \Delta u_i \times \overline{r}_v \Delta v_k| = |\overline{r}_u \times \overline{r}_v| \Delta u_i \Delta v_k$$

bo'lgan parallelogram yuzasidan kam farq qiladi (ma'lum shartlarda). Shu sababli S sirt yuzasining taqribiy qiymati sifatida $\sum \tau_{ik}$ ni olish mumkin. S sirt yuzasida esa $\sum \tau_{ik}$ ning Δu_i va Δv_k lar nolga intilgandagi limitini olish tabiiydir. $\overline{r}_u$ va $\overline{r}_v$ vektorlar uzluksiz bo'lsa, oxirgi limit mavjud va ushbu integralga teng

$$\iint_D |\overline{r}_u \times \overline{r}_v|\, du dv.$$

Demak, S sirt yuzi quyidagicha topilar ekan:

$$\sigma = \iint_D |\overline{r}_u \times \overline{r}_v|\, du dv. \qquad (6)$$

Oxirgi formulani quyidagicha o'zgartirib yozishimiz mumkin:

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = \sqrt{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|^2} = \sqrt{|\bar{r}_u|^2 |\bar{r}_v|^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 \cos^2\varphi} =$$
$$\sqrt{\bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

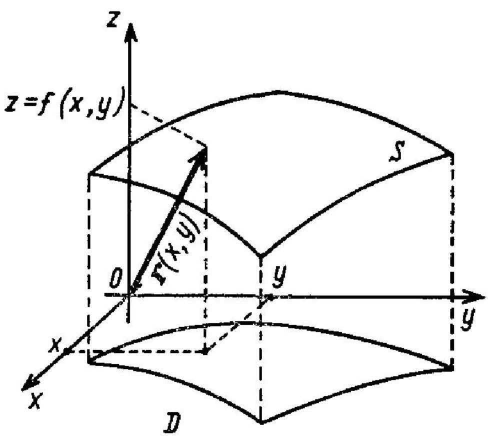
chunki

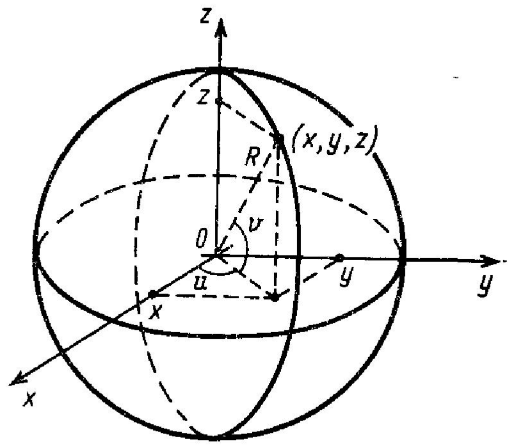
$$E = (\bar{r}_u, \bar{r}_u), \quad F = (\bar{r}_u, \bar{r}_v), \quad G = (\bar{r}_v, \bar{r}_v).$$

Endi soha yuzi uchun formulani ushbu

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv \tag{7}$$

ko'rinishda yozish mumkin.





Endi sirt uzluksiz funksiya $z = f(x,y), \ (x,y) \in D$ grafigi bo'lgan hususiy holni qaraymiz. Bu holda $u = x, \ v = y, \ \bar{r}(u,v) = (x, y, f(x,y))$ bo'lgani uchun

$$\bar{r}_u = \bar{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \bar{r}_v = \bar{r}_y = (1, 0, f_y)$$

va

$$E = \bar{r}_x^2 = 1 + f_x^2, \quad G = \bar{r}_y^2 = 1 + f_y^2, \quad F = (\bar{r}_x, \bar{r}_y) = f_x f_y$$

bo'ladi. Shuning uchun (8) formula

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy \tag{8}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Sirtning ichki geometriyasi

Biz yuqorida, sirtning birinchi kvadratik formasi orqali sirtdagi chiziq uzunligi, ular orasidagi burchak, sirtdagi soha yuzini topish mumkinligini ko'rdik. bu formulalarda faqatgina birinchi kvadratik forma koeffitsientlari E, F, G lardan foydalaniladi. Demak, sirtning birnichi kvadratik formasi ma'lum bo'lsa, sirt ustidagi geometriyani sirt tenglamasiga murojat qilmasdan ham urganish mumkin ekan.

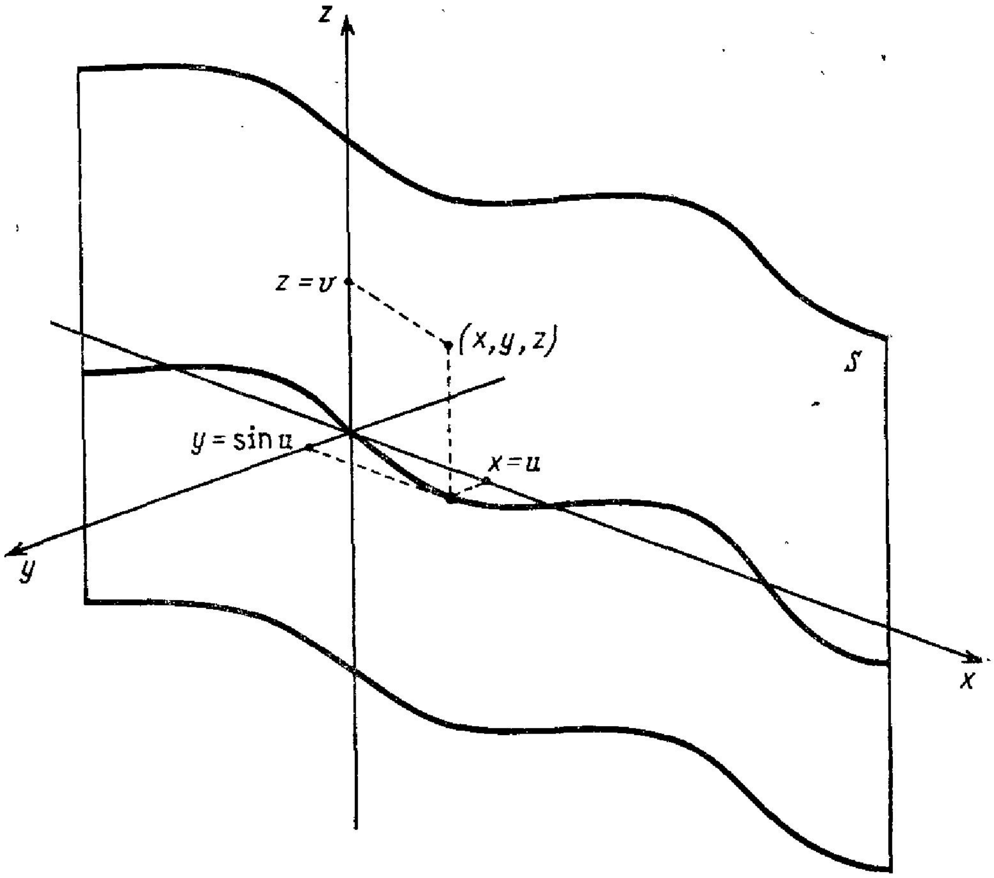
Sirtning birinchi kvadratik formasi yordamida topiladigan faktlar odatda sirtning ichki geometriyasi deyiladi.

Agar sirtlar o'rtasidagi uzluksiz biektiv akslantirishda mos chiziqlar teng uzunliklarga ega bo'lsa, bu sirtlar izometrik sirtlar, akslantirish esa sirtlar orasidagi izometriya deyiladi. Izometrik sirtlarga birinchi kvadratik formasi bir xil va demak ichki geometriyasi bir xil bo'lgan sirtlar deb ham ta'rif berish mumkin.

Misol. S sirt

$$x = u, \quad y = \sin u, \quad z = v$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.



Bu yo'naltiruvchisi sinusoida bo'lgan silindrik sirtdir. $\overline{r}_u$ va $\overline{r}_v$ vektorlarni topomiz:

$$\overline{r}_u = (1, \cos u, 0), \quad \overline{r}_v = (0,0,1).$$

Demak,

$$E = \overline{r}_u^2 = 1 + \cos^2 u, \quad G = \overline{r}_v^2 = 1, \quad F = (\overline{r}_u, \overline{r}_v) = 0, \quad ds^2 = (1 + \cos^2 u)du^2 + dv^2.$$

Ushbu

$$X = \int_0^u \sqrt{1+\cos^2 u}\,du, \quad Y = v$$

formulalar yordamida yangi o'zgaruvchilarni kiritsak S sirtning birinchi kvadratik formasi

$$ds^2 = dX^2 + dY^2$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, S sirt bilan (X,Y) tekislikning ichki geometriyasi bir xil, ya'ni silindrik sirt tekislikga izometrik ekan.

Umuman, agar egri chiziqli koordinatalarni sirtlarning birinchi kvadratik formalari ustma ust tushadigan qilib kiritish mumkin bo'lsa, bu sirtlar izometrik bo'ladi.

Savollar

- Sirtning urinma vektori va urinma tekisligi ta'riflarini ayting.
- Sirt urinma tekisligida birinchi kvadratik forma yordamida skalyar ko'paytmani aniqlang.
- Sirtdagi chiziqlar orasidagi burcha va uni hisoblab topish formulasini keltirib chiqaring.
- Sirtdagi $(du:dv)$ yo'nalish ta'rifi va koordinata chiziqlarning yo'nalishini toping.
- Sirtdagi koordinata chiziqlarining ortogonal to'r hosil qilishi zarur va etarli shartini ayting va zarurligini isbotlang.
- Sirt ustidagi soha yuzi tushunchasini ayting.
- Sirt yuzining birinchi kvadratik forma koffesientlari orqali ifodasini keltirib chiqarib bering.
- Sirt uzluksiz funksiya grafigi shaklida berilganda yuzi uchun formulani keltirib chiqaring.
- Sirtning ichki geometriyasi deb nimaga aytiladi?
- Izometrik sirtlar ta'tifini ayting va unga doir misollar keltiring.

Sirtning ikkinchi kvadratik formasi.

REJA:

- Ikkinchi kvadratik forma ta'rifi.
- Sirtdagi chiziqning egriligi.
- Men'e teoremasi.

Tayanch iboralar: silliq sirt, sirtning normal vektori, vektor funksiyaning ikkinchi differentsiali, chiziqning normal va geodezik egriliklari, normal kesim.

Adabiyotlar: [2] 124-129, [7] 81-87.

Darsning maqsadilari:

Ta’limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag’batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko’nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o’zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo’lgan qiziqishni o’stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o’quv va uslubiy qo’llanmalar, ma’ruzalar kursi, tarixiy ma’lumotlar, izohli lug’atlar, atamalar, o’tilgan dars mavzusi bo’yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Ikkinchi kvadratik forma ta'rifi

S tenglamasi $\bar{r}=\bar{r}(u,v),(u,v)\in D$ bo'lgan C^2 - silliq sirt bo'lsin. Sirtning har bir nuqtasida birlik normal vektor

$$\bar{m}=\frac{\bar{r}_u\times\bar{r}_v}{|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|}=\frac{\bar{r}_u\times\bar{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{9}$$

bilan birgalikda sirt radius vektor $\bar{r}(u,v)$ ning ikkinchi differentsiali

$$d^2\overline{r} = \overline{r}_{uu}du^2 + 2\overline{r}_{uv}dudv + \overline{r}_{vv}dv^2 + \overline{r}_u du^2 + \overline{r}_v dv^2 \qquad (10)$$

formula biln aniqlangan. Sirtning ikkinchi kavdaratik formasi deb $d^2\overline{r}$ va $\overline{m}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasiga aytiladi:

$$II = (d^2\overline{r}, \overline{m}) = (\overline{r}_{uu}, \overline{m})du^2 + 2(\overline{r}_{uv}, \overline{m})dudv + (\overline{r}_{vv}\overline{m})dv^2. \qquad (11)$$

Sirtning har bir nuqtasida II ham du va dv larga nisbatan kvadratik formadir. Ikkinchi kvadratik formaning koeffitsientlari uchun quyidagi belgilashlar kiritilgan:

$$L = (\overline{r}_{uu}, \overline{m}), \quad M = (\overline{r}_{uv}, \overline{m}), \quad N = (\overline{r}_{vv}\overline{m}). \qquad (12)$$

Ikkinchi kvadartik formani quyidagicha yozish mumkin:

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \qquad (13)$$

(12) formulalarda (9) va $(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ ekanligidan foydalansak, koeffitsientlar uchun quyidagi formulalar kelib chiqadi:

$$L = \frac{(\overline{r}_{uu}, \overline{r}_u, \overline{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\overline{r}_{uv}, \overline{r}_u, \overline{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\overline{r}_{vv}, \overline{r}_u, \overline{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Ushbu $d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$ va $\overline{m}$ vektorlar ortogonal bo'lgani uchun

$$(d\overline{r}, \overline{m}) = 0, \quad d(d\overline{r}, \overline{m}) = 0.$$

Bu yerdan esa $(d^2\overline{r}, \overline{m}) = -(d\overline{r}, \overline{m})$ kelib chiqadi va bu ifoda ikkinchi kvadaratik formani boshqa ko'rinishda yozisg imkonini beradi:

$$II = -(d\overline{r}, \overline{m}) = -(\overline{r}_u, \overline{m}_u)du^2 - ((\overline{r}_u, \overline{m}_v) + (\overline{r}_v, \overline{m}_u))dudv + -(\overline{r}_v, \overline{m}_v)dv^2. \qquad (14)$$

Sirtdagi chiziqning egriligi

S sirtda yotgan, $X(u,v) \in S$ nuqtadan $(du:dv)$ yo'nalishda utvchi C^2 sinfga qarashli L chizqni qaraymiz va uning tabiiy parametrga nisbatab tenglamasiga esa

$$\overline{r} = \overline{r}(s) = \overline{r}(u(s), v(s))$$

bo'lsin. $X(u_0, v_0)$ nuqtada quyidagi uchta vektorni qaraymiz: chiziqning urinma birlik vektori $\overline{\tau} = \overline{r}' = \dfrac{d\overline{r}}{ds}$, sirtning birlik normal vektori $\overline{m}$ va $\overline{b} = \overline{m} \times \overline{\tau}$. bu vektorlar uchligi $\overline{\tau}, \overline{m}, \overline{b}$ chiziqli bog'lanmagan bo'lgani sababli $\overline{r}''$ vektor ular orqali chiziqli ifodalanadi:

$$\overline{r}'' = \alpha\overline{\tau} + \beta\overline{m} + \gamma\overline{b}.$$

$(\bar{r},\bar{r})=1$ ekanligidan $\alpha=(\bar{r}'',\bar{\tau})=(\bar{r}'',\bar{r}')=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\bar{r}',\bar{r}')=0$ kelib chiqadi. $\beta=(\bar{r}'',\bar{m})$ va $\gamma=(\bar{r}'',\bar{b})$ koeffitsientlar quyidagicha nomlanadi:

$k_m=(\bar{r}'',\bar{m})$ - chiziqning normal egriligi:

$k_g=(\bar{r}'',\bar{b})$ - chiziqning geodezik egriligi.

Agar L chiziqning egriligi $k_1=|\bar{r}''|$ noldan farqli bo'lsa, u holda chiziqning bosh normal vektori $\bar{n}$ aniqlangan va $\bar{r}''=k_1\bar{n}.$ Bu erdan va $\bar{r}''=\beta\bar{m}+\gamma\bar{b}$ tenglikdan

$$k_m=k_1(\bar{n},\bar{m}),\quad k_g=k_1(\bar{n},\bar{m},\bar{\tau})$$

ekanligi kelib chiqadi.

Chiziqning bosh normali $\bar{n}$ va sirtning normali $\bar{m}$ orasidagi burchak θ bo'lsin. U holda

$$k_m=(\bar{r}'',\bar{m})=|\bar{r}''||\bar{m}|\cos\theta=k_1\cos\theta \tag{15}$$

bo'ladi.

Men'e teoremasi

Endi, S sirtning $X(u_0,v_0)$ nuqtadan $(du:dv)$ yo'nalishda o'tuvchi va sirtda yotuvchi har qanday chiziq uchun $k_1\cos\theta$ ifodaning qiymati o'zgarmasligini ko'rsatamiz.

Murakkab funksiyani differentsiallash qoidasiga ko'ra

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=\bar{r}_{uu}(\frac{du}{ds})^2+2\bar{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\bar{r}_{vv}(\frac{dv}{ds})^2+\bar{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\bar{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}$$

bo'ladi. Bu tenglamaning har ikki tomonini $\bar{n}$ vektorga skalyar ko'paytirib va (15) formulalarni inobatga oladigan bo'lsak,

$$k_m=k_1\cos\theta=L(\frac{du}{ds})^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N(\frac{dv}{ds})^2$$

hosil bo'ladi. Chiziqning $X(u_0,v_0)$ nuqtasida

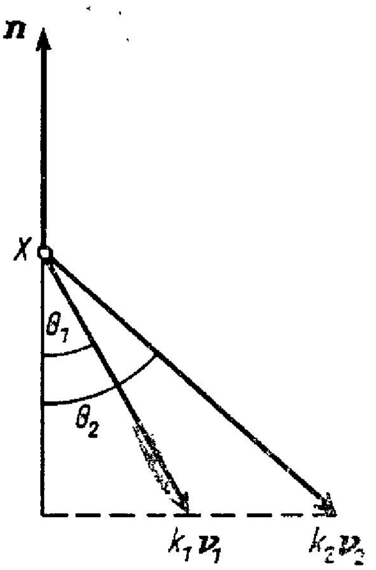
$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

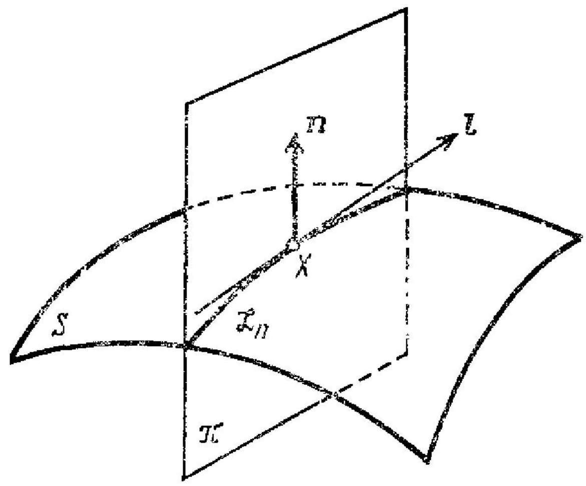
bo'lganligi uchun oxirgi formula ushbu ko'rinishni oladi:

$$k_m=k_1\cos\theta=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}. \tag{16}$$

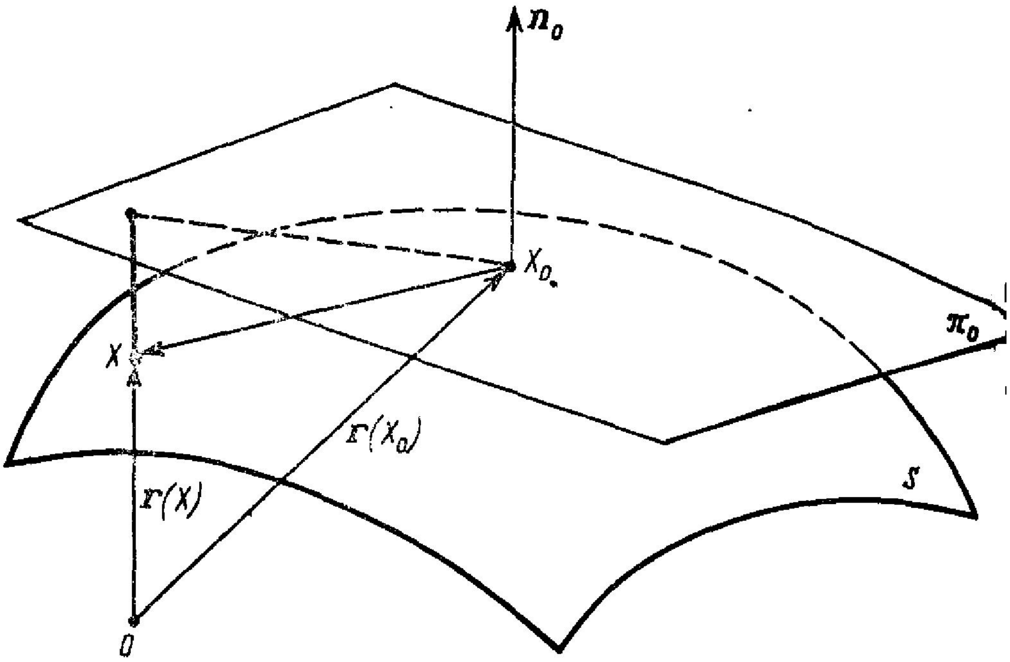
Bu formuladagi E,F,G,L,M,N koeffitsientlar $X(u_0,v_0)$ nuqtada hisoblanadi va oxirgi tenglamaning o'ng tomoni chiziqdan emas faqat $(du:dv)$ yo'nalishidan bog'liq bo'lganligi sababli $k_1\cos\theta=const$ ekan.

Sirtning $X(u_0, v_0)$ nuqtasidan sirtning normal vektori orqali $(du:dv)$ yo'nalishda o'tgan tekislik sirtni L_m chiziq bo'ylab keadi va L_m chiziqning egriligi L_m chiziqning normal egriligi bilan ustma ust tushadi. Shu sababli k_m miqdori S sirtning $X(u_0, v_0)$ nuqtasidagi $(du:dv)$ yo'nalish bo'yicha normal egriligi deb atasak bo'ladi. Demak, sirtning $(du:dv)$ yo'nalishdagi normal egriligi (16) formula orqali hisoblanar ekan. Yuqorida aytilganlar Men'e teoremasi mazmunidan iboratdir.





Teorema 10 ***(Men'e teoremasi)*** *S sirtning $X(u_0, v_0)$ nuqtasidan va $(du:dv)$ yo'nalishda π' tekislik o'tkazilgan bo'lsin. Agar sirtning $(du:dv)$ yo'nalishdagi normal egriligi noldan farqli bo'lsa, u holda normal kesim egrilik markazining π' tekislikdagi proeksiyasi $L' = S \cap \pi'$ chiziqning egrilik markazi bilan ustma ust tushadi.*



Men'e o'z teoremsini dastlab quyidagi ko'rinishda isbotlagan.

Sirt ustida yotuvchi va sirtning berilgan nuqtasidan o'tuvchi hamma umumiy urinmali chizqlarning egrilik markazlari - diametri shu nuqtadagi normal kesimning egrilik radiusiga teng bo'lib, o'zi esa chiziqlarning umumiy normal tekisligida yotgan aylanada joylashgandir.

Savollar.

- Sirtning birlik normal vektori ta'rifini ayting.
- Sirt radiusi vektorining ikkinchi differentsialini toping.
- Ikkinchi kvadratik forma ta'rifini ayting.
- Ikkinchi kvadratik forma koeffitsentlarini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.
- Sirtda yotgan chiziq bilan bog'liq vektorlarni aniqlang.
- Sirtdagi chiziqning normal va geodezik egriliklari ta'rifini ayting.
- Sirtdagi nuqtadan $(du:dv)$ yo'nalishda o'tuvchi sirtda yotgan barcha silliq chiziqlarning normal egriliklari ustma-ust tushushini ko'rsating.
- Sirtdagi $(du:dv)$ yo'nalishda normal egriligini ayting va uni hisoblash formulasini keltirib chiqaring.
- Men'e teoremasini ayting.
- Sirtning normal kesimi ta'rifini ayting.

Bosh yo'nalishlar va bosh egriliklar. Egrilik chizig'i. Eyler formulasi.

REJA:

- Bosh yo'nalishlar,
- Bosh egriliklar,
- Egrilik chizig'i,
- Eyler formulasi.

Tayanch iboralar: birinchi va ikkinchi kvadratik formalar, bosh yo'nalishlar, bosh egriliklar, kvadratik formalar juftligining xos qiymatlari, egrilik chizig'i, Eyler formulasi.

Adabiyotlar: [2] 130-135, [7], 88-96.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Bosh yo'nalishlar

Oldingi mavzuda sirtning $(du:dv)$ yo'nalishdagi normal egriligi uchun

$$k_n(du:dv)=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndu^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \qquad (17)$$

formulani isbotlagan edik.

Ta'rif 11 *Sirtning normal egriligi* k_n *ning ekstremal qiymatga ega bo'ladigan* $(du:dv)$ *yo'nalishlar sirtning bosh yo'nalishlari deyiladi.*

Lemma 12 C^2 *sinfga qarashli sirtning har bir nuqtasida kamida ikkita turli bosh yo'nalishlar mavjud.*

Isboti. S sirtning X nuqtasidagi ixtiyoriy yo'nalish $(\xi:\eta)$ bo'lsin. U holda ushbu ifoda

$$k_n=k(\xi,\eta)=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2} \qquad (18)$$

ξ va η o'zgaruvchilarning differensiallanuvchi funksiyasini aniqlaydi. Bu yerdagi E,F,G,L,M,N koeffisentlar sirtning X nuqtasida hisoblangan va ξ,η dan bog'liq emas. O'zgaruvchilarni quyidagicha almashtiramiz:

$$\xi=\rho\cos\varphi, \qquad \eta=\rho\sin\varphi.$$

U holda

$$k_n=k_n(\varphi)=\frac{L\cos^2\varphi+2M\cos\varphi\sin\varphi+N\sin^2\varphi}{E\cos^2\varphi+2F\cos\varphi\sin\varphi+G\sin^2\varphi}$$

funksiya $[0,2\pi]$ da uzluksiz va $k_n(0)=k_n(2\pi)$ bo'lgani uchun $k_n(\varphi)$ funksiya kamida bir marta maksimumga va kamida bir marta minimumga erishadi. Bu esa sirtda kamida ikkita bosh yo'nalishi borligini ko'rsatadi. Lemma isbotlandi.

Bosh egriliklar

Ta'rif 13 *Bosh yo'nalish buyicha normal egrilikning ekstremal qiymatlari sirtning bosh egriliklari deyiladi.*

Endi bosh yo'nalishlarni va bosh egriliklarni topish usulini keltiramiz. (18) formuladan ξ va η lar uchun quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$(L-kE)\xi^2+2(M-kF)\xi\eta+(N-kG)\eta^2=0 \qquad (19)$$

Bu tenglikni ξ bo'yicha differensiallaymiz. Bosh yo'nalish $(\xi:\eta)$ bo'yicha hususiy hosilalar nolga teng ekanligidan

$$(L-kE)\xi+(M-kF)\eta=0 \qquad (20)$$

kelib chiqadi. (19) ni η bo'yicha differensiallab, yuqoridagidek mulohazalarga asosan, ushbuga ega bo'lamiz:

$$(M-kF)\xi+(N-kG)\eta=0 \tag{21}$$

(20) va (21) tengliklardagi k -($\xi:\eta$) bosh yo'nalishidagi bosh egrilikdir. Sirtning berilgan nuqtasida bosh yo'nalishlar mavjud bo'lgani sababli, (20) va (21) tenglamalar nolmas yechimga ega, demak sistemaning asosiy determinanti nolga teng:

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0 \tag{22}$$

ya'ni

$$k^2(EG-F^2)-k(EN-2FM+GL)+LN-M^2=0 \qquad (6')$$

Shunday qilib, sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklarni (22) kvadrat tenglamaning yechimlari sifatida topish mumkin ekan.

Sirtning har bir nuqtasida kamida ikkita bosh yo'nalish mavjud bo'lganligi uchun (22) kvadrat tenglamaning ikkita k_1 va k_2 haqiqiy ildizlari bosh egriliklar bo'ladi.

Bu ildizlar yo teng $k_1=k_2$, yo turlicha $k_1 \neq k_2$ bo'lishi mumkin. Har bir holni alohida qaraymiz.

1 hol: $k_1 \neq k_2$. Bu ildizlarga sirtda quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadigan $(\xi_1;\eta_1)$ va $(\xi_2;\eta_2)$ bosh yo'nalishlar mos keladi:

$$\begin{cases} (L-k_iE)\xi_i+(M-k_iF)\eta_i=0 \\ (M-k_iF)\xi_i+(N-k_iG)\eta_i=0 \end{cases} \tag{23}$$

Agar sirtning biror nuqtasidagi koordinata chiziqlarning yo'nalishlari bosh yo'nalishlar bilan ustma-ust tushsa, bu nuqtada F va M koeffisiyentlar nolga aylanadi.

Haqiqatan, koordinata chiziqlarining yo'nalishlari -- $(\xi_1;0)$ va $(0;\eta_2)$ bosh yo'nalishlar bo'lsa, (23) sistemadan

$$\begin{aligned} &L-k_1=0, \qquad M-k_1F=0 \\ &M-k_2F=0 \qquad N-k_2G=0 \end{aligned}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdagi ikkinchi va uchinchi tenglamalardan $k_1 \neq k_2$ bo'lganligi uchun $M=F=0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, bu xususiy holda bosh egriliklar quyidagicha topiladi:

$$k_1 = \frac{L}{E}, \qquad k_2 = \frac{N}{G}.$$

Aksincha, agar $M = F = 0$ bo'lsa, (19) formuladan koordinata chiziqlarining yo'naliщlari bosh yo'nalish ekanligi kelib chiqadi.

2 hol: $k_1 = k_2 = k.$ Bu holda sirtning nuqtasidagi har bir yo'nalish bosh yo'nalish ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan, sirtning har bir nuqtasida kamida ikkita bosh yo'nalish mavjudligi sababli, (20), (21) tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega. Bu esa faqatgina

$$L - kE = 0, \qquad M - kF = 0, \qquad N - kG = 0$$

bo'lgandagina bo'ladi. Ya'ni, $L = kE; \qquad M = kF, \qquad N = kG,$

(19) formuladan esa $k_n = k$ ni hosil qilamiz. Demak, har bir yo'nalish buyicha normal egrilik o'zgarmas, shu sababli har bir yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi.

Egrilik chizig'i

Ta'rif 14 *Agar sirtdagi chiziqning har bir nuqtasidagi urinmasi sirtning bosh yo'nalishlaridan biri buylab yo'nalgan bo'lsa, chiziq sirtning egrilik chizig'i deyiladi.*

Sirtdagi chiziq tenglamasi

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

bo'lsin. U holda, t parametrning ixtiyoriy qiymatida chiziq urinmasi bosh yo'nalish bo'yicha yo'nalgan bo'lishi uchun

$$du = u'(t)dt, \quad dv = v'(t)dt$$

differensallar ushbu

$$\begin{cases} (L - kE)du + (M - kF)dv = 0 \\ (M - kF)du + (N - kG)dv = 0 \end{cases}$$

sistemning yechimi bo'lishi zarur va yetarlidir, bu yerda $k - (du : dv)$ yo'nalishdagi normal kesim egriligi. Bu sistemadan k ni yo'qotsak,

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)dv^2 = 0 \qquad (24)$$

hosil bo'ladi.

(24) formula $(du : dv)$ ning bosh yo'nalish bo'lishligining zarur va yetarli shartidan iboratdir. Oxirgi formulani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

(25) ni egrilik chizig'ini aniqlovchi differensial tenglama sifatida qarash mumkin.

Lemma 15 *Agar sirt nuqtasidagi ixtiyoriy yo'nalish bosh yo'nalish bo'lmasa* ($k_1 \neq k_2$ *bo'lsa), sirtni shu nuqta atrofida koordinata chiziqlari egrilik chiziqlari bo'ladigan qilib parametrlash mumkin.*

Isboti. Egrilik chizig'i tenglamasini qisqacha

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0 \qquad (26)$$

ko'rinishda yozamiz. Sirtning qaralayotgan nuqtasiga yetarlicha yaqin nuqtalarida ikkitadan bosh yo'nalish mavjud bo'lganligi sababli, $A + 2B\lambda + C\lambda^2$ uchhad ikkita har xil ildizlarga ega bo'ladi. Buning uchun esa, $AC - B^2 < 0$ bo'lishi kerak. Bu xolda (26) ni quyidagi sistema ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} Adu + (B + \sqrt{B^2 - AC})dv = 0 \\ Adu + (B - \sqrt{B^2 - AC})dv = 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning integral chiziqlari sirtning koordinata chiziqlari, ya'ni egrilik chiziqlari bo'ladi.

Eyler formulasi

S sirtning ixtiyoriy M nuqtasini qaraymiz. Umumiylikka zarar yetkazmasdan, bu nuqtada koordinata chiziqlari ortogonal va bosh yo'nalishlarni aniqlaydi deb faraz qilishimiz mumkin (Egrilik chizig'iga qarang). Bu esa $F = M = 0$, ya'ni birinchi va ikkinchi kvadratik formalar

$$Edu^2 + Gdv^2, \quad Ldu^2 + Ndv^2$$

ko'rinishda ekanligini anglatadi va bosh egrilklar

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}$$

formulalar orqali topiladi. Bu holda $(\xi : \eta)$ yo'nalishidagi normal egrilik quyidagicha bo'ladi:

$$k_n = k(\xi,\eta) = \frac{k_1 E\xi^2 + k_2 G\eta^2}{E\xi^2 + G\eta^2} \tag{27}$$

Agar u koordinata chizig'i yo'nalishi $(\xi : 0)$ ning $(\xi : \eta)$ yo'nalish bilan hosil qilgan burchagini φ desak,

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{E}\xi}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{G}\eta}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}}$$

bo'ladi.

$k(\xi,\eta)$ ni $k(\varphi)$ orqali belgilab, ixtiyoriy φ yo'nalishdagi normal egrilik $k(\varphi)$ uchun (27) dan Eyler formulasini hosil qilamiz:

$$k(\varphi) = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi.$$

Shunday qilib, Eyler formulasidan ixtiyoriy φ yo'nalishdagi normal egrilikni hisoblash uchun bosh egriliklarni bilish yetarli ekanligi kelib chiqadi.

Savollar.

- Sirtning bosh yo'nalishlari ta'rifini ayting.
- Sirtning bosh egriliklarini ta'rifini.
- Sirtning xar bir nuqtasida kamida ikkita bosh yo'nalish mavjudligini isbotlang.
- Sirtning bosh yo'nalishlarini hisoblash uchun tenglamani keltirib chiqaring.
- Koordinata chiziqlarining yo'nalishi bosh yo'nalish bo'lganda bosh egriliklarni topish formulasini keltirib chiqaring.
- Sirtning egrilik chizig'i va uning tenglamasi.
- Agar sirtning bosh egriliklari turlicha bo'lsa, sirtni koordinata chiziqlari egrilik chizig'i bo'ladigan qilib parametrlash mumkinligini isbotlang.
- Eyler formulasini keltirib chiqaring.

Sirtning o'rta va Gauss egriliklari.
Sirt nuqtalarini tekshirish

REJA:

- Asimptotik yo'nalish va asimptotik chiziqlar.
- Sirtning o'rta va Gauss egriliklari.
- Sirt nuqtalarini tekshirish.

Tayanch iboralar: Bosh egriliklar, normal egrilik, Eyler formulasi, asimptotik yo'nalish va asimptotik chiziqlar, elliptik nuqta, giperbolik nuqta.

Adabiyotlar: [2], 135-140, [7], 100-104.

Darsning maqsadilari:

Ta’limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag’batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko’nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o’zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo’lgan qiziqishni o’stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o’quv va uslubiy qo’llanmalar, ma’ruzalar kursi, tarixiy ma’lumotlar, izohli lug’atlar, atamalar, o’tilgan dars mavzusi bo’yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Asimptotik yo'nalish va asimptotik chiziqlar.

Ta'rif 16 *Agar silliq sirt nuqtasidagi* $(\xi:\eta)$ *yo'nalish bo'yicha normal egrilik* $k_m(\xi:\eta)$ *nolga teng bo'lsa, bu yo'nalish asimptotik yo'nalish deyiladi.*

$$k_m(\xi:\eta)=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}$$

ekanligidan $k_m(\xi:\eta)=0$ bo'lishi uchun

$$L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2=0$$

bo'lishi zaruru va etarli ekanligi kelib chiqadi.

Ta'rif 17 *Agar sirt ustidagi chiziqning har bir nuqtasidagi urinmasi asimptotik yo'nalishga ega bo'lsa, bu chiziq sirtning asimptotik chizig'i deyiladi.*

Agar $(du:dv)$ sirtdagi chiziqning ixtiyoriy nuqtasidagi yo'nalishi bo'lsa, ushbuni

$$L(u,v)du^2+2M(u,v)dudv+N(u,v)dv^2=0$$

asimptotik chiziqni aniqlaydigan differentsial tenglama sifatida qarash mumkin. Agar sirtning biror nuqtasida koordinata chiziqlari asimptotik yo'nalishga ega bo'lsa, ya'ni $(du:0)$ va $(0:dv)$ - asimptotik yo'nalishlar bo'lsa,

$$L=N=0$$

va ikkinchi kvadratik forma

$$Mdudv=0$$

ko'rinishda ekanligi kelib chiqadi.

Asimptotik chiziqlar quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar sirtda to'g'ri chiziq yotsa, bu to'g'ri chiziq asimptotik to'g'ri chiziq bo'ladi, chunki sirtning bu to'g'ri chiziq yo'nalishidagi normal kesimi ushbu to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushadi.

2°. Asimptotik chiziqning har bir nuqtasidagi sirtning urinma tekisligi chiziqning shu nuqtasidagi yopishma tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

Sietning o'rta va Gauss egriligi

Oldingi mavzuda bosh egriliklarni ushbu

$$(EG-F^2)k^2+(2MF-EN-GL)k+(LN-M^2)=0$$

yoki qisqacha

$$det(II-kI)=0$$

kvadratik tenglamaning ildizlari sifatida topilishini bilamiz. Bu ildizlarni topish formulalari ishlatishga juda noqulay, lekin Viet teoremasiga ko'ra bu ildizlarning yig'indisi va ko'paytmasini osongina topish mumkin, ya'ni

$$k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{det(II)}{det(I)}$$

$$k_1+k_2=\frac{EN+LG-2MF}{EG-F^2}.$$

Bosh egriliklarning ko'paytmasi sirtning to'la yoki Gauss egriligi deyiladi va K

bilan belgilanadi:

$$K = k_1 k_2.$$

Bosh egriliklar yig'indisining yarimi esa sirtning o'rta egriligi deyiladi va H bilan belgilalnadi:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Shunday qilib, sirtning berilgan nuqtasidagi Gauss va o'rta egriliklari quyidagicha topilar ekan:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{det(II)}{det(I)}, \quad H = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}.$$

Sirt nuqtalarini tekshirish

Uch holni qaraymiz.

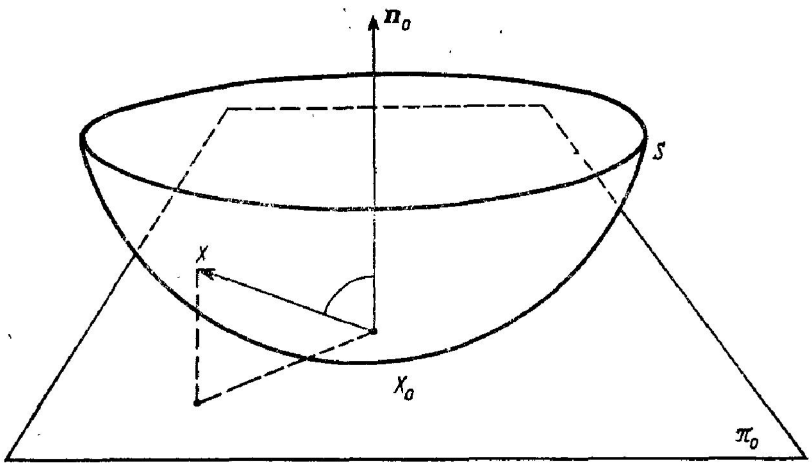
1 hol: sirtning berilgan M nuqtasida Gauss egrilik musbat bo'lsin.

$$K = \frac{det(II)}{det(I)}$$

va $det(I) > 0$ ekanligidan $K > 0$ bo'lishi uchun $det(II) > 0,$ ya'ni

$$LN - M^2 > 0$$

bo'lishi zarur va etarli ekanligi kelib chiqadi. Bu holda M nuqta sirtning elliptik nuqtasi deyiladi.



$K = k_1 k_2 > 0,$

shu sababli k_1 va k_2 lar bir xil ishoraga ega. Aniqlik uchun bosh egiliklarni musbat deb olaylik

$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0.$$

Bu holda ikkala bosh kesimlar (bosh yo'nalishlar bo'yicha sirtning kesimlarini bosh kesim deyiladi) sirtning normal vektori yo'nalgan tomonga egilgan bo'ladi. Eyler formulasi

$$k(\varphi) = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$$

dan esa barcha yo'nalishdagi barcha normal egriliklarning musbatligi, ya'ni bu yo'nalishlardagi barcha normal kesimlar sirtning normal vektori tomoniga egilgan bo'ladi va sirtning urinma tekisligidan bir tomonda joylashgan bo'lgani, hamda

$$det(II) > 0,$$

bo'lgani uchun sirtning M nuqtasida asimptotik yo'nalish bo'lmaydi.

$k_1 < 0$, $k_2 < 0$ bo'lgan hol ham xuddi qaralgan holga o'xshaydi.

2 hol: M nuqtada Gauss egriligi K manfiy bo'lsin ($det(II) < 0$, ya'ni $LN - M^2 < 0$), bunday nuqta sirtning geperbolik nuqtasi deyiladi. Gauss egligi bosh egriliklar ko'paytmasiga teng:

$$K = k_1 k_2 < 0,$$

demak, bosh egriliklar qarama-qarshi ishoralarga ega. Aniqlik uchun

$$k_1 < 0, \quad k_2 > 0$$

deb olaylik. Demak, bu nuqtada bosh kesimlardan biri sirtning normali tomoniga, biri esa sirt normaliga teskari tomonga egilgan bo'ladi. Normal kesimning urinmasi M nuqta atrofida bitta bosh yo'nalishdan ikkinchi bosh yo'nalishga burilganda,

$$k_m(\xi;\eta)$$

normal egrilik $k_1 < 0$ dan $k_2 > 0$ gacha bo'lgan qiymatlarni qabul iladi. Demak, biror $(\xi;\eta)$ yo'nalish bo'yicha normal egrilik nol bo'ladi:

$$k_m(\xi;\eta) = 0.$$

Eyler formulasiga ko'ra

$$k_m(\xi;\eta) = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi = 0$$

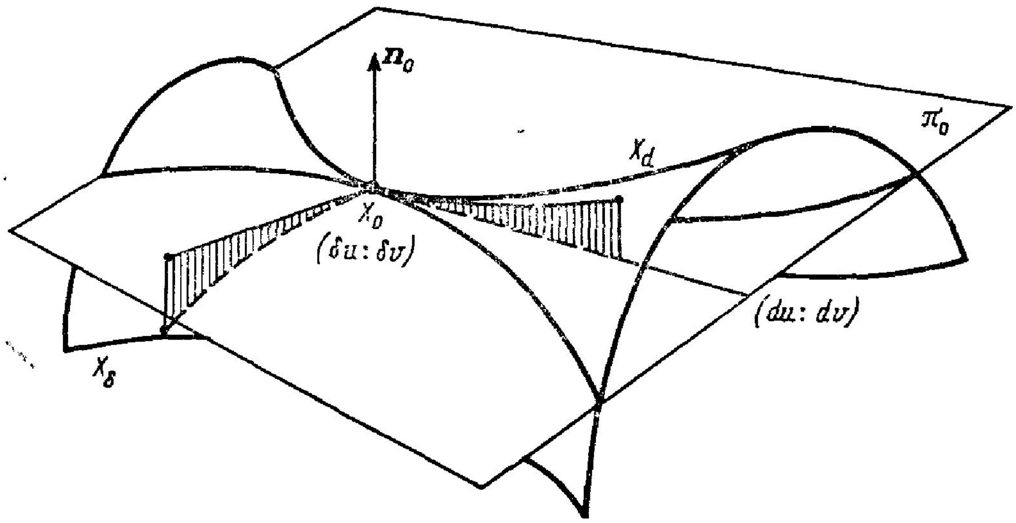
bo'ladi. Bu yerdan ushbuni topomiz:

$$\tan\varphi = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},$$

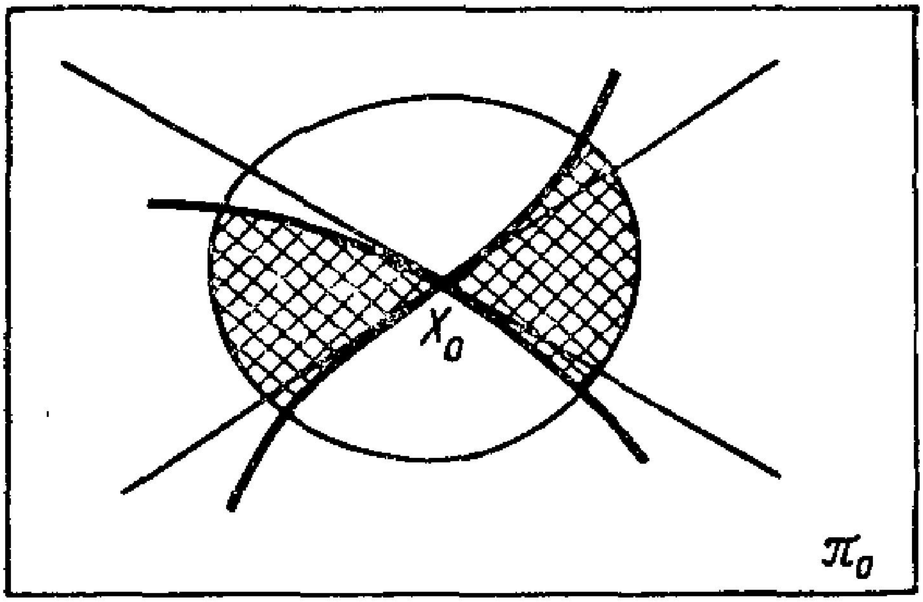
ya'ni

$$\varphi = \arctan\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} \quad va \quad \varphi = -\arctan\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

yo'nalishlar bo'yicha normal egrilik nolga aylanar ekan. Bu yo'nalishlar bosh yo'nalishlarga nisbatan simmetrik joylashadi. Shunday qilib biz giperbolik M nuqtada ikkita asimptotik yo'nalish borligini ko'rsatdik. Bunday nuqta atrofida sirt egarsimon



bo'ladi.



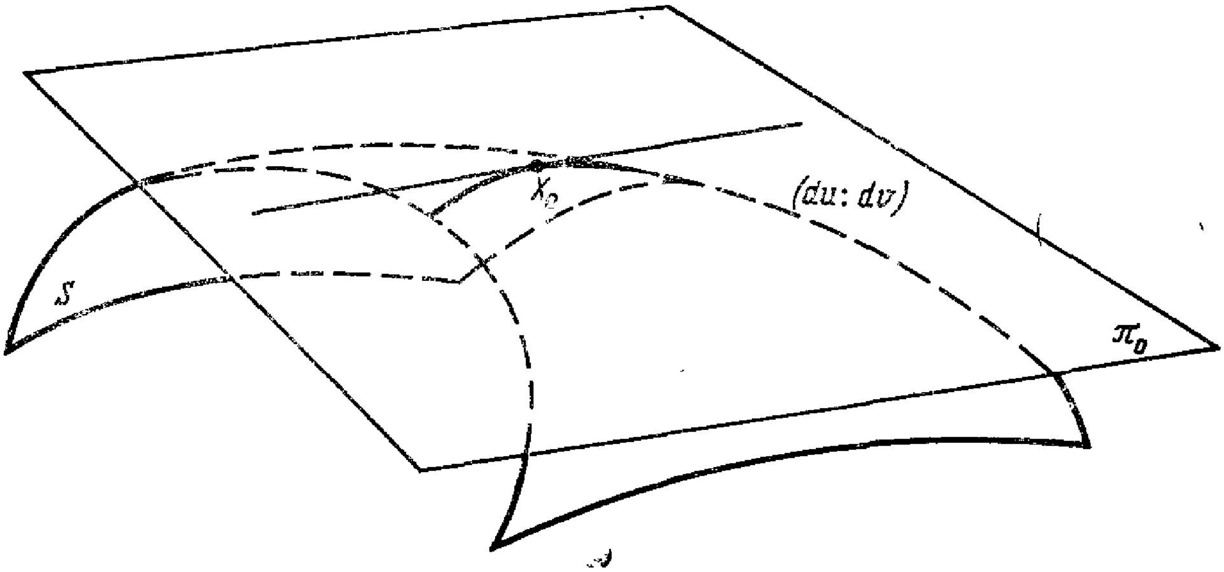
3 hol: Gauss egriligi nolga teng, ya'ni

$$K = k_1 k_2 = 0$$

bo'lsin. Bunday nuqta sirtning parabolik tipidagi nuqtasi deyiladi. Aniqlik uchun

$$k_1 < 0, \quad k_2 = 0$$

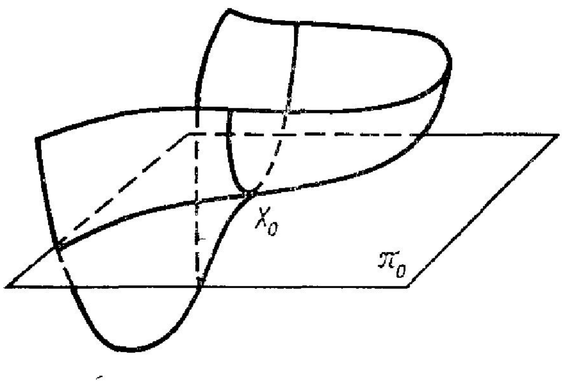
deb olaylik. Bu holda ikkinchi bosh yo'nalish asimptotik yo'nalish bo'ladi, boshqa asimptotik yo'nalishlar bo'lmaydi. Ikkinchi bosh kesim M nuqtadagi urinmasining bir tomonida joylashmaydi. Agar sirtda parabolik nuqtalar bo'lsa, ular odatda parabolik chiziq deb ataluvchi chiziqni tashkil qiladi.

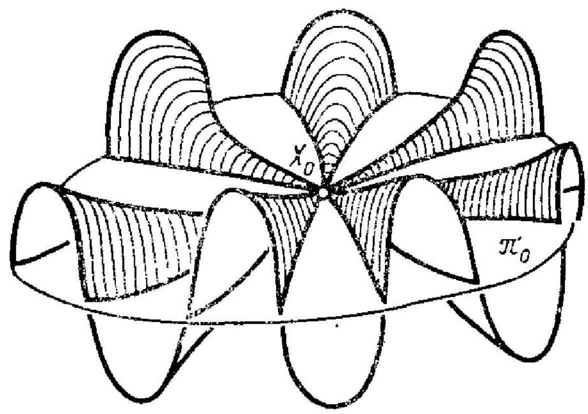


Bu parabolik chiziq sirtning elliptik va gepirbolik nuqtalarini ajratuvchi chiziq bo'ladi. Agar

$$k_1 = k_2 = 0$$

bo'lsa, bu nuqtada har bir yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi, va bunday nuqta sirtning burmalanish nuqtasi deyiladi.





Savollar.

- Asimptotik yo'nalish ta'rifini ayting va yo'nalishning asimptotik bo'lishi uchun zarur va etarli shartini keltirib chiqaring.

- Asimptotik chiziq ta'rifini ayting va tenglamasini keltirib chiqaring.
- Asimptotik chiziqlarning xossalarini ayting.
- Sirtning o'rta va Gauss egriligi ta'rifini ayting va hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.
- Sirtning elliptik nuqtasi ta'rifini bering va bu nuqta atrofida sirtni tekshiring.
- Sirtning giperbolik nuqtasi ta'rifini bering va bu nuqta atrofida sirtni tekshiring.
- Sirtning parabolik nuqtasi ta'rifini bering va bu nuqta atrofida sirtni tekshiring.

Sirt derivasion formulalari. Kristoffel simvollari

REJA:

- Sirtning derivasion formulalari.
- Kristoffel simvollari

Tayanch iboralar: Silliq sirt, birinchi va ikkinchi kvadratik formalar, sirtning normal vektori. Kristoffell simvollari.

Adabiyotlar: [2], 151-153, [7], 105-108.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Sirtning derivasion formulalari.

C^2- regulyar S sirt $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ $,(u,v)\in D$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Sirtning har bir nuqtasida $\bar{r}_u,\bar{r}_v,$ $\bar{m}=\dfrac{\bar{r}_u\times\bar{r}_v}{|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|}$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan sistemani tashkil etadi. Shuning uchun, har bir vektorni ular orqali chiziqli ifodalash mumkin, xususan $\bar{r}_u,\bar{r}_v,$ $\bar{m}$ vektorlarning u va v bo'yicha hususiy hosilalari ham ular orqali chiziqli ifodalanadi:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^{1}\bar{r}_u + \Gamma_{11}^{2}\bar{r}_v + \lambda\bar{m} \\ \bar{r}_{uv} &= \Gamma_{12}^{1}\bar{r}_u + \Gamma_{12}^{2}\bar{r}_v + \mu\bar{m} \\ \bar{r}_{vv} &= \Gamma_{21}^{1}\bar{r}_u + \Gamma_{22}^{2}\bar{r}_v + \gamma\bar{m} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{m}_u &= \alpha_{11}\bar{r}_u + \alpha_{12}\bar{r}_v + \alpha_{13}\bar{m} \\ \bar{m}_v &= \alpha_{21}\bar{r}_u + \alpha_{22}\bar{r}_v + \alpha_{23}\bar{m} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

(28) va (29) formulalar sirtning derivasion formulalari deyiladi.

Endi bu yerda $\Gamma_{ij}^{k}, \alpha_{ij}$, λ, μ, γ koeffisiyentlarni sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari koeffisiyentlari E, F, G, L, M, N va ularning xususiy hosilalari orqali ifodalanishini ko'rsatamiz. Avval, $\lambda, \mu, \gamma -$koeffisiyentlarni topamiz.

(28) tengliklarning har birini $\bar{m}$ ga skalyar ko'paytirib,

$$(\bar{r}_u, \bar{m}) = (\bar{r}_v, \bar{m}) = 0$$

va

$$L = -(\bar{r}_u, \bar{m}_u) = (\bar{r}_{uu}, \bar{m}), \quad M = -(\bar{r}_u, \bar{m}_v) = -(\bar{r}_v, \bar{m}_u) = (\bar{r}_{uv}, \bar{m}),$$
$$N = -(\bar{r}_v, \bar{m}_v) = (\bar{r}_{vv}, \bar{m})$$

ekanligidan quyidagini hosil qilamiz:

$$\lambda = L, \quad \mu = M, \quad \gamma = N$$

Kristoffel simvollari

Egri (28) formulalardagi Γ_{ij}^{k} koeffisiyentlarni topamiz. Γ_{ij}^{k} koeffisiyentlar Kristoffel simvollari deyiladi. (28) tengliklarning birinchisini avval $\bar{r}_u$ ga, keyin $\bar{r}_v$ ga skalyar ko'paytirib, $\bar{r}_u^2 = E$, $(\bar{r}_u, \bar{r}_v) = F$, $\bar{r}_v^2 = G$ ekanligidan qo'yidagi kelib chiqadi:

$$\left.\begin{aligned} (\bar{r}_{uu}, \bar{r}_u) &= \Gamma_{11}^{1}E + \Gamma_{11}^{2}F \\ (\bar{r}_{uu}, \bar{r}_v) &= \Gamma_{11}^{1}F + \Gamma_{11}^{2}G \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$\bar{r}_u^2 = E$ tenglikni u bo'yicha differensiallab, ushbuni $2(\bar{r}_u\bar{r}_{uu}) = E_u$, va $(\bar{r}_u\bar{r}_v) = F$ ni u bo'yicha, $\bar{r}_u^2 = E$ ni v bo'yicha differensiallab

$$(\bar{r}_{uv}, \bar{r}_v) + (\bar{r}_u\bar{r}_{vu}) = F_u, \quad 2(\bar{r}_{uv}, \bar{r}_u) = E_v$$

tengliklarni hosil qilamz. Bu yerdan $(\bar{r}_{uv}, \bar{r}_u)$ ni topamiz:

$$(\bar{r}_{uv}, \bar{r}_u) = F_u - \frac{1}{2}E_v.$$

Endi (30) ni

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

shaklda yozish mumkin. Bu sistemani Γ_{11}^1 va Γ_{11}^2 ga nisbatan yechib, ushbuni hosil qilamiz:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{1}{2} E_u G - F_u F + \frac{1}{2} E_v F \right)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{EG - F^2} \left(-\frac{1}{2} E_u F + F_u E - \frac{1}{2} E_v E \right)$$

Kristoffelning qolgan simvollari ham (28) ning ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan huddi yuqoridagidek usulda topiladi. Tenzorlar analizining belgilashlaridan foydalanib, derivasion formulalarni va Kristoffel simvollarini qulayroq usulda yozish mumkin. Buning uchun u va v egri yaiziqli koordinatalarni u^1 va u^2 orqali, E, F, G larni mos ravishda $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ orqali, L, M, N larni $b_{11}, b_{12} = b_{21}, b_{22}$ orqali belgilaymiz: $u^1 = u,\ u^2 = v,\ g_{11} = E,\ g_{12} = g_{21} = F,\ g_{22} = G,$ $b_{11} = L,\ b_{12} = b_{21} = M,\ b_{22} = N.$ $\overline{r}$ vektorning u' buyicha hususiy hosilalarini $\overline{r}$ ning quyida 1 indeks orqali, u^2 buycha hususiy hosilarini $\overline{r}$ ning quyida 2 indeks orqali belgilaymiz:

$$\overline{r}_1 = \overline{r}_u, \quad \overline{r}_2 = \overline{r}_v, \quad \overline{r}_{11} = \overline{r}_{uu}, \quad \overline{r}_{12} = \overline{r}_{uv}, \quad \overline{r}_{22} = \overline{r}_{vv}.$$

Bu belgilashlarda birinchi va ikkinchi kvadratik forma koeffisiyentlari

$$g_{ij} = (\overline{r}_i, \overline{r}_j); \quad b_{ij} = (\overline{r}_{ij}, \overline{m}), \quad i = 1,2$$

ko'rinishda bo'ladi. Derivasion formulalar esa quyidagicha:

$$\frac{\partial \overline{r}_1}{\partial u^i} = \overline{r}_{1i} = \Gamma_{1i}^1 \overline{r}_1 + \Gamma_{1i}^2 \overline{r}_2 + b_{1i} \overline{m}$$

$$\frac{\partial \overline{r}_2}{\partial u^i} = \overline{r}_{2i} = \Gamma_{2i}^1 \overline{r}_1 + \Gamma_{2i}^2 \overline{r}_2 + b_{2i} \overline{m}$$

$$\frac{\partial \overline{m}}{\partial u^i} = -b_i^1 \overline{r}_1 - b_i^2 \overline{r}_2 + b_i \overline{m}$$

Kristoffel simvollari ushbu formulalardan topiladi:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \right), \quad i, j \quad l = 1,2;$$

bu yerda

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g_{\_11} g_{22} - g_{12}^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g_{\_11} g_{22} - g_{12}^2}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g_{\_11} g_{22} - g_{12}^2},$$

lar birinchi kvadratik forma matrisasi (g_{ij}) ga teskari matrisaning elementlaridir.

$\overline{m}^2 = 1$ tenglikdan u^1 va u^2 bo'yicha hususiy hosilalar olamiz: $(\overline{m}_1, \overline{m}) = (\overline{m}_2, \overline{m}) = 0$

U holda bu tengliklardan $b_i = 0$ ekanligi kelib chiqadi. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** tengliklarni $\overline{r}_1$ va $\overline{r}_2$ ga skalyar ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$-b_{11} = b_1^1 E + b_1^2 F$$
$$-b_{12} = b_1^1 F + b_1^2 G$$

bu yerdan esa

$$b_1^1 = \frac{b_{12} g_{12} - b_{11} g_{22}}{\det(I)}, \quad b_1^2 = \frac{b_{11} g_{12} - b_{12} g_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

bo'ladi .

Huddi shunday b_2^1 va b_2^2 koeffisiyentlar ham topiladi:

$$b_2^1 = \frac{b_{22} g_{12} - b_{12} g_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}, \quad b_2^2 = \frac{b_{12} g_{12} - b_{22} g_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

Savollar.

- Sirtning derivasion formulalarini yozing.
- Derivasion formulalardagi $\lambda, \mu, \gamma -$koeffisiyentlarni toping.
- Kristoffel simvollari va ularni hisoblash formulalarini yozing.
- Tenzor belgilashlarida derivasion formulalarini yozing.
- Tenzor belgilashlarida Kristoffel simvollari uchun formulalarini yozing.

Sirtlar nazariyasining asosiy tenglamalari.

REJA:

- Gauss formulasi.
- Peterson-Kodassi formulalari.

Tayanch iboralar: Silliq sirt, birinchi va ikkinchi kvadratik formalar, derivasion formulalar, Kristoffel simvollari, Gauss formulasi, to'la egrilik, Peterson-Kodassi formulalari.

Adabiyotlar: [2], 154-159, [7], 108-117.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Gauss formulasi

Bizning maqsadimiz, sirtning to'la egriligi K sirtning birinchi kvadratik formasi koeffisiyentlari orqali ifodalanishini ko'rsatish, yani K sirt ichki geometriyasi tushunchasi va sirtning izometriyasida o'zgarmasligini ko'rsatishdir. Keltirilgan tasdiq Gauss teoremasining mazmunidir va u sirtlar nazariyasining eng nozik teoremalaridan biridir, chunki $K = k_1 k_2$, k_1 va k_2 bosh egriliklar sirtning izometriyasida o'zgaradi.

Agar $S - C^2$ – regulyar sirt bo'lsa, u xolda

$$(\overline{r}_{uu})_v = (\overline{r}_{uv})_u; \quad (\overline{r}_{uv})_v = (\overline{r}_{vv})_u, \quad (\overline{m}_u)_v = (\overline{m}_v)_u \tag{31}$$

tengliklar o'rinlidir.

(31) tenglikka asosan $\overline{B}_1 = \overline{r}_{112} - \overline{r}_{121}$ nol vektordir. $\overline{r}_{11}$ va $\overline{r}_{12}$ o'ringa derivasion formulalardagi ifodalarini yozamiz:

$$\begin{aligned}
&\overline{B}_1 = \frac{\partial}{\partial v}(\Gamma^1_{11}\overline{r}_1 + \Gamma^2_{11}\overline{r}_2 + b_{11}\overline{m}) - \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma^1_{12}\overline{r}_1 + \Gamma^2_{12}\overline{r}_2 + b_{12}\overline{m}) = \\
&(\Gamma^1_{11})_u\overline{r}_1 + (\Gamma^2_{11})_v\overline{r}_2 + (b_{11})_u\overline{m} - \\
&-(\Gamma^1_{12})_u\overline{r}_1 - (\Gamma^2_{12})_u\overline{r}_2 - (b_{12})_u\overline{m} + \Gamma^1_{11}\overline{r}_{12} + \Gamma^2_{11}\overline{r}_{22} + b_{11}\overline{m}_2 - \\
&-\Gamma^1_{12}\overline{r}_{11} - \Gamma^2_{12}\overline{r}_{21} + b_{12}\overline{m} = \ldots = \beta_{11}\overline{r}_1 + \beta_{12}\overline{r}_2 + \beta_{13}\overline{m},
\end{aligned}$$

$\overline{r}_1, \overline{r}_2$ va $\overline{m}$ vektorlarning chiziqli bog'lanmagan ekanligidan

$$\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = 0 \tag{32}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= (\Gamma^1_{11})_v - (\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + \alpha_{21}b_{11} - \alpha_{11}b_{12} \\
\beta_{12} &= (\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - (\Gamma^2_{12})^2 + \alpha_{22}b_{11} - \alpha_{12}b_{12} \\
\beta_{13} &= (b_{11})_v - (b_{12})_u + \Gamma^1_{11}b_{12} - \Gamma^1_{12}b_{11} + \Gamma^2_{11}b_{22} - \Gamma^2_{12}b_{12}
\end{aligned} \tag{33}$$

Yuqoridagi jarayonni $\overline{B}_2 = (\overline{r}_{uv})_v - (\overline{r}_{uv})_u, \quad \overline{B}_3 = (\overline{m}_u)_v - (\overline{m}_v)_u$ vektorlarga qo'llab,

$$\overline{B}_i = \beta_{i1}\overline{r}_1 + \beta_{i2}\overline{r}_2 + \beta_{i3}\overline{m}, \quad i = 2.3$$

tengliklarni xosil qilamiz,bu yerdan esa (31) ga ko'ra

$$\overline{B}_{i1} = \overline{B}_{i2} = \overline{B}_{i3} = 0, \quad i = 2..3 \tag{34}$$

kelib chiqadi. (32) tenglikda $(\beta_{11} = 0)$ Kristoffel simvollari o'rniga birinchi kvadratik forma koeffisiyentlarini qo'ysak, ushbu Gauss formulasi kelib chikadi:

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + \sum_{i.j=1}^{2}\Gamma^i_{12}\Gamma^j_{12}g_{ij} - \sum_{k.l=1}^{2}\Gamma^k_{11}\Gamma^l_{22}g_{kl.}$$

Gauss formulasi quyidagi geometrik xossani ifodalaydi. Sirtning to'la egriligi sirt izametriyasida o'zgarmaydi. Sirtning to'la egriligi :

$$\mathrm{K} = k_1k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

shu sababli, Gauss formulasidan sirtning to'la egriligi birinchi kvadratik formaning koeffisiyentlari va ularning hususiy hosilalari orqali ifodalanishi kelib chiqadi.

Peterson-Kodassi formulalari

(31) va (34) tengliklardan yana ikkita formula kelib chiqadi:

$$\beta_{13} = \beta_{31} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0 \quad va \quad \beta_{33} = 0$$

Bu tengliklardan kelib chiqadigan formulalar Peterson-Kodassi formulalari deyiladi. Ularni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \Gamma^1_{12} b_{11} - \Gamma^2_{12} b_{21} = \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} \Gamma^1_{11} b_{12} - \Gamma^2_{12} b_{22}$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \Gamma^1_{22} b_{11} - \Gamma^2_{22} b_{21} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} \Gamma^1_{21} b_{12} - \Gamma^2_{21} b_{22}$$

Bu formulalarni quyidagicha ham keltirib chiqarish mumkin. Ushbu tengliklar

$$b_{i1} = -\overline{m}_1 \overline{r}_i. \quad b_{i1} = -\overline{m}_2 \overline{r}_i. \quad i = 1.2.$$

ning birinchisini u^2 bo'yicha, ikkinchisini u^1 bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial b_{1i}}{\partial u^2} = -\overline{m}_{12} \overline{r}_i - \overline{m}_1 \overline{r}_{i2}$$

$$\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = -\overline{m}_{21} \overline{r}_i - \overline{m}_2 \overline{r}_{i1}$$

Birinchisidan ikkinchisini ayiramiz va

$$\overline{m}_{12} = \overline{m}_{21} = \frac{\partial^2 \overline{m}}{\partial u^1 \partial u^2}$$

ekanligini etiborga olib, ushbuni xosil qilamiz

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = \overline{m}_2 \overline{r}_{i1} - \overline{m}_1 \overline{r}_{i2}$$

Endi derivasion formulalaridan foydalanamiz:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = \Gamma^1_{i1} \overline{r}_1 \overline{m}_2 + \Gamma^2_{i1} \overline{r}_2 \overline{m}_2 - \Gamma^1_{i2} \overline{r}_1 \overline{m}_1 - \Gamma^2_{i2} \overline{r}_2 \overline{m}_1$$

Yana derivasion formulalardan foydalanamiz:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = -\Gamma^1_{i1} b_{12} - \Gamma^2_{i1} b_{22} + \Gamma^1_{i2} b_{11} + \Gamma^2_{i2} b_{21}$$

Bu tenglikni ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \Gamma^1_{i2} b_{11} - \Gamma^2_{i2} b_{21} = \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} - \Gamma^1_{i1} b_{12} - \Gamma^2_{i1} b_2$$

Bu esa Peterson-Kodassi tengliklaridir.

Savollar.

- Gauss teoremasi mazmunini ayting.
- Gauss formulasini keltirib chiqaring.
- Gauss formulasi qanday geometrik xossani ifodalaydi.
- Peterson-Kodassi formulasini keltirib chiqaring.

Sirtdagi chiziqning geodezik egriligi. Geodezik chiziqlar

REJA:

- Sirtdagi chiziqning geodezik egriligi.
- Geodezik chiziqlar.

Tayanch iboralar: sirtning ichki geometriyasi, geodezik egrilik, Kristoffel simvollari, geodezik chiziqlar, bosh normal.

Adabiyotlar: [2], 162-168, [6], 135-142, [7], 117-129.

Darsning maqsadilari:

Ta'limiy maqsadi: talabalarga funksiyaning limiti, bir tomonli limitlari hamda chekli limitga ega funksiyalarning xossalari haqida bilimlar berish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro xurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar kursi, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Sirtdagi chiziqning geodezik egriligi

Sirtning ichki geometriyasiga, ya'ni sirtdagi chiziqning uzunligidangina bog'liq bo'ladigan tushunchalarga sirtning birinchi kvadratik formasi yordamida aniqlangan tushunchalar: sirtdagi chiziq uzunligi, sirtdagi chiziqlar orasidagi burchak, sirtdagi soha yuzi, sirtning gauss egriligi kiradi. Sirtdagi chiziqning geodezik egriligi ham sirtning ichki geometriyasiga kirishini ko'rsatamiz.

S sirtdagi L chiziqning geodezik egriligi

$$k_g = (k\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{b})$$

formula bilan hisoblanar edi, bu yerda, $\bar{\tau}$ va $\bar{n}$ L chiziqning birlik urinma va bosh normal vektorlari, $k-L$ chiziqning egriligi. $\bar{\tau}$ va $k\bar{n}$ vektorlarni $\bar{r}=\bar{r}(t)$ vektorning hosilalari orqali ifodalash mumkin:

$$\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{ds}=\frac{\bar{r}_t'}{|\bar{r}_t'|},$$

$$k\bar{n}=\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=\bar{r}_{tt}''\frac{1}{|\bar{r}_t'|^2}-\bar{r}_t'\frac{(\bar{r}_{tt}'',\bar{r}_t')}{|\bar{r}_t'|^4}.$$

Demak, geodezik egrilik

$$k_g=\frac{(\bar{r}_{tt}'',\bar{r}_t',\bar{m})}{|\bar{r}_t'|^3} \tag{35}$$

formula bilan topiladi, bu yerda $\bar{m}-$sirtning birlik normal vektori. Agar $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ sirt tenglamasi, $u=u(t),\ v=v(t)-L$ chiziqning parametrik tenglamasi bo'lsa,

$$\bar{r}_t'=\bar{r}_u'u_t'+\bar{r}_vv_t' \tag{36}$$

$$\bar{r}_{tt}''=\bar{r}_{uu}(u_t')^2+2\bar{r}_{uv}u_t'v_t'+\bar{r}_{vv}(v_t')^2+\bar{r}_uu_{tt}''+\bar{r}_vv_{tt}'' \tag{37}$$

bo'ladi. $\bar{r}_{uu},\bar{r}_{uv},\bar{r}_{vv}$ larni derivasion formulalardan foydalanib, $\bar{r}_{tt}''$ uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\bar{r}_{tt}''=(u_{tt}''+A)\bar{r}_u+(v_{tt}''+B)\bar{r}_v+c\bar{m}, \tag{38}$$

bu yerda

$$\left.\begin{aligned}A&=\Gamma_{11}^1(u_t')^2+\Gamma_{12}^1u_t'v_t'+\Gamma_{22}^1(v_t')^2\\ A&=\Gamma_{11}^2(u_t')^2+\Gamma_{12}^2u_t'v_t'+\Gamma_{22}^2(v_t')^2\\ C&=L(u_t')^2+Mu_t'v_t'+N(v_t')^2.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

(38) ni (35) ga ko'paytirib, geodezik egrilik uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$k_g=[(u_{tt}''+A)v_t'-(v_{tt}''+B)v_t']\cdot\frac{(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{m})}{|\bar{r}_t^1|^3},$$

$$|\bar{r}_t'|=\sqrt{E(u_t')^2+2Fu_t'\cdot v_t'+G(v_t')^2}.$$

va

$$(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\bar{m})=\left(\bar{r}_u,\bar{r}_v,\frac{\bar{r}_u\times\bar{r}_v}{|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|}\right)=\ \ |\bar{r}_u\times\bar{r}_v|=\sqrt{EG-F^2}$$

ekanligidan

$$k_g = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{Eu_t^{'2}+2Fu_t^{'}v_t^{'}+G(v_t^{'})^2}}\{u_{tt}^{''}+\Gamma_{11}^1 u_t^{'2}+\Gamma_{12}^1 u_t^{'}v_t^{'}+\Gamma_{22}^1 v_t^{'2})v_t^{'}-$$
$$-(\Gamma_{11}^2(u_t^{'})^2+\Gamma_{12}^2 u_t^{'}v_t^{'}+\Gamma_{22}^2(u_t^{'})^2+v_{tt}^{''})u_t^{'}\} \tag{40}$$

ni hosil qilamiz. Demak, geodezik egrilik ham faqatgina sirtning birinchi kvadratik formasi koeffisiyentlari orqali ifodalanar ekan, ya'ni geodezik egrilik sirt ichki geometriyasiga tegishli tushuncha ekan.

Geodezik chiziqlar

Ta'rif 18 *Agar sirtdagi chiziqning har bir nuqtasidagi geodezik egiriligi nolga teng bo'lsa, chiziqni sirtning geodezik chizig'i deyiladi.*

Teorema 19 *S sirtdagi L chiziqning geodezik chiziq bo'lishi uchun uning egriligi noldan farqli har bir nuqtasidagi chiziqning bosh normali va sirtning normal vektorining ustma ust tushishi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Geodezik egrilik uchun ushbu

$$k_g = k(\bar{n},\bar{r}',\bar{m})$$

formuladan $k \neq 0$ bo'lsa, $(\bar{n},\bar{r}',\bar{m})=0$ ekanligi kelib chiqadi. $\bar{m}$ va $\bar{n}$ vektorlar $\bar{r}'=\bar{\tau}$ ga ortogonal ekanligidan ularning kolleniarligi kelib chiqadi. Teskarisining isboti esa bevosita kelib chiqadi.

Teorema 20 *Sirtning ixtiyoriy nuqtasidan ixtiyoriy yo'nalash bo'yicha yagona geodezik chiziq o'tadi.*

S sirtdagi L chiziqning tenglamasi $u=u(t)$, $v=(t)$ bo'lsin. Agar L geodezik chiziq bo'lsa uning tenglamasi

$$u_{tt}^{''}+A=0 \quad v_{tt}^{''}+B=0$$

bo'ladi yoki

$$\frac{d^2u^k}{dt^2}+\sum_{ij=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\frac{du^j}{dt}=0 \qquad k=1,2 \tag{41}$$

Geodezik chiziq quyidagi xossalarga ega:

• 1) Sirtdagi bir biriga yaqin nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa bu nuqtalarni tutashtiruvchi geodezik chiziq yoyining uzunligiga tengdir.

• 2) L chiziqning M nuqtadagi geodezik egriligi L ning $T_M(S)$ dagi ortogonal proyeksiyasining egriligiga tengdir.

• 3) Geodezik chiziqlar yoy uzunligi funksonali

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt$$

ning ekstremalidir.

Agar S sirtdagi L chiziq $u^2=f(u^1)$ tenglama bilan berilsa, uning geodezik egriligi

$$k_g=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,\frac{|f''+\Gamma_{11}^2(2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)f'+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)f'^2-\Gamma_{22}^1f'^3|}{(g_{11}+2g_{12}f'+g_{22}f'^2)^{3/2}} \qquad (42)$$

formula bilan topiladi.

Misol: Puankare yarim tekisligining, ya'ni metrikasi $ds^2=\dfrac{du^2+dv^2}{v^2}$ bo'lgan $v>0$ yarim tekislikning geodezik chiziqlari va gauss egriligini toping.

$$E=g_{11}=\frac{1}{v^2};F=g_{12}=0;G=g_{22}=\frac{1}{v^2}$$

bo'lgani uchun

$$g^{11}=v^2;g^{12}=0;g^{22}=v^2$$

bo'ladi. Bundan esa Kristoffel simvollarini topamiz:

$$\Gamma_{11}^1=0;\Gamma_{12}^1=-\frac{1}{v};\Gamma_{22}^1=0;\Gamma_{11}^2=\frac{1}{v};\Gamma_{12}^2=0;\Gamma_{22}^2=-\frac{1}{v}.$$

Birinchi kvadratik forma koeffisiyentlarining ifodasidan $g_{12}=0$ va $\dfrac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2}=0$ ekanligi kelib chiqadi, bu yerdan esa Gauss formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1g_{11}-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2g_{22};$$

yoki

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=-\frac{1}{v^4}.$$

Endi geodezik chiziqlarni $v=f(u)$ ko'rinishda izlaymiz.

Geodezik chiziq tenglamasi

$$f''+\Gamma_{12}^2+(2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)f'+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)f'^2-\Gamma_{22}^1f'^3=0$$

Puankare yarim teisligi uchun ushbu ko'rinishni oladi:

$$f'' + \frac{1}{v} + \frac{1}{v} f'^2 = 0.$$

$v = f(u)$ bo'lgani uchun oxirgi tenglama

$$f'' + \frac{f'^2}{f} = -\frac{1}{f}.$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani f ga ko'paytiramiz:

$$ff'' + f'^2 = -1 \quad yoki \quad (ff')' = -1.$$

Integrallasak,

$$ff' = -u + u_0$$

hosil bo'ladi. Bu tenglamaning yechimini topamiz: $\frac{fdf}{du} = -(u - u_0)$ yoki $fdf + (u - u_0)du = 0.$

Bu yerdan

$$f^2 + (u - u_0)^2 = a^2 \quad yoki \quad v^2 + (u - u_0)^2 = a^2$$

hosil bo'ladi. Demak markazlari $(u_0, 0)$ nuqtada, radiuslari a ga teng aylanalar oilasi geodezik chiziqlar bo'lar ekan. Biz faqatgina $u = u_0$ chiziqlarni qaramadik. Bu to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamasini (41) ga qo'yib, ularning ham geodezik chiziq ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Demak $u = u_0$ chiziqlar ham geodezik chiziqlar ekan.

Savollar.

• Sirtning ichki geometriyasi nima?

• Sirtning geodezik egriligi formulasini keltiring.

• Sirtning geodezik egriligi sirt ichki geometriyasi tushunchasi ekanligini ko'rsating.

• Chiziqning geodezik chiziq bo'lishligining zarur va yetarli shartini isbotlang.

• Puankare yarim tekisligi geodezik chiziqlarini toping.

1-topshiriq. Amallarni bajaring.

1. $z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}\ \left(p>0,\ q>0\right)$ giperbolik paraboloidning parametrik tenglamalarini yozing (koordinat chiziqlari sifatida sirtning to'g'ri chiziqli yasovchilarini qabul qiling).

2. $z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sirtning parametrik tenglamalarini yozing.

3. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ sirtning parametrik tenglamalarini yozing.

4. $a^2\left(x^2+y^2\right)^2=x^2z^2$ sirtning parametrik tenglamalarini yozing (bu qanday sirt?).

5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ sirtning parametrik tenglamalarini yozing.

6. Quyidagi ikkinchi tartibli sirtlarning parametrik tenglamalarini yozing:

a) ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

b) bir pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

v) elliptik silindr

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

g) konus

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

va

$$z^2=xy;$$

7. $x=u+\sin v,\ y=u+\cos v,\ z=a+u$ tenglamalar bilan qanday sirt berilgan?

8. $x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2,\ z=uv$ tenglamalar bilan qanday sirtni aniqlaydi?

9. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u$ tenglamalar bilan berilgan sirtning oshkormas tenglamasini yozing (u qanday sirtni ifodalaydi?).

10. $x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$ sirt berilgan. Ushbu $A(4,2,3)$ va $B(1,4,2)$ nuqtalar bu sirtda yotadimi (u, v egri chiziqli koordinatalarning qiymatlarini toping)?
11. Radiusi R va markazi koordinata boshida bo'lgan sferaning tenglamalarini yozing.
12. Vint chiziqning bosh normallaridan tuzilgan sirt tenglamasini yozing.
13. $x = u,\ y = u^2,\ z = u^3$ chiziqning urinmalaridan tuzilgan sirtning parametrik va oshkormas tenglamalarini yozing.
14. Vint chiziq $x = a\cos u,\ y = a\sin u,\ z = bu$ urinmalaridan tuzilgan sirtning parametrik tenglamalarini yozing.
15. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$ va

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2},\ y = \frac{v}{u^2 + v^2},\ z = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

tenglamalar bitta sirtni ifodalaydi. Isbotlang.
16. Tekislikda koordinat chiziqlarini aniqlang:

a) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = 0$;

b) $x = u,\ y = v,\ z = 0$.

17. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ gelikoidning koordinat chiziqlarini aniqlang.
18. $x = R\cos u\cos v,\ y = R\cos u\sin v,\ z = R\sin u$ sferaning koordinat chiziqlarini aniqlang.
19. $z = axy$ sirtning koordinat chiziqlarini aniqlang.
20. $x = 3u + v^2 + 1,\ y = 2u + v^2 - 1,\ z = -u + 2v$ sirt parametrik tenglamalari bilan berilgan.

1) bu sirt silindrik sirt ekanligini ko'rsating;

2) sirtning biror yo'naltiruvchi chizig'i tenglamalarini yozing;

3) sirtning $M(u = 2, v = 3)$ nuqtasidan o'tgan to'g'ri chiziqli yasovchisini toping.

2-topshiriq.

1-3. Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtlarning tenglamalarini yozing:

1) ellips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) giperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) parabola $y^2=2px$.

4. $x^2=2py$ parabolaning ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt nechanchi tartibli algebraik sirt bo'ladi? Chizmani bajaring.

5. $x=a+b\cos u,\ y=0,\ z=b\sin u\ (b<a)$ aylananing oz o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tor deyiladi. Sirtning parametrik va oshkormas tenglamalarini yozing.

6. $x=achu/a,\ y=0,\ z=u$ zanjir chiziqning oz o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt (katenoid)ning parametrik tenglamalarini yozing.

7. $x^2=2py$ parabolaning ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt nechanchi tartibli algebraik sirt bo'ladi? Chizmani bajaring.

8. $x=a+b\cos u,\ y=0,\ z=b\sin u\ (b<a)$ aylananing oz o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tor deyiladi. Sirtning parametrik va oshkormas tenglamalarini yozing.

9. $x=achu/a,\ y=0,\ z=u$ zanjir chiziqning oz o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt (katenoid)ning parametrik tenglamalarini yozing.

3-topshiriq.

1. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=av$ gelikoidning ixtiyoriy nuqtasidagi urinma tekisligi va normali tenglamalarini yozing. Sirtning berilgan $M\left(u=1,\ v=\frac{\pi}{2}\right)$ nuqtasidagi urinma tekisligi va normali tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?

2. $x=2u-v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3-v^3$ sirtning $M(3,5,7)$ nuqtasidagi urinma tekisligi va normali tenglamalarini yozing.

3. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ sirtning $M(u=1,\ v=1)$ nuqtasidagi urinma tekisligi va normali tenglamalarini yozing.

4. $x=u,\ y=u^2-2v,\ z=u^3-3uv$ sirtning $M(1,3,4)$ nuqtasi berilgan. Bu nuqtada urinma tekislik va normal tenglamalarini yozing.

5. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u$ sirtning $M\left(u = 2,\ v = \frac{\pi}{4}\right)$ nuqtasidagi urinma tekisligi va normali tenglamalari yozilsin; $u = 2$ chiziqning urinmasi tenglamasini tuzing.

6-10. Quyidagi sirtlarning berilgan nuqtalaridagi urinma tekisligi va normali tenglamalarini yozing:

6) $z = 2x^2 - 4y^2,\ M(2,1,4)$;

7) $z = x^3 + y^3,\ M(1,2,9)$;

8) $z = \dfrac{1}{a^2\left(x^3 - 3axy + y^3\right)},\ M(a,a,-a)$;

9) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy,\ M(3,4,-7)$;

10) $z = arctg\dfrac{y}{x},\ M\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

11-15. Quyidagi ikkinchi tartibli sirtlarning ixtiyoriy nuqtasidagi urinma tekisligi tenglamalari yozilsin:

11) ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

12) bir pallali giperboloid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

13) ikki pallali giperboloid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$;

14) elliptik paraboloid $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$;

15) giperbolik paraboloid $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$.

16-21. Oshkormas tenglamasi bilan berilgan sirtlarning berilgan nuqtasidagi urinma tekisligi va normali tenglamalarini yozing:

16) $x^2 + y^2 + z^2 = 169,\ M(3,4,12)$;

17) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0,\ M(1,2,-1)$;

18) $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5,\ M\left(1,1,2\right)$;

19) $x^2-2y^2-3z^2-4=0,\ M\left(3,1,-1\right)$;

20) $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z,\ M\left(2,3,6\right)$.

21) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ giperboloidning $M\left(a,b,c\right)$ nuqtasidagi urinma tekisligi tenglamasini yozing.

22-23. $xyz=a^3$ sirt berilgan.

22) sirtning ixtiyoriy nuqtasidagi urinma tekisligi tenglamasini yozing;

23) qanday shartda sirt $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka urinadi?

24) sirtning $M\left(a,a,a\right)$ nuqtasidagi urinma tekisligi va normali tenglamasini yozing. Normal M nuqtada oz o'qi bilan qanday burchak tashkil etadi?

25) $xyz=a^3$ sirtning hamma nuqtalaridagi urinma tekisliklari koordinat tekisliklari bilan hajmi o'zgarmas bo'lgan tetraedr tashkil etadi. Shuni isbotlang va tetraedr hajmini toping;

26) $xyz=1$ sirtga $x+y+z-3=0$ tekislikka parallel urinma tekislik o'tkazing.

27) $x^2+2y^2+z^2=1$ ellipsoidga berilgan $x-y+2z=0$ tekislikka parallel qilib urinma tekislik o'tkazing.

28). $z=xy$ sirtning $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ to'g'ri chiziqqa perpendikluyar bo'lgan urinma tekisligi tenglamasini yozing.

3'-topshiriqga ilovalar.

1. $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sirtning hamma urinma tekisliklari bir nuqtadan o'tadi. Shuni isbotlang va javobingizni geometrik ma'nosini tushuntiring.

2. $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ aylanma sirtning barcha normallari aylanish o'qini kesib o'tadi. Shuni isbot qiling.

3. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ sirtning urinma tekisliklari koordinata o'qlaridan yig'indisi a ga teng bo'lgan kesmalar ajratadi. Isbotlang.

4. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ sirtning urinma tekisliklari koordinata o'qlaridan kvadratlarining yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan kesmalar ajratadi. Shuni ko'rsating.

5. $x+2y-\ln z+4=0$ va $x^2-xy-8z+z+5$ sirtlar $P(2,-3,1)$ nuqtada bir biriga urinadi (ya'ni sirtlar P nuqtada umumiy urinma tekislikka ega). Shuni ko'rsating.

6. $x^2+y^2+z^2=ax,\;\; x^2+y^2+z^2=by,\;\; x^2+y^2+z^2=cz$ sirtlar o'zaro ortogonal ekanligini ko'rsating.

7. $x^2-y^2-3z=0$ sirtning $A(0,0,-1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tekisligi tenglamasini yozing.

8. $x^2+y^2+z^2-6y+4z=12$ sirtda shunday nuqtalarni topingki, bu nuqtalardagi urinma tekisliklar koordinat tekisliklariga parallel bo'lsin.

9. Koordinata boshidan $x^2+y^2=2pz$ aylanma paraboloidning urinma tekisliklariga o'tkazilgan perpendikulyarlar asoslarining geometrik o'rni topilsin.

10. Koordinata boshidan $xyz=a^3$ sirtning urinma tekisliklariga o'tkazilgan perpendikulyarlar asoslarining geometrik o'rni

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=27a^3xyz$$

sirtdan iborat ekanligini ko'rsating.

11. $y=x,\;\; z=\frac{\pi}{4}$ to'g'ri chiziq bo'ylab

$$y=xtgz$$

sirtning normallaridan tuzilgan sirt giperbolik paraboloid ekanligini ko'rsating.

12. $x+ay+a^2=1$ tekisliklar oilasining o'ramasi topilsin.

13. $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-a^2=0$ sirtlar oilasining o'ramasi topilsin.

14. O'zgarmas radiusli va markazlari

$$x^2+y^2=a^2,\;\; z=0$$

aylanada yotgan sferalar oilasining o'ramasi topilsin.

15. Har biri koordinat tekisliklari bilan hajmi o'zgarmas bo'lgan tetraedr tashkil

etuvchi tekisliklar oilasining o'ramasi topilsin.
16. $x\sin\alpha - y\cos\alpha + z = k\alpha$ (α −parametr, $k = const$) tekisliklar oilasi o'ramasining qaytish qirrasi topilsin.
17. O'zgarmas a radiusli va markazlari $z = 0$ tekislikda bo'lgan sferalar oilasining o'ramasi topilsin.

4-topshiriq.
1-6. Quyidagi sirtlarning birinchi kvadratik formasi topilsin:
1) $x = \varphi(u)\cos v,\ \ y = \varphi(u)\sin v,\ \ z = \psi(u)$ (aylanma sirt);
2) $x = R\cos u\cos v,\ \ y = R\cos u\sin v,\ \ z = R\sin u$ (sfera);
3) $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ z = u^2$ (aylanma paraboloid);
4) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ (gelikoid);
5) $x = ach\dfrac{u}{a}\cos v,\ \ y = ach\dfrac{u}{a}\sin v,\ \ z = u$ (katenoid);
6) $x = a\cos u\cos v,\ \ y = a\sin u\cos v,\ \ z = a\left(\ln tg\dfrac{u}{2} + \cos u\right)$ (psevdosfera).
7. Quyida kvadratik formalar berilgan
a) $ds^2 = du^2 + 4dudv + 4dv^2$;
b) $ds^2 = -2du^2 + 3dudv + dv^2$;
v) $ds^2 = du^2 + 2dudv - dv^2$;
g) $ds^2 = du^2 - 2dudv + 4dv^2$;
d) $ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2$.
Bu formalarning qaysi biri biror sirtning I kvadratik formasi bo'lib xizmat qilaoladi?
8. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ \ z = u^2$ sirtning birinchi kvadratik formasini

$$ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$$

ko'rinishga keltiring.
9. $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv$ sirt berilgan.
a. I kvadratik forma topilsin;
b. $v = au$ chiziqning yoy uzunligi differensialini toping;
c. $v = au$ chiziqning $u = 1,\ u = 2$ koordinat chiziqlari bilan kesishgan nuqtalari

orasidagi yoyi uzunligini toping.

10. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ sirtdagi $u + v = 0,\ u - v = 0$ chiziqlar orasidagi burchakli toping.

11. Chiziqli elementni ushbu

$ds^2 = du^2 + dv^2$ ko'rinishda bo'lgan sirtdagi $v = 2u$ va $v = -2u$ chiziqlar qanday burchak ostida kesishadi?

12. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$ sirtda $v = u + 1$ va $v = 3 - u$ chiziqlar berilgan. Ular orasidagi burchak topilsin.

13. $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = av$ gelikoidda $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1$ koordinat chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli to'rtburchakning yuzini toping.

14. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sferaning $x^2 + y^2 = ax$ silindr bilan kesilgan qismini toping.

15. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konusning $z = 1$ teksilik bilan kesilgan qismining yuzini hisoblang.

16. $z = xy$ sirtning koordinat chiziqlari orasidagi burchak topilsin.

17-. Quyidagi oshkormas (oshkor) tenglamalari bilan berilgan sirtlarning birinchi kvadratik formasini toping:

17. $z = axy$ (giperbolik paraboloid);

18. $z = \dfrac{x^2}{2p} \pm \dfrac{y^2}{2q}\ \left(p > 0,\ q > 0\right)$ (paraboloidlar);

19. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (konus);

20. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$;

21. $xyz = a^3$;

22. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

23. $z = e^x \cos y$;

24. $z = \ln\cos x - \ln\cos y$ (Sherk sirti);

25. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (ellipsoid);

26. $z = \alpha arctg\dfrac{y}{x}$ (gelikoid);

27. $z = z\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (konik sirt);

28. $z = xy^2$;

5-topshiriq.

1. Sferaning $\overline{r} = R\overline{n}$ tenglamasidan foydalanib, uning I va II kvadratik formalarini toping va

$$II = \frac{1}{R}I \qquad\qquad (R - \text{sfera radiusi})$$

tenglikning o'rinli ekanligini ko'rsating.

2. $x = \varphi(u)\cos v,\ y = \varphi(u)\sin v,\ z = \psi(u)$ aylanma sirtning II kvadratik formasini toping.

3-9. Quyidagi sirtlarning ikkinchi kvadratik formalarini toping:

3) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$;

4) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$;

5) $x = ach\dfrac{u}{a}\cos v,\ y = uch\dfrac{u}{a}\sin v,\ z = u$;

6) $x = a\cos u\cos v,\ y = u\cos u\sin v,\ z = a\left(\ln tg\dfrac{u}{2} + \cos u\right)$;

7) $x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$;

8) $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv$;

9) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v$.

10. $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$ $(p > 0,\ q > 0)$ sirtning II kvadratik formasi topilsin.

11. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ ikkinchi tartibli konusning ikkinchi kvadratik formasi va uning diskriminanti topilsin.

12. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning I va II kvadratik formalari va ularning diskriminantlari topilsin.

13. $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sirtning II kvadratik formasi topilsin.

14. $z = y\varphi(x)$ sirtning ikkinchi kvadratik formasi topilsin.

6-topshiriq.

1. Qanday sirtning ikkinchi kvadratik formasi aynan nolga teng.

2. $z = axy$ sirtning $(x_0,\ y_0)$ nuqtasidagi normal egriligi topilsin.

3. $\Phi:\ z = f(x,y)$ sirtning II kvadratik formasi aynan nolga teng bo'lsa, bu sirt tekislik yoki uning biror qismidan iborat ekanligini ko'rsating. Tekislik zichlanish nuqtalaridan tuzilganligini isbotlang.

4. Katenoidning II formasi ushbu

$$\varphi_2 = \left(-\frac{a}{a^2+u^2}\right)du^2 + adv^2$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lsa, $u = const$ va $v = const$ koordinat chiziqlarning normal egriliklarini toping.

5. Urinmalar sirti (fazoviy chiziq urinmalaridan tuzilgan yoyiluvchi sirt)

$$\overline{r} = \overline{\rho}(s) + \lambda\overline{\tau}(s),$$

bunda $s-$natural (tabiiy) parametr tenglamasi bilan berilgan. Sirtning bosh egriliklarini toping.

6. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ sirtning berilgan $P(u = 1,\ v = 1)$ nuqtasida

a) bosh egriliklarni toping;

b) bosh normal kesimlarning $PT_1,\ PT_2$ urinmalari tenglamalarini yozing.

7. $z = xy$ sirtning $M(1,1,1)$ nuqtasidagi bosh egriliklarini hisoblang.

8. To'g'ri gelikoidning bosh yo'nalishlari uning to'g'ri chiziqli yasoqchilari va vint chiziqlari (koordinat chiziqlari) orasidagi burchaklarini teng ikkiga bo'ladi. Shuni isbotlang (65-masalaga qarang).

9. $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$ elliptik paraboloidning $P(x = 0,\ y = 0)$ nuqtasidagi bosh egriliklarini hisoblang.

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ikki pallali giperboloidning uchlaridagi bosh egriliklarini toping.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ bir pallali giperboloidning $A(a,b,c)$ nuqtasidagi bosh egriliklarini toping;

12. $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ giperbolik paraboloidning $P(x=0,y=0)$ nuqtadagi,

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning uchlaridagi bosh egriliklarini toping.

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidda to'rtta dumaloqlanish nuqtasi bor, ularning koordinatalarini toping va $a=b,\ a=b=c$ hollarni qarang.

15. Faqat dumaloqlanish nuqtalaridan tuzilgan yagona sirt sfera ekanligini isbot qiling.

16. Ikki pallali giperboloidda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ nechta dumaloqlanish nuqtasi bor? Ularning koordinatalarini toping.

17. $y=\sin x$ sinusoidning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning dumaloqlanish nuqtalari topilsin.

18. $x=\frac{u^2}{2}+v,\ y=u+\frac{v^2}{2},\ z=uv$ sirtning dumaloqlanish nuqtalari $u=v,\ u+v+1=0$ chiziqlarda yotishini ko'rsating.

19.

20. $y=x^4$ parabolaning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning dumaloqlanish nuqtalari topilsin.

21. Zichlanish nuqtalari biror egri chiziqni tashkil etuvchi sirtga misol keltiring.

7-topshiriq.

1. Sferaning to'la va o'rta egriliklarini toping.

2. $x=\varphi(u)\cos v,\ y=\varphi(u)\sin v,\ z=\varphi(u)$ aylanma sirtning to'la egriligi topilsin.

3. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u^2$ aylanma paraboloidning to'la va o'rta egriliklari topilsin.

4. $x=(a+b\cos u)\cos v,\ y=(a+b\cos u)\sin v,\ z=b\sin u$ torning to'la egriligini toping.

5. $x=ach\dfrac{u}{a}\cos v,\ y=ach\dfrac{u}{a}\sin v,\ z=u$ katenoidning to'la egriligini toping.

6. $x=a\sin u\cos v,\quad y=a\sin u\sin v,\ z=a\left(\ln tg\dfrac{u}{2}+\cos u\right)$ psevdosferaning to'la egriligini toping.

7. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=au$ konusning to'la egriligi nimaga teng?

8. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ sirtning to'la va o'rta egriliklarini toping.

9. $x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2,\ z=uv$ sirtning to'la egriligini toping.

10. $\overline{r}=\overline{\rho}(s)+\lambda\overline{\tau}(s)$ urinmalar sirtining to'la va o'rta egriligini hisoblang.

11. $\overline{r}=\overline{\rho}(s)+\lambda\overline{\nu}(s)$ bosh normallar sirtining to'la egriligini toping.

12. $\overline{r}=\overline{\rho}(s)+\lambda\overline{\beta}(s)$ binormallar sirtining to'la egriligini toping.

13. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u+v$ sirtning to'la va o'rta egriliklarini toping.

Ko'rsatma. $E=2, F=1,\ G=1+u^2,\ W=EG-F^2=1+2u^2.$

$$D=0,\ D'=\frac{1}{\sqrt{1+2u^2}},\ \ D''=\frac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}$$

$$\delta=DD''-D'^2=-\frac{1}{\left(1+2u^2\right)}$$

$$K=-\frac{1}{\left(2u^2+1\right)^2},\quad 2H=\frac{2\left(u^2+1\right)}{\left(2u^2+1\right)^{3/2}}.$$

14. $x=u^2+\dfrac{1}{3}v,\ y=2u^2+uv,\ z=u^4+\dfrac{2}{3}u^2v$ sirtning to'la egriligi $K=0$ ekanligini ko'rsating.

15 $\overline{r}=\rho(u)+v\rho'(u)$ sirtning to'la egriligi $K=0$ isbotlang.

16. Oshkormas tenglamasi $z=f(x,y)$ bilan berilgan sirtning to'la va o'rta egriliklari uchun ushbu formulalarni chiqaring:

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^2},$$

$$2H=\frac{\left(1+f_x^2\right)f_{yy}-2f_{xy}f_xf_y+\left(1+f_y^2\right)f_{xx}}{\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{3/2}}.$$

.

17. $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$ $(p>0,\ q>0)$ sirt (elliptik paraboloid)ning to'la va o'rta egriliklarini toping. Bulardan $x=0,\ y=0$ nuqtada bosh egriliklar va ularning radiuslari topilsin.

18. $z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}$ egar sirt (giperbolik paraboloid)ning to'la va o'rta egriliklarini toping. Bulardan foydalanib, $x=0,\ y=0$ nuqtada bosh egriliklar va ularning radiuslarini toping.

19. $z=\ln\cos x-\ln\cos y$ (Sherk) sirtning to'la va o'rta egriliklarini toping.

20. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ sirtning to'la egriligini toping.

21. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ sirtning to'la egriligini hisoblang.

22. Sirt oshkormas tenglamasi bilan berilgan $F(x,y,z)=0$, uning to'la egriligi uchun ushbu formula o'rinli

$$K=\frac{-1}{\left(F_x^2+F_y^2+F_z^2\right)^2}\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x` \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0\end{vmatrix}.$$

Shu formuladan foydalanib, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning to'la egriligini hisoblang. Ellipsoidning uchlaridagi egriliklarini toping.

23. $xyz = a^3$ sirtning to'la egriligini toping.

24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ ikki pallali giperboloidning uchlaridagi to'la va bosh egriliklarini toping.

25. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ bir pallali giperboloidning to'la egriligini toping.

26. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sferaning to'la va o'rta egriliklari o'zgarmas ekanligini ko'rsating:

$$K = \frac{1}{R^2},\ 2H = \frac{2}{R}.$$

27. $x^n + y^n + z^n = a^n$ sirtning to'la egriligi uchun

$$K = \frac{(n-1)^2 a^n x^{n-2} y^{n-2} z^{n-2}}{\left(x^{2(n+1)} + y^{2(n+1)} + z^{2(n-1)}\right)^2}$$

formula o'rinli. Isbotlang.

$$n = 1 \quad x + y + z = a \quad K = 0,$$

$$n = 2 \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad K = \frac{a^2}{\left(a^2\right)^2} = \frac{1}{a^2},$$

$$n = 3 \quad K = \frac{4a^3 xyz}{\left(x^4 + y^4 + z^4\right)^2}.$$

28. $z = f(x, y)$ sferaning o'rta egriligi uchun

$$H = div \frac{\Delta f}{\sqrt{1 + (\Delta f)^2}}$$

formula o'rinli ekanini ko'rsating, bunda $\Delta f = gradf$.

29. $z = e^x \sin y$ sirtning to'la va o'rta egriliklarini toping.

30. $z = \sin^2 x \sin^2 y$, $D = (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)$ sirt berilgan

$$\iint_{D} H(x, y)\, dxdy = 0$$

ekanini ko'rsating.

8-topshriq.

1. $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$ sirt nuqtalari tipini aniqlang.

2. $z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}$ sirt nuqtalari tipini aniqlang.

3. $xyz=a^3$ sirt nuqtalari tipini aniqlang.

4. $z=e^x\cos y$ sirt nuqtalari tipini aniqlansin.

5. $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sirt nuqtalari tipini aniqlang.

6. $z=x^2y$ sirt nuqtalari tipini aniqlang.

7. $x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2,\ z=uv$ sirt qanday nuqtalardan tuzilgan?

8. Torning elliptik, giperbolik va parabolik nuqtalarini toping.

9. $y=\sin x$ va $y=\ln x$ chiziqlarning Ox va Oy o'qlari atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma sirtlar nuqtalarining tipini aniqlang.

10. $x=u+v,\ y=uv,\ z=u^3+v^3$ sirt parabolik nuqtalarining geometrik o'rnini toping.

11-. $x+y=z^3$ sirtning hamma nuqtalari parabolik nuqtalar ekanini ko'rsating.

12-13. Sirtlar nuqtalarining tipini aniqlang.

12. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2+v^2$;

13. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2-v^2$

9-topshiriq.

1. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=av$ gelikoidning to'la egriligini (*) formula bo'yicha toping.

2. $ds^2=\dfrac{du^2+dv^2}{v^2}$ metrikaning Gauss egriligini toping ($K=-1$).

3. Chiziqli elementi

$$ds^2=du^2+e^{2u}dv^2$$

ko'rinishda bo'lgan sirtning to'la egriligi $K=-1$ bo'lishini ko'rsating.

4. Sirtning chiziqli elementi

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\left(x^2 + y^2 + c\right)^2}$$

ko'rinishda bo'lsa, $K = 4c$. Isbotlang.
5. Izotermik koordinatalarda

$$ds^2 = \lambda^2\left(u, v\right)\left(du^2 + dv^2\right)$$

Gauss egriligi

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2}\right)$$

formula bilan ifodalanadi. Isbotlang.
6. Sirtning I formasi ushbu ko'rinishda bo'lsin:

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AB\cos\omega du dv + b^2 dv^2. \qquad \textbf{(*)}$$

sirtning to'la egriligi o'rinli ekanini ko'rsating:

$$K = -\frac{1}{AB\cos\omega}\left[\omega_{uv} + \partial_u\left(\frac{B_u - A_v\cos\omega}{A\sin\omega}\right) + \partial_v\left(\frac{A_v - B_u\cos\omega}{B\sin\omega}\right)\right].$$

Agar bu formulada $\omega = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $B = 0$ va

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2.$$

Gauss egriligi

$$K = -\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{B_u}{A}\right)_u + \left(\frac{A_v}{B}\right)_v\right],$$

bu yerda $A = B$ bo'lsin, u holda

$$ds^2 = A^2\left(du^2 + dv^2\right)$$

va

$$K = -\frac{1}{A^2}\left[\partial_{uu}\left(\ln A\right) + \partial_{vv}\left(\ln A\right)\right]$$

yoki

$$K = -\frac{1}{A^2}\Delta\left(\ln A\right),$$

bunda $\Delta -$Laplas operatori

$$ds^2 = du^2 + B^2 dv^2$$

metrikaning Gauss egriligi

$$K = -\frac{B_{uu}}{B}.$$

7. (*) metrikada $A = B = 1$ bo'lsin, ya'ni

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega du dv + dv^2,$$

u holda

$$K = -\frac{\omega_{uv}}{\sin\omega}.$$

Agar bu formulada $K = -1$ bo'lsa,

$$\omega_{uv} = \sin\omega.$$

Bu tenglama $\sin -gordon$ tenglamasi nomi bilan ma'lum.

8. $ds^2 = dr^2 + \sin^2\left(\frac{r}{r_0}\right)d\varphi^2$ metrika uchun $K = -\frac{1}{r_0^2} > 0$.

9. $ds^2 = dr^2 + sh^2\left(\frac{r}{r_0}\right)d\varphi^2$ metrika uchun $K = -\frac{1}{r_0^2} < 0,\ r_0 = const$.

10. $z = f(x, y)$ sirt uchun $f_{xx} + f_{yy} = 0$ Laplas tenglamasi o'rinli bo'lsa ($f(x, y)-$garmonik funksiya), hamma yerda $K < 0$ ekanligini ko'rsating.

11. (1) formulalardan foydalanib, Kristoffel koeffisiyentlari sirtning metrik formasi

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

koeffisiyentlari va ularning hosilalari orqali ifodalanishini ko'rsating (Γ_{ij}^{11} koeffisiyentlar sirtning ichki geometriyasi obyekti ekanini ko'rsating), masalan, $\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2\left(EG - F^2\right)}$.

12. $ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2$ metrika uchun Kristoffel koeffisiyentlarni

$$\Gamma_{11}^{1}=0,\ \Gamma_{11}^{2}=0,\ \Gamma_{12}^{1}=0,\ \Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=-\frac{G_u}{2},\ \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G}.$$

Tekshiring.

13. Sirtning chiziqli elementi

$$I=ds^2=A^2du^2+B^2dv^2$$

Kristoffel koeffisiyentlari

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{A_u}{A},\ \Gamma_{11}^{2}=-\frac{A}{B^2}A_v,\ \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{12}^{1}=\frac{A_v}{A},$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\frac{B_u}{B},\ \Gamma_{22}^{1}=-\frac{B}{A^2}B_u,\ \Gamma_{22}^{2}=\frac{B_v}{B}.$$

Tekshiring.

14. Sirtning I kvadratik formasi

$$ds^2=du^2+2Fdudv+dv^2.$$

Sirtning to'la egriligi

$$K=\frac{\left(1-F\right)F_{uv}+F_uF_vF}{\left(1-F^2\right)^2}.$$

Kristoffel koeffisiyentlari

$$\Gamma_{11}^{1}=-\frac{FF_u}{1-F^2},\ \Gamma_{11}^{2}=\frac{F_u}{1-F^2},\ \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{12}^{1}=0,$$

$$\Gamma_{12}^{2}=0,\ \Gamma_{22}^{1}=\frac{F_v}{1-F^2},\ \Gamma_{22}^{2}=-\frac{FF_v}{1-F^2}.$$

Tekshiring.

Agar $F=\cos\omega,\ \omega=\omega\left(u,v\right)$ deb olsak, ($\omega-$koordinat chiziqlar orasidagi burchak), Kristoffel koeffisiyentlari

$$\Gamma_{11}^{1}=ctg\omega\cdot\omega_u,\ \Gamma_{11}^{2}=-ctg\omega\cdot\omega_v,\ \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{12}^{1}=0,$$

$$\Gamma_{22}^{1}=-\frac{\omega_v}{\sin\omega},\ \Gamma_{22}^{2}=-\frac{\omega_u}{\sin\omega}.$$

10-topshiriq.

1. $\overline{r}=\overline{r}\left(u,v\right)$ sirtda yotgan $L:u=u\left(s\right),\ v=v\left(s\right)$ chiziqning geoyezik egriligini

ushbu

$$K_g = \left(\ddot{\overline{r}}\,\dot{\overline{r}}\,\overline{n}\right)$$

formula bilan hisoblash mumkin, bunda $\overline{n}-$sirtning birlik normal vektori. Shuni isbotlang.

2. Radiusi R bo'lgan sferada joylashgan r radiusli aylananing geodezik egriligini toping.

3. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ to'g'ri gelikoidda yotgan $u = const$ vint chiziqlarning geodezik egriligini toping.

4. $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = f\left(v\right)$ sirtning $u = const$ va $v = const$ koordinat chiziqlari geodezik egriliklari topilsin.

5. Sirtda yotgan chiziqning geodezik egriligi uning berilgan nuqtasida sirtga urinuvchi tekislikdagi proyeksiyasining (to'liq) egriligiga teng ekanini isbot qiling.

6. Chiziqning to'liq egriligi uning normal va geodezik egriligi orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$K^2 = K_n^2 + K_g^2.$$

Isbotlang.

7. Aylanma sirt meridiani tenglamasi $y = f\left(x\right)$ va Ox o'qi aylanish o'qi bo'lsa, sirt parallelining geodezik egriligi uchun ushbu

$$K_g = \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

formula o'rinli ekanini ko'rsating.

8. Sferik loksodromaning geodezik egriligini hisoblang.

9. Ortogonal sistemada koordinat chiziqlarning egriligi uchun

$$K_{g/u=const} = \left|\frac{B_u}{AB}\right|$$

$$K_{g/v=const} = \left|\frac{A_v}{AB}\right|$$

formulalarni keltirib chiqaring.

10. Tekislikning geodezik chiziqlari faqat to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lishini isbotlang.

11. Sirtda harqanday to'g'ri chiziq geodezik chiziq bo'lishini isbotlang.

12. $\overline{r}=\overline{r}(u,v)$ sirt geodezik chiziqlari differensial tenglamasini ushbu

$$\left(\overline{N}\,d\overline{r}\,d^2\overline{r}\right)=0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Isbotlang.
13. Quyidagi xossalarning har biri sirtda geodezik chiziqni to'la aniqlanishini isbotlang:
1) chiziqning har bir nuqtasida sirtning normali uning bosh normali bo'lib xizmat qiladi;
2) chiziqning har bir nuqtasida sirtning normali uning yopishma tekisligida yotadi;
3) chiziqning har bir nuqtasida uning geodezik egriligi nolga teng;
4) chiziqning har bir nuqtasida uning egriligi absolyut qiymati bo'yicha normal egriligiga teng.
14. Ikki sirt L chiziq bo'ylab urinadi. Agar L chiziq bir sirtda geodezik chiziq bo'lsa, u holda bu chiziq boshqa sirtda ham geodezik chiziq bo'lishi kerak. Shuni isbotlang.
15. Yoyiluvchi sirt (tors) geodezik chiziqlarini toping.
16. $x^2+y^2-z^2=0$ doiraviy konus geodezik chiziqlarini toping.
17. $\overline{r}=\{u\cos v,\, u\sin v,\, av\}$ gelikoidning geodezik chiziqlarini toping ((!) tenglamadan foydalaning).
18. Ixtiyoriy konik sirtning geodezik chiziqlarini toping.
Ko'rsatma. Konus tenglamasini $\overline{r}=u\overline{\rho}(v)$ ko'rinishda olish mumkin va $|\overline{\rho}|=1, |\overline{\rho}'|=1$ deb hisoblash kerak. U holda geodezik chiziqlar tenglamasi ushbu ko'rinishni oladi:

$$\overline{r}=\frac{c_1}{\sin(c-v)}\overline{\rho}(v).$$

19. Aylanma sirtning meridianlari geodezik chiziqlar bo'lishini isbotlang.
20. Qanday shartda aylanma sirtning paralleli geodezik chiziqdan iborat bo'ladi?
21. Sferaning geodezik chiziqlarini toping.
22. Metrik formasi

$$ds^2=v\left(du^2+dv^2\right)$$

ko'rinishda bo'lgan sirtning geodezik chiziqlari (u,v) tekislikda parabolalar bilan tasvirlanishini ko'rsating.
23. I kvadratik formasi

$$ds^2 = \left[\varphi(u) + f(v)\right]\left(du^2 + dv^2\right)$$

ko'rinishda bo'lgan sirt (Luivill sirti)ning geodezik chiziqlari

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)+a}} \pm \frac{dv}{\sqrt{f(v)-a}} = 0 \quad (a = const)$$

tenglamalar bilan aniqlanadi. Isbotini keltiring.

24. Psevdosferaning metrik formasi

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lsa, uning geodezik chiziqlarini aniqlang.

25. Aylanma ellipsoid va bir pallali aylanma giperboloidning geodezik chiziqlarini tekshiring (Klero teoremasidan foydalaning).

11. Turli masalalar

1. Agar sirt tekislikka biror chiziq bo'ylab urinsa, u holda bu chiziqning hamma nuqtalari parabolik nuqtalar bo'lishini isbot qiling.
2. Agar sirtning normallari biror chiziq bo'ylab parallel bo'lsa, u holda bu chiziqning barcha nuqtalari parabolik nuqtalar bo'lishini isbot qiling.
3. Tekislik va katenoid yagona (E_3 da) minimal sirtlar ekanligini ko'rsating.
4. Tekislik va gelikoid to'g'ri chiziqli sirtlar orasida yagona minimal sirtlar ekanligini ko'rsating.
5. $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ko'rinishdagi tenglama bilan beriladigan barcha minimal sirtlarni aniqlang.
6. Berilgan Φ sirtning normallarida sirt nuqtalaridan o'zgarmas kesmalar ajratamiz. Bu kesmalar uchlarining geometrik o'rni biror sirtdan iboratdir. Bu Φ' sirt Φ parallel (ekvidistant) sirt deyiladi. Φ va Φ' sirtlarning mos nuqtalari deb, ta'rifda so'z borgan kesmalarning uchlariga aytamiz.

Quyidagilarni isbot qiling:

1) Φ va Φ' parallel sirtlarning mos nuqtalaridagi urinma tekisliklari paralleldir;
2) Φ va Φ' parallel sirtlar odatdagi refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega.

7. Φ sirt tenglamasi $\overline{r} = \overline{r}\left(u, v\right)$ ko'rinishda bo'lsa, unga parallel

Φ^* sirt tenglamasi quyidagicha yoziladi: $\overline{r}^* = \overline{r} + a\overline{n}$, bunda $a = const$, $\overline{n} - \Phi$ sirtning birlik normal vektori (shaklga qarang).

U vaqtda Φ^* sirtning to'la va o'rta egriliklari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$K^* = \frac{K}{1 - 2aH + a^2K},$$
$$H^* = \frac{H - aK}{1 - 2aH + a^2K}. \qquad (*)$$

Bularni ko'rsating.

8. Berilgan Φ sirt tenglamasi $\overline{r} = \overline{r}\left(u, v\right)$. Bu sirtga parallel Φ^* sirtning I va II kvadratik formalari koeffisiyentlarini berilgan sirtning I va II kvadratik formalari koeffisiyentlari orqali ifodalang.

9. O'rta egriligi H o'zgarmas va noldan farqli sirt berilgan. Uning normallarida $a = \dfrac{1}{2H}$ kesmalar ajratilgan. Berilgan sirtga parallel bo'lgan sirtning to'la egriligi o'zgarmas ekanligini isbot qiling ($K^* = 4H^2 = const$).

10. Φ sirt uchun $\dfrac{H}{K} = const$ tenglik o'rinli bo'lsa, Φ sirtga parallel Φ^* minimal sirtning tenglamasini yozing.

11. Gauss egriligi musbat o'zgarmas ($K > 0$) sirtning normallarida $a = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$ kesmalar ajratamiz. Shunday qilib, yasalgan parallel sirtning o'rta egriligi o'zgarmas ekanligini ko'rsating, ya'ni

$$K = \frac{1}{a^2} = const \text{ bo'lsa, } H^* = -\frac{1}{2a} = const.$$

12. Parallel sirtlarning mos nuqtalarida to'la va o'rta egriliklar uchun ushbu

$$\frac{H^{*2} - 4K^*}{K^{*2}} = \frac{H^2 - 4K}{K^2}$$

munosabat o'rinli ekanligini ko'rsating.

13. Φ sirtning o'rta egriligi uchun ushbu

$$H=\lim_{a\to 0}\frac{d\sigma-d\sigma^*}{2ad\sigma}$$

formula o'rinli ekanini ko'rsating, bunda $d\sigma$ va $d\sigma^*$ - Φ va Φ^* parallel sirtlarning mos yuzi elementlari.

14. Φ sirtning dumaloqlanish nuqtalariga unga parallel Φ^* sirtning dumaloqlanish nuqtalari mos keladi.

15. Φ sirtning egrilik chiziqlariga Φ^* parallel sirtning egrilik chiziqlari mos keladi. Shuning uchun Φ sirtda koordinat chiziqlar egrilik chiziqlari bo'lib xizmat qilsa, $F=F^*=0$ bo'ladi.

16. Parallel sirtlar uchun

$$\iint_D d\sigma^* \le \iint_D d\sigma$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsating.

Isbot. $\Phi -$minimal sirt ($H=0$), $\Phi^* -$unga parallel sirt bo'lsin. Φ sirtda koordinat chiziqlari egrilik chiziqlari vazifasini bajarsin, u holda

$$\bar{r}_u^* = (1-ak_1)\bar{r}_u,$$
$$\bar{r}_v^* = (1-ak_2)\bar{r}_v$$

shuning uchun

$$E^*=(1-ak_1)E,\ G^*=(1-ak_2)G,\ F^*=F=0,$$

bunda $k_1, k_2 - \Phi$ sirtning bosh egriliklari. Bundan $d\sigma^*=\left(1+a^2K\right)d\sigma$ ($K-$ Gauss egriligi), ya'ni

$$\iint_D d\sigma^* = \iint_D d\sigma + a^2\iint_D d\sigma.$$

Φ minimal sirt bo'lgani uchun $H=0,\ K\le 0$ bo'ladi, u holda

$$\iint_D d\sigma^* \le \iint_D d\sigma.$$

17. Barcha egriligi o'zgarmas aylanma sirtlarni aniqlang.
18. Algebraik minimal sirtlarga misollar keltiring.
19. Gauss egriliklari o'zgarmas va bir xil bo'lgan sirtlar lokal izometrikdir.
20. Gauss egriligi musbat o'zgarmas sirtlar sferaga izometrikdir.
21.

$$x=\frac{1}{2}\cos u\cos\varphi,\ \ y=\frac{1}{2}\cos u\sin\varphi,$$

$$z=\int\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 u}du$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\varphi\le\pi\right)$$

sirtning meridianlaridan boshqa hamma geodezik chiziqlari yopiq chiziqlardir.

8. K **va** H **invariantlar bo'yicha sirt nuqtalarini sinflarga ajratish.** Agar $M(u,v)$ nuqtada $K>0$ bo'lsa, M −elliptik nuqta, $K<0$ bo'lsa, M −giperbolik nuqta va $K=0,\ H\ne 0$ bo'lsa, M − parabolik nuqta deyiladi.

Dumaloqlanish nuqtasi

$$H^2=K$$

shart bilan aniqlanadi.

Zichlanish nuqtasi

$$K=0,\ H=0$$

shartlar bilan aniqlanadi.