Р. ЭНГЕЛЬКИНГ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Перевод с английского
М. Я. АНТОНОВСКОГО
и А. В. АРХАНГЕЛЬСКОГО

МОСКВА «МИР» 1986

Monografie Matematyczne
tom 60

Ryszard Engelking

GENERAL TOPOLOGY

Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1977

Manuscript of the second
edition, 1985

ББК 22.152
Э 62
УДК 515.12

Энгелькинг Р.

Э 62 Общая топология: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

Энциклопедически полное и сбалансированное изложение обширного круга вопросов по общей топологии, написанное известным польским математиком. Книга может использоваться в качестве справочника и как вводное учебное пособие по общей топологии. Русское издание дополнено новым материалом.

Для математиков разных специальностей, для всех изучающих и использующих методы общей топологии.

Э $\frac{1702040000-010}{01(041)-86}$ 16-86, ч. 1 ББК 22.152

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Идеи топологии ведут начало от работ выдающихся математиков XIX века: Н. И. Лобачевского, Римана, Пуанкаре, Фреше, Кантора, Гильберта и Брауэра.

Оформление общей топологии в самостоятельную область математики связано с выходом в 1914 г. книги Ф. Хаусдорфа «Теория множеств».

Важными вехами в истории общей топологии стали выход (в 1929 г.) «Мемуара о компактных топологических пространствах» П. С. Александрова и П. С. Урысона, монографии «Topologie» К. Куратовского (1933 г.) и знаменитой монографии «Topologie I» П. С. Александрова и Х. Хопфа (1935 г.). На этих книгах, как и на книге Хаусдорфа, воспитывались поколения топологов во всем мире.

Прошедшие 70 лет развития общей топологии — весьма небольшой срок с точки зрения истории науки — были годами ее молодости. Это был период активного роста общей топологии, становления ее направлений, формирования основных принципов и методов, кристаллизации центральных понятий, создания архитектуры общей топологии и укрепления ее взаимосвязей с другими разделами математики, в первую очередь с анализом (в том числе функциональным), геометрией, математической логикой и алгеброй. Довоенный период развития общей топологии ознаменован построением П. С. Александровым и П. С. Урысоном основ теории компактных пространств, фундаментальной теоремой А. Н. Тихонова о компактности произведения компактных пространств, построением стоун-чеховского расширения и теорией компактных расширений, развитой П. С. Александровым, А. Н. Тихоновым, Э. Чехом, М. Х. Стоуном и Г. Волмэном.

В то же время были установлены основные факты теории размерности пространств со счетной базой (П. С. Урысон, В. Гуревич, К. Менгер, Л. А. Тумаркин, Н. Б. Веденисов [1])).

---

[1]) Н. Б. Веденисов, доцент Московского университета, в 1941 г. вступил добровольцем в народное ополчение и погиб в ноябре 1941 г. в боях под Ельней.

Начало послевоенного периода развития общей топологии отмечено доказательством в 1948 г. А. Х. Стоуном одной из наиболее ярких и важных теорем общей топологии: теоремы о паракомпактности произвольного метрического пространства. На ее основе в 1950—1951 гг. был получен общий метризационный критерий Бинга — Нагаты — Смирнова.

Л. В. Келдыш получила глубокие теоремы об отображениях и размерности множеств в евклидовых пространствах, возглавив советскую школу геометрической топологии.

Стремление распространить методы, свойственные теории метрических пространств, за пределы этого класса привело к построению А. Вейлем теории равномерных пространств, в сферу действия которой попадают все тихоновские пространства. В связи с понятиями паракомпактности и равномерного пространства центральное значение приобрели понятие локальной конечности и отношение звездной вписанности.

К этому моменту стало ясно, что естественная сфера действия принципов и концепций общей топологии выходит далеко за пределы класса пространств со счетной базой или класса метрических пространств. Первый итог развития общей топологии, не ограниченный рамками пространств со счетной базой, был подведен в книге Дж. Л. Келли «Общая топология», вышедшей на английском языке в 1955 г. и изданной в русском переводе в 1968 г.

Главный объект исследования в общей топологии — понятие непрерывности (моделируемое посредством понятий топологического пространства и непрерывного отображения). Вопросы, связанные с непрерывностью, занимают центральное место во многих разделах математики. В каждом из них они выступают в своем облачении, на своем уровне общности, определяемом спецификой этого раздела. Компактно-открытая топология и топология поточечной сходимости функциональных пространств, слабые топологии банаховых пространств, пространства мер, топологические границы функциональных алгебр — появление этих топологических объектов (заметим — не «внутри» самой общей топологии) потребовало построения теории топологических пространств за пределами пространств с первой аксиомой счетности. Возникновение в связи с потребностями алгебраической геометрии топологий Зарисского показало, что общая топология не может априори ограничиваться рассмотрением хаусдорфовых пространств.

В настоящее время общая топология достигла того наиболее естественного уровня общности, который позволяет излагать топологические принципы, концепции и конструкции с наибольшей прозрачностью и одновременно обеспечить им максимально широкую приложимость в других разделах математики.

С начала 50-х гг. стал наблюдаться быстрый рост активности исследований в общей топологии буквально по всему ее фронту. Возникло много новых, тесно связанных между собой вопросов, направленных на более глубокое изучение паракомпактности и близких к ней свойств; это в свою очередь вывело на передний план метод покрытий и родственный ему метод специальных баз. В результате в новом свете предстала метризационная проблематика, совершенно по-новому зазвучала классическая тема моровских пространств, были сделаны заметные продвижения в теории размерности.

Весьма активно шел процесс построения новых топологических инвариантов; особенно большую роль стали играть кардинальные топологические инварианты, что объясняется внутренней идейной близостью общей топологии и теории множеств. Последнее стимулировало глубокое проникновение в теорию топологических пространств методов математической логики и применение принципов, подобных аксиоме Мартина (см. в связи с этим недавно вышедшую монографию X. Фремлина «Consequences of Martin's Axiom»). В 60-е и 70-е годы исследование кардинальных инвариантов (а сюда попадают такие классические вопросы, как проблема Суслина) сложилось в один из центральных разделов общей топологии.

Новые краски обрела теория компактных пространств, в частности, в связи с исследованием пространств функций и банаховых пространств со слабой топологией (компакты Эберлейна, компакты Корсона).

Л. С. Понтрягин еще в 30-е годы обратил внимание на конструкцию Σ-произведения и применил вполне упорядоченные (трансфинитные) спектры из компактов.

Систематически была развита теория диадических компактов — непрерывных образов обобщенных канторовых дисконтинуумов. Значение этой разновидности компактов связано, в частности, с тем, что к ней относятся все компактные группы. Стержневое положение в теории диадических компактов занимают кардинальные инварианты.

Активное движение топологических концепций внутри и вне общей топологии остро поставило задачу укрепления единства теории топологических пространств. Именно в последние 30 лет основную объединяющую роль в общей топологии (наряду с методом кардинальных инвариантов) стал играть метод взаимной классификации пространств и отображений (и входящий в него как часть метод обратных спектров).

На языке отображений удалось точно выразить соотношение между классом метрических пространств и многими более широкими классами пространств: с первой аксиомой счетности, секвенциальных пространств, пространств Фреше — Урысона, пространств с равномерной базой, моровских пространств. Отметим особо работу Г. С. Чогошвили об обобщенной сходимости. Были доказаны фундаментальные теоремы о сохранении топологических инвариантов при отображениях (например, паракомпактности при замкнутых отображениях и метризуемости при совершенных отображениях). Метод обратных спектров был развит как в аналитическом, так и в синтетическом направлении. Это позволило получить глубокие общие теоремы (в частности, примыкающие к теории диадических компактов), а также построить тонкие примеры, относящиеся к теории кардинальных инвариантов компактов и теории размерности компактов.

Более глубокое понимание компактности было достигнуто посредством изучения ее важнейших граней — счетной компактности и псевдокомпактности (ограниченности всех непрерывных вещественных функций). Хотя различить эти понятия нелегко — для нормальных пространств счетная компактность равносильна псевдокомпактности, — эти понятия, как выяснилось, разделяет пропасть: если счетная компактность наследуется замкнутыми подпространствами, то каждое тихоновское пространство вкладывается в качестве замкнутого подпространства в псевдокомпактное пространство. Всестороннему изучению были подвергнуты нормальность и свойство Линделёфа, в частности, был построен пример нормального не счетно паракомпактного пространства. Много тонких исследований было посвящено свойствам типа полноты: полноте по Чеху, полноте по Хьюитту, полноте по Дьедонне и др. Были введены и продемонстрировали свое важное значение — для создания единой классификации топологических пространств — новые классы пространств и отображений: перистые, кружевные пространства, линделефовы Σ-пространства, псевдооткрытые, бифакторные отображения.

Во всех этих многообразных направлениях были получены яркие результаты; технический уровень ведущих исследований в общей топологии и их интенсивность значительно выросли. Надо заметить, что это не сопровождалось ростом разобщенности общей топологии и потерей естественности в постановках задач. Напротив, глубокий результат из одной области проливал, как правило, новый свет на другие разделы.

Сейчас ежегодно в мире выходит очень много книг, посвященных той или иной области топологии. Это главным образом учебники и монографии по отдельным вопросам алгебраической, геометрической и дифференциальной топологии. Монографий же, претендующих на охват всей общей топологии, совсем мало.

Такой монографией стала книга Р. Энгелькинга «Общая топология», вышедшая в 1977 г. Перед ее автором стояла сложнейшая многоплановая задача. Во-первых, — такого отбора материала, который бы полно отразил основные достижения и нынешнее состояние во всех главных разделах общей топологии. Во-вторых, — такой организации этого материала, которая бы продемонстрировала единство общей топологии на данном этапе ее развития и определила бы главные дальнейшие ее задачи. Книга должна была стать основным средством подготовки специалистов — общих топологов и одновременно быть доступной и полезной широким кругам математиков, использующих топологические концепции. На наш взгляд, Р. Энгелькингу удалось блестяще справиться с этими задачами.

Нет нужды говорить здесь подробно о содержании книги: об этом хорошо сказал сам автор в своем предисловии и во введениях к отдельным главам. Однако уместно посвятить несколько слов тому, как автору удалось достичь широкого охвата материала при сравнительно небольшом объеме и не потерять в своем изложении единства и гармонии. Одно из средств — это тщательный отбор материала, основанный на широком личном опыте автора творческой работы в общей топологии и на тесных связях автора со специалистами по общей топологии из многих стран. Второе средство — это многоплановая архитектура книги. Об этом следует сказать несколько слов отдельно.

Во всех главах в основном тексте тщательно соблюден баланс между общими утверждениями (теоремами) и примерами. Каждый параграф дополнен упражнениями, тесно связанными с текстом и активно развивающими его во множестве направлений; более трудные упражнения сопровождаются указаниями; в целом они выбраны так, что самостоятельная работа над упражнениями не должна вызывать затруднений у читателя. Это позволяет охватить множество новых понятий и примеров.

Каждая глава заканчивается параграфом со скромным названием «задачи». Роль этих параграфов, незаметных при чтении оглавления, чрезвычайно велика. Каждый из них на самом деле является маленькой главой, в которой излагается множество продвинутых тем, тонких теорем и примеров в стиле, отличном от стиля основного текста книги. Овладение материалом этой части книги потребует от читателя творческой работы. Многие темы задач переходят от одной главы к другой: прослеживается, как в различных главах освещается эта тема. Этим в немалой степени обеспечивается единство книги: темы задач, повторяясь, как бы «сшивают» главы воедино. В то же время, если взять какую-нибудь из этих тем отдельно и проследить ее движение сквозь книгу, мы увидим, что получится, в сущности, самостоятельная глава, изложенная хотя и конспективно, но доступно для читателя, творчески овладевшего основным текстом. Таких «скрытых» глав в книге очень много, и вес их не меньше веса основных глав. Назовем некоторые из них: линейно упорядоченные пространства, борелевские множества, кардинальные функции, многозначные отображения, декартовы произведения и Σ-произведения, обратные спектры, пространства замкнутых множеств, диадические компакты, пространства отображений.

Последняя важная особенность книги Р. Энгелькинга, которую хотелось бы здесь отметить, — систематический историко-библиографический комментарий. Хотя в основном комментарий весьма лаконичен, читатель получает представление о том, какую роль в развитии общей топологии сыграли те или иные математические школы, математические центры и отдельные выдающиеся математики.

В книге и комментариях отразилась ведущая роль, которую играла в формировании топологии на протяжении всего 70-летнего периода ее развития московская топологическая школа П. С. Александрова. Работы П. С. Александрова и П. С. Урысона о компактности и метризации, теоремы А. Н. Тихонова о компактности произведений и о погружении в тихоновские кубы, вклад П. С. Александрова в теорию компактных расширений, труды П. С. Урысона по теории размерности, работы советских математиков послевоенного периода: Ю. М. Смирнова, А. В. Архангельского, Б. А. Пасынкова, В. И. Пономарёва, В. В. Федорчука, В. В. Филиппова, М. М. Чобана, Е. В. Щепина органически влились в книгу Энгелькинга, определив существенную часть ее содержания.

По заслугам отражен выдающийся вклад в общую топологию польской топологической школы — К. Куратовского, В. Серпинского, В. Кнастера, С. Мазуркевича, З. Янишевского и более молодых топологов: Энгелькинга, Хабера, Пшимусинского, Поля и др. Особенно значителен этот вклад в теорию континуумов, теорию размерности, дескриптивную теорию множеств, теорию многозначных отображений. Следует еще раз подчеркнуть традицию тесных связей между топологами польской и московской школ, их огромное взаимное влияние.

В связи с изданием настоящего перевода нелишне напомнить, как высоко ценил П. С. Александров вклад польской топологической школы и конкретно монографию Р. Энгелькинга. Он всегда подчеркивал, что для написания хорошей монографии необходимы три ингредиента: чтобы автор был крупным ученым, внесшим весомый вклад в развитие соответствующей области, обладал хорошим вкусом и был исключительно добросовестен и аккуратен. П. С. Александров с самого появления первого издания монографии Энгелькинга считал необходимым перевести ее на русский язык. По техническим причинам реализация этого проекта задержалась на долгие годы и воспринимается сейчас как исполнение одного из пунктов завещания Павла Сергеевича Александрова.

Продолжением традиций советско-польского содружества и сотрудничества в области топологии явилась работа над переводом этой книги. Благодаря любезности проф. Р. Энгелькинга переводчики имели в своем распоряжении исправленный и дополненный текст второго издания книги, которое готовится к выходу в Польше в 1987 г.; с него и сделан настоящий перевод.

В книге отражен вклад в развитие общей топологии американских математиков: Э. Майкла, М. Стоуна, А. Стоуна, Э. Хьюитта, упомянуты яркие результаты М. Э. Рудин, П. Никоша, Х. Викке, Дж. Уорелла, В. Флейснера, Ф. Толла, В. Комфорта и др.

Читатель получает представление о вкладе в общую топологию японской группы: Мориты, Нагаты, Нагами, Окуямы и др.

Наконец, отражены значительные достижения в общей топологии на всех этапах ее развития ученых социалистических стран: Э. Чеха, М. Катетова, Б. Поспишила, З. Фролика, И. Юхаса и др.

Не следует, однако, ожидать, что в учебнике по общей топологии сколько-нибудь полно могут быть рассмотрены все ее вопросы, включая применения. Например, в книге не нашло отражения современное состояние дескриптивной теории множеств в общих пространствах, ибо этот материал требует отдельной книги. Не рассматривается метод обобщенных метрик, развитый в конце 50-х и начале 60-х гг. М. Я. Антоновским, В. Г. Болтянским и Т. А. Сарымсаковым. Этот метод позволил доказать единообразным путем с помощью метризации над топологическими полуполями многие теоремы теории равномерных пространств и пространств близости, а также получить максимальное обобщение теорем об открытом отображении и замкнутом графике и целый ряд результатов в теории топологических решеток и т. п. Однако книга Энгелькинга обеспечивает очень хорошую основу для приложений современной общей топологии в различных частях математики. Она подходит вплотную к таким приложениям в разделах, посвященных пространствам отображений с различными топологиями, пространствам максимальных идеалов функциональных алгебр, топологическим группам и группам гомеоморфизмов, многозначным отображениям, равномерным пространствам.

Сам спектр приложений, к которым готовит книга Энгелькинга, за последние 30 лет необозримо расширился. Здесь мы ограничимся только самым кратким обзором некоторых из этих приложений. В математической логике топологические конструкции широко применяются при построении моделей, при решении вопросов о независимости и непротиворечивости. Важную роль играет здесь счетность числа Суслина тихоновских кубов.

Хорошо известны приложения теоремы Шаудера о неподвижной точке, являющейся обобщением классической теоремы Брауэра и в свою очередь обобщенной А. Н. Тихоновым; теоремы Банаха о сжимающих отображениях и всевозможные ее обобщения; приложения метода Лере — Шаудера. Их дальнейшее развитие в работах Смейла, Атьи, Браудера позволило перенести упомянутые результаты на поля операторов; в их конструкции центральное место принадлежит компактности.

Новое большое направление — теория корректных задач по Тихонову, существенно обобщающая и развивающая понятия корректности по Адамару.

С компактностью связано замечательное направление — теоремы вложения Соболева — Никольского — Шварца. Понятие локальной компактности весьма плодотворно проявляет себя в объектах, наделенных одновременно топологией и алгебраическими операциями, таких, как топологические группы, кольца, решетки, булевы алгебры и т. п. Это понятие сыграло значительную роль в становлении большого направления в современной математике — абстрактного гармонического анализа, важного не только своей внутренней красотой, но и новыми приложениями в функциональном анализе, математической физике, теории дифференциальных уравнений. В создании этого направления большую роль сыграли работы советских математиков: Л. С. Понтрягина, А. И. Мальцева, И. М. Гельфанда, М. Г. Крейна, М. А. Наймарка и зарубежных: А. Вейля, Э. Хьюитта и др.

Весьма важную роль в приложениях в настоящее время начали играть специальные примеры из общей топологии: канторово совершенное множество, прямая Александрова, ковер Серпинского, пример Кнастера, возникшие ранее из чисто внутренних, логических потребностей топологии. Они легли в основу новых методов распознавания образов и теории динамических систем.

Отметим далее, что аппарат теории метрических и псевдометрических пространств нашел приложение в работах по прикладной статистике и распознаванию образов. Для таких приложений оказались полезными метрики Колмогорова, фон Мизеса, Байеса и т. п. Специальные метрики в функциональных пространствах позволили Ю. В. Прохорову (1956 г.) по-новому подойти к получению предельных теорем теории вероятностей. Подход Ю. В. Прохорова интенсивно развивался как у нас в стране, так и за рубежом.

Мы коснулись лишь небольшого числа примеров использования концепций общей топологии. В заключение еще раз хотелось бы подчеркнуть, что данная книга будет интересна широкому кругу математиков — начиная со студентов и кончая специалистами. Переводчики благодарят автора — профессора Энгелькинга за внимание к русскому изданию, а также редактора Н. И. Плутникову за большую работу, которую ей пришлось выполнить в связи с многочисленными изменениями в процессе подготовки рукописи к изданию.

М. Я. Антоновский
А. В. Архангельский

Памяти
профессора Казимира Куратовского

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга содержит достаточно полное и современное изложение общей топологии. Она адресована в первую очередь старшекурсникам и аспирантам, но может быть полезной для ссылок и математикам более высокого уровня.

Глава 1 содержит основные определения и результаты, относящиеся к общим топологическим пространствам и непрерывным отображениям. Глава 2 посвящена операциям на топологических пространствах, т. е. стандартным методам получения новых пространств из старых. В следующих трех главах изучаются классы компактных, метризуемых и паракомпактных пространств, а также некоторые отношения между классами пространств. Глава 6 содержит обсуждение связности. Глава 7 представляет собой сжатый курс теории размерности в общих топологических пространствах. Последняя глава посвящена равномерным пространствам и пространствам близости.

Первые пять параграфов гл. 1 вместе с § 2.1 и 2.3 образуют введение в нашу книгу. Ознакомившись с этим материалом, читатель сможет продолжить чтение в соответствии со своими интересами или нуждами. Если же читатель мало знаком с данным предметом, мы советуем ему изучить § 4.1—4.3; сравнительно легкие, они помогут выработать топологическую интуицию.

Расположение материала следует предыдущей книге автора «Outline of general topology», изданной в 1968 г. Однако данная книга написана заново и значительно более подробно. Около 40 % текста посвящено недавним достижениям общей топологии, которые не обсуждались в предыдущей книге.

Каждый параграф оканчивается историческими и библиографическими замечаниями. Затем следуют упражнения, которые прежде всего предназначены для проверки понимания и усвоения материала читателем. Упражнения, которые начинаются словами «проверьте», «установите», «заметьте» или «убедитесь», обычно достаточно легкие. Упражнения, начинающиеся словами «покажите» или «приведите пример», несколько более трудные, а те, которые начинаются словами «докажите», могут быть очень трудными.

Последний параграф каждой главы посвящен задачам, являющимся органической частью данной книги. Они часто снабжены подробными указаниями, в которых фактически содержится набросок доказательства. Задачи можно и просто прочитывать, не решая. Несколько серий задач обсуждается на протяжении многих глав. Они касаются, например, линейно упорядоченных пространств, кардинальных функций, пространств замкнутых подмножеств, полунепрерывных функций и многозначных отображений.

Приведенные в конце книги подробные указатели, таблица взаимосвязей между различными классами пространств и таблицы сохранения топологических свойств при операциях и отображениях позволяют читателю лучше ориентироваться в материале.

Знаком ∎ отмечен конец доказательства или примера. Если этот знак появляется сразу после утверждения теоремы, предложения или следствия, это подразумевает, что утверждение очевидно.

Числа в квадратных скобках после фамилий отсылают читателя к библиографии в конце книги. Работы каждого автора пронумерованы независимо, число означает год публикации.

Мне приятно выразить свою признательность ряду коллег. Многим я обязан за помощь при написании предыдущей книги: помогали и вдохновляли меня профессора А. Бялыницкий-Бируля, Е. Бровкин, М. Карлович, А. Лелек, К. Морен, Я. Мыцельский, Ч. Рылль-Нардзевский, Р. Сикорский и М. Старк. Содержание данной книги обсуждалось в 1968—1973 гг. со студентами, посещавшими мои лекции и семинары в Варшавском университете. Их замечания позволили сделать ряд упрощений в доказательствах и указаниях. Я благодарен К. Альстеру, Я. Хаберу, Я. Каневскому, П. Минцу, К. Новинскому, Я. Пшитыцкому, Э. Поль, З. Слодковскому и К. Войтковской.

Особенно я обязан двум моим студентам, первым читателям книги: Р. Полю и Т. Пшимусинскому. Их содержательные замечания и предложения привели ко многим важным улучшениям книги.

Когда готовилось английское издание книги, во время моего пребывания в университете Питтсбурга, мне помогали профессора Д. Латцер и Э. Майкл, которые поправили мой английский язык и внесли дальнейшие усовершенствования.

Разрешите мне также упомянуть помощь незнакомых читателей предыдущей книги, которые любезно указали на некоторые ошибки и неточности в ней.

Варшава, июнь 1976 г.

Рышард Энгелькинг

* *
*

Русское издание несколько отличается от английского оригинала: исправлен ряд ошибок, неточностей и опечаток, упрощены некоторые доказательства, добавлено несколько упражнений и задач и включена информация о наиболее важных недавних результатах, связанных с содержанием этой книги.

Я весьма обязан профессорам А. Чассару, Э. ван Дауэну, М. А. Морису и доктору А. Мысьору, которые внимательно прочитали английское издание и оказали мне большую помощь, любезно прислав свои замечания и списки замеченных ими опечаток.

Варшава, март 1984 г.

Р. Э.

ВВЕДЕНИЕ

Все, что требуется для понимания этой книги, — знание основных фактов теории множеств и некоторых свойств вещественных чисел. Цель данного введения — перечислить эти факты и свойства и познакомить читателя с нашей терминологией и обозначениями. Никаких доказательств в этом введении дано не будет, за исключением доказательства эквивалентности аксиомы выбора двум принципам максимума и теореме Цермело. Это введение ни в коей мере не заменяет курса теории множеств.

I.1. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ. ФУНКЦИИ

Объединение, пересечение и разность множеств A и B обозначаются соответственно $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$; объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ обозначается также через $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, а пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ — через $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. На протяжении всей книги мы свободно (т. е. не оговаривая этого) пользуемся всеми правилами вычислений с множествами и, в частности, широко применяем *законы де Моргана*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Мы пишем $x \in A$, когда x является элементом множества A, и $x \notin A$, когда x не принадлежит множеству A. Обозначения $A \subset B$ или $B \supset A$ означают, что A содержится в B, т. е. каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Когда $A \subset B$, мы говорим, что A есть *подмножество* множества B; если $A \subset B$ и $A \neq B$, то мы называем A *собственным подмножеством* множества B.

Множество всех тех элементов множества X, которые удовлетворяют условию $\varphi(x)$, обозначается через

$$\{x \in X\colon \varphi(x)\} \quad \text{или} \quad \{x\colon \varphi(x)\};$$

второе обозначение используется тогда, когда из контекста ясно, какое множество X мы рассматриваем.

Множество, состоящее из конечного числа элементов $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k$, обозначается через $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Иногда мы не делаем различия между множеством $\{x\}$ и элементом x.

2 Зак. 697

Упорядоченная пара (x, y) есть множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Две упорядоченные пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равны в том и только том случае, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Декартово произведение (или просто *произведение*) $X \times Y$ двух множеств X и Y есть множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Конечное произведение определяется по индукции формулой

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k = (X_1 \times \ldots \times X_{k-1}) \times X_k.$$

Всякое подмножество произведения $X \times Y$ есть некоторое *отношение*; множество X есть *область определения* этого отношения, а множество Y — его *область значений*. Отношение $f \subset X \times Y$ называется *функцией* из X в Y или *отображением* множества X в множество Y, если для каждого $x \in X$ существует такой $y \in Y$, что $(x, y) \in f$, и если этот y однозначно определен элементом x, т. е. из $(x, y) \in f$ и $(x, y') \in f$ следует, что $y = y'$.

Если f — функция из множества X в множество Y и $x \in X$, то единственное y, удовлетворяющее условию $(x, y) \in f$, обозначается через $f(x)$; оно называется *значением* функции f в точке x. *Образ* множества $A \subset X$ при отображении f есть множество

$$f(A) = \{y \in Y\colon\ y = f(x) \text{ для некоторого } x \in A\};$$

прообраз множества $B \subset Y$ при отображении f есть множество

$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon\ f(x) \in B\}.$$

Прообразы одноточечных множеств при отображении f называются прообразами точек при отображении f.

Элементарные формулы алгебры множеств, относящиеся к образам и прообразам множеств, часто используются в этой книге; к числу важнейших из них принадлежат следующие две формулы:

$$ff^{-1}(B) = B \cap f(X) \subset B \quad \text{и} \quad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

Если f — функция из X в Y, а g — функция из Y в Z, то равенство $(gf)(x) = g(f(x))$ определяет функцию gf из X в Z, *композицию* функций f и g. Легко видеть, что $(gf)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ для любого $B \subset Z$.

Отображение f множества X в множество Y называется *инъективным*, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$

$$\text{из } f(x_1) = f(x_2) \text{ следует, что } x_1 = x_2.$$

Если отображение f множества X в множество Y удовлетворяет условию $f(X) = Y$, говорят, что f отображает множество X *на* множество Y, или что f есть *отображение «на»*. Для инъективного отображения множества X на Y существует обратное отображение f^{-1}, являющееся инъективным отображением множества Y на X [1]); обратное отображение f^{-1} определяется соотношением

$$f^{-1}(y)=x \text{ в том и только том случае, когда } f(x)=y.$$

Тождественное отображение множества X на себя обозначается через id_X; оно определяется формулой $\mathrm{id}_X(x)=x$ для любого $x \in X$.

Произвольная функция, определенная на множестве всех положительных целых чисел, называется *последовательностью*; значение последовательности в точке n обычно обозначается через x_n, а сама последовательность — через $x_1, x_2, \ldots$ или $(x_1, x_2, \ldots)$. Множество, состоящее из всех элементов последовательности $x_1, x_2, \ldots$, обозначается $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots$ называется *возрастающей*, если $A_i \subset A_{i+1}$ для $i=1, 2, \ldots$, и *убывающей*, если $A_{i+1} \subset A_i$ для $i=1, 2, \ldots$.

Множества, элементы которых суть множества, называются *семействами* или *классами* множеств, а их элементы называются *членами* или *элементами* семейства; семейства семейств множеств называются *системами* или *совокупностями*. В этой книге рассматриваются как индексированные, так и неиндексированные семейства множеств. *Индексированное семейство* $\{A_s\}_{s \in S}$ есть, строго говоря, функция, приписывающая каждому $s \in S$ множество A_s, а *неиндексированное семейство* есть просто некоторое множество множеств. Каждое неиндексированное семейство $\mathcal{A}$ можно рассматривать как индексированное: достаточно взять каждый член семейства в качестве его собственного индекса, т. е. считать, что $\mathcal{A}=\{A\}_{A \in \mathcal{A}}$. В этом смысле все определенные в тексте для индексированных семейств понятия (например, локальная конечность или точечная конечность) относятся и к неиндексированным семействам.

Объединение и пересечение семейства множеств $\{A_s\}_{s \in S}$ обозначаются соответственно $\bigcup\limits_{s \in S} A_s$ и $\bigcap\limits_{s \in S} A_s$; в случае последовательности множеств мы употребляем символы $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, а в случае неиндексированного семейства $\mathcal{A}$ пишем $\bigcup \mathcal{A}$ и $\bigcap \mathcal{A}$. Объединение и пересечение всех множеств, удовлетворяющих условию $\varphi(A)$, обозначаются соответственно

$$\bigcup\{A\colon \varphi(A)\} \quad \text{и} \quad \bigcap\{A\colon \varphi(A)\}.$$

Декартово произведение (или просто *произведение*) семейства множеств $\{A_s\}_{s \in S}$, т. е. множество всех функций f из S в

[1]) Инъективное отображение одного множества на другое называют также *взаимно однозначным отображением. — Прим. перев.*

$\bigcup\limits_{s\in S} A_s$, таких, что $f(s)\in A_s$ для любого $s\in S$, обозначается $\prod\limits_{s\in S} A_s$ или $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ в случае последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots$. Для $f\in\prod\limits_{s\in S} A_s$ точка $f(s)\in A_s$ называется s-й *координатой* f. Элемент произведения $\prod\limits_{s\in S} A_s$, s-я координата которого есть точка $x_s\in A_s$, будет обозначаться в дальнейшем символом $\{x_s\}$. В частности, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ элементов множества A, являющаяся элементом $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i = A$ для $i = 1, 2, \ldots$, будет часто обозначаться через $\{x_i\}$.

Заметим, что произведение $\prod\limits_{s\in S} X_s$, где $S=\{1, 2, \ldots, k\}$, не является в точности тем же самым множеством, что и произведение $X_1\times X_2\times\ldots\times X_k$; тем не менее между элементами этих двух множеств существует очевидное взаимно однозначное соответствие, и мы будем рассматривать их как одно и то же множество, элементы которого обозначаются $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Отношение E на множестве X, т. е. подмножество произведения $X\times X$, называется *отношением эквивалентности* на X, если оно обладает следующими свойствами (мы пишем xEy вместо $(x, y)\in E$):

(E1) *Для любого* $x\in X$ *имеем* xEx.

(E2) *Если* xEy, *то* yEx.

(E3) *Если* xEy *и* yEz, *то* xEz.

Всякое отношение эквивалентности E на множестве X определяет разбиение X на непересекающиеся множества (*классы эквивалентности* отношения E); два элемента множества X находятся в одном классе эквивалентности в том и только том случае, когда они связаны отношением E. Таким образом,

$$X=\bigcup_{s\in S} A_s \quad \text{и} \quad A_s\cap A_{s'}=\varnothing, \quad \text{если} \quad s\neq s';$$

кроме того,

$x, y\in A_s$ для некоторого $s\in S$ в том и только том случае, если
$$xEy.$$

Класс эквивалентности, содержащий элемент x, обозначается $[x]$.

Обратно, всякое разбиение множества X на непересекающиеся множества $\{A_s\}_{s\in S}$ задает некоторое отношение эквивалентности E на X, определенное условием

$$xEy \text{ тогда и только тогда, когда } x, y\in A_s \text{ для некоторого } s.$$

I. 2. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множества X и Y называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение множества X на Y. Каждому множеству X приписывается некоторое кардинальное число (кардинал); оно называется *мощностью* множества X и обозначается $|X|$; равенство $|X|=|Y|$ имеет место в том и только том случае, если X и Y равномощны. Для конечного множества X мощность X равна числу его элементов. Кардинальное число, приписываемое множеству всех положительных целых чисел, обозначается символом $\aleph_0$ (алеф-нуль), а кардинальное число, приписываемое множеству всех вещественных чисел, обозначается $\mathfrak{c}$ (*континуум*). Множество называется *счетным*, если оно либо конечно, либо имеет мощность $\aleph_0$.

Для кардинальных чисел определены операции сложения и умножения. *Сумма* кардиналов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ равна мощности множества $X \cup Y$, где $|X|=\mathfrak{m}$, $|Y|=\mathfrak{n}$ и $X \cap Y=\varnothing$. *Произведение* кардиналов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — это мощность множества $X \times Y$, где $|X|=\mathfrak{m}$ и $|Y|=\mathfrak{n}$. Сумма кардиналов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ обозначается $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$, произведение $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ обозначается $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ или $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$. Для каждого кардинала $\mathfrak{m}$ число $2^{\mathfrak{m}}$, обозначаемое также $\exp\mathfrak{m}$, определено как мощность семейства всех подмножеств какого-нибудь множества X, удовлетворяющего условию $|X|=\mathfrak{m}$. Доказано, что $2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$. Более общо, мы определим $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ как мощность множества всех функций из X в Y, где $|X|=\mathfrak{m}$, $|Y|=\mathfrak{n}$. Можно доказать, что

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2}=\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}}, \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2}=\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Пусть $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — кардиналы и $|X|=\mathfrak{m}$, $|Y|=\mathfrak{n}$. Мы говорим, что $\mathfrak{m}$ *не превосходит* $\mathfrak{n}$ или что $\mathfrak{n}$ *не меньше* $\mathfrak{m}$, и пишем $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$ или $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{m}$, если существует инъективное отображение X в Y. Важным фактом о неравенствах между кардиналами является следующая *теорема Кантора — Бернштейна*:

если $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$ *и* $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}$, *то* $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$.

Можно доказать также, что $|f(X)|\leqslant|X|$ для любого отображения f, заданного на X. Отсюда, в частности, следует, что семейство всех подмножеств мощности $\leqslant\mathfrak{m}$ произвольного множества мощности $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{m}$ имеет мощность $\leqslant\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сумма двух кардинальных чисел, хотя бы одно из которых бесконечно, равна не меньшему из них. Подобное утверждение имеет место и для произведения любых двух кардинальных чисел, отличных от нуля. В частности,

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m} \quad \text{для} \quad \mathfrak{m}\geqslant\aleph_0.$$

Если $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, мы говорим, что $\mathfrak{m}$ *меньше* $\mathfrak{n}$ или что $\mathfrak{n}$ *больше* $\mathfrak{m}$, и пишем $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ или $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можно доказать, что

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \text{ для любого кардинального числа } \mathfrak{m};$$

в частности, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Наименьшая (*точная*) *верхняя грань* произвольного множества $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in S}$ кардиналов определяется как наименьший кардинал $\mathfrak{m}$, такой, что $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ при всех $s \in S$, и обозначается $\sup\limits_{s \in S} \mathfrak{m}_s$; можно показать, что такое число всегда существует.

1.3. УПОРЯДОЧЕНИЯ. ПОРЯДКОВЫЕ ЧИСЛА

Пусть X — некоторое множество и $<$ — некоторое отношение на X. Будем говорить, что $<$ *линейно упорядочивает* множество X или что $<$ есть *линейный порядок* на X, если отношение $<$ обладает следующими свойствами:

(LO1) *Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.*

(LO2) *Если $x < y$, то отношение $y < x$ не имеет места.*

(LO3) *Если $x \neq y$, то либо $x < y$, либо $y < x$.*

Множество X вместе с некоторым линейным порядком на X называется *линейно упорядоченным множеством.*

Будем говорить, что элемент x_0 линейно упорядоченного множества X является *наименьшим элементом* множества X, если $x_0 < x$ для любого $x \in X \setminus \{x_0\}$. Аналогично определяется *наибольший элемент* линейно упорядоченного множества. Так как каждое подмножество линейно упорядоченного множества само линейно упорядочено, то наибольший и наименьший элементы подмножества линейно упорядоченного множества определены корректно. Очевидно, что они не обязательно существуют.

Всякая пара (D, E) подмножеств множества X, линейно упорядоченного отношением $<$, такая, что $D \cup E = X$, $D \neq \neq \varnothing \neq E$ и

$$\text{из } x \in D \text{ и } y \in E \text{ следует, что } x < y,$$

называется *сечением* множества X. Множество D называется *нижним классом*, а множество E — *верхним классом* сечения; ясно, что эти классы не пересекаются. Для каждого сечения всякого линейно упорядоченного множества выполнено в точности одно из следующих четырех условий:

(1) Существует наибольший элемент в нижнем классе и наименьший элемент в верхнем классе.

(2) Существует наибольший элемент в нижнем классе, но не существует наименьшего элемента в верхнем классе.

(3) Не существует наибольшего элемента в нижнем классе, но существует наименьший элемент в верхнем классе.

(4) Не существует наибольшего элемента в нижнем классе и не существует наименьшего элемента в верхнем классе.

Мы называем сечение *скачком*, если выполнено условие (1), и *щелью*, если выполнено условие (4).

Линейно упорядоченное множество X называется *плотно упорядоченным*, если никакое сечение множества X не является скачком; если, кроме того, никакое сечение множества X не является щелью, то X называется *непрерывно упорядоченным*. Множество X плотно упорядочено в том и только том случае, когда для любых двух элементов x, $y \in X$, таких, что $x < y$, существует элемент z, такой, что $x < z < y$. Множество непрерывно упорядочено в том и только том случае, если кроме приведенного условия для каждого непустого подмножества $X_0 \subset X$ множество

$$\{x \in X: a < x \text{ для каждого } a \in X_0 \setminus \{x\}\}$$

либо пусто, либо имеет наименьший элемент.

Линейный порядок $<$ на множестве X называется *вполне упорядочением*, а множество X вместе с порядком $<$ называется *вполне упорядоченным*, если порядок $<$ обладает следующим дополнительным свойством:

(WO) *Каждое непустое подмножество множества X имеет наименьший элемент.*

Можно доказать, что каждое множество кардинальных чисел вполне упорядочено отношением $<$, введенным в предыдущем параграфе.

Пусть множество X линейно упорядочено отношением $<$, а множество Y линейно упорядочено отношением $<'$. Будем говорить, что отображение f множества X в множество Y *сохраняет порядок*, если $f(x) <' f(y)$ для всякой пары x, $y \in X$, такой, что $x < y$. Если существует сохраняющее порядок отображение линейно упорядоченного множества X на линейно упорядоченное множество Y, то X и Y называются *подобными*.

Каждое линейно упорядоченное множество X подобно подмножеству множества всех сечений множества X, удовлетворяющему условиям (1), (2) или (4) и линейно упорядоченному по следующему правилу:

$$(D_1, E_1) < (D_2, E_2) \text{ в том и только том случае,}$$
$$\text{если } D_1 \subset D_2 \text{ и } D_1 \neq D_2.$$

Указанное подмножество не имеет щелей, и если X плотно упорядочено, то оно непрерывно упорядочено.

Каждому вполне упорядоченному множеству X приписывается некоторое порядковое число, или ординал, α; оно называется *порядковым типом* множества X; порядковые типы вполне упорядоченных множеств X и Y одинаковы в том и только том случае, когда X и Y подобны.

Каждое сохраняющее порядок отображение инъективно, поэтому если X и Y подобны, то $|X|=|Y|$. Следовательно, каждому ординалу α соответствует некоторый кардинал — мощность вполне упорядоченного множества типа α; этот кардинал называется *мощностью* ординала α и обозначается $|\alpha|$. Если $|\alpha| \leqslant \aleph_0$, то ординал α называют *счетным*.

Пусть α и β — ординалы, являющиеся порядковыми типами соответственно множеств X и Y. Будем говорить, что α *меньше* β или что β *больше* α, и писать $\alpha < \beta$ или $\beta > \alpha$, если существует такое $y_0 \in Y$, что множества X и $\{y \in Y\colon y < y_0\}$ подобны. Можно доказать, что каждое множество ординалов вполне упорядочено этим отношением $<$. Всякое вполне упорядоченное множество типа α подобно множеству всех ординалов, меньших α, линейно упорядоченному отношением $<$.

Ординал λ называется *предельным*, если не существует порядкового числа, непосредственно предшествующего λ, т. е. если для каждого $\xi < \lambda$ существует ординал α, такой, что $\xi < \alpha < \lambda$.

Если ординал ξ непосредственно предшествует α, то говорят, что ξ является *предшественником* α, и пишут $\alpha = \xi + 1$; α называют *наследником* ординала ξ. У каждого ординала имеется наследник; для любого ординала α и любого целого $n \geqslant 0$ определим по индукции $\alpha + n$, положив $\alpha + 0 = \alpha$ и $\alpha + n = [\alpha + (n-1)] + 1$ для $n \geqslant 1$. Оказывается, любой ординал может быть единственным образом представлен в виде $\lambda + n$, где λ — некоторый предельный ординал, а n — неотрицательное целое число. Ординал $\lambda + n$ *четный* (*нечетный*), если n четно (нечетно).

Если множество всех ординалов, меньших предельного ординала λ, содержит подмножество A типа α, такое, что для каждого $\xi < \lambda$ существует $\xi' \in A$, удовлетворяющее неравенству $\xi < \xi' < \lambda$, то говорят, что ординал α *конфинален* λ.

Бесконечный ординал λ (т. е. порядковый тип некоторого бесконечного вполне упорядоченного множества) называется *начальным* (или *инициальным*) ординалом, если λ — наименьший среди всех ординалов α, таких, что $|\alpha|=|\lambda|$, т. е. если $|\xi|<|\lambda|$ для любого $\xi < \lambda$. Инициальный ординал λ называется *регулярным*, если не существует $\alpha < \lambda$, конфинального λ.

Для каждого кардинала $\mathfrak{m}$ существует начальный ординал λ, такой, что $|\lambda| = \mathfrak{m}$, и этот λ единствен (см. теорему Цермело в следующем параграфе). Кардинал $\mathfrak{m}$ называется *регулярным*, если отвечающий ему начальный ординал λ, такой, что $|\lambda| = \mathfrak{m}$, регулярен. Начальный ординал мощности $\aleph_0$ обозначается через ω_0; это порядковый тип множества всех положительных целых чисел с естественным порядком.

Наименьший ординал, мощность которого больше $\aleph_0$, т. е. наименьший несчетный ординал, обозначается через ω_1, а его мощность — через $\aleph_1$. Равенство $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ называется *гипотезой континуума*; гипотеза континуума независима от аксиом теории множеств. Для каждой последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ординалов, меньших ω_1, существует такой ординал $\alpha < \omega_1$, что $\alpha_i < \alpha$ для $i = 1, 2, \ldots$. Наименьший ординал мощности, большей $\aleph_1$, обозначается через ω_2, а его мощность — через $\aleph_2$. Более общим образом, каждому ординалу α соответствуют кардинал $\aleph_\alpha$ и ординал ω_α, являющийся начальным ординалом мощности $\aleph_\alpha$. Можно доказать, что каждый кардинал равен $\aleph_\alpha$ для некоторого α.

Пусть α — некоторый ординал, а X — какое-нибудь множество; под ***трансфинитной последовательностью типа*** α со значениями в X понимают любое отображение f множества $W(\alpha)$, состоящего из всех ординалов, меньших α, в множество X. Элемент множества X, поставленный в соответствие ординалу $\xi < \alpha$, обозначается x_ξ, а не $f(\xi)$, а сама трансфинитная последовательность обозначается $x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots, \xi < \alpha$. Трансфинитная последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots, \xi < \alpha$, множеств называется *возрастающей*, если $A_{\xi'} \subset A_\xi$ при $\xi' < \xi < \alpha$, и *убывающей*, если $A_\xi \subset A_{\xi'}$ при $\xi' < \xi < \alpha$.

Для определения трансфинитных последовательностей обычно применяется

Теорема об определениях по трансфинитной индукции. *Пусть даны произвольное множество Z и некоторый ординал α. Пусть G — множество всех трансфинитных последовательностей типов, меньших α, со значениями в множестве Z. Для каждой функции h из G в Z существует тогда в точности одна трансфинитная последовательность f типа α, такая, что*

$$f(\xi) = h(f \mid W(\xi)) \text{ при всех } \xi < \alpha,$$

где $f \mid W(\xi)$ — трансфинитная последовательность типа ξ, полученная сужением функции f на множество $W(\xi)$ всех ординалов, меньших ξ.

Теорему об определениях по трансфинитной индукции часто применяют в случае, когда Z есть семейство всех подмножеств множества X. Функция h определяется при этом обычно тремя различными формулами. Первая формула дает значения h на последовательности g типа 0 (где 0 — порядковый тип пустого множества), являющейся пустой последовательностью, т. е. значение $h(\varnothing)$. Вторая формула дает значение $h(g)$ на всех последовательностях g типа $\xi + 1$, и, наконец, третья формула дает значение $h(g)$ на всех последовательностях g, порядковый тип которых является предельным ординалом. Например, первая формула может быть такой:

$$h(\varnothing)=A,$$

вторая может иметь вид

$$h(g)=F(g(\xi)),$$

а третьей может быть формула

$$h(g)=G\Bigl(\bigcup_{\xi<\lambda} g(\xi)\Bigr) \quad \text{или} \quad h(g)=G\Bigl(\bigcap_{\xi<\lambda} g(\xi)\Bigr),$$

где F и G — данные функции и A — некоторое множество. Тогда последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots, \xi<\alpha$, которая существует в силу теоремы об определениях по трансфинитной индукции, удовлетворяет следующим условиям:

$$A_0=A, \quad A_{\xi+1}=F(A_\xi),$$
$$A_\lambda=G\Bigl(\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi\Bigr) \quad \text{или} \quad A_\lambda=G\Bigl(\bigcap_{\xi<\lambda} A_\xi\Bigr).$$

Следовательно, для того чтобы определить трансфинитную последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots, \xi<\alpha$, достаточно определить A_0 и описать, как $A_{\xi+1}$ зависит от A_ξ и как A_λ зависит либо от $\bigcup\limits_{\xi<\lambda} A_\xi$, либо от $\bigcap\limits_{\xi<\lambda} A_\xi$.

Пусть множество X вполне упорядочено отношением $<$; тогда всякое подмножество $A\subset X$, при каждом $x_0\in X$ удовлетворяющее условию

$$\text{если } \{x\in X\colon x<x_0\}\subset A, \quad \text{то} \quad x_0\in A,$$

совпадает с множеством X. Этот факт служит основой для индуктивных доказательств. Мы будем применять его как в случае, когда X — множество натуральных чисел (доказательства по математической индукции), так и в случае, когда X — множество всех ординалов, меньших данного ординала α (доказательства по трансфинитной индукции).

Пусть X — некоторое множество и $\leqslant$ — некоторое отношение на нем. Мы говорим, что $\leqslant$ *упорядочивает* X, или что $\leqslant$ является *упорядочением* (*порядком*) на X, если отношение $\leqslant$ обладает следующими свойствами:

(OR1) *Если $x\leqslant y$ и $y\leqslant z$, то $x\leqslant z$.*

(OR2) *Для каждого $x\in X$ имеем $x\leqslant x$.*

(OR3) *Если $x\leqslant y$ и $y\leqslant x$, то $x=y$.*

Множество X вместе с некоторым порядком $\leqslant$ на X называется *упорядоченным множеством.* Два элемента x и y упорядоченного множества X могут быть *несравнимыми*, т. е. может случиться, что не имеет места ни одно из неравенств $x \leqslant y$, $y \leqslant x$.

Всякое семейство множеств упорядочено отношением включения $\subset$.

Если X линейно упорядочено отношением $<$, то, полагая для любых $x, y \in X$

$$x \leqslant y \text{ в том и только том случае, когда } x < y \text{ или } x = y,$$

мы получаем некоторый порядок на X. Следовательно, каждое линейно упорядоченное множество можно рассматривать как некоторое упорядоченное множество. Если для каждой пары x, y элементов подмножества A упорядоченного множества X имеет место одно из соотношений $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$, то, полагая

$$x < y \text{ в том и только том случае, когда } x \leqslant y \text{ и } x \neq y,$$

мы получаем некоторый линейный порядок на A. Говорят, что A есть *линейно упорядоченное подмножество* множества X, упорядоченного отношением $\leqslant$.

Элемент u некоторого упорядоченного множества X называется *наименьшей* (*точной*) *верхней гранью* подмножества $A \subset X$, если $x \leqslant u$ при всех $x \in A$ и если всякий элемент $v \in X$, такой, что $x \leqslant v$ при всех $x \in A$, удовлетворяет неравенству $u \leqslant v$. *Наибольшая* (*точная*) *нижняя грань* подмножества $A \subset X$ определяется аналогичным образом. Зметим, что наименьшая верхняя грань множества X, если она существует, является наибольшим элементом множества X, а наибольшая нижняя грань множества X, если она существует, является наименьшим элементом множества X.

Пусть X — произвольное множество и $\leqslant$ — отношение на X. Мы говорим, что $\leqslant$ *направляет* множество X или что X *направлено* отношением $\leqslant$, если отношение $\leqslant$ обладает следующими свойствами:

(D1) *Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.*

(D2) *Для всякого $x \in X$ имеем $x \leqslant x$.*

(D3) *Для любых x, $y \in X$ существует такой элемент $z \in X$, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$.*

Подмножество A множества X, направленного отношением $\leqslant$, *конфинально* в X, если для каждого $x \in X$ существует такое $a \in A$, что $x \leqslant a$. Конфинальные подмножества линейно упорядоченных и упорядоченных множеств определяются аналогично.

Пусть множества X и Y упорядочены (направлены) отношениями $\leqslant$ и $\leqslant'$ соответственно; функция f из множества X в Y называется *неубывающей*, если $f(x) \leqslant' f(y)$ для каждой пары x, y элементов X, таких, что $x \leqslant y$. *Невозрастающие* функции определяются аналогично.

I.4. АКСИОМА ВЫБОРА

Аксиома выбора часто используется в этой книге, хотя факт ее применения обычно не отмечается. Однако иногда удобнее пользоваться аксиомой выбора не в ее первоначальном виде, а в одной из альтернативных форм, которые являются важными теоремами теории множеств. Ниже мы сформулируем теорему Цермело о вполне упорядочиваемости и два принципа максимума, являющиеся альтернативными формами аксиомы выбора, и докажем равносильность всех четырех утверждений. Прежде всего дадим два необходимых определения.

Элемент x_0 упорядоченного множества X называется *максимальным элементом* множества X, если из $x_0 \leqslant x \in X$ следует, что $x_0 = x$. Пусть дано множество X и свойство $\mathscr{P}$, которым могут обладать подмножества множества X. Говорят, что $\mathscr{P}$ есть свойство *конечного характера*, если пустое множество обладает этим свойством, а множество $A \subset X$ обладает свойством $\mathscr{P}$ в том и только том случае, когда им обладает каждое конечное подмножество A.

Аксиома выбора. *Для всякого семейства $\{X_s\}_{s \in S}$ непустых множеств существует функция f из S в $\bigcup_{s \in S} X_s$, такая, что $f(s) \in X_s$ при всех $s \in S$.*

Теорема Цермело о вполне упорядочиваемости. *На каждом множестве X существует отношение $<$, которое вполне упорядочивает X.*

Лемма Тейхмюллера — Тьюки. *Пусть задано множество X и некоторое свойство $\mathscr{P}$ его подмножеств. Если $\mathscr{P}$ есть свойство конечного характера, то каждое множество $A \subset X$, обладающее свойством $\mathscr{P}$, содержится в множестве $B \subset X$, которое обладает свойством $\mathscr{P}$ и является максимальным элементом в упорядоченном по включению семействе всех подмножеств множества X, обладающих свойством $\mathscr{P}$.*

Лемма Куратовского — Цорна. *Если для каждого линейно упорядоченного подмножества A множества X, упорядоченного отношением $\leqslant$, существует такой элемент $x_0 \in X$, что $x \leqslant x_0$ при всех $x \in A$, то в X существует максимальный элемент.*

Теорема Цермело следует из аксиомы выбора.

Пусть f — функция, приписывающая каждому непустому подмножеству A множества X некоторый элемент $f(A) \in A$. Предположим, кроме того, что $f(\varnothing) = x \in X$. Обозначим через $\mathscr{W}$ семейство всех вполне упорядочивающих отношений на подмножествах множества X, и пусть α — наименьший ординал, больший всех порядковых типов подмножеств множества X, упорядоченных элементами семейства $\mathscr{W}$.

В силу теоремы об определениях по трансфинитной индукции существует трансфинитная последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots$ $\ldots, \xi < \alpha$, такая, что

$$x_\xi = f(X \setminus \{x_\gamma: \gamma < \xi\}) \text{ для каждого } \xi < \alpha.$$

Если $x_\xi \neq x$, то $x_\xi \in X \setminus \{x_\gamma: \gamma < \xi\}$ и $x_\xi \neq x_\gamma$ при $\gamma < \xi$. Следовательно, если бы для всех $\xi < \alpha$ было $x_\xi \neq x$, то существовала бы трансфинитная последовательность типа α, все члены которой различны и принадлежат множеству X. Но это невозможно в силу определения α. Поэтому существует наименьший ординал ξ, такой, что $x_\xi = x$. Тогда $X = \{x_\gamma: \gamma < \xi\}$, т. е. все элементы множества X расположены в трансфинитную последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_\gamma, \ldots, \gamma < \xi$, и $x_\gamma \neq x_{\gamma'}$ при $\gamma \neq \gamma'$. Это и означает, что X можно вполне упорядочить. ∎

Лемма Тейхмюллера — Тьюки вытекает из теоремы Цермело.

Пусть даны множество X, некоторое свойство $\mathscr{P}$ (его подмножеств) конечного характера и множество $A \subset X$, обладающее свойством $\mathscr{P}$. В силу теоремы Цермело множество $X \setminus A$ может быть вполне упорядочено. Так как каждое вполне упорядоченное множество подобно множеству всех ординалов, меньших некоторого ординала α, то все элементы множества $X \setminus A$ можно расположить в трансфинитную последовательность типа α:

$$x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots, \xi < \alpha.$$

В силу теоремы об определениях по трансфинитной индукции, в доказательстве которой не используется аксиома выбора, существует трансфинитная последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots$ $\ldots, \xi < \alpha + 1$, такая, что

$$A_0 = A,$$

$$A_\xi = \begin{cases} \bigcup\limits_{\zeta<\xi} A_\zeta \cup \{x_\xi\}, & \text{если } \bigcup\limits_{\zeta<\xi} A_\zeta \cup \{x_\xi\} \text{ обладает свойством } \mathscr{P}, \\ \bigcup\limits_{\zeta<\xi} A_\zeta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

когда $\xi < \alpha$, и

$$A_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi.$$

Легко видеть, что все элементы этой последовательности обладают свойством $\mathscr{P}$ и что $B = A_\alpha \supset A_0 = A$ является максимальным подмножеством множества X, обладающим свойством $\mathscr{P}$. ∎

Лемма Куратовского — Цорна следует из леммы Тейхмюллера — Тьюки.

Свойство «быть линейно упорядоченным подмножеством множества X, упорядоченного отношением $\leqslant$», является свойством конечного характера. В силу леммы Тейхмюллера — Тьюки, положив $A = \varnothing$, можно заключить, что существует максимальное линейно упорядоченное подмножество B множества X, упорядоченного отношением $\leqslant$. Выберем $x_0 \in X$ таким образом, чтобы $x \leqslant x_0$ для каждого $x \in B$. Элемент x_0 является максимальным элементом множества X. В самом деле, для каждого $x \in X$, такого, что $x_0 \leqslant x$, имеем $x_0 = x$, так как в противном случае $B \cup \{x\}$ было бы линейно упорядоченным подмножеством множества X, большим B. ■

Аксиома выбора следует из леммы Куратовского — Цорна.

Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство непустых множеств. Обозначим через $\mathscr{X}$ множество всех пар (T, f), где $T \subset S$ и f — функция из T в $\bigcup\limits_{s \in S} X_s$, такая, что $f(s) \in X_s$ для любого $s \in T$. Упорядочим множество $\mathscr{X}$, полагая:

$$(T_1, f_1) \leqslant (T_2, f_2) \text{ в том и только том случае, когда}$$
$$T_1 \subset T_2 \quad \text{и} \quad f_2(s) = f_1(s) \quad \text{для } s \in T_1.$$

Легко видеть, что для каждого линейно упорядоченного подмножества $\mathscr{A} = \{(T_w, f_w)\}_{w \in W}$ множества $\mathscr{X}$ формулы

$$T_0 = \bigcup_{w \in W} T_w \quad \text{и} \quad f_0(s) = f_w(s) \quad \text{для} \quad s \in T_w$$

определяют элемент (T_0, f_0) множества $\mathscr{X}$ и $(T_w, f_w) \leqslant (T_0, f_0)$ для каждого $w \in W$. По лемме Куратовского — Цорна в $\mathscr{X}$ существует максимальный элемент (T, f); мы покажем, что $T = S$, и тем завершим доказательство. В самом деле, допустим, что существует $s_0 \in S \setminus T$; выберем $x_0 \in X_{s_0}$ и положим

$$T' = T \cup \{s_0\}, \quad f'(s) = f(s) \quad \text{для} \quad s \in T \quad \text{и} \quad f'(s_0) = x_0.$$

Тем самым определена пара $(T', f') \in \mathscr{X}$, такая, что $(T, f) \leqslant (T', f')$ и $(T, f) \neq (T', f')$; мы пришли к противоречию. ■

I.5. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

В этой книге мы пользуемся свойствами арифметических операций на множестве вещественных чисел, свойствами отношения $<$ линейного упорядочения множества вещественных чисел и свойствами функции абсолютного значения. Мы также предполагаем у читателя знакомство с понятием предела последовательности вещественных чисел, обозначаемого lim, и понятием непрерывной функции. Используется также тот факт, что каждое ограниченное сверху непустое множество вещественных чисел имеет наименьшую верхнюю грань, т. е. непрерывность множества вещественных чисел. Наименьшая верхняя грань множества обозначается через sup, а наибольшая нижняя грань — через inf (в том случае, когда множества конечны, используются символы max и min соответственно). При описании некоторых примеров топологических пространств используются тригонометрические функции, а также координатные системы на плоскости.

Открытые интервалы с концами a и b, где $a < b$, обозначаются через (a, b), замкнутые интервалы (отрезки) с концами a и b — через $[a, b]$; полуоткрытые интервалы обозначаются через $(a, b]$ и $[a, b)$. Множество всех вещественных чисел обозначается через R, а множество всех натуральных чисел — через N. Замкнутый единичный отрезок $[0, 1]$ обозначается через I.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Исчерпывающий курс теории множеств представляет собой замечательная книга Куратовского и Мостовского [1968]. Утверждение о том, что некоторое топологическое высказывание независимо от аксиом теории множеств, которое делается здесь в ряде случаев, относится к системе аксиом, приведенной в этой книге. Наше изложение общей топологии базируется на наивной теории множеств, однако легко может быть перестроено на основе указанной системы аксиом.

Лемма Тейхмюллера — Тьюки была доказана Тейхмюллером [1939] и Тьюки [1940], лемма Куратовского-Цорна доказана Куратовским [1922] и Цорном [1935].

Глава 1

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе мы вводим основные понятия общей топологии.

В § 1.1 определяется понятие топологического пространства, вводятся открытые множества, окрестности, базы, предбазы и базы в точке. Мы определяем также вес и характер топологического пространства и формулируем аксиомы счетности. Далее мы вводим замкнутые множества и рассматриваем операторы замыкания и взятия внутренности. В конце параграфа появляется понятие локально конечного семейства множеств.

Параграф 1.2 посвящен различным методам построения топологии в множестве.

Параграф 1.3 является прямым продолжением § 1.1. Мы рассматриваем операторы взятия границы и производного множества и вводим следующие важные классы множеств в топологических пространствах: всюду плотные множества, коплотные множества, нигде не плотные множества и борелевские множества (в частности, F_σ- и G_δ-множества).

В § 1.4 вводится понятие непрерывного отображения, которое при изучении топологических пространств оказывается не менее важным, чем само понятие топологического пространства. Мы рассматриваем также замкнутые отображения, открытые отображения и гомеоморфизмы; последний класс отображений приводит к понятию гомеоморфности пространств. Далее мы рассматриваем инварианты и обратные инварианты одного класса отображений и в заключение приводим некоторые замечания о предмете общей топологии.

В § 1.5 обсуждаются аксиомы отделимости, т. е. ограничения различного типа, касающиеся отделимости точек и замкнутых множеств в топологических пространствах. В этом параграфе мы доказываем лемму Урысона — одну из самых важных теорем общей топологии.

Последний параграф посвящен направленностям и фильтрам, которые приводят к двум различным способам описания сходимости в общих топологических пространствах. Мы изучаем также два класса топологических пространств, в которых для описания сходимости и топологии достаточно последовательностей.

1.1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА. БАЗЫ. ЗАМЫКАНИЕ И ВНУТРЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА

Топологическое пространство — это пара $(X, \mathcal{O})$, состоящая из множества X и некоторого семейства $\mathcal{O}$ подмножеств множества X, удовлетворяющего следующим условиям:

(O1) $\varnothing \in \mathcal{O}$ *и* $X \in \mathcal{O}$.
(O2) *Если* $U_1 \in \mathcal{O}$ *и* $U_2 \in \mathcal{O}$, *то* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.
(O3) *Если* $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, *то* $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$.

Множество X в этом случае называется *пространством*, его элементы называются точками пространства; подмножества X, принадлежащие семейству $\mathcal{O}$, называются *открытыми* в пространстве X; семейство $\mathcal{O}$ открытых подмножеств пространства X называется также *топологией* на X. Свойства (O1)—(O3) семейства открытых множеств можно переформулировать следующим образом:

(O1′) *Пустое множество и все пространство суть открытые множества.*
(O2′) *Пересечение двух открытых множеств есть открытое множество.*
(O3′) *Объединение любого семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Из (O2) непосредственно следует, что пересечение любого конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.

Если для некоторого $x \in X$ и некоторого открытого множества $U \subset X$ мы имеем $x \in U$, то U называется *окрестностью* точки x. Множество $V \subset X$ открыто в том и только том случае, если для каждой точки $x \in V$ существует ее окрестность U_x, содержащаяся в V. Действительно, если V — открытое множество, то положим $U_x = V$ для каждого $x \in V$. Если выполнено это условие, то $V = \bigcup\limits_{x \in V} U_x$ открыто в силу (O3).

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ называется *базой топологического пространства* $(X, \mathcal{O})$, если каждое непустое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого подсемейства семейства $\mathcal{B}$. Легко показать, что семейство $\mathcal{B}$ подмножеств X есть база топологического пространства $(X, \mathcal{O})$ в том и только том случае, когда для любой точки $x \in X$ и каждой окрестности V этой точки существует такое $U \in \mathcal{B}$, что $x \in U \subset V$. Очевидно, что топологическое пространство может иметь много баз. Всякая база обладает следующими свойствами:

(B1) *Для любых* $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ *и любой точки* $x \in U_1 \cap U_2$ *существует элемент* $U \in \mathcal{B}$, *такой, что* $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

(B2) *Для любого* $x \in X$ *существует элемент* $U \in \mathscr{B}$, *такой, что* $x \in U$.

В самом деле, первое свойство вытекает из того, что $U_1 \cap U_2$ — открытое множество, а второе есть следствие того, что X — открытое множество.

Множество всех кардинальных чисел вида $|\mathscr{B}|$, где $\mathscr{B}$ — база топологического пространства $(X, \mathcal{O})$, имеет наименьший элемент (так как всякое множество кардинальных чисел вполне упорядочено отношением $<$). Это наименьшее кардинальное число называется *весом топологического пространства* $(X, \mathcal{O})$ и обозначается через $w((X, \mathcal{O}))$.

Семейство $\mathscr{P} \subset \mathcal{O}$ называется *предбазой топологического пространства* $(X, \mathcal{O})$, если семейство всех конечных пересечений $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$, где $U_i \in \mathscr{P}$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, является базой пространства $(X, \mathcal{O})$.

Семейство $\mathscr{B}(x)$ окрестностей точки x называется *базой топологического пространства* $(X, \mathcal{O})$ *в точке* x, если для любой окрестности V точки x существует такой элемент $U \in \mathscr{B}(x)$, что $x \in U \subset V$. Легко показать, что если $\mathscr{B}$ — база пространства $(X, \mathcal{O})$, то семейство $\mathscr{B}(x)$, состоящее из всех элементов $\mathscr{B}$, содержащих точку x, есть база пространства $(X, \mathcal{O})$ в точке x. С другой стороны, если для каждой точки $x \in X$ задана база $\mathscr{B}(x)$ пространства $(X, \mathcal{O})$ в точке x, то объединение $\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ есть база пространства $(X, \mathcal{O})$.

Характер точки x в топологическом пространстве $(X, \mathcal{O})$ есть наименьшее кардинальное число вида $|\mathscr{B}(x)|$, где $\mathscr{B}(x)$ — база $(X, \mathcal{O})$ в точке x; это кардинальное число обозначается $\chi(x, (X, \mathcal{O}))$. *Характер топологического пространства* $(X, \mathcal{O})$ есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $\chi(x, (X, \mathcal{O}))$ для $x \in X$; это кардинальное число обозначается $\chi((X, \mathcal{O}))$.

Если $\chi((X, \mathcal{O})) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что пространство $(X, \mathcal{O})$ удовлетворяет *первой аксиоме счетности*; это означает, что в каждой точке $x \in X$ существует счетная база. Если $w((X, \mathcal{O})) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что пространство $(X, \mathcal{O})$ удовлетворяет *второй аксиоме счетности*; это означает, что $(X, \mathcal{O})$ имеет счетную базу.

Пусть $(X, \mathcal{O})$ — топологическое пространство и для каждого $x \in X$ задана база $\mathscr{B}(x)$ пространства $(X, \mathcal{O})$. Семейство $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ называется *системой окрестностей топологического пространства* $(X, \mathcal{O})$. Мы покажем, что всякая система окрестностей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ обладает следующими свойствами:

(BP1) *Для всякого* $x \in X$ *имеем* $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ *и для всякого* $U \in \mathscr{B}(x)$ *имеем* $x \in U$.

(BP2) *Если* $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, *то существует такое* $V \in \mathscr{B}(x)$, *что* $V \subset U$.

(BP3) *Для любых* U_1, $U_2 \in \mathscr{B}(x)$ *существует такое* $U \in \mathscr{B}(x)$, что $U \subset U_1 \cap U_2$.

Свойство (BP1) следует непосредственно из определения базы в точке x. Свойства (BP2) и (BP3) также следуют из этого определения, так как $U \in \mathscr{B}(y)$, а $U_1 \cap U_2$ — открытые множества, содержащие x.

Пусть $(X, \mathcal{O})$ — топологическое пространство; множество $F \subset X$ называется ***замкнутым*** в этом пространстве, если его дополнение $X \setminus F$ — открытое множество. Используя законы де Моргана и свойства (O1)—(O3) открытых множеств, мы приходим к выводу, что семейство $\mathscr{C}$ замкнутых множеств обладает следующими свойствами, двойственными к свойствам (O1)—(O3):

(C1) $X \in \mathscr{C}$ *и* $\varnothing \in \mathscr{C}$.

(C2) *Если* $F_1 \in \mathscr{C}$ *и* $F_2 \in \mathscr{C}$, *то* $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{C}$.

(C3) *Если* $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}$, *то* $\bigcap \mathscr{A} \in \mathscr{C}$.

Эти свойства можно переформулировать следующим образом:

(C1′) *Все пространство и пустое множество суть замкнутые множества.*

(C2′) *Объединение двух замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

(C3′) *Пересечение любого семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Докажем, например, (C3). Пусть $\{F_s\}_{s \in S}$ — семейство замкнутых множеств. По определению, дополнение $U_s = X \setminus F_s$ есть открытое множество для любого $s \in S$. Так как

$$\bigcap_{s \in S} F_s = \bigcap_{s \in S} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s$$

и так как объединение $\bigcup_{s \in S} U_s$ открыто в силу (O3), то пересечение $\bigcap_{s \in S} F_s$ замкнуто.

Множества, которые являются одновременно и открытыми, и замкнутыми, называются ***открыто-замкнутыми.***

Пусть $A \subset X$; обозначим через $\mathscr{C}_A$ семейство всех замкнутых множеств, содержащих A. В силу (C1) имеем $\mathscr{C}_A \neq \varnothing$, а из (C3) следует, что пересечение $\bar{A} = \bigcap \mathscr{C}_A$ замкнуто. Легко видеть, что $\bar{A}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A; это множество называется ***замыканием*** A. Очевидно, что множество замкнуто в том и только том случае, если оно совпадает со своим замыканием.

Для любых подмножеств A, B пространства X имеем

(1) *если* $A \subset B$, *то* $\bar{A} \subset \bar{B}$.

В самом деле, из включения $A \subset B$ следует, что $\mathscr{C}_B \subset \mathscr{C}_A$, откуда $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Докажем теперь следующее предложение.

1.1.1. Предложение. *Для любого $A \subset X$ следующие условия равносильны*:

(i) *точка x принадлежит $\bar{A}$;*

(ii) *для всякой базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x и любого $U \in \mathscr{B}(x)$ имеем $U \cap A \neq \varnothing$;*

(iii) *существует база $\mathscr{B}(x)$ в точке x, такая, что $U \cap A \neq \varnothing$ для каждого $U \in \mathscr{B}(x)$.*

Доказательство. Для доказательства импликации (i)$\Rightarrow$(ii) допустим противное, т. е. что для базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x существует такое $U \in \mathscr{B}(x)$, что $U \cap A = \varnothing$. Тогда $A \subset X \setminus U$ и $X \setminus U \in \mathscr{C}_A$. Следовательно, $\bar{A} \subset X \setminus U$ и $x \notin \bar{A}$, т. е. (i) не имеет места.

Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидна. Остается показать, что (iii)$\Rightarrow$(i). Допустим, что (i) не имеет места, т. е. $x \notin \bar{A}$. Тогда существует замкнутое множество $F \in \mathscr{C}_A$, такое, что $x \notin F$. Для открытого множества $V = X \setminus F$ имеем

$$x \in V \quad \text{и} \quad V \cap A = \varnothing. \tag{2}$$

Далее, для любой базы $\mathscr{B}(x)$ в x существует такое $U \in \mathscr{B}(x)$, что $x \in U \subset V$, и из (2) следует, что $U \cap A = \varnothing$, т. е. (iii) не имеет места. ∎

1.1.2. Следствие. *Если U — открытое множество и $U \cap A = \varnothing$, то и $U \cap \bar{A} = \varnothing$.*

В частности, *если U и V — непересекающиеся открытые множества, то $U \cap \bar{V} = \varnothing = \bar{U} \cap V$.*

Доказательство. Допустим, что существует $x \in U \cap \bar{A}$, и возьмем в качестве базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x семейство всех окрестностей точки x. Из предложения 1.1.1 следует, что $U \cap A \neq \varnothing$, а это противоречит нашему предположению. Таким образом, $U \cap \bar{A} = \varnothing$. ∎

Наиболее важные свойства оператора замыкания перечислены в следующей теореме.

1.1.3. Теорема. *Оператор замыкания обладает следующими свойствами*:

(CO1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

(CO2) $A \subset \bar{A}$.

(CO3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(CO4) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$.

Доказательство. Свойства (CO1) и (CO2) следуют непосредственно из определений, а свойство (CO4) вытекает из того, что $\bar{A}$ — замкнутое множество.

Из (1) следует, что $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ и $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Значит,

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}. \tag{3}$$

В силу (CO2), $A \subset \bar{A}$, $B \subset \bar{B}$, и потому $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Последнее множество как объединение двух замкнутых множеств замкнуто; отсюда по определению замыкания получаем

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) устанавливают равенство (CO3). ∎

Внутренность множества $A \subset X$ есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, или, что эквивалентно, наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Это множество обозначается $\operatorname{Int} A$. Очевидно, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

Следующее предложение является непосредственным следствием определения внутренности.

1.1.4. Предложение. *Точка x принадлежит $\operatorname{Int} A$ тогда и только тогда, когда существует такая ее окрестность U, что $U \subset A$.* ∎

Как показывает следующая теорема, оператор взятия внутренности тесно связан с оператором замыкания.

1.1.5. Теорема. *Для каждого $A \subset X$ имеем*

$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

Доказательство. Из (CO2) вытекает включение $X \setminus A \subset \overline{X \setminus A}$; таким образом,

$$X \setminus \overline{X \setminus A} \subset X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Так как множество $X \setminus \overline{X \setminus A}$ открыто, то

$$X \setminus \overline{X \setminus A} \subset \operatorname{Int} A. \tag{5}$$

Для любого открытого множества U, содержащегося в A, имеем

$$X \setminus A \subset X \setminus U = \overline{X \setminus U};$$

используя (1), получаем

$$\overline{X \setminus A} \subset X \setminus U, \quad \text{или} \quad U \subset X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

В частности,

$$\operatorname{Int} A \subset X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

Последнее включение вместе с (5) и устанавливает наше утверждение. ∎

Свойства оператора взятия внутренности двойственны свойствам (CO1)—(CO4) и перечислены в следующей теореме, которая вытекает из утверждений 1.1.3, 1.1.5 и законов де Моргана.

1.1.6. Теорема. *Оператор* Int *обладает следующими свойствами*:
(IO1) $\operatorname{Int} X = X$.
(IO2) $\operatorname{Int} A \subset A$.
(IO3) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.
(IO4) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$. ∎

1.1.7. Пример. Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{O}$ — семейство всех его подмножеств. Очевидно, что $(X, \mathcal{O})$ — топологическое пространство. Каждое множество $A \subset X$ открыто-замкнуто. Всякое множество, содержащее точку x, является ее окрестностью. Семейство всех одноточечных подмножеств множества X образует базу пространства $(X, \mathcal{O})$. Эта база имеет минимальную мощность. Поэтому вес $(X, \mathcal{O})$ равен мощности множества X. Для любой точки $x \in X$ семейство, состоящее из единственного множества $\{x\}$, есть база пространства $(X, \mathcal{O})$ в точке x. Это показывает, что $(X, \mathcal{O})$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. Каждое множество $A \subset X$ совпадает со своим замыканием и со своей внутренностью.

Такое топологическое пространство называется *дискретным пространством*, а $\mathcal{O}$ называется *дискретной топологией*. ∎

1.1.8. Пример. Пусть X — произвольное бесконечное множество, x_0 — некоторая точка в X и $\mathcal{O}$ — семейство, состоящее из всех подмножеств множества X, не содержащих x_0, и всех подмножеств множества X, имеющих конечное дополнение. Легко установить, что $(X, \mathcal{O})$ — топологическое пространство. Все одноточечные подмножества X, за исключением множества $\{x_0\}$, открыто-замкнуты; множество $\{x_0\}$ замкнуто, но не открыто. Семейство, состоящее из всех одноточечных множеств $\{x\}$, $x \neq x_0$, и из всех множеств вида $X \setminus F$, где F — конечное множество, образуют базу пространства $(X, \mathcal{O})$. Эта база имеет наименьшую мощность. Поэтому вес пространства $(X, \mathcal{O})$ равен мощности множества X. Семейство, состоящее из всех одноточечных множеств $\{x\}$, $x \neq x_0$, и из всех множеств вида $X \setminus \{x\}$, есть предбаза пространства $(X, \mathcal{O})$. Для каждого $A \subset X$ имеем

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{если } A \text{ конечно,} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{если } A \text{ бесконечно;} \end{cases}$$

$$\operatorname{Int} A = \begin{cases} A, & \text{если } X \setminus A \text{ конечно,} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{если } X \setminus A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что любые два бесконечных замкнутых подмножества множества X имеют непустое пересечение. ∎

Топологические пространства, построенные в следующих двух примерах, имеют особенно важное значение в общей топологии.

1.1.9. Пример. Пусть R — множество вещественных чисел и $\mathcal{O}$ — семейство, состоящее из всех множеств $U \subset R$, обладающих тем свойством, что для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subset U$. Очевидно, что семейство $\mathcal{O}$ обладает свойствами (O1)—(O3). Из определения предела последовательности следует, что множество $A \subset R$ замкнуто тогда и только тогда, когда вместе со всякой сходящейся последовательностью оно содержит также ее предел. Семейство всех открытых интервалов с рациональными концами образует базу пространства $(R, \mathcal{O})$. Это база минимальной мощности; поэтому $(R, \mathcal{O})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности и тем более первой.

Топология $\mathcal{O}$ называется *естественной топологией вещественной прямой.* ∎

1.1.10. Пример. Пусть $I = [0, 1]$ — замкнутый единичный интервал и $\mathcal{O}$ — семейство всех множеств вида $I \cap U$, где $U \subset R$ открыто относительно естественной топологии прямой R. Очевидно, что $(I, \mathcal{O})$ — топологическое пространство. Семейство всех интервалов вида (r_1, r_2), $[0, r_2)$ или $(r_1, 1]$, где r_1, r_2 — рациональные числа и $0 < r_1 < r_2 < 1$, является базой пространства $(I, \mathcal{O})$. Все интервалы последних двух типов образуют предбазу. Пространство $(I, \mathcal{O})$ удовлетворяет и первой, и второй аксиомам счетности. Множество $A \subset I$ замкнуто в I тогда и только тогда, когда A замкнуто в R.

Топология $\mathcal{O}$ называется *естественной топологией замкнутого интервала I.* ∎

Из приведенных выше примеров следует, что для заданного множества X семейство $\mathcal{O}$ можно выбрать многими различными способами, так чтобы $(X, \mathcal{O})$ было топологическим пространством. Если $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ — две топологии на X и $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, то говорят, что топология $\mathcal{O}_1$ *сильнее* (*тоньше*) топологии $\mathcal{O}_2$ или что топология $\mathcal{O}_2$ *слабее* (*грубее*) $\mathcal{O}_1$. Дискретная топология на X самая сильная. Слабейшая топология на X состоит только из $\varnothing$ и X; она называется *антидискретной топологией* на X. Множество, снабженное такой топологией, называется *антидискретным пространством.* Очевидно, что семейство всех топологий на множестве X упорядочено отношением включения.

Пусть X — произвольное бесконечное множество, x_0 и x'_0 — две различные точки в X, $\mathcal{O}$ — топология, определенная в 1.1.8, и $\mathcal{O}'$ — топология, определенная подобным же образом для точки x_0'. Легко показать, что топологии $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ несравнимы; никакая из них не тоньше другой.

В дальнейшем мы будем обычно рассматривать в ходе отдельного рассуждения одну фиксированную топологию $\mathcal{O}$ на множестве X и для упрощения обозначений будем пользоваться символом X вместо $(X, \mathcal{O})$. Соответственно мы будем писать $w(X)$, $\chi(x, X)$ и $\chi(X)$. Эти обозначения не вполне точны, однако из контекста будет всегда ясно, какая топология на X имеется в виду. Часто мы будем говорить просто «пространство» вместо «топологическое пространство».

Из свойства (СО3) оператора замыкания следует, что замыкание конечного объединения множеств совпадает с объединением замыканий этих множеств, т. е. оператор замыкания конечно аддитивен. Как показывают простые примеры, этот оператор не является счетно аддитивным (ср. с упр. 1.1.В). Определим теперь важный класс семейств множеств, для которых оператор замыкания аддитивен.

Семейство $\{A_s\}_{s \in S}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально конечным*, если для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что множество $\{s \in S\colon U \cap A_s \neq \varnothing\}$ конечно. Если любая точка $x \in X$ имеет окрестность, которая пересекается не более чем с одним множеством данного семейства, то мы называем это семейство *дискретным*. Очевидно, что любое дискретное семейство, так же как и любое конечное семейство, локально конечно.

1.1.11. Теорема. *Для каждого локально конечного семейства $\{A_s\}_{s \in S}$ имеет место равенство* $\overline{\bigcup_{s \in S} A_s} = \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}$.

Доказательство. Включение $\overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$ для любого $s \in S$ следует из (1); значит, имеет место и включение $\bigcup_{s \in S} \overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$. Чтобы доказать обратное включение, заметим, что, в силу локальной конечности семейства $\{A_s\}_{s \in S}$, для любой точки $x \in \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$ существует такая окрестность U, что множество $S_0 = \{s \in S\colon U \cap A_s \neq \varnothing\}$ конечно. Из 1.1.1 вытекает, что $x \notin \overline{\bigcup_{s \in S \setminus S_0} A_s}$; так как

$$x \in \overline{\bigcup_{s \in S} A_s} = \overline{\bigcup_{s \in S_0} A_s} \cup \overline{\bigcup_{s \in S \setminus S_0} A_s},$$

имеем $x \in \overline{\bigcup_{s \in S_0} A_s} = \bigcup_{s \in S_0} \overline{A_s} \subset \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}$. ∎

1.1.12. Следствие. *Пусть $\mathcal{F}$ — локально конечное семейство и $F = \bigcup\mathcal{F}$. Если все элементы $\mathcal{F}$ суть замкнутые множества, то и F — замкнутое множество. Если все элементы $\mathcal{F}$ открыто-замкнуты, то F также открыто-замкнуто.* ∎

1.1.13. Теорема. *Пусть $\{A_s\}_{s \in S}$ — локально конечное (дискретное) семейство; тогда семейство $\{\overline{A}_s\}_{s \in S}$ также локально конечно (дискретно)*[1]. ∎

В заключение этого параграфа мы приведем две теоремы о семействах открытых множеств в пространстве веса $\mathfrak{m}$. Обе эти теоремы будут применяться в дальнейшем в этой книге.

1.1.14. Теорема. *Пусть $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$; тогда для любого семейства $\{U_s\}_{s \in S}$ открытых подмножеств X существует такое множество $S_0 \subset S$, что $|S_0| \leqslant \mathfrak{m}$ и $\bigcup\limits_{s \in S_0} U_s = \bigcup\limits_{s \in S} U_s$.*

Доказательство. Выберем базу $\mathcal{B}$ пространства X, удовлетворяющую условию $|\mathcal{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, и обозначим через $\mathcal{B}_0$ семейство всех $U \in \mathcal{B}$, таких, что существует $s \in S$, для которого $U \subset U_s$. Всякому $U \in \mathcal{B}_0$ поставим в соответствие $s(U) \in S$ так, чтобы выполнялось включение

$$U \subset U_{s(U)}. \tag{6}$$

Таким образом определена функция s из $\mathcal{B}_0$ в S. Покажем, что множество $S_0 = s(\mathcal{B}_0) \subset S$ удовлетворяет условию теоремы. Прежде всего $|S_0| = |s(\mathcal{B}_0)| \leqslant |\mathcal{B}_0| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \mathfrak{m}$. Выберем точку $x \in \bigcup\limits_{s \in S} U_s$. Существуют такое $s \in S$, что $x \in U_s$, и такое $U \in \mathcal{B}$, что $x \in U \subset U_s$. Ясно, что $U \in \mathcal{B}_0$ и $s(U) \in S_0$. Из включения (6) вытекает, что

$$x \in U \subset U_{s(U)} \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s.$$

Следовательно, $\bigcup\limits_{s \in S} U_s \subset \bigcup\limits_{s \in S_0} U_s$. Обратное включение очевидно. ∎

1.1.15. Теорема. *Пусть $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$; тогда для любой базы $\mathcal{B}$ пространства X найдется такая база $\mathcal{B}_0$, что $|\mathcal{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ и $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$; выберем такую базу $\mathcal{B}_1 = \{W_t\}_{t \in T}$ пространства X, что $|T| \leqslant \mathfrak{m}$. Пусть $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$;

---

[1]) Способ, которым используются скобки, позволяет нам делать одновременно два параллельных утверждения. Читая первое утверждение, не следует принимать во внимание слова, стоящие в скобках. Читая второе утверждение, следует опустить слова, стоящие непосредственно перед скобками.

положим

$$S(t)=\{s\in S\colon U_s\subset W_t\},\quad t\in T.$$

Так как $\mathscr{B}$ — база пространства X, то $\bigcup\limits_{s\in S(t)} U_s=W_t$. В силу 1.1.14, существует множество $S_0(t)\subset S(t)$, такое, что

$$|S_0(t)|\leqslant\mathfrak{m}, \tag{7}$$

$$W_t=\bigcup_{s\in S(t)} U_s=\bigcup_{s\in S_0(t)} U_s. \tag{8}$$

Положим $\mathscr{B}_0=\{U_s\}_{s\in S_0(t),\ t\in T}$. Так как $|T|\leqslant\mathfrak{m}$, из (7) и из равенства $\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}$ следует, что $|\mathscr{B}_0|\leqslant\mathfrak{m}$. Покажем теперь, что $\mathscr{B}_0$ есть база. Возьмем произвольную точку $x\in X$ и ее окрестность V. Так как $\mathscr{B}_1$ является базой, то существует такое $t\in T$, что $x\in W_t\subset V$. В силу (8), найдется такое $s\in S_0(t)$, что

$$x\in U_s\subset W_t\subset V.$$

Очевидно, что $U_s\in\mathscr{B}_0$, а это и означает, что $\mathscr{B}_0$ — база пространства X.

В случае конечного $\mathfrak{m}$ следует показать, что если $\mathscr{B}_1$ — база и $|\mathscr{B}_1|=w(X)\leqslant\mathfrak{m}$, то $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$; этот шаг предоставляется читателю в качестве упражнения. ∎

1.1.16. Замечание. Заметим, что в доказательстве теоремы 1.1.14 мы не использовали тот факт, что члены семейства $\mathscr{B}$ — открытые множества. Все, чем мы воспользовались, — это то, что $|\mathscr{B}|\leqslant\mathfrak{m}$ и что для каждой точки $x\in X$ и ее окрестности V существует такое $U\in\mathscr{B}$, что $x\in U\subset V$ (ср. с понятием сети, введенным в § 3.1, и теоремой 3.8.12).

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Возникновение общей топологии есть следствие перестройки оснований математического анализа, происходившей в течение XIX столетия. Попытки освободить анализ от наивной геометрической интуиции и соображений механики, к которым обращались создатели анализа И. Ньютон (1642—1727) и Г. Лейбниц (1646—1716), привели к точному определению предела (Ж. Даламбер (1717—1783) и О. Л. Коши (1784—1857)), к формулировке признаков сходимости бесконечных рядов (К. Ф. Гаусс (1777—1855)) и к прояснению понятия непрерывной функции (Б. Больцано (1781—1848) и Коши). Необходимость постановки анализа на прочный фундамент стала осознана всеми после открытия ряда патологических явлений при изучении сходимости тригонометрических рядов (Н. Г. Абель (1802—1829), П. Г. Лежен Дирихле (1805—1859), П. Дюбуа-

Реймон (1831—1889)) и построения первых примеров нигде не дифференцируемых непрерывных функций (Больцано, Б. Риман (1826—1866) и К. Вейерштрасс (1815—1897) соответственно в 1830, 1854 и 1861 гг.). Последние примеры разрушили общепринятые представления и привели к пересмотру понятия числа и к возникновению строгих теорий вещественных чисел. Наиболее важными из них были: теория, предложенная независимо Ш. Мерэ (1835—1911) и Г. Кантором (1845—1918), в которой вещественные числа были определены как классы эквивалентности последовательностей Коши рациональных чисел, и теория, предложенная Р. Дедекиндом (1831—1916), в которой вещественные числа были определены как сечения в множестве рациональных чисел. Обе теории давали описание топологической структуры вещественной прямой.

Общая топология обязана своим возникновением серии работ Кантора, опубликованных в 1879—1884 гг. Обсуждая проблемы единственности тригонометрических рядов, Кантор сосредоточился на изучении множеств «исключительных точек», в которых можно было опустить некоторые условия теорем, не нарушая их заключений. Впоследствии он посвятил себя исключительно исследованию множеств, создав, таким образом, одновременно теорию множеств и общую топологию. Кантор определил и изучил несколько фундаментальных понятий топологии в рамках подмножеств евклидовых пространств. В дальнейшем ряд важных понятий, также относящихся к подмножествам евклидовых пространств, были введены в период 1893—1905 гг. К. Жорданом (1838—1922), А. Пуанкаре (1854—1912), Э. Борелем (1871—1956), Р. Бэром (1874—1932) и А. Лебегом (1875—1941).

Решительным шагом вперед стал переход от евклидовых пространств к абстрактным пространствам. Здесь первопроходцем был Риман. В 1854 г. он ввел и изучил понятие двумерного многообразия и указал на возможность изучения многообразий более высоких размерностей, так же как и пространств функций. Примерно около 1900 г., когда фундаментальные топологические понятия уже были введены, появилось несколько работ, в которых некоторые специальные множества наделялись естественными для их структур топологиями. Среди них: множество кривых (Дж. Асколи (1843—1896)), множество функций (К. Арцела (1847—1912), В. Вольтерра (1860—1940), Д. Гильберт (1862—1943), И. Фредгольм (1866—1927)) и множество прямых и плоскостей трехмерного пространства (Борель). Таким образом была подготовлена почва для аксиоматического подхода к понятию предела и, более общо, к понятию близости точки и множества.

Происхождение общей топологии, которое мы здесь подытожили весьма кратко, исчерпывающим образом изложено в книге Мангейма [1964]. История первых лет общей топологии тщательно описана у Розенталя и Зоретти [1924] и у Титце и Виеториса [1930]. Богатую историческую информацию можно найти также в двухтомнике К. Куратовского [1966] и [1968].

Абстрактные пространства с топологической структурой впервые были введены Фреше [1906] и Риссом [1907], [1908]. Фреше определил свои пространства в терминах сходящихся последовательностей (см. задачу 1.7.18), а Рисс — в терминах точек накопления. Серьезным недостатком подхода Фреше было ограничение счетными последовательностями, что приводило к слишком узкому классу пространств. Тем не менее была разработана теория, основанная на определениях Фреше (см. его книгу [1926]). С другой стороны, определение Рисса было слишком общим (оператор замыкания определялся присоединением к множеству всех его точек накопления и не удовлетворял условию (CO4)) и слишком сложным. Теория, основанная на этом определении пространства, за исключением сделанного Риссом беглого наброска, не получила дальнейшего развития. Первое удовлетворительное определение топологического пространства принадлежит Хаусдорфу [1914]. Он определил топологическое пространство как абстрактное множество, снабженное системой окрестностей, удовлетворяющей условиям (BP1)—(BP3) и условию (BP4) § 1.5. Хаусдорф развил идею, появившуюся в работах Гильберта [1902] и Г. Вейля [1913], которые дали аксиоматическое описание в терминах окрестностей плоскости (Гильберт) и римановой поверхности (Г. Вейль). Вклад Хаусдорфа состоял в том, что он придал необходимую общность понятиям, введенным предшественниками, и развил систематическую и исчерпывающую теорию. Книгу Хаусдорфа [1914] стоит просмотреть хотя бы для того, чтобы убедиться, насколько прозрачно, точно и изящно она написана, что позволяет с удовольствием читать ее и через 70 лет после выхода. Другая система аксиом была предложена Р. Муром. В своей книге [1932] (исправленное издание [1962]) он приводит аксиоматическое описание плоскости и подробно обсуждает абстрактные пространства, описываемые частичными множествами аксиом; первоначальный вариант этого подхода можно найти в его статье [1916].

Определение топологического пространства, данное здесь и принятое теперь повсеместно, было впервые сформулировано Куратовским [1922] в терминах оператора замыкания, удовлетворяющего условиям (CO1)—(CO4). Понятия открытого и замкнутого множеств, а также замыкания и внутренности были введены и изучены Кантором в классе подмножеств евклидовых пространств. Хаусдорф обобщил их на абстрактные пространства в своей работе [1914], где изложены также обе аксиомы счетности. Понятие локально конечного семейства было введено П. С. Александровым [1924].

УПРАЖНЕНИЯ

1.1.A. Проверьте, что для любых подмножеств A и B топологического пространства имеют место включения

$$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}\quad\text{и}\quad\overline{A}\setminus\overline{B}\subset\overline{A\setminus B}.$$

Заметим, что включения нельзя заменить на равенства.

1.1.B. Покажите, что для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots$ подмножеств топологического пространства имеет место равенство

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i\cup\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty}A_{i+j}}.$$

Покажите на примере, что это равенство перестанет быть верным, если опустить второе слагаемое в правой части.

1.1.C (Куратовский [1922a]). Подмножество U топологического пространства, удовлетворяющее условию $U=\operatorname{Int}\overline{U}$, называется *каноническим открытым множеством.*

(a) Проверьте, что внутренность замкнутого множества есть каноническое открытое множество.

(b) Покажите, что пересечение двух канонических открытых множеств есть каноническое открытое множество. Заметим, что объединение двух канонических открытых множеств может не быть каноническим открытым множеством.

(c) Проверьте, что для канонических открытых множеств U и V включение $U\subset V$ имеет место в том и только том случае, если $\overline{U}\subset\overline{V}$.

(d) Докажите, что для любого семейства $\{U_s\}_{s\in S}$ канонических открытых множеств в топологическом пространстве X множество $\operatorname{Int}\left(\overline{\bigcup_{s\in S}U_s}\right)$ есть наименьшая верхняя грань, а множество $\operatorname{Int}\left(\bigcap_{s\in S}U_s\right)$ есть наибольшая нижняя грань семейства $\{U_s\}_{s\in S}$ в семействе всех канонических открытых множеств в X, упорядоченном по включению.

(e) Подмножество A топологического пространства, удовлетворяющее условию $A=\overline{\operatorname{Int}A}$, называется *каноническим замкнутым множеством.* Покажите, что A есть замкнутое множество в том и только том случае, если его дополнение есть каноническое открытое множество.

Сформулируйте и докажите свойства канонических замкнутых множеств, двойственные свойствам канонических открытых множеств, установленным в (a)—(d).

1.1.D. Покажите, что для любого семейства топологий $\{\mathcal{O}_s\}_{s\in S}$ на множестве X существует топология на X, являющаяся наименьшей верхней гранью $\{\mathcal{O}_s\}_{s\in S}$ (т. е. грубейшей топологией в семействе всех топологий, более тонких, чем любая $\mathcal{O}_s$), а также что существует топология на X, которая является наибольшей нижней гранью $\{\mathcal{O}_s\}_{s\in S}$ (т. е. тончайшей топологией в семействе всех топологий, которые грубее, чем каждая $\mathcal{O}_s$).

1.2. МЕТОДЫ ВВЕДЕНИЯ ТОПОЛОГИЙ

Пусть X — произвольное множество; под *введением топологии* на X мы понимаем выбор семейства $\mathcal{O}$ подмножеств X, удовлетворяющих условиям (O1)—(O3), т. е. такого семейства $\mathcal{O}$, что пара $(X,\mathcal{O})$ есть топологическое пространство. Часто бывает удобнее давать косвенное описание семейства открытых множеств. Мы приведем несколько методов введения топологий, которые заключаются в том, что определяется база, или система окрестностей, или семейство замкнутых множеств, или оператор замыкания, или, наконец, оператор взятия внутренности.

1.2.1. Предложение. *Пусть даны множество X и семейство $\mathcal{B}$ его подмножеств, удовлетворяющее условиям* (B1)—(B2). *Пусть $\mathcal{O}$ — семейство всех подмножеств множества X, являющихся объединениями подсемейств семейства $\mathcal{B}$, т. е.*

$U\in\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $U=\bigcup\mathcal{B}_0$, где $\mathcal{B}_0$ — подсемейство семейства $\mathcal{B}$.

Семейство $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям (O1)—(O3). *Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологического пространства $(X,\mathcal{O})$.*

Топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, порожденной базой $\mathcal{B}$*.

Доказательство. Условие (O1) выполнено, так как $\varnothing=\bigcup\mathcal{B}_0$ при $\mathcal{B}_0=\varnothing$ и, в силу (B2), $X=\bigcup\mathcal{B}_0$ при $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}$. Пусть U_1, $U_2\in\mathcal{O}$; тогда $U_1=\bigcup\limits_{s\in S}U_s$ и $U_2=\bigcup\limits_{t\in T}U_t$, где U_s, $U_t\in\mathcal{B}$, $s\in S$ и $t\in T$. Так как

$$U_1\cap U_2=\bigcup_{s\in S,\ t\in T}U_s\cap U_t,$$

то для доказательства выполнения условия (O2) достаточно показать, что $U_s\cap U_t$ есть объединение некоторого подсемейства из $\mathcal{B}$.

В силу (B1), для каждого $x \in U_s \cap U_t$ существует такое $U(x) \in \mathscr{B}$, что $x \in U(x) \subset U_s \cap U_t$, а это влечет за собой соотношения

$$U_s \cap U_t = \bigcup \mathscr{B}_0, \quad \text{где} \quad \mathscr{B}_0 = \{U(x) : x \in U_s \cap U_t\}.$$

Условие (O3) выполнено по определению семейства $\mathcal{O}$.

Очевидно, что $\mathscr{B}$ является базой пространства $(X, \mathcal{O})$. ∎

1.2.2. Пример. Пусть K — множество всех вещественных чисел, а $\mathscr{B}$ — семейство всех интервалов $[x, r)$, где $x, r \in K$, $x < r$ и r — рациональное число. Легко проверить, что семейство $\mathscr{B}$ обладает свойствами (B1)—(B2).

Элементы семейства $\mathscr{B}$ суть открыто-замкнутые множества относительно топологии, порожденной базой $\mathscr{B}$. Ясно, что $|\mathscr{B}| = \mathfrak{c}$. Покажем, что $w(K) = \mathfrak{c}$. Пусть $\mathscr{R}$ — семейство открытых подмножеств в K, такое, что $|\mathscr{R}| < \mathfrak{c}$. Существует точка $x_0 \in K$, которая не является точной нижней гранью никакого элемента семейства $\mathscr{R}$. Открытое множество $[x_0, x_0 + 1)$ нельзя представить в виде объединения подсемейства семейства $\mathscr{R}$, и, следовательно, $\mathscr{R}$ не является базой для K.

Пространство K называется *прямой Зоргенфрея*. ∎

1.2.3. Предложение. *Пусть даны множество X и совокупность $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ семейств его подмножеств, обладающих свойствами* (BP1)—(BP3). *Пусть $\mathcal{O}$ — семейство всех подмножеств X, являющихся объединениями подсемейств семейства $\bigcup_{x \in X} \mathscr{B}(x)$. Тогда семейство $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям* (O1)—(O3). *Совокупность $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ есть система окрестностей топологического пространства $(X, \mathcal{O})$.*

Такая топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, порожденной системой окрестностей* $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$. ∎

1.2.4. Пример. Пусть L — подмножество плоскости, определенное условием $y \geqslant 0$, т. е. замкнутая верхняя полуплоскость. Обозначим через L_1 прямую $y = 0$ и положим $L_2 = L \setminus L_1$. Для каждого $x \in L_1$ и $r > 0$ пусть $U(x, r)$ — множество всех точек из L, лежащих внутри круга радиуса r, касающегося L_1 в точке x. Пусть далее $U_i(x) = U(x, 1/i) \cup \{x\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Для каждого $x \in L_2$ и $r > 0$ пусть $U(x, r)$ — множество всех точек из L, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке x, и пусть $U_i(x) = U(x, 1/i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Легко проверить, что совокупность $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in L}$, где $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, обладает свойствами (BP1)—(BP3).

Множество L_1 замкнуто относительно топологии, порожденной системой окрестностей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$.

Пространство L называется *плоскостью Немыцкого.* ∎

1.2.5. Предложение. *Пусть даны множество X и семейство $\mathscr{C}$ его подмножеств, обладающее свойствами* (C1)—(C3). *Семейство*

$$\mathcal{O} = \{X \setminus F\colon F \in \mathscr{C}\}$$

удовлетворяет условиям (O1)—(O3). *Семейство $\mathscr{C}$ есть семейство всех замкнутых множеств топологического пространства $(X, \mathcal{O})$.*

Такая топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, порожденной семейством замкнутых множеств $\mathscr{C}$.* ∎

1.2.6. Пример. Пусть X — произвольное бесконечное множество и $\mathscr{C}$ — семейство, состоящее из всех конечных подмножеств множества X и самого X. Легко показать, что семейство $\mathscr{C}$ обладает свойствами (C1)—(C3).

Открытые множества в X относительно топологии, порожденной семейством $\mathscr{C}$ замкнутых множеств, суть все дополнения к конечным множествам и пустое множество. Любые два непустых открытых множества в X имеют непустое пересечение. ∎

1.2.7. Предложение. *Пусть даны множество X и некоторый оператор, приписывающий каждому множеству $A \subset X$ множество $\bar{A} \subset X$ так, что выполнены условия* (CO1)—(CO4). *Семейство*

$$\mathcal{O} = \{X \setminus A\colon A = \bar{A}\}$$

удовлетворяет условиям (O1)—(O3). *Для каждого $A \subset X$ множество $\bar{A}$ является замыканием множества A в топологическом пространстве $(X, \mathcal{O})$.*

Такая топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, порожденной оператором замыкания* $^-$.

Доказательство. Чтобы доказать первую часть предложения, достаточно показать, что семейство $\mathscr{C} = \{A\colon A = \bar{A}\}$ обладает свойствами (C1)—(C3). Так как $\bar{A} \subset X$ для любого $A \subset X$, то, в частности, $\bar{X} \subset X$, и потому, учитывая (CO2), получаем $\bar{X} = X$. В силу (CO1), имеем $\bar{\varnothing} = \varnothing$. Таким образом, семейство $\mathscr{C}$ обладает свойством (C1). Выберем $F_1, F_2 \in \mathscr{C}$, т. е. $F_1 = \bar{F}_1$ и $F_2 = \bar{F}_2$. В силу (CO3),

$$\overline{F_1 \cup F_2} = \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2 = F_1 \cup F_2,$$

и потому $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{C}$. Таким образом, семейство $\mathscr{C}$ обладает свойством (C2).

Заметим, что (CO3) обеспечивает монотонность оператора замыкания:

$$\text{если } A \subset B, \text{ то } \bar{A} \subset \bar{B}.$$

В самом деле, если $A \subset B$, то $A \cup B = B$ и $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B} = \bar{B}$. Последнее равенство означает, что $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Рассмотрим теперь семейство $\{F_s\}_{s \in S}$ элементов $\mathscr{C}$, т. е. пусть $F_s = \bar{F}_s$, $s \in S$. Так как $\bigcap_{s \in S} F_s \subset F_s$, то в силу (1), $\overline{\bigcap_{s \in S} F_s} \subset \bar{F}_s = F_s$, а отсюда следует, что $\overline{\bigcap_{s \in S} F_s} \subset \bigcap_{s \in S} F_s$. Последнее включение вместе с (CO2) показывает, что $\overline{\bigcap_{s \in S} F_s} = \bigcap_{s \in S} F_s$. Таким образом, семейство $\mathscr{C}$ обладает свойством (C3).

Пусть символ $\tilde{A}$ обозначает замыкание множества A в топологическом пространстве $(X, \mathcal{O})$. Мы должны показать, что $\tilde{A} = \bar{A}$ для каждого $A \subset X$. В силу (CO4), для каждого $A \subset X$ имеем $\bar{A} \in \mathscr{C}$, следовательно, $\tilde{A} \subset \bar{A}$. Далее, для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, содержащего A, т. е. такого, что $F = \bar{F}$ и $A \subset F$, имеем $\bar{A} \subset \bar{F} = F$ в силу (1). Следовательно, $\bar{A} \subset \tilde{A} = \bigcap\{F\colon F = \bar{F} \text{ и } A \subset F\}$, что и доказывает равенство $\tilde{A} = \bar{A}$. ∎

1.2.8. Пример. Пусть X — произвольное множество, содержащее более одной точки, и пусть x_0 — некоторая точка в X. Положим $\bar{A} = A \cup \{x_0\}$ для каждого непустого $A \subset X$ и $\bar{\varnothing} = \varnothing$. Определенный таким образом оператор замыкания удовлетворяет условиям (CO1)—(CO4). Множество $\{x_0\}$ — единственное одноточечное множество в X, замкнутое относительно топологии, порожденной этим оператором замыкания. Другие одноточечные множества открыты, но не замкнуты. ∎

1.2.9. Предложение. *Пусть даны множество X и некоторый оператор, ставящий в соответствие каждому множеству $A \subset X$ множество* $\operatorname{Int} A \subset X$ *таким образом, что выполнены условия* (IO1)—(IO4). *Семейство*

$$\mathcal{O} = \{A\colon A = \operatorname{Int} A\}$$

удовлетворяет условиям (O1)—(O3). *Для любого $A \subset X$ множество* $\operatorname{Int} A$ *является внутренностью A в топологическом пространстве* $(X, \mathcal{O})$.

Такая топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, порожденной оператором взятия внутренности* Int. ∎

1.2.10. Пример. Пусть X — произвольное множество, содержащее более одной точки, и пусть $X_0 \subset X$ — такое подмножество, что

$|X\setminus X_0|>1$. Положим $\operatorname{Int} A = A \cap X_0$ для любого собственного подмножества $A \subset X$ и $\operatorname{Int} X = X$. Определенный таким образом оператор взятия внутренности удовлетворяет условиям (IO1)—(IO4). Все подмножества множества X_0 и все пространство — единственные подмножества пространства X, которые открыты относительно топологии, порожденной этим оператором. Если X_0 — пустое множество, то X является антидискретным пространством.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Разнообразные методы порождения топологий были впервые систематически описаны Хаусдорфом [1927]. Прямая Зоргенфрея фактически появилась в работе Александрова и Урысона [1929], но только после появления работы Зоргенфрея [1947] она стала «универсальным контрпримером» в общей топологии (см. примеры 2.3.12, 3.8.15 и 5.1.31). Плоскость Немыцкого была определена (со ссылкой на Немыцкого) Александровым и Хопфом [1935]. Она представляет собой другой «универсальный контрпример» (см. примеры 1.5.9 и упр. 5.2.C(b) и 5.3.B(a)). Модификации прямой Зоргенфрея и плоскости Немыцкого до сих пор поставляют важные и интересные примеры (см. упр. 3.1. I и 5.4. B).

УПРАЖНЕНИЯ

1.2.A. Сформулируйте и докажите предложение, аналогичное предложениям этого параграфа, о топологии, порожденной предбазой.

1.2.B. Пусть X — произвольное множество и $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ — две совокупности семейств его подмножеств, удовлетворяющие условиям (B1)—(B2). Покажите, что топологии, порожденные базами $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$, совпадают в том и только том случае, если для любого $x \in X$ и любого $U \in \mathscr{B}_1$, содержащего x, существует такое $V \in \mathscr{B}_2$, что $x \in V \subset U$, а для любого $V \in \mathscr{B}_2$, содержащего x, существует такое $U \in \mathscr{B}_1$, что $x \in U \subset V$.

Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для топологий, порожденных системами окрестностей.

1.2.C. Проверьте, что для топологического пространства $(X, \mathcal{O})$ и его базы (системы окрестностей, семейства всех замкнутых множеств, оператора замыкания, оператора взятия внутренности) топология, порожденная в X этой базой (системой окрестностей, и т. д.), совпадает с исходной топологией пространства X.

1.3. ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА, ПРОИЗВОДНОЕ МНОЖЕСТВО. ПЛОТНЫЕ И НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫЕ МНОЖЕСТВА. БОРЕЛЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА

В § 1.1 были определены два оператора на семействе всех подмножеств топологического пространства: оператор замыкания и оператор взятия внутренности. Были также определены и изучены два семейства подмножеств топологического пространства: открытые множества и замкнутые множества. Этот параграф является продолжением § 1.1. Мы определим и изучим еще два оператора и ряд новых семейств подмножеств в топологических пространствах.

Для любого подмножества A топологического пространства X определим *границу* множества A как множество

$$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A}) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A.$$

Из предложения 1.1.1 следует

1.3.1. Предложение. *Точка x принадлежит границе $\operatorname{Fr} A$ в том и только том случае, если для каждого элемента некоторой (или, что эквивалентно, любой) базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x мы имеем $U \cap A \neq \varnothing \neq U \setminus A$.* ∎

Наиболее важные свойства граничного оператора перечислены в следующей теореме.

1.3.2. Теорема. *Граничный оператор обладает следующими свойствами*:

(i) $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$; (v) $\operatorname{Fr}(X \setminus A) = \operatorname{Fr} A$;

(ii) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$; (vi) $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$;

(iii) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$; (vii) $\operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$;

(iv) $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$; (viii) $\operatorname{Fr} \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Fr} A$;

(ix) *A открыто тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus A$;

(x) *A замкнуто тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Fr} A = A \setminus \operatorname{Int} A$;

(xi) *A открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Fr} A = \varnothing$.

Доказательство. Свойства (i)—(xi) проверяются простыми вычислениями. В качестве образца докажем соотношения (i) и (iii):

$$A \setminus \operatorname{Fr} A = A \setminus [\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}] = (A \setminus \overline{A}) \cup (A \setminus \overline{X \setminus A}) =$$
$$= A \setminus \overline{X \setminus A} = A \cap \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A;$$

$$\operatorname{Fr}(A\cup B)=\overline{A\cup B}\cap\overline{(X\setminus(A\cup B))}=(\bar A\cup\bar B)\cap\overline{(X\setminus A)\cap(X\setminus B)}\subset$$
$$\subset(\bar A\cup\bar B)\cap\overline{X\setminus A}\cap\overline{X\setminus B}\subset(\bar A\cap\overline{X\setminus A})\cup(\bar B\cap\overline{X\setminus B})=$$
$$=\operatorname{Fr}A\cup\operatorname{Fr}B. \blacksquare$$

Точка x топологического пространства X называется *точкой накопления* (*предельной точкой*) множества $A\subset X$, если $x\in\in\overline{A\setminus\{x\}}$. Множество точек накопления множества A называется *производным множеством* множества A и обозначается A^{d}.

1.3.3. Предложение. *Точка x принадлежит A^{d} в том и только том случае, если каждый элемент U некоторой (или, что эквивалентно, любой) базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от x.*

Доказательство. Допустим, что x — точка накопления множества A. По определению, $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$. Следовательно, для каждого $U\in\mathscr{B}(x)$ пересечение $U\cap(A\setminus\{x\})$ непусто, т. е. U содержит точку множества A, отличную от x.

Если каждый элемент U некоторой базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x содержит некоторую точку множества A, отличную от x, т. е. $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$ для каждого $U\in\mathscr{B}(x)$, то $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$ в силу 1.1.1, а это и означает, что $x\in A^{\mathrm{d}}$. $\blacksquare$

Точки множества $A\setminus A^{\mathrm{d}}$ называются *изолированными точками* множества A. Точка x является изолированной точкой пространства X в том и только том случае, если одноточечное множество $\{x\}$ открыто. В самом деле, множество $\{x\}$ открыто тогда и только тогда, когда $\{x\}=X\setminus\overline{X\setminus\{x\}}$, т. е. когда $x\notin\overline{X\setminus\{x\}}$.

Доказательство следующей теоремы предоставляется читателю.

1.3.4. Теорема. *Производное множество обладает следующими свойствами:*

(i) $\bar A=A\cup A^{\mathrm{d}}$;

(ii) *если* $A\subset B$, *то* $A^{\mathrm{d}}\subset B^{\mathrm{d}}$;

(iii) $(A\cup B)^{\mathrm{d}}=A^{\mathrm{d}}\cup B^{\mathrm{d}}$;

(iv) $\bigcup\limits_{s\in S}A_s^{\mathrm{d}}=\Big(\bigcup\limits_{s\in S}A_s\Big)^{\mathrm{d}}$. $\blacksquare$

Введем теперь несколько новых семейств множеств в топологических пространствах.

Множество $A\subset X$ называется *всюду плотным* в X, если $\bar A=X$.

Множество $A\subset X$ называется *коплотным* в X, если $X\setminus A$ всюду плотно.

Множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным* в X, если $\bar{A}$ коплотно.

Множество $A \subset X$ называется *плотным в себе*, если $A \subset A^{d}$.

1.3.5. Предложение. *Множество A всюду плотно в X тогда и только тогда, когда любое непустое открытое подмножество в X содержит точки множества A.*

Множество A коплотно в X тогда и только тогда, когда любое непустое открытое множество в X содержит точки дополнения множества A.

Множество A нигде не плотно в X тогда и только тогда, когда любое непустое открытое множество в X содержит непустое открытое подмножество, не пересекающееся с множеством A. ∎

Следующие две теоремы будут часто применяться в дальнейшем.

1.3.6. Теорема. *Если A всюду плотно в X, то для любого открытого $U \subset X$*

$$\bar{U} = \overline{U \cap A}.$$

Доказательство. Для любой точки $x \in \bar{U}$ и любой ее окрестности W пересечение $W \cap U$ открыто и непусто. В силу 1.3.5, $W \cap U \cap A \neq \varnothing$; тогда из 1.1.1 следует, что $x \in \overline{U \cap A}$. Таким образом, имеет место включение $\bar{U} \subset \overline{U \cap A}$. Обратное включение очевидно. ∎

Плотность пространства X определяется как наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A — всюду плотное подмножество пространства X. Это кардинальное число обозначается $d(X)$. Если $d(X) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что пространство X *сепарабельно.*

1.3.7. Теорема. *Для каждого топологического пространства X имеет место неравенство $d(X) \leqslant w(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ — база пространства X, состоящая из непустых множеств и такая, что $|S| = \mathfrak{m} = w(X)$. Для каждого $s \in S$ выберем некоторую точку $a_s \in U_s$. Покажем, что множество $A = \{a_s\colon s \in S\}$ всюду плотно в X. В самом деле, каждое непустое открытое подмножество пространства X содержит некоторое $U_s \in \mathscr{B}$; следовательно, оно содержит точку $a_s \in A$. Так как $|A| \leqslant |S| = \mathfrak{m}$, то $d(X) \leqslant w(X)$. ∎

1.3.8. Следствие. *Каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.* ∎

1.3.9. Примеры. В дискретном пространстве граница и производное множество любого множества пусты и единственным всюду плотным множеством является само пространство. Множество всех рациональных чисел, так же как и множество иррациональных чисел, оба всюду плотны и коплотны на вещественной прямой и на прямой Зоргенфрея. Множество L_2 всюду плотно на плоскости Немыцкого L, множество L_1 нигде не плотно в L. Производное множество множества L_1 пусто, а множество L_2 плотно в себе. Точка x_0 — единственная точка накопления пространства X из примера 1.1.8, другие его точки изолированы. Вещественная прямая R, интервал I, прямая Зоргенфрея K и плоскость Немыцкого L все сепарабельны. Дискретное пространство сепарабельно лишь в случае, когда $|X| \leqslant \aleph_0$. ∎

Как мы знаем, пересечение счетного множества открытых множеств не обязательно открыто, так же как и объединение счетного множества замкнутых множеств не обязательно замкнуто. Все подмножества топологического пространства X, которые могут быть получены из открытых, а также из замкнутых подмножеств пространства X с помощью взятия счетных объединений, пересечений и дополнения, особенно регулярны с топологической точки зрения, и семейство таких подмножеств заслуживает изучения. Под *семейством борелевских множеств* в топологическом пространстве X мы понимаем наименьшее семейство $\mathcal{S}$ подмножеств пространства X, удовлетворяющее следующим условиям:

(BS1) *семейство $\mathcal{S}$ содержит все открытые подмножества пространства X;*

(BS2) *если $A \in \mathcal{S}$, то $X \setminus A \in \mathcal{S}$;*

(BS3) *Если $A_i \in \mathcal{S}$ для $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.*

Существование наименьшего семейства $\mathcal{S}$, удовлетворяющего сформулированным условиям, следует из того простого соображения, что семейство всех подмножеств пространства X удовлетворяет условиям (BS1)—(BS3) и что для любой совокупности семейств, удовлетворяющих (BS1)—(BS3), общая часть всех семейств в данной совокупности есть семейство, удовлетворяющее указанным условиям. Следовательно, семейство борелевских множеств в X можно было бы определить как общую часть всех семейств $\mathcal{S}$, удовлетворяющих условиям (BS1)—(BS3). Заметим, что в определении борелевских множеств условие (BS1) может быть заменено условием

(BS1′) *семейство $\mathcal{S}$ содержит все замкнутые подмножества пространства X,*

а условие (BS3) может быть заменено условием

(BS3′) *если $A_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.*

В самом деле, объединение условий (BS1′) и (BS2) эквивалентно объединению условий (BS1) и (BS2), а объединение условий (BS2) и (BS3′) эквивалентно объединению условий (BS2) и (BS3).

Возникает вопрос, существуют ли подмножества пространства X, не являющиеся борелевскими множествами. Очевидно, что ответ зависит от пространства X. Так, например, все подмножества дискретного пространства суть борелевские множества. Однако, вообще говоря, в топологических пространствах существуют множества, не являющиеся борелевскими (см. упр. 1.3.G).

Теория борелевских множеств является хорошо разработанной частью общей топологии, но, чтобы получить интересные и глубокие результаты о борелевских множествах, следует ограничить класс рассматриваемых пространств (см. задачи 1.7.5, 4.5.7, 4.5.8 и 7.4.22).

Самые привычные борелевские множества кроме открытых и замкнутых множеств суть счетные объединения замкнутых множеств и счетные пересечения открытых множеств. Первые называются *F_σ-множествами*, а вторые *G_δ-множествами*. Очевидно, что дополнение F_σ-множества является G_δ-множеством, и наоборот. Пересечение двух F_σ-множеств есть опять F_σ-множество. В самом деле, если $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ и $F=\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, где E_i и F_j — замкнутые множества, то $E\cap F=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(E_i\cap F_j)$, так что $E\cap F$ есть F_σ-множество. Подобным же образом объединение двух G_δ-множеств есть G_δ-множество. Очевидно, что счетное объединение (пересечение) F_σ-множеств (G_δ-множеств) есть F_σ-множество (G_δ-множество). Множество всех рациональных чисел является F_σ-множеством на вещественной прямой R. Тот факт, что оно не является G_δ-множеством, не столь очевиден (см. упр. 3.9.B).

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятия границы множества, производного множества, всюду плотного и нигде не плотного множества были введены Кантором, который установил также основные свойства этих объектов. Сепарабельные пространства были введены Фреше [1906]. Определение борелевских множеств впервые было дано Борелем для подмножеств вещественной прямой. Теория борелевских множеств была заложена Лебегом [1905] (для евклидовых пространств) и Хаусдорфом [1914] (для метрических пространств).

УПРАЖНЕНИЯ

1.3.A. Проверьте, что если множества A и B удовлетворяют условию $A\cap\bar{B}=\varnothing=\bar{A}\cap B$, то $\operatorname{Fr}(A\cup B)=\operatorname{Fr}A\cup\operatorname{Fr}B$.

1.3.B. Пусть $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально конечное семейство подмножеств топологического пространства X.

(a) Покажите, что $\operatorname{Fr}\left(\bigcup_{s\in S} A_s\right) \subset \bigcup_{s\in S} \operatorname{Fr} A_s$.

(b) Проверьте, что если все элементы семейства $\{A_s\}_{s\in S}$ нигде не плотны, то и объединение $\bigcup_{s\in S} A_s$ нигде не плотно в X.

1.3.C. Для каждого положительного целого n множество $A^{(n)}$, *n-е производное множество* подмножества A топологического пространства X, определяется по индукции формулами

$$A^{(1)} = A^{\mathrm{d}}, \quad A^{(n)} = (A^{(n-1)})^{\mathrm{d}}.$$

(a) Приведите пример множества вещественных чисел, имеющего три различных последовательных производных множества.

(b) Приведите пример множества вещественных чисел, которое имеет бесконечно много отличных друг от друга производных множеств.

1.3.D. (a) Обобщите 1.3.6, доказав, что для каждого открытого множества U топологического пространства X и любого $A \subset X$

$$\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U \cap A}.$$

Указание. Примените второе включение из упр. 1.1.A и равенство $U = X \setminus \overline{X \setminus U}$.

(b) Докажите, что для каждого замкнутого множества F топологического пространства X и любого $A \subset X$ имеет место равенство

$$\operatorname{Int}(F \cup \operatorname{Int} A) = \operatorname{Int}(F \cup A).$$

1.3.E. Проверьте, что объединение коплотного множества и нигде не плотного множества является коплотным множеством. Заметим, что объединение двух коплотных множеств не обязательно коплотно.

1.3.F. Покажите, что любое открытое подмножество плотного в себе пространства плотно в себе.

1.3.G. Заметим, что открытые подмножества вещественной прямой суть F_σ-множества. Покажите, что семейство всех борелевских множеств вещественной прямой может быть представлено как объединение $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$, где $\mathcal{F}_0$ — семейство всех замкнутых множеств, $\mathcal{F}_\alpha$ состоит из всех счетных объединений множеств вида $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$, когда α — нечетный ординал, и из всех счетных пересечений множеств вида $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$, когда α — четный ординал. Заметим, что все семейства $\mathcal{F}_\alpha$ имеют мощность $\mathfrak{c}$; выведите отсюда, что на вещественной прямой существуют множества, не являющиеся борелевскими.

1.4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ЗАМКНУТЫЕ И ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ГОМЕОМОРФИЗМЫ

Пусть $(X, \mathcal{O})$ и $(Y, \mathcal{O}')$ — два топологических пространства; отображение f из X в Y называется *непрерывным*, если $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ для любого $U \in \mathcal{O}'$, т. е. если прообраз любого открытого подмножества пространства Y является открытым подмножеством пространства X. Тот факт, что f — непрерывное отображение пространства X в Y, будет часто записываться в виде $f\colon X \to Y$.

Наше определение непрерывного отображения опирается на понятие открытого множества. В дальнейшем мы будем часто пользоваться методами введения топологий, описанными в § 1.2, поэтому удобно иметь критерии непрерывности отображений, сформулированные в соответствующих понятиях и терминах. Критерии такого рода перечислены в следующем предложении.

1.4.1. Предложение. *Пусть X и Y — топологические пространства и f — отображение X в Y. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Отображение f непрерывно.*

(ii) *Прообраз любого элемента предбазы $\mathcal{P}$ в Y открыт в X.*

(ii′) *Прообраз любого элемента базы $\mathcal{B}$ в Y открыт в X.*

(iii) *Существуют системы окрестностей $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ в X и $\{\mathcal{D}(y)\}_{y \in Y}$ в Y, такие, что для каждого $x \in X$ и каждого $V \in \mathcal{D}(f(x))$ найдется $U \in \mathcal{B}(x)$, удовлетворяющее включению $f(U) \subset V$.*

(iv) *Прообраз любого замкнутого подмножества пространства Y замкнут в X.*

(v) *Для любого $A \subset X$ имеем $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

(v′) *Для любого $B \subset Y$ имеем $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

(vi) *Для любого $B \subset Y$ имеем $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B)$.*

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна.

Докажем, что (ii) $\Rightarrow$ (ii′). Пусть $\mathcal{P}$ — предбаза пространства Y, такая, что $f^{-1}(V)$ открыто в X для любого $V \in \mathcal{P}$. Выберем базу $\mathcal{B}$ пространства Y, состоящую из всех конечных пересечений $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k$ элементов предбазы $\mathcal{P}$. Так как

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(V_k),$$

то прообразы всех элементов семейства $\mathcal{B}$ открыты в X.

Теперь покажем, что (ii′)$\Rightarrow$(iii). Для любого $V \in \mathcal{D}(f(x))$ существует такое $W \in \mathcal{B}$, что $f(x) \in W \subset V$. Так как $f^{-1}(W)$ открыто в X и $x \in f^{-1}(W)$, то существует $U \in \mathcal{B}(x)$, удовлетворяющее условию $U \subset f^{-1}(W)$. Тогда $f(U) \subset ff^{-1}(W) \subset W \subset V$.

Докажем импликацию (iii)$\Rightarrow$(iv). Пусть $B = \bar{B}$ — замкнутое подмножество в Y. Так как $f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B)$, то достаточно показать, что прообраз множества $Y \setminus B$ открыт в X. Для этого покажем, что каждая точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ имеет окрестность U, содержащуюся в $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для любого $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ имеем $f(x) \in Y \setminus B$. Следовательно, существует такое $V \in \mathcal{D}(f(x))$, что $V \subset Y \setminus B$. В силу (iii), найдется $U \in \mathcal{B}(x)$, удовлетворяющее включению $f(U) \subset V$. Очевидно, что

$$x \in U \subset f^{-1}f(U) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(Y \setminus B).$$

Для доказательства (iv)$\Rightarrow$(v) заметим, что $f^{-1}(\overline{f(A)})$ является замкнутым множеством, содержащим A, и, следовательно, $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, откуда в свою очередь получаем

$$f(\bar{A}) \subset ff^{-1}(\overline{f(A)}) \subset \overline{f(A)}.$$

Для доказательства импликации (v)$\Rightarrow$(v′) применим условие (v) к равенству $A = f^{-1}(B)$; получим включение

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{ff^{-1}(B)} \subset \bar{B},$$

откуда $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

Для доказательства того, что (v′)$\Rightarrow$(vi), применим условие (v′) к множеству $Y \setminus B$; получим включение $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$, из которого следует, что

$$f^{-1}(\operatorname{Int} B) = f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} =$$
$$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int} f^{-1}(B).$$

Чтобы завершить доказательство, остается показать, что (vi)$\Rightarrow$(i). Для каждого открытого множества $U \subset Y$ имеем $U = \operatorname{Int} U$. Из (vi) получаем, что $f^{-1}(U) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(U)$. Таким образом, $f^{-1}(U) = \operatorname{Int} f^{-1}(U)$, т. е. $f^{-1}(U)$ открыто в X. ∎

Характеристика непрерывности, данная в (iii), позволяет нам определить непрерывность в точке. Будем говорить, что отображение из X в Y *непрерывно в точке* $x \in X$, если для всякой окрестности $V \subset Y$ точки $f(x)$ существует такая окрестность $U \subset X$ точки x, что $f(U) \subset V$. Очевидно, что отображение f из X в Y непрерывно в том и только том случае, если оно непрерывно в каждой точке пространства X.

Заметим в связи с доказанным выше предложением, что если $f: X \to Y$, то для любого F_σ-множества (G_δ-множества) $B \subset Y$

его прообраз $f^{-1}(B)$ является F_σ-множеством (G_δ-множеством) в X.

Используя равенство $(gf)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$, легко проверить, что если f — непрерывное отображение X в Y, а g — непрерывное отображение Y в Z, то композиция gf — непрерывное отображение X в Z.

1.4.2. Пример. Если X — дискретное пространство, то каждое его отображение в любое топологическое пространство Y непрерывно. Аналогично, всякое отображение любого топологического пространства X в любое антидискретное пространство Y непрерывно. ∎

1.4.3. Пример. Если на множестве X определены две топологии $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, то тождественное отображение $f=\mathrm{id}_X$ — непрерывное отображение пространства $(X,\mathcal{O}_1)$ в пространство $(X,\mathcal{O}_2)$ в том и только том случае, когда топология $\mathcal{O}_1$ тоньше топологии $\mathcal{O}_2$. ∎

Пусть X — топологическое пространство, R — вещественная прямая с естественной топологией и I — замкнутый единичный интервал с естественной топологией. Из эквивалентности условий (i) и (iii) в 1.4.1 следует, что отображение f из X в R или I непрерывно в том и только том случае, если для каждой точки $x\in X$ и любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность U точки x, что $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ для любой точки $x'\in U$. В частности, отображение f из R в R непрерывно, если для любой точки $x\in R$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ для любого x', для которого $|x-x'|<\delta$. Непрерывное отображение в R или в I будем называть *непрерывной функцией*. Эта терминология согласована с терминологией вещественного анализа.

Легко показать, что для любого $f\colon X\to R$ функция $|f|$, где $|f|(x)=|f(x)|$, непрерывна. В самом деле, $|f|$ есть композиция функции f и функции абсолютного значения, которые обе непрерывны. Подобным же образом легко установить, что для $f, g\colon X\to R$ непрерывны функции

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\qquad (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),$$
$$[\min(f, g)](x)=\min(f(x), g(x)),\quad [\max(f, g)](x)=\max(f(x), g(x)).$$

Если функция $f\colon X\to R$ не обращается в нуль ни в какой точке пространства X, то функция $1/f$, где $(1/f)(x)=1/f(x)$, непрерывна. Подобные же утверждения имеют место для функций $f\colon X\to I$ при соответствующих ограничениях.

1.4.4. Пример. Пусть K — прямая Зоргенфрея, определенная в 1.2.2, и $[x,r)$ — некоторый элемент базы $\mathcal{B}$ этого пространства.

Так как множество $[x, r)$ открыто-замкнуто в X, то формула

$$f(y)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant y < r, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

определяет непрерывную функцию $f\colon K \to I$. ∎

1.4.5. Пример. Пусть L — плоскость Немыцкого, определенная в 1.2.4, и $U_i(x)$ — произвольный элемент базы $\mathscr{B}(x)$ в точке $x \in L$. Для каждой точки $y \in U_i(x) \setminus \{x\}$ обозначим через y' точку, в которой луч, выходящий из x и проходящий через y, пересекает окружность, ограничивающую $U_i(x)$. Легко показать, что формула

$$f(y)=\begin{cases} 0 & \text{при } y=x, \\ 1 & \text{при } y \in L \setminus U_i(x), \\ |xy|/|xy'| & \text{при } y \in U_i(x) \setminus \{x\}, \end{cases}$$

где $|ab|$ обозначает длину сегмента, соединяющего точки a и b, определяет непрерывную функцию $f\colon L \to I$. ∎

1.4.6. Пример. Пусть X — пространство, определенное в 1.1.8. Покажем, что для любого $f\colon X \to R$ существует счетное множество $X_0 \subset X$, не содержащее x_0 и такое, что $f(x)=f(x_0)$ для каждой точки $x \in X \setminus X_0$.

Множество $X_i = X \setminus f^{-1}((f(x_0)-1/i,\ f(x_0)+1/i))$ замкнуто и не содержит x_0. Таким образом, это конечное множество. Легко устанавливается, что множество $X_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ обладает всеми требуемыми свойствами. ∎

Пусть X — топологическое пространство и $\{f_i\}$ — последовательность функций из X в R или I. Говорят, что последовательность $\{f_i\}$ *равномерно сходится* к вещественной функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k, что $|f(x)-f_i(x)| < \varepsilon$ при каждом $x \in X$ и любом $i \geqslant k$; мы выразим это в символах так: $f = \lim f_i$.

1.4.7. Теорема. *Если последовательность $\{f_i\}$ непрерывных функций из X в R или I равномерно сходится к вещественной функции f, то f — непрерывная функция из X в R. Если все f_i — функции в I, то $f\colon X \to I$.*

Доказательство. Покажем, что для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки x_0, что $|f(x_0)-f(x')| < \varepsilon$ при всех $x' \in U$.

Выберем целое число k так, что

(1) $\qquad |f(x)-f_i(x)| < \varepsilon/3 \quad$ при всех $\quad x \in X$ и $i \geqslant k$.

Так как функция f_k непрерывна, то существует такая окрестность U точки x_0, что

(2) $$|f_k(x_0) - f_k(x')| < \varepsilon/3 \quad \text{при всех} \quad x' \in U.$$

Покажем, что окрестность U обладает требуемыми свойствами. Пусть $x' \in U$. В силу (1) и (2),

$$|f(x_0) - f(x')| \leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x')| + \\ + |f_k(x') - f(x')| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Очевидно, что если $f_i(X) \subset I$, $i = 1, 2, \ldots$, то $f\colon X \to I$. ∎

Опишем теперь метод введения топологий с помощью непрерывных отображений.

1.4.8. Предложение. *Пусть даны множество X, семейство $\{Y_s\}_{s \in S}$ топологических пространств и семейство отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, где f_s — отображение X в Y_s. В классе всех топологий на X, относительно которых все функции f_s непрерывны, существует грубейшая топология. Это топология $\mathcal{O}$, порожденная базой, состоящей из всех множеств вида*

$$\bigcap_{i=1}^{k} f_{s_i}^{-1}(V_i),$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ и V_i — произвольное открытое подмножество пространства Y_{s_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Такая топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, порожденной семейством отображений* $\{f_s\}_{s \in S}$.

Доказательство. Семейство $\mathcal{B}$, состоящее из всех подмножеств вида $\bigcap_{i=1}^{k} f_{s_i}^{-1}(V_i)$, обладает свойствами (B1)—(B2), и все f_s — непрерывные отображения относительно топологии $\mathcal{O}$, порожденной (в силу предложения 1.2.1) базой $\mathcal{B}$. С другой стороны, легко показать, что если все f_s непрерывны относительно некоторой топологии $\mathcal{O}'$ на X, то $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}'$. Отсюда следует включение $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$, означающее, что топология $\mathcal{O}$ грубее $\mathcal{O}'$. ∎

1.4.9. Предложение. *Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y, топология которого порождена семейством отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, где f_s — отображение Y в Y_s, непрерывно в том и только том случае, если композиция $f_s f$ непрерывна для каждого $s \in S$.*

Доказательство. Если $f\colon X \to Y$, то $f_s f$ непрерывна как композиция двух непрерывных отображений. Пусть $f_s f\colon X \to Y_s$ для каждого $s \in S$; обозначим через $\mathcal{P}$ предбазу пространства Y, состоящую из всех множеств вида $f_s^{-1}(V_s)$, где V_s открыто в Y_s.

В силу 1.4.1, достаточно показать, что прообразы элементов $\mathcal{P}$ при отображении f суть открытые множества в X. Но это следует из равенства

$$f^{-1}f_s^{-1}(V_s) = (f_s f)^{-1}(V_s). \blacksquare$$

Если существует непрерывное отображение f пространства X в пространство Y, т. е. отображение $f\colon X \to Y$, такое, что $f(X) = Y$, то мы говорим, что X может быть *отображено на* Y или что Y есть *непрерывный образ пространства* X.

1.4.10. Теорема. *Пусть Y — непрерывный образ пространства X; тогда $d(Y) \leqslant d(X)$.*

Доказательство. Пусть A — всюду плотное подмножество в X, такое, что $|A| = d(X)$. В силу эквивалентности условий (i) и (v) в 1.4.1, для отображения $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство Y имеем $Y = f(X) = f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Таким образом, множество $f(A)$ плотно в Y. Так как $|f(A)| \leqslant |A| = d(X)$, то $d(Y) \leqslant d(X)$. $\blacksquare$

1.4.11. Следствие. *Непрерывный образ сепарабельного пространства сепарабелен.* $\blacksquare$

Обратимся теперь к изучению двух важных классов непрерывных отображений: замкнутых и открытых отображений. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *замкнутым* (*открытым*) *отображением*, если для каждого замкнутого (открытого) множества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут (открыт) в Y. Отображения, которые одновременно замкнуты и открыты, называются *открыто-замкнутыми отображениями*.

Очевидно, что композиция двух замкнутых (открытых) отображений является замкнутым (открытым) отображением.

1.4.12. Теорема. *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда для каждого $B \subset Y$ и каждого открытого (замкнутого) множества $A \subset X$, содержащего $f^{-1}(B)$, существует открытое (замкнутое) множество $C \subset Y$, содержащее B и такое, что $f^{-1}(C) \subset A$.*

Доказательство. Мы рассмотрим случай замкнутого f; рассуждения для случая открытого отображения аналогичны.

Пусть $f\colon X \to Y$ замкнуто, $B \subset Y$ и A — открытое подмножество X, содержащее $f^{-1}(B)$. Множество $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ открыто в Y и содержит B. Кроме того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}f(X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Пусть f удовлетворяет указанным выше условиям; выберем замкнутое множество $F \subset X$. Множество $A = X \setminus F$ открыто, и для

$B = Y \setminus f(F)$ имеем

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}f(F) \subset X \setminus F = A.$$

Таким образом, существует открытое подмножество $C \subset Y$, такое, что $Y \setminus f(F) \subset C$ и $f^{-1}(C) \subset A$, т. е. $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Последнее равенство означает, что $C \cap f(F) = \varnothing$, т. е. $C \subset Y \setminus f(F)$. Следовательно, $f(F) = Y \setminus C$, т. е. множество $f(F)$ замкнуто. ∎

В случае замкнутых отображений условие в 1.4.12 может быть заменено следующим более простым условием.

1.4.13. Теорема. *Непрерывное отображение $f: X \to Y$ замкнуто в том и только том случае, если для каждой точки $y \in Y$ и каждого открытого множества $U \subset X$, содержащего $f^{-1}(y)$, в Y существует такая окрестность V точки y, что $f^{-1}(V) \subset U$.*

Доказательство. В силу 1.4.12, достаточно показать, что если f удовлетворяет сформулированным выше условиям, то f замкнуто. Пусть $B \subset Y$ — некоторое множество и $A \subset X$ — открытое множество, такое, что $f^{-1}(B) \subset A$. Для каждого $y \in B$ выберем такую окрестность $V_y \subset Y$ точки y, что $f^{-1}(V_y) \subset A$. Открытое множество $C = \bigcup_{y \in B} V_y$ удовлетворяет включению $B \subset C$ и $f^{-1}(C) \subset A$; следовательно, f замкнуто в силу 1.4.12. ∎

1.4.14. Теорема. *Непрерывное отображение $f: X \to Y$ открыто в том и только том случае, если существует такая база $\mathscr{B}$ пространства X, что $f(U)$ открыто в Y для любого $U \in \mathscr{B}$.* ∎

1.4.15. Примеры. Отображение $r: R \to I$, определенное формулой

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1, \end{cases}$$

замкнуто, но не открыто.

Отображение $f: L \to R$, сопоставляющее точке (x, y) плоскости Немыцкого ее абсциссу $x \in R$, открыто, но не замкнуто.

Отображение $g: K \to D$ прямой Зоргенфрея в двухточечное пространство $D = \{0, 1\}$, определенное формулой

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

открыто-замкнуто. ∎

1.4.16. Теорема. *Для любого открытого отображения $f: X \to Y$ и любой точки $x \in X$ имеем $\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X)$. Если, кроме того, $f(X) = Y$, то $w(Y) \leqslant w(X)$ и $\chi(Y) \leqslant \chi(X)$.*

Доказательство. Отображение f переводит базу в точке x в базу в точке $f(x)$ и базу пространства X в базу пространства $f(X)$. ∎

В отличие от приведенного результата, при замкнутых отображениях вес и характер могут повышаться (см. теорему 3.7.19).

1.4.17. Пример. Пусть $X=R$ — вещественная прямая и $Y=(R\setminus N)\cup\{y_0\}$, где N — множество положительных целых чисел и $y_0\notin R$. Каждой точке $x\in X$ поставим в соответствие точку

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in X\setminus N,\\ y_0, & \text{если } x\in N.\end{cases}$$

Рассмотрим на Y топологию, порожденную семейством замкнутых множеств $\mathscr{C}=\{A\subset Y\colon f^{-1}(A)$ замкнуто в $X\}$. Легко показать, что $f\colon X\to Y$ замкнуто и окрестности точки y_0 в Y имеют вид $(U\setminus N)\cup\{y_0\}$, где U открыто в X и содержит множество N.

Пусть $(U_1\setminus N)\cup\{y_0\}$, $(U_2\setminus N)\cup\{y_0\}$, ... — произвольная последовательность окрестностей точки y_0. Для каждого $i=1$, 2, ... выберем такую точку $x_i\in U_i\setminus N$, что $x_i>i$. Множество $U=X\setminus\{x_1,x_2,\ldots\}$ открыто в X и содержит множество N. Таким образом, $V=(U\setminus N)\cup\{y_0\}$ является окрестностью точки y_0. Так как ни один элемент нашей последовательности не содержится в V, то пространство Y не имеет счетной базы в y_0. Таким образом, $\chi(Y)>\aleph_0$ и $w(Y)>\aleph_0$, тогда как $w(X)=\chi(X)=\aleph_0$.

Отображение $f\colon X\to Y$ стягивает замкнутое подмножество $N\subset X$ в точку. Подобным же образом можно получить много других интересных примеров. Это частный случай операции перехода к факторпространству, которую мы рассмотрим в § 2.4. ∎

Непрерывное отображение $f\colon X\to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно отображает X на Y и обратное отображение f^{-1} из Y в X непрерывно. Два топологических пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм пространства X на пространство Y.

Для любого пространства X тождественное отображение $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ является гомеоморфизмом. Легко показать, что если f — гомеоморфизм, то обратное отображение f^{-1} также гомеоморфизм. Композиция fg двух гомеоморфизмов f и g является гомеоморфизмом. Таким образом, отношение «X и Y гомеоморфны» есть отношение эквивалентности.

1.4.18. Предложение. *Пусть f — взаимно однозначное отображение топологического пространства X на топологическое пространство Y. Следующие условия равносильны:*

(i) *f — гомеоморфизм.*

(ii) *f замкнуто.*
(iii) *f открыто.*
(iv) *Множество $f(A)$ замкнуто в Y тогда и только тогда, когда A замкнуто в X.*
(iv′) *Множество $f^{-1}(B)$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда B замкнуто в Y.*
(v) *Множество $f(A)$ открыто в Y тогда и только тогда, когда A открыто в X.*
(v′) *Множество $f^{-1}(B)$ открыто в X тогда и только тогда, когда B открыто в Y.*

Доказательство. Равносильность (i) и (ii), а также (i) и (iii) следует из того, что $(f^{-1})^{-1}(A)=f(A)$ для любого $A\subset X$. Равносильность (ii) и (iv), а также (iii) и (v) следует из равенства $A=f^{-1}f(A)$. Из равносительности (i) и (iv), а также (i) и (v) вытекает, что как (iv′), так и (v′) равносильны тому, что f^{-1} — гомеоморфизм, а это равносильно (i). ∎

1.4.19. Примеры. Пусть X — множество вещественных чисел, наделенное одной из следующих топологий: (a) дискретной топологией; (b) естественной топологией; (c) топологией, определенной в 1.1.8, с $x_0=0$; (d) топологией прямой Зоргенфрея; (e) топологией, определенной в 1.2.6; (f) топологией, определенной в 1.2.8, с $x_0=0$; (g) антидискретной топологией. Для каждого вещественного числа $a>0$ отображение f_a: $X\to X$, определенное формулой $f_a(x)=ax$, есть гомеоморфизм. При $a<0$ отображение f_a не является непрерывным относительно топологии (d), но является гомеоморфизмом относительно других рассмотренных здесь топологий. ∎

Пусть $\mathcal{M}$ — класс непрерывных отображений, а $\mathcal{P}$ — некоторое свойство топологических пространств. Будем говорить, что *$\mathcal{P}$ — инвариант класса $\mathcal{M}$* или что *$\mathcal{P}$ сохраняется в сторону образа при отображениях из $\mathcal{M}$*, если свойство $\mathcal{P}$ сохраняется отображениями из $\mathcal{M}$, т. е. если для каждого $f\in\mathcal{M}$, где f: $X\to Y$ и $f(X)=Y$, пространство Y обладает свойством $\mathcal{P}$, при условии, что им обладало пространство X. Используя эту терминологию, можно переформулировать теорему 1.4.10, сказав, что свойство «плотность $\leqslant\mathfrak{m}$» является инвариантом непрерывных отображений. Подобным же образом можно переформулировать теорему 1.4.16, сказав, что свойства «вес $\leqslant\mathfrak{m}$» и «характер $\leqslant\mathfrak{m}$» суть инварианты открытых отображений.

Будем говорить, что свойство $\mathcal{P}$ есть *обратный инвариант класса $\mathcal{M}$* непрерывных отображений или что свойство $\mathcal{P}$ сохраняется в сторону прообраза отображениями из $\mathcal{M}$, если для каждого $f\in\mathcal{M}$, где f: $X\to Y$ и $f(X)=Y$, пространство X обладает свойством $\mathcal{P}$, при условии, что им обладает пространство Y. Отметим, что свойство $\mathcal{P}$ есть обратный инвариант класса $\mathcal{M}$

тогда и только тогда, когда свойство не-$\mathscr{P}$ (т. е. отрицание $\mathscr{P}$) есть инвариант класса $\mathscr{M}$. Таким образом, понятие обратного инварианта сводится к понятию инварианта. Оно введено для упрощения ряда утверждений. Очевидно, что если $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$, то всякий инвариант (обратный инвариант) класса $\mathscr{M}_2$ является инвариантом (обратным инвариантом) класса $\mathscr{M}_1$.

Инварианты гомеоморфизмов являются особенно важными. Они называются *топологическими свойствами*. Так как обратное отображение к гомеоморфизму также является гомеоморфизмом, то понятия инварианта и обратного инварианта в классе гомеоморфизмов совпадают. Таким образом, топологическое пространство X обладает свойством $\mathscr{P}$ в том и только том случае, когда этим свойством обладает любое гомеоморфное X пространство. Так как гомеоморфизм $f: X \to Y$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и открытыми множествами обоих пространств, то каждое свойство, определенное в терминах открытых множеств и в терминах теории множеств, является топологическим свойством.

Предмет топологии — изучение топологических свойств. Когда мы рассматриваем отдельное пространство X, мы пытаемся определить, какими топологическими свойствами оно обладает. При построении какой-нибудь общей теории обычно изучается некоторое конкретное топологическое свойство $\mathscr{P}$ и его взаимосвязи с другими топологическими свойствами; мы пытаемся определить, какие операции над топологическими пространствами не изменяют $\mathscr{P}$ и каковы классы отображений, относительно которых $\mathscr{P}$ инвариантно. Таким образом, с топологической точки зрения два гомеоморфных пространства можно рассматривать как один объект.

Мы уже определили несколько топологических свойств; наиболее важными среди них являются следующие: «вес $\leqslant \mathfrak{m}$», «характер $\leqslant \mathfrak{m}$» и «плотность $\leqslant \mathfrak{m}$».

Любое свойство $\mathscr{P}$ определяет класс всех пространств, обладающих этим свойством. Если $\mathscr{P}$ — топологическое свойство, то определенный им класс топологически инвариантен, т. е. вместе с некоторым пространством X, обладающим свойством $\mathscr{P}$, он содержит все пространства, гомеоморфные X. Топологические свойства, перечисленные в конце предыдущего абзаца, определяют (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) соответственно класс пространств со второй аксиомой счетности, с первой аксиомой счетности и сепарабельных. Все эти классы топологически инвариантны. В дальнейшем мы определим значительное число топологических свойств, т. е. топологически инвариантных классов топологических пространств. Вводя новый класс пространств, мы обычно не останавливаемся на его топологической инвариантности. Это следует, однако, из самого определения, в котором участвуют лишь теоретико-множественные понятия и понятия, сводимые к понятию открытого множества. Классы топологических пространств, не являющиеся топологически инвариантными, не будут рассматриваться здесь. Подобным же образом мы будем рассматривать лишь классы топологически инвариантных отображений, т. е. таких отображений, композиция которых с гомеоморфизмами (с обеих сторон) не выводит из рассматриваемого класса.

1.4.20. Примеры. Пусть X и Y — два множества одной и той же мощности. Рассмотрим в обоих дискретную топологию. Очевидно, что каждое взаимно однозначное отображение X на Y является гомеоморфизмом. С другой стороны, если дискретные пространства X и Y имеют различную мощность, они не могут быть гомеоморфными. Таким образом, дискретное пространство не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от природы точек множества X, а зависит только от мощности пространства X. Дискретное пространство мощности $\mathfrak{m}$ будем обозначать через $D(\mathfrak{m})$.

То же самое имеет место для бесконечных множеств X и Y с топологией, определенной в 1.1.8. Однако здесь в случае, когда оба множества имеют одну и ту же мощность, для того чтобы получить гомеоморфизм, нужно взять такие взаимно однозначные отображения X на Y, которые переводят x_0 в y_0 — точку накопления пространства Y. Пространство, полученное, как в 1.1.8, из множества мощности $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будем обозначать через $A(\mathfrak{m})$. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Непрерывные отображения и гомеоморфизмы абстрактных пространств впервые рассмотрел Фреше [1910]. В более узком смысле понятие гомеоморфизма было введено ранее Пуанкаре. Первое систематическое и исчерпывающее изложение этого предмета дал Хаусдорф [1914]. Топологии, порожденные семействами отображений, были рассмотрены Бурбаки [1951]. Понятие замкнутого отображения введено Гуревичем [1926] и Александровым [1927], понятие открытого отображения плоскости в себя — Г. Вейлем [1913] и Стоиловым [1928] (последний предполагал, что прообразы точек при этих отображениях не содержат нетривиальных континуумов). Открытые отображения топологических пространств были определены Аронщайном [1931] (см. также Серпинский [1930]).

УПРАЖНЕНИЯ

1.4.A. Покажите, что топология прямой Зоргенфрея порождается семейством отображений в двухточечное дискретное пространство.

1.4.B. Установите, что прямую Зоргенфрея можно отобразить на $D(\aleph_0)$, но нельзя отобразить на $D(\mathfrak{c})$.

1.4.C. Проверьте, что $f\colon X \to Y$ есть замкнутое отображение в том и только том случае, если $\overline{f(A)} = f(\bar{A})$ для каждого $A \subset X$, и что f — открытое отображение в том и только том случае, если $f(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Int} f(A)$ для любого $A \subset X$. Приведите пример, показывающий, что в этой характеристике открытых отображений включение нельзя заменить на равенство.

Покажите, что $f\colon X \to Y$ является открытым отображением в том и только том случае, если $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\bar{B})$, или, что эквивалентно, $\operatorname{Int} f^{-1}(B) = f^{-1}(\operatorname{Int} B)$ для каждого $B \subset Y$.

1.4.D. Установите следующие утверждения.

(a) Образ канонического замкнутого множества при открыто-замкнутом отображении есть каноническое замкнутое множество.

(b) Образ канонического открытого множества при открыто-замкнутом отображении не является, вообще говоря, каноническим открытым множеством.

(c) Образ канонического замкнутого множества при замкнутом (открытом) отображении не является, вообще говоря, каноническим замкнутым множеством.

(d) Прообраз канонического замкнутого (открытого) множества при открытом отображении есть каноническое замкнутое (открытое) множество.

(e) Прообраз канонического замкнутого (открытого) множества при замкнутом отображении не является, вообще говоря, каноническим замкнутым (открытым) множеством.

1.4.E. Покажите, что прямая Зоргенфрея и плоскость Немыцкого не гомеоморфны.

Указания. Примените 1.4.4.

1.4.F. (a) Докажите, что если бесконечное пространство Y является непрерывным образом пространства $A(\mathfrak{m})$ при замкнутом отображении, то существует такое кардинальное число $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, что $Y = A(\mathfrak{n})$.

(b) Покажите, что отображение $f\colon A(\mathfrak{m}) \to Y$ пространства $A(\mathfrak{m})$ на некоторое топологическое пространство Y замкнуто тогда и только тогда, когда для любой пары y_1, y_2 различных точек Y существуют открытые множества $U_1, U_2 \subset Y$, такие, что $y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, т. е. Y — хаусдорфово пространство (см. следующий параграф).

1.4.G. Установите, что для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ прообразы борелевских множеств из Y являются борелевскими множествами в X.

1.5. АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ

Определение топологического пространства является весьма общим, поэтому невозможно доказать много интересных теорем обо всех топологических пространствах сразу. В этой книге изучаются различные классы топологических пространств, от весьма общих к более и более специальным. Очевидно, что чем уже рассматриваемый класс, тем больше теорем имеет место об этом классе.

Ограничения, которые мы налагаем на топологические пространства, имеют разнообразный характер. Мы уже обсуждали аксиомы счетности, ограничивающие мощность баз. В этом параграфе мы изучим аксиомы отделимости, касающиеся разделения точек и замкнутых множеств в топологических пространствах.

Топологическое пространство X называется T_0-*пространством*, если для каждой пары различных точек x_1, $x_2 \in X$ существует открытое множество, содержащее ровно одну из этих точек. Примерами топологических пространств, не являющихся T_0-пространствами, служат антидискретное пространство и пространство, описанное в 1.2.10. Все другие определенные выше пространства суть T_0-пространства.

1.5.1. Теорема. *Пусть X есть T_0-пространство; тогда* $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — такая база пространства X, что $|\mathscr{B}| = w(X)$, и для любого $x \in X$ пусть $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B}: x \in U\}$. Из определения T_0-пространства следует, что $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ при $x \neq y$. Так как число всех различных семейств $\mathscr{B}(x)$ не превосходит $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ∎

Топологическое пространство X называется T_1-*пространством*, если для каждой пары различных точек x_1, $x_2 \in X$ существует открытое множество $U \subset X$, такое, что $x_1 \in U$ и $x_2 \notin U$. Заметим, что существует также открытое множество $V \subset X$, такое, что $x_2 \in V$ и $x_1 \notin V$; достаточно рассмотреть пару x_2, x_1. В этом заключено отличие от T_0-пространства, в котором для любой пары несовпадающих точек x_1, x_2 может существовать либо только открытое множество U, такое, что $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$, либо только открытое множество V, такое, что $x_2 \in V$, $x_1 \notin V$.

Очевидно, что всякое T_1-пространство является T_0-пространством. Пространство, описанное в примере 1.2.8, является T_0-пространством, но не является T_1-пространством. Все другие определенные выше пространства, за исключением описанного в примере 1.2.10, суть T_1-пространства.

Отметим, что X является T_1-пространством в том и только том случае, если каждая точка $x \in X$ является пересечением всех своих окрестностей. Отсюда, в частности, следует, что каждое одноточечное подмножество T_1-пространства с первой аксиомой счетности является G_δ-множеством.

Оказывается, что X является T_1-пространством тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ множество $\{x\}$ замкнуто. В самом деле, пусть X есть T_1-пространство; тогда для любого $x \in X$ имеем

$$\{x\} = \bigcap \{X \setminus U\colon\ x \notin U \in \mathcal{O}\},$$

где $\mathcal{O}$ — топология в множестве X. Следовательно, множество $\{x\}$ замкнуто по (C3). С другой стороны, пусть для каждого $x \in X$ множество $\{x\}$ замкнуто; тогда X есть T_1-пространство. Действительно, для каждой пары несовпадающих точек $x_1, x_2 \in X$ открытое множество $U = X \setminus \{x_2\}$ содержит x_1, но не содержит x_2.

Топологическое пространство X называется *T_2-пространством* или *хаусдорфовым пространством*, если для каждой пары различных точек $x_1, x_2 \in X$ существуют открытые множества U_1, U_2, такие, что $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, что каждое T_2-пространство является T_1-пространством. Пространство, описанное в примере 1.2.6, является T_1-пространством, не будучи T_2-пространством. Все пространства, определенные в § 1.1, а также прямая Зоргенфрея и плоскость Немыцкого являются хаусдорфовыми пространствами.

Заметим, что X есть T_2-пространство в том и только том случае, если каждая точка $x \in X$ есть пересечение замыканий всех своих окрестностей.

Читатель легко докажет следующее утверждение.

1.5.2. Предложение. *Пусть даны множество X и совокупность $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ семейств его подмножеств, обладающая свойствами* (BP1)—(BP3). *Кроме того, пусть совокупность $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ обладает свойством*

(BP4) *Для каждой пары несовпадающих точек $x, y \in X$ существуют открытые множества $U \in \mathcal{B}(x)$ и $V \in \mathcal{B}(y)$, такие, что $U \cap V = \varnothing$.*

Тогда пространство X, наделенное топологией, порожденной совокупностью $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$, хаусдорфово.

1.5.3. Теорема. *Пусть X — хаусдорфово пространство; тогда $|X| \leqslant \exp\exp d(X)$ и $|X| \leqslant [d(X)]^{\chi(X)}$.*

Доказательство. Пусть A — всюду плотное подмножество пространства X, такое, что $|A| = d(X)$, и пусть $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ — некоторая система окрестностей пространства X.

Для доказательства первого неравенства сопоставим каждому $x \in X$ семейство $\mathcal{A}(x) = \{U \cap A\colon\ U \in \mathcal{B}(x)\}$ подмножеств множества A. Из равенства $\overline{U \cap A} = \bar{U}$ следует, что пересечение замыканий всех элементов семейства $\mathscr{A}(x)$ равно $\{x\}$. Следовательно, $\mathscr{A}(x) \neq \mathscr{A}(y)$ при $x \neq y$. Так как число всех различных семейств $\mathscr{A}(x)$ не превосходит $\exp\exp|A|$, то $|X| \leqslant \exp\exp d(X)$.

Предположим теперь, что $|\mathscr{B}(x)| \leqslant \chi(X)$ (где $\chi(X) \geqslant \aleph_0$) для каждого $x \in X$, и обозначим через $\mathscr{A}_0$ семейство всех подмножеств множества A, мощность которых не больше $\chi(X)$. Очевидно, что $|\mathscr{A}_0| \leqslant |d(X)|^{\chi(X)}$. Для каждого $U \in \mathscr{B}(x)$ выберем точку $a(x, U) \in U \cap A$ и рассмотрим множество $A(x) = \{a(x, U): U \in \mathscr{B}(x)\} \in \mathscr{A}_0$. Для доказательства второго неравенства сопоставим каждой точке $x \in X$ семейство $\mathscr{A}_0(x) = \{U \cap A(x): U \in \mathscr{B}(x)\} \subset \mathscr{A}_0$. Очевидно, что $|\mathscr{A}_0(x)| \leqslant \chi(X)$. Так как $x \in \overline{U \cap A(x)} \subset \bar{U}$ для каждого $U \in \mathscr{B}(x)$, то пересечение замыканий всех элементов $\mathscr{A}_0(x)$ равно $\{x\}$. Следовательно, $\mathscr{A}_0(x) \neq \mathscr{A}_0(y)$ при $x \neq y$. Так как число всех различных семейств $\mathscr{A}_0(x)$ не превосходит $|\mathscr{A}_0|^{\chi(X)}$, то

$$|X| \leqslant \left[[d(X)]^{\chi(X)}\right]^{\chi(X)} = [d(X)]^{\chi(X)}.$$

Когда $\chi(X)$ конечно, пространство X дискретное и второе неравенство теоремы очевидно. ∎

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей теоремой.

1.5.4. Теорема. *Пусть f, g — непрерывные отображения некоторого пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество*

$$\{x \in X: f(x) = g(x)\}$$

замкнуто в пространстве X.

Доказательство. Мы покажем, что множество $A = \{x \in X: f(x) \neq g(x)\}$ открыто в пространстве X. Для каждого $x \in A$ имеем $f(x) \neq g(x)$; следовательно, в Y существуют открытые множества U_1 и U_2, такие, что $f(x) \in U_1$, $g(x) \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Множество $f^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$ есть окрестность точки x, содержащаяся в A. ∎

Топологическое пространство X называется T_3-*пространством* или *регулярным пространством*[1]), если X есть T_1-пространство и для любого $x \in X$ и каждого замкнутого множества $F \subset X$, такого, что $x \notin F$, существуют открытые множества U_1, U_2, такие, что

$$x \in U_1, \quad F \subset U_2 \quad \text{и} \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

1.5.5. Предложение. *T_1-пространство X регулярно тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности V*

---

[1]) Следует предупредить читателей, что некоторые авторы не включают в определение регулярных, вполне регулярных и нормальных пространств условие, что X есть T_1-пространство.

из некоторой фиксированной предбазы $\mathscr{P}$ существует окрестность U точки x, такая, что $\bar{U} \subset V$.

Доказательство. Пусть X — регулярное пространство и $\mathscr{P}$ — предбаза пространства X. Выберем некоторую точку $x \in X$ и ее окрестность $V \in \mathscr{P}$. По определению регулярного пространства существуют открытые множества U_1, U_2, такие, что

$$x \in U_1, \quad X \setminus V \subset U_2 \quad \text{и} \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тогда $U_1 \subset X \setminus U_2 \subset V$, откуда в свою очередь получаем, что $\bar{U}_1 \subset V$, так как $X \setminus U_2$ замкнуто.

Пусть теперь выполнено условие теоремы. Выберем $x \in X$ и замкнутое множество F так, что $x \notin F$. По определению предбазы существуют такие $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, что $x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset X \setminus F$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ выберем открестность W_i точки x_k таким образом, что $\bar{W}_i \subset V_i$. Открытые множества $U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$ и $U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \bar{W}_i$ не пересекаются, $x \in U_1$ и

$$F \subset X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \bar{W}_i = U_2. \blacksquare$$

1.5.6. Теорема. *Пусть X — регулярное пространство; тогда $w(X) \leqslant \exp d(X)$.*

Доказательство. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — семейство всех непустых открытых подмножеств пространства X. Так как X регулярно, то семейство $\{\operatorname{Int} \bar{U}_s\}_{s \in S}$ является базой. Выберем плотное множество $A \subset X$, такое, что $|A| = d(X)$, и пусть $V_s = A \cap U_s$ для любого $s \in S$. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что, в силу теоремы 1.3.6,

$$V_s = V_{s'} \text{ влечет за собой } \bar{U}_s = \bar{U}_{s'} \text{ для } s, s' \in S,$$

ибо из этого вытекает, что число всех различных множеств $\operatorname{Int} \bar{U}_s$ не превосходит $\exp|A|$. $\blacksquare$

Ясно, что всякое регулярное пространство X является хаусдорфовым. Именно для справедливости этого утверждения мы предположили (кроме возможности отделять точки от замкнутых множеств), что X является T_1-пространством. Антидискретное пространство обладает требуемым свойством отделимости, однако не является T_1-пространством. Все описанные выше хаусдорфовы пространства регулярны. Приведем теперь пример нерегулярного хаусдорфова пространства.

1.5.7. Пример. Пусть X — множество вещественных чисел и $Z \subset X$ — множество обратных для всех целых чисел, отличных от нуля. Для каждого $x \in X$ положим $U_i(x) = (x - 1/i,\ x + 1/i)$ и

$$B(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{если } x \neq 0, \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Легко показать, что совокупность $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ обладает свойствами (BP1)—(BP4). Следовательно, пространство X, наделенное топологией, порожденной системой окрестностей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, является хаусдорфовым. Множество Z замкнуто в X и $0 \notin Z$. Кроме того, для любых открытых множеств U_1, U_2, таких, что $0 \in U_1$ и $Z \subset U_2$, имеем $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Следовательно, X не является регулярным. ∎

Еще более узкий класс пространств представляют собой тихоновские пространства. Топологическое пространство X называется $T_{3\frac{1}{2}}$*-пространством*, или *тихоновским пространством*, или *вполне регулярным пространством*, если X есть T_1-пространство и для любого $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, такого, что $x \notin F$, существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

Так как для открытых множеств $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ и $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ имеют место соотношения

$$x \in U_1, \quad F \subset U_2 \quad \text{и} \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то каждое тихоновское пространство является регулярным пространством.

В определении $T_{3\frac{1}{2}}$-пространств, кроме теоретико-множественных понятий и понятий, сводимых к понятию открытого множества, употребленных при определении T_i-пространств с $i \leqslant 3$, использовано понятие непрерывной вещественной функции. Следовательно, топологическая инвариантность класса $T_{3\frac{1}{2}}$-пространств нуждается в доказательстве, тогда как для T_i-пространств с $i \leqslant 3$ она является прямым следствием способа их определения. Однако для доказательства достаточно заметить, что композиция fh гомеоморфизма h и непрерывной функции f в I есть непрерывная функция.

1.5.8. Предложение. *T_1-пространство X является тихоновским пространством в том и только том случае, если для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности V из фиксированной предбазы $\mathscr{P}$ существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ для $y \in X \setminus V$.*

Доказательство. Необходимость этого условия следует из того, что $X \setminus V$ замкнуто и не содержит x.

Для доказательства достаточности выберем $x \in X$ и замкнутое множество F такими, что $x \notin F$. По определению предбазы существуют $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, удовлетворяющие условию $x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset X \setminus F$. Выберем функции f_i: $X \to I$, $i = 1, 2, \ldots, k$, таким образом, что $f_i(x) = 0$ и $f_i(y) = 1$ при $y \in X \setminus V_i$. Легко показать, что для $f = \max(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ имеют место равенства $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ при $y \in F$. ∎

В примерах 1.4.4 и 1.4.5 мы показали, что прямая Зоргенфрея и плоскость Немыцкого являются тихоновскими пространствами. Очевидно, что все пространства, определенные в § 1.1, также являются тихоновскими пространствами.

Примеры регулярных пространств, не являющихся тихоновскими пространствами, сложнее рассмотренных до сих пор примеров. Они не могут быть построены непосредственно; чтобы получить их, нужно знать некоторые методы построения более сложных пространств из более простых. Такой пример будет приведен в следующей главе (см. пример 2.4.21 и замечания к § 2.4). Отметим, что существуют даже такие регулярные пространства, на которых каждая непрерывная вещественная функция постоянна. Однако такие пространства весьма сложны (см. задачу 2.7.17).

Топологическое пространство X называется *T_4-пространством* или *нормальным пространством*, если X является T_1-пространством и для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset X$ существуют открытые множества U, V, такие, что

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{и} \quad U \cap V = \varnothing. \tag{1}$$

Очевидно, что каждое T_4-пространство есть T_3-пространство. Из приведенной ниже теоремы 1.5.10 следует, что каждое T_4-пространство также есть $T_{3\frac{1}{2}}$ - пространство, но этот факт отнюдь не очевиден. Приведем теперь пример тихоновского пространства, не являющегося нормальным. Оказывается, таким пространством является плоскость Немыцкого.

1.5.9. Пример. Мы должны показать, что плоскость Немыцкого L не является нормальным пространством. Мы уже отмечали, что производное множество $L_1 \subset L$ пусто. Из 1.3.4 следует, что $A^d = \varnothing$ для любого $A \subset L_1$ и что любое такое A замкнуто в L. Пусть C состоит из всех точек L_2, обе координаты которых рациональны. Ясно, что C — всюду плотное подмножество в L.

Допустим, что L — нормальное пространство; тогда для каждого $A \subset L_1$ существуют открытые множества U_A, $V_A \subset L$, такие, что

$$A \subset U_A, \quad L_1 \setminus A \subset V_A \quad \text{и} \quad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Каждому $A \subset L_1$ поставим в соответствие множество $C_A = C \cap U_A$. Мы покажем, что $C_A \neq C_B$ при $A \neq B$, и придем к противоречию, так как L_1 содержит $2^{\mathfrak{c}}$ различных подмножеств, в то время как C содержит только $\mathfrak{c}$ различных подмножеств. Пусть A, $B \subset L_1$, $A \neq B$; без уменьшения общности можно считать, что $A \setminus B \neq \varnothing$. Так как $\varnothing \neq A \setminus B \subset \bar{U}_A \cap V_B$ и $\bar{U}_B \cap V_B = \varnothing$, то, в силу 1.1.2, $\bar{U}_A \neq \bar{U}_B$. Из последнего соотношения и 1.3.6 следует, что $\bar{C}_A \neq \bar{C}_B$ и потому $C_A \neq C_B$. ∎

Сделанное выше замечание о том, почему в определении регулярности пространства X требуется, чтобы оно было T_1-пространством, относится и к определению тихоновских и нормальных пространств. Иллюстрацией служит антидискретное пространство.

Следующая теорема является одной из фундаментальных. По историческим причинам она называется *леммой Урысона.*

1.5.10. Теорема (лемма Урысона). *Для каждой пары A, B непересекающихся замкнутых множеств нормального пространства X существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что*

$$f(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in A \quad \textit{и} \quad f(x) = 1 \quad \textit{при} \quad x \in B.$$

Доказательство. Для каждого рационального числа $r \in [0, 1]$ определим открытое множество $V_r \subset X$, удовлетворяющее условиям

$$\bar{V}_r \subset V_{r'}, \quad \text{если} \quad r < r'; \tag{2}$$

$$A \subset V_0, \quad B \subset X \setminus V_1. \tag{3}$$

Множества V_r определяются индуктивно. Расположим все рациональные числа интервала $(0, 1)$ в некоторую бесконечную последовательность r_3, r_4, ..., и пусть $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Положим

$$V_0 = U \quad \text{и} \quad V_1 = X \setminus B,$$

где U вместе с открытым V удовлетворяют (1). Очевидно, что

$$A \subset V_0 \subset X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subset V_1, \text{ следовательно, } \bar{V}_0 \subset V_1.$$

Условие (3), так же как и условие

$$\bar{V}_{r_i} \subset V_{r_j}, \quad \text{если } r_i < r_j \quad \text{и} \quad i, j \leqslant k, \tag{2_k}$$

выполнено для $k = 2$.

Допустим, что множества V_{r_i} уже определены для $i \leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ и выполнено (2_n). Обозначим через r_l и r_m соответственно те из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, которые ближе всего к r_{n+1} слева и справа. Так как $r_l < r_m$, то из (2_n) вытекает, что $\overline{V}_{r_l} \subset V_{r_m}$. Из нормальности пространства X мы делаем вывод о существовании открытых множеств U, V, таких, что

$$\overline{V}_{r_l} \subset U, \quad X \setminus V_{r_m} \subset V \quad \text{и} \quad U \cap V = \varnothing.$$

Отсюда следует, что $U \subset X \setminus V \subset V_{r_m}$, а это в свою очередь дает $\overline{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset V_{r_m}$. Положив $V_{r_{n+1}} = U$, мы получим множества $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}$, удовлетворяющие условию (2_{n+1}). Полученная таким образом последовательность $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Функцию f из X в I определим формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\} & \text{для} \quad x \in V_1, \\ 1 & \text{для} \quad x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

В силу (3), имеем $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \{1\}$. Остается доказать, что f непрерывна. Для этого в силу 1.4.1 достаточно показать, что прообразы интервалов $[0, a)$ и $(b, 1]$, где $a \leqslant 1$ и $b \geqslant 0$, — открытые множества.

Неравенство $f(x) < a$ имеет место в том и только том случае, если существует такое $r < a$, что $x \in V_r$; следовательно, множество $f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r\colon\ r < a\}$ открыто. Неравенство $f(x) > b$ имеет место в том и только том случае, если существует такое $r' > b$, что $x \notin V_{r'}$. Но, в силу (2), это означает, что существует такое $r > b$, что $x \notin \overline{V}_r$. Следовательно, множество

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r\colon\ r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r\colon\ r > b\}$$

также открыто. ∎

1.5.11. Следствие. *Подмножество A нормального пространства X является замкнутым G_δ-множеством в том и только том случае, если существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что $A = f^{-1}(0)$.*

Доказательство. Одноточечное множество $\{0\} \subset I$ является замкнутым G_δ-множеством. Поэтому прообраз $f^{-1}(0)$ при любом непрерывном отображении $f\colon X \to I$ является замкнутым G_δ-множеством.

Пусть теперь A — замкнутое G_δ-множество в нормальном пространстве X. Дополнение множества A есть F_σ-множество, т. е. $X \setminus A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, где $\overline{F}_i = F_i$, $i = 1, 2, \ldots$. По лемме Урысона для каждого $i = 1, 2, \ldots$ существует непрерывная функция $f_i\colon X \to I$, такая, что

$$f_i(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \quad \text{и} \quad f_i(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in F_i.$$

Из 1.4.7 вытекает, что формула $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$ определяет непрерывную функцию $f\colon X \to I$. Для $x \in A$ с очевидностью $f(x) = 0$. Если $x \notin A$, то существует такое i, что $x \in F_i$, и потому $f(x) \geqslant \frac{1}{2^i} f_i(x) = \frac{1}{2^i} > 0$. Следовательно, $A = f^{-1}(0)$. ∎

Перейдя к дополнениям, можно переформулировать 1.5.11 следующим образом.

1.5.12. Следствие. *Подмножество A нормального пространства X есть открытое F_σ-множество в том и только том случае, когда существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что $A = f^{-1}((0, 1])$.* ∎

Два подмножества A и B топологического пространства X называются *вполне отделимыми*, если существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что $f(x) = 0$ при $x \in A$ и $f(x) = 1$ при $x \in B$. В этом случае говорят, что f *разделяет* множества A и B. Лемма Урысона утверждает, что в нормальном пространстве два непересекающихся замкнутых множества вполне отделимы. Легко показать, что если любые два непересекающихся замкнутых множества в T_1-пространстве вполне отделимы, то пространство нормально.

Подмножество A топологического пространства X называется *функционально замкнутым*[1]), если $A = f^{-1}(0)$ для некоторого $f\colon X \to I$. Очевидно, что всякое функционально замкнутое подмножество пространства X замкнуто в X. Пусть $f, g\colon X \to I$; определим $h_1, h_2\colon X \to I$ формулами

$$h_1(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{и} \quad h_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)).$$

Тогда

$$h_1^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) \quad \text{и} \quad h_2^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0).$$

Отсюда следует, что объединение и пересечение двух (и конечного числа) функционально замкнутых множеств — функционально замкнутые множества. Счетное пересечение функционально замкнутых множеств вновь является функционально

---

[1]) Принятые здесь термины «функционально замкнутое множество» и «функционально открытое множество» кажутся нам более подходящими, чем обычно употребляемые термины «нуль-множество» и «конуль-множество».

замкнутым множеством. В самом деле, $\bigcap_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ для функции $f\colon X \to I$, определенной формулой $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$.

Дополнение к функционально замкнутому подмножеству в пространстве X называется *функционально открытым*. Очевидно, что всякое функционально открытое подмножество пространства X открыто в X. Счетное объединение и конечное пересечение функционально открытых множеств — функционально открытые множества. Легко показать, что T_1-пространство X вполне регулярно в том и только том случае, если семейство всех функционально открытых множеств образует базу в пространстве X. Открыто-замкнутые множества одновременно функционально открыты и функционально замкнуты. Прообраз при непрерывном отображении функционально замкнутого (открытого) множества есть функционально замкнутое (открытое) множество. Следствия 1.5.11 и 1.5.12 утверждают, что в нормальных пространствах функционально замкнутые (открытые) множества совпадают с замкнутыми G_δ-множествами (открытыми F_σ-множествами).

1.5.13. Теорема. *Любые два непересекающихся функционально замкнутых множества A и B в произвольном топологическом пространстве X вполне отделимы. Более того, существует непрерывное отображение $f\colon X \to I$, такое, что $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$.*

Доказательство. Пусть $g, h\colon X \to I$ удовлетворяют соотношениям

$$A = g^{-1}(0) \quad \text{и} \quad B = h^{-1}(0).$$

Так как $A \cap B = \varnothing$, то формула $f(x) = g(x)/(g(x) + h(x))$ определяет непрерывное отображение $f\colon X \to I$. Легко показать, что $A = f^{-1}(0)$ и $B = f^{-1}(1)$. ∎

Очевидно, что все дискретные пространства $D(\mathfrak{m})$ нормальны. Легко установить, что все пространства $A(\mathfrak{m})$ также нормальны. Приведенная ниже теорема 1.5.15 показывает, что прямая линия R и интервал I также нормальны. В примере 1.5.17 будет показано, что прямая Зоргенфрея нормальна.

1.5.14. Лемма. *Пусть X есть T_1-пространство, и пусть для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любого открытого $W \subset X$, содержащего F, существует последовательность $W_1, W_2, \ldots$ открытых подмножеств пространства X, такая, что $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ и $\overline{W}_i \subset W$ для $i = 1, 2, \ldots$. Тогда пространство X нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Полагая $F = A$ и $W = X \setminus B$, мы получим последовательность $W_1, W_2, \ldots$ открытых подмножеств пространства X, такую, что

$$(4) \qquad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \quad \text{и} \quad B \cap \overline{W}_i = \varnothing, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Полагая $F = B$ и $W = X \setminus A$, мы получим последовательность $V_1, V_2, \ldots$ открытых подмножеств пространства X, такую, что

$$(5) \qquad B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \quad \text{и} \quad A \cap \overline{V}_i = \varnothing, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Положим

$$(6) \qquad G_i = W_i \setminus \bigcup_{j \leqslant i} \overline{V}_j \quad \text{и} \quad H_i = V_i \setminus \bigcup_{j \leqslant i} \overline{W}_j.$$

Множества G_i и H_i открыты; более того, из (4) и (5) следует, что

$$A \subset U = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \quad \text{и} \quad B \subset V = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i.$$

Для завершения доказательства остается показать, что открытые множества U и V не пересекаются. Так как из (6) следует, что $G_i \cap V_j = \varnothing$ для $j \leqslant i$, то $G_i \cap H_j = \varnothing$ для $j \leqslant i$. Подобным же образом $H_j \cap W_i = \varnothing$ для $i \leqslant j$ и $G_i \cap H_j = \varnothing$ для $i \leqslant j$. Следовательно, $G_i \cap H_j = \varnothing$ для $i, j = 1, 2, \ldots$, и потому $U \cap V = \varnothing$. ∎

Легко убедиться, что условия предыдущей леммы не только достаточны, но и необходимы для нормальности T_1-пространства X.

1.5.15. Теорема. *Любое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально.*

Доказательство. Каждое регулярное пространство X со счетной базой $\mathscr{B}$ удовлетворяет условиям леммы 1.5.14, так как для любого $x \in F$ существует такое $U_x \in \mathscr{B}$, что $x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset W$, семейство всех U_x счетно и $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$. ∎

1.5.16. Теорема. *Каждое счетное регулярное пространство нормально.*

Доказательство. Каждое счетное регулярное пространство удовлетворяет условиям леммы 1.5.14, так как для всякой точки $x \in F$ существует открытое множество U_x, такое, что $x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset W$. Семейство всех U_x счетно и $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$. ∎

В связи с теоремой 1.5.16 отметим, что существуют счетные регулярные пространства, не удовлетворяющие первой и тем более второй аксиоме счетности (см. примеры 1.6.19, 1.6.20 и 2.3.37).

1.5.17. Пример. Покажем, что прямая Зоргенфрея K является нормальным пространством (см. пример 3.8.14). Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества прямой K.

Для каждого $a \in A$ возьмем интервал $[a, x(a))$, не пересекающийся с B, а для каждого $b \in B$ — интервал $[b, x(b))$, не пересекающийся с A. Полагая $U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a))$ и $V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b))$, мы получим открытые множества, такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$. Для каждого $a \in A$ и $b \in B$ имеем $[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing$, так как иначе выполнялись бы включения $b \in [a, x(a))$ или $a \in [b, x(b))$ (в зависимости от того, какое из неравенств имеет место: $a < b$ или $b < a$). Следовательно, $U \cap V = \varnothing$. ∎

Отметим, что, применяя законы де Моргана, легко показать, что T_1-пространство X нормально в том и только том случае, если для любой пары открытых множеств U, $V \subset X$, таких, что $X = U \cup V$, существует пара замкнутых множеств A, $B \subset X$, таких, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $X = A \cup B$. Для усиления этого результата введем несколько простых понятий.

Семейство $\{A_s\}_{s \in S}$ подмножеств множества X называется *покрытием* множества X, если $\bigcup_{s \in S} A_s = X$. Если X — топологическое пространство и все множества A_s открыты (замкнуты), то мы называем покрытие $\{A_s\}_{s \in S}$ *открытым* (*замкнутым*). Семейство $\{A_s\}_{s \in S}$ подмножеств множества X называется *точечно конечным* (*точечно счетным*), если для каждого $x \in X$ множество $\{s \in S\colon x \in A_s\}$ конечно (счетно). Очевидно, что всякое локально конечное покрытие является точечно конечным. С другой стороны, открытое покрытие интервала I, состоящее из самого I и всех интервалов $(1/(i+1), 1/i)$, $i = 1, 2, \ldots$, точечно конечно, но не является локально конечным.

1.5.18. Теорема. *Пусть X — нормальное пространство, и пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — его точечно конечное открытое покрытие. Тогда существует открытое покрытие $\{V_s\}_{s \in S}$ пространства X, такое, что $\overline{V}_s \subset U_s$ для каждого $s \in S$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}$ — семейство всех функций $G\colon S \to \mathcal{O}$; (где $\mathcal{O}$ — топология пространства X), удовлетворяющих следующим условиям:

$$(7) \qquad G(s) = U_s \quad \text{или} \quad \overline{G(s)} \subset U_s,$$

$$(8) \qquad \bigcup_{s \in S} G(s) = X.$$

Упорядочим семейство $\mathcal{G}$, положив по определению $G_1 \leqslant G_2$, если $G_2(s) = G_1(s)$ для каждого $s \in S$, такого, что $G_1(s) \neq U_s$. Мы покажем, что для всякого линейно упорядоченного подсемейства $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ формула $G_0(s) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_0} G(s)$, $s \in S$, определяет элемент семейства $\mathcal{G}$. Условие (7) выполняется очевидным образом. Проверим условие (8). Пусть $x \in X$; так как $\{U_s\}_{s \in S}$ точечно конечно, существует конечное множество $S_0 = \{s_1, s_2, \ldots \ldots, s_k\} \subset S$, такое, что $x \in U_{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ и $x \notin U_s$ для $s \in S \setminus S_0$. Если $G_0(s_i) = U_{s_i}$ для некоторого $s_i \in S_0$, то $x \in G_0(s_i) \subset \bigcup_{s \in S} G_0(s)$. Следовательно, можно считать, что для $i = 1, 2, \ldots, k$ найдется такое $G_i \in \mathcal{G}_0$, что $G_i(s_i) \neq U_{s_i}$. Так как семейство $\mathcal{G}_0$ линейно упорядочено, существует такое $j \leqslant k$, что $G_i \leqslant G_j$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Применяя (8) к G_j, мы видим, что $x \in G_j(s_i) = G_0(s_i)$ для некоторого $s_i \in S_0$.

По лемме Куратовского — Цорна в $\mathcal{G}$ существует максимальный элемент G. Для завершения доказательства достаточно показать, что $\overline{G(s)} \subset U_s$ для каждого $s \in S$.

Допустим, что $\overline{G(s_0)} \cap (X \setminus U_{s_0}) \neq \varnothing$. Множество $A = X \setminus \bigcup \{G(s) : s \in S \setminus \{s_0\}\} \subset G(s_0)$ замкнуто. В силу нормальности пространства X существует открытое множество V, такое, что $A \subset V \subset \overline{V} \subset G(s_0)$. Из (7) следует, что $G(s_0) = U_{s_0}$, поэтому формула

$$G_0(s) = \begin{cases} V & \text{при} \quad s = s_0, \\ G(s) & \text{при} \quad s \neq s_0, \end{cases}$$

определяет такую функцию $G_0 \in \mathcal{G}$, что $G \leqslant G_0$ и $G \neq G_0$. Это противоречит максимальности элемента G и показывает, что $\overline{G(s)} \subset U_s$ для любого $s \in S$. ∎

Топологическое пространство X называется *совершенно нормальным*, если X — нормальное пространство и каждое замкнутое в нем множество является G_δ-множеством. Очевидно, что нормальное пространство X совершенно нормально тогда и только тогда, когда каждое его открытое подмножество есть F_σ-множество.

Класс совершенно нормальных пространств существенно у́же класса нормальных пространств: для $\mathfrak{m} > \aleph_0$ пространство $A(\mathfrak{m})$ не является совершенно нормальным. В самом деле, любое F_σ-множество в $A(\mathfrak{m})$, не содержащее единственную точку накопления x_0 пространства $A(\mathfrak{m})$, счетно. Отсюда следует, что открытое множество $A(\mathfrak{m}) \setminus \{x_0\}$ не является F_σ-множеством. Отметим, что каждое нормальное пространство X со счетной базой $\mathcal{B}$ совершенно нормально. Действительно, для любой точки x открытого множества $U \subset X$ существует такое $U_x \in \mathcal{B}$, что

$x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset U$. Таким образом, $U = \bigcup_{x \in U} \overline{U}_x$, где объединение счетно, ибо все множества U_x принадлежат $\mathscr{B}$.

Очевидно, что все дискретные пространства и все счетные нормальные пространства совершенно нормальны. Прямая Зоргенфрея тоже совершенно нормальна. В самом деле, если для каждой точки x открытого множества $U \subset K$ взять объединение $U(x)$ всех содержащих ее открытых интервалов, лежащих в U, то для $x, x' \in U$ будет либо $U(x) = U(x')$, либо $U(x) \cap U(x') = \varnothing$. Поскольку каждое $U(x)$ содержит рациональное число, множество различных $U(x)$ счетно, а их объединение U_0 является F_σ-множеством в K. Легко проверить, что множество $U \setminus U_0$ счетно, а следовательно, U есть F_σ-множество в K.

Так как вещественная прямая R совершенно нормальна, то функционально замкнутые (открытые) подмножества пространства X могут быть охарактеризованы как прообразы замкнутых (открытых) подмножеств прямой R при непрерывных отображениях X в R.

Отметим далее, что существуют и такие нормальные пространства, в которых все одноточечные подмножества суть G_δ-множества (и даже нормальные пространства с первой аксиомой счетности), но при этом пространства не являются совершенно нормальными (см. пример 3.1.26).

1.5.19. Теорема Веденисова. *Пусть X есть T_1-пространство; тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) *Пространство X совершенно нормально.*

(ii) *Открытые подмножества пространства X функционально открыты.*

(iii) *Замкнутые подмножества пространства X функционально замкнуты.*

(iv) *Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A, $B \subset X$ существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что $f^{-1}(0) = A$ и $f^{-1}(1) = B$.*

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) вытекает из 1.5.12, импликация (iii)$\Rightarrow$(iv) — из 1.5.13. Импликации (ii)$\Rightarrow$(iii) и (iv)$\Rightarrow$(i) очевидны. ∎

Перейдем теперь к обсуждению инвариантности аксиом отделимости при различных отображениях. Начнем с простого наблюдения: так как каждое пространство является непрерывным образом некоторого дискретного пространства, то никакая из аксиом отделимости не инвариантна при непрерывных отображениях. Для замкнутых отображений ситуация улучшается.

1.5.20. Теорема. *Классы T_1- и T_4-пространств и класс совершенно нормальных пространств инвариантны относительно замкнутых отображений.*

Доказательство. Инвариантность T_1-пространств следует из того, что T_1-пространства характеризуются как пространства, в которых одноточечные подмножества замкнуты.

Пусть теперь $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение нормального пространства X на некоторое пространство Y. Как известно, Y есть T_1-пространство. Для каждой пары открытых множеств U, $V \subset Y$, таких, что $Y \cup V = Y$, множества $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ открыты в X и покрывают пространство X. В силу нормальности X, существуют замкнутые множества A_0, $B_0 \subset X$, такие, что $A_0 \subset f^{-1}(U)$, $B_0 \subset f^{-1}(V)$ и $A_0 \cup B_0 = X$. Множества $A = f(A_0)$ и $B = f(B_0)$ замкнуты в Y. Более того,

$$A \subset ff^{-1}(U) = U, \quad B \subset ff^{-1}(V) = V \quad \text{и} \quad A \cup B = f(X) = Y.$$

Следовательно, Y — нормальное пространство.

Если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение совершенно нормального пространства X на пространство Y, то Y нормально и для любого открытого множества $U \subset Y$ мы имеем $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i замкнуты в X. Следовательно,

$$U = ff^{-1}(U) = f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(F_i)$$

является F_σ-множеством в Y, т. е. Y совершенно нормально. ∎

Оказывается, аксиомы T_1, T_4 и свойство совершенной нормальности — единственные аксиомы отделимости, инвариантные при замкнутых отображениях. Чтобы получить замкнутое отображение $T_{3\frac{1}{2}}$- пространства на пространство, не удовлетворяющее аксиоме T_2, мы должны взять любое не нормальное тихоновское пространство X, выделить в нем пару непересекающих замкнутых множеств A, $B \subset X$, которые не разделяются непересекающимися открытыми множествами, и отождествить множество A с некоторой точкой «a», а множество B с некоторой точкой «b», как описано в примере 1.4.17 (ср. с примером 2.4.12). Замкнутое отображение T_0-пространства на двухточечное антидискретное пространство построено ниже.

1.5.21. Пример. Пусть X — множество всех целых чисел с топологией, состоящей из множеств $\{x \in X\colon x \geqslant n\}$ для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Очевидно, что X есть T_0-пространство. Пусть $Y = \{0, 1\}$ с антидискретной топологией, и пусть $f(x) = 0$, если x четно, и $f(x) = 1$, если x нечетно. Легко видеть, что f — открыто-замкнутое отображение X на Y. ∎

Последний пример показывает, что класс T_0-пространств не инвариантен при открытых отображениях. Оказывается, что никакая из аксиом отделимости не инвариантна при открытых отображениях.

1.5.22. Пример. Отобразим вещественную прямую $R = X$ на двухточечное антидискретное пространство $Y = \{0, 1\}$, поставив в соответствие 0 всем рациональным числам и 1 всем иррациональным числам. Легко показать, что это открытое отображение (ср. с замечанием к упр. 4.2.D(b)). ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

T_0-пространства введены Колмогоровым (как указано у Александрова и Хопфа [1935]), T_1-пространства — Риссом [1907], а T_2-пространства — Хаусдорфом [1914]. Регулярные пространства определены Вьеторисом [1921]; свойство $T_{3^1/_2}$ сформулировано Урысоном [1925], а класс $T_{3^1/_2}$-пространств изучен Тихоновым [1930]. Класс нормальных пространств определен Титце [1923] и Александровым и Урысоном [1924]; свойство нормальности появилось ранее у Вьеториса [1921]. Свойство совершенной нормальности появилось в работе Урысона [1925] и было изучено Александровым и Урысоном [1929] в классе компактных пространств; совершенно нормальные пространства определены Чехом [1932].

Определение $T_{3^1/_2}$-пространств существенно отличается от определений других классов пространств, изученных в этом параграфе. Это *внешнее* определение, в котором мы предполагаем существование некоторых внешних объектов относительно рассматриваемого пространства (здесь мы имеем в виду существование интервала I), в противоположность *внутренним* определениям, в которых используются только внутренние объекты относительно рассматриваемых пространств. В дальнейшем несколько классов пространств будут введены посредством внешних определений, так как иногда такие определения проще и естественнее. Однако мы дадим, следуя установившейся в топологии традиции, и внутреннюю характеристику этих классов (которые с очевидностью также могут служить определениями). Так, внутренняя характеристика $T_{3^1/_2}$-пространств дается в упр. 1.5.G; читатель заметит, насколько такое определение сложнее и менее естественно, чем внешнее.

Доказательство ненормальности плоскости Немыцкого, данное в 1.5.9, взято у Джоунса [1937]; доказано больше: никакое сепарабельное пространство, содержащее множество мощности $\mathfrak{c}$ с пустым производным множеством, не является нормальным (другое доказательство этого факта дается в 2.1.10). Последнее замечание широко используется при доказательствах ненормальности (см. пример 2.3.12, упр. 3.1.H(a) и задачу 2.7.20(f)).

Лемма Урысона установлена Урысоном [1925]; модификации его рассуждений иногда используются для построения непрерывных вещественных функций (см. упр. 1.5.G и задачу 2.7.2(c)). Работа Урысона содержит также теорему 1.5.16. Теорема 1.5.15 была доказана Тихоновым [1925]; доказательство леммы 1.5.14 есть также одно из стандартных топологических рассуждений (ср. с доказательством леммы 7.2.5). Теорема 1.5.18 принадлежит Лефшецу [1942]. Условия совершенной нормальности в теореме 1.5.19 даны Веденисовым [1936] и [1940]. Хаусдорф [1935] первым заметил, что нормальность есть инвариант замкнутых отображений.

УПРАЖНЕНИЯ

1.5.A. Докажите, что X есть T_0-пространство в том и только том случае, если $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ для любой пары несовпадающих точек $x, y \in X$.

1.5.B. Заметим, что конечное T_1-пространство дискретно. Покажите, что в T_1-пространствах производное множество обладает следующими свойствами:

$$(A^d)^d \subset A^d, \quad (\overline{A^d}) = A^d = (\overline{A})^d; \quad A^d = \varnothing, \quad \text{если } A \text{ конечно.}$$

Приведите примеры, показывающие, что для T_0-пространств эти утверждения не имеют места.

1.5.C. Непрерывное отображение $f\colon X \to X$ называется *ретракцией* пространства X, если $ff = f$; множество всех значений ретракции пространства X называется *ретрактом* пространства X.

Покажите, что всякий ретракт хаусдорфова пространства замкнут.

1.5.D. (a) Заметим, что в определениях регулярного и вполне регулярного пространств мы могли бы предположить, что исходные пространства суть T_0-пространства, а не T_1-пространства. Покажите, что в определении нормальных пространств такое изменение невозможно.

(b) Покажите, что в 1.5.1 предположение, что X есть T_0-пространство, нельзя опустить, а в 1.5.3 предположение, что X — хаусдорфово пространство, нельзя заменить предположением, что X есть T_1-пространство.

(c) Докажите, что в 1.5.6 предположение о регулярности X нельзя заменить предположением, что X — хаусдорфово пространство.

Указание. Пусть $U(z, r)$ — множество всех точек плоскости внутри круга радиуса r с центром в точке z. Введите топологию на плоскости, взяв в качестве базы семейство, состоящее из всех множеств вида $U(z, r) \setminus A$, где A — множество, пересекающее каждую прямую, параллельную оси x, в конечном числе точек.

Можно также воспользоваться тем фактом, что существуют сепарабельные хаусдорфовы пространства мощности $2^{\mathfrak{c}}$ (ср. с теоремой 2.3.15 или следствием 3.6.11), и применить указание к упр. 3.1.F(d).

1.5.E. (a) Покажите, что топология T_1-пространства X порождается семейством отображений в вещественную прямую тогда и только тогда, когда X — вполне регулярное пространство.

(b) Докажите, что если на множестве X определены две топологии $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ и оба пространства $(X, \mathcal{O}_1)$ и $(X, \mathcal{O}_2)$ суть $T_{3^1/_2}$-пространства, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ в том и только том случае, когда семейство всех вещественных функций на X, непрерывных относительно $\mathcal{O}_1$, совпадает с семейством всех вещественных функций на X, непрерывных в топологии $\mathcal{O}_2$.

1.5.F. Покажите, что для любого конечного семейства $\{F_i\}_{i=1}^k$ попарно непересекающихся замкнутых множеств нормального пространства X существует семейство $\{U_i\}_{i=1}^k$ открытых подмножеств пространства X, таких, что $F_i \subset U_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (ср. с теоремой 2.1.14 и упр. 2.1.G). Установите, что если все F_i конечны, то достаточно предположить, что X — хаусдорфово пространство.

1.5.G (Фринк О. [1964], Зайцев [1967]). Докажите, что T_1-пространство X вполне регулярно тогда и только тогда, когда в нем существует база $\mathcal{B}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) *Для любого $x \in X$ и любого $U \in \mathcal{B}$, содержащего x, существует такое $V \in \mathcal{B}$, что $x \notin V$ и $U \cup V = X$.*

(2) *Для любой пары U, $V \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей условию $U \cup V = X$, существуют такие U', $V' \in \mathcal{B}$, что $X \setminus V \subset U'$, $X \setminus U \subset V'$ и $U' \cap V' = \varnothing$.*

Указание. Модифицируйте доказательство леммы Урысона.

1.5.H. (a) Докажите, что любое замкнутое подмножество плоскости Немыцкого является G_δ-множеством (пространства, обладающие этим свойством, называются *совершенными пространствами*).

(b) (Смирнов [1948]). Покажите, что T_1-пространство X нормально в том и только том случае, если выполнены следующие условия:

(1) *Любое замкнутое G_δ-множество в X функционально замкнуто.*

(2) *Для любого замкнутого $F \subset X$ и любого открытого $G \subset X$, содержащего F, в X существует замкнутое G_δ-множество M, такое, что $F \subset M \subset G$.*

(c) Установите, что никакое из условий (b) по отдельности не обеспечивает нормальности пространства X.

1.5.I. Установите, что если $(X, \mathcal{O}_1)$ есть T_i-пространство с $i \leqslant 2$ и $\mathcal{O}_2$ — топология в X, более тонкая, чем $\mathcal{O}_1$, то $(X, \mathcal{O}_2)$ также является T_i-пространством. Покажите, что при $i \geqslant 3$ это неверно.

1.5.J. (a) Установите, что счетные объединения функционально замкнутых множеств, вообще говоря, не являются функционально замкнутыми.

(b) Покажите, что объединения локально конечных семейств функционально замкнутых множеств, вообще говоря, не являются функционально замкнутыми. Заметим, что в совершенно нормальных пространствах объединение любого локально конечного семейства функционально замкнутых множеств является функционально замкнутым.

(c) Установите, что объединение семейства функционально открытых множеств, вообще говоря, не является функционально открытым.

(d) Заметьте, что объединение локально конечного семейства функционально открытых множеств функционально открыто.

1.5.K. Покажите, что T_1-пространство X совершенно нормально в том и только том случае, если для каждого открытого множества $W \subset X$ существует последовательность $W_1, W_2, \ldots$ открытых подмножеств пространства X, такая, что $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ и $\overline{W}_i \subset W$ для $i = 1, 2, \ldots$.

1.5.L. (a) (Пономарёв [1959], Фролик [1961]). Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — открыто-замкнутое отображение пространства X на Y, то для любого $g\colon X \to R$, ограниченного на всех прообразах точек при f, формулы $g^*(y) = \sup\{g(x)\colon x \in f^{-1}(y)\}$ и $g_*(y) = \inf\{g(x)\colon x \in f^{-1}(y)\}$ определяют непрерывные функции $g^*, g_*\colon Y \to R$ (ср. с задачей 1.7.16).

(b) (Хабер [1972]). Покажите, что регулярность и полная регулярность инвариантны относительно открыто-замкнутых отображений.

Указание. В случае вполне регулярных пространств примените (a).

Замечание. Класс хаусдорфовых пространств не инвариантен при открыто-замкнутых отображениях (ср. с примером Альстера, который приводится у Хабера [1972], где на с. 204 в строке 7 снизу, а также на с. 205 в строках 3 и 5 сверху следует читать R вместо Q).

1.5.M. Приведите пример открытого отображения нормального пространства на T_1-пространство, не являющееся T_2-пространством.

1.6. СХОДИМОСТЬ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ: НАПРАВЛЕННОСТИ И ФИЛЬТРЫ. СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА ФРЕШЕ

Под *направленностью в топологическом пространстве* X мы понимаем произвольную функцию, заданную на непустом направленном множестве, со значениями в пространстве X. Направленности обозначаются символом $S=\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$, где x_σ — точка в X, соответствующая элементу $\sigma\in\Sigma$. Отношение, направляющее Σ, обозначается через $\leqslant$, и для $\sigma_1, \sigma_2\in\Sigma$ мы часто пишем $\sigma_1\geqslant\sigma_2$ вместо $\sigma_2\leqslant\sigma_1$.

Точка x называется *пределом направленности* $S=\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$, если для каждой окрестности U точки x существует такое $\sigma_0\in\Sigma$, что $x_\sigma\in U$ для любого $\sigma\geqslant\sigma_0$. В этом случае говорят, что направленность S *сходится* к x. Направленность может сходиться, вообще говоря, ко многим точкам. Множество всех пределов направленности $S=\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$ обозначается $\lim S$ или $\lim\limits_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$. Когда направленность $S=\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$ имеет ровно один предел x, пишут $x=\lim S=\lim\limits_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$.

Точка x называется *предельной точкой направленности* $S=\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$, если для каждой окрестности U точки x и каждого $\sigma_0\in\Sigma$ существует такое $\sigma\geqslant\sigma_0$, что $x_\sigma\in U$.

Говорят, что направленность $S'=\{x_{\sigma'}, \sigma'\in\Sigma'\}$ *тоньше*, чем направленность $S=\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$, если существует отображение $\varphi\colon \Sigma'\to\Sigma$, обладающее следующими свойствами:

(FN 1) *Для любого* $\sigma_0\in\Sigma$ *найдется такое* $\sigma'\in\Sigma'$, *что* $\varphi(\sigma')\geqslant\sigma$ *при* $\sigma'\geqslant\sigma_0$.

(FN 2) $x_{\varphi(\sigma')}=x_{\sigma'}$ *для* $\sigma'\in\Sigma'$.

Легко показать, что каждая неубывающая функция φ из Σ' в Σ, такая, что $\varphi(\Sigma')$ конфинальна в Σ, обладает свойством (FN1).

1.6.1. Предложение. *Если x — предельная точка направленности S', более тонкой, чем S, то x — предельная точка направленности S. Если x — предел направленности S, то x — также предел любой направленности S', более тонкой, чем S. Если x —*

предельная точка направленности S, то x — предел некоторой направленности S', более тонкой, чем S.

Доказательство. Пусть x — предельная точка направленности $S' = \{x_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma'\}$, более тонкой, чем $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$, и пусть φ — функция из Σ' в Σ, обладающая свойствами (FN1) и (FN2). Пусть, далее, U — произвольная окрестность точки x и $\sigma_0 \in \Sigma$. По условию найдется такое $\sigma_0' \in \Sigma$, что $\varphi(\sigma') \geqslant \sigma_0$ при $\sigma' \geqslant \sigma_0'$. По определению предельной точки существует такое $\sigma'' \geqslant \sigma_0'$, что $x_{\sigma''} \in U$. Таким образом, $x_{\varphi(\sigma'')} = x_{\sigma''} \in U$ и $\varphi(\sigma'') \geqslant \sigma_0$, т. е. x — предельная точка направленности S.

Предположим теперь, что x — предел направленности $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$. Пусть направленность $S' = \{x_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma'\}$ тоньше, чем S, и пусть функция φ из Σ' в Σ обладает свойствами (FN1) и (FN2). Пусть, далее, U — произвольная окрестность точки x. Существуют такое $\sigma_0 \in \Sigma$, что $x_\sigma \in U$ для каждого $\sigma \geqslant \sigma_0$, и такое $\sigma_0' \in \Sigma'$, что $\varphi(\sigma') \geqslant \sigma_0$ при $\sigma' \geqslant \sigma_0'$. Очевидно, что при $\sigma' \geqslant \sigma_0'$ мы имеем $x_{\sigma'} \in U$, т. е. x является пределом направленности S'.

Пусть x — предельная точка направленности $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$. Рассмотрим множество Σ', состоящее из всех упорядоченных пар (σ, U), где $\sigma \in \Sigma$, U — окрестность точки x и $x_\sigma \in U$. Положим по определению $(\sigma_1, U_1) \leqslant (\sigma_2, U_2)$, если $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ и $U_2 \subset U_1$. Легко показать, что Σ' направлено отношением $\leqslant$. Направленность $xS' = \{_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma'\}$, где $x_{\sigma'} = x_\sigma$ для $\sigma' = (\sigma, U)$, тоньше, чем Σ, так как функция φ, определенная равенством $\varphi((\sigma, U)) = \sigma$, является неубывающим отображением Σ' в Σ. Для каждой окрестности U точки x существует такое $\sigma \in \Sigma$, что $x_\sigma \in U$. Так как для $\sigma' \geqslant (\sigma, U) \in \Sigma'$ мы имеем $x_{\sigma'} \in U$, то x — предел направленности S'. ∎

1.6.2. Пример. Пусть Σ — множество всех отрицательных рациональных чисел, направленное отношением $\leqslant$, и пусть $x_r = r$ для любого $r \in \Sigma$. Очевидно, что $S = \{x_r, r \in \Sigma\}$ — направленность на вещественной прямой R, сходящаяся к 0. Заметим, что 0 — единственный предел направленности S и что множество, состоящее из всех элементов Σ и предела направленности S, не замкнуто в R. Пусть Σ' — множество всех положительных целых чисел, направленное отношением $\leqslant$, и пусть $\varphi(n) = -1/n \in \Sigma$ для $n \in \Sigma'$. Функция φ не убывает, а множество $\varphi(\Sigma')$ конфинально в Σ. Направленность $S' = \{x_n, n \in \Sigma'\}$, где $x_n = -1/n$, тоньше, чем направленность S. В силу 1.6.1, направленность S' сходится к 0. ∎

1.6.3. Предложение. *Точка x принадлежит $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда существует направленность, состоящая из элементов A и сходящаяся к x.*

Доказательство. Из существования такой направленности очевидным образом следует включение $x \in \bar{A}$. Пусть теперь $x \in \bar{A}$. Обозначим через $\mathcal{U}$ множество всех окрестностей точки x, направленное по включению $\supset$, т. е. $U_1 \leqslant U_2$, если $U_1 \supset U_2$. Легко показать, что $x \in \lim\limits_{U \in \mathcal{U}} x_U$, где x_U — произвольная точка множества $A \cap U$. ∎

1.6.4. Следствие. *Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда вместе со всякой направленностью оно содержит все ее пределы.* ∎

1.6.5. Следствие. *Точка x принадлежит множеству A^{d} в том и только том случае, если существует направленность $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$, сходящаяся к x и такая, что $x_\sigma \in A$ и $x_\sigma \neq x$ для каждого $\sigma \in \Sigma$.* ∎

Направленности обладают многими свойствами, аналогичными свойствам последовательностей. Именно по этой причине направленности часто оказываются удобным средством для изучения общих топологических пространств. Читатель наверняка заметил, что мы уже установили для направленностей аналоги основных свойств последовательностей. В них роль подпоследовательностей играют более тонкие направленности. Многие топологические понятия можно охарактеризовать в терминах направленностей. Кроме того, можно вводить топологию на множестве, задавая класс сходящихся направленностей (см. задачу 1.7.21). Покажем теперь, как при помощи направленностей охарактеризовать непрерывные отображения и хаусдорфовы пространства.

1.6.6. Предложение. *Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно в том и только том случае, когда*

$$f(\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma) \subset \lim_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma)$$

для любой направленности $\{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ в пространстве X.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ и $x \in \lim\limits_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$. Выберем произвольную окрестность V точки $f(x)$. В силу 1.4.1, существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$. Так как $x \in \lim\limits_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$, то найдется такое $\sigma_0 \in \Sigma$, что $x_\sigma \in U$ для любых $\sigma \geqslant \sigma_0$. Отсюда следует, что $f(x_\sigma) \in V$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$. Таким образом, $f(x) \in \lim\limits_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma)$, откуда вытекает включение

$$f(\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma) \subset \lim_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma).$$

Обратно, пусть отображение f удовлетворяет условиям нашего предложения. Чтобы доказать, что f непрерывно, достаточно (опять в силу 1.4.1) показать, что $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset X$. Но это вытекает из предложения 1.6.3. ∎

1.6.7. Предложение. *Топологическое пространство X хаусдорфово в том и только том случае, если любая направленность в X имеет не более одного предела.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство. Пусть, далее, $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ — направленность в X и $x_1, \quad x_2 \in \lim\limits_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$. Выберем произвольные окрестности U_1, U_2 соответственно точек x_1, x_2. Для $i = 1, 2$ существуют такие $\sigma_i \in \Sigma$, что $x_\sigma \in U_i$ для любого $\sigma \geqslant \sigma_i$. Так как Σ направлено, то $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $x_1 = x_2$, т. е. S имеет не более одного предела.

Обратно, пусть X не является хаусдорфовым пространством. Это означает, что найдутся две такие точки x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$, что любая окрестность U_1 точки x_1 пересекается с любой окрестностью U_2 точки x_2: $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Множество Σ, состоящее из всех пересечений $U_1 \cap U_2$, направлено по включению $\supset$. Легко показать, что $x_1, x_2 \in \lim\limits_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$, где x_σ — произвольная точка элемента $\sigma = U_1 \cap U_2$. ∎

Сходимость в общих топологических пространствах может быть описана также при помощи фильтров. При изложении теории фильтров мы ограничимся формулировкой основных определений и аналогов предложений, приведенных выше для направленностей. Кроме того, мы кратко покажем, как установить эквивалентность двух этих способов описания сходимости в топологических пространствах.

Пусть $\mathcal{R}$ — семейство множеств, которое вместе с любыми множествами A и B содержит их пересечение $A \cap B$. Под *фильтром в* $\mathcal{R}$ мы понимаем непустое подсемейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(F1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

(F2) *Если* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, *то* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

(F3) *Если* $A \in \mathcal{F}$ *и* $A \subset A_1 \in \mathcal{R}$, *то* $A_1 \in \mathcal{F}$.

Фильтр $\mathcal{F}$ в $\mathcal{R}$ есть *максимальный фильтр*, или *ультрафильтр, в* $\mathcal{R}$, если для любого фильтра $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{R}$, содержащего $\mathcal{F}$, мы имеем $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

База фильтра в $\mathcal{R}$ есть непустое семейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}$, такое, что $\varnothing \notin \mathcal{G}$ и

(FB) *если* A_1, $A_2 \in \mathcal{G}$, *то существует такое* $A_3 \in \mathcal{G}$, *что* $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Легко видеть, что для любой базы фильтра $\mathcal{G}$ в $\mathcal{R}$ семейство

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}}=\{A\in\mathcal{R}\colon \text{существует такое } B\in\mathcal{G}, \text{ что } B\subset A\}$$

есть фильтр в $\mathcal{R}$.

Под *фильтром* (*базой фильтра*) *в топологическом пространстве* X мы понимаем фильтр (базу фильтра) в семействе всех подмножеств пространства X. В этом параграфе мы будем рассматривать только фильтры и базы фильтров в топологических пространствах; мы будем называть их просто фильтрами и базами фильтров.

Точка x называется *пределом фильтра* $\mathcal{F}$, если каждая ее окрестность есть элемент $\mathcal{F}$. В этом случае говорят, что фильтр $\mathcal{F}$ *сходится* к точке x, и пишут $x\in\lim\mathcal{F}$. Точка x называется *пределом базы фильтра* $\mathcal{G}$, если $x\in\lim\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. В этом случае говорят, что база фильтра $\mathcal{G}$ *сходится* к x, и пишут $x\in\lim\mathcal{G}$. Очевидно, что $x\in\lim\mathcal{G}$ в том и только том случае, если любая окрестность точки x содержит элемент $\mathcal{G}$.

Точка x называется *предельной точкой фильтра* $\mathcal{F}$ (*базы фильтра* $\mathcal{G}$), если она принадлежит замыканию каждого элемента из $\mathcal{F}$ (из $\mathcal{G}$). Очевидно, что x — предельная точка фильтра $\mathcal{F}$ (базы фильтра $\mathcal{G}$) в том и только том случае, если любая ее окрестность пересекает все элементы из $\mathcal{F}$ (из $\mathcal{G}$). Отсюда, в частности, следует, что каждая предельная точка некоторого ультрафильтра есть предел этого ультрафильтра.

Говорят, что фильтр $\mathcal{F}'$ *тоньше*, чем фильтр $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}'\supset\mathcal{F}$.

1.6.8. Предложение. *Пусть фильтр $\mathcal{F}'$ тоньше, чем фильтр $\mathcal{F}$. Тогда каждая предельная точка фильтра $\mathcal{F}'$ является предельной точкой фильтра $\mathcal{F}$, а каждый предел фильтра $\mathcal{F}$ является пределом фильтра $\mathcal{F}'$. Если x — предельная точка фильтра $\mathcal{F}$, то x есть предел некоторого фильтра $\mathcal{F}'$, более тонкого, чем $\mathcal{F}$.* ∎

1.6.9. Предложение. *Точка x принадлежит $\overline{A}$ в том и только том случае, если существует база фильтра, состоящая из подмножеств A и сходящаяся к точке x.* ∎

1.6.10. Предложение. *Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно в том и только том случае, если для каждой базы фильтра $\mathcal{G}$ в пространстве X и базы фильтра $f(\mathcal{G})=\{f(A)\colon A\in\mathcal{G}\}$ в пространстве Y мы имеем*

$$f(\lim\mathcal{G})\subset\lim f(\mathcal{G}).\ ∎$$

1.6.11. Предложение. *Топологическое пространство X хаусдорфово в том и только том случае, когда любой фильтр в X имеет не более одного предела.* ∎

Установим теперь взаимно однозначное соответствие между направленностями и фильтрами в топологическом пространстве.

1.6.12. Теорема. *Пусть $S=\{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ — направленность в топологическом пространстве X. Семейство $\mathscr{F}(S)$, состоящее из всех множеств $A \subset X$, удовлетворяющих условию: существует такое $\sigma_0 \in \Sigma$, что $x_\sigma \in A$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$, является фильтром в пространстве X. При этом*

$$\lim \mathscr{F}(S) = \lim S.$$

Если направленность S' тоньше, чем S, то фильтр $\mathscr{F}(S')$ тоньше, чем $\mathscr{F}(S)$. ∎

1.6.13. Теорема. *Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в топологическом пространстве X. Обозначим через Σ множество всех пар (x, A), где $x \in A \in \mathscr{F}$, и положим $(x_1, A_1) \leqslant (x_2, A_2)$, если $A_2 \subset A_1$. Множество Σ направлено отношением $\leqslant$, и для направленности $S(\mathscr{F}) = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$, где $x_\sigma = x$ для $\sigma = (x, A) \in \Sigma$, мы имеем $\mathscr{F} = \mathscr{F}(S(\mathscr{F}))$ и*

$$\lim S(\mathscr{F}) = \lim \mathscr{F}. \ ∎$$

Выше мы уже отмечали, что понятие направленности — это модификация понятия последовательности, приспособленная для изучения проблем сходимости в общих топологических пространствах. Необходимость модифицировать понятие последовательности возникла потому, что существуют топологические пространства, топология которых не может быть полностью описана в терминах последовательностей, в противоположность, например, вещественной прямой, где замкнутые множества можно охарактеризовать как множества, которые вместе со всякой сходящейся последовательностью содержат ее предел. Возникает вопрос, в каких топологических пространствах для описания топологии достаточно последовательностей. Вопрос поставлен не совсем точно, и мы увидим, что на него можно ответить двумя различными способами — мы определим два класса пространств, естественных в этом контексте. Оба этих класса более широкие, чем пространства с первой аксиомой счетности.

Для начала сделаем несколько простых наблюдений. Последовательность $\{x_i\}$ в топологическом пространстве X очевидным образом является направленностью, определенной на множестве N положительных целых чисел, направленном отношением $\leqslant$. Таким образом, для последовательностей определены понятия предела и предельной точки, и мы знаем, когда последовательность сходится к точке. Множество всех пределов последовательности $\{x_i\}$ обозначается $\lim x_i$, и, когда последовательность имеет ровно один предел x, мы пишем $x = \lim x_i$. Каждая подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$ последовательности $\{x_i\}$ есть направленность, более тонкая, чем $\{x_i\}$. Действительно, функция φ, определенная равенством $\varphi(i) = k_i$, не убывает, а множество

$\varphi(N)$ конфинально множеству N. Из предложения 1.6.1 следует, что для каждой подпоследовательности $\{x_{k_i}\}$ последовательности $\{x_i\}$ если $x \in \lim x_i$, то $x \in \lim x_{k_i}$, и что любая предельная точка для $\{x_{k_i}\}$ является предельной точкой для $\{x_i\}$.

Теперь определим два класса пространств, о которых мы упомянули выше. Топологическое пространство X называется *секвенциальным пространством*, если множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда вместе со всякой последовательностью оно содержит все ее пределы. Топологическое пространство X называется *пространством Фреше — Урысона*, если для любого $A \subset X$ и любого $x \in \bar{A}$ существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек множества A, сходящаяся к x.

1.6.14. Теорема. *Каждое пространство с первой аксиомой счетности есть пространство Фреше — Урысона, а каждое пространство Фреше — Урысона есть секвенциальное пространство.*

Доказательство. Пусть пространство X имеет счетную базу $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ в точке x, и пусть $x \in \bar{A}$. Выберем для каждого $i = 1, 2, \ldots$ точку $x_i \in A \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_i$. Мы получим последовательность $\{x_i\}$ точек множества A, сходящуюся к x. Следовательно, каждое пространство с первой аксиомой счетности является пространством Фреше — Урысона. Вторая часть теоремы очевидна.

1.6.15. Предложение. *Отображение f секвенциального пространства X в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда $f(\lim x_i) \subset \lim f(x_i)$ для любой последовательности $\{x_i\}$ в пространстве X.*

Доказательство. Необходимость условия следует из предложения 1.6.6.

Мы покажем, что если f удовлетворяет условию теоремы, то f непрерывно. Пусть B — произвольное замкнутое подмножество в Y. Выберем некоторую последовательность x_i точек множества $f^{-1}(B)$ и точку $x \in \lim x_i$. Имеем $f(x) \in \lim f(x_i) \subset B$. Следовательно, $x \in f^{-1}(B)$ и $f^{-1}(B)$ замкнуто. ∎

1.6.16. Предложение. *Если любая последовательность в топологическом пространстве X имеет не более одного предела, то X есть T_1-пространство. Если, кроме того, для X выполнена первая аксиома счетности, то X — хаусдорфово пространство.*

Доказательство. Если $y \in \overline{\{x\}}$, то любая окрестность точки y содержит точку x и $y \in \lim x_i$, где $x_i = x$ для $i = 1, 2, \ldots$. Так как и $x \in \lim x_i$, а каждая последовательность имеет не более одного предела, то $y = x$, и потому $\{x\}$ — замкнутое множество. Доказательство второй части предложения аналогично доказательству второй части 1.6.7. ∎

Из 1.6.16 и 1.6.7 получаем следующее утверждение.

1.6.17. Предложение. *Пространство X с первой аксиомой счетности хаусдорфово тогда и только тогда, когда любая последовательность в нем имеет не более одного предела.* ∎

1.6.18. Пример. Пространство Y, определенное в примере 1.4.17, представляет собой пространство Фреше — Урысона, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности. В самом деле, если $y \in \bar{A}$ для некоторого $A \subset Y$ и $y \neq y_0$ или $y = y_0$ и $y_0 \in A$, то существует последовательность $y_1, y_2, \ldots$ точек множества A, сходящаяся к y. Допустим, что $y \in \bar{A} \setminus A$ и $y = y_0$. Отметим, что существует целое положительное k, такое, что A содержит последовательность $\{y_i\}$, сходящуюся к k в R. Противное означало бы, что любое положительное целое i имеет окрестность $U_i \subset R$, не пересекающуюся с A. Отсюда следовало бы, что $\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \setminus N\right] \cup \{y_0\}$ — окрестность точки y_0 в Y, которая не пересекается с A, что противоречит предположению $y_0 \in \bar{A}$. Из определения топологии в Y вытекает, что последовательность $\{y_i\}$, сходящаяся к $k \in N$ в R, сходится к y_0 в Y. ∎

1.6.19. Пример. Определим теперь секвенциальное пространство, не являющееся пространством Фреше — Урысона. Пусть $X = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i = \{1/i\} \cup \bigcup_{j=i^2}^{\infty} \left\{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right\}$. Легко показать, что $X_i \cap X_k = \varnothing$ при $i \neq k$. Топология на X порождается следующей системой окрестностей. Все точки $1/i + 1/j$ — изолированные точки пространства X, т. е. $\mathscr{B}(x) = \{\{x\}\}$ для любой точки x такого вида. Для точек x вида $1/i$ возьмем в качестве $\mathscr{B}(x)$ семейство всех множеств $X_i \setminus \bigcup_{j=i^2}^{k} \left\{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right\}$ для $k = i^2$, $i^2 + 1, \ldots$. Наконец, в качестве элементов семейства $\mathscr{B}(0)$ возьмем все множества, получаемые из X выбрасыванием конечного числа членов X_i и конечного числа точек вида $\{1/i + 1/j\}$ во всех оставшихся X_i. Легко показать, что совокупность $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ обладает свойствами (BP1) — (BP4), и, значит, X — хаусдорфово пространство. Так как все элементы $\bigcup_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ являются открыто-замкнутыми множествами пространства X, то X регулярно, а из 1.5.16 вытекает, что X совершенно нормально.

Легко заметить, что точка 0 принадлежит замыканию множества $X \setminus \{0, 1, 1/2, \ldots\}$, но в этом множестве нет последовательности, сходящейся к нулю; таким образом, X не является пространством Фреше — Урысона. Заметим еще, что X — счетное пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности.

Покажем теперь, что X — секвенциальное пространство, т. е. что каждое множество $A \subset X$, которое вместе со всякой сходящейся последовательностью содержит ее предел, замкнуто в X. Пусть $x \in \bar{A}$. Если $x \neq 0$, то $\mathscr{B}(x)$ — счетная база в x и A содержит последовательность, сходящуюся к x (ср. с доказательством 1.6.14). Теперь рассмотрим случай $x = 0$. Пусть $0 \in \bar{A} \setminus A$. Существует подпоследовательность $x_1, x_2, \ldots$ последовательности $1, 1/2, 1/3, \ldots$, такая, что каждая окрестность любой точки x_i пересекает A, так как в противном случае можно было бы доказать, что существует окрестность нуля, не пересекающаяся с A. Отсюда следует, что A содержит все элементы последовательности $x_1, x_2, \ldots$, и так как эта последовательность сходится к нулю, то $0 \in A$ вопреки предположению. ∎

1.6.20. Пример. Модифицируя пространство X предыдущего примера, определим счетное совершенно нормальное пространство, не являющееся секвенциальным. Достаточно рассмотреть $Y = X \setminus \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ и взять в качестве открытых множеств все пересечения $Y \cap U$, где U открыто в X. Легко показать, что сходящиеся последовательности в Y суть «почти константы». Таким образом, множество $Y \setminus \{0\}$ вместе с любой сходящейся последовательностью содержит и ее предел. Так как $Y \setminus \{0\}$ не замкнуто, то Y не является секвенциальным пространством. Чтобы убедиться, что Y совершенно нормально, можно рассуждать так же, как в 1.6.19. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Направленности введены Мором и Смитом [1922]. Сходимость в общих топологических пространствах была описана в терминах направленностей Биркгофом [1937], однако его теория была сложной и недостаточно общей, так как он пользовался неподходящим аналогом понятия подпоследовательности. Понятие более тонкой направленности определено в книге Мора [1939]. Описание сходимости в общих топологических пространствах в терминах направленностей дано Келли [1950]. Использование фильтров при описании сходимости встречается у Картана [1937] и [1937а]; дальнейшее развитие оно получило в работах Бурбаки [1940] (сами фильтры впервые появились у Рисса [1908]). На эквивалентность двух этих теорий указали Бартл [1955], а также Брунс и Шмидт [1955]. Секвенциальные пространства и пространства Фреше — Урысона были широко известны почти со времени зарождения общей топологии, но впервые подверглись серьезному исследованию в работах Франклина [1965] и [1967]. Пример 6.1.19 заимствован у Франклина [1965]. Пример 6.1.20 построен Аренсом [1950]. Первый пример нормального счетного пространства, не имеющего счетной базы в одной из своих точек, дан Урысоном [1925]. Нормальное счетное пространство, не имеющее счетной базы ни в одной из своих точек, построено Новаком [1937] (пример такого пространства см. в 2.3.37 или упр. 2.3.E).

УПРАЖНЕНИЯ

1.6.A. Покажите, что точка x есть предельная точка направленности $S=\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$ в том и только том случае, если $x\in \in\bigcap_{\sigma_0\in\Sigma}\overline{\{x_\sigma : \sigma\geqslant\sigma_0\}}$.

1.6.B. Пусть Ξ — направленное множество, $\xi\in\Xi$, X — топологическое пространство и $S_\xi=\{x_\sigma^{(\xi)}, \sigma\in\Sigma_\xi\}$ — направленность в пространстве X, и пусть $x_\xi\in\lim S_\xi$. Далее, пусть f_0, $f_1:\Xi\to \to\bigcup_{\xi\in\Xi}\Sigma_\xi$. Покажите, что, полагая по определению $(\xi_0, f_0)\leqslant \leqslant(\xi_1, f_1)$ тогда и только тогда, когда $\xi_0\leqslant\xi_1$ и $f_0(\xi)\leqslant f_1(\xi)$ для любого $\xi\in\Xi$, мы превратим произведение $\Sigma=\Xi\times\prod_{\xi\in\Xi}\Sigma_\xi$ в направленное множество, и если $x\in\lim_{\xi\in\Xi} x_\xi$, то $x\in\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$, где $x_\sigma= =x_{f(\xi)}^{(\xi)}$ для $\sigma=(\xi, f)\in\Sigma$.

1.6.C. Установите, что для любой направленности $S= =\{x_\sigma, \sigma\in\Sigma\}$, где $|\Sigma|\leqslant\aleph_0$, существует последовательность $\{x_i\}$, более тонкая, чем S.

1.6.D. Докажите, что в пространстве Фреше — Урысона X для любой предельной точки x последовательности $\{x_i\}$ в $\{x_i\}$ найдется подпоследовательность, сходящаяся к x. Покажите, что требование, чтобы X было пространством Фреше — Урысона, нельзя заменить предположением секвенциальности пространства X.

1.6.E. Приведите пример нехаусдорфова пространства Фреше — Урысона, в котором каждая последовательность имеет не более одного предела.

Указание. Добавьте точку к пространству, описанному в 1.6.18.

1.6.F. Покажите, что секвенциальное пространство X есть пространство Фреше — Урысона в том и только том случае, если оператор секвенциального замыкания, который каждому множеству $A\subset X$ ставит в соответствие множество всех пределов содержащихся в нем последовательностей, обладает свойствами (CO1)—(CO4). Покажите, что предположение о секвенциальности пространства X нельзя опустить.

1.7. ЗАДАЧИ

Замыкание и дополнение дают только 14 различных множеств

1.7.1 (Куратовский [1922a]). Докажите, что, чередуя операторы замыкания и взятия дополнения к множеству A в топологическом пространстве X, можно получить не более 14 различных множеств.

Указание. Докажите сначала, что $A^{-\prime-\prime-\prime-} = A^{-\prime-}$, где $A^{-} = \bar{A}$ и $A' = X \setminus A$.

Левая и правая топологии на упорядоченном множестве

1.7.2. Пусть X — множество, упорядоченное отношением $\leqslant$; положим $L(x) = \{y \in X\colon\ y \leqslant x\}$ для любого элемента $x \in X$. *Левая топология, индуцированная на X упорядочением* $\leqslant$, есть топология на X, порожденная системой окрестностей $\{\{L(x)\}\}_{x \in X}$.

(a) Покажите, что пересечение любого семейства открытых множеств в X в этой топологии есть открытое множество.

(b) Установите, что X есть T_0-пространство.

(c) Охарактеризуйте точки $x \in X$, для которых множество $\{x\}$ замкнуто, открыто и открыто-замкнуто.

(d) Опишите замыкание $\overline{\{x\}}$.

(e) Определите аналогичным образом *правую топологию на X, индуцированную упорядочением* $\leqslant$.

1.7.3. Пусть X — такое T_0-пространство, что пересечение любого семейства открытых в X множеств есть открытое множество. Докажите, что в X существует такое упорядочение $\leqslant$, что исходная топология на X совпадает с левой топологией, индуцированной отношением $\leqslant$.

Линейно упорядоченные пространства I (см. задачи 2.7.5, 3.12.3, 3.12.4, 3.12.12(f), 5.5.22, 6.3.2 и 8.5.13(j))

1.7.4. Пусть X — множество, линейно упорядоченное отношением $<$ и содержащее хотя бы два элемента. Для $a,\ b \in X$, удовлетворяющих отношению $a < b$, положим

$$(a, b) = \{x \in X\colon\ a < x < b\},$$

$$(\leftarrow, a) = \{x \in X\colon\ x < a\}, \qquad (a, \rightarrow) = \{x \in X\colon\ a < x\};$$

такие множества будем называть *интервалами* в X.

(a) Установите, что семейство $\mathscr{B}$ всех интервалов в линейно упорядоченном множестве X обладает свойствами (B1)—(B2). *Топология, индуцированная на X линейным упорядочением* $<$, есть топология, порожденная на X базой $\mathscr{B}$. *Линейно* *упорядоченное пространство* — это пространство, топология которого индуцирована некоторым линейным упорядочением. Покажите, что всякое линейно упорядоченное пространство есть T_1-пространство.

(b) Покажите, что для всякого дискретного семейства $\{\{x_s\}\}_{s\in S}$ одноточечных подмножеств линейно упорядоченного пространства X существует семейство $\{U_s\}_{s\in S}$ попарно непересекающихся открытых подмножеств пространства X, такое, что $x_s \in U_s$, $s \in S$.

(c) (Мансфилд [1957a]). Докажите, что для каждого дискретного семейства $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнутых подмножеств линейно упорядоченного пространства X существует семейство $\{U_s\}_{s\in S}$ попарно непересекающихся открытых подмножеств пространства X, такое, что $F_s \subset U_s$ для $s \in S$.

Указание (Стин [1970]). Покажите, что открытые множества

$$W_s = \bigcup\left\{(x, y) : x, y \in F_s \quad \text{и} \quad (x, y) \cap \bigcup_{s' \neq s} F_{s'} = \varnothing\right\}$$

образуют дискретное семейство и что $F_s \cap \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s'}} = \varnothing$. Покажите, что семейство всех одноточечных подмножеств объединения $\bigcup_{s\in S} (F_s \setminus W_s)$ дискретно, и примените (b).

(d) (Биркгоф [1940]). Докажите, что каждое линейно упорядоченное пространство нормально.

Указание. Примените (c).

(e) (Мейер [1969]). Покажите, что каждое линейно упорядоченное секвенциальное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Борелевские множества I (см. задачи 4.5.7, 4.5.8 и 7.4.22)

1.7.5. (a) Установите, что в совершенном пространстве X (ср. с упр. 1.5. H(a)) семейство борелевских множеств может быть определено как наименьшее семейство $\mathcal{S}$ подмножеств пространства X, удовлетворяющее условиям (BS1), (BS3) и (BS3′) или условиям (BS1′), (BS3) и (BS3′). Выведите из этого факта, что семейство борелевских множеств в совершенном пространстве X может быть представлено как объединение $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$ $\left(\text{обьединение } \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{G}_\alpha\right)$, где семейство $\mathcal{F}_0$ (семейство $\mathcal{G}_0$) состоит из всех замкнутых (открытых) множеств, семейство $\mathcal{F}_\alpha$ (семейство $\mathcal{G}_\alpha$) состоит из всех счетных объединений (пересечений) множеств из $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$ $\left(\text{из } \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{G}_\xi\right)$ для нечетных ординалов α и из всех счетных пересечений (объединений) множеств из $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$ $\left(\text{из } \bigcup\limits_{\xi<\alpha} \mathcal{G}_\xi\right)$ для четных ординалов α. Установите, что семейства $\mathcal{F}_\alpha$ и $\mathcal{G}_\alpha$ замкнуты относительно конечных объединений и пересечений, что $\mathcal{F}_\beta \cup \mathcal{G}_\beta \subset \mathcal{F}_\alpha \cap \mathcal{G}_\alpha$ при $\beta < \alpha$ и что $A \in \mathcal{F}_\alpha$ тогда и только тогда, когда $X \setminus A \in \mathcal{G}_\alpha$. Докажите, что семейство $\mathcal{F}_\alpha$ (семейство $\mathcal{G}_\alpha$) замкнуто относительно счетных объединений, если α нечетно (четно) (элементы этого семейства называются *множествами аддитивного класса* α *в* X), и замкнуто относительно счетных пересечений, если α четно (нечетно) (элементы этого семейства называются *множествами мультипликативного класса* α в X). Элементы семейства $\mathcal{F}_1$ (семейства $\mathcal{G}_1$) суть F_σ-множества (G_δ-множества). Элементы семейств $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, ... называются $F_{\sigma\delta}$-*множествами*, $F_{\sigma\delta\sigma}$-*множествами* и т. д., а элементы семейств $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, ... называются $G_{\delta\sigma}$-*множествами*, $G_{\delta\sigma\delta}$-*множествами* и т. д. Покажите, что если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение совершенного пространства X в совершенное пространство Y, то прообраз любого множества аддитивного или мультипликативного класса α в Y есть множество того же класса в X.

(b) (Лебег [1905]). Отображение f совершенного пространства X в совершенное пространство Y называется *измеримым класса* α, если прообраз любого замкнутого подмножества в Y есть множество мультипликативного класса α в X.

Покажите, что отображение f измеримо класса α тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества в Y есть множество аддитивного класса α в X, а если Y удовлетворяет второй аксиоме счетности, то тогда и только тогда, когда прообразы элементов фиксированной счетной базы пространства Y суть множества аддитивного класса α в пространстве X. Установите, что если X, Y и Z — совершенные пространства, f — измеримое отображение класса α из X в Y и $g\colon Y \to Z$ — непрерывное отображение, то композиция gf измерима класса α.

Нормально расположенные множества I (см. задачи 2.7.3 и 3.12.24)

1.7.6 (Смирнов [1951c]). Мы говорим, что множество A *нормально расположено* в пространстве X, если для любого открытого $U \subset X$, содержащего A, в X существует некоторое F_σ-множество H, такое, что $A \subset H \subset U$.

(a) Покажите, что если X — нормальное пространство, то в определении нормально расположенного множества можно считать, что H — открытое F_σ-множество.

(b) Установите, что пространство X совершенно тогда и только тогда, когда все его подмножества нормально расположены в нем.

Пространства Урысона и семирегулярные пространства I (см. задачи 2.7.6 и 6.3.17)

1.7.7 (Урысон [1925]). Топологическое пространство X называется *пространством Урысона*, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, существуют открытые множества U_1, U_2, такие, что $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ и $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \varnothing$.

Установите, что каждое регулярное пространство есть пространство Урысона и что каждое пространство Урысона есть хаусдорфово пространство. Приведите пример хаусдорфова пространства, не являющегося пространством Урысона, и пример пространства Урысона, не являющегося регулярным.

1.7.8. (a) (Стоун М. [1937]). Топологическое пространство X называется *семирегулярным пространством*, если X есть T_2-пространство, а семейство всех канонических открытых множеств есть база пространства X.

Покажите, что каждое регулярное пространство семирегулярно. Приведите пример хаусдорфова пространства, не являющегося семирегулярным, и пример семирегулярного пространства Урысона, не являющегося регулярным. Заметим, что существуют T_1-пространства, в которых канонические открытые множества образуют базу, но которые не являются T_2-пространствами.

(b) (Стоун М. [1937], Катетов [1947]). Пусть $(X, \mathcal{O})$ — хаусдорфово пространство. Постройте на X топологию $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, порожденную базой, состоящей из всех канонических множеств пространства $(X, \mathcal{O})$, и покажите, что пространство $(X, \mathcal{O}')$ семирегулярно и имеет те же канонические открытые множества, что и пространство $(X, \mathcal{O})$.

(c) (Урысон [1925]). Приведите пример пространства Урысона, не являющегося семирегулярным, и пример семирегулярного пространства, не являющегося пространством Урысона.

(d) Приведите пример счетного пространства Урысона X, такого, что ни в какой его точке $x \in X$ не существует базы, состоящей из канонических открытых множеств (ср. с задачей 6.3.17).

Указание. Постройте соответствующую топологию на подмножестве плоскости, состоящем из всех точек, обе координаты которых рациональны.

(e) Приведите пример счетного семирегулярного пространства Урысона X, такого, что любая его точка $x \in X$ имеет окрестность, которая не содержит замыкания никакой окрестности точки x.

Указание. Примените указание к части (d).

1.7.9. (a) Покажите, что ни свойство быть пространством Uryсона, ни семирегулярность не инвариантны при замкнутых отображениях с конечными прообразами точек.

(b) Покажите, что семирегулярность не инвариантна при открыто-замкнутых отображениях.

Замечание. Как показывает пример, упомянутый в замечании к упр. 1.5.L (b), свойство быть пространством Урысона не инвариантно при открыто-замкнутых отображениях.

Теорема Кантора — Бендиксона

1.7.10. Покажите, что если каждый элемент семейства $\mathscr{A}$ подмножеств пространства X плотен в себе, то и объединение $\bigcup\mathscr{A}$ плотно в себе. Покажите, что если $A \subset X$ плотно в себе, то и замыкание $\overline{A}$ плотно в себе. Выведите отсюда, что любое топологическое пространство может быть представлено как объединение двух непересекающихся множеств, одно из которых плотно в себе и замкнуто (такие множества называются *совершенными множествами*), а второе не содержит непустого плотного в себе подмножества (такие множества называются *разреженными множествами*).

Замечание. Не следует путать это понятие совершенного множества с понятием совершенного пространства, определенным в упр. 1.5 H (a).

1.7.11 (Хаусдорф [1914]; для подпространств евклидовых пространств — Линделёф [1903]). Точка x топологического пространства X называется *точкой конденсации* множества $A \subset X$, если любая ее окрестность содержит несчетное множество точек множества A. Множество всех точек конденсации множества A обозначается A^0.

Установите, что

$$A^0 \subset A^d, \quad A^0 = \overline{A}^0 \quad \text{и} \quad (A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0.$$

Покажите, что если A — подмножество некоторого пространства со второй аксиомой счетности, то $A \setminus A^0$ счетно и $(A^0)^0 = A^0$.

Выведите из предыдущего, что любое пространство со второй аксиомой счетности может быть представлено как объединение двух непересекающихся множеств, одно из которых совершенно, а второе счетно (это и есть *теорема Кантора — Бендиксона*).

Замечание. Кантор и Бендиксон доказали этот факт независимо в 1883 г. для подмножеств вещественной прямой.

Кардинальные функции I (см. задачи 2.7.9—2.7.11, 3.12.4, 3.12.7—3.12.11, 3.12.12(j) и 8.5.17)

1.7.12. *Кардинальная функция* — это функция f, приписывающая каждому топологическому пространству X некоторое кардинальное число $f(X)$ таким образом, что для любой пары гомеоморфных пространств X и Y имеет место равенство $f(X)=$

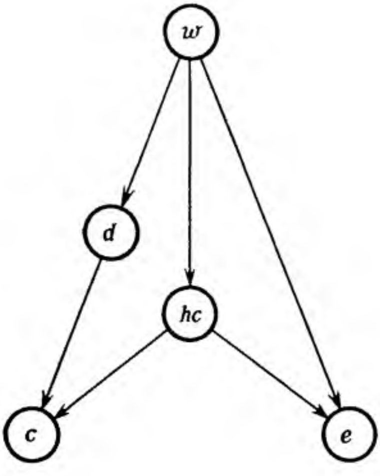
$=f(Y)$. Наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такое, что любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$, называется ***числом Суслина*** или ***клеточностью*** пространства X и обозначается $c(X)$. Если $c(X) = \aleph_0$, то говорят, что пространство X обладает ***свойством Суслина.***

Наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такое, что каждое подмножество пространства X, состоящее только из изолированных точек, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$, обозначается $hc(X)$. Объяснение символа $hc(X)$ и название этой кардинальной функции см. в задаче 2.7.9(b) (некоторые авторы пользуются символом $s(X)$ и называют это ***спредом*** (spread) пространства X).

Наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такое, что каждое замкнутое подмножество пространства X, состоящее только из изолированных точек, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$, называется ***экстентом*** (extent) пространства X и обозначается $e(X)$.

В целях упрощения во всех задачах о кардинальных функциях определенные в основном тексте книги кардинальные функции (до сих пор встречались вес, характер и плотность) будут переопределены в предположении только бесконечных значений: новое значение $f(X)$ мы полагаем равным $\aleph_0$, если старое значение было конечным, и равным старому значению, если это было некоторое бесконечное кардинальное число. (Иногда топологи говорят, что «в общей топологии нет конечных кардинальных чисел».)

(a) Докажите, что следующая диаграмма содержит все неравенства, которые имеют место между входящими в нее кардинальными функциями; стрелка из f в g означает, что $g(X) \leqslant f(X)$ для всякого топологического пространства X:



Докажите, что если Y — непрерывный образ пространства X, то $c(Y) \leqslant c(X)$ и $hc(Y) \leqslant hc(X)$; если, кроме того, X есть T_1-пространство, то и $e(Y) \leqslant e(X)$.

Замечание. Кардинальным функциям посвящены книги Юхаса [1971] и [1980].

1.7.13 (Архангельский и Пономарёв [1968], Архангельский [1970]). *Теснота точки* x в топологическом пространстве X есть наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ со следующим свойством: если $x \in \overline{C}$, то существует такое $C_0 \subset C$, что $|C_0| \leqslant \mathfrak{m}$ и $x \in \overline{C_0}$. Это кардинальное число обозначается $t(x, X)$. *Теснота топологического пространства* X есть точная верхняя грань всех чисел $t(x, X)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначается $t(X)$.

(a) Покажите, что для любого топологического пространства X и любой точки $x \in X$ имеют место неравенства $t(x, X) \leqslant \leqslant \chi(x, X)$ и $t(X) \leqslant \chi(X)$. Приведите пример совершенно нормального пространства X, для которого $t(X) < \chi(X)$.

(b) Докажите, что для любого топологического пространства X теснота $t(X)$ равна наименьшему кардинальному числу $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такому, что для любого $C \subset X$, не являющегося замкнутым, существует такое $C_0 \subset C$, что $|C_0| \leqslant \mathfrak{m}$ и $\overline{C}_0 \setminus C \neq \varnothing$.

Указание. Покажите, что $t(X) \leqslant \mathfrak{m}$ в том и только том случае, если для каждого $C \subset X$ мы имеем $\overline{C} = [C]_{\mathfrak{m}}$, где $[C]_{\mathfrak{m}} = = \bigcup \{\overline{M} : M \subset C$ и $|M| \leqslant \mathfrak{m}\}$.

(c) Покажите, что для каждого секвенциального пространства X мы имеем $t(X) = \aleph_0$.

Замечание. Пространства счетной тесноты были введены Р. К. Мором и Мрувкой [1964]; они появились также у Корсона [1961].

Полунепрерывные функции I (см. задачи 2.7.4, 3.12.22 (g) и 5.5.20)

1.7.14. Вещественная функция f, определенная на топологическом пространстве X, *полунепрерывна снизу* (*сверху*), если для любого $x \in X$ и любого вещественного числа r, удовлетворяющего неравенству $f(x) > r$ (неравенству $f(x) < r$), существует такая окрестность $U \subset X$ точки x, что $f(x') > r$ ($f(x') < r$) для любого $x' \in U$.

(a) Докажите, что функция f полунепрерывна снизу (сверху) в том и только том случае, если для любого вещественного числа r множество $\{x: f(x) \leqslant r\}$ (множество $\{x: f(x) \geqslant r\}$) замкнуто. Покажите, что функция одновременно полунепрерывна снизу и сверху в том и только том случае, если она непрерывна. Покажите, что если f и g полунепрерывны снизу (сверху), то $\min(f, g)$, $\max(f, g)$ и $f+g$ полунепрерывны снизу (сверху), а также $f\cdot g$, при условии что $f(x)\geqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$ для $x\in X$. Покажите, что функция $-f$ полунепрерывна снизу (сверху) в том и только том случае, если f полунепрерывна сверху (снизу). Докажите, что для любого семейства $\{f_s\}_{s\in S}$ полунепрерывных снизу (сверху) функций, обладающего тем свойством, что $\{f_s(x)\colon s\in S\}$ ограничено сверху (снизу) для любой точки $x\in X$, функция $\sup\limits_{s\in S} f_s$ $\left(\text{функция } \inf\limits_{s\in S} f_s\right)$, определенная формулой $[\sup\limits_{s\in S} f_s](x)=\sup\limits_{s\in S} f_s(x)$ (формулой $[\inf\limits_{s\in S} f_s](x)=$ $=\inf\limits_{s\in S} f_s(x)$), полунепрерывна снизу (сверху). Приведите пример последовательности $\{f_i\}$ непрерывных функций из I в себя, такой, что $\inf f_i$ не полунепрерывна снизу, а $\sup f_i$ не полунепрерывна сверху.

(b) (Форт [1955]). Докажите, что для каждой полунепрерывной снизу или сверху функции f, определенной на топологическом пространстве X, существует множество $G\subset X$, которое может быть представлено как пересечение счетного множества всюду плотных открытых подмножеств пространства X, такое, что f непрерывна в каждой точке G.

Указание. В случае полунепрерывной снизу функции f положите $A_r=\{x\colon f(x)>r\}$ и $G_r=A_r\cup\{X\setminus\bar{A}_r\}$ для любого рационального числа r. Пусть G — пересечение всех G_r.

Замечание. Для функций, определенных на вещественной прямой, понятие полунепрерывности ввел Бэр в 1899 г., и он же установил (а) и (b) в этом частном случае.

1.7.15. (а) (Бурбаки [1948]). Докажите, что T_1-пространство X вполне регулярно в том и только том случае, если для каждой полунепрерывной снизу (сверху) функции f на X, такой, что $f(x)\geqslant g(x)$ $(f(x)\leqslant g(x))$ для некоторой непрерывной функции $g\colon X\to R$ и любого $x\in X$, существует семейство непрерывных функций $\{f_s\}_{s\in S}$, такое, что $f=\sup\limits_{s\in S} f_s$ $(f=\inf\limits_{s\in S} f_s)$.

(b) (Тонг [1952] (заявлено в [1948]), Катетов [1951a] (исправлено в [1953]); для паракомпактных пространств Дьёдонне [1944]; для метрических пространств Хан [1917]). Докажите, что T_1-пространство X нормально в том и только том случае, когда для любой пары f, g вещественных функций на X, такой, что f полунепрерывна сверху, g полунепрерывна снизу и $f(x)\leqslant$ $\leqslant g(x)$ для любого $x\in X$, существует непрерывная функция $h\colon X\to R$, такая, что $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ для любого $x\in X$.

Указание (Тонг [1952]; ср. с задачей 2.7.2 (с)). Для начала покажите, что если f_i, $g_i\colon X\to I$ непрерывны для $i=1, 2, \ldots$ и $f_0=\inf f_i$, $g_0=\sup g_i$ удовлетворяют неравенству $f_0(x)\leqslant g_0(x)$

при каждом $x \in X$, то существует непрерывная функция $h: X \to I$, удовлетворяющая неравенству $f_0(x) \leqslant h(x) \leqslant g_0(x)$ для любого $x \in X$. С этой целью предположите (без ограничения общности), что $f_{i+1}(x) \leqslant f_i(x)$ и $g_{i+1}(x) \geqslant g_i(x)$ для любого $x \in X$, положите $k_i = \max\limits_{j \leqslant i} [\min(f_j, g_j)]$, $l_i = \max(k_{i-1}, f_i)$ и покажите, что $\sup k_i = \inf l_i$.

Возвращаясь к общему случаю, покажите, что достаточно рассмотреть функции f, g со значениями в $(0, 1)$. Затем для каждой пары положительных целых чисел j, i, $j < i$ положите

$$A_{j,i} = \{x\colon g(x) \leqslant j/i\} \quad \text{и} \quad B_{j,i} = \{x\colon f(x) \geqslant j/i + 1/2i\},$$

выберите непрерывные функции $f_{j,i}$, равные $j/i + 1/2i$ на $A_{j,i}$, 1 на $B_{j,i}$ и такие, что $f_{j,i}(x) \geqslant j/i + 1/2i$ для каждого $x \in X$. Установите, что для функции $f_i = \min\limits_{j<i} f_{j,i}$ и $x \in X$ имеет место либо неравенство $f_i(x) < g(x)$, либо $|f_i(x) - g(x)| < 3/2i$ и $f_i(x) \geqslant f(x)$. Покажите, что функция $f_0 = \inf f_i$ удовлетворяет условиям $f(x) \leqslant f_0(x) \leqslant g(x)$ для любого $x \in X$. Применяя этот результат к функциям $-g$ и $-f_0$, найдите $g_0 = \sup g_n$, удовлетворяющую условиям $f_0(x) \leqslant g_0(x) \leqslant g(x)$ для любого $x \in X$, и примените первую часть указания.

(c) (Тонг [1952]; для метрических пространств Хан [1917]; для вещественной прямой Бэр [1904]). Докажите, что T_1-пространство X совершенно нормально в том и только том случае, если для каждой полунепрерывной снизу (сверху) функции f, определенной на X, существует последовательность $\{f_i\}$ непрерывных вещественных функций на X, такая, что $f_i(x) \leqslant f_{i+1}(x)$ $(f_i(x) \geqslant f_{i+1}(x))$ для $i = 1, 2, \ldots, x \in X$, и что $f(x) = \lim f_i(x)$ при каждом $x \in X$.

Указание (Тонг [1952]). Докажите, что пространство X, обладающее указанными выше свойствами, удовлетворяет условию (iii) из 1.5.19. При построении последовательности $\{f_i\}$ для полунепрерывной снизу функции f рассмотрите сначала случай, когда f принимает только конечное число значений. Затем, предполагая, что $0 < f(x) < 1$, для любой пары целых чисел j, i, $0 \leqslant j < i$, постройте

$$C_{j,i} = \{x\colon j/i < f(x) \leqslant (j+1)/i\}$$

и для каждого $i = 1, 2, \ldots$ возьмите полунепрерывную снизу функцию g_i, равную j/i на $C_{j,i}$. Покажите, что $g_i(x) \leqslant f(x)$ для $x \in X$. Выберите для любого i последовательность $\{g_k^i\}$ непрерывных функций, такую, что $g_k^i(x) \leqslant g_{k+1}^i(x)$, $\lim g_k^i(x) = g_i(x)$ и $g_k^i(x) \geqslant 0$ для любого $x \in X$. Занумеруйте все функции g_k^i в последовательность $h_1, h_2, \ldots$, положите $k_i = \max\limits_{j \leqslant i} h_j$ и $k(x) =$

$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}k_i(x)$. Покажите, что $k(x)>0$ при $x\in X$ и что функции $f_i=\max(k,k_i)$ обладают требуемыми свойствами и принимают только положительные значения.

1.7.16 (Исивата [1967]; ср. с упр. 1.5.L (a)). Докажите, что если $f\colon X\to Y$ — открытое (замкнутое) отображение X на Y, то для каждого $g\colon X\to R$, ограниченного на всех прообразах точек при отображении f, формулы $g^*(y)=\sup\{g(x)\colon x\in f^{-1}(y)\}$ и $g_*(y)=\inf\{g(x)\colon x\in f^{-1}(y)\}$ определяют соответственно полунепрерывную снизу и сверху (сверху и снизу) функцию на Y.

Многозначные отображения I (см. задачи 2.7.21 и 3.12.27)

1.7.17 (Куратовский [1932] и [1963]). Отображение F, сопоставляющее каждой точке y топологического пространства Y замкнутое подмножество $F(y)$ топологического пространства X, *полунепрерывно снизу (сверху)*, если для любого открытого множества $U\subset X$ множество $\{y\colon F(y)\cap U\neq\varnothing\}$ (множество $\{y\colon F(y)\subset U\}$) открыто в Y.

(a) Заметим, что F полунепрерывно снизу (сверху) в том и только том случае, если для каждого замкнутого множества $K\subset X$ множество $\{y\colon F(y)\subset K\}$ (множество $\{y\colon F(y)\cap K\neq\varnothing\}$) замкнуто в Y. Установите, что отображение f топологического пространства Y в T_1-пространство X непрерывно в том и только том случае, если многозначное отображение $F(y)=\{f(y)\}$ полунепрерывно снизу или, что эквивалентно, сверху. Докажите, что отображение $f\colon X\to Y$ на T_1-пространство Y замкнуто (открыто) в том и только том случае, когда многозначное отображение $F(y)=f^{-1}(y)$ полунепрерывно сверху (снизу). Установите, что вещественная функция f, определенная на топологическом пространстве Y, полунепрерывна снизу (сверху) (см. 1.7.14) в том и только том случае, если многозначное отображение F, приписывающее точке $y\in Y$ замкнутое множество $F(y)=\{r\in R\colon r\leqslant f(y)\}\subset R$, полунепрерывно снизу (сверху).

(b) Покажите, что для любого семейства $\{F_s\}_{s\in S}$ полунепрерывных снизу многозначных отображений многозначное отображение $F=\overline{\bigcup_{s\in S}F_s}$, определенное формулой $F(y)=\overline{\bigcup_{s\in S}F_s(y)}$, полунепрерывно снизу. Установите, что если F_1, F_2 — два полунепрерывных сверху многозначных отображения, то их объединение $F=F_1\cup F_2$, определенное формулой $F(y)=F_1(y)\cup F_2(y)$, полунепрерывно сверху. Покажите, что для полунепрерывных снизу отображений аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

(c) Докажите, что если F_1, F_2 — два полунепрерывных сверху многозначных отображения пространства Y в семейство замкнутых подмножеств нормального пространства X, то их пересечение $F = F_1 \cap F_2$, определенное формулой $F(y) = F_1(y) \cap F_2(y)$, полунепрерывно сверху. Покажите, что аналогичное утверждение для счетных пересечений, вообще говоря, не имеет места, так же как и соответствующее утверждение для полунепрерывных снизу отображений.

Указание. Заметим, что $\{y\colon F(y) \subset U\} = \bigcup [\{y\colon F_1(y) \subset U_1\} \cap \cap \{y\colon F_2(y) \subset U_2\}]$, где объединение берется по всем парам U_1, U_2 открытых подмножеств пространства X, таким, что $U_1 \cap U_2 = U$.

Топологии, описываемые последовательностями

1.7.18 (Фреше [1906] и [1918], Урысон [1926a]). *$\mathscr{L}^*$-пространство* — это пара (X, λ), где X — некоторое множество, а λ — некоторая функция (называемая *оператором предела*), приписывающая некоторым последовательностям точек пространства X элемент пространства X (называемый *пределом* последовательности) таким образом, что выполнены следующие условия (мы пишем λx_i вместо $\lambda(\{x_i\})$ и говорим, что x_i *сходится* к x, если $\lambda x_i = x$):

(L1) *Если $x_i = x$ для $i = 1, 2, \ldots$, то $\lambda x_i = x$.*

(L2) *Если $\lambda x_i = x$, то $\lambda x_{k_i} = x$ для любой подпоследовательности $\{x_{k_i}\}$ последовательности $\{x_i\}$.*

(L3) *Если последовательность $\{x_i\}$ не сходится к x, то она содержит подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$, никакая подпоследовательность которой не сходится к x.*

(a) В $\mathscr{L}^*$-пространстве определяют оператор замыкания, полагая $x \in \bar{A}$ в том и только том случае, если A содержит последовательность, сходящуюся к x. Установите, что такой оператор замыкания обладает свойствами (CO1)—(CO3), но, вообще говоря, не обладает свойством (CO4).

(b) Покажите, что оператор замыкания, определенный в (a), обладает свойством (CO4) тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

(L4) *Если $\lambda x_i = x$ и $\lambda x_j^{(i)} = x_i$ для $i = 1, 2, \ldots$, то существуют такие последовательности положительных целых чисел $i_1, i_2, \ldots$ и $j_1, j_2, \ldots$, что $\lambda x_{j_k}^{(i_k)} = x$.*

$\mathscr{L}^*$-пространство X, удовлетворяющее условию (L4), называется *$\mathscr{S}^*$-пространством*. Топология, порожденная на X оператором замыкания, определенным в (a), называется *топологией Фреше*, индуцированной оператором предела. Установите, что любое $\mathscr{S}^*$-пространство с топологией Фреше является T_1-пространством.

(c) Докажите, что для последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек $\mathcal{S}^*$-пространства с топологией Фреше $x = \lim x_i$ тогда и только тогда, когда $\lambda x_i = x$, т. е. что сходимость апостериори эквивалентна сходимости априори.

1.7.19 (Кисынский [1960]). Покажите, что в любом $\mathcal{L}^*$-пространстве можно ввести топологию, взяв в качестве семейства замкнутых множеств все множества, содержащие вместе со всякой сходящейся последовательностью ее предел. Эта топология называется *секвенциальной топологией*, индуцированной оператором предела λ. Установите, что любое $\mathcal{L}^*$-пространство с секвенциальной топологией является T_1-пространством. Покажите, что в любом $\mathcal{S}^*$-пространстве секвенциальная топология и топология Фреше совпадают. Докажите, что для последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек некоторого $\mathcal{L}^*$-пространства с секвенциальной топологией $x = \lim x_i$ тогда и только тогда, когда $\lambda x_i = x$, т. е. что сходимость апостериори эквивалентна сходимости априори.

1.7.20. Докажите, что в топологическом пространстве X оператор предела λ, — такой, что (X, λ) есть $\mathcal{S}^*$-пространство ($\mathcal{L}^*$-пространство) и топология Фреше (секвенциальная топология), индуцированная λ, совпадает с исходной топологией пространства X, — может быть определен тогда и только тогда, когда X — пространство Фреше — Урысона (секвенциальное пространство), в котором любая последовательность имеет не более одного предела.

1.7.21 (Келли [1950]). Сформулируйте и докажите для направленностей аналоги условий (L1)—(L3) в 1.7.18. Определите оператор замыкания в множестве X, где классы сходящихся направленностей и их пределы выделены таким образом, что выполняются аналоги указанных условий, а также условие повторных пределов из упр. 1.6.B. Докажите, что всякая топология *порождается некоторым классом сходящихся направленностей*, т. е. может быть получена описанным выше способом.

Глава 2

ОПЕРАЦИИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой главе изучаются операции на топологических пространствах, т. е. методы построения новых топологических пространств из заданных. Шесть параграфов главы соответствуют шести исследуемым операциям. Из теорем об универсальности тихоновского куба для всех $T_{3^{1}/_{2}}$-пространств и александровского куба для всех T_0-пространств, которые будут доказаны в § 2.3, видно, что все пространства названных классов могут быть получены из очень простых пространств применением только двух операций. Данная глава является в некотором смысле сердцевиной всей книги: в последующих главах, определяя различные классы пространств, мы всегда будем испытывать их поведение под действием описанных здесь операций.

Параграф 2.1 посвящен подпространствам. Определив понятие подпространства, мы изучаем сужения и продолжения непрерывных отображений и функций; самым важным результатом в этом направлении является теорема Титце — Урысона. Далее обсуждается понятие наследственного топологического свойства. В заключение приводятся некоторые замечания о комбинациях отображений.

В § 2.2 рассмотрена операция суммы топологических пространств и аддитивность топологических свойств.

Самый длинный в этой главе § 2.3 посвящен произведениям топологических пространств. Определив на произведениях тихоновскую топологию и доказав несколько элементарных утверждений, мы обсуждаем мультипликативность топологических свойств. Затем мы переходим к изучению вложений пространств в произведения и доказываем две теоремы об упомянутых выше универсальных пространствах. Заключительная часть параграфа посвящена произведениям и диагональным произведениям отображений.

Факторпространства и факторные отображения обсуждаются в § 2.4.

В § 2.5 изучаются обратные спектры пространств, их предельные пространства и отображения.

Последний параграф посвящен пространствам отображений. Вводятся топология равномерной сходимости на множестве непрерывных вещественных функций и топология поточечной сходимости на множестве непрерывных отображений. Параграф завершается обсуждением приемлемых топологий на пространствах отображений. Та же тема рассматривается далее в § 3.4, где определяется другая топология на пространствах отображений и доказываются более глубокие результаты.

2.1. ПОДПРОСТРАНСТВА

Предположим, что заданы некоторое топологическое пространство X и множество $M \subset X$. Легко видеть, что семейство $\mathcal{O}$ всех множеств вида $M \cap U$, где U открыто в X, удовлетворяет условиям (O1)—(O3). Действительно, условие (O1) выполнено, так как $\varnothing = M \cap \varnothing$ и $M = M \cap X$, а из равенств

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2),$$

$$\bigcup_{s \in S} (M \cap U_s) = M \cap \bigcup_{s \in S} U_s$$

следует, что выполнены также и условия (O2), (O3).

Взяв семейство $\{M \cap U\colon U$ открыто в $X\}$ в качестве семейства открытых множеств в M, мы определяем на M топологию. Множество M с этой топологией называется *подпространством пространства* X, а сама топология называется *индуцированной топологией* или *топологией подпространства.*

2.1.1. Предложение. *Пусть X — топологическое пространство и M — его подпространство. Множество $A \subset M$ замкнуто в M тогда и только тогда, когда $A = M \cap F$, где F замкнуто в X. Замыкание $\tilde{A}$ множества $A \subset M$ в пространстве M и замыкание $\bar{A}$ множества A в пространстве X связаны равенством $\tilde{A} = \bar{A} \cap M$.*

Доказательство. Если $A = M \cap F$, где $F = \bar{F} \subset X$, то $M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$ и A замкнуто в M как дополнение к открытому множеству. Обратно, если A — замкнутое подмножество M, то $M \setminus A = M \cap U$, где U открыто в X. Значит,

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$

и $A = M \cap F$, где $F = X \setminus U$ замкнуто в X.

По определению оператора замыкания $\tilde{A}$ равно пересечению всех замкнутых подмножеств пространства M, содержащих A, т. е. всех множеств вида $M \cap F$, где $F = \bar{F}$ и $A \subset F$. Отсюда получаем равенство $\tilde{A} = M \cap \bar{A}$. ∎

2.1.2. Предложение. *Пусть M — подпространство пространства X и $L \subset M$; две определенные на L топологии — топология подпро-*

странства пространства M и топология подпространства пространства X — совпадают. ∎

Подпространство M пространства X называется его *замкнутым подпространством*, если множество M замкнуто в X. Если M — замкнутое подпространство пространства X, то множество $A \subset M$ замкнуто в M тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X, и, следовательно, $\tilde{A} = \bar{A}$ для каждого $A \subset M$. *Открытые подпространства* и *всюду плотные подпространства* определяются аналогично. Ясно, что если M — открытое (всюду плотное) подпространство пространства X, то множество $A \subset M$ открыто (всюду плотно) в M тогда и только тогда, когда оно открыто (всюду плотно) в X. В дальнейшем слова «подпространство» и «подмножество» употребляются взаимозаменяемым образом. Например, мы будем писать «сепарабельное подмножество», «компактное подмножество» и т. д., понимая под этим подмножество, которое наделено топологией подпространства и является в этой топологии сепарабельным, компактным и т. д.

Для каждого топологического пространства X и каждого его подпространства M формула $i_M(x) = x$ определяет отображение M в X. Так как $i_M^{-1}(U) = M \cap U$, это отображение непрерывно. Отображение i_M: $M \to X$ называется *вложением подпространства M в пространство X*. Легко проверить, что топология подпространства совпадает с топологией, порожденной отображением i_M множества M в топологическое пространство X. Вложение i_M замкнуто (открыто) в том и только том случае, если подпространство M замкнуто (открыто).

Для каждого отображения f: $X \to Y$ и каждого подпространства M пространства X композиция fi_M является непрерывным отображением пространства M в пространство Y. Это отображение называется *сужением отображения f на $M \subset X$* и обозначается $f|M$. Так как композиция замкнутых (открытых) отображений является замкнутым (открытым) отображением, то сужение замкнутого (открытого) отображения на замкнутое (открытое) множество $M \subset X$ замкнуто (открыто).

2.1.3. Предложение. *Если композиция gf непрерывных отображений f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ является замкнутым (открытым) отображением, то сужение $g|f(X)$: $f(X) \to Z$ замкнуто (открыто).*

Доказательство. Любое замкнутое (открытое) подмножество пространства $f(X)$ имеет вид $A \cap f(X)$, где A замкнуто (открыто) в Y. Так как прообраз $f^{-1}(A)$ замкнут (открыт) в X и gf — замкнутое (открытое) отображение, то множество

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнуто (открыто) в Z. ∎

Легко показать, что gf может быть замкнутым (открытым) отображением и тогда, когда ни g, ни f не замкнуто (не открыто).

Сужение отображения $f\colon X \to Y$ *на* $M \subset X$ *и* $f(M) \subset Y$ определяется как отображение подпространства M в множество $f(M)$, которое произвольной точке $x \in M$ ставит в соответствие точку $f(x)$ подпространства $f(M) \subset Y$. Это сужение обозначается через $f|M$; очевидно, $f|M$ непрерывно. Отображения $f|M$ и $f|M$ различаются областями значений: $f|M\colon M \to Y$ и $f|M\colon M \to f(M)$; в частности, $f|X\colon X \to f(X)$. Легко видеть, что если f и M замкнуты (открыты), то $f|M$ также замкнуто (открыто).

Третьей разновидностью сужения является *сужение отображения* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, определяемое как отображение подпространства $f^{-1}(L) \subset X$ в пространство $L \subset Y$, сопоставляющее точку $f(x) \in L$ точке $x \in f^{-1}(L)$. Это сужение обозначается f_L; очевидно, что f_L непрерывно, $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Читатель легко проверит следующие простые формулы, относящиеся к образам и прообразам при сужениях:

$$(f|M)(A) = f(A),\ A \subset M; \qquad (f|M)^{-1}(B) = M \cap f^{-1}(B),\ B \subset Y;$$

$$(f|M)(A) = f(A),\ A \subset M; \qquad (f|M)^{-1}(B) = M \cap f^{-1}(B),\ B \subset f(M);$$

$$f_L(A) = f(A),\ A \subset f^{-1}(L); \qquad f_L^{-1}(B) = f^{-1}(B),\ B \subset L.$$

2.1.4. Предложение. *Если* $f\colon X \to Y$ — *замкнутое* (*открытое*) *отображение, то для каждого подпространства* $L \subset Y$ *сужение* $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ *замкнуто* (*открыто*).

Доказательство. Для $A \subset X$ имеем

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

и наше утверждение вытекает из определения топологий на подпространствах $f^{-1}(L)$ и L. ∎

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфным вложением*, если оно является композицией гомеоморфизма и вложения, т. е. если существуют подпространство L пространства Y и гомеоморфизм $f'\colon X \to L$, такие, что $f = i_L f'$. Ясно, что тогда $L = f(X)$ и $f' = f|X$. Если для пространства X существует гомеоморфное вложение $f\colon X \to Y$ в пространство Y, то мы говорим, что X *вложимо* в Y.

Из предложения 2.1.2 следует, что композиция гомеоморфных вложений и сужения гомеоморфных вложений являются гомеоморфными вложениями. Легко видеть, что гомеоморфное вложение $f\colon X \to Y$ замкнуто (открыто) в том и только том случае, если $f(X)$ замкнуто (открыто) в Y.

2.1.5. Примеры. Интервал I, наделенный естественной топологией, является замкнутым подпространством вещественной прямой R, взятой с естественной топологией. *Естественная топология* любого интервала прямой R является индуцированной топологией. В дальнейшем под вещественной прямой или интервалом мы всегда будем понимать эти множества, наделенные естественной топологией. Легко проверить, что любые два замкнутых интервала, содержащих более одной точки, гомеоморфны. То же самое имеет место для любых двух открытых и для любых двух полуоткрытых интервалов.

Дискретное пространство мощности $\mathfrak{c}$ вложимо в плоскость Немыцкого L: оно гомеоморфно замкнутому подпространству L_1 пространства L. Дискретное пространство мощности $\aleph_0$ вложимо (тоже в качестве замкнутого подпространства) в вещественную прямую: оно гомеоморфно множеству N всех натуральных чисел с индуцированной топологией. В дальнейшем мы будем часто предполагать, что $D(\aleph_0)=N$. Вещественная прямая вложима в отрезок $J=[-1, 1]$: она гомеоморфна интервалу $(-1, 1)$, причем гомеоморфное вложение i: $R \to J$ может быть определено формулой $i(x)=x/(1+|x|)$. ∎

Мы называем топологическое свойство $\mathscr{P}$ *наследственным* (*наследственным по отношению к замкнутым подмножествам, открытым подмножествам и т. д.*), если $\mathscr{P}$ присуще каждому подпространству (каждому замкнутому подпространству, каждому открытому подпространству и т. д.) любого пространства X, обладающего свойством $\mathscr{P}$. Примерами наследственных свойств являются «вес $\leqslant \mathfrak{m}$» или «характер $\leqslant \mathfrak{m}$» и, в частности, выполнение второй или первой аксиомы счетности. Как показано в 2.1.5, сепарабельность не является наследственным свойством; однако легко проверить, что сепарабельность наследуется открытыми подмножествами. Если само свойство $\mathscr{P}$ не является наследственным, но каждое подпространство некоторого пространства X обладает свойством $\mathscr{P}$, то мы говорим, что X *наследственно обладает* свойством $\mathscr{P}$. В этом смысле будут употребляться в дальнейшем такие термины, как «наследственно сепарабельное пространство» и «наследственно нормальное пространство».

2.1.6. Теорема. *Любое подпространство T_i-пространства является T_i-пространством, $i \leqslant 3\frac{1}{2}$. Нормальность наследуется замкнутыми подмножествами. Совершенная нормальность является наследственным свойством.*

Доказательство. В случае T_1-пространств наша теорема следует непосредственно из 2.1.1. Тот факт, что совершенная нормальность является наследственным свойством, вытекает из

2.1.1 и равносильности условий (i) и (iii) в 1.5.19. Доказательства остальных пяти случаев подобны друг другу. В качестве примера мы докажем, что подпространство M регулярного пространства X является регулярным.

Как известно, M является T_1-пространством. Выберем некоторую точку $x \in M$ и замкнутое множество $A \subset M$, такое, что $x \notin A$. В силу 2.1.1, $A = M \cap \bar{A}$, так что $x \notin \bar{A}$. Тогда существуют открытые в X множества U_1, V_1, такие, что $x \in U_1$, $\bar{A} \subset V_1$ и $U_1 \cap V_1 = \varnothing$. Полагая $U = U_1 \cap M$ и $V = V_1 \cap M$, получаем открытые подмножества подпространства M, такие, что $x \in U$, $A \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Следовательно, пространство M регулярно. ∎

Как показывает приведенный ниже пример 2.3.36, нормальность не является наследственным свойством (ср. с упр. 2.1.E(b)).

Из предыдущей теоремы следует, что каждое совершенно нормальное пространство наследственно нормально. Обратное утверждение не имеет места: пространство $A(\mathfrak{m})$ не является совершенно нормальным для $\mathfrak{m} > \aleph_0$, однако оно наследственно нормально, ибо все его подпространства имеют вид $A(\mathfrak{n})$ или $D(\mathfrak{n})$ с $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$. Заметим также, что из 2.1.4 и 1.5.20 следует, что класс наследственно нормальных пространств инвариантен при замкнутых отображениях.

Приведем теперь две характеристики наследственно нормальных пространств. Сначала введем понятие отделенных множеств. Два множества A и B топологического пространства X *отделены*, если $A \cap \bar{B} = \varnothing$ и $\bar{A} \cap B = \varnothing$. Два непересекающихся множества отделены в том и только том случае, если ни одно из них не содержит точек накопления другого. В частности, любые два непересекающихся замкнутых множества отделены. Всякие два непересекающихся открытых множества также отделены. Если A, $B \subset X$ отделены и $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, то множества A_1, B_1 также отделены.

2.1.7. Теорема. *Для любого T_1-пространства X следующие условия равносильны*:

(i) *Пространство X наследственно нормально.*

(ii) *Каждое открытое подпространство пространства X нормально.*

(iii) *Для каждой пары отделенных множеств A, $B \subset X$ существуют открытые множества U, $V \subset X$, такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.*

Доказательство. Импликация (i)⇒(ii) очевидна. Покажем теперь, что (ii)⇒(iii). Пусть множества A, $B \subset X$ отделены. Положим $M = X \setminus (\bar{A} \cap \bar{B}) \subset X$. Очевидно, что A, $B \subset M$. Замыкания множеств A и B в M не пересекаются. Следовательно, в силу нормальности M, существуют открытые в M множества U,

V такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Так как M — открытое подпространство пространства X, то множества U и V открыты в X.

Для завершения доказательства осталось показать, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть M — произвольное подпространство пространства X и A, $B \subset M$ — пара непересекающихся замкнутых подмножеств в M. Очевидно, что A и B отделены в X; следовательно, существуют открытые множества U, $V \subset X$, такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Пересечения $M \cap U$ и $M \cap V$ открыты в M, не пересекаются и содержат соответственно A и B. ∎

Условие (iii) предыдущей теоремы показывает, что наследственная нормальность может быть поставлена в ряд аксиом отделимости; наследственно нормальные пространства иногда называют *T_5-пространствами*, а элементы более узкого класса совершенно нормальных пространств называют *T_6-пространствами.*

Пусть для отображения $f\colon M \to Y$, определенного на подпространстве M пространства X, существует отображение $F\colon X \to Y$, такое, что $F|M = f$. Тогда говорят, что f *непрерывно продолжается*, или, короче, *продолжается* на пространство X; отображение F называется *продолжением* отображения f на X. Не всякое непрерывное отображение, определенное на некотором подпространстве, имеет непрерывное продолжение на все пространство. Существование непрерывного продолжения скорее исключение, чем правило. Теоремы, дающие достаточные условия продолжимости непрерывных отображений или непрерывных вещественных функций, принадлежат к наиболее важным теоремам топологии и обычно достаточно трудны. Заметим, что лемма Урысона может быть переформулирована как теорема такого типа. В самом деле, лемма Урысона утверждает, что если какое-либо подпространство M нормального пространства X может быть представлено как объединение двух непересекающихся подмножеств A, B, замкнутых в X, то функция $f\colon M \to I$, определенная формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in A, \\ 1 & \text{при} \quad x \in B, \end{cases}$$

непрерывно продолжается на X.

Оказывается, имеет место значительно более общее утверждение:

2.1.8. Теорема Титце — Урысона. *Каждая непрерывная функция, заданная на замкнутом подпространстве некоторого нормального пространства X, со значениями в I или R непрерывно продолжается на X.*

Доказательство. Прежде всего докажем нашу теорему для функций из X в I. Для упрощения обозначений рассмотрим случай $f\colon M\to J$, где J — интервал $[-1, 1]$, гомеоморфный I.

Начнем с замечания, что для любого $f_0\colon M\to R$, удовлетворяющего условию $|f_0(x)|\leqslant c$ при всех $x\in M$, существует такое $g\colon X\to R$, что

$$(1)\qquad |g(x)|\leqslant c/3 \quad \text{при} \quad x\in X,$$

$$(2)\qquad |f_0(x)-g(x)|\leqslant 2c/3 \quad \text{при} \quad x\in M.$$

В самом деле, множества $A=f_0^{-1}([-c, -c/3])$ и $B=f_0^{-1}([c/3, c])$ не пересекаются и замкнуты в M; значит, они замкнуты в X, и, в силу леммы Урысона, существует такая функция $k\colon X\to I$, что $k(A)\subset\{0\}$ и $k(B)\subset\{1\}$. Легко проверить, что, полагая $g(x)=\frac{2}{3}c\left(k(x)-\frac{1}{2}\right)$, мы получим $g\colon X\to R$, удовлетворяющее (1) и (2).

Определим теперь по индукции последовательность $g_1, g_2, \ldots$ непрерывных отображений X в R, такую, что

$$(3)\qquad |g_i(x)|\leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \quad \text{при} \quad x\in X,$$

$$(4)\qquad \left|f(x)-\sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{i} \quad \text{при} \quad x\in M.$$

Чтобы получить g_1, мы применим сделанное выше замечание к функции $f_0=i_Jf$ и $c=1$, где i_J — вложение J в R. Допустим, что $g_1, g_2, \ldots, g_i$ уже построены. Применяя то же самое замечание к $f_0=i_Jf-\left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Big|M$ и $c=(2/3)^i$, мы получим функцию g_{i+1}, удовлетворяющую (3) и (4) с $i+1$ вместо i.

Из (3) и 1.4.7 следует, что формула $F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ определяет непрерывную функцию $F\colon X\to J$, и, согласно (4), $F(x)=f(x)$ для всех $x\in M$. Таким образом, F есть продолжение f на X.

Теперь рассмотрим функцию $f\colon X\to R$. В силу уже доказанной части теоремы, функция $if\colon M\to J$, где $i\colon R\to J$ — гомеоморфное вложение, определенное в 2.1.5, продолжается на X до функции $F_1\colon X\to J$. Очевидно, что множество $L=F_1^{-1}(\{-1, 1\})$ есть замкнутое подмножество в X, не пересекающееся с множеством M. Следовательно, существует непрерывное отображение $k\colon X\to I$, такое, что $k(L)\subset\{0\}$ и $k(M)\subset\{1\}$. Легко видеть, что отображение $F_2\colon X\to J$, определенное формулой $F_2(x)=F_1(x)\cdot k(x)$, также является продолжением отображения if на X и что

$F_2(X) \subset i(R)$. Функция $F\colon X \to R$, определенная соотношением $F(x) = i^{-1}F_2(x)$, является искомым продолжением f на X. ∎

Отметим, что свойство продолжимости, установленное теоремой Титце — Урысона, характеризует нормальные пространства в классе T_1-пространств. В самом деле, если некоторое T_1-пространство X не является нормальным, то оно содержит два непересекающихся замкнутых подмножества A, B, которые не могут быть отделены открытыми множествами, и потому функцию $f\colon A \cup B \to I$, определенную соотношениями $f(x) = 0$ при $x \in A$ и $f(x) = 1$ при $x \in B$, нельзя непрерывно продолжить на X.

Докажем еще одну теорему о продолжении отображений.

2.1.9. Теорема. *Если непрерывное отображение f всюду плотного подмножества A некоторого топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y непрерывно продолжается на X, то продолжение однозначно определено отображением f.*

Доказательство. Пусть $F_1\colon X \to Y$ и $F_2\colon X \to Y$ — различные продолжения отображения f. В силу 1.5.4, множество

$$B = \{x \in X\colon\ F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнуто. Так как $A \subset B$, то $X = \bar{A} \subset B$, и потому $B = X$. ∎

2.1.10. Пример. Применим теперь две последние теоремы, чтобы получить простое доказательство того, что плоскость Немыцкого не является нормальной (ср. с примером 1.5.9). Как мы уже знаем, плоскость Немыцкого L содержит замкнутое подпространство L_1, гомеоморфное $D(\mathfrak{c})$, и счетное всюду плотное подмножество C. Из 2.1.9 вытекает, что каждая непрерывная функция из L в R определяется своим сужением на множество C. Таким образом, на L существует только $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ непрерывных вещественных функций. Если же пространство L было бы нормальным, то каждая из $2^{\mathfrak{c}}$ непрерывных вещественных функций, определенных на L_1, могла бы быть продолжена на L, что невозможно, ибо $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Следовательно, пространство L не является нормальным.

Приведенное только что доказательство, так же как и представленное в примере 1.5.9, показывает, что никакое пространство X, удовлетворяющее условию $d(X) = \aleph_0$ и содержащее $D(\mathfrak{c})$ в качестве замкнутого подмножества, не является нормальным. ∎

Иногда для определения отображения $f\colon X \to Y$ удобно стянуть пространство X в некоторое подпространство, а затем раздельно определить f (например, различными формулами) на каждом из этих подпространств (ср. с примерами 1.4.4 и 1.4.5). Мы приведем теперь два предложения, дающие условия непрерывности отображения, определенного таким образом.

Пусть X — топологическое пространство, $\{A_s\}_{s\in S}$ — некоторое его покрытие и $\{f_s\}_{s\in S}$ — семейство отображений $f_s\colon A_s\to Y$. Будем говорить, что отображения f_s *согласованы*, если для любых $s_1, s_2\in S$

$$f_{s_1}|A_{s_1}\cap A_{s_2}=f_{s_2}|A_{s_1}\cap A_{s_2}.$$

Полагая

$$f(x)=f_s(x)\quad\text{для}\quad x\in A_s,$$

мы определим отображение $f\colon X\to Y$, которое назовем *комбинацией отображений* $\{f_s\}_{s\in S}$ и обозначим символом $\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} f_s$ или $f_1\nabla f_2\nabla\ \ldots\ \nabla f_k$, если $S=\{1, 2, \ldots, k\}$.

2.1.11. Предложение. *Если $\{U_s\}_{s\in S}$ — открытое покрытие топологического пространства X и $\{f_s\}_{s\in S}$, где $f_s\colon U_s\to Y$, есть семейство согласованных непрерывных отображений, то комбинация $f=\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} f_s$ есть непрерывное отображение X в Y.*

Доказательство. Для каждого открытого подмножества $U\subset Y$ имеем

$$f^{-1}(U)=\bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U).$$

Множество $f_s^{-1}(U)$ открыто в U_s и, следовательно, в X. Отсюда вытекает, что прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X. ∎

2.1.12. Следствие. *Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда каждая точка $x\in X$ обладает такой окрестностью U_x, что $f|U_x$ непрерывно.* ∎

2.1.13. Предложение. *Пусть $\{F_s\}_{s\in S}$ — локально конечное замкнутое покрытие пространства X и $\{f_s\}_{s\in S}$, где $f_s\colon F_s\to Y$, есть семейство согласованных непрерывных отображений. Тогда комбинация $f=\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} f_s$ есть непрерывное отображение X в Y.*

Доказательство. Для каждого замкнутого подмножества $F\subset Y$ имеем

$$f^{-1}(F)=\bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(F).$$

Множество $f_s^{-1}(F)$ замкнуто в F_s и, следовательно, в X. Так как семейство $\{f_s^{-1}(F)\}_{s\in S}$ локально конечно, то, в силу 1.1.12, $f^{-1}(F)$ замкнуто в X. ∎

2.1.14. Теорема. *Пусть $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное дискретное семейство замкнутых подмножеств нормального пространства X. Тогда существует семейство $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых подмножеств пространства*

X, *такое, что* $F_i \subset U_i$ *для* $i = 1, 2, \ldots$ *и* $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \varnothing$ *для* $i \neq j$.

Доказательство. Объединение $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ есть замкнутое подпространство в X. Для каждого i положим $f_i(x) = i$ при любом $x \in F_i$; получим семейство $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ согласованных отображений f_i: $F_i \to R$. Таким образом, их комбинация f есть непрерывное отображение. По теореме Титце — Урысона f продолжается до отображения $F: X \to R$. Легко установить, что множества $U_i = F^{-1}((i - 1/3, i + 1/3))$ обладают требуемыми свойствами. ∎

Мы завершим этот параграф предложением, в котором даются условия, при которых комбинация отображений замкнута или открыта.

2.1.15. Предложение. *Пусть* X — *топологическое пространство,* $\{A_s\}_{s \in S}$ — *его покрытие и* $\{f_s\}_{s \in S}$ — *семейство согласованных отображений* f_s: $A_s \to Y$, *такое, что комбинация* $f = \mathop{\nabla}_{s \in S} f_s$: $X \to Y$ *непрерывна. Если все отображения* f_s *открыты (замкнуты и семейство* $\{f_s(A_s)\}_{s \in S}$ *локально конечно), то комбинация* f *открыта (замкнута).*

Доказательство. Достаточно применить равенство

$$f(A) = f\left(A \cap \bigcup_{s \in S} A_s\right) = \bigcup_{s \in S} f_s(A \cap A_s). \ ∎$$

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Систематическое изучение подпространств было начато в книге Хаусдорфа [1914]. Теорема 2.1.7, замечание о том, что совершенно нормальные пространства наследственно нормальны, и теорема Титце—Урысона появились в работе Урысона [1925]. Частные случаи указанной теоремы получены Лебегом [1907] (для плоскости) и Титце [1915] (для метрических пространств). Рассуждения, приведенные в 2.1.10, заимствованы у Катетова [1950]. Теорема 2.1.14 есть частный случай одного результата Куратовского [1935].

УПРАЖНЕНИЯ

2.1.A. Проверьте, что внутренность и граница произвольного множества A в подпространстве M топологического пространства X равны соответственно

$$M \setminus \overline{M \setminus A} \quad \text{и} \quad M \cap \bar{A} \cap \overline{M \setminus A},$$

где черта сверху обозначает оператор замыкания в X. На основе этих соотношений выведите, что для любого множества $B \subset X$ граница в M пересечения $M \cap B$ содержится в пересечении M с границей B в X; отметим, что для внутренностей это не имеет места.

2.1.B. (a) Проверьте, что если подпространство $M \subset X$ является F_σ-множеством (G_δ-множеством) в X, то множество $A \subset M$ есть F_σ-множество (G_δ-множество) в M тогда и только тогда, когда оно является F_δ-множеством (G_δ-множеством) в X.

(b) Докажите, что если подпространство $M \subset X$ есть каноническое открытое (замкнутое) множество, то множество $A \subset M$ есть каноническое открытое (замкнутое) множество в M тогда и только тогда, когда оно является каноническим открытым (замкнутым) множеством в X.

(c) Докажите, что если подпространство $M \subset X$ является функционально открытым подмножеством пространства X, то множество $A \subset M$ функционально открыто в M тогда и только тогда, когда оно функционально открыто в X. Приведите пример функционально замкнутого множества M в тихоновском пространстве X, такого, что существует функционально замкнутое множество в подпространстве M, не являющееся функционально замкнутым в X.

2.1.C. (a) Докажите, что если M — всюду плотное подпространство регулярного пространства X, то $\chi(x, X) = \chi(x, M)$ для любого $x \in M$. Покажите, что предположение регулярности не может быть ослаблено до предположения, что X — хаусдорфово пространство.

(b) Семейство $\mathscr{B}(A)$ открытых подмножеств пространства X называется *базой множества* $A \subset X$ *в пространстве* X, если все элементы семейства $\mathscr{B}(A)$ содержат A и для любого открытого множества V, содержащего A, существует множество $U \in \mathscr{B}(A)$, такое, что $A \subset U \subset V$. *Характером множества* A в топологическом пространстве X называется наименьшее кардинальное число вида $|\mathscr{B}(A)|$, где $\mathscr{B}(A)$ — база множества A в X; это кардинальное число обозначается $\chi(A, X)$.

Докажите, что если M — всюду плотное подпространство пространства X и $A \subset M$ обладает тем свойством, что для всякого замкнутого множества $B \subset X$, не пересекающегося с A, существуют открытые множества U, $V \subset X$, такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$, то $\chi(A, X) = \chi(A, M)$ (ср. с теоремой 3.1.6).

Выведите из предыдущего, что если M — всюду плотное подпространство нормального пространства X, то $\chi(F, X) = \chi(F, M)$ для всякого замкнутого подмножества F пространства X, содержащегося в M.

(c) Покажите, что если M — замкнутое подпространство пространства X, то $\chi(A \cap M, M) \leqslant \chi(A, X)$ для любого $A \subset X$. Проверьте, что предположение о замкнутости M не может быть опущено.

(d) Покажите, что если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение, то $\chi(f^{-1}(B), X) \leqslant \chi(B, Y)$ для каждого $B \subset Y$; если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение X на Y, то $\chi(f^{-1}(B), X) = \chi(B, Y)$ для каждого $B \subset Y$, и если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение, то $\chi(f(A), Y) \leqslant \chi(A, X)$ для каждого $A \subset X$.

2.1.D. Проверьте, что подпространство M топологического пространства X является ретрактом пространства X в том и только том случае, когда каждое непрерывное отображение, определенное на M, продолжается на все X, или, эквивалентным образом, в том и только том случае, когда существует отображение $r\colon X \to M$, такое, что $r|M = \mathrm{id}_M$.

2.1.E. (а) (Урысон [1925]). Докажите, что нормальность является наследственным свойством по отношению к F_σ-множествам.

Указание. Примените лемму 1.5.14.

(b) Докажите, что присоединением к плоскости Немыцкого K одной точки можно получить нормальное пространство, для которого K является подпространством.

2.1.F. Установите, что если $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность точек в T_2-пространстве X и x_0 — предел этой последовательности, то подпространство $M = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ либо дискретно и конечно, либо гомеоморфно пространству $A(\aleph_0)$. Покажите, что предположение о том, что X есть T_2-пространство, нельзя заменить предположением о том, что X есть T_1-пространство.

2.1.G. Покажите, что для любого счетного дискретного семейства $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ конечных подмножеств регулярного пространства X существует такое семейство $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых подмножеств пространства X, что $F_i \subset U_i$ для $i = 1, 2, \ldots$ и $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

2.1.H. (а) Установите, что произвольное подпространство секвенциального пространства не обязано быть секвенциальным пространством (ср. с примерами 1.6.19 и 1.6.20), однако замкнутое подпространство или открытое подпространство являются секвенциальными пространствами (ср. с упр. 2.4.G (b)).

(b) Проверьте, что любое подпространство пространства Фреше — Урысона является пространством Фреше — Урысона.

2.1.I. Докажите, что прямая Зоргенфрея наследственно сепарабельна.

2.1.J. Покажите, что предложение 2.1.13 и стоящая в скобках часть предложения 2.1.15 не имеют места без предположения о том, что рассматриваемые семейства множеств локально конечны.

2.2. СУММЫ

Пусть задано семейство $\{X_s\}_{s\in S}$ попарно непересекающихся топологических пространств, т. е. $X_s\cap X_{s'}=\varnothing$ для $s\neq s'$. Рассмотрим множество $X=\bigcup\limits_{s\in S} X_s$ и семейство $\mathcal{O}$ всех множеств $U\subset X$, таких, что $U\cap X_s$ открыто в X_s для каждого $s\in S$. Легко видеть, что семейство $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям (O1)—(O3) и потому определяет некоторую топологию на множестве X. Множество X с этой топологией называется *суммой пространств* $\{X_s\}_{s\in S}$ и обозначается $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ или $X_1\oplus X_2\oplus\ldots\oplus X_k$, если $S=\{1, 2, \ldots, k\}$.

2.2.1. Предложение. *Множество $A\subset\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ замкнуто в том и только том случае, если пересечение $A\cap X_s$ замкнуто в X_s для каждого $s\in S$.*

Доказательство. Множество A замкнуто в том и только том случае, если его дополнение $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s\setminus A$ открыто. Следовательно, наше утверждение вытекает из равенства

$$\Bigl(\bigoplus_{s\in S} X_s\setminus A\Bigr)\cap X_{s_0}=X_{s_0}\setminus(A\cap X_{s_0}).\ ■$$

2.2.2. Следствие. *Каждое множество X_s открыто-замкнуто в $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$.* ■

Очевидно, что каждое X_s является подпространством суммы $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$; вложение X_s в $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ обозначается i_s.

2.2.3. Предложение. *Если $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство попарно непересекающихся топологических пространств и A_s — подпространство X_s для каждого $s\in S$, то две топологии, определенные на множестве $\bigcup\limits_{s\in S} A_s$, а именно топология суммы подпространств $\{A_s\}_{s\in S}$ и топология подпространства суммы $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$, совпадают.*

2.2.4. Предложение. *Если топологическое пространство X может быть представлено как объединение семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ попарно непересекающихся открытых подмножеств, то $X=\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$.*

Доказательство. Множества X и $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ совпадают, поэтому достаточно показать, что совпадают также их семейства открытых множеств. Если U открыто в X, то пересечение $U\cap X_s$ открыто в X_s для каждого $s\in S$, следовательно, U открыто в

$\bigoplus_{s\in S} X_s$. Обратно, если U открыто в $\bigoplus_{s\in S} X_s$, то для каждого $s \in S$ пересечение $U \cap X_s$ открыто в X_s, а потому и в X. Следовательно, $U = \bigcup_{s\in S} (U \cap X_s)$ открыто в X. ∎

2.2.5. Следствие. *Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство попарно непересекающихся топологических пространств. Если $S = \bigcup_{t\in T} S_t$, где $S_t \cap \cap S_{t'} = \varnothing$ для $t \neq t'$, то $\bigoplus_{s\in S} X_s = \bigoplus_{t\in T} \left(\bigoplus_{s\in S_t} X_s\right)$, т. е. сумма пространств ассоциативна.* ∎

2.2.6. Предложение. *Отображение f суммы $\bigoplus_{s\in S} X_s$ в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда композиция fi_s непрерывна для каждого $s \in S$.*

Доказательство. Если $f\colon \bigoplus_{s\in S} X_s \to Y$, то каждое fi_s непрерывно как композиция двух непрерывных отображений. Обратно, если для отображения f суммы $\bigoplus_{s\in S} X_s$ в пространство Y каждое fi_s непрерывно, то $f = \nabla_{s\in S} fi_s$ непрерывно в силу предложения 2.1.11. ∎

Сумму $\bigoplus_{s\in S} X_s$ можно также определить для семейства топологических пространств $\{X_s\}_{s\in S}$, не являющихся попарно непересекающимися. Для этого возьмем семейство $\{X'_s\}_{s\in S}$ попарно непересекающихся пространств, такое, что X'_s гомеоморфно X_s для всех $s \in S$, и положим $\bigoplus_{s\in S} X_s = \bigoplus_{s\in S} X'_s$. Например, можно взять $X'_s = X_s \times \{s\}$ с топологией, порожденной отображением $p_s\colon X'_s \to X_s$, где $p_s(x, s) = x$. Читатель легко установит, что полученные таким путем пространства $\bigoplus_{s\in S} X'_s$ все гомеоморфны между собой. В дальнейшем мы будем предполагать, что любое семейство пространств имеет сумму (определенную с точностью до гомеоморфизма), но в доказательствах будем молчаливо считать, что обсуждаемое семейство состоит из попарно непересекающихся пространств.

Будем говорить, что топологическое свойство $\mathscr{P}$ *аддитивно* ($\mathfrak{m}$-*аддитивно*, *конечно аддитивно*), если для любого семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ (такого, что $|S| \leqslant \mathfrak{m}$, $|S| < \aleph_0$) пространств, обладающих свойством $\mathscr{P}$, сумма $\bigoplus_{s\in S} X_s$ также обладает свойством $\mathscr{P}$.

2.2.7. Теорема. *Любая сумма T_i-пространств есть T_i-пространство для $i \leqslant 6$.*

Доказательство. В случае T_1-пространств наша теорема следует непосредственно из 2.2.1. Доказательства всех остальных случаев подобны друг другу. В качестве примера покажем, что нормальность аддитивна. Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство нормальных пространств и A, B — два непересекающихся замкнутых подмножества суммы $\bigoplus_{s \in S} X_s$. В силу предложения 2.2.1, пересечения $A \cap X_s$ и $B \cap X_s$ замкнуты в X_s для каждого $s \in S$. Из нормальности X_s следует, что существуют такие множества U_s, V_s, открытые в X_s, что

$$A \cap X_s \subset U_s, \quad B \cap X_s \subset V_s \text{ и } U_s \cap V_s = \varnothing.$$

Очевидно, что

$$A \subset U = \bigcup_{s \in S} U_s, \quad B \subset V = \bigcup_{s \in S} V_s \quad \text{и} \quad U \cap V = \varnothing;$$

так как U и V открыты в $\bigoplus_{s \in S} X_s$, то сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$, будучи T_1-пространством, является нормальным пространством. ∎

Легко видеть, что свойства «вес $\leqslant \mathfrak{m}$» и «плотность $\leqslant \mathfrak{m}$» оба $\mathfrak{m}$-аддитивны при $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, однако не являются аддитивными свойствами. Свойство «характер $\leqslant \mathfrak{m}$» аддитивно.

2.2.8. Примеры. Дискретное пространство $D(\mathfrak{m})$ есть сумма одноточечных пространств.

Для любой точки x прямой Зоргенфрея K и любой окрестности U точки x прямая Зоргенфрея может быть представлена как сумма $X_1 \oplus X_2$, где $x \in X_1 \subset U$. В самом деле, в качестве X_1 можно выбрать интервал $[x, r)$, содержащийся в U, а в качестве X_2 — его дополнение $K \setminus X_1$. Так как X_1 открыто-замкнуто в K, то равенство $K = X_1 \oplus X_2$ следует из предложения 2.2.4.

Вещественную прямую R нельзя представить как сумму $X_1 \oplus X_2$ непустых множеств X_1, $X_2 \subset R$. Допустим противное, т. е. что $R = X_1 \oplus X_2$ и $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$. Выберем точки $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$; не умаляя общности, можно считать, что $x_1 < x_2$. Множество $X_1 \cap [x_1, x_2]$ ограничено; пусть x_0 — его наименьшая верхняя грань. Так как X_1 замкнуто, то $x_0 \in X_1$, откуда $x_0 < x_2$. Так как X_1 открыто, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset X_1$, и мы имеем $X_1 \cap (x_0, x_2) \neq \varnothing$ вопреки определению наименьшей верхней грани. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Суммы топологических пространств впервые появились в работе Титце [1923]. Теоремы относительно этой операции обычно весьма просты и принадлежат топологическому фольклору. Тем не менее применение операции суммы иногда упрощает доказательства и описание примеров.

УПРАЖНЕНИЯ

2.2.A. Покажите, что никакой непрерывный образ вещественной прямой не может быть представлен как сумма $X_1 \oplus X_2$ с $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$. Как усилить это утверждение?

2.2.B. Покажите, что свойство быть дискретным пространством есть аддитивное свойство.

2.2.C. Для $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ выразите $w(X)$, $d(X)$, $\chi(X)$ и $\chi(x, X)$ через $w(X_s)$, $d(X_s)$, $\chi(X_s)$, $\chi(x, X_s)$ и $|S|$.

2.2.D. (Куратовский [1921]). Пусть $X_0, X_1, \ldots$ — подпространства прямой R, определенные следующим образом:

$$X_0 = [0, 1) \quad \text{и} \quad X_i = (i, i+1), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Докажите, что пространства $Y_1 = \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i\right) \oplus D(\aleph_0)$ и $Y_2 = X_0 \oplus Y_1$ не гомеоморфны, однако каждое из них можно отобразить на другое непрерывно и взаимно однозначно.

Указание. При доказательстве того, что Y_1 и Y_2 не гомеоморфны, воспользуйтесь упр. 2.2.A.

2.2.E. (a) Пусть заданы два семейства $\{X_s\}_{s \in S}$ и $\{Y_s\}_{s \in S}$ попарно непересекающихся топологических пространств и семейство отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, где $f_s \colon X_s \to Y_s$. Полагая $f(x) = f_s(x)$ для $x \in X_s$, определим отображение f суммы $\bigoplus_{s \in S} X_s$ в сумму $\bigoplus_{s \in S} Y_s$, которое назовем *суммой отображений* $\{f_s\}_{s \in S}$ и обозначим $\bigoplus_{s \in S} f_s$ или $f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_k$, если $S = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Проверьте, что f непрерывно и что f замкнуто (открыто, является гомеоморфным вложением) в том и только том случае, если все отображения f_s замкнуты (открыты, являются гомеоморфными вложениями).

(b) Пусть заданы семейство $\{X_s\}_{s \in S}$ попарно непересекающихся топологических пространств и семейство отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, где $f_s \colon X_s \to Y$. Сформулируйте условия, при которых комбинация $\nabla_{s \in S} f_s \colon \bigoplus_{s \in S} X_s \to Y$ является замкнутым или открытым отображением (ср. с предложением 2.1.15).

2.2.F. Покажите, что пространство X гомеоморфно сумме $\bigoplus_{s \in S} X_s$ в том и только том случае, если существует семейство отображений $\{i_s\}_{s \in S}$, где $i_s \colon X_s \to X$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) *для всякого пространства Y и пары f, g непрерывных отображений X в Y если $fi_s = gi_s$ при любом $s \in S$, то $f = g$;*

(2) *для всякого пространства Y и семейства отображений $\{f_s\}_{s\in S}$, где $f_s\colon X_s\to Y$, существует такое отображение $f\colon X\to Y$, что $fi_s=f_s$ при любом $s\in S$.*

2.3. ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство топологических пространств. Рассмотрим (декартово) произведение $X=\prod\limits_{s\in S}X_s$ множеств $\{X_s\}_{s\in S}$ и семейство отображений $\{p_s\}_{s\in S}$, где p_s соотносит точке $x=\{x_s\}\in\prod\limits_{s\in S}X_s$ ее s-ю координату $x_s\in X_s$. Множество $X=\prod\limits_{s\in S}X_s$ с топологией, порожденной семейством отображений $\{p_s\}_{s\in S}$, называется (*декартовым*) *произведением пространств* $\{X_s\}_{s\in S}$, а сама топология называется *тихоновской топологией* на $\prod\limits_{s\in S}X_s$; отображения $p_s\colon\prod\limits_{s\in S}X_s\to X_s$ называются *проекциями*. Для любого семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ топологических пространств символом $\prod\limits_{s\in S}X_s$ мы будем далее обозначать не множество — декартово произведение множеств $\{X_s\}_{s\in S}$, а топологическое пространство, снабженное тихоновской топологией. Произведение конечного семейства пространств $\{X_i\}_{i=1}^k$ обозначается также через $X_1\times X_2\times\ldots\times X_k$. Если $X_s=X$ для любого $s\in S$, то произведение $\prod\limits_{s\in S}X_s$ обозначают также через $X^{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m}=|S|$. Легко проверить, что пространство $X^{\mathfrak{m}}$ не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от множества S, а зависит только от его мощности $\mathfrak{m}$. Произведение $X^{\mathfrak{m}}$ называется *$\mathfrak{m}$-й степенью* пространства X; произведение $X\times X$ называют также *квадратом* пространства X.

2.3.1. Предложение. *Семейство всех множеств $\prod\limits_{s\in S}W_s$, где W_s — открытое подмножество пространства X_s и $W_s\neq X_s$ только для конечного множества $s\in S$, образует базу произведения $\prod\limits_{s\in S}X_s$. Более того, если для каждого $s\in S$ фиксирована некоторая база $\mathcal{B}_s$ пространства X_s, то подсемейство, состоящее из тех $\prod\limits_{s\in S}W_s$, в которых $W_s\in\mathcal{B}_s$ при $W_s\neq X_s$, также образует базу.*

Доказательство. В силу 1.4.8, семейство всех множеств вида $\bigcap\limits_{i=1}^{k}p_{s_i}^{-1}(W_i)$, где $s_1, s_2, \ldots, s_k\in S$ и W_i открыто в X_{s_i}, является базой пространства $\prod_{s \in S} X_s$. Следовательно, для доказательства первой части предложения достаточно заметить, что

$$p_{s_0}^{-1}(W_{s_0}) = \prod_{s \in S} W_s, \text{ где } W_s = X_s \quad \text{при} \quad s \neq s_0,$$

и что

$$\left(\prod_{s \in S} W_s\right) \cap \left(\prod_{s \in S} W'_s\right) = \prod_{s \in S} (W_s \cap W'_s).$$

Вторая часть есть непосредственное следствие первой части и определения базы. ∎

База пространства $\prod_{s \in S} X_s$, описанная в первой части приведенного выше предложения, называется *канонической базой* произведения.

Очевидно, что семейство всех множеств $\prod_{s \in S} W_s$, где W_s — открытое подмножество пространства X_s и $W_s \neq X_s$ только для одного $s \in S$, является предбазой произведения $\prod_{s \in S} X_s$.

2.3.2. Предложение. *Если $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство топологических пространств и A_s — подпространство пространства X_s, $s \in S$, то две топологии, определенные на множестве $A = \prod_{s \in S} A_s$, а именно топология произведения подпространств $\{A_s\}_{s \in S}$ и топология подпространства произведения $\prod_{s \in S} X_s$, совпадают.*

Доказательство. Можно считать, что $A_s \neq \varnothing$ для каждого $s \in S$. Так как сужения $p_s | A$: $A \to A_s$ проекций p_s непрерывны, то топология подпространства на A тоньше, чем топология произведения (в силу определения последнего). Любое открытое множество подпространства A есть пересечение A с объединением семейства элементов канонической базы пространства $\prod_{s \in S} X_s$, т. е. объединение пересечений A с элементами этого семейства. Так как каждое такое пересечение есть элемент канонической базы для $\prod_{s \in S} A_s$, то топология произведения на A тоньше, чем топология подпространства. ∎

2.3.3. Предложение. *Для каждого семейства множеств $\{A_s\}_{s \in S}$, где $A_s \subset X_s$, в произведении $\prod_{s \in S} X_s$ имеет место соотношение*

$$\overline{\prod_{s \in S} A_s} = \prod_{s \in S} \overline{A_s}. \tag{1}$$

Доказательство. Из 1.1.1 следует, что $x \in \overline{\prod_{s \in S} A_s}$ в том и только том случае, если для каждого элемента $\prod_{s\in S} W_s$ канонической базы пространства $\prod_{s\in S} X_s$, содержащего x, мы имеем

$$\prod_{s\in S} W_s \cap \prod_{s\in S} A_s = \prod_{s\in S} W_s \cap A_s \neq \varnothing,$$

т. е. если для каждого $s\in S$ и любой окрестности W_s s-й координаты точки x мы имеем $W_s \cap A_s \neq \varnothing$. Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда $x \in \prod_{s\in S} \overline{A}_s$. ∎

2.3.4. Следствие. *Множество $\prod_{s\in S} A_s$, где $\varnothing \neq A_s \subset X_s$, замкнуто в произведении $\prod_{s\in S} X_s$ тогда и только тогда, когда A_s замкнуто в X_s для каждого $s\in S$.*

Доказательство. Из предложения следует, что если все A_s замкнуты, то $\prod_{s\in S} A_s$ также замкнуто. Обратно, если $\prod_{s\in S} A_s$ замкнуто, то $\prod_{s\in S} A_s = \overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \overline{A}_s$, и так как множества A_s не пусты, то $A_s = \overline{A_s}$ для каждого $s\in S$. ∎

2.3.5. Следствие. *Множество $\prod_{s\in S} A_s$, где $A_s \subset X_s \neq \varnothing$, всюду плотно в произведении $\prod_{s\in S} X_s$ в том и только том случае, если A_s всюду плотно в X_s для каждого $s\in S$.* ∎

Отметим, что так как не каждое подмножество пространства $\prod_{s\in S} X_s$ допускает представление в виде $\prod_{s\in S} A_s$, то тихоновская топология на произведении $\prod_{s\in S} X_s$ не может быть задана оператором замыкания, определенным формулой (1).

Из предложения 1.4.9 непосредственно вытекает

2.3.6. Предложение. *Отображение f топологического пространства X в произведение $\prod_{s\in S} Y_s$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $p_s f$ непрерывна для каждого $s\in S$.* ∎

2.3.7. Предложение. *Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство топологических пространств. Если $S = \bigcup_{t\in T} S_t$, где $S_t \cap S_{t'} = \varnothing$ для $t \neq t'$, то пространства $\prod_{s\in S} X_s$ и $\prod_{t\in T}\left(\prod_{s\in S_t} X_s\right)$ гомеоморфны, т. е. декартово произведение ассоциативно.*

Доказательство. Поставим в соответствие точке $x = \{x_s\} \in \prod_{s\in S} X_s$ точку $f(x) = \{x_t\} \in \prod_{t\in T}\left(\prod_{s\in S_t} X_s\right)$, где $x_t = \{x_s\} \in$

$\in \prod\limits_{s \in S_t} X_s$. Определенное таким способом отображение f взаимно однозначно отображает пространство $\prod\limits_{s \in S} X_s$ на $\prod\limits_{t \in T} \left(\prod\limits_{s \in S_t} X_s \right)$. Применяя 2.3.6, легко убедиться, что отображения f и f^{-1} непрерывны. ■

Отметим, что из последнего предложения следует, что пространства $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ и $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфны для любого пространства X и любого кардинального числа $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

2.3.8. Предложение. *Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство топологических пространств и φ — взаимно однозначное отображение S на себя. Тогда пространства $\prod\limits_{s \in S} X_s$ и $\prod\limits_{s \in S} X_{\varphi(s)}$ гомеоморфны, т. е. декартово произведение коммутативно.* ■

2.3.9. Примеры. Пусть n — положительное целое число; пространство R^n — произведение n экземпляров вещественной прямой — называется *евклидовым n-мерным пространством*. Пространство I^n — произведение n экземпляров замкнутого единичного отрезка — называется *единичным n-мерным кубом*. Если $m > n$, то подпространство пространства R^m, состоящее из всех точек, у которых последние $m - n$ координат равны нулю, гомеоморфно пространству R^n, т. е. R^n вложимо в R^m при $m > n$. Подпространство пространства R^{n+1}, состоящее из всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, таких, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$, называется *единичной n-мерной сферой* и обозначается S^n. Заменяя знак равенства на $\leqslant$ в определении $(n-1)$-мерной сферы, мы получим подмножество пространства R^n, которое называется *единичным n-мерным шаром* и обозначается B^n. Одномерная сфера S^1 — это *окружность*, а произведение $S^1 \times S^1$ — *тор*. ■

Для каждого непустого множества $\prod\limits_{s \in S} W_s \subset \prod\limits_{s \in S} X_s$ имеем $p_{s_0}\left(\prod\limits_{s \in S} W_s \right) = W_{s_0}$, так что проекции p_s: $\prod\limits_{s \in S} X_s \to X_s$ — открытые отображения. Приводимый ниже пример показывает, что, вообще говоря, проекции не являются замкнутыми отображениями (ср. с теоремой 3.1.16).

2.3.10. Пример. Проекция p: $R^2 \to R$ плоскости R^2 на ось x не замкнута. В самом деле, множество $F = \{(x, y) \in R^2\colon\ xy = 1\}$ замкнуто в R^2, а его образ $p(F) = R \setminus \{0\}$ не замкнут в R. ■

Пусть заданы два семейства $\{X_s\}_{s \in S}$ и $\{Y_s\}_{s \in S}$ топологических пространств и семейство отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, где f_s: $X_s \to Y_s$. В силу предложения 2.3.6, отображение, переводящее точку $x = \{x_s\} \in \prod\limits_{s \in S} X_s$ в точку $\{f_s(x_s)\} \in \prod\limits_{s \in S} Y_s$, непрерывно.

Оно называется *декартовым произведением отображений* $\{f_s\}_{s\in S}$ и обозначается $\prod_{s\in S} f_s$ или $f_1\times f_2\times\ldots\times f_k$, если $S=\{1, 2, \ldots, k\}$. Отметим, что для декартова произведения $f=\prod_{s\in S} f_s$ имеют место соотношения

$$f\left(\prod_{s\in S} A_s\right)=\prod_{s\in S} f_s(A_s) \quad \text{и} \quad f^{-1}\left(\prod_{s\in S} B_s\right)=\prod_{s\in S} f_s^{-1}(B_s),$$

где $f_s\colon X_s\to Y_s$, $A_s\subset X_s$ и $B_s\subset Y_s$.

Пусть заданы топологическое пространство X, семейство $\{Y_s\}_{s\in S}$ топологических пространств и семейство отображений $\{f_s\}_{s\in S}$, где $f_s\colon X\to Y_s$. В силу предложения 2.3.6, отображение, переводящее точку $x\in X$ в точку $\{f_s(x)\}\in\prod_{s\in S} Y_s$, непрерывно. Это отображение называется *диагональю отображений* $\{f_s\}_{s\in S}$ (или *диагональным отображением*) и обозначается $\mathop{\Delta}_{s\in S} f_s$ или $f_1\,\Delta\, f_2\,\Delta\,\ldots\,\Delta\, f_k$, если $S=\{1, 2, \ldots, k\}$. Отметим, что для диагонали $f=\mathop{\Delta}_{s\in S} f_s$ имеют место соотношения

$$f(A)\subset\prod_{s\in S} f_s(A) \quad \text{и} \quad f^{-1}\left(\prod_{s\in S} B_s\right)=\bigcap_{s\in S} f_s^{-1}(B_s),$$

где $f_s\colon X\to Y_s$, $A\subset X$ и $B_s\subset Y_s$.

Отметим также, что диагональ $\mathop{\Delta}_{s\in S} f_s$ есть композиция диагонали $i=\mathop{\Delta}_{s\in S} \mathrm{id}_{X_s}\colon X\to\prod_{s\in S} X_s$, где $X_s=X$ для $s\in S$, и произведения $\prod_{s\in S} f_s\colon \prod_{s\in S} X_s\to\prod_{s\in S} Y_s$. Образ $\Delta=i(X)\subset X^{\mathfrak{m}}=\prod_{s\in S} X_s$, где $\mathfrak{m}=|S|$, называется *диагональю произведения* $X^{\mathfrak{m}}$. Из 1.5.4 следует, что если X — хаусдорфово пространство, то диагональ $\Delta=\bigcap_{s', s''\in S}\left\{x\in\prod_{s\in S} X_s\colon p_{s'}(x)=p_{s''}(x)\right\}$ замкнута в $X^{\mathfrak{m}}$.

Мы говорим, что некоторое топологическое свойство $\mathscr{P}$ *мультипликативно* (*$\mathfrak{m}$-мультипликативно, конечно мультипликативно*), если для любого семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ (такого, что $|S|\leqslant\mathfrak{m}$, $|S|<\aleph_0$) пространств со свойством $\mathscr{P}$ их произведение $\prod_{s\in S} X_s$ также обладает свойством $\mathscr{P}$.

2.3.11. Теорема. *Произведение T_i-пространств всегда есть T_i-пространство при $i\leqslant 3\frac{1}{2}$. Если произведение $\prod_{s\in S} X_s$ есть непустое T_i-пространство, то все X_s также являются T_i-пространствами при $i\leqslant 6$.*

Доказательство. Для T_1-пространств теорема непосредственно следует из 2.3.4. Доказательства мультипликативности T_i-пространств в случае $i=0$, 2, 3 и $3\frac{1}{2}$ подобны друг другу. В качестве примера докажем, что произведение тихоновских пространств $\{X_s\}_{s\in S}$ есть тихоновское пространство. В силу предложения 1.5.8, достаточно показать, что для каждой точки $x=\{x_s\}\in\prod_{s\in S}X_s$ и каждой ее окрестности V вида $p_{s_0}^{-1}(W_{s_0})$, где W_{s_0} — некоторое открытое подмножество пространства X_{s_0}, существует непрерывная функция $f\colon \prod_{s\in S}X_s\to I$, такая, что $f(x)=0$ и $f(y)=1$ для $y\in\prod_{s\in S}X_s\setminus V$. Легко установить, что композиция $f_0p_{s_0}$, где $f_0\colon X_{s_0}\to I$ удовлетворяет условиям $f_0(x_{s_0})=0$ и $f_0(X_{s_0}\setminus W_{s_0})\subset\{1\}$, обладает требуемыми свойствами.

Рассмотрим теперь произведение $\prod_{s\in S}X_s$ непустых пространств $\{X_s\}_{s\in S}$. Выберем по точке $x_s^*\in X_s$ для каждого $s\in S$ и положим по определению $X_{s_0}^*=\prod_{s\in S}A_s$, где $A_s=\{x_s^*\}$ при $s\neq s_0$ и $A_{s_0}=X_{s_0}$. Очевидно, что сужение $i_{s_0}=p_{s_0}|X_{s_0}^*\to X_{s_0}$ есть гомеоморфизм, и поэтому X_{s_0} вложимо в произведение $\prod_{s\in S}X_s$. Более того, если произведение $\prod_{s\in S}X_s$ есть T_i-пространство, $i\geqslant 1$, то $X_{s_0}^*$ — его замкнутое подпространство и X_{s_0} вложимо в $\prod_{s\in S}X_s$ как замкнутое подпространство. В силу теоремы 2.1.6, отсюда следует, что если $\prod_{s\in S}X_s$ — непустое T_i-пространство, то все X_s являются T_i-пространствами. ∎

Теперь мы приведем примеры, показывающие, что нормальность, наследственная нормальность и совершенная нормальность не являются конечно мультипликативными.

2.3.12. Пример. В примере 1.5.17 мы доказали, что прямая Зоргенфрея K является нормальным пространством. Затем мы обнаружили, что K совершенно нормально, а значит, и наследственно нормально. Оказывается, декартов квадрат $K\times K$ не является нормальным пространством. В самом деле, $K\times K$ содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное пространству $D(\mathfrak{c})$, а именно множество $\{(x,y)\colon y=-x\}$, и счетное всюду плотное подмножество — множество, состоящее из всех точек $K\times K$, обе координаты которых — рациональные числа. Рассуждая так же, как в примере 1.5.9 или 2.1.10, мы заключаем, что $K\times K$ не является нормальным.

Заметим, что существуют совершенно нормальные пространства, квадрат которых — нормальное, но не наследственно нормальное пространство (см. упр. 3.10.C(c)). В примере 2.3.36, который мы приведем ниже, определяются два наследственно нормальных пространства с нормальным, но не наследственно нормальным произведением. Дальнейшая информация о нормальности произведений содержится в задачах 2.7.15 и 2.7.16. Специального упоминания заслуживает тот факт, что $N^{\aleph_1}$ не является нормальным (см. упр. 3.1.H(a)). ∎

2.3.13. Теорема. *Если* $w(X_s) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ *для каждого* $s \in S$ *и* $|S| \leqslant \mathfrak{m}$, *то* $w\left(\prod\limits_{s \in S} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$.

Подобным же образом, если $\chi(X_s) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ *для каждого* $s \in S$ *и* $|S| \leqslant \mathfrak{m}$, *то* $\chi\left(\prod\limits_{s \in S} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$.

Доказательство. Первая часть следует из предложения 2.3.1, где в качестве $\mathscr{B}_s$ можно взять любую базу пространства X_s, такую, что $|\mathscr{B}_s| \leqslant \mathfrak{m}$.

Доказательство второй части предоставляется читателю. ∎

2.3.14. Следствие. *Первая и вторая аксиомы счетности являются* $\aleph_0$-*мультипликативными свойствами.* ∎

2.3.15. Теорема Хьюитта — Марчевского — Пондицери. *Если* $d(X_s) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ *для каждого* $s \in S$ *и* $|S| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, *то* $d\left(\prod\limits_{s \in S} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$.

Доказательство. Предположим, что пространства X_s непусты и что $|S| = 2^{\mathfrak{m}}$. Пусть A_s — всюду плотное подпространство пространства X_s, такое, что $|A_s| \leqslant \mathfrak{m}$. В силу 2.3.5, достаточно доказать, что произведение $\prod\limits_{s \in S} A_s$ содержит всюду плотное подмножество мощности $\leqslant \mathfrak{m}$. Так как декартово произведение $f = \prod\limits_{s \in S} f_s$, где f_s — произвольное отображение дискретного пространства $D(\mathfrak{m})$ на A_s, является непрерывным отображением пространства $D(\mathfrak{m})]^{2^{\mathfrak{m}}}$ на $\prod\limits_{s \in S} A_s$, то, в силу теоремы 1.4.10, доказательство сводится к проверке того, что $d([D(\mathfrak{m})]^{2^{\mathfrak{m}}}) \leqslant \mathfrak{m}$.

Обозначим через T $\mathfrak{m}$-ю степень двухточечного дискретного пространства; тогда $|T| = 2^{\mathfrak{m}}$ и $w(T) \leqslant \mathfrak{m}$. Пусть $\mathscr{B}$ — база пространства T, такая, что $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, и пусть $\mathscr{T}$ — совокупность всех конечных семейств $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ попарно непересекающихся элементов базы $\mathscr{B}$. Очевидно, что $|\mathscr{T}| \leqslant \mathfrak{m}$.

В произведении $[D(\mathfrak{m})]^{2^{\mathfrak{m}}} = \prod\limits_{t \in T} Y_t$, где $Y_t = D(\mathfrak{m})$ для любого $t \in T$, выберем множество A, состоящее из всех функций

f из T в $D(\mathfrak{m})$, таких, что существует семейство $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} \in \mathcal{T}$ со свойством: f постоянна на каждом множестве U_i и на множестве $T \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_k)$. Так как $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$, то и $|A| \leqslant \mathfrak{m}$.

Мы покажем, что множество A всюду плотно в $[D(\mathfrak{m})]^{2^{\mathfrak{m}}}$, т. е. для каждого непустого открытого множества $V \subset \prod_{t \in T} Y_t$ пересечение $A \cap V$ непусто. Выберем точки $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, и точки $y_1, y_2, \ldots, y_k \in D(\mathfrak{m})$, такие, что $\bigcap_{i=1}^{k} p_{t_i}^{-1}(y_i) \subset V$. Так как T — хаусдорфово пространство, то существует такое семейство $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} \in \mathcal{T}$, что $t_i \in U_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Функция f из T в $D(\mathfrak{m})$, определенная формулой

$$f(t) = \begin{cases} y_i & \text{при } t \in U_i,\ i = 1, 2, \ldots, k, \\ y_1 & \text{при } t \in T \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_k), \end{cases}$$

принадлежит обоим множествам A и V, т. е. $A \cap V \neq \varnothing$. ∎

2.3.16. Следствие. *Сепарабельность является $\mathfrak{c}$-мультипликативным свойством.* ∎

2.3.17. Теорема. *Если $d(X_s) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ для каждого $s \in S$, то любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств произведения $\prod_{s \in S} X_s$ имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.*

Доказательство. Пусть $\{U_t\}_{t \in T}$ — семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства $\prod_{s \in S} X_s$. Без ограничения общности можно считать, что $\{U_t\}_{t \in T}$ состоит из элементов канонической базы пространства $\prod_{s \in S} X_s$, т. е. для каждого $t \in T$ существуют конечное множество $S_t \subset S$ и семейство $\{W_s^t\}_{s \in S}$, где W_s^t — открытое подмножество пространства X_s, причем $W_s^t = X_s$ при $s \notin S_t$, такие, что $U_t = \prod_{s \in S} W_s^t$.

Выберем теперь произвольное подмножество $T_0 \subset T$, удовлетворяющее соотношению $|T_0| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Множество $S_0 = \bigcup_{t \in T_0} S_t$ также имеет мощность $\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Поэтому, в силу теоремы Хьюитта — Марчевского — Пондицери, произведение $\prod_{s \in S_0} X_s$ содержит всюду плотное подмножество A мощности $\leqslant \mathfrak{m}$. Далее, семейство $\left\{\prod_{s \in S_0} W_s^t\right\}_{t \in T_0}$ состоит из непустых открытых подмножеств пространства $\prod_{s \in S_0} X_s$. Так как $U_t = \prod_{s \in S_0} W_s^t \times \prod_{s \in S \setminus S_0} X_s$ для каждого

$t \in T_0$, то элементы семейства $\left\{\prod_{s \in S_0} W_s^t\right\}_{t \in T_0}$ попарно не пересекаются, а так как каждый элемент этого семейства содержит некоторый элемент множества A, то $|T_0| \leqslant |A| \leqslant \mathfrak{m}$. Таким образом, мы доказали, что каждое множество $T_0 \subset T$, такое, что $|T_0| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, удовлетворяет соотношению $|T_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Отсюда в свою очередь следует, что $|T| \leqslant \mathfrak{m}$. ∎

2.3.18. Следствие. *В произведении сепарабельных пространств любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств счетно.* ∎

Заметим, что (в противоположность условиям теоремы 2.3.17) ограничение числа сомножителей в теореме Хьюитта — Марчевского — Пондицери существенно (см. первую часть теоремы 1.5.3 и упр. 2.3.G).

Рассмотрим теперь вложения топологических пространств в декартовы произведения. Начнем с двух определений и важной технической теоремы, называемой теоремой о диагональном отображении. Пусть X — топологическое пространство, $\{Y_s\}_{s \in S}$ — семейство топологических пространств и $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ — семейство отображений $f_s\colon X \to Y_s$. Говорят, что семейство $\mathcal{F}$ *разделяет точки*, если для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существует такое отображение $f_s \in \mathcal{F}$, что $f_s(x) \neq f_s(y)$. Если для каждой точки $x \in X$ и каждого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего x, существует такое отображение $f_s \in \mathcal{F}$, что $f_s(x) \notin \overline{f_s(F)}$, то говорят, что семейство $\mathcal{F}$ *разделяет точки и замкнутые множества*. Заметим, что если X есть T_0-пространство, то каждое семейство $\mathcal{F}$, разделяющее точки и замкнутые множества, разделяет и точки. В самом деле, если $x \neq y$, то существует открытое множество U, содержащее ровно одну из этих точек. Обозначим через z ту из двух точек x, y, которая не принадлежит замкнутому множеству $F = X \setminus U$. Тогда $f_s(z) \notin \overline{f_s(F)}$ для некоторого $f_s \in \mathcal{F}$, а это и означает, что $f_s(x) \neq f_s(y)$.

2.3.19. Лемма. *Если отображение $f\colon X \to Y$ взаимно однозначно и одноэлементное семейство $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества, то f — гомеоморфное вложение.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого замкнутого множества $F \subset X$ имеет место соотношение

$$f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}. \tag{2}$$

Если $y = f(x) \in f(X) \setminus f(F)$, то $x \notin F$ и $y = f(x) \notin \overline{f(F)}$. Следовательно, правая часть соотношения (2) содержится в его левой части. Обратное включение очевидно. ∎

2.3.20. Теорема о диагональном отображении. *Если семейство* $\mathcal{F}=\{f_s\}_{s\in S}$, $f_s\colon X\to Y_s$, *разделяет точки, то диагональ* $f=\underset{s\in S}{\Delta} f_s\colon X\to\prod_{s\in S} Y_s$ *есть инъективное отображение. Если, сверх того, семейство* $\mathcal{F}$ *разделяет точки и замкнутые множества, то* f — *гомеоморфное вложение.*

В частности, *если существует такое* $s\in S$, *что* f_s — *гомеоморфное вложение, то* f — *гомеоморфное вложение.*

Доказательство. Если семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки, то для каждой пары различных точек $x, y\in X$ существует такое $f_s\in\mathcal{F}$, что $f_s(x)\neq f_s(y)$. Таким образом, $f(x)\neq f(y)$, а это и означает, что f — инъективное отображение.

Если семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то семейство $\{f\}$ также обладает этим свойством, ибо если $f(x)\in\overline{f(F)}$ для некоторого $F=\bar{F}\subset X$, то $f_s(x)=p_sf(x)\in\in p_s(\overline{f(F)})\subset\overline{p_sf(F)}=\overline{f_s(F)}$ для каждого $s\in S$. Для завершения доказательства остается применить лемму 2.3.19. ∎

2.3.21. Следствие. *Если* $X_s=X$ *для каждого* $s\in S$, *то диагональ* $i=\underset{s\in S}{\Delta}\mathrm{id}_{X_s}\colon X\to\prod_{s\in S}X_s$ *есть гомеоморфное вложение. Следовательно, диагональ* Δ *произведения* $X^{\mathfrak{m}}$ *гомеоморфна пространству* X. ∎

Под *графиком отображения* f пространства X в Y понимают подмножество произведения $X\times Y$, определенное формулой

$$G(f)=\{(x, y)\in X\times Y\colon\ y=f(x)\}.$$

2.3.22. Следствие. *Для каждого непрерывного отображения* $f\colon X\to Y$ *график* $G(f)$ *есть образ пространства* X *при гомеоморфном вложении* $\mathrm{id}_X\Delta f\colon X\to X\times Y$. *Сужение* $p|G(f)$ *проекции* $p\colon X\times Y\to X$ *есть гомеоморфизм. Если* Y — *хаусдорфово пространство, то* $G(f)$ — *замкнутое подмножество пространства* $X\times Y$.

Доказательство. Первая часть следствия очевидна. Вторая часть вытекает из того, что сужение $p|G(f)$ есть обратное отображение к гомеоморфизму $(\mathrm{id}_X\Delta f)|X$. Третья часть вытекает из равенства $G(f)=(f\times\mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta)$, где Δ — диагональ пространства $Y\times Y$, и замкнутости Δ в пространстве $Y\times Y$. ∎

Мы говорим, что пространство X является *универсальным* для всех пространств, обладающих данным топологическим свойством $\mathcal{P}$, если X обладает свойством $\mathcal{P}$ и каждое пространство, обладающее этим свойством, вложимо в X.

Подчеркнем тот факт, что теоремы существования универсальных пространств весьма интересны и полезны. В самом деле, они позволяют свести изучение класса пространств со свойством $\mathscr{P}$ к изучению подпространств некоторого фиксированного топологического пространства (ср., однако, с упр. 2.3.I). Это есть следствие того, что (как объяснялось в конце § 1.4) мы не различаем гомеоморфные между собой пространства.

Тихоновский куб веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ есть пространство $I^{\mathfrak{m}}$, т. е. произведение $\prod\limits_{s \in S} I_s$, где $I_s = I$ для каждого $s \in S$ и $|S| = \mathfrak{m}$. Тихоновский куб $I^{\aleph_0}$ называется *гильбертовым кубом.* Отметим, что если $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, то куб $I^{\mathfrak{n}}$ вложим в $I^{\mathfrak{m}}$.

2.3.23. Теорема. *Тихоновский куб $I^{\mathfrak{m}}$ является универсальным для всех тихоновских пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.*

Доказательство. В § 1.5 мы установили, что замкнутый единичный интервал I является тихоновским пространством; следовательно, в силу теоремы 2.3.11, куб $I^{\mathfrak{m}}$ также является тихоновским пространством. Из теоремы 2.3.13 следует, что $w(I^{\mathfrak{m}}) \leqslant \mathfrak{m}$.

Теперь покажем, что каждое тихоновское пространство X веса $\mathfrak{m}$ вложимо в $I^{\mathfrak{m}}$. Так как дискретное пространство $D(\mathfrak{m})$ является тихоновским пространством веса $\mathfrak{m}$, то из этого следует, в частности, что $w(I^{\mathfrak{m}}) \geqslant \mathfrak{m}$, и это завершает доказательство равенства $w(I^{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$.

Так как X — тихоновское пространство, то семейство всех функционально открытых множеств является базой пространства X. Из теоремы 1.1.15 вытекает, что существует такая база $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X, состоящая из функционально открытых множеств, что $|S| = \mathfrak{m}$. Для каждого $s \in S$ рассмотрим непрерывное отображение $f: X \to I$, такое, что $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$. Семейство $F = \{f_s\}_{s \in S}$ разделяет точки и замкнутые множества. Так как X есть T_0-пространство, то из теоремы о диагональном отображении вытекает, что диагональ $\mathop{\triangle}\limits_{s \in S} f_s$ есть гомеоморфное вложение пространства X в $I^{\mathfrak{m}}$.

Начиная с этого места мы будем обозначать двухточечное дискретное пространство $D(2)$ просто через D и будем отождествлять его с подпространством $\{0, 1\}$ вещественной прямой.

Канторов куб веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ — это пространство $D^{\mathfrak{m}}$, т. е. произведение $\prod\limits_{s \in S} D_s$, где $D_s = D$ для каждого $s \in S$ и $|S| = \mathfrak{m}$. Канторов куб $D^{\aleph_0}$ называется *канторовым множеством.* Из приведенной ниже теоремы 2.3.24 следует, что вес пространства $D^{\mathfrak{m}}$ равен $\mathfrak{m}$. В § 6.2 мы покажем, что канторов куб $D^{\mathfrak{m}}$ также является универсальным пространством для всех нульмерных пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ (см. теорему 6.2.16).

2.3.24. Теорема. *Для каждого $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ и каждого $x \in D^{\mathfrak{m}}$ имеет место равенство* $\chi(x, D^{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$.

Доказательство. Допустим, что $\chi(x, D^{\mathfrak{m}}) \leqslant \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Обозначим через $\mathscr{B}(x)$ базу пространства $D^{\mathfrak{m}}$ в точке x, такую, что $|\mathscr{B}(x)| \leqslant \mathfrak{n}$. Так как $D^{\mathfrak{m}}$ плотно в себе, то $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$. Для каждого $U \in \mathscr{B}(x)$ будем рассматривать содержащуюся в нем окрестность (точки x) вида $\prod\limits_{s \in S} W_s$, где $W_s \neq D_s$ лишь для s, принадлежащих некоторому конечному подмножеству $S(U) \subset S$. Полученное таким путем семейство $\mathscr{B}_0(x)$ также является базой в точке x и имеет мощность $\leqslant \mathfrak{n}$. Множество $S_0 = \bigcup\limits_{U \in \mathscr{B}(x)} S(U)$ имеет мощность $\leqslant \mathfrak{n} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, поэтому существует некоторое $s_0 \in S \setminus S_0$. Очевидно, что окрестность $p_{s_0}^{-1} p_{s_0}(x)$ точки x не содержит элементов семейства $\mathscr{B}_0(x)$, а это означает, что $\mathscr{B}_0(x)$ не является базой в точке x. ∎

2.3.25. Следствие. *Для каждого $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ и каждого $x \in I^{\mathfrak{m}}$ имеет место равенство* $\chi(x, I^{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$. ∎

Оказывается, существует универсальное пространство и для всех T_0-пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Пусть F — топологическое пространство, определенное в примере 1.2.8, где $X = \{0, 1\}$ и $x_0 = 1$, т. е. $F = \{0, 1\}$ с топологией, состоящей из пустого множества, множества $\{0\}$ и всего пространства. Очевидно, что F является T_0-пространством.

Александровский куб веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ — это пространство $F^{\mathfrak{m}}$, т. е. произведение $\prod\limits_{s \in S} F_s$, где $F_s = F$ для каждого $s \in S$ и $|S| = \mathfrak{m}$.

Пусть U — произвольное открытое подмножество T_0-пространства X; определим непрерывное отображение $f\colon X \to F$, положив

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in U, \\ 1 & \text{при } x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Применяя теорему о диагональном отображении, легко доказать следующую теорему.

2.3.26. Теорема. *Александровский куб $F^{\mathfrak{m}}$ универсален для всех T_0-пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.* ∎

Следующие четыре предложения описывают взаимосвязи между замкнутостью и открытостью отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, их произведений $\prod\limits_{s \in S} f_s$ и их диагонали $\mathop{\Delta}\limits_{s \in S} f_s$.

2.3.27. Предложение. *Пусть произведение* $f=\prod_{s\in S} f_s$, *где* $f_s\colon X_s\to Y_s$ *и* $X_s\neq\varnothing$, $s\in S$, *замкнуто. Тогда все отображения* f_s *замкнуты.*

Доказательство. Возьмем $s_0\in S$ и непустое замкнутое множество $F\subset X_{s_0}$. Множество $p_{s_0}^{-1}(F)$ замкнуто в $\prod_{s\in S} X_s$, поэтому замкнут и его образ при отображении f в $\prod_{s\in S} Y_s$. Так как $f(p_{s_0}^{-1}(F))=\prod_{s\in S} A_s$, где $A_{s_0}=f_{s_0}(F)$ и $A_s=f_s(X_s)$ при $s\neq s_0$, то из 2.3.4 следует, что $f_{s_0}(F)$ замкнуто в Y_{s_0}. ∎

2.3.28. Пример. Пусть $f_1=\mathrm{id}_R$ — тождественное отображение вещественной прямой на себя и f_2 — отображение той же прямой в одноточечное дискретное пространство $\{0\}$. Оба отображения замкнуты, однако их декартово произведение $f_1\times f_2\colon R^2\to R\times\{0\}$ не является замкнутым (ср. с примером 2.3.10). ∎

2.3.29. Предложение. *Декартово произведение* $f=\prod_{s\in S} f_s$, *где* $f_s\colon X_s\to Y_s$ *и* $X_s\neq\varnothing$ *для* $s\in S$, *открыто в том и только том случае, если все отображения* f_s *открыты и существует конечное множество* $S_0\subset S$, *такое, что* $f_s(X_s)=Y_s$ *для* $s\in S\setminus S_0$.

Доказательство. Из 1.4.14 и равенства $f\left(\prod_{s\in S} W_s\right)=\prod_{s\in S} f_s(W_s)$ следует, что если отображения f_s удовлетворяют указанным в предложении условиям, то отображение f открыто.

Обратно, пусть f — открытое отображение. Возьмем $s_0\in S$ и непустое открытое множество $U\subset X_{s_0}$. Множество $U\times\prod_{s\in S\setminus\{s_0\}} X_s$ непусто и открыто в $\prod_{s\in S} X_s$, поэтому множество $p_{s_0}f\left(U\times\prod_{s\in S\setminus\{s_0\}} X_s\right)=f_{s_0}(U)$ открыто в Y_{s_0}, ибо проекция p_{s_0} — открытое отображение. Отсюда следует, что отображение f_{s_0} открыто. Так как $\prod_{s\in S} X_s\neq\varnothing$, то $f\left(\prod_{s\in S} X_s\right)=\prod_{s\in S} f_s(X_s)$ — непустое открытое подмножество пространства $\prod_{s\in S} Y_s$. Поэтому оно содержит множество вида $\prod_{s\in S} W_s$, где $W_s\neq Y_s$ только для s, принадлежащих конечному множеству $S_0\subset S$. Тогда для $s\in S\setminus S_0$ мы имеем $f_s(X_s)=Y_s$. ∎

2.3.30. Предложение. *Пусть отображения* $f_1, f_2, \ldots, f_k$, *где* $f_i\colon X\to Y_i$, *замкнуты, и пусть* Y_1 *есть* T_1*-пространство, а* $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ *суть* T_3*-пространства; тогда диагональ* $f=f_1\,\triangle\, f_2\,\triangle\,\ldots\,\triangle\, f_k$ *замкнута.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $f_i\colon X \to Y_i$ замкнуто для $i = 1, 2$, где Y_1 есть T_1-пространство, а Y_2 есть T_2-пространство, то $f = f_1 \triangle f_2$ замкнуто. Возьмем замкнутое множество $A \subset X$ и точку $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \setminus f(A)$. Так как $A \cap f_1^{-1}(y_1) \cap f_2^{-1}(y_2) = \varnothing$, то

$$f_2^{-1}(y_2) \subset X \setminus A \cap f_1^{-1}(y_1).$$

В силу 1.4.13 и регулярности Y_2, существует окрестность $V_2 \subset Y_2$ точки y_2, удовлетворяющая включению

$$f_2^{-1}(\overline{V}_2) \subset X \setminus A \cap f_1^{-1}(y_1).$$

Поэтому

$$f_1^{-1}(y_1) \subset X \setminus A \cap f_2^{-1}(\overline{V}_2),$$

откуда, опять в силу 1.4.13, следует существование такой окрестности $V_1 \subset Y_1$ точки y_1, что

$$f_1^{-1}(V_1) \subset X \setminus A \cap f_2^{-1}(\overline{V}_2), \quad \text{т. е.} \quad A \cap f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(\overline{V}_2) = \varnothing.$$

Последнее равенство показывает, что окрестность $V_1 \times V_2$ точки (y_1, y_2) не пересекается с $f(A)$, откуда и следует замкнутость отображения f. ∎

2.3.31. Примеры. Для $i = 1, 2$ пусть f_i — проекция плоскости R^2 на i-ю ось. Ни f_1, ни f_2 не являются замкнутыми отображениями (см. пример 2.3.10), однако диагональ $f_1 \triangle f_2$ есть тождественное отображение плоскости R^2 на себя и потому замкнута. Таким образом, замкнутость диагонали $f_1 \triangle f_2$ не означает замкнутости f_1 и f_2.

Покажем теперь, что предложение 2.3.30 нельзя обобщить на бесконечное множество отображений. Пусть $X = N$ и $Y_i = D = \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Отображения $f_i\colon X \to Y_i$ определим, положив

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j \leqslant i, \\ 0 & \text{при} \quad j > i. \end{cases}$$

Эти отображения замкнуты, однако диагональ $f = \mathop{\triangle}\limits_{i=1}^{\infty} f_i\colon N \to D^{\aleph_0}$ не замкнута. В самом деле, множество $f(N)$ содержит все точки вида $(0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots)$, но не содержит точку $(0, 0, \ldots)$, следовательно, $f(N)$ не является замкнутым множеством пространства $D^{\aleph_0}$. Другие примеры, связанные с предложением 2.3.30, приведены в упр. 2.3.J. ∎

2.3.32. Предложение. *Если диагональ* $f = \mathop{\triangle}\limits_{s \in S} f_s$, $f_s\colon X \to Y_s$, *открыта, то и все отображения* f_s *открыты.*

Доказательство. Утверждение следует из равенства $f_s = p_s f$ и открытости проекций p_s. ∎

2.3.33. Пример. Пусть $f_1 = f_2 = \mathrm{id}_R\colon R \to R$. Образ R при диагональном отображении $f = f_1 \triangle f_2$ не открыт в R^2. Таким образом, диагональ двух открытых отображений, вообще говоря, не является открытым отображением. В этом примере сужение $f|^!R\colon R \to f(R)$ есть гомеоморфизм и тем самым открытое отображение. Читателю предоставляется найти два открытых отображения f_1 и f_2 интервала I в себя, таких, что сужение $f|I$ диагонали $f = f_1 \triangle f_2$ не является открытым. ∎

Из предложения 2.3.2 вытекает, что декартово произведение гомеоморфных вложений есть гомеоморфное вложение. Легко проверить, что если декартово произведение $\prod_{s \in S} f_s$, где $f_s\colon X_s \to Y_s$ и $X_s \neq \varnothing$ для каждого $s \in S$, есть гомеоморфное вложение, то все f_s — гомеоморфные вложения. Теорема 2.3.20 дает достаточное условие для того, чтобы диагональ была гомеоморфным вложением. Несколько более изощренное необходимое и достаточное условие содержится в упр. 2.3.D.

2.3.34. Предложение. *Направленность $T = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ в произведении $\prod_{s \in S} X_s$ сходится к точке $x \in \prod_{s \in S} X_s$ в том и только том случае, если направленность $T_s = \{p_s(x_\sigma), \sigma \in \Sigma\}$ сходится к $p_s(x)$ для каждого $s \in S$.*

Доказательство. Если $x \in \lim T$, то, в силу предложения 1.6.6, $p_s(x) \in \lim T_s$ для каждого $s \in S$.

Обратно, предположим, что для $x \in \prod_{s \in S} X_s$ мы имеем $p_s(x) \in \lim T_s$ при каждом $s \in S$. Для каждой окрестности U точки x существуют такие элементы $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ и открытые множества $U_i \subset X_{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, что

$$x \in p_{s_1}^{-1}(U_1) \cap p_{s_2}^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap p_{s_k}^{-1}(U_k) \subset U.$$

По предположению существуют такие $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in \Sigma$, что $p_{s_i}(x_\sigma) \subset U_i$ для любого $\sigma \geqslant \sigma_i$ и $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как множество Σ направлено, то существует такое $\sigma_0 \in \Sigma$, что $\sigma_i \leqslant \sigma_0$, $i = 1, 2, \ldots, k$; для каждого $\sigma \geqslant \sigma_0$ имеем

$$x_\sigma \in p_{s_1}^{-1}(U_1) \cap p_{s_2}^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap p_{s_k}^{-1}(U_k) \subset U,$$

и, таким образом, $x \in \lim T$. ∎

Следующее предложение является переложением предыдущего на язык фильтров.

2.3.35. Предложение. *Если $\mathcal{F}$ — фильтр в произведении $\prod_{s \in S} X_s$, то для каждого $s \in S$ семейство $\mathcal{F}_s = \{p_s(F)\colon F \in \mathcal{F}\}$ есть фильтр в X_s. Фильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке $x \in \prod_{s \in S} X_s$ в том и* *только том случае, если фильтр* $\mathcal{F}_s$ *сходится к* $p_s(x)$ *для каждого* $s \in S$. ∎

Мы завершим этот параграф двумя важными примерами, в построении которых решающую роль играют декартовы произведения.

2.3.36. Пример. Покажем, что нормальность не является наследственным свойством (ср. с упр. 2.1.E(b)). Пусть $X = A(\mathfrak{m})$ и $Y = A(\mathfrak{n})$, где $\aleph_0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ (см. пример 1.4.20). Пусть, далее, x_0 и y_0 — точки накопления соответственно пространств X и Y. Произведение $X \times Y$ есть нормальное пространство. Это вытекает из того, что для любой пары непересекающихся замкнутых подмножеств пространства $X \times Y$ существует открыто-замкнутое множество $V \times W \subset X \times Y$, содержащее точку (x_0, y_0) и не пересекающееся по крайней мере с одним из замкнутых множеств, и из нормальности подпространства $X \times Y \setminus (V \times W)$, которая в свою очередь вытекает из 2.2.4 и 2.2.7. Заметим, что нормальность пространства $X \times Y$ следует также из теорем 3.1.9 и 3.2.4, приведенных ниже (ср. с примером 3.2.7).

Пусть $Z = X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Покажем, что для каждого непрерывного отображения $f\colon Z \to R$ существуют такое вещественное число $r \in R$ и такие множества $X_0 \subset X \setminus \{x_0\}$, $Y_0 \subset Y \setminus \{y_0\}$, что $|X_0| \leqslant \aleph_0$, $|Y_0| \leqslant \mathfrak{m}$ и

(4) $f(x, y) = r$ для $(x, y) \in Z \setminus Z_0$, где $Z_0 = (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)$.

Для $x \in X \setminus \{x_0\}$ положим по определению

(5) $Y_0(x) = \{y\colon f(x, y) \neq f(x, y_0)\}$ и $Y_0 = \bigcup\limits_{x \in X \setminus \{x_0\}} Y_0(x) \subset Y \setminus \{y_0\}$.

Из свойства подмножества $\{x\} \times Y$, установленного в примере 1.4.6, следует, что $|Y_0(x)| \leqslant \aleph_0$, и, таким образом, $|Y_0| \leqslant \mathfrak{m}$.

Выберем теперь произвольное $\bar{y} \in Y \setminus \{Y_0 \cup \{y_0\}\}$ и определим

(6) $$X_0 = \{x\colon f(x, \bar{y}) \neq f(x_0, \bar{y})\} \subset X \setminus \{x_0\}.$$

Снова в силу 1.4.6 получаем $|X_0| \leqslant \aleph_0$. Пусть теперь $r = f(x_0, \bar{y})$. Для любой точки $(x, y) \in Z \setminus Z_0$, такой, что $x \neq x_0$, имеем, в силу (5) и (6),

$$f(x, y) = f(x, y_0) = f(x, \bar{y}) = f(x_0, \bar{y}) = r.$$

Из того, что множество $(Z \setminus Z_0) \setminus [\{x_0\} \times (Y \setminus \{y_0\})]$ всюду плотно в пространстве $Z \setminus Z_0$, следует, что если $(x_0, y) \in Z \setminus Z_0$, то $f(x_0, y) = r$. Таким образом, доказательство соотношения (4) закончено.

Фактически мы доказали, что подпространство $Z \subset X \times Y$ не является нормальным. В самом деле, множества $A = (X \setminus \{x_0\}) \times \times \{y_0\}$ и $B = \{x_0\} \times (Y \setminus \{y_0\})$ не пересекаются и замкнуты в Z. Так как для каждого множества Z_0, определенного в (4), мы имеем $A \setminus Z_0 \neq \varnothing \neq B \setminus Z_0$, то из (4) же следует, что не существует непрерывной вещественной функции на Z, равной нулю на A и единице на B. ∎

Этот пример является шагом на пути построения регулярного пространства, не являющегося вполне регулярным (см. пример 2.4.21). Тот факт, что Z не является нормальным, можно установить непосредственно, показав, что множества A и B нельзя отделить непересекающимися открытыми множествами. Это же рассуждение можно провести при более общем предположении $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} < \mathfrak{n}$; читателю рекомендуется восполнить детали.

2.3.37. Пример. В § 1.6 мы описали два счетных пространства, не удовлетворяющих первой аксиоме счетности. Каждое из них имело характер $\leqslant \aleph_0$ во всех точках, кроме одной (ср. с упр. 2.3.E).

Из 2.3.16 следует, что канторов куб $D^{\mathfrak{c}} = \prod_{s \in S} D_s$, где $D_s = D$ для любого $s \in S$ и $|S| = \mathfrak{c}$, содержит всюду плотное счетное подпространство X. Мы докажем, что $\chi(x, X) > \aleph_0$ для каждого $x \in X$ (отметим, что из теоремы 2.3.34 и упр. 2.1.C (a) получается даже больше, а именно что $\chi(x, X) = \mathfrak{c}$). Для этого достаточно показать, что для каждой последовательности $U_1, U_2, \ldots$ окрестностей точки $x \in X$ существует такая окрестность $U \subset X$ точки x, что

$$U_i \setminus U \neq \varnothing \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ существуют конечное множество $S_i \subset S$ и семейство $\{W_s^i\}_{s \in S}$ непустых подмножеств пространства D, такие, что $W_s^i = D$ для $s \in S \setminus S_i$ и

$$X \cap \prod_{s \in S} W_s^i \subset U_i. \tag{8}$$

Выберем некоторое $s_0 \in S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ и рассмотрим окрестность $U = X \cap p_{s_0}^{-1} p_{s_0}(x)$ точки x. Множество $(D^{\mathfrak{c}} \setminus p_{s_0}^{-1} p_{s_0}(x)) \cap \prod_{s \in S} W_s^i$ непусто и открыто в $D^{\mathfrak{c}}$ для $i = 1, 2, \ldots$, поэтому, в силу всюду плотности X в $D^{\mathfrak{c}}$, имеем $(X \setminus U) \cap \prod_{s \in S} W_s^i \neq \varnothing$, что вместе с (8) дает соотношение (7).

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По сравнению с другими операциями на топологических пространствах операция произведения приводит к наиболее интересным теоремам, примерам и задачам. Декартово произведение (конечного числа многообразий) появилось впервые в работе Штейница [1908]. Фреше [1910] первым рассматривал (конечное) декартово произведение абстрактных пространств. Конечные и счетные произведения метрических пространств принадлежат к топологическому фольклору 20-х годов. Произведение произвольного множества топологических пространств было определено Тихоновым [1930]. Теорему 2.3.15 доказали Пондицери [1944], Хьюитт [1946], а также (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) Марчевский [1947]. Следствие 2.3.18 было установлено Марчевским [1947] (при более сильных предположениях: для пространств со второй аксиомой счетности [1941]). Теорема 2.3.17 есть следствие более сильного результата Шанина, сформулированного здесь в задаче 2.7.11 (b). Теорема 2.3.23 была доказана Тихоновым [1930], а теорема 2.3.26 — Александровым [1936]; связанные с ними результаты имеются в упр. 2.3.1 и задачах 2.7.7, 2.7.8 и 2.7.18 (b). Пример 2.3.12 был построен Зоргенфреем [1947].

УПРАЖНЕНИЯ

2.3.A. Покажите, что для любых двух семейств $\{X_s\}_{s\in S}$ и $\{Y_t\}_{t\in T}$ топологических пространств пространства $\left(\bigoplus_{s\in S} X_s\right)\times\left(\bigoplus_{t\in T} Y_t\right)$ и $\bigoplus_{s\in S,\, t\in T}(X_s\times Y_t)$ гомеоморфны. Обобщите этот результат на произвольную совокупность семейств топологических пространств.

2.3.B. (a) Проверьте, что для любых $A\subset X$ и $B\subset Y$ в произведении $X\times Y$ справедливы соотношения

$$\operatorname{Int}(A\times B)=\operatorname{Int}A\times\operatorname{Int}B,\qquad \operatorname{Fr}(A\times B)=(\bar{A}\times\operatorname{Fr}B)\cup(\operatorname{Fr}A\times\bar{B}).$$

(b) Докажите, что если A_s есть F_σ-множество (G_δ-множество) в X_s для любого $s\in S$ и $|S|<\aleph_0$ ($|S|\leqslant\aleph_0$), то $\prod_{s\in S} A_s$ есть F_σ-множество (G_δ-множество) в произведении $\prod_{s\in S} X_s$. Заметим, что в обоих случаях предположение о мощности S существенно.

(c) Докажите, что если A_i — каноническое открытое (замкнутое) множество в X_i, $i=1, 2, \ldots, k$, то $A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$ — каноническое открытое (замкнутое) множество в произведении $X_1\times X_2\times\ldots\times X_k$. Заметим, что предположение о конечности произведения существенно.

2.3.C. (a) Покажите, что X — хаусдорфово пространство в том и только том случае, если диагональ Δ произведения $X\times X$ замкнута в $X\times X$ (ср. с упр. 2.4.C (c)).

Проверьте, что диагональ Δ произведения $X\times X$ открыта в

$X \times X$ тогда и только тогда, когда пространство X дискретно (ср. с упр. 2.4.C (b)).

(b) Приведите пример разрывной функции f прямой R в себя, такой, что график $G(f)$ — замкнутое подпространство плоскости R^2 (ср. со следствием 2.3.22 и упр. 3.1.D).

2.3.D. Докажите, что диагональ $f = \mathop{\Delta}\limits_{s \in S} f_s$, где $f_s\colon X \to Y_s$, является гомеоморфным вложением в том и только том случае, если семейство $\{f_s\}_{s \in S}$ разделяет точки, а семейство $\{f_T\}_{T \in \mathscr{T}}$, где $\mathscr{T}$ — семейство всех конечных подмножеств множества S и $f_T = \mathop{\Delta}\limits_{s \in T} f_s$, разделяет точки и замкнутые множества.

2.3.E. Пусть X — счетное пространство, не имеющее счетной базы в точке x_0. Покажите, что подпространство пространства $X^{\aleph_0}$, состоящее из всех точек $\{x_i\}$, таких, что $x_i = x_0$ для каждого i, большего некоторого целого j, является счетным и не имеет счетной базы ни в одной из своих точек.

2.3.F. (a) Докажите, что вес бесконечного произведения $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$, где $w(X_s) > 1$, равен большему из двух кардинальных чисел $|S|$ и $\sup\limits_{s \in S} \{w(X_s)\}$.

(b) Докажите, что для точки $x = \{x_s\}$ бесконечного произведения $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$, где X_s есть T_1-пространство и $|X_s| > 1$, характер $\chi(x, X)$ равен большему из двух кардинальных чисел $|S|$ и $\sup\limits_{s \in S} \{\chi(x_s, X_s)\}$.

2.3.G. (Пондицери [1944], Марчевский [1947]). Докажите, что произведение $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$, где X_s является T_2-пространством и $|X_s| > 1$, не сепарабельно, если $|S| > \mathfrak{c}$.

2.3.H. Покажите, что пространство X гомеоморфно произведению $\prod\limits_{s \in S} X_s$ в том и только том случае, если существует семейство отображений $\{p_s\}_{s \in S}$, где $p_s\colon X \to X_s$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) *Для любого пространства Y и пары f, $g\colon Y \to X$ непрерывных отображений если $p_s f = p_s g$ для каждого $s \in S$, то $f = g$.*

(2) *Для любого пространства Y и любого семейства отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, где $f_s\colon Y \to X_s$, существует такое отображение $f\colon Y \to X$, что $p_s f = f_s$ для каждого $s \in S$.*

2.3.I. Пусть E — топологическое пространство, определенное в примере 1.2.10, где $X = \{0, 1, 2\}$ и $X_0 = \{0\}$, т. е. пусть $E = \{0, 1, 2\}$ с топологией, состоящей из пустого множества, множества 0 и всего пространства. Покажите, что пространство $E^{\mathfrak{m}}$ универсально для всех топологических пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

2.3.J. (a) Пусть X — тихоновское пространство, не являющееся нормальным, и пусть A, B — два непересекающихся замкнутых подмножества пространства X, которые нельзя отделить непересекающимися открытыми множествами. Обозначим через X_1 и X_2 пространства, полученные из X отождествлением соответственно A и B в точку (см. примеры 1.4.17 и 2.4.12). Пусть f_i — естественное отображение X на X_i, $i = 1, 2$. Установите, что X_1 и X_2 суть T_2-пространства и что f_1 и f_2 — замкнутые отображения, но диагональ $f_1 \triangle f_2$ не является замкнутой. Убедитесь, что даже для $k = 2$ предположение о регулярности в предложении 2.3.30 нельзя ослабить до предположения о том, что $Y_2, Y_3, \ldots$ $\ldots, Y_k$ — хаусдорфовы пространства.

(b) Пусть $Y_1 = F = \{0, 1\}$ с топологией, состоящей из пустого множества, множества $\{0\}$ и всего пространства, и пусть $Y_2 = A(\aleph_0)$ с единственной точкой накопления y_0. Положим $X = Y_1 \times Y_2 \setminus \{(0, y_0)\}$ и $f_i = p_i | X$: $X \to Y_i$, где p_i — проекция пространства $Y_1 \times Y_2$ на Y_i, $i = 1, 2$. Проверьте, что оба отображения f_1 и f_2 замкнуты, однако диагональ $f_1 \triangle f_2$ не замкнута. Установите, что условие в предложении 2.3.30 о том, что Y_1 есть T_1-пространство, нельзя ослабить до условия, что Y_1 есть T_0-пространство.

(c) Видоизменяя пример из (a), определите замкнутые отображения f_1 и f_2 тихоновского пространства X соответственно в хаусдорфовы пространства Y_1 и Y_2 таким образом, чтобы сужение $f | X$: $X \to f(X)$ диагонали $f = f_1 \triangle f_2$ не было замкнутым. Аналогично видоизмените (b) и вторую часть 2.3.31.

2.3.K (Франклин [1965] и [1967]). (a) Установите, что произведение $X \times X$, где X есть пространство Фреше — Урысона из упр. 1.6.E, не является секвенциальным пространством (ср. с упр. 2.4.G (c) и 3.10.I (b)).

Указание. Примените упражнение 2.3.C (a).

(b) Проверьте, что произведение $X \times Y$, где $X = I$ и Y есть пространство Фреше — Урысона из примера 1.6.18, не является пространством Фреше — Урысона (из упр. 3.10.I (b) следует, что это произведение является секвенциальным пространством).

2.3.L. (a) Покажите, что если некоторое топологическое свойство $\mathscr{P}$ наследственно по отношению к открытым и замкнутым множествам и счетно мультипликативно, то в классе хаусдорфовых пространств свойство $\mathscr{P}$ наследуется G_δ-множествами.

(b) (Ван дер Слот [1966]). Покажите, что если некоторое топологическое свойство $\mathscr{P}$ наследственно по отношению к замкнутым и открытым множествам и мультипликативно, то, когда замкнутый интервал I обладает свойством $\mathscr{P}$, им обладают и все тихоновские пространства.

2.4. ФАКТОРПРОСТРАНСТВА И ФАКТОРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть X — топологическое пространство и E — некоторое отношение эквивалентности на множестве X. Обозначим через X/E множество всех классов эквивалентности отношения E, а через q — отображение множества X на X/E, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности $[x] \in X/E$. В поисках хорошей топологии на X/E резонно потребовать, чтобы отображение q было непрерывным. В классе всех топологий на X/E, относительно которых q непрерывно, существует самая тонкая: это семейство всех множеств U, таких, что $q^{-1}(U)$ открыто в X. Эта топология называется *фактортопологией*, множество X/E, снабженное этой топологией, называется *факторпространством*, а q: $X \to X/E$ — *естественным факторным отображением* или, коротко, *естественным отображением*.

2.4.1. Предложение. *Множество F в факторпространстве X/E замкнуто тогда и только тогда, когда $q^{-1}(F)$ — замкнутое подмножество пространства X.*

Доказательство. Предложение следует из равенства

$$q^{-1}(X/E \setminus F) = X \setminus q^{-1}(F). \ \blacksquare$$

2.4.2. Предложение. *Отображение f факторпространства X/E в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция fq.*

Доказательство. Пусть f непрерывно; тогда fq также непрерывно. Обратно, пусть fq непрерывно; тогда для каждого открытого множества $U \subset Y$ множество $(fq)^{-1}(U) = q^{-1}f^{-1}(U)$ открыто в X, а это означает, что $f^{-1}(U)$ открыто в X/E. $\blacksquare$

Пусть X и Y — топологические пространства и f — непрерывное отображение X на Y. Рассмотрим отношение эквивалентности $E(f)$ на множестве X, определенное разложением $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ пространства X на прообразы одноточечных подмножеств Y при отображении f. Отображение f: $X \to Y$ можно представить как композицию $\bar{f}q$, где q: $X \to X/E(f)$ — естественное отображение, а $\bar{f}$ — отображение факторпространства $X/E(f)$ на Y, заданное формулой $\bar{f}(f^{-1}(y)) = y$. Отображение $\bar{f}$ непрерывно в силу 2.4.2. Следующая диаграмма наглядно иллюстрирует сказанное:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\
& X/E(f) \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, что $\bar{f}$ — взаимно однозначное непрерывное отображение пространства $X/E(f)$ на Y, но, вообще говоря, не гомеоморфизм. В самом деле, если f — взаимно однозначное отображение дискретного пространства $X = D(\mathfrak{c})$ на интервал $Y = I$, то факторпространство $X/E(f)$ также дискретно, поэтому $\bar{f}$ не является гомеоморфизмом. Теперь попытаемся изучить класс всех таких отображений f, что $\bar{f}$ — гомеоморфизм. Оказывается, эти отображения порождают совместное обобщение замкнутых и открытых отображений (среди отображений «на»).

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на Y называется *факторным отображением* (*или факторотображением*), если оно есть композиция естественного отображения и некоторого гомеоморфизма, т. е. если существуют такое отношение эквивалентности E на множестве X и такой гомеоморфизм $f'\colon X/E \to Y$, что $f = f'q$, где $q\colon X \to X/E$ — естественное отображение.

2.4.3. Предложение. *Для отображения f топологического пространства X на топологическое пространство Y следующие условия равносильны:*

(i) *Отображение f есть факторотображение.*

(ii) *Множество $f^{-1}(U)$ открыто в X тогда и только тогда, когда U открыто в Y.*

(iii) *Множество $f^{-1}(F)$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда F замкнуто в Y.*

(iv) *Отображение $\bar{f}\colon X/E(f) \to Y$ есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Пусть f — факторотображение, т. е. $f = f'q$, где $f'\colon X/E \to Y$ — гомеоморфизм, а $q\colon X \to X/E$ — естественное отображение. По определению факторпологии множество $f^{-1}(U) = q^{-1}(f')^{-1}(U)$ открыто в X тогда и только тогда, когда $(f')^{-1}(U)$ открыто в X/E; так как f' — гомеоморфизм, то последнее утверждение имеет место тогда и только тогда, когда U открыто в Y. Итак, мы доказали, что (i) $\Rightarrow$ (ii).

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) следует непосредственно из равенства $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$.

Пусть теперь f удовлетворяет условию (iii). Так как отображение $\bar{f}\colon X/E(f) \to Y$ взаимно однозначно, то для доказательства (iv) достаточно показать (см. предложение 1.4.18), что для каждого замкнутого $F \subset X/E(f)$ множество $\bar{f}(F)$ замкнуто в Y. Но $f^{-1}\bar{f}(F) = q^{-1}\bar{f}^{-1}\bar{f}(F) = q^{-1}(F)$ замкнуто в X, поэтому множество $\bar{f}(F)$ замкнуто в Y в силу (iii).

Импликация (iv) $\Rightarrow$ (i) очевидна. ∎

2.4.4. Следствие. *Композиция двух факторотображений есть факторотображение.* ∎

2.4.5. Следствие. *Пусть композиция gf непрерывных отображений*

f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ есть факторотображение; тогда g: $Y \to Z$ есть факторотображение.

Доказательство. Очевидно, что $g(Y) = Z$, ибо $(gf)(X) = Z$. Если прообраз $g^{-1}(U)$ множества $U \subset Z$ открыт в Y, то $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$ открыто в X, и тогда U открыто в Z, так как gf — факторотображение. ∎

Легко проверить, что если композиция gf есть факторное отображение, то отображение f (даже если оно есть отображение «на») не обязательно является факторным.

2.4.6. Следствие. *Если для непрерывного отображения f: $X \to Y$ существует такое множество $A \subset X$, что $f(A) = Y$ и сужение $f|A$ есть факторотображение, то и f — факторотображение.*

Доказательство. Это вытекает из 2.4.5 и равенства $f|A = fi_A$. ∎

2.4.7. Следствие. *Любое взаимно однозначное факторотображение есть гомеоморфизм.* ∎

2.4.8. Следствие. *Замкнутые отображения «на» и открытые отображения «на» суть факторотображения.*

Доказательство. Если f: $X \to Y$ — отображение «на», то $ff^{-1}(B) = B$ для любого $B \subset Y$. ∎

В связи с последним следствием встает вопрос, каким образом охарактеризовать те отношения эквивалентности, для которых естественное факторотображение замкнуто или открыто. На этот вопрос отвечает следующее предложение.

2.4.9. Предложение. *Пусть E — некоторое отношение эквивалентности на топологическом пространстве X; тогда следующие условия равносильны:*

(i) *Естественное отображение q: $X \to X/E$ замкнуто (открыто).*

(ii) *Для любого замкнутого (открытого) множества $A \subset X$ объединение всех пересекающихся с ним классов эквивалентности замкнуто (открыто) в X.*

(iii) *Для любого открытого (замкнутого) множества $A \subset X$ объединение всех содержащихся в нем классов эквивалентности открыто (замкнуто) в X.*

Доказательство. Равносильность (i) и (ii) следует из предложения 2.4.1 и определения факторпологии. Равносильность (ii) и (iii) есть непосредственное следствие законов де Моргана. ∎

2.4.10. Следствие. *Факторотображение f: $X \to Y$ замкнуто (открыто) в том и только том случае, если множество $f^{-1}f(A) \subset X$ замкнуто (открыто) для любого замкнутого (открытого) $A \subset X$.* ∎

Отношение эквивалентности E на пространстве X называется *замкнутым* (*открытым*), если замкнуто (открыто) естественное отображение q: $X \to X/E$. Условия (ii) и (iii) предложения 2.4.9 дают внутреннюю характеристику замкнутых и открытых отношений эквивалентности. Из условия (ii) следует, что классы эквивалентности замкнутого отношения эквивалентности на T_1-пространстве суть замкнутые множества.

Как известно, существует взаимно однозначное соответствие между отношениями эквивалентности на некотором множестве и разбиениями этого множества на непересекающиеся подмножества. Иногда удобнее сразу пользоваться разбиениями, а не отношениями эквивалентности. Разбиения, соответствующие замкнутым (открытым) отношениям эквивалентности, называются *полунепрерывными сверху* (*снизу*) (о происхождении этой терминологии см. задачу 1.7.17 (a)). В этом контексте также часто используется слово «*отождествление*» (главным образом в связи с полунепрерывными сверху разбиениями): говорят, что факторпространство X/E, где E — отношение эквивалентности, соответствующее разбиению $\mathscr{E}$, получается отождествлением каждого элемента $\mathscr{E}$ в некоторую точку.

2.4.11. Пример. Пусть отображение f: $R \to S^1$ определено равенством $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Очевидно, что для $x, y \in R$ мы имеем $xE(f)y$ в том и только том случае, когда разность $x - y$ есть целое число. При отображении f вещественная прямая наматывается на единичную окружность таким образом, что каждый интервал $(x, y]$ длины 1 обходит всю окружность ровно один раз (т. е. на этом интервале отображение взаимно однозначно). Очевидно, что f переводит открытые интервалы (x, y), $y - x < 1$, на открытые дуги окружности S^1, и, следовательно, f есть открытое и тем более факторное отображение. Отсюда следует, что факторпространство $R/E(f)$ гомеоморфно S^1. Читателю предоставляется убедиться, что f не замкнуто.

Сужение $g = f|I$: $I \to S^1$, как легко проверить, есть замкнутое (но не открытое) отображение. В частности, g — факторотображение и факторпространство $I/E(g)$ гомеоморфно S^1. Разбиение замкнутого интервала I, соответствующее $E(g)$, состоит из всех одноточечных множеств x, $0 < x < 1$, и множества $\{0, 1\}$. Таким образом, факторпространство S^1 получается отождествлением обоих концов I в точку. Читатель может легко проверить, что декартово произведение $g \times g$: $I^2 \to S^1 \times S^1$ также является факторотображением, и определить, какие отождествления в квадрате необходимо сделать, чтобы получить тор. ∎

Используя язык факторпространств, мы дадим теперь точное описание операции отождествления замкнутых множеств в точки, которая была применена выше при построении нескольких примеров (см. пример 1.4.17, замечание, предшествующее примеру 1.5.21, и упр. 2.3.J (a)).

2.4.12. Пример. Пусть X — некоторое топологическое пространство, и пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — последовательность попарно непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X. Обозначим через E отношение эквивалентности на X, соответствующее разбиению X на множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$. Для каждого замкнутого множества $A \subset X$ объединение всех классов эквивалентности, пересекающихся с A, равно объединению A и тех из A_i, для которых $A_i \cap A \neq \varnothing$. Это объединение есть замкнутое множество, и естественное отображение $q: X \to X/E$ замкнуто в силу 2.4.9. Факторпространство X/E получается из X отождествлением каждого из множеств A_i в точку $q(A_i)$. Легко показать, что множества $X \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k)$ и $X/E \setminus \{q(A_1), q(A_2), \ldots, q(A_k)\}$ гомеоморфны (см. предложение 2.1.4). Пространство, полученное отождествлением в точку только одного замкнутого подмножества $A \subset X$, обозначается X/A. ∎

Рассмотрим теперь важный частный случай построения факторпространства — так называемое присоединенное пространство. Пусть X и Y — два непересекающихся топологических пространства и $f: M \to Y$ — непрерывное отображение, определенное на замкнутом подмножестве M пространства X. Обозначим через E отношение эквивалентности на сумме $X \oplus Y$, соответствующее разбиению пространства $X \oplus Y$ на одноточечные множества $\{x\}$, $x \in X \setminus M$, и множества вида $\{y\} \cup f^{-1}(y)$, где $y \in Y$ (если $y \in Y \setminus f(M)$, то последнее множество есть одноточечное множество $\{y\}$). Факторпространство $(X \oplus Y)/E$ называется *присоединенным пространством*, определенным пространствами X, Y и отображением f, и обозначается $X \cup_f Y$. Легко видеть, что если Y — одноточечное пространство, то $X \cup_f Y$ гомеоморфно пространству X/M.

Пусть $i_X: X \to X \oplus Y$ и $i_Y: Y \to X \oplus Y$ — вложения X и Y в пространство $X \oplus Y$, и пусть $q: X \oplus Y \to X \cup_f Y$ — естественное отображение. Композиции

$$j = qi_X: X \to X \cup_f Y \quad \text{и} \quad k = qi_Y: Y \to X \cup_f Y$$

непрерывны и множество $C \subset X \cup_f Y$ открыто (замкнуто) в том и только том случае, если $j^{-1}(C)$ и $k^{-1}(C)$ открыты (замкнуты) соответственно в X и Y. Легко проверить, что

(1) $\quad j^{-1}k(B) = f^{-1}(B)$ и $k^{-1}k(B) = B$ для $B \subset Y$,

(2) $j^{-1}j(A) = A \cup f^{-1}f(A \cap M)$ и $k^{-1}j(A) = f(A \cap M)$ для $A \subset X$.

Из формул (1) следует, что $k\colon Y \to X \cup_f Y$ есть замкнутое отображение. Так как k инъективно, оно является гомеоморфным вложением. Образ $k(Y)$ замкнут в $X \cup_f Y$. Аналогично, из формул (2) вытекает, что $j|X\setminus M$ — открытое отображение. Так как $j|X\setminus M$ инъективно, оно является гомеоморфным вложением, а образ $j(X\setminus M)$ есть открытое множество в $X \cup_f Y$ и является дополнением множества $k(Y)$. Из формул (2) также следует, что j — замкнутое отображение в том и только том случае, если замкнуто отображение f. Поэтому факторотображение $q\colon X \oplus Y \to X \cup_f Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто отображение f.

Если, кроме того, $f(M) = Y$, то $j(X) = X \cup_f Y$, а так как замкнутость f влечет за собой замкнутость j, то имеет место следующая теорема.

2.4.13. Теорема. *Пусть M — замкнутое подпространство пространства X и $\mathscr{E}$ — полунепрерывное сверху разбиение множества M; тогда разбиение пространства X на элементы $\mathscr{E}$ и одноточечные множества $\{x\}$, $x \in X\setminus M$, полунепрерывно сверху.* ∎

Операция образования факторпространства сохраняет мало топологических свойств по сравнению с операциями, изученными в § 2.1—2.3. Очевидно, что сохраняются в точности те топологические свойства, которые инвариантны при факторотображениях. Так как и замкнутые, и открытые отображения «на» факторные, то инварианты факторотображений являются инвариантами замкнутых и открытых отображений. Следовательно, среди топологических свойств, инвариантность которых обсуждалась в § 1.4 и 1.5, только свойство «плотность $\leqslant \mathfrak{m}$» могло бы сохраняться факторными отображениями. Как мы знаем (теорема 1.4.10), это свойство сохраняется даже всеми непрерывными отображениями. Чтобы получить факторпространство X/E с хорошими топологическими свойствами, обычно налагают дополнительные условия на классы эквивалентности отношения E или на их взаимосвязи. Такие условия могут быть выражены в виде дополнительных свойств естественного отображения, соответствующего E. Например, как легко видеть, факторпространство X/E является T_1-пространством в том и только том случае, когда классы эквивалентности замкнуты в X, а из теоремы 1.5.20 следует, что если X нормально и отношение эквивалентности E на X замкнуто, то и факторпространство X/E нормально.

2.4.14. Предложение. *Факторпространство некоторого факторпространства пространства X является факторпространством пространства X.*

Точнее, *если E — отношение эквивалентности на пространстве X, а E' — отношение эквивалентности на факторпростран-*

стве X/E, то отображение $\overline{q'q}$: $X/E(q'q) \to (X/E)/E'$, где q: $X \to X/E$ и q': $X/E \to (X/E)/E'$ — естественные факторотображения, является гомеоморфизмом.

Доказательство. В силу 2.4.4, композиция $q'q$ есть факторотображение. Следовательно, $\overline{q'q}$ — гомеоморфизм в силу равносильности условий (i) и (iv) в предложении 2.4.3. ∎

Пусть X — некоторое топологическое пространство и E — отношение эквивалентности на X. Тогда на любом подпространстве A пространства X определено отношение эквивалентности $E|A = (A \times A) \cap E$ — сужение E на A, причем $E|A = E(q|A)$, где q: $X \to X/E$ — естественное отображение. Возникает вопрос, будет ли отображение $\overline{q|A}$: $A/(E|A) \to q(A) \subset X/E$ гомеоморфизмом. Очевидно, что этот вопрос равносилен такому: будет ли сужение $f|A$: $A \to f(A)$ факторного отображения f факторным отображением. Как показано в примерах 2.4.16 и 2.4.17 ниже, ответ, вообще говоря, отрицателен. Заметим, однако, что из предложения 2.4.3 немедленно получается следующий положительный результат (ср. с упр. 2.4.F).

2.4.15. Предложение. *Если f: $X \to Y$ — факторотображение, то для любого открытого или замкнутого множества $B \subset Y$ сужение f_B: $f^{-1}(B) \to B$ есть факторотображение.*

Другими словами, *если E — некоторое отношение эквивалентности на пространстве X, то для любого открытого или замкнутого множества $A \subset X$, удовлетворяющего условию $q^{-1}q(A) = A$, где q: $X \to X/E$ — естественное отображение, отображение $\overline{q|A}$: $A/(E|A) \to q(A) \subset X/E$ есть гомеоморфизм.* ∎

2.4.16. Пример. Пусть g: $I \to S^1$ — факторотображение, определенное в 2.4.11. Сужение $g|A$: $A \to g(A) = S^1$ на открытое подмножество $A = (0, 1] \subset I$ взаимно однозначно, но не является гомеоморфизмом, следовательно, $g|A$ не является факторотображением. Более того, комбинация $h = \mathrm{id}_{S^1} \nabla (g|A)$: $S^1 \oplus A \to S^1$ есть факторотображение в силу следствия 2.4.6, ибо $h|S^1 = \mathrm{id}_{S^1}$, однако сужение $h|A = g|A$ на открыто-замкнутое подмножество $A \subset S^1 \oplus A$ факторотображением не является. ∎

2.4.17. Пример. Пусть $X = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left\{1,\ 1 + \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{3},\ \ldots\right\}$ с топологией, индуцированной из R, и пусть E — отношение эквивалентности на X, определенное следующим образом: xEy в том и только том случае, когда $|x - y| = 1$ или $x = y$. Легко заметить, что множество $A = \{1\} \cup \left[\left(0, \frac{1}{2}\right] \setminus \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\right\}\right] \subset X$ имеет вид $q^{-1}(B)$ для $B = q(A) \subset X/E$, а сужение q_B: $A \to q(A)$ взаимно однозначно. Так как 1 — изолированная точка в A, а

$q_B(1)$ не изолирована в $q(A)$, то сужение q_B не является гомеоморфизмом, а потому не является и факторотображением.

Читатель легко установит, что если ограничиться соответствующим счетным подпространством пространства X, то можно получить в качестве факторпространства пространство примера 1.6.19 (ср. с упр. 2.4.G(a)). ∎

2.4.18. Предложение. *Пусть X — топологическое пространство, $\{A_s\}_{s\in S}$ — некоторое его покрытие и $\{f_s\}_{s\in S}$ — семейство согласованных отображений $f_s\colon A_s \to Y$, такое, что комбинация $f = \nabla_{s\in S} f_s\colon X\to Y$ непрерывна. Если существует такое множество $S_0 \subset S$, что сужения $f_s|A_s\colon A_s\to f_s(A_s)$ суть факторотображения для $s\in S_0$ и $\{f_s(A_s)\}_{s\in S_0}$ является либо открытым покрытием пространства Y, либо его локально конечным замкнутым покрытием, то комбинация f есть факторотображение.*

Доказательство. Пусть $\{f_s(A_s)\}_{s\in S_0}$ — открытое покрытие пространства Y, и пусть прообраз $f^{-1}(U)$ множества $U\subset Y$ открыт в X. Так как множество $A_s\cap f^{-1}(U) = (f_s|A_s)^{-1}(U\cap f_s(A_s))$ открыто в A_s, то для каждого $s\in S_0$ множество $U\cap f_s(A_s)$ открыто в $f_s(A_s)$, а потому и в Y. Следовательно, объединение $\bigcup_{s\in S_0} U\cap f_s(A_s) = U\cap \bigcup_{s\in S_0} f_s(A_s) = U\cap Y = U$ открыто в Y. Подобным же образом доказывается, что если $\{f_s(A_s)\}_{s\in S_0}$ — локально конечное замкнутое покрытие пространства Y, то из замкнутости $f^{-1}(F)$ в X следует замкнутость F в Y. В обоих случаях утверждение о том, что f — факторотображение, следует из предложения 2.4.3. ∎

Пусть теперь $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство топологических пространств и E_s — отношение эквивалентности на X_s для каждого $s\in S$. Определим отношение эквивалентности E на произведении $\prod_{s\in S} X_s$, полагая $\{x_s\}E\{y_s\}$ в том и только том случае, когда $x_sE_sy_s$ для каждого $s\in S$. Отношение E называется (*декартовым*) *произведением отношений* $\{E_s\}_{s\in S}$ и обозначается $\prod_{s\in S} E_s$ или $E_1\times E_2\times \ldots \times E_k$, если $S=\{1, 2, \ldots, k\}$. Легко видеть, что $\prod_{s\in S} E_s = E\left(\prod_{s\in S} q_s\right)$, где $q_s\colon X_s\to X_s/E_s$ — естественное отображение. Возникает вопрос, является ли отображение $\overline{\prod_{s\in S} q_s}\colon \prod_{s\in S} X_s / \prod_{s\in S} E_s \to \prod_{s\in S} (X_s/E_s)$ гомеоморфизмом. Очевидно, что этот вопрос равносилен такому: является ли декартово произведение факторотображений факторотображением. Как показано в примере 2.4.20 ниже, ответ, вообще говоря, отрицателен даже в случае двух факторотображений, одно из которых тождественно, а другое замкнуто (ср. с теоремой 3.3.17 и задачей 3.12.14 (b)). Отметим, что для открытых отношений эквивалентности имеет место следующий положительный результат, вытекающий из предложения 2.3.29.

2.4.19. Предложение. *Для каждого $s \in S$ пусть E_s — открытое отношение эквивалентности на пространстве X_s, а $q_s\colon X_s \to X_s/E_s$ — естественное отображение; тогда отображение $\overline{\prod_{s \in S} q_s}\colon \prod_{s \in S} X_s / \prod_{s \in S} E_s \to \prod_{s \in S} (X_s/E_s)$ есть гомеоморфизм.* ∎

2.4.20. Пример. Пусть $X_1 = Y_1 = R \setminus \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}$ наделены топологией как подпространства R, и пусть $f_1 = \mathrm{id}_{X_1}\colon X_1 \to Y_1$. Пусть Y_2 — факторпространство, полученное из $X_2 = R$ отождествлением множества положительных целых чисел в точку (ср. с примерами 1.4.17 и 2.4.12), и пусть $f_2\colon X_2 \to Y_2$ — естественное отображение; как известно, отображение f_2 замкнуто. Мы покажем, что декартово произведение $f = f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ не является факторотображением.

Множество $F_{ij} = \left\{ x \in X_1\colon \left| \frac{1}{j} - x \right| \leqslant \frac{1}{i} \right\} \times \left\{ j - \frac{1}{i} \right\} \subset X_1 \times X_2$ замкнуто для $i, j = 2, 3, \ldots$ и семейство $\{F_{ij}\}_{i, j=2}^{\infty}$ локально конечно. Поэтому объединение $F = \bigcup_{i, j=2}^{\infty} F_{ij}$ замкнуто в $X_1 \times X_2$. Так как $(0, f_2(1)) \subset \overline{f(F)} \setminus f(F)$, то множество $f(F)$ не замкнуто в $Y_1 \times Y_2$. Из очевидного равенства $F = f^{-1}f(F)$ следует, что f не является факторотображением. ∎

Опишем теперь регулярное пространство, не являющееся вполне регулярным, используя операцию образования факторпространств.

2.4.21. Пример. Пусть Z — пространство, определенное в примере 2.3.36; положим $Z_i = Z \times \{i\}$ для каждого положительного целого i, и пусть $Z^* = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$. Выберем некоторую точку $z \notin Z^*$ и введем топологию на множестве $T^* = Z^* \cup \{z\}$ при помощи системы окрестностей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in T^*}$, где $\mathscr{B}(x)$ для любого $x \in Z^*$ есть семейство всех открытых подмножеств множества Z^*, содержащих x, и $\mathscr{B}(z) = \{U_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$, где $U_i(z) = T^* \setminus \bigcup_{j=1}^{i} Z_j$. Читатель легко проверит, что T^* — вполне регулярное пространство, а Z^* — его подпространство.

Определим отношение эквивалентности E на T^*, полагая t_1Et_2 в том и только том случае, когда $t_1 = t_2$ или выполнено одно из следующих условий:

(3) $\{t_1, t_2\} = \{(x, y_0, i), (x, y_0, i+1)\}$ для $x \in X \setminus \{x_0\}$ и нечетного i,

4) $\{t_1, t_2\} = \{(x_0, y, i), (x_0, y, i+1)\}$ для $y \in Y \setminus \{y_0\}$ и четного i.

Следовательно, факторпространство $T = T^*/E$ получается отождествлением соответствующих точек в $A \times \{i\}$ и $A \times \{i+1\}$ для каждого нечетного i и отождествлением соответствующих точек в $B \times \{i\}$ и $B \times \{i+1\}$ для каждого четного i. Заметим, что полные прообразы точек при естественном отображении q: $T^* \to T$ суть одноточечные и двухточечные множества.

Пространство T и служит искомым примером. Так как классы эквивалентности отношения E замкнуты, T есть T_1-пространство. Проверка регулярности T предоставляется читателю (достаточно заметить, что q замкнуто, и применить теорему 3.7.20). Мы докажем, что T не является вполне регулярным пространством. Для этого достаточно показать, что для точки $t = q(z)$, не содержащего ее замкнутого множества $F = q(A \times \{1\})$ и каждого непрерывного отображения f: $T \to I$, такого, что $f(F) = \{1\}$, мы имеем $f(t) = 1$. Рассмотрим функцию $f_i = f(q|Z_i)$: $Z_i \to I$, $i = 1, 2, \ldots$. В силу свойства Z, установленного в 2.3.36, существуют такое вещественное число r_i и такие множества $X_{0,i} \subset \subset X \setminus \{x_0\}$, $Y_{0,i} \subset Y \setminus \{y_0\}$, что $|X_{0,i}| \leqslant \aleph_0$, $|Y_{0,i}| \leqslant \mathfrak{m}$ и

$$f_i(x, y, i) = r_i \text{ для } (x, y) \in Z \setminus Z_{0,i},$$

$$\text{где } Z_{0,i} = (X_{0,i} \times Y) \cup (X \times Y_{0,i}).$$

Полагая $X_0^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{0,i}$, $Y_0^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_{0,i}$ и $Z_0^* = (X_0^* \times Y) \cup (X \times Y_0^*)$, получаем

(5) $$A \setminus Z_0^* \neq \varnothing \neq B \setminus Z_0^*,$$

(6) $$f_i(x, y, i) = r_i \text{ для } (x, y) \in Z \setminus Z_0^* \text{ и } i = 1, 2, \ldots.$$

В результате выполненных отождествлений имеем

$f_i(x, y_0, i) = f_{i+1}(x, y_0, i+1)$ для $x \in X \setminus \{x_0\}$ и любого нечетного i,

$f_i(x_0, y, i) = f_{i+1}(x_0, y, i+1)$ для $y \in Y \setminus \{y_0\}$ и любого четного i,

а это вместе с соотношениями (5) и (6) означает, что $r_{i+1} = r_i$ для $i = 1, 2, \ldots$. Так как $f_1(A \times \{1\}) = f(F) = \{1\}$, то $r_i = 1$ для

$i=1, 2, \ldots$. Замыкание множества $M=\{q(x,y,i)\colon (x, y)\in Z\setminus Z_0^*, i=1, 2, \ldots\}$ содержит точку t, и так как $f(M)=\{1\}$, то $f(t)=1$. ■

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Факторпространства впервые появились в работе Р. Л. Мора [1925] и Александрова [1927] (объявлено в [1925]). Оба автора изучали частный случай, когда факторпространство порождается полунепрерывным сверху разбиением (Мор изучал только разбиения плоскости на континуумы). Понятие факторпространства в полной общности, так же как и понятие факторотображения введены Бэром и Леви [1932] и впервые систематически изучены в книгах Бурбаки [1940] и [1951]. Присоединенное пространство введено Борсуком [1935] (для компактных метрических пространств). Пример 2.4.21 (и вспомогательный пример 2.3.36) получен как комбинация примеров Тихонова [1930] и Новака [1948]. Простой пример регулярного пространства, не являющегося вполне регулярным, построен недавно Мысьором [1981a].

УПРАЖНЕНИЯ

2.4.A. (М. Стоун [1936]). Пусть X — произвольное топологическое пространство; положим xE_0y в том и только том случае, если $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$. Покажите, что E_0 — отношение эквивалентности на X и что X/E_0 есть T_0-пространство. Покажите, кроме того, что если для некоторого отношения эквивалентности E на X факторпространство X/E есть T_0-пространство, то $E_0\subset E$.

Указание. Множество $\overline{\{x\}}$ есть объединение классов эквивалентности отношения E_0.

2.4.B. Пусть E — отношение эквивалентности на пространстве X, E' — отношение эквивалентности на пространстве Y и отображение $f\colon X\to Y$ таково, что xEy влечет за собой $f(x)E'f(y)$. Определим отображение $f^*\colon X/E\to Y/E'$ равенством $f^*q=q'f$, где $q\colon X\to X/E$ и $q'\colon Y\to Y/E'$ — естественные отображения. Докажите, что если f — факторотображение, то f^* тоже факторотображение, а если оба отображения f и q' замкнуты (открыты), то f^* тоже замкнуто (открыто).

Заметим, что если заданы замкнутые подмножества $A\subset X$ и $B\subset Y$ и такое отображение $f\colon X\to Y$, что $f(A)\subset B$, то $f^*\colon X/A\to Y/B$ замкнуто, когда f замкнуто.

2.4.C. (a) Приведите пример замкнутого (открытого) отношения эквивалентности E на каком-либо пространстве X, такого, что множество E не является замкнутым (открытым) в произведении $X \times X$. Приведите пример отношения эквивалентности E на пространстве X, такого, что E не является замкнутым отношением эквивалентности, однако множество E замкнуто в произведении $X \times X$.

(b) Покажите, что если E — некоторое отношение эквивалентности на пространстве X и множество E открыто в произведении $X \times X$, то факторпространство X/E дискретно и E — открытое отношение.

(c) Пусть E — отношение эквивалентности на топологическом пространстве X. Покажите, что если факторпространство X/E хаусдорфово, то E — замкнутое подмножество произведения $X \times X$. Пусть E — замкнутое подмножество произведения $X \times X$, а отношение E открыто; проверьте, что тогда X/E — хаусдорфово пространство.

2.4.D. (a) Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ и $\{Y_s\}_{s \in S}$ — два семейства топологических пространств, таких, что $X_s \cap Y_s = \varnothing$ для $s \in S$, и пусть $\{f_s\}_{s \in S}$ — семейство отображений $f_s\colon M_s \to Y_s$, где M_s — некоторое замкнутое подпространство пространства X_s. Установите, что присоединенное пространство $\left(\bigoplus_{s \in S} X_s\right) \cup_{\left(\bigoplus_{s \in S} f_s\right)} \left(\bigoplus_{s \in S} Y_s\right)$ гомеоморфно сумме $\bigoplus_{s \in S} (X_s \cup_{f_s} Y_s)$.

(b) Для $i = 1$ и 2 определите такие непересекающиеся топологические пространства X_i, Y_i и такое отображение $f_i\colon M_i \to Y_i$, где M_i — замкнутое подпространство пространства X_i, что присоединенное пространство $(X_1 \times X_2) \cup_{(f_1 \times f_2)} (Y_1 \times Y_2)$ не гомеоморфно произведению $(X_1 \cup_{f_1} Y_1) \times (X_2 \cup_{f_2} Y_2)$.

Указание. См. пример 2.4.20.

2.4.E. (a) Установите, что сумма $\bigoplus_{s \in S} f_s$ является факторотображением в том и только том случае, когда отображения f_s факторные.

(b) Приведите пример двух открытых отображений $f_1\colon X \to Y_1$ и $f_2\colon X \to Y_2$, таких, что сужение $f|X\colon X \to f(X)$ диагонали $f = f_1 \triangle f_2$ не является факторным.

Указание. Возьмите $X = [0, 1)$.

(c) Покажите, что для каждой ретракции $f\colon X \to X$ сужение $f|X\colon X \to f(X)$ есть факторотображение.

2.4.F (Макдугл [1958] и [1959], Архангельский [1963], Динь Ньё Тонг [1963], Филиппов [1969a]). Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *наследственно факторным*, если для каждого $B \subset Y$ сужение $f_B\colon f^{-1}(B) \to B$ есть факторотображение.

(a) Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ наследственно факторное в том и только том случае, если множество $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset Y$ замкнуто для каждого $B \subset Y$, или, что равносильно, в том и только том случае, если для каждого $y \in Y$ и каждого открытого $U \subset X$, содержащего $f^{-1}(y)$, мы имеем $y \in \operatorname{Int} f(U)$.

(b) Проверьте, что композиция двух наследственно факторных отображений является наследственно факторным отображением, что сумма наследственно факторных отображений есть наследственно факторное отображение и что предложение 2.4.18 имеет место также для наследственно факторных отображений.

(c) Покажите, что любое факторотображение $f: X \twoheadrightarrow Y$ на пространство Фреше — Урысона, в котором каждая последовательность имеет не более одного предела (в частности, на T_2-пространство Фреше — Урысона), является наследственно факторным.

(d) Применяя (c) к соответствующим примерам факторотображений, покажите, что сужения наследственно факторных отображений на открыто-замкнутые подмножества области определения, декартовы произведения двух наследственно факторных отображений и сужения диагоналей (см. упр. 2.4.E (b)) двух наследственно факторных отображений, вообще говоря, не являются факторотображениями.

2.4.G (Архангельский [1963a], Франклин [1965] и [1967]). (a) Покажите, что образ секвенциального пространства при факторотображении есть секвенциальное пространство и что образ пространства Фреше — Урысона при наследственно факторном отображении есть пространство Фреше — Урысона.

Покажите, что образ секвенциального пространства при непрерывном отображении не обязан быть секвенциальным пространством, а образ пространства Фреше — Урысона при факторотображении, вообще говоря, не является пространством Фреше — Урысона.

(b) Пусть X — секвенциальное пространство и $\mathscr{C}$ — семейство всех таких последовательностей $x_0, x_1, x_2, \ldots$ точек пространства X, что $x_0 \in \lim x_i$. Для каждого $c = \{x_i\} \in \mathscr{C}$ положим $X_c = \{c\} \times (0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$, где $\{c\}$ — одноточечное дискретное пространство и $\{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ наделено топологией подпространства из R. Определим $f_c: X_c \twoheadrightarrow X$ формулами

$$f_c((c, 0)) = x_0 \quad \text{и} \quad f_c((c, 1/i)) = x_i.$$

Покажите, что комбинация $f_X = \nabla_{c \in \mathscr{C}} f_c: \bigoplus_{c \in \mathscr{C}} X_c \to X$ есть факторотображение и что секвенциальные пространства можно охарактеризовать как образы пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, при факторотображениях (ср. с упр. 4.2.D (c)). Установите, что подпространство M секвенциального пространства X является секвенциальным в том и только том случае, если сужение $(f_X)_M: f_X^{-1}(M) \to M$ есть факторотображение. Выведите отсюда, что пространство X наследственно секвенциально тогда и только тогда, когда оно является пространством Фреше — Урысона (ср. с задачей 3.12.15). Покажите, что пространства Фреше — Урысона можно охарактеризовать как образы пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, при наследственно факторных отображениях (ср. с упр. 4.2.D (c)).

(c) Покажите, используя пример 2.4.20, что произведение нормального пространства со второй аксиомой счетности и нормального пространства Фреше — Урысона не обязано быть секвенциальным пространством (ср. с упр. 2.3.K (a) и примером 3.3.29).

2.5. ПРЕДЕЛЫ ОБРАТНЫХ СПЕКТРОВ

Пусть Σ — направленное множество, и пусть каждому $\sigma \in \Sigma$ поставлено в соответствие топологическое пространство X_σ. Пусть, далее, для любых $\sigma, \rho \in \Sigma$, таких, что $\rho \leqslant \sigma$, определено непрерывное отображение $\pi^\sigma_\rho\colon X_\sigma \to X_\rho$. Пусть, кроме того, $\pi^\rho_\tau \pi^\sigma_\rho = \pi^\sigma_\tau$ для любых $\sigma, \rho, \tau \in \Sigma$, таких, что $\tau \leqslant \rho \leqslant \sigma$, и $\pi^\sigma_\sigma = \mathrm{id}_{X_\sigma}$ для каждого $\sigma \in \Sigma$. В этом случае говорят, что семейство $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ есть *обратный спектр пространств* X_σ; отображения π^σ_ρ называются *связующими отображениями* обратного спектра S.

Обратный спектр $S = \{X_i, \pi^i_j, N\}$, где N — множество всех положительных целых чисел с естественным порядком, называется *обратной последовательностью* и обозначается через $\{X_i, \pi^i_j\}$.

Пусть $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр; элемент $\{x_\sigma\}$ произведения $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ называется *нитью* обратного спектра S, если $\pi^\sigma_\rho(x_\sigma) = x_\rho$ для любых $\sigma, \rho \in \Sigma$, удовлетворяющих неравенству $\rho \leqslant \sigma$. Подпространство пространства $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$, состоящее из всех нитей спектра S, называется *пределом обратного спектра* $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ и обозначается через $\varprojlim S$ или $\varprojlim \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$.

2.5.1. Предложение. *Предел обратного спектра $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ хаусдорфовых пространств X_σ есть замкнутое подпространство произведения $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$.*

Доказательство. Для любых $\rho, \tau \in \Sigma$, таких, что $\tau \leqslant \rho$, положим

$$M_{\rho\tau} = \left\{ x = \{x_\sigma\} \in \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma\colon \pi^\rho_\tau(x_\rho) = x_\tau \right\}.$$

Так как, в силу теоремы 1.5.4, множества $M_{\rho\tau}$ замкнуты в произведении $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$, то множество $\varprojlim S = \bigcap_{\tau\leqslant\rho} M_{\rho\tau}$ также замкнуто в произведении $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$. ∎

Из теорем 2.1.6 и 2.3.11 следует

2.5.2. Теорема. *Предел обратного спектра T_i-пространств есть T_i-пространство, если $i \leqslant 3\frac{1}{2}$.* ∎

Из примера 2.5.3 и упр. 3.1.H(a) (или задачи 2.7.16(a)) вытекает, что предел обратного спектра совершенно нормальных пространств не обязан быть нормальным. Однако предел обратной последовательности совершенно нормальных пространств является совершенно нормальным (см. задачу 2.7.15(b)). Это последнее заключение неверно для нормальных или наследственно нормальных пространств (см. замечание к задаче 2.7.15).

2.5.3. Пример. Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство топологических пространств, причем $|S| \geqslant \aleph_0$. Заметим, что семейство Σ всех конечных подмножеств множества S направлено по включению, т. е. направлено отношением $\leqslant$, определенным так: $\rho \leqslant \sigma$ в том и только том случае, когда $\rho \subset \sigma$. Пусть $X_\sigma = \prod_{s\in\sigma} X_s$ для каждого $\sigma \in \Sigma$. Для любых σ, $\rho \in \Sigma$, таких, что $\rho \leqslant \sigma$, определено непрерывное отображение π^σ_ρ: $X_\sigma \to X_\rho$ — сужение элементов пространства X_σ на подмножество $\rho \subset \sigma$. Легко установить, что $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр топологических пространств.

Для любого $s \in S$ положим $\sigma_s = \{s\} \in \Sigma$. Легко проверить, что, поставив в соответствие каждой точке $\{x_\sigma\} \in \varprojlim S$ точку $\{x_{\sigma_s}\} \in \prod_{s\in S} X_s$, мы определим гомеоморфизм пространства $\varprojlim S$ на произведение $\prod_{s\in S} X_s$. Следовательно, применяя операцию предела обратного спектра, можно выразить бесконечные произведения в терминах конечных произведений. ∎

2.5.4. Пример. Пусть Σ — семейство подпространств топологического пространства X, направленное по включению $\supset$, т. е. обладает тем свойством, что для любых L_1, $L_2 \in \Sigma$ существует такое $M \in \Sigma$, что $M \subset L_1 \cap L_2$. Для любых M, $L \in \Sigma$, таких, что $M \subset L$, пусть π^M_L: $M \to L$ — вложение M в L. Легко установить, что $S = \{M, \pi^M_L, \Sigma\}$ — обратный спектр (где пространство, соответствующее $M \in \Sigma$, есть само M) и что $\varprojlim S$ гомеоморфен подпространству $\bigcap\Sigma$ пространства X. В частности, каждое подпространство A T_1-пространства X можно представить как предел обратного спектра открытых подпространств пространства X. В самом деле, $A = \bigcap\Sigma$, где Σ — направленное семейство всех открытых подмножеств пространства X, которые содержат множество A и имеют дополнение, состоящее из конечного числа точек. ∎

Пусть $\boldsymbol{S}=\{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр топологических пространств, и пусть $X=\varprojlim \boldsymbol{S}$. Для каждого $\sigma\in\Sigma$ определим отображение $\pi_\sigma=p_\sigma|X\colon X\to X_\sigma$, где $p_\sigma\colon \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma\to X_\sigma$ — проекция. Отображение π_σ называется *проекцией предела обратного спектра* $\boldsymbol{S}$ *на* X_σ. Очевидно, что для любых $\sigma, \rho\in\Sigma$, таких, что $\rho\leqslant\sigma$, проекции π_σ и π_ρ удовлетворяют равенству $\pi_\rho=\pi^\sigma_\rho\pi_\sigma$.

2.5.5. Предложение. *Семейство всех множеств $\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma)$, где U_σ — открытое подмножество пространства X_σ и σ пробегает подмножество Σ', конфинальное множеству Σ, есть база предела обратного спектра $\boldsymbol{S}=\{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$.*

Более того, *если для каждого $\sigma\in\Sigma$ база $\mathscr{B}_\sigma$ пространства X_σ фиксирована, то подсемейство, состоящее из тех $\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma)$ для которых $U_\sigma\in\mathscr{B}_\sigma$, также образует базу.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{B}$ семейство, описанное в первой части предложения, и пусть $X=\varprojlim \boldsymbol{S}$. Так как проекции π_σ непрерывны, то все элементы семейства $\mathscr{B}$ открыты в пространстве X. Поэтому остается показать, что каждое непустое открытое множество $U\subset X$ может быть представлено как объединение подсемейства семейства $\mathscr{B}$. Очевидно, достаточно показать, что для каждого $x=\{x_\sigma\}\in U$ существуют такое $\sigma\in\Sigma'$ и такое открытое подмножество $U_\sigma\subset X_\sigma$, что $x\in\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma)\subset U$.

По определению индуцированной топологии, существует открытое множество $V\subset\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$, такое, что $U=X\cap V$, и, в силу предложения 2.3.1, найдутся $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\in\Sigma$ и открытые в $X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}, \ldots, X_{\sigma_k}$ соответственно множества $U_1, U_2, \ldots, U_k$, для которых

$$x\in p_{\sigma_1}^{-1}(U_1)\cap p_{\sigma_2}^{-1}(U_2)\cap\ldots\cap p_{\sigma_k}^{-1}(U_k)\subset V. \tag{1}$$

Так как множество Σ направлено, а Σ' конфинально Σ, то существует такое $\sigma\in\Sigma'$, что $\sigma_i\leqslant\sigma$ для $i=1, 2, \ldots, k$. Все множества $(\pi^\sigma_{\sigma_i})^{-1}(U_i)$ и их пересечение $U_\sigma=\bigcap_{i=1}^{k}(\pi^\sigma_{\sigma_i})^{-1}(U_i)$ открыты в X_σ. Далее, так как $\pi^\sigma_{\sigma_i}(x_\sigma)=x_{\sigma_i}$, то

$$x_\sigma\in U_\sigma. \tag{2}$$

Очевидно, что имеет место соотношение

$$\pi_\sigma^{-1}(\pi^\sigma_{\sigma_i})^{-1}(U_i)=\pi_{\sigma_i}^{-1}(U_i)=X\cap p_{\sigma_i}^{-1}(U_i); \tag{3}$$

используя (2), (3) и (1), мы получаем включение

$$x \in \pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) = \pi_\sigma^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \left(\pi_{\sigma_i}^{\sigma}\right)^{-1}(U_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \pi_\sigma^{-1}\left(\pi_{\sigma_i}^{\sigma}\right)^{-1}(U_i) =$$

$$= X \cap \bigcap_{i=1}^{k} p_{\sigma_i}^{-1}(U_i) \subset X \cap V = U,$$

которое завершает доказательство того факта, что $\mathscr{B}$ — база пространства X.

Вторая часть данного предложения есть непосредственное следствие первой части и определения базы. ∎

2.5.6. Предложение. *Для каждого подпространства A предела X обратного спектра $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ семейство $\boldsymbol{S}_A = \{\bar{A}_\sigma, \tilde{\pi}_\rho^\sigma, \Sigma\}$, где $A_\sigma = \pi_\sigma(A)$ и $\tilde{\pi}_\rho^\sigma(x) = \pi_\rho^\sigma(x)$ для $x \in \bar{A}_\sigma$, является обратным спектром и $\varprojlim \boldsymbol{S}_A = \bar{A} \subset X$.*

Доказательство. Так как $\pi_\rho(x) = \tilde{\pi}_\rho^\sigma \pi_\sigma(x)$ для $x \in A$ и $\rho \leqslant \sigma$, имеют место соотношения

$$\tilde{\pi}_\rho^\sigma(\bar{A}_\sigma) = \tilde{\pi}_\rho^\sigma\left(\overline{\pi_\sigma(A)}\right) \subset \overline{\tilde{\pi}_\rho^\sigma \pi_\sigma(A)} = \overline{\pi_\rho(A)} = \bar{A}_\rho,$$

которые доказывают, что $\boldsymbol{S}_A$ есть обратный спектр.

Очевидно, что $\varprojlim \boldsymbol{S}_A \subset X$. Из предложений 2.3.2 и 2.1.2 следует, что $\varprojlim \boldsymbol{S}_A$ есть подпространство пространства X; более того, оно является замкнутым подпространством пространства X. В самом деле, для каждого $x = \{x_\sigma\} \in X \setminus \varprojlim \boldsymbol{S}_A$ существует такое $\sigma(x) \in \Sigma$, что $x_{\sigma(x)} \in X_{\sigma(x)} \setminus \bar{A}_{\sigma(x)}$. Таким образом, $\pi_{\sigma(x)}^{-1}\left(X_{\sigma(x)} \setminus \bar{A}_{\sigma(x)}\right)$ является окрестностью точки x, не пересекающейся с $\varprojlim \boldsymbol{S}_A$. Из очевидного включения $A \subset \varprojlim \boldsymbol{S}_A$ следует, что $\bar{A} \subset \varprojlim \boldsymbol{S}_A$.

Выберем теперь любую точку $x = \{x_\sigma\} \in \varprojlim \boldsymbol{S}_A$. В силу предложения 2.5.5, семейство всех множеств $\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma)$, где U_σ — окрестность точки x_σ в пространстве X_σ, есть база пространства X в точке x. Для каждого элемента $\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma)$ этой базы имеем $x_\sigma \in \bar{A}_\sigma \cap U_\sigma$ и, таким образом, $A_\sigma \cap U_\sigma \neq \varnothing$, или, что равносильно, $A \cap \pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $x \in \bar{A}$, т. е. $\varprojlim \boldsymbol{S}_A \subset \subset \bar{A}$. ∎

2.5.7. Следствие. *Всякое замкнутое подпространство A предела X обратного спектра $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ есть предел обратного* *спектра* $S_A = \{\bar{A}_\sigma, \tilde{\pi}^\sigma_\rho, \Sigma\}$ *замкнутых подпространств* $\bar{A}_\sigma$ *пространств* X_σ. ∎

Из 2.5.1, 2.5.3 и 2.5.7 получается

2.5.8. Теорема. *Пусть* $\mathscr{P}$ *— топологическое свойство, наследуемое замкнутыми подмножествами и конечно мультипликативное. Топологическое пространство* X *гомеоморфно пределу обратного спектра* T_2*-пространств, обладающих свойством* $\mathscr{P}$, *в том и только том случае, если* X *гомеоморфно замкнутому подпространству произведения* T_2*-пространств, обладающих свойством* $\mathscr{P}$. ∎

Пусть даны два обратных спектра $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ и $S' = \{Y_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$. *Отображение обратного спектра* S *в обратный спектр* S' есть семейство $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$, состоящее из неубывающей функции $\varphi\colon \Sigma' \to \Sigma$, такой, что множество $\varphi(\Sigma')$ конфинально Σ, и непрерывных отображений $f_{\sigma'}\colon X_{\varphi(\sigma')} \to Y_{\sigma'}$, определенных для всех $\sigma' \in \Sigma'$ и таких, что

$$\pi^{\sigma'}_{\rho'} f_{\sigma'} = f_{\rho'} \pi^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}, \tag{4}$$

т. е. таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_{\varphi(\sigma')} & \xrightarrow{f_{\sigma'}} & Y_{\sigma'} \\ {\scriptstyle \pi^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{\sigma'}_{\rho'}} \\ X_{\varphi(\rho')} & \xrightarrow{f_{\rho'}} & Y_{\rho'} \end{array}$$

коммутативна для любых $\sigma', \rho' \in \Sigma'$, удовлетворяющих неравенству $\rho' \leqslant \sigma'$.

Любое отображение обратного спектра S в обратный спектр S' индуцирует непрерывное отображение предела $\varprojlim S$ в $\varprojlim S'$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим отображение $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ обратного спектра $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ в $S' = \{Y_{\rho'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$. Для нити $x = \{x_\sigma\} \in X = \varprojlim S$ и каждого $\sigma' \in \Sigma'$ положим

$$y_{\sigma'} = f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}); \tag{5}$$

полученная таким образом точка $\{y_{\sigma'}\} \in \prod_{\sigma' \in \Sigma'} Y_{\sigma'}$ есть нить, т. е. $\{y_{\sigma'}\} \in Y = \varprojlim S'$. Действительно, для любых $\sigma', \rho' \in \Sigma', \rho' \leqslant \sigma'$, имеем, в силу (4) и (5),

$$\pi^{\sigma'}_{\rho'}(y_{\sigma'}) = \pi^{\sigma'}_{\rho'} f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}) = f_{\rho'} \pi^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}(x_{\varphi(\sigma')}) = f_{\rho'}(x_{\varphi(\rho')}) = y_{\rho'}.$$

Поставим в соответствие точке $x = \{x_\sigma\} \in X$ точку $y = \{y_{\sigma'}\} \in Y$. Тем самым мы определим отображение $f\colon X \to Y$. Покажем, что

f непрерывно. В силу предложения 2.5.5, достаточно показать, что прообразы при отображении f всех множеств $\pi_{\sigma'}^{-1}(U_{\sigma'})$, где $U_{\sigma'}$ — открытое подмножество пространства $Y_{\sigma'}$, открыты в пространстве X. Из (5) следует, что для $x = \{x_\sigma\} \in X$ имеют место равенства

(6) $$\pi_{\sigma'} f(x) = f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}) = f_{\sigma'}\pi_{\varphi(\sigma')}(x);$$

значит, прообраз $f^{-1}\pi_{\sigma'}^{-1}(U_{\sigma'}) = \pi_{\varphi(\sigma')}^{-1} f_{\sigma'}^{-1}(U_{\sigma'})$ открыт, ибо $f_{\sigma'}$ и $\pi_{\varphi(\sigma')}$ непрерывны. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *предельным отображением, индуцированным семейством* $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$, и обозначается через $\varprojlim\{\varphi, f_{\sigma'}\}$,

2.5.9. Лемма. *Пусть* $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ — *отображение обратного спектра* $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ *в обратный спектр* $\boldsymbol{S}' = \{Y_{\sigma'}, \pi_{\rho'}^{\sigma'}, \Sigma'\}$. *Если все отображения* $f_{\sigma'}$ *инъективны, то предельное отображение* $f = \varprojlim\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ *также инъективно. Если, более того, все* $f_{\sigma'}$ — *отображения «на», то* f *также есть отображение «на».*

Доказательство. Пусть $x = \{x_\sigma\}$ и $z = \{z_\sigma\}$ — две различные точки пространства $\varprojlim \boldsymbol{S}$. Выберем элемент $\sigma_0 \in \Sigma$, такой, что $x_{\sigma_0} \neq z_{\sigma_0}$, и элемент $\sigma' \in \Sigma'$, удовлетворяющий неравенству $\sigma_0 \leqslant \varphi(\sigma')$. Ясно, что $x_{\varphi(\sigma')} \neq z_{\varphi(\sigma')}$. Так как отображение $f_{\sigma'}$ инъективно, то $f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}) \neq f_{\sigma'}(z_{\varphi(\sigma')})$. Таким образом, $f(x) \neq f(z)$.

Предположим теперь, что $f_{\sigma'}$ для каждого $\sigma' \in \Sigma'$ является взаимно однозначным отображением пространства $X_{\varphi(\sigma')}$ на пространство $Y_{\sigma'}$. Выберем точку $y = \{y_{\sigma'}\} \in \varprojlim \boldsymbol{S}'$. Из соотношения (4) следует, что равенство $\varphi(\sigma') = \varphi(\rho')$ влечет за собой равенство $f_{\sigma'}^{-1}(y_{\sigma'}) = f_{\rho'}^{-1}(y_{\rho'})$. Таким образом, для каждого элемента $\varphi(\sigma') \in \varphi(\Sigma')$ точка

$$z_{\varphi(\sigma')} = f_{\sigma'}^{-1}(y_{\sigma'}) \in X_{\varphi(\sigma')}$$

вполне определена. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ выберем такой элемент $\sigma' \in \Sigma'$, что $\sigma \leqslant \varphi(\sigma')$, и положим

$$x_\sigma = \pi_\sigma^{\varphi(\sigma')}(z_{\varphi(\sigma')}) \in X_\sigma.$$

Легко показать, что x_σ не зависит от выбора σ', что $x = \{x_\sigma\}$ — нить спектра $\boldsymbol{S}$ и $f(x) = y$. ∎

2.5.10. Предложение. *Пусть* $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ — *отображение обратного спектра* $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ *в обратный спектр* $\boldsymbol{S}' = \{Y_{\sigma'}, \pi_{\rho'}^{\sigma'}, \Sigma'\}$. *Если все отображения* $f_{\sigma'}$ — *гомеоморфизмы, то предельное отображение* $f = \varprojlim\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ *также является гомеоморфизмом.*

Доказательство. В силу леммы и предложения 2.5.5, достаточно показать, что для каждого $\sigma' \in \Sigma'$ и любого открытого $U \subset X_{\varphi(\sigma')}$ образ при отображении f множества $\pi^{-1}_{\varphi(\sigma')}(U)$ открыт в $\varprojlim S'$. Из соотношения (6) вытекает, что для $A \subset Y_{\sigma'}$ мы имеем $\pi^{-1}_{\varphi(\sigma')} f^{-1}_{\sigma'}(A) = f^{-1}\pi^{-1}_{\sigma'}(A)$. Положим $A = f_{\sigma'}(U)$; так как $f_{\sigma'}$ — взаимно однозначное отображение пространства $X_{\varphi(\sigma')}$ на $Y_{\sigma'}$, то мы получаем

$$\pi^{-1}_{\varphi(\sigma')}(U) = \pi^{-1}_{\varphi(\sigma')} f^{-1}_{\sigma'} f_{\sigma'}(U) = f^{-1}\pi^{-1}_{\sigma'} f_{\sigma'}(U).$$

Поэтому множество

$$f\pi^{-1}_{\varphi(\sigma')}(U) = ff^{-1}\pi^{-1}_{\sigma'} f_{\sigma'}(U) = \pi^{-1}_{\sigma'} f_{\sigma'}(U)$$

открыто в пространстве $\varprojlim S'$. ∎

2.5.11. Следствие. *Пусть* $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — *обратный спектр и* Σ' — *подмножество, конфинальное* Σ. *Отображение, состоящее в сужении всех нитей из* $X = \varprojlim S$ *на* Σ', *есть гомеоморфизм пространства* X *на пространство* $X' = \varprojlim S'$, *где* $S' = \{X_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$. ∎

2.5.12. Следствие. *Пусть* $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — *обратный спектр. Пусть, далее, в направленном множестве* Σ *имеется такой элемент* σ_0, *что* $\sigma \leqslant \sigma_0$ *для каждого* $\sigma \in \Sigma$. *Тогда предел обратного спектра* S *гомеоморфен пространству* X_{σ_0}. ∎

Из следствия 2.5.11 вытекает, что, рассматривая отображение $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ обратного спектра $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ в обратный спектр $S' = \{Y_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$, можно всегда считать, что $\varphi(\Sigma') = \Sigma$. В самом деле, когда мы отождествляем предел обратного спектра S и предел обратного спектра $S'' = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \varphi(\Sigma')\}$, как описано в 2.5.11, то предельные отображения пространства $\varprojlim S$ в пространство $\varprojlim S'$ и пространства $\varprojlim S''$ в пространство $\varprojlim S'$ совпадают.

Легко установить, что каждое счетное направленное множество содержит конфинальное подмножество, линейно упорядоченное отношением $\leqslant$ и подобное множеству N всех положительных целых чисел. Поэтому из 2.5.11 вытекает, что вместо обратного спектра $\{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ с $|\Sigma| = \aleph_0$ можно рассматривать обратную последовательность. Рассматривая отображение $\{\varphi, f_i\}$ обратной последовательности в обратную последовательность, можно считать, что $\varphi = \mathrm{id}_N$.

Приступим теперь к доказательству двух теорем, показывающих, что предельные отображения можно выразить в терминах декартовых произведений, а проекции обратных спектров — в терминах предельных отображений. Эти теоремы найдут применение в дальнейшем при доказательстве принадлежности предельных отображений и проекций некоторым классам отображений (см. следствие 3.2.15, теоремы 3.7.11, 3.7.12 и задачу 6.3.16 (а)).

2.5.13. Теорема. *Для любого отображения* $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ *обратного спектра* $S=\{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ *в обратный спектр* $S'=\{Y_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$ *существует гомеоморфное вложение* $h\colon \varprojlim S \to \prod_{\sigma'\in\Sigma'} Z_{\sigma'}$, *где* $Z_{\sigma'}=X_{\varphi(\sigma')}$, *такое, что* $\varprojlim\{\varphi, f_{\sigma'}\}=\left(\prod_{\sigma'\in\Sigma'} f_{\sigma'}\right)h$. *Если все пространства* $X_{\varphi(\sigma')}$ *хаусдорфовы, то* $h(\varprojlim S)$ *является замкнутым подпространством произведения* $\prod_{\sigma'\in\Sigma'} Z_{\sigma'}$.

Доказательство. Для каждого $\sigma\in\varphi(\Sigma')$ диагональное отображение $i_\sigma=\mathop{\Delta}_{\sigma'\in\varphi^{-1}(\sigma)} \mathrm{id}_{X_\sigma}\colon X_\sigma\to\prod_{\sigma'\in\varphi^{-1}(\sigma)} Z_{\sigma'}$ является гомеоморфным вложением, и если пространство X_σ хаусдорфово, то $i_\sigma(X_\sigma)$ замкнуто. Композиция h описанного в 2.5.11 гомеоморфизма $\varprojlim S$ на $\varprojlim S''$, где $S''=\{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \varphi(\Sigma')\}$, и сужения $\left(\prod_{\sigma\in\varphi(\Sigma')} i_\sigma\right)\Big|\varprojlim S''\colon \varprojlim S''\to\prod_{\sigma'\in\Sigma'} Z_{\sigma'}$ также является гомеоморфным вложением, и если все $X_{\varphi(\sigma')}$ хаусдорфовы, то $h(\varprojlim S)$ — замкнутое подпространство пространства $\prod_{\sigma'\in\Sigma'} Z_{\sigma'}$. Равенство $\varprojlim\{\varphi, f_{\sigma'}\}=\left(\prod_{\sigma'\in\Sigma'} f_{\sigma'}\right)h$ очевидно. ∎

2.5.14. Теорема. *Для каждого обратного спектра* $S=\{X_\rho, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ *и любого* $\sigma_0\in\Sigma$ *существуют обратный спектр* $S'=\{Y_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$ (*в котором* $Y_{\sigma'}=X_{\sigma_0}$ *при любом* $\sigma'\in\Sigma'$), *гомеоморфизм* $h\colon \varprojlim S'\to X_{\sigma_0}$ *и отображение* $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ *спектра* S *в* S', *где* $f_{\sigma'}$ — *связующие отображения спектра* S, *такие, что* $\pi_{\sigma_0}=h\varprojlim\{\varphi, f_{\sigma'}\}$.

Доказательство. Определим обратный спектр $S'=\{Y_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$, полагая $\Sigma'=\{\sigma'\in\Sigma\colon \sigma_0\leqslant\sigma'\}$, $Y_{\sigma'}=X_{\sigma_0}$ для $\sigma'\in\Sigma'$ и $\pi^{\sigma'}_{\rho'}=\mathrm{id}_{X_{\sigma_0}}$ для любых $\sigma', \rho'\in\Sigma'$, таких, что $\rho'\leqslant\sigma'$. Предел спектра S' совпадает с диагональю Δ произведения $\prod_{\sigma'\in\Sigma'} Y_{\sigma'}=X^{\mathfrak{m}}_{\sigma_0}$, где $\mathfrak{m}=|\Sigma'|$. Обозначим через h гомеоморфизм Δ на X_{σ_0}, обратный гомеоморфизму $\left(\mathop{\Delta}_{\sigma'\in\Sigma'} \mathrm{id}\, X_{\sigma_0}\right)\Big| X_{\sigma_0}\colon X_{\sigma_0}\to\Delta$. Семейство $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$, где $\varphi(\sigma')=\sigma'$ и $f_{\sigma'}=\pi^{\sigma'}_{\sigma_0}$ при $\sigma'\in\Sigma'$, есть отображение обратного спектра $\boldsymbol{S}$ в обратный спектр $\boldsymbol{S}'$. Соотношение $\pi_{\sigma_0} = h \varprojlim \{\varphi, f_{\sigma'}\}$ очевидно. ∎

Мы закончим этот параграф рассмотрением двух важных частных случаев отображений обратных спектров.

Пусть X — топологическое пространство и Σ — непустое направленное множество. Обратный спектр $\boldsymbol{S}(X, \Sigma) = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$, в котором $X_\sigma = X$ для $\sigma \in \Sigma$ и $\pi_\rho^\sigma = \mathrm{id}_X$ для любых $\sigma, \rho \in \Sigma$, удовлетворяющих неравенству $\rho \leqslant \sigma$, называется *постоянным обратным спектром* пространства X над множеством индексов Σ. Ясно, что отображение $h: X \to \varprojlim \boldsymbol{S}(X, \Sigma)$, относящее точке $x \in X$ нить $\{x_\sigma\}$ с $x_\sigma = x$ для $\sigma \in \Sigma$, является гомеоморфизмом пространства X на пространство $\varprojlim \boldsymbol{S}(X, \Sigma)$, совпадающее с диагональю произведения $\prod\limits_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma = X^{\mathfrak{m}}$, где $|\Sigma| = \mathfrak{m}$.

Если заданы обратный спектр $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ с $\Sigma \neq \varnothing$, топологическое пространство X и семейство $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ отображений $f_\sigma: X \to X_\sigma$, такие, что $\pi_\rho^\sigma f_\sigma = f_\rho$, когда $\sigma, \rho \in \Sigma$ и $\rho \leqslant \sigma$, то семейство $\{\mathrm{id}_\Sigma, f_\sigma\}$ является отображением постоянного обратного спектра $\boldsymbol{S}(X, \Sigma)$ в обратный спектр $\boldsymbol{S}$. Тем самым определено предельное отображение $f = \varprojlim \{\mathrm{id}_\Sigma, f_\sigma\}$ из $\varprojlim \boldsymbol{S}(X, \Sigma)$ в $\varprojlim \boldsymbol{S}$ Композиция $fh: X \to \varprojlim \boldsymbol{S}$, где h — определенный выше гомеоморфизм пространства X на $\varprojlim \boldsymbol{S}(X, \Sigma)$, называется *предельным отображением, индуцированным семейством* $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, и обозначается через $\varprojlim f_\sigma$.

Аналогично, если заданы обратный спектр $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ с $\Sigma \neq \varnothing$, топологическое пространство X и семейство $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ таких отображений $f_\sigma: X_\sigma \to X$, что $f_\sigma \pi_\rho^\sigma = f_\sigma$ для любых $\sigma, \rho \in \Sigma$, удовлетворяющих неравенству $\rho \leqslant \sigma$, то семейство $\{\mathrm{id}_\Sigma, f_\sigma\}$ является отображением обратного спектра $\boldsymbol{S}$ в постоянный обратный спектр $\boldsymbol{S}(X, \Sigma)$, так что определено предельное отображение $f = \varprojlim \{\mathrm{id}_\Sigma, f_\sigma\}$ пространства $\varprojlim \boldsymbol{S}$ в $\varprojlim \boldsymbol{S}(X, \Sigma)$. Композиция $h^{-1}f: \varprojlim \boldsymbol{S} \to X$, где h — определенный выше гомеоморфизм X на $\varprojlim \boldsymbol{S}(X, \Sigma)$, называется *предельным отображением, индуцированным семейством отображений* $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, и обозначается через $\varprojlim f_\sigma$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие предела обратной последовательности появилось в несколько другой форме в работе П. С. Александрова [1929];

настоящее определение впервые появилось у Лефшеца [1931]. Отображения обратных последовательностей и индуцированные ими предельные отображения впервые изучались Фрейденталем в работе [1937]. Стинрод [1936] рассматривал частный случай обратных спектров, у которых Σ — множество ординалов, направленное по своему естественному порядку; в полной общности обратные спектры введены Лефшецом в [1942]. Всестороннее обсуждение обратных спектров было дано Эйленбергом и Стинродом в их книге [1952]; после выхода этой книги обратные спектры начали широко изучаться и применяться. Отметим, что понятия обратного спектра и его предела можно ввести без учета топологии пространств X_σ. Эти понятия изучаются также в алгебре и анализе.

УПРАЖНЕНИЯ

2.5.A. (a) Покажите, что если все связующие отображения в обратной последовательности $\boldsymbol{S}=\{X_i, \pi_j^i\}$ непустых пространств являются отображениями «на», то $\varprojlim \boldsymbol{S} \neq \varnothing$.

(b) (Уотерхаус [1972]). Пусть S — произвольное несчетное множество и Σ — семейство всех конечных подмножеств множества S, направленное по включению. Рассмотрите обратный спектр $\boldsymbol{S}=\{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$, где X_σ — дискретное пространство, состоящее из всех вложений множества $\sigma \subset S$ в N, и $\pi_\rho^\sigma(f)=f|\rho$ для $f \in X_\sigma$ и $\sigma, \rho \in \Sigma$, таких, что $\rho \leqslant \sigma$. Заметьте, что все связующие отображения обратного спектра $\boldsymbol{S}$ являются отображениями «на» и тем не менее $\varprojlim \boldsymbol{S}=\varnothing$ (ср. с упр. 3.1.K (b) и теоремой 3.2.13).

Замечание. Первый пример обратного спектра, обладающего аналогичными свойствами, появился у Хенкина [1950].

(c) Приведите пример обратной последовательности $\boldsymbol{S}=\{X_i, \pi_j^i\}$ непустых пространств, в которой все связующие отображения инъективны и $\varprojlim \boldsymbol{S}=\varnothing$.

2.5.B. (a) Покажите, что если в обратной последовательности $\boldsymbol{S}=\{X_i, \pi_j^i\}$ все связующие отображения являются отображениями «на», то и все проекции — отображения «на». Заметим, что для произвольных обратных спектров этот факт, вообще говоря, не имеет места (см. упр. 2.5.A (b)).

(b) Покажите, что если в обратном спектре $\boldsymbol{S}=\{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ все связующие отображения инъективны, то и все проекции также инъективны. Проверьте, что если, кроме того, все связующие отображения являются отображениями «на», то все проекции также являются отображениями «на».

2.5.C. Приведите пример таких обратных последовательностей $\boldsymbol{S}=\{X_i, \pi_j^i\}$ и $\boldsymbol{S}'=\{Y_i, \tilde{\pi}_j^i\}$ и отображения $\{\mathrm{id}_N, f_i\}$ из $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{S}'$, что все отображения π_j^i, $\tilde{\pi}_j^i$ и f_i являются отображениями «на», а предельное отображение $\underleftarrow{\lim}\{\mathrm{id}_N, f_i\}$ не является.

2.5.D. (a) Проверьте, что если для каждого $s\in S$ задан обратный спектр $\boldsymbol{S}(s)=\{X(s)_\sigma, \pi(s)_\rho^\sigma, \Sigma\}$ и $X(s)_\sigma \cap X(s')_\sigma=\varnothing$ при $s\neq s'$ и $\sigma\in\Sigma$, то семейство $\bigoplus_{s\in S}\boldsymbol{S}(s)=\left\{\bigoplus_{s\in S}X(s)_\sigma, \bigoplus_{s\in S}\pi(s)_\rho^\sigma, \Sigma\right\}$ является обратным спектром и $\underleftarrow{\lim}\left(\bigoplus_{s\in S}\boldsymbol{S}(s)\right)= \bigoplus_{s\in S}\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{S}(s)$.

(b) Проверьте, что если для каждого $s\in S$ задан обратный спектр $\boldsymbol{S}(s)=\{X(s)_\sigma, \pi(s)_\rho^\sigma, \Sigma\}$, то семейство $\prod_{s\in S}\boldsymbol{S}(s)= \left\{\prod_{s\in S}X(s)_\sigma, \prod_{s\in S}\pi(s)_\rho^\sigma, \Sigma\right\}$ является обратным спектром и пространство $\underleftarrow{\lim}\left(\prod_{s\in S}\boldsymbol{S}(s)\right)$ гомеоморфно пространству $\prod_{s\in S}\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{S}(s)$.

2.5.E. (a) Заметьте, что предел обратной последовательности пространств с первой (второй) аксиомой счетности есть пространство с первой (второй) аксиомой счетности, но предел обратного спектра пространств со второй аксиомой счетности не обязательно является пространством с первой аксиомой счетности.

(b) Покажите, что предел обратной последовательности сепарабельных пространств не обязательно является сепарабельным пространством.

Указание. Примените пример 2.5.4 к плоскости Немыцкого.

Замечание. Предел обратной последовательности пространств Фреше — Урысона не обязан быть секвенциальным пространством (см. упр. 3.3.E(b)).

2.5.F. Покажите, что пространство X гомеоморфно пределу обратного спектра $\{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ тогда и только тогда, когда существует семейство $\{\pi_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ отображений $\pi_\sigma\colon X\to X_\sigma$ со следующими свойствами:

(1) *Для любых* $\sigma, \rho\in\Sigma$, *таких, что* $\rho\leqslant\sigma$, *имеем* $\pi_\rho^\sigma\pi_\sigma=\pi_\rho$

(2) *Для произвольного пространства* Y *и любых двух непрерывных отображений* f, g *пространства* Y *в* X *из того, что* $\pi_\sigma f=\pi_\sigma g$ *для каждого* $\sigma\in\Sigma$, *следует равенство* $f=g$.

(3) *Для каждого* Y *и семейства* $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ *отображений* $f_\sigma\colon Y\to X_\sigma$, *таких, что* $\pi_\rho^\sigma f_\sigma=f_\rho$, *где* $\sigma, \rho\in\Sigma$ *и* $\rho\leqslant\sigma$, *найдется такое отображение* $f\colon Y\to X$, *что* $\pi_\sigma f=f_\sigma$ *при каждом* $\sigma\in\Sigma$.

2.6. ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ I: ТОПОЛОГИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НА R^X И ТОПОЛОГИЯ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ

Последняя из операций, обсуждаемых в настоящей главе, — операция образования пространств отображений. Каждой паре X, Y топологических пространств отвечает множество Y^X всех непрерывных отображений из X в Y; мы постараемся ввести на нем естественную топологию. Оказывается, в отличие от рассмотренных выше операций, множество Y^X имеет несколько довольно естественных топологий. Мы начнем с определения топологии на множестве R^X всех вещественных функций на пространстве X. После этого мы введем топологию на Y^X для произвольных X и Y. Параграф завершается обсуждением условий, которым должна удовлетворять «приемлемая топология» на Y^X. Еще одна топология на пространстве отображений, удовлетворяющая этим условиям для достаточно широкого класса пространств, будет введена и изучена в § 3.4, после того как в нашем распоряжении будет понятие компактности.

Для $A \subset R^X$ и $f \in R^X$ определим $\bar{A}$ следующим образом:

(1) $f \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда $f = \lim f_i$, где $f_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots$.

Равенство $f = \lim f_i$ означает, как определено в § 1.4, что последовательность $\{f_i\}$ равномерно сходится к f.

2.6.1. Предложение. *Оператор замыкания, определенный в R^X формулой* (1), *удовлетворяет условиям* (CO1)—(CO4).

Доказательство. Условие (CO1) с очевидностью выполнено. Поскольку $\lim f_i = f$ для $f_i = f$ при $i = 1, 2, \ldots$, условие (CO2) также выполняется.

Из (1) немедленно следует, что

(2) $$\text{если } A \subset B, \quad \text{то} \quad \bar{A} \subset \bar{B};$$

следовательно, для установления (CO3) достаточно показать, что

(3) $$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Возьмем $f \in \overline{A \cup B}$ и такую последовательность $\{f_i\}$ функций, принадлежащих $A \cup B$, что $f = \lim f_i$. В одном из множеств A или B, скажем в A, имеется подпоследовательность $\{f_{k_i}\}$ последовательности $\{f_i\}$; по определению равномерной сходимости $f = \lim f_{k_i}$, т. е. $f \in \bar{A}$, так что (3) выполнено.

Поскольку из (2) следует включение $\bar{A} \subset (\overline{\bar{A}})$, для доказательства (СО4) достаточно показать, что

$$(4) \qquad (\overline{\bar{A}}) \subset \bar{A}.$$

Возьмем $f \in (\overline{\bar{A}})$ и такую последовательность $\{f_i\}$ функций из $\bar{A}$, что $f = \lim f_i$. Для каждого положительного целого k существует такое $i(k)$, что

$$(5) \qquad |f(x) - f_{i(k)}(x)| \leqslant 1/2k \quad \text{для} \quad x \in X.$$

Поскольку $f_{i(k)} \in \bar{A}$, имеем $f_{i(k)} = \lim g_j^k$, где $g_j^k \in A$ для $j = 1, 2, \ldots$, и существует положительное целое $j(k)$, такое, что

$$(6) \qquad |f_{i(k)}(x) - g_{j(k)}^k(x)| \leqslant 1/2k \quad \text{для} \quad x \in X.$$

Функция $g_k = g_{j(k)}^k$ принадлежит A при $k = 1, 2, \ldots$; поскольку из (5) и (6) следует равенство $f = \lim g_k$, имеем $f \in \bar{A}$, что завершает доказательство соотношения (4). ∎

Топология, порожденная (в соответствии с предложением 1.2.7) на R^X с помощью оператора замыкания, определенного формулой (1), называется *топологией равномерной сходимости* на R^X. Читатель может легко проверить, что для любого $f \in R^X$ семейство $\{U_i(f)\}_{i=1}^{\infty}$, где

$$U_i(f) = \{g \in R^X\text{: существует такое } a < 1/i, \text{ что } |f(x) - g(x)| < a \text{ при } x \in X\},$$

является базой в точке f пространства R^X с топологией равномерной сходимости.

Мы не намерены изучать сейчас топологию равномерной сходимости; ее природа будет прояснена в § 4.2 и 8.2. Отметим, однако, что топология равномерной сходимости на R^X индуцирует на I^X топологию подпространства и из теоремы 1.4.7 вытекает

2.6.2. Предложение. *Для каждого топологического пространства X множество I^X замкнуто в пространстве R^X с топологией равномерной сходимости.* ∎

Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. Для $A \subset X$ и $B \subset Y$ положим

$$(7) \qquad M(A, B) = \{f \in Y^X\colon f(A) \subset B\}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех конечных подмножеств множества X, и пусть $\mathcal{O}$ — топология на Y. Семейство $\mathcal{B}$ всех множеств вида $\bigcap_{i=1}^{k} M(A_i, U_i)$, где $A_i \in \mathcal{F}$ и $U_i \in \mathcal{O}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, порождает (согласно предложению 1.2.1) топологию на

Y^X, называемую *топологией поточечной сходимости*. Семейство $\mathscr{B}$ является базой пространства Y^X с топологией поточечной сходимости.

2.6.3. Предложение. *Топология поточечной сходимости на Y^X совпадает с топологией подпространства произведения $\prod_{x \in X} Y_x$ где $Y_x = Y$ для каждого $x \in X$.*

Доказательство. Каждое открытое подмножество пространства Y^X с топологией подпространства произведения $\prod_{x \in X} Y_x$ является объединением множеств вида

$$Y^X \cap p_{x_1}^{-1}(U_1) \cap p_{x_2}^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap p_{x_k}^{-1}(U_k), \tag{8}$$

где $x_i \in X$ и $U_i \in \mathcal{O}$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Но

$$Y^X \cap p_x^{-1}(U) = M(\{x\}, U). \tag{9}$$

Таким образом, все множества вида (8) и все множества, открытые относительно топологии подпространства декартова произведения, суть открытые множества в топологии поточечной сходимости.

Обратно, из (9) вытекает, что для $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathscr{F}$ и $U \in \mathcal{O}$ имеем

$$M(A, U) = Y^X \cap p_{x_1}^{-1}(U) \cap p_{x_2}^{-1}(U) \cap \ldots \cap p_{x_k}^{-1}(U).$$

Таким образом, все множества, открытые в топологии поточечной сходимости, открыты в топологии подпространства декартова произведения. ∎

Из последнего предложения и теорем 2.1.6, 2.3.11 следует (см. пример 2.6.7)

2.6.4. Теорема. *Если Y есть T_i-пространство, то пространство Y^X с топологией поточечной сходимости также есть T_i-пространство для $i \leqslant 3\frac{1}{2}$.* ∎

Из предложений 2.6.3 и 2.3.34 получаем

2.6.5. Предложение. *Направленность $\{f_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ в пространстве Y^X с топологией поточечной сходимости сходится к элементу $f \in Y^X$ в том и только том случае, если направленность $\{f_\sigma(x), \sigma \in \Sigma\}$ сходится к $f(x)$ для каждой точки $x \in X$.* ∎

Топология поточечной сходимости на Y^X может быть также определена как топология подпространства произведения или так топология, порожденная семейством отображений. Принятое нами определение — хотя оно и выглядит неоправданно сложным — выбрано потому, что оно аналогично определению компактно-открытой топологии на Y^X, где вместо семейства $\mathcal{F}$ конечных подмножеств множества X взято семейство $\mathcal{Z}(X)$ всех компактов пространства X (ср. § 3.4).

2.6.6. Предложение. *Для каждого топологического пространства X топология равномерной сходимости на R^X сильнее топологии поточечной сходимости.*

Доказательство. Эквивалентность условий (i) и (v) предложения 1.4.1 показывает, что достаточно доказать следующее: если $f \in R^X$ принадлежит замыканию множества $A \subset R^X$ в топологии равномерной сходимости, то f принадлежит замыканию множества A в топологии поточечной сходимости. Пусть $U = R^X \cap \bigcap_{i=1}^{k} p_{x_i}^{-1}(U_i)$ — окрестность элемента f в топологии поточечной сходимости. Так как множества U_i открыты в R, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $(f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon) \subset U_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Далее, так как $f = \lim f_j$, где $f_j \in A$ для $j = 1, 2, \ldots$, то существует такое j, что $|f(x) - f_j(x)| < \varepsilon$ для каждого $x \in X$. В частности $f_j(x_i) \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а это означает, что $U \cap A \neq \varnothing$. ∎

Отметим, что определенные выше топологии на R^X и Y^X не зависят от топологии пространства X, хотя множества R^X и Y^X зависят от топологии пространства X.

2.6.7. Пример. Выберем $Y = K$, $X = D$. Из предложения 2.6.3 и примера 2.3.12 следует, что пространство Y^X с топологией поточечной сходимости, вообще говоря, не является нормальным пространством даже для совершенно нормального пространства Y. ∎

2.6.8. Пример. На множестве R^N топология равномерной сходимости отличается от топологии поточечной сходимости. В самом деле, легко проверить, что функция $f_0 \in R^N$, определенная условием $f_0(x) = 0$ для $x \in N$, принадлежит замыканию множества $A = \{f \in R^N\colon f(N) \subset \{0, 1\}$ и $|f^{-1}(0)| < \aleph_0\} \subset R^N$ в топологии поточечной сходимости, однако f_0 не принадлежит замыканию множества A в топологии равномерной сходимости. ∎

Пусть Y — топологическое пространство и $\{p\}$ — одноточечное пространство. Каждой точке $y \in Y$ поставим в соответствие элемент $i_Y(y) \in Y^{\{p\}}$, где $[i_Y(y)](p) = y$. Тем самым определено взаимно однозначное отображение пространства Y на пространство $Y^{\{p\}}$. Отображение $i_Y\colon Y \to Y^{\{p\}}$ является гомеоморфизмом относительно топологии поточечной сходимости на $Y^{\{p\}}$, а при $Y = R$ также относительно топологии равномерной сходимости на $R^{\{p\}}$.

Из предложений 2.1.11 и 2.2.6 следует, что если $X_s \neq \varnothing$ для $s \in S$, то комбинация ∇ есть взаимно однозначное отображение произведения $\prod_{s \in S}(Y^{X_s})$ на пространство $Y^{\left(\bigoplus_{s \in S} X_s\right)}$. Подобным же образом из предложения 2.3.6 вытекает, что диагональ Δ взаимно однозначно отображает произведение $\prod_{s \in S}(Y_s^X)$ на пространство $\left(\prod_{s \in S} Y_s\right)^X$. Читатель может легко доказать следующие два предложения.

2.6.9. Предложение. *Пусть* $\{X_s\}_{s \in S}$ — *семейство непустых топологических пространств и* Y — *топологическое пространство. Комбинация* ∇: $\prod_{s \in S}(Y^{X_s}) \to Y^{\left(\bigoplus_{s \in S} X_s\right)}$ *есть гомеоморфизм относительно топологии поточечной сходимости в пространствах отображений.* ∎

2.6.10. Предложение. *Пусть* X — *топологическое пространство и* $\{Y_s\}_{s \in S}$ — *семейство топологических пространств. Диагональ* $\Delta: \prod_{s \in S}(Y_s^X) \to \left(\prod_{s \in S} Y_s\right)^X$ *есть гомеоморфизм относительно топологии поточечной сходимости в пространствах отображений.* ∎

Легко установить, что для $Y = R$ аналог предложения 2.6.9 в случае топологии равномерной сходимости имеет место в том и только том случае, если семейство $\{X_s\}_{s \in S}$ конечно (ср. с примером 2.6.8).

Заметим, что любые отображения g: $Y \to Z$ и h: $T \to X$ порождают отображения Φ_g: $Y^X \to Z^X$ и Ψ_h: $Y^X \to Y^T$, определенные формулами

$$\Phi_g(f) = gf \quad \text{для} \quad f \in Y^X \quad \text{и} \tag{10}$$
$$\Psi_h(f) = fh \quad \text{для} \quad f \in Y^X.$$

Так как

$$\Phi_g^{-1}(M(A, B)) = M\left(A, g^{-1}(B)\right) \quad \text{и} \tag{11}$$
$$\Psi_h^{-1}(M(A, B)) = M(h(A), B),$$

то оба отображения Φ_g и Ψ_h непрерывны относительно топологии поточечной сходимости в функциональных пространствах. Легко установить, что для каждого h: $T \to X$ отображение Ψ_h: $R^X \to R^T$ также непрерывно относительно топологии равномерной сходимости на R^X и R^T. С другой стороны, отображение Φ_g пространства R^X в себя необязательно непрерывно даже для гомеоморфизма g: $R \to R$ (см. пример 4.2.14). Это показывает, что соотношение между естественной топологией на R и топологией равномерной сходимости на R^X не вполне удовлетворительно. Мы покажем в дальнейшем, что топология равномерной сходимости на R^X ассоциирована с конкретной метрикой на

R или, точнее, с конкретной равномерной структурой на R, а не с топологией на R (см. теорему 4.2.19 и упр. 4.2.А (с) и 8.1.А (а)).

Если i: $Y \to Z$ — гомеоморфное вложение, то Φ_i: $Y^X \to Z^X$ также есть гомеоморфное вложение относительно топологии поточечной сходимости на пространствах отображений. Если i: $T \to X$ — вложение, то Ψ_i: $Y^X \to Y^T$ есть сужение. Вообще говоря, отображение Ψ_i не является ни инъективным, ни отображением «на», так как некоторые элементы пространства Y^T могут не допускать продолжения на все пространство X. С другой стороны, если h: $T \to X$ есть отображение «на», то, как легко понять, Ψ_h: $Y^X \to Y^T$ есть гомеоморфное вложение относительно топологии поточечной сходимости, а когда $Y = R$ — относительно топологии равномерной сходимости.

Отображения Φ_g и Ψ_h связаны с операцией Σ композиции отображений. В действительности из формул (10) непосредственно вытекает, что

$$\Phi_g(f) = \Sigma(g, f) \quad \text{и} \quad \Psi_h(f) = \Sigma(f, h).$$

Возникает вопрос, можно ли определить топологию на пространствах отображений Z^Y, Y^X и Z^X таким образом, чтобы Σ было непрерывным отображением произведения $Z^Y \times Y^X$ в Z^X. Оказывается, при естественных дополнительных предположениях (исключающих, например, дискретную топологию) для того, чтобы определить такую топологию, нужно сузить класс рассматриваемых пространств (см. теорему 3.4.2 и упр. 3.4.А).

Отображение Ω пространства $Y^X \times X$ в пространство Y, определенное формулой $\Omega(f, x) = f(x)$, называется *отображением вычисления* для пространства Y^X. Оно также связано с операцией Σ. А именно, Ω есть композиция отображений

$$(12) \qquad Y^X \times X \xrightarrow{\mathrm{id}_{Y^X} \times i_X} Y^X \times X^{\{p\}} \xrightarrow{\Sigma} Y^{\{p\}} \xrightarrow{i_Y^{-1}} Y, \quad \text{т. е.}$$

$$\Omega = i_Y^{-1}\Sigma(\mathrm{id}_{Y^X} \times i_X).$$

Легко видеть, что формула

$$(13) \qquad \{[\Lambda(f)](z)\}(x) = f(z, x),$$

где f — отображение пространства $Z \times X$ в Y, определяет взаимно однозначное соответствие Λ между множеством всех (необязательно непрерывных) отображений пространства $Z \times X$ в Y и множеством всех отображений пространства Z в множество всех отображений пространства X в Y. Это соответствие называется *экспоненциальным отображением*. Естественно изучать поведение Λ и Λ^{-1} на множествах непрерывных отображений $Y^{(Z \times X)}$ и $(Y^X)^Z$; последнее множество определенно корректно, если на Y^X задана топология.

Прежде всего встает вопрос, принадлежит ли $\Lambda(f)$ множеству $(Y^X)^Z$, если $f \in Y^{(Z\times X)}$; это так, если топология на Y^X не слишком сильная. Другой естественный вопрос: принадлежит ли $\Lambda^{-1}(g)$ пространству $Y^{(Z\times X)}$, если $g \in (Y^X)^Z$; это так, если топология на Y^X не слишком слабая. Наконец, можно спросить, когда экспоненциальное отображение непрерывно и при каких условиях оно является гомеоморфизмом.

Топологию на Y^X называют *собственной*, если для каждого пространства Z и любого $f \in Y^{Z\times X}$ отображение $\Lambda(f)$ принадлежит пространству $(Y^X)^Z$. Аналогично топологию на Y^X называют *допустимой*, если для каждого пространства Z и любого $g \in (Y^X)^Z$ отображение $\Lambda^{-1}(g)$ принадлежит пространству $Y^{(Z\times X)}$. Топология на Y^X, которая одновременно собственная и допустимая, называется *приемлемой*.

2.6.11. Предложение. *Топология на Y^X допустима в том и только том случае, если отображение вычисления для пространства Y^X непрерывно, т. е. если непрерывно отображение Ω: $Y^X \times X \to Y$.*

Доказательство. Если топология на Y^X допустима, то для $Z = Y^X$ и $g = \mathrm{id}_{Y^X}$ отображение $\Lambda^{-1}(g)$: $Y^X \times X \to Y$ непрерывно. Так как

$$(14)\qquad \{[\Lambda(\Omega)](f)\}(x) = \Omega(f, x) = f(x), \quad \text{т. е.} \quad \Lambda(\Omega) = \mathrm{id}_{Y^X},$$

отсюда следует, что $\Omega = \Lambda^{-1}(g)$, поэтому Ω непрерывно.

Обратно, если отображение вычисления для пространства Y^X непрерывно, то для каждого пространства Z и любого элемента $g \in (Y^X)^Z$ отображение $\Lambda^{-1}(g)$ непрерывно, так как $\Lambda^{-1}(g) = \Omega(g \times \mathrm{id}_X)$: $Z \times X \to Y$. В самом деле, для любых $(z, x) \in Z \times X$ мы имеем

$$\begin{aligned}\{[\Lambda(\Omega(g \times \mathrm{id}_X))](z)\}(x) &= [\Omega(g \times \mathrm{id}_X)](z, x) = \\ &= \Omega((g(z), x)) = [g(z)](x),\end{aligned}$$

так что $\Lambda(\Omega(g \times \mathrm{id}_X)) = g$ и $\Lambda^{-1}(g) = \Omega(g \times \mathrm{id}_X)$. ∎

2.6.12. Предложение. *Для каждой пары топологических пространств X, Y и любых двух топологий $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ на пространстве Y^X имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если топология $\mathcal{O}$ собственная и $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, то топология $\mathcal{O}'$ также собственная.*

(ii) *Если топология $\mathcal{O}$ допустимая и $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$, то топология $\mathcal{O}'$ также допустима.*

(iii) *Если топология $\mathcal{O}$ собственная, а топология $\mathcal{O}'$ допустимая, то $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.*

(iv) *На Y^X существует не более одной приемлемой топологии.*

Доказательство. Оба утверждения (i) и (ii) следуют непосредственно из определений собственной и допустимой топологий, а (iv) вытекает из (iii). Для доказательства (iii) выберем собственную топологию $\mathcal{O}$ и допустимую топологию $\mathcal{O}'$ на Y^X и обозначим пространство $(Y^X, \mathcal{O})$ через Y^X_p, а пространство $(Y^X, \mathcal{O}')$ через Y^X_a.

Определения допустимой и собственной топологий приводят к следующим включениям:

$$\Lambda^{-1}\left[\left(Y^X_a\right)^{Y^X_a}\right] \subset Y^{\left(Y^X_a \times X\right)} \quad \text{и} \quad \Lambda\left[Y^{\left(Y^X_a \times X\right)}\right] \subset \left(Y^X_p\right)^{\left(Y^X_a\right)},$$

из которых вытекает, что $\mathrm{id}_{Y^X} = \Lambda\Lambda^{-1}(\mathrm{id}_{Y^X}) \in \left(Y^X_p\right)^{\left(Y^X_a\right)}$, т. е. $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. ∎

Из предложения 2.3.6 следует, что топология поточечной сходимости является собственной. В самом деле, $\Lambda(f)$ непрерывно в том и только том случае, если $p_{x_0}\Lambda(f)$ непрерывно для любой точки $x_0 \in X$. Из соотношения (13) вытекает, что $[p_{x_0}\Lambda(f)](z) = f(z, x_0)$. Поэтому если $f \in Y^{(Z \times X)}$, то $\Lambda(f) \in (Y^X)^Z$. С другой стороны, топология поточечной сходимости, вообще говоря, не является допустимой. В самом деле, для этой топологии факт принадлежности g множеству $(Y^X)^Z$ означает, что для всех $z_0 \in Z$ и $x_0 \in X$ отображения $[g(z_0)](x)$ и $[g(z)](x_0)$ непрерывны, в то время как факт принадлежности $\Lambda^{-1}(g)$ множеству $Y^{(Z \times X)}$ означает, что отображение g непрерывно по обеим координатам.

Из предложения 2.6.11 непосредственно вытекает, что топология равномерной сходимости допустима. С другой стороны, топология равномерной сходимости, вообще говоря, не является собственной. Читателю предоставляется определить функцию $f\colon R \times R \to R$, такую, что $\Lambda(f)$ не принадлежит пространству $(R^R)^R$, где R^R наделено топологией равномерной сходимости.

Отметим, что предложение 2.6.6 есть непосредственное следствие части (iii) предложения 2.6.12 и фактов, установленных в последних двух абзацах.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Топология равномерной сходимости берет свое начало из классического понятия равномерно сходящейся последовательности функций, а топология поточечной сходимости — из понятия сходящейся последовательности функций. Допустимые топологии впервые рассматривал Аренс в [1946]; они были определены через непрерывность отображения вычисления. Аренс и Дугунджи [1951] определили собственные топологии и доказали предложения 2.6.11 и 2.6.12.

УПРАЖНЕНИЯ

2.6.A. Покажите, что множества $M(\{x\}, U)$, где $x \in X$ и U принадлежит фиксированной предбазе $\mathscr{P}$ пространства Y, образуют предбазу пространства Y^X с топологией поточечной сходимости.

2.6.B. Проверьте, что для любых двух семейств $\{X_s\}_{s \in S}$ и $\{Y_s\}_{s \in S}$ топологических пространств произведение $\prod$: $\prod_{s \in S} (Y_s^{X_s}) \to \left(\prod_{s \in S} Y_s\right)^{\left(\prod_{s \in S} X_s\right)}$ есть гомеоморфное вложение относительно топологии поточечной сходимости в пространствах отображений.

2.6.C (Аренс и Дугунджи [1951]). Говорят, что направленность $\{f_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ в пространстве Y^X *непрерывно сходится* к отображению $f \in Y^X$, если для каждой направленности $\{x_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma'\}$ в пространстве X и любого $x \in \lim_{\sigma' \in \Sigma'} x_{\sigma'}$ направленность $\{f_\sigma(x_{\sigma'}), (\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma'\}$ в пространстве Y сходится к точке $f(x)$; здесь множество $\Sigma \times \Sigma'$ направлено по следующему правилу: $(\sigma_1, \sigma_1') \leqslant (\sigma_2, \sigma_2')$ тогда и только тогда, когда $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ и $\sigma_1' \leqslant \sigma_2'$.

(a) Покажите, что топология на пространстве Y^X собственная в том и только том случае, если для каждой направленности $\{f_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ в Y^X из непрерывной сходимости направленности $\{f_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ к отображению $f \in Y^X$ следует, что $f \in \lim_{\sigma \in \Sigma} f_\sigma$ относительно этой топологии.

(b) Покажите, что топология на пространстве Y^X допустима в том и только том случае, если для каждой направленности $\{f_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ в Y^X и любого $f \in \lim_{\sigma \in \Sigma} f_\sigma$ относительно этой топологии направленность $\{f_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ непрерывно сходится к f.

2.6.D. (a) Покажите, что операция композиции Σ, вообще говоря, не является непрерывной относительно топологии поточечной сходимости.

(b) Проверьте, что операция композиции Σ, вообще говоря, не является непрерывной относительно топологии равномерной сходимости.

(c) Докажите, что если топологии на Z^Y и Y^X допустимы, а топология на Z^X собственная, то операция композиции Σ есть непрерывное отображение пространства $Z^Y \times Y^X$ в пространство Z^X.

Указание. Выразите Σ в терминах отображений Ω и Λ.

2.6.E (Фокс [1945]). Докажите, что не существует приемлемой топологии на пространстве R^Q, где Q — пространство рациональных чисел (ср. с теоремой 3.4.3 и упр. 3.4.A).

Указание. Покажите, что если топология на R^Q собственная, то $\operatorname{Int} M(\bar{U}, (0, 1)) = \varnothing$ для каждого открытого подмножества $U \subset Q$. Для этого покажите, что $\bar{U}$ содержит $D(\aleph_0)$ как замкнутое подпространство, и при помощи теоремы Титце — Урысона определите для любого $f \in M\ (\bar{U}, (0, 1))$ функцию F: $[0, 1] \times Q \to R$, такую, что $F(0, x) = f(x)$ для $x \in Q$ и $[\Lambda(F)](z) \notin M(\bar{U}, (0, 1))$ для $z > 0$.

2.6.F. Докажите, что для любых топологических пространств X, Y, Z экспоненциальное отображение Λ: $Y^{(Z \times X)} \to (Y^X)^Z$ есть гомеоморфное вложение относительно топологии поточечной сходимости на пространствах отображений.

Указание. Используйте упр. 2.6.A.

2.6.G. Покажите, что сложение и вычитание функций есть непрерывное отображение произведения $R^X \times R^X$ в R^X как относительно топологии равномерной сходимости, так и относительно топологии поточечной сходимости на R^X. Проверьте, что умножение функций есть непрерывное отображение произведения $R^X \times R^X$ в R^X относительно топологии поточечной сходимости. Покажите, что умножение функций на вещественные числа не является непрерывным отображением $R^X \times R$ в R^X относительно топологии равномерной сходимости.

2.7. ЗАДАЧИ

Локально замкнутые множества

2.7.1 (Куратовский и Серпинский [1921a]). Подмножество A топологического пространства X называется *локально замкнутым*, если каждая точка $x \in A$ имеет такую окрестность U в пространстве X, что пересечение $A \cap U$ замкнуто в подпространстве $U \subset X$.

Покажите, что для подмножества A топологического пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Множество A локально замкнуто.*

(2) *Разность $\bar{A} \setminus A$ замкнута.*

(3) *Множество A есть разность двух замкнутых множеств.*

Отделенные F_σ-множества в нормальных пространствах

2.7.2. (a) (Урысон [1925]). Докажите, что для каждой пары A, B отделенных F_σ-множеств в нормальном пространстве X существуют открытые множества U, $V \subset X$, такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Указание. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где A_i и B_i — замкнутые множества. Определите по индукции две последовательности $U_1, U_2, \ldots$ и $V_1, V_2, \ldots$ открытых подмножеств пространства X, такие, что

$$\bar{U}_{i-1} \cup A_i \subset U_i \quad \text{и} \quad \bar{U}_i \cap (B \cup \bar{V}_{i-1}) = \varnothing,$$

а также

$$\bar{V}_{i-1} \cup B_i \subset V_i \quad \text{и} \quad \bar{V}_i \cap (A \cup \bar{U}_i) = \varnothing,$$

где $U_0 = V_0 = \varnothing$.

(b) (Урысон [1925]). Выведите из (a), что нормальность наследуется F_σ-множествами (ср. с упр. 2.1.E).

(c) (Бонан [1970]). Примените (a) для решения задачи 1.7.15 (b).

Указание (Катетов [1951a]). Модифицируя доказательство леммы Урысона, определите для каждого рационального числа r открытое множество $V_r \subset X$, такое, что

$$g^{-1}((-\infty, r)) \subset V_r \subset \bar{V}_r \subset f^{-1}((-\infty, r])$$

и $\bar{V}_r \subset V_{r'}$, где $r < r'$.

Нормально расположенные множества II (см. задачи 1.7.6 и 3.12.24)

2.7.3. (Смирнов [1951c]). Докажите следующие свойства нормально расположенных множеств.

(a) Если A_i — нормально расположенное множество в пространстве X, $i = 1, 2, \ldots$, то объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ нормально расположено в пространстве X.

(b) Если A — нормально расположенное множество в пространстве X и B — множество типа F_σ в подпространстве A, то B нормально расположено в X.

(c) Если A — нормально расположенное множество в пространстве X, а B — нормально расположенное множество в подпространстве A, то B нормально расположено в X.

(d) Если X — нормальное пространство, то каждое его нормально расположенное подмножество с топологией подпространства является нормальным пространством.

Полунепрерывные функции II (см. задачи 1.7.14—1.7.16, 3.12.22 (g) и 5.5.20)

2.7.4. (a) (Хаусдорф [1919]). Покажите, что теорема Титце — Урысона легко следует из характеристики нормальности, данной в задаче 1.7.15 (b).

(b) (Тонг [1952]; для метрических пространств — Титце [1915]). Докажите, что T_1-пространство X нормально тогда и только тогда, когда для каждого замкнутого подмножества $A \subset X$ и каждой вещественной функции k, определенной и ограниченной снизу на X и непрерывной во всех точках множества A, существует непрерывная функция $h: X \to R$, такая, что $h|A = k|A$ и $h(x) \leqslant k(x)$ для каждого $x \in X$.

Указание. Покажите, что функция g, определенная формулой $g(x) = \sup\limits_{U} (\inf\limits_{z \in U} k(z))$, где sup берется по всем окрестностям U точки x, полунепрерывна снизу. Далее примените характеристику нормальности, данную в задаче 1.7.15(b).

(c) (Тонг [1952]; для метрических пространств — Титце [1915]). Докажите, что T_1-пространство X является совершенно нормальным в том и только том случае, если для каждого замкнутого множества $A \subset X$ и любой полунепрерывной снизу (сверху) функции f, определенной на X и такой, что $f|A$ непрерывна, существует последовательность $\{f_i\}$ непрерывных функций на X, такая, что $f(x) = \lim f_i(x)$ для каждого $x \in X$, $f_i|A = f|A$, $i = 1, 2, \ldots$, и $f_i(x) \leqslant f_{i+1}(x)$ (и $f_i(x) \geqslant f_{i+1}(x)$) для $i = 1, 2, \ldots$ и $x \in X$.

Указание. Примените части (c) и (b) задачи 1.7.15.

Линейно упорядоченные множества II (см. задачи 1.7.4, 3.12.3, 3.12.4, 3.12.12(f), 5.5.22, 6.3.2 и 8.5.13(j))

2.7.5. (a) Пусть X — пространство с топологией, индуцированной линейным порядком $<$. Установите, что для любого подмножества $M \subset X$, содержащего не менее двух элементов, топология на M как на подпространстве пространства X сильнее, чем топология, индуцированная на M сужением линейного порядка $<$ на M. Приведите пример открыто-замкнутого подмножества M линейно упорядоченного пространства X, такой, что две указанные топологии на M различны. Проверьте, что если M всюду плотно в X в смысле порядка (т. е. для каждых $x, y \in X$, таких, что $x < y$, существует $z \in M$, такое, что $x < z < y$), то две топологии на M совпадают. Покажите, что это заключение, вообще говоря, не имеет места, если предполагать только, что M топологически всюду плотно в X, т. е. что $\overline{M} = X$.

(b) Подмножество C линейно упорядоченного множества X *выпукло*, если $(x, y) \subset C$ для любых $x, y \in C$.

Установите, что если семейство $\mathscr{C}$ состоит из выпуклых подмножеств пространства X и $\bigcap \mathscr{C} \neq \varnothing$, то $\bigcup \mathscr{C}$ — выпуклое множество. Покажите, что каждое подмножество $M \subset X$ может быть представлено как объединение попарно непересекающихся максимальных выпуклых множеств, т. е. выпуклых множеств, которые не могут быть расширены до выпуклых подмножеств пространства X, содержащихся в M. Эти множества называются *выпуклыми компонентами* подмножества M. Проверьте, что в каждом выпуклом подмножестве C пространства X, содержащем хотя бы два элемента, топология подпространства пространства X и топология, индуцированная сужением линейного порядка из пространства X на C, совпадают. Покажите, что выпуклые компоненты открытого подмножества $M \subset X$ открыты в пространстве X.

(c) (Бурбаки [1948]). Докажите, что каждое линейно упорядоченное пространство наследственно нормально.

Указание. Примените (b) и задачу 1.7.4(d).

Пространства Урысона и семирегулярные пространства II (см. задачи 1.7.7—1.7.9 и 6.3.17)

2.7.6. (a) Установите, что свойство быть пространством Урысона наследственное и мультипликативное.

(b) Покажите, что семирегулярность мультипликативна и наследуется открытыми подмножествами и всюду плотными подмножествами.

Вложение в произведения

2.7.7 (Шанин [1944], Мрувка [1956]). Покажите, что для T_0-пространства X и топологического пространства Y следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X вложимо в некоторую степень пространства Y.*

(2) *Семейство всех множеств вида $f^{-1}(U)$, где $f: X \to Y$ непрерывно и U — открытое подмножество пространства Y, образует предбазу пространства X.*

(3) *Топологию пространства X можно задать с помощью семейства отображений в пространство Y.*

(4) *Для любого $x \in X$ и любого замкнутого подмножества $F \subset X$, такого, что $x \notin F$, существует непрерывное отображение f пространства X в конечную степень пространства Y, такое,* что $f(x) \notin \overline{f(F)}$.

2.7.8 (Мрувка [1956]). (a) Докажите, что не существует такого T_1-пространства Y, что каждое T_1-пространство вложимо в некоторую степень пространства Y (ср. с задачей 2.7.18(b)).

Указание. Примените задачу 2.7.7.

(b) Для каждого $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ обозначим через $L(\mathfrak{m})$ пространство, определенное в примере 1.2.6, где $|X| = \mathfrak{m}$. Покажите, что каждое T_1-пространство X, такое, что $|X| \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ и $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$, вложимо в $\mathfrak{m}$-ю степень $L(\mathfrak{m})$.

Кардинальные функции II (см. задачи 1.7.12, 1.7.13, 3.12.4, 3.12.7—3.12.11, 3.12.12(j) и 8.5.17)

2.7.9. Для кардинальной функции f мы обозначим через hf кардинальную функцию, значение которой на пространстве X равно $\sup f(M)$, где sup берется по всем подпространствам M пространства X. Функция hf называется *наследственной* f — в этом смысле употребляются такие термины, как *наследственная всюду плотность*, *наследственное число Суслина* и т. п.

(a) Проверьте, что

$$hw(X) = w(X), \quad h\chi(X) = \chi(X) \quad \text{и} \quad ht(X) = t(X).$$

(b) Проверьте, что функция hc, определенная в задаче 1.7.12, есть наследственное число Суслина и что $hc(X) = he(X)$ для каждого топологического пространства X.

(c) Покажите, что $hd(X) \geqslant t(X)$ для каждого топологического пространства X, и приведите пример пространства X, для которого $hd(X) > d(X)$ и $hd(X) > t(X)$.

(d) Установите, что если A — всюду плотное подпространство пространства X, то $c(A) = c(X)$, но, вообще говоря, неравенство $d(A) \leqslant d(X)$ не имеет места.

(e) (Смирнов [1951d]; для $\aleph_0$ — Серпинский [1921a]). Докажите, что топологическое пространство X удовлетворяет условию $hd(X) \leqslant \aleph_\alpha$ в том и только том случае, если для каждой возрастающей трансфинитной последовательности $F_0 \subset F_1 \subset \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\xi \subset \ldots$, $\xi < \omega_{\alpha+1}$, замкнутых подмножеств пространства X существует такое $\xi_0 < \omega_{\alpha+1}$, что $F_\xi = F_{\xi_0}$ для каждого $\xi \geqslant \xi_0$ (ср. с задачей 3.12.7(b)).

(f) (Серпинский [1921a]). Приведите пример хаусдорфова пространства X, такого, что $hd(X) > hc(X) = \aleph_0$.

Указание. Возьмите прямую R с топологией, порожденной базой, состоящей из всех множеств вида $(a, b) \setminus A$, где $|A| \leqslant \aleph_0$.

Замечание. Тодорчевич [1984] описал вполне регулярное пространство X, удовлетворяющее неравенствам $hd(X) > > hc(X) > \aleph_0$. В рамках наивной теории множеств неизвестно ни одного примера регулярного пространства X, такого, что $hd(X) > hc(X) = \aleph_0$. Существование такого пространства связано с *проблемой Суслина* — вопросом, поставленным М. Суслиным в 1920 г.: существует ли линейно упорядоченное пространство X, такое, что $c(X) = \aleph_0$ и $d(X) > \aleph_0$ (*пространство Суслина*). В самом деле, можно доказать, что для любого пространства Суслина X выполняется неравенство $hd(X) > hc(X) = = \aleph_0$ (см. задачу 3.12.4(e)). Как показано Йехом в [1967] и Тенненбаумом в [1968], существование пространства Суслина не противоречит аксиомам теории множеств и не зависит от них (история проблемы Суслина и ее связи подробно изучены Курепой в [1968] и М. Рудин в [1969]).

Наследственно нормальное пространство X, такое, что $hd(X) > hc(X) = \aleph_0$, было построено Хайналом и Юхасом [1974] в предположении континуум-гипотезы. Намного более простая конструкция была описана Ван Дауэном, Толлом и Вейсом в [1977] (ср. с замечанием к задаче 3.12.7(с)).

(g) (Зенор [1980]). Покажите, что если семейство $\{X_s\}_{s \in S}$ топологических пространств удовлетворяет условию $hd\left(\prod\limits_{s \in S_0} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$ для каждого конечного $S_0 \subset S$ и $|S| \leqslant \mathfrak{m}$, то $hd\left(\prod\limits_{s \in S} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$.

2.7.10. (a) Приведите пример совершенно нормального пространства X, такого, что $hd(X) = hc(X) = e(X) = \aleph_0$ и $hd(X \times X) = hc(X \times X) = e(X \times X) = \mathfrak{c}$.

Указание. См. упр. 2.1.I.

(b) (Курепа [1950]). Пусть X — пространство Суслина. Докажите, что $c(X \times X) > \aleph_0$.

Указание. Для каждого $\alpha < \omega_1$ определите по трансфинитной индукции, как показано ниже, замкнутое сепарабельное подпространство $F_\alpha \subset X$ и обозначьте через $\mathcal{U}_\alpha$ семейство всех выпуклых компонент подпространства $X \setminus F_\alpha$. Пусть $F_0 = \varnothing$; для предельного числа α положим $F_\alpha = \overline{\bigcup\limits_{\beta < \alpha} F_\beta}$ и для $\alpha = \beta + 1$ положим $F_\alpha = F_\beta \cup \bar{A}_\beta$, где A_β состоит из тех $U \in \mathcal{U}_\beta$, для которых существует такая точка $x(U)$, что $U \setminus \{x(U)\} = U' \cup U''$, где U', U'' — непустые непересекающиеся открытые в пространстве X множества. Затем покажите, что для каждого α существует такое $U_\alpha \in \mathcal{U}$, что $x(U_\alpha)$ определено, и рассмотрите семейство $\{U'_\alpha \times U''_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$.

Замечание. Как вытекает из (b) и замечания к предыдущей задаче, нельзя доказать, что свойство Суслина конечно мультипликативно. Оказывается, конечная мультипликативность свойства Суслина не зависит от аксиом теории множеств (см. Архангельский [1971] или Юхас [1971]).

(c) (Шанин [1948] (объявлено в [1946])). Покажите, что для каждого семейства $\{S_t\}_{t \in T}$ конечных множеств, где $|T| = \mathfrak{m} > \aleph_0$ — регулярный кардинал, существуют такое множество $T_0 \subset T$ мощности $\mathfrak{m}$ и такое множество Z, что $S_t \cap S_{t'} = Z$ для любой пары t, t' различных элементов множества T_0.

Указание (Юхас [1971]). Можно считать, что $|S_t| = n < \aleph_0$. Примените индукцию относительно n. Рассмотрите максимальное подмножество $T_1 \subset T$, такое, что $S_t \cap S_{t'} = \varnothing$ для любых пар t, t' различных элементов множества T_1.

(d) Докажите, что произведение $\prod_{s \in S} X_s$ обладает свойством Суслина в том и только том случае, если для каждого конечного $S_0 \subset S$ произведение $\prod_{s \in S_0} X_s$ обладает свойством Суслина.

Указание. Примените (c) для $\mathfrak{m} = \aleph_1$.

Замечание. Курепа доказал в [1962], что если $c(X_s) \leqslant \mathfrak{m}$ для каждого $s \in S$, то $c\left(\prod_{s \in S} X_s\right) \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$; доказательство этого факта можно также найти у Юхаса [1971].

2.7.11 (Шанин [1948] (объявлено в [1946a])). Говорят, что кардинал $\mathfrak{m} > \aleph_0$ есть *калибр* пространства X, если каждое семейство мощности $\mathfrak{m}$, состоящее из непустых открытых подмножеств пространства X, содержит подсемейство мощности $\mathfrak{m}$ с непустым пересечением. Наименьший кардинал $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такой, что каждое семейство мощности $>\mathfrak{m}$, состоящее из непустых открытых подмножеств пространства X, содержит подсемейство мощности $>\mathfrak{m}$ с непустым пересечением, называется *числом Шанина* пространства X и обозначается через $\check{s}(X)$. Очевидно, что $\check{s}(X)$ — наименьший кардинал $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ с тем свойством, что следующий за ним кардинал есть калибр пространства X.

(a) Покажите, что $c(X) \leqslant \check{s}(X) \leqslant d(X)$, и приведите примеры хаусдорфовых пространств X и Y, таких, что $\check{s}(X) > hc(X)$ и $d(Y) > \check{s}(Y)$.

(b) Докажите, что если регулярный кардинал является калибром пространства X_s для любого $s \in S$, то этот кардинал также является калибром произведения $\prod_{s \in S} X_s$. Выведите отсюда, что если $\check{s}(X_s) = \mathfrak{m}$ для каждого $s \in S$, то $\check{s}\left(\prod_{s \in S} X_s\right) = \mathfrak{m}$.

Указание. Сначала рассмотрите конечные произведения, а затем используйте задачу 2.7.10(c).

(c) Приведите примеры вполне регулярных пространств X и Y, таких, что $\check{s}(X) > c(X)$ и $d(Y) > \check{s}(Y)$.

Замечание. Существование нормальных пространств, удовлетворяющих указанным выше неравенствам, следует из задачи 2.7.14 и теорем 2.3.17 и 3.1.9.

Функции на произведениях

2.7.12. (a) (Росс и Стоун [1964]). Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство сепарабельных пространств. Покажите, что замыкание открытого множества $U \subset \prod_{s \in S} X_s$ (являющееся каноническим замкнутым множеством; ср. с упр. 1.1.C(e)) зависит лишь от счетного множества координат, т. е. существует счетное множество $S_0 \subset S$, такое, что если

$$\{x_s\} \in \overline{U},\ \{y_s\} \in \prod_{s \in S} X_s \text{ и } y_s = x_s \text{ для } s \in S_0, \text{ то } \{y_s\} \in \overline{U}.$$

Указание. Рассмотрите максимальное семейство непересекающихся элементов канонической базы пространства $\prod_{s \in S} X_s$, содержащихся в U, и примените 2.3.18.

(b) (Бокштейн [1948], Росс и Стоун [1964]). Используя (a), покажите, что для каждой пары непустых непересекающихся открытых множеств $U, V \subset \prod_{s \in S} X_s$, где X_s — сепарабельное пространство, существует счетное множество $S_0 \subset S$, такое, что проекции U и V на $\prod_{s \in S_0} X_s$ не пересекаются. Проверьте, что если все X_s удовлетворяют второй аксиоме счетности, то существуют открытые множества $U_1, V_1 \subset \prod_{s \in S} X_s$, являющиеся счетными объединениями элементов канонической базы пространства $\prod_{s \in S} X_s$ и такие, что

$$U \subset U_1, \quad V \subset V_1 \quad \text{и} \quad U_1 \cap V_1 = \varnothing.$$

(c) (Мазур [1952], Корсон [1959], Корсон и Исбелл [1960], Росс и Стоун [1964]). Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство топологических пространств. Говорят, что непрерывное отображение $f: A \to Y$ подпространства A произведения $\prod_{s \in S} X_s$ в пространство Y зависит от *счетного множества координат*, если существует счетное множество $S_0 \subset S$, такое, что $f(x) = f(y)$ для каждой пары $x = \{x_s\}$, $y = \{y_s\}$, удовлетворяющей условию $x_s = y_s$ для $s \in S_0$.

Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство сепарабельных пространств и Y — хаусдорфово пространство со второй аксиомой счетности. Докажите, что каждое непрерывное отображение $f: \prod_{s \in S} X_s \to Y$ зависит от счетного множества координат и существуют счетное множество $S_0 \subset S$ и непрерывное отображение $f_0: \prod_{s \in S_0} X_s \to Y$, такие, что f совпадает с композицией $f_0 p_{S_0}$ проекции $p_{S_0}: \prod_{s \in S} X_s \to \prod_{s \in S_0} X_s$ и отображения f_0 (ср. с упр. 3.2.H и 4.1.G и задачей 2.7.13)

Замечание. Дальнейшие сведения о функциях на произведениях можно найти в работах: Энгелькинг [1966] и Нобл и Ульмер [1972].

Σ-произведения I (см. упр. 3.10. D и задачи 3.12.23 и 4.5.12)

2.7.13 (Корсон [1959]; ссылка на Э. М. Глисона в книге Исбелла [1964]). Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство топологических пространств, и пусть $a=\{a_s\}$ — точка произведения $\prod_{s\in S} X_s$. Через $\Sigma(a)$ обозначим подпространство произведения $\prod_{s\in S} X_s$, состоящее из всех таких точек $\{x_s\}$, что $x_s\neq a_s$ только для счетного множества $s\in S$. Все подпространства пространства $\prod_{s\in S} X_s$ вида $\Sigma(a)$ для $a\in\prod_{s\in S} X_s$ называются *Σ-произведениями* пространств $\{X_s\}_{s\in S}$.

(a) Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство сепарабельных топологических пространств и Y — хаусдорфово пространство, одноточечные подмножества которого суть G_δ-множества. Докажите, что для каждого $a\in\prod_{s\in S} X_s$ и каждого непрерывного отображения $f\colon \Sigma(a)\to Y$ существуют счетное множество $S_0\subset S$ и непрерывное отображение $f_0\colon \prod_{s\in S_0} X_s\to Y$, такие, что f совпадает с композицией $f_0(p_{S_0}|\Sigma(a))$ сужения проекции $p_{S_0}\colon \prod_{s\in S} X_s\to\prod_{s\in S_0} X_s$ на $\Sigma(a)$ и отображения f_0. Покажите, что, в частности, f зависит от счетного множества координат.

Указание. Прежде всего покажите, что для каждого $x=\{x_s\}\in\Sigma(a)$ существует счетное множество $S(x)\subset S$, такое, что если $x'=\{x'_s\}\in\Sigma(a)$ и $x'_s=x_s$ для $s\in S(x)$, то $f(x')=f(x)$. Затем определите по индукции счетные подмножества $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ множества $\Sigma(a)$, где $\Sigma_1=\{a\}$, и счетные подмножества S_1, $S_2, \ldots$ множества S, такие, что $S_i=\bigcup_{j=1}^{i}\bigcup_{x\in\Sigma_j} S(x)$ и проекции множеств Σ_{i+1} на пространства $\prod_{s\in S_i} X_s$ всюду плотны в пространствах $\prod_{s\in S_i} X_s$. Затем рассмотрите множество $S_0=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$.

(b) Выведите из сказанного выше, что при предположениях задачи (a) каждое непрерывное отображение $f\colon \Sigma(a)\to Y$ непрерывно продолжается на все пространство $\prod_{s\in S} X_s$.

(c) Покажите, что (a) остается верным, если $\Sigma(a)$ заменить любым открытым подмножеством пространства $\prod_{s\in S} X_s$, т. е. что в предположениях задачи (a) для каждого открытого множества $U\subset\prod_{s\in S} X_s$ и каждого непрерывного отображения

$f\colon U \to Y$ существуют счетное множество $S_0 \subset S$ и непрерывное отображение $f_0\colon p_{S_0}(U) \to Y$, такие, что $f = f_0(p_{S_0}|U)$. Покажите, что этот результат дает решение задачи 2.7.12(b).

2.7.14 (Комбаров и Малыхин [1973]). Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство топологических пространств со следующим свойством: для каждого счетного множества $S_0 \subset S$ произведение $\prod\limits_{s \in S_0} X_s$ нормально и наследственно сепарабельно. Докажите, что тогда любое Σ-произведение пространств $\{X_s\}_{s \in S}$ нормально (ср. с задачей 2.7.9(g)).

Указание. Рассмотрите Σ-произведение $\Sigma(a)$, где $a = \{a_s\} \in \prod\limits_{s \in S} X_s$. Для любого $x = \{x_s\} \in \Sigma(a)$ положите $S(x) = \{s \in S\colon x_s \neq a_s\}$ и $S(M) = \bigcup\limits_{x \in M} S(x)$ для любого $M \subset \Sigma(a)$. Для пары A, B непересекающихся замкнутых подмножеств пространства $\Sigma(a)$ выберите $s_0 \in S$ и определите по индукции возрастающую последовательность $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$, где $S_1 = \{s_0\}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, счетных подмножеств множеств S, A и B соответственно, таких, что для $i = 1, 2, \ldots$

$$p_{S_i}(A) \subset \overline{p_{S_i}(A_i)}, \quad p_{S_i}(B) \subset \overline{p_{S_i}(B_i)} \quad \text{и} \quad S(A_i) \cup S(B_i) \subset S_{i+1}.$$

Установите, что для $S_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$, $A_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и $B_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ имеют место включения

$$p_{S_0}(A) \subset \overline{p_{S_0}(A_0)} \quad \text{и} \quad p_{S_0}(B) \subset \overline{p_{S_0}(B_0)}$$

и что $\overline{p_{S_0}(A_0)} \cap \overline{p_{S_0}(B_0)} = \varnothing$.

Декартовы произведения и нормальность

2.7.15. (a) (Катетов [1948]). Пусть произведение $X \times Y$ наследственно нормально. Покажите, что либо все счетные подмножества пространства X замкнуты, либо пространство Y совершенно нормально.

Указание. Допустим, что существуют счетное подмножество $M \subset X$, такое, что $\overline{M} \setminus M \neq \varnothing$, и замкнутое подмножество $F \subset Y$, не являющееся G_δ-множеством. Выберите $x \in \overline{M} \setminus M$ и рассмотрите подмножества $A = M \times F$ и $B = \{x\} \times (Y \setminus F) \subset X \times Y$.

(b) (Кук и Фицпатрик [1968]). Докажите, что предел обратной последовательности совершенно нормальных пространств совершенно нормален.

Указание. Примените условие (iii) теоремы 1.5.19.

(c) (Катетов [1948]). Покажите, что счетное произведение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ совершенно нормально в том и только том случае, когда все конечные произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_i$ совершенно нормальны.

(d) (Катетов [1948]). Докажите, что счетное произведение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, где $|X_i| \geqslant 2$ для $i = 1, 2, \ldots$, совершенно нормально в том и только том случае, если оно наследственно нормально.

Замечание. Как отметил Майкл [1971], существует не нормальное произведение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, такое, что все конечные произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_i$ наследственно нормальны (в действительности наследственно паракомпактны). В самом деле, достаточно взять пространство X из примера 5.1.32 в качестве X_1 и счетное дискретное пространство N в качестве пространства X_i, $i > 1$ (см. пример 5.1.32 и упр. 4.3.G).

2.7.16. (a) (А. Стоун [1948]). Докажите, что декартово произведение $N^{\aleph_1}$ не является нормальным (ср. с упр. 3.1.H(a)).

Указание. Пусть $N^{\aleph_1} = \prod_{s \in S} X_s$, где $X_s = N$ и $|S| = \aleph_1$. Для $i = 1$ и 2 рассмотрите множество $A_i \subset \prod_{s \in S} X_s$, состоящее из всех таких $\{x_s\}$, что для каждого $j \neq i$ равенство $x_s = j$ имеет место не более чем для одного $s \in S$. Проверьте, что A_1 и A_2 замкнуты и не пересекаются, и покажите (применяя задачу 2.7.12(b) или 2.7.13(c)), что A_1 и A_2 не могут быть отделены непересекающимися открытыми множествами.

(b) (Поспишил [1937a]). Покажите, что никакое декартово произведение несчетного множества пространств, каждое из которых имеет мощность > 1, не является наследственно нормальным.

Указание. Примените либо (a), либо 2.7.15(a).

Регулярное пространство X, на котором каждая непрерывная вещественная функция постоянна

2.7.17 (Херрлих [1965a]). (a) Определите регулярное пространство H, содержащее точки t и t', удовлетворяющее условию $f(t) = f(t')$ для каждой непрерывной функции $f\colon H \to R$.

Указание. Измените конструкцию примера 2.4.21, взяв сумму $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_{-i}$ и добавив две точки.

(b) Для каждого регулярного пространства S определите регулярное пространство $H(S)$, содержащее S как замкнутое подпространство и обладающее тем свойством, что каждая непрерывная функция $f\colon H(S)\to R$ постоянна на S.

Указание. Рассмотрите произведение $Y=S\times H$ с топологией, порожденной окрестностями следующего вида: для точки (s, h), $h\neq t$, в качестве окрестностей взяты все множества $\{s\}\times V$, где V пробегает множество окрестностей точки h в пространстве H, таких, что $t\notin V$, а для точки (s, t)— все множества вида $\bigcup_{s'\in U}(\{s'\}\times V_{s'})$, где U — окрестность точки s в пространстве S, а $V_{s'}$ — окрестность точки t в пространстве H. Отождествите замкнутое подмножество $S\times\{t'\}$ пространства Y в точку.

(c) Определите регулярное пространство X, такое, что $|X|>1$ и каждая непрерывная функция $f\colon X\to R$ постоянна.

Указание. Возьмите $X_0=\{0\}$ и $X_{i+1}=H(X_i)$ для $i=1, 2, \ldots$ и рассмотрите объединение $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Замечание. Пространства с подобными свойствами были ранее определены Хьюиттом [1946] и Новаком [1948], однако их конструкции более сложны.

2.7.18 (Херрлих [1965a]). (a) Для каждого T_1-пространства Y определите регулярное пространство X, такое, что $|X|>1$ и каждая непрерывная функция $f\colon X\to Y$ постоянна.

Указание. Поступайте так, как предложено в указаниях к предшествующей задаче; начните с соответствующего изменения пространства Z из примера 2.3.36.

(b) Выведите из (a), что не существует T_1-пространства Y с тем свойством, что каждое регулярное пространство вложимо в некоторую степень пространства Y.

Замечание. Часть (b) была получена независимо Рамером в [1965].

Обратные спектры I (см. задачи 3.12.13 и 6.3.16)

2.7.19. (a) (Джентри [1969], Э. Поль [1973]). Приведите пример обратных последовательностей $\boldsymbol{S}=\{X_i, \pi_j^i\}$ и $\boldsymbol{S}'=\{Y_i, \tilde{\pi}_j^i\}$ подпространств вещественной прямой и отображения $\{\mathrm{id}_N, f_i\}$ из $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{S}'$, где π_j^i, $\tilde{\pi}_j^i$ и f_i — открыто-замкнутые отображения «на», такие, что $\varprojlim\{\mathrm{id}_N, f_i\}$ есть отображение «на», не являющееся факторным.

(b) (Локуциевский [1954]). Докажите, что если все связующие отображения π_j^i обратной последовательности $\{X_i, \pi_j^i\}$

открыты и являются отображениями «на», то проекции π_i открыты.

Замечание. Последнее заключение не имеет места для произвольных обратных спектров (см. Э. Поль [1973]).

(c) Приведите пример обратной последовательности $\{X_i, \pi_j^i\}$, где все связующие отображения π_j^i открыты, в то время как проекции π_i не являются открытыми.

(d) (Зенор [1969]). Докажите, что если все связующие отображения π_j^i обратной последовательности $\{X_i, \pi_j^i\}$ замкнуты, то проекции π_i также замкнуты.

Замечание. Последнее заключение, вообще говоря, не имеет места для произвольных обратных спектров (см. Э. Поль [1973]).

(e) (Э. Поль [1973]). Докажите, что если все связующие отображения π_j^i обратной последовательности $\{X_i, \pi_j^i\}$ наследственно факторны, то проекции π_i также наследственно факторны.

Замечание. Это утверждение несправедливо для произвольных обратных спектров даже в случае, когда проекции π_σ — отображения «на». Если же только предположить, что все связующие отображения обратной последовательности $\{X_i, \pi_j^i\}$ факторные, то проекции π_i, вообще говоря, не являются факторными (см. Э. Поль [1973]).

Пространства замкнутых подмножеств I (см. задачи 3.12.26, 4.5.22, 6.3.22 и 8.5.16)

2.7.20. (a) (Вьеторис [1922]). Для любого топологического пространства X обозначим через 2^X семейство всех его непустых замкнутых подмножеств. Проверьте, что семейство $\mathscr{B}$ всех множеств вида

$$\mathscr{V}(U_1, U_2, \ldots, U_k) = \left\{B \in 2^X\colon B \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ и } B \cap U_i \neq \varnothing,\ i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

где $U_1, U_2, \ldots, U_k$ — последовательность открытых подмножеств пространства X, удовлетворяет условиям (B1) и (B2). Таким образом, это семейство $\mathscr{B}$ порождает топологию на множестве 2^X; эта топология называется *топологией Вьеториса*. Множество 2^X с топологией Вьеториса называется *экспоненциальным пространством* пространства X.

(b) (Майкл [1951]). Пусть $J_i(X)$, $i = 1, 2, \ldots$, есть подпространство пространства 2^X, состоящее из всех множеств мощности $\leqslant i$, и пусть $J(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i(X)$. Пусть X есть T_1-пространство; поставим в соответствие элементу $(x_1, x_2, \ldots, x_i) \in X^i$ точку $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \in J_i(X)$. Проверьте, что тем самым определено непрерывное отображение $j_i\colon X^i \to J_i(X) \subset 2^X$.

Заметьте, что для T_1-пространства X пространство $J_1(X)$ гомеоморфно пространству X. Покажите, что если X есть T_2-пространство, то все множества $J_i(X)$ замкнуты в пространстве 2^X, а если X есть T_1-пространство и $J_1(X)$ замкнуто в пространстве 2^X, то X есть T_2-пространство.

Установите, что если X есть T_1-пространство, то $J(X)$ всюду плотно в 2^X, и покажите, что $d(2^X) = d(X)$ для каждого бесконечного T_1-пространства X. Заметьте, что если X есть T_1-пространство, то 2^X плотно в себе тогда и только тогда, когда пространство X плотно в себе.

(c) Покажите, что если X есть T_2-пространство, то отображение $j_i\colon X^i \to J_i(X)$ замкнуто для $i = 1, 2, \ldots$. Отметьте, что, вообще говоря, отображения j_i не являются открытыми.

(d) (Майкл [1951]). Проверьте, что отображение F, ставящее в соответствие каждой точке y топологического пространства Y непустое замкнутое подмножество $F(y)$ топологического пространства X, есть непрерывное отображение пространства Y в экспоненциальное пространство 2^X в том и только том случае, если F полунепрерывно и сверху, и снизу (см. задачу 1.7.17).

(e) (Майкл [1951]). Покажите, что 2^X всегда является T_0-пространством и если X есть T_1-пространство, то и 2^X есть T_1-пространство, но не наоборот. Докажите, что для T_1-пространства X экспоненциальное пространство 2^X хаусдорфово (регулярно, или, что равносильно, вполне регулярно) в том и только том случае, если X — регулярное (нормальное) пространство (ср. с замечанием к задаче 3.12.26(a)).

(f) (Иванова [1955]). Докажите, что экспоненциальное пространство 2^N не является нормальным.

Указание (Кислинг [1970]). Разложите N в объединение $N_1 \cup N_2$; где $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ и $|N_1| = |N_2| = \aleph_0$. Для $i = 1, 2$ выберите взаимно однозначное отображение f_i множества N на N_i и проверьте, что $\{f_1(A) \cup f_2(N \setminus A)\colon A \subset N\}$ — замкнутое подпространство пространства 2^N, гомеоморфное пространству $D(\mathfrak{c})$.

Многозначные отображения II (см. задачи 1.7.17 и 3.12.27)

2.7.21 (Куратовский [1963]). Докажите, что T_1-пространство X нормально в том и только том случае, если, сопоставляя каждой паре $(A, B) \in 2^X \times 2^X$ пересечение $A \cap B \subset X$, мы определяем полунепрерывное сверху многозначное отображение (на 2^X рассматривается топология Вьеториса).

Глава 3

КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Компактные пространства, изучение которых является главной целью этой главы, составляют один из наиболее важных классов топологических пространств. Они определяются как пространства, каждое покрытие которых открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. Класс компактных пространств содержит все ограниченные замкнутые подмножества евклидовых пространств, и оказывается, что многие хорошо известные свойства таких подмножеств в действительности являются свойствами всех компактных пространств. В § 3.10 изучаются три класса пространств, тесно связанные с классом компактных пространств. Эти классы совпадают с классом компактных пространств, когда мы ограничиваемся подпространствами евклидовых пространств, однако в общем случае они ведут себя не так хорошо, как класс компактных пространств. Исследование этих классов, а также класса линделёфовых пространств и класса вещественно полных пространств позволяет глубже понять роль и место компактности в общей топологии.

В § 3.1 дается определение компактных пространств, доказывается несколько простых теорем о компактности и приводятся некоторые примеры. В этом же параграфе вводится понятие сети; оно оказывается хорошим средством для доказательства теорем о весе компактных пространств.

Параграф 3.2 посвящен изучению поведения компактных пространств при различных операциях, определенных в предыдущей главе. В этом параграфе доказываются теорема Тихонова, утверждающая, что произведение компактных пространств является компактным пространством (один из самых полезных результатов общей топологии), и теорема Стоуна — Вейерштрасса.

В § 3.3 обсуждаются локально компактные хаусдорфовы пространства и их факторпространства — так называемые k-пространства.

Компактно-открытая топология на пространствах функций, которой мы уже коснулись в § 2.6, обсуждается в § 3.4. В последней части этого параграфа рассматриваются теоремы типа теоремы Асколи, дающие необходимые и достаточные условия компактности множеств в пространствах функций.

Параграф 3.5 посвящен компактификациям. В семействе $\mathscr{C}(X)$ всех компактификаций тихоновского пространства X определяется порядок; доказывается, что относительно этого порядка в $\mathscr{C}(X)$ есть все точные верхние грани. Оказывается, существование точных нижних граней в $\mathscr{C}(X)$ равносильно локальной компактности пространства X.

В § 3.6 изучается расширение Стоуна — Чеха βX пространства X — наибольший элемент семейства $\mathscr{C}(X)$, а также расширение Волмэна ωX — аналог расширения βX, определенный для всех T_1-пространств.

Совершенные отображения определяются и изучаются в § 3.7. Мы показываем, что этот важный класс отображений хорошо ведет себя относительно операций над отображениями и что многие топологические свойства сохраняются такими отображениями в сторону образа и в сторону прообраза.

Последние четыре параграфа имеют несколько более специальный характер. Параграф 3.8 посвящен линделёфовым пространствам. В § 3.9 изучаются пространства, полные по Чеху. Среди прочих вещей мы показываем, что для таких пространств и, в частности, для локально компактных хаусдорфовых пространств имеет место теорема Бэра о категории. В § 3.10 рассматриваются три класса пространств, связанные с классом компактных пространств, а именно: счетно компактные, псевдокомпактные и секвенциально компактные пространства. Мы приводим несколько примеров (в которых участвует расширение Стоуна — Чеха), чтобы продемонстрировать, что ни один из этих трех классов не ведет себя по отношению к операциям так же хорошо, как класс компактных пространств. В частности, произведение двух счетно компактных (псевдокомпактных) пространств не обязательно счетно компактно (псевдокомпактно). Вещественно полные пространства, которые имеют некоторые применения в функциональном анализе, изучаются в § 3.11.

3.1. КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Напомним, что покрытием множества X называется такое семейство $\{A_s\}_{s\in S}$ его подмножеств, что $\bigcup\limits_{s\in S} A_s = X$. В случае когда X — топологическое пространство, это покрытие называется открытым (замкнутым) покрытием пространства X, если все множества A_s открыты (замкнуты). Мы говорим, что покрытие $\mathscr{B}=\{B_t\}_{t\in T}$ является *измельчением* другого покрытия $\mathscr{A}=\{A_s\}_{s\in S}$ того же множества X, если для каждого $t\in T$ существует такое $s(t)\in S$, что $B_t\subset A_{s(t)}$. В этом случае мы говорим также, что $\mathscr{B}$ *вписано* в $\mathscr{A}$. Покрытие $\mathscr{A}'=\{A'_s\}_{s\in S'}$ множества X является *подпокрытием* покрытия $\mathscr{A}=\{A_s\}_{s\in S}$ множества X, если $S'\subset S$ и $A'_s=A_s$ для всех $s\in S'$. В частности, каждое подпокрытие является измельчением.

Топологическое пространство X называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т. е. если для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s\in S}$ пространства X существует конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}\subset S$, такое, что $X=U_{s_1}\cup\ldots\cup U_{s_k}$.

Семейство $\mathscr{F}=\{F_s\}_{s\in S}$ множеств называется *центрированным*, если $\mathscr{F}\neq\varnothing$ и $F_{s_1}\cap\ldots\cap F_{s_k}\neq\varnothing$ для каждой конечной системы $s_1, \ldots, s_k\in S$.

3.1.1. Теорема. *Пространство X компактно в том и только том случае, если каждое центрированное семейство замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство и $\{F_s\}_{s\in S}$ — семейство замкнутых в X множеств, такое, что $\bigcap_{s\in S}F_s$ пусто. Рассмотрим открытые множества $U_s=X\setminus F_s$. Так как

$$\bigcup_{s\in S}U_s=\bigcup_{s\in S}(X\setminus F_s)=X\setminus\bigcap_{s\in S}F_s=X,$$

семейство $\{U_s\}_{s\in S}$ является открытым покрытием пространства X. Но пространство X компактно. Значит, покрытие $\{U_s\}_{s\in S}$ содержит конечное подпокрытие $\{U_{s_1}, \ldots, U_{s_k}\}$. Следовательно,

$$X=\bigcup_{i=1}^{k}U_{s_i}=\bigcup_{i=1}^{k}(X\setminus F_{s_i})=X\setminus\bigcap_{i=1}^{k}F_{s_i},$$

откуда вытекает, что $\bigcap_{i=1}^{k}F_{s_i}=\varnothing$. Таким образом, если семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнутых в X множеств центрировано, то $\bigcap_{s\in S}F_s\neq\varnothing$.

Доказательство компактности пространства, в котором все центрированные семейства замкнутых множеств имеют непустое пересечение, предоставляется читателю. ∎

Следующая теорема является следствием теоремы 3.1.1.

3.1.2. Теорема. *Каждое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.* ∎

Мы докажем теперь несколько теорем о компактных подпространствах произвольных топологических пространств.

Из определения топологии подпространства немедленно следует

3.1.3. Теорема. *Если подпространство A топологического пространства X компактно, то для любого семейства $\{U_s\}_{s\in S}$ открытых в X множеств, такого, что $A\subset\bigcup_{s\in S}U_s$, найдется конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}\subset S$, для которого $A\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_{s_i}$.* ∎

3.1.4. Следствие. *Пусть $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ — семейство замкнутых подмножеств пространства X. Подпространство $F=\bigcup_{i=1}^{k}F_i$ пространства X компактно в том и только том случае, если все подпространства F_i компактны.* ∎

3.1.5. Следствие. *Пусть U — открытое множество в топологическом пространстве X. Если семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнутых подмножеств пространства X содержит по крайней мере одно компактное множество (в частности, если X компактно) и если $\bigcap_{s\in S}F_s\subset U$, то существует конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}\subset S$, такое, что $\bigcap_{i=1}^{k}F_{s_i}\subset U$.*

Доказательство. Пусть множество F_{s_0} компактно. Заменив пространство X его подпространством F_{s_0}, множество U множеством $U\cap F_{s_0}$ и семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ семейством $\{F_{s_0}\cap F_s\}_{s\in S}$, мы сведем нашу задачу к случаю компактного пространства. Значит, можно предположить, что пространство X компактно. Применив теорему 3.1.3 к множествам $A=X\setminus U$ и $U_s=X\setminus F_s$, мы получим конечное множество $\{s_1, \ldots, s_k\}\subset S$ с нужным свойством. ∎

3.1.6. Теорема. *Если A — компактное подпространство регулярного пространства X, то для каждого замкнутого множества $B\subset X\setminus A$ найдутся открытые множества $U, V\subset X$, такие, что $A\subset U$, $B\subset V$ и $U\cap V=\varnothing$.*

Если, кроме того, B является компактным подпространством пространства X, то достаточно предполагать X хаусдорфовым пространством.

Доказательство. Так как пространство X регулярно, то для каждого $x\in X$ найдутся открытые множества $U_x, V_x\subset X$, такие, что

(1) $$x\in U_x,\quad B\subset V_x\quad \text{и}\quad U_x\cap V_x=\varnothing.$$

Ясно, что $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$; поэтому, в силу 3.1.3, существует конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset A$, такое, что $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$. Легко проверяется, что множества $U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$ и $V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ обладают нужными свойствами.

Заметим, что, когда множество B одноточечно, в доказательстве первой части теоремы используется только хаусдорфовость пространства X. Если B является компактным подпространством пространства X, то для каждого $x \in A$ мы получаем открытые множества U_x, $V_x \subset X$, удовлетворяющие условию (1), применив предшествующее замечание к компактному подпространству B и одноточечному множеству $\{x\}$. ∎

3.1.7. Теорема. *Если A — компактное подпространство тихоновского пространства X, то для каждого замкнутого множества $B \subset X \setminus A$ найдется непрерывная функция f: $X \to I$, такая, что $f(x) = 0$ при всех $x \in A$ и $f(x) = 1$ при всех $x \in B$.*

Доказательство. Для каждого $x \in A$ существует функция f_x: $X \to I$, такая, что $f_x(x) = 0$ и $f_x(B) \subset \{1\}$. Так как $A \subset \subset \bigcup_{x \in A} f_x^{-1}([0, 1/2))$, то, в силу 3.13, найдется конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset A$, такое, что $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} f_{x_i}^{-1}([0, 1/2))$. Функция g: $X \to I$, определенная следующим образом:

$$g(x) = \min\left(f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_k}(x)\right),$$

удовлетворяет включениям

$$A \subset g^{-1}([0, 1/2)) \quad \text{и} \quad g(B) \subset \{1\}.$$

Легко проверяется, что функция f: $X \to I$, определенная формулой $f(x) = 2\max\left(g(x) - \frac{1}{2}, 0\right)$, обладает нужными свойствами. ∎

3.1.8. Теорема. *Каждое компактное подпространство хаусдорфова пространства X является замкнутым в X множеством.*

Доказательство. Пусть A — компактное подпространство пространства X. В силу второй части утверждения 3.1.6, для каждого $x \in X \setminus A$ найдется открытое множество $V \subset X$, такое, что $x \in V$ и $A \cap V = \varnothing$. Значит, множество $X \setminus A$ открыто в X. ∎

Из второй части утверждения 3.1.6, взятой вместе с 3.1.2, следует

3.1.9. Теорема. *Каждое компактное хаусдорфово пространство нормально.* ∎

В следующих трех теоремах рассматриваются свойства непрерывных отображений компактных пространств.

3.1.10. Теорема. *Если компактное пространство X непрерывно отображается на пространство Y, то Y — компактное пространство.*

Иными словами, *непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — открытое покрытие пространства Y. Семейство $\{f^{-1}(U_s)\}_{s \in S}$ является открытым покрытием пространства X. Значит, существует конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$, такое, что

$$f^{-1}(U_{s_1}) \cup f^{-1}(U_{s_2}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{s_k}) = X,$$

а отсюда следует, что $U_{s_1} \cup \ldots \cup U_{s_k} = Y$. ∎

3.1.11. Следствие. *Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y, то $\overline{f(A)} = f(\bar{A})$ для каждого $A \subset X$.*

Доказательство. Так как f непрерывно, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ в силу предложения 1.4.1. Обратное включение вытекает из определения замыкания и из теорем 3.1.2, 3.1.10 и 3.1.8. ∎

Из последнего утверждения сразу следует

3.1.12. Теорема. *Каждое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.* ∎

Из 3.1.12 и 1.4.18 мы получаем следующую важную теорему (см. задачу 3.12.5(e)):

3.1.13. Теорема. *Каждое непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.* ∎

3.1.14. Следствие. *Пусть $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ — две топологии на множестве X, и пусть $\mathcal{O}_1$ тоньше, чем $\mathcal{O}_2$. Тогда если пространство $(X, \mathcal{O}_1)$ компактно, а $(X, \mathcal{O}_2)$ является хаусдорфовым пространством, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.*

Иными словами, *среди всех хаусдорфовых топологий компактные топологии являются минимальными.*

Доказательство. Тождественное отображение множества X на себя является взаимно однозначным непрерывным отображением пространства $(X, \mathcal{O}_1)$ на пространство $(X, \mathcal{O}_2)$. По теореме 3.1.13, это отображение является гомеоморфизмом. ∎

Теперь мы дадим интересную характеристику компактных пространств в терминах декартовых произведений.

3.1.15. Лемма. *Если A — компактное подпространство пространства X и y — точка пространства Y, то для каждого открытого множества $W \subset X \times Y$, содержащего $A \times \{y\}$, существуют открытые множества $U \subset X$ и $V \subset Y$, такие, что $A \times \{y\} \subset \subset U \times V \subset W$.*

Доказательство. Для каждого $x \in A$ точка (x, y) имеет окрестность вида $U_x \times V_x$, содержащуюся в W. Очевидно, $A \times \{y\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \times V_x$, так что по теореме 3.1.3 существует конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset A$, для которого $A \times \{y\} \subset \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \times V_{x_i}$. Легко проверяется, что множества $U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$ и $V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ обладают нужными свойствами. ∎

3.1.16. Теорема Куратовского. *Для произвольного пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X компактно.*

(ii) *Для каждого топологического пространства Y проектирование $p: X \times Y \to Y$ является замкнутым отображением.*

(iii) *Для каждого нормального пространства Y отображение $p: X \times Y \to Y$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство и $F = \overline{F} \subset X \times Y$. Возьмем точку $y \notin p(F)$. Так как $X \times \{y\} \subset \subset (X \times Y) \setminus F$, из леммы 3.1.15 вытекает, что у точки y есть такая окрестность V, что $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Имеем тогда $p(F) \cap V = \varnothing$, значит, $p(F)$ является замкнутым в Y множеством. Импликация (i)⇒(ii) доказана.

Импликация (ii)⇒(iii) очевидна; докажем, что (iii)⇒(i). Пусть пространство X обладает свойством (iii). Предположим, что нашлось центрированное семейство $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых множеств в X, такое, что $\bigcap_{s \in S} F_s = \varnothing$. Возьмем точку $y_0 \notin X$ и на множестве $Y = X \cup \{y_0\}$ рассмотрим топологию, состоящую из всех подмножеств множества X и всех множеств вида

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \ldots \cap F_{s_k}) \cup K, \text{ где } s_1, s_2, \ldots, s_k \in S \text{ и } K \subset X.$$

Из $\bigcap_{s \in S} F_s = \varnothing$ следует, что Y является T_1-пространством. Так как каждое подмножество пространства Y, не содержащее y_0, открыто, пространство Y нормально.

Так как X обладает свойством (iii), проекция $p(F)$ множества $F = \overline{\{(x, x): x \in X\}} \subset X \times Y$ является замкнутым в Y множеством. Из включения $X \subset p(F)$ следует, что $y_0 \in p(F)$, так как $y_0 \in \overline{X} = Y$. Значит, существует точка $x_0 \in X$, для которой $(x_0, y_0) \in F$. Для каждой окрестности $U \subset X$ точки x_0 и каждого $s \in S$ имеем тогда $[U \times (\{y_0\} \cup F_s)] \cap \{(x, x): x \in X\} \neq \neq \varnothing$, т. е. $U \cap F_s \neq \varnothing$. Значит, $x_0 \in F_s$ при всех $x \in S$, и, следовательно, $\bigcap_{s \in S} F_s \neq \varnothing$ — противоречие. ∎

3.1.17. Замечание. Небольшое изменение в проведенном рассуждении (см. задачу 3.12.14(а)) дает компактное пространство Y, такое, что $w(Y) \leqslant w(X)$. Следовательно, чтобы доказать, что пространство X компактно, достаточно показать, что проектирование $p: X \times Y \to Y$ замкнуто для каждого компактного пространства Y, для которого $w(Y) \leqslant w(X)$.

Определим теперь понятие сети и связанное с ним понятие сетевого веса. Оба понятия определяются для любых топологических пространств, но особенно полезными они оказываются при изучении классов пространств, более или менее тесно связанных с классом компактных пространств.

Семейство $\mathcal{N} = \{M_s\}_{s \in S}$ подмножеств топологического пространства X называется *сетью* пространства X (или *сетью в* X), если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x найдется такое $s \in S$, что $x \in M_s \subset U$. Ясно, что каждая база пространства X является сетью этого пространства, причем сетью особого сорта: ее элементы — открытые множества. Семейство всех одноточечных подмножеств пространства является другим примером сети. *Сетевой вес* пространства X определяется как наименьший кардинал вида $|\mathcal{N}|$, где $\mathcal{N}$ — сеть пространства X. Этот кардинал обозначается через $nw(X)$. Ясно, что для каждого топологического пространства X выполняются соотношения $nw(X) \leqslant w(X)$ и $nw(X) \leqslant |X|$.

Заметим, что если в X есть сеть мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, то в X есть и всюду плотное множество мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ (см. доказательство теоремы 1.3.7), так что для каждого топологического пространства X имеем: $d(X) \leqslant nw(X)$.

Противоположное неравенство, вообще говоря, не верно: рассуждая так же, как в примере 1.2.2, легко показать, что $nw(K) = \mathfrak{c}$ для прямой Зоргенфрея K. Таким образом, $nw(K) > d(K) = \aleph_0$. Если X является T_0-пространством, то $|X| \leqslant \exp nw(X)$. Это можно доказать точно так же, как более слабое неравенство из 1.5.1.

3.1.18. Лемма. *Для каждого хаусдорфова пространства X существует непрерывное взаимно однозначное отображение этого пространства на хаусдорфово пространство Y, такое, что $w(Y) \leqslant nw(X)$.*

Доказательство. Пусть $nw(X) = \mathfrak{m}$, и пусть $\mathcal{N}$ — сеть пространства X, для которой $|\mathcal{N}| = \mathfrak{m}$. Легко проверить, что если $\mathfrak{m} < \aleph_0$, то X является дискретным пространством мощности $\mathfrak{m}$, $w(X) = \mathfrak{m}$, и можно взять $Y = X$.

Предположим, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Обозначим через $\mathcal{O}_1$ топологию пространства X. Рассмотрим те пары (M_1, M_2) элементов семейства $\mathcal{N}$, для которых существуют непересекающиеся открытые множества $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_1$, содержащие M_1 и M_2 соответственно. Для каждой такой пары (M_1, M_2) фиксируем некоторые U_1, U_2, обладающие названными свойствами. Семейство всех отобранных таким образом элементов топологии $\mathcal{O}_1$ обозначим через $\mathcal{B}_0$. Семейство $\mathcal{B}$ всех конечных пересечений элементов семейства $\mathcal{B}_0$ обладает свойствами (B1)—(B2).

Из определения сети и того факта, что $(X, \mathcal{O}_1)$ является хаусдорфовым пространством, вытекает, что множество X, наделенное топологией $\mathcal{O}_2$, порожденной базой $\mathcal{B}$, является хаусдорфовым пространством — мы обозначаем это пространство через Y. Так как $|\mathcal{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, имеем $w(Y) \leqslant nw(X)$. Из включения $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ следует, что тождественное отображение множества X на себя является взаимно однозначным непрерывным отображением пространства X на пространство Y. ∎

Предыдущая лемма и теорема 3.1.13 дают такой результат:

3.1.19. Теорема. *Для каждого компактного хаусдорфова пространства X имеем $nw(X) = w(X)$.* ∎

3.1.20. Следствие. *Если компактное хаусдорфово пространство X обладает таким покрытием $\{A_s\}_{s \in S}$, что $w(A_s) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ при всех $s \in S$ и $|S| \leqslant \mathfrak{m}$, то $w(X) \geqslant \mathfrak{m}$.*

Доказательство. Семейство $\bigcup_{s \in S} \mathcal{B}_s$, где $\mathcal{B}_s$ есть база мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ подпространства A_s, является сетью пространства X, и мощность этого семейства не превосходит $\mathfrak{m}$. ∎

Заметим, что в приведенном выше следствии достаточно предполагать, что $nw(A_s) \leqslant \mathfrak{m}$.

Из теоремы 3.1.19 вытекают две другие важные теоремы.

3.1.21. Теорема. *Для каждого компактного хаусдорфова пространства X имеем $w(X) \leqslant |X|$.* ∎

3.1.22. Теорема. *Если компактное хаусдорфово пространство Y является непрерывным образом пространства X, то $w(Y) \leqslant \leqslant w(X)$.*

Доказательство. Из условия (iii) теоремы 1.4.1 следует, что если f отображает X на Y, то семейство $\{f(U)\colon U \in \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ — база пространства X, является сетью пространства Y. ∎

Ясно, что в условиях приведенной выше теоремы выполняется более сильное неравенство $w(Y) \leqslant nw(X)$.

Так как существуют счетные пространства без счетной базы (см. примеры 1.6.19, 1.6.20 или 2.3.37), предположение о компактности в теоремах 3.1.19 и 3.1.21 опустить нельзя. Рассматривая любое отображение пространства N на счетное пространство без счетной базы, мы видим, что предположение о компактности нельзя опустить и в теореме 3.1.22. Оказывается, однако, что во всех этих трех теоремах компактность можно заменить более слабыми предположениями (см. теоремы 3.3.5, 3.7.19 и упр. 3.9. E).

Следующая теорема характеризует компактность в терминах направленностей.

3.1.23. Теорема. *Пространство X компактно в том и только том случае, если каждая направленность в X имеет предельную точки.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство и $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ — направленность в X. Семейство $\{F_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, где

$$F_\sigma = \overline{\{x_{\sigma'}\colon \sigma \leqslant \sigma'\}},$$

состоит из замкнутых множеств и центрировано, так как $F_{\sigma_1} \subset F_{\sigma_2}$ при $\sigma_2 \leqslant \sigma_1$. По теореме 3.1.1 существует $x \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} F_\sigma$. Точка x является предельной точкой направленности S. Действительно, если бы x не было предельной точкой для S, то нашлись бы окрестность U точки x и $\sigma_0 \in \Sigma$, такие, что

$$U \cap \{x_{\sigma'}\colon \sigma_0 \leqslant \sigma'\} = \varnothing,$$

и было бы $x \notin F_{\sigma_0}$.

Пусть теперь X — любое пространство, в котором каждая направленность имеет предельную точку. Рассмотрим любое центрированное семейство $\mathscr{F}$ замкнутых в X множеств. Обозначим через Σ множество, состоящее из всех конечных подсемейств $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ семейства $\mathscr{F}$, и для $\sigma = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$, $\sigma' = \{F'_1, F'_2, \ldots, F'_l\} \in \Sigma$ положим $\sigma \leqslant \sigma'$, если $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \supset F'_1 \cap F'_2 \cap \ldots \cap F'_l$. Множество Σ направлено отношением $\leqslant$. Выбрав для каждого $\sigma = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\} \in \Sigma$ точку x_σ в пересечении $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k$, получаем направленность $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ в X. Для завершения доказательства достаточно показать, что если x является предельной точкой для S, то x принадлежит всем членам семейства $\mathscr{F}$.

Пусть F_0 — любой член семейства $\mathscr{F}$. Для каждой окрестности U точки x найдется $\sigma = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\} \geqslant \sigma_0 = F_0$, такое, что $x_\sigma \in U$. Так как $x_\sigma \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \subset F_0$, имеем $F_0 \cap U \neq \varnothing$, откуда следует, что $x \in F_0$, так как множество F_0 замкнуто. ∎

Относящийся к фильтрам аналог доказанной выше теоремы звучит так:

3.1.24. Теорема. *Пространство X компактно в том и только том случае, если каждый фильтр в X имеет предельную точку.* ∎

3.1.25. Примеры. Дискретное пространство $D(\mathfrak{m})$ компактно в том и только том случае, если $\mathfrak{m}$ конечно.

Вещественная прямая и прямая Зоргенфрея не компактны: открытое покрытие $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ не содержит конечного подпокрытия.

Покажем теперь, что пространство $A(\mathfrak{m})$, определенное в 1.4.20, компактно для каждого $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — открытое покрытие пространства $A(\mathfrak{m})$. Найдется такое $s_0 \in S$, что единственная точка накопления x_0 множества $A(\mathfrak{m})$ принадлежит U_{s_0}. По определению топологии пространства $A(\mathfrak{m})$ множество $A(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ конечно. Пусть $A(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $x_i \in U_{s_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Ясно, что $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{k}$ — конечное подпокрытие покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$.

Докажем, что каждый замкнутый интервал $J = [a, b] \subset R$ является компактным пространством. Возьмем любое открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства J. Пусть A — множество всех $x \in J$, таких, что отрезок $[a, x]$ содержится в объединении конечного числа членов семейства $\{U_s\}_{s \in S}$. Достаточно показать, что множество $J \setminus A$ пусто.

Предположим, что $J \setminus A \neq \varnothing$, и обозначим через x_0 точную нижнюю грань множества $J \setminus A$. Ясно, что $x_0 \in J \setminus A$. Существует $s_0 \in S$, для которого $x_0 \in U_{s_0}$. Легко видеть, что $a < x_0$; поэтому для некоторого $y \in [a, x_0)$ выполняется включение $(y, x_0] \subset U_{s_0}$. По определению x_0 имеем $y \in A$. Значит, $[a, y] \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}$ для некоторых $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$. Следовательно, $[a, x_0] \subset \bigcup_{i=0}^{k} U_{s_i}$ — мы получили противоречие. ∎

3.1.26. Пример. Рассмотрим на плоскости R^2 две концентричные окружности $C_i = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = i\}$, где $i = 1, 2$, и их объединение $X = C_1 \cup C_2$. Отображение проектирования окружности C_1 на окружность C_2 из точки $(0, 0)$ будет обозначаться через p. На множестве X будет определена топология с помощью системы окрестностей $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in X}$. А именно, положим $\mathscr{B}(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ при $z \in C_1$ и $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$ при $z \in C_2$, где $U_j = V_j \cup p(V_j \setminus \{z\})$ и V_j является дугой длины $1/j$ окружности C_1 с серединой в точке z. Легко проверяется, что семейство $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in X}$ обладает свойствами (BP1)—(BP4). Значит, по предложению 1.5.2, множество X вместе с топологией, порожденной семейством $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in X}$, является хаусдорфовым пространством.

Пространство X называется *двойной окружностью Александрова.*

Подпространство $C_2 \subset X$ является дискретным пространством мощности $\mathfrak{c}$; оно открыто и всюду плотно в X. Подпространство $C_1 \subset X$ является окружностью S^1 единичного радиуса с обычной топологией. Оно компактно, так как S^1 является непрерывным образом компактного пространства I.

Покажем теперь, что пространство X компактно. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — какое-нибудь открытое покрытие пространства X. Не теряя общности, можно предполагать, что множества U_s являются членами определенной выше системы окрестностей. Так как подпространство C_1 компактно, найдется конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$, для которого

$$C_1 \subset U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \ldots \cup U_{s_k}. \tag{2}$$

Если мы отбросим те из стоящих справа в этом соотношении множеств, которые одноточечны, включение будет по-прежнему выполняться. Значит, можно считать, что $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, где $z_i \in C_1$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом,

$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_k)\} \subset U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \ldots \cup U_{s_k}.$$

При $i = 1, 2, \ldots, k$ выберем $s'_i \in S$ так, чтобы было $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Ясно, что семейство $\{U_{s_i}\}_{i=1}^k \cup \{U_{s'_i}\}_{i=1}^k$ является конечным подпокрытием, выбранным из семейства $\{U_s\}_{s \in S}$, и это доказывает, что X компактно.

Легко проверяется, что C_2 не является F_σ-множеством в X; следовательно, пространство X не совершенно нормально. С другой стороны, нетрудно установить, что X — наследственно нормальное пространство. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности — оно даже не сепарабельно.

Легко строится непрерывное отображение пространства X на пространство $A(\mathfrak{c})$: достаточно как-нибудь взаимно однозначно отобразить множество C_2 на множество всех изолированных точек пространства $A(\mathfrak{c})$, а всю окружность C_1 отобразить в точку накопления пространства $A(\mathfrak{c})$. Это показывает, что аналогичное теореме 3.1.22 утверждение, относящееся к характеру, не верно. ∎

3.1.27. Пример. Пусть W — множество всех ординалов, меньших (или равных) первого несчетного ординала ω_1. Множество W вполне упорядочено естественным упорядочением $<$. Рассмотрим топологию на W, порожденную базой $\mathscr{B}$, состоящей из всех интервалов вида $(y, x] = \{z \in W\colon y < z \leqslant x\}$, где $y < x \leqslant \omega_1$, и одноточечного множества $\{0\}$, где 0 — порядковый тип пустого множества. Легко видеть, что W является хаусдорфовым пространством.

Докажем, что пространство W компактно. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — открытое покрытие пространства W и A — множество всех $x \in W$, таких, что отрезок $[0, x]$ содержится в объединении конечного числа членов семейства $\{U_s\}_{s \in S}$. Достаточно показать, что множество $W \setminus A$ пусто.

Предположим, что $W \setminus A \neq \varnothing$, и обозначим через x_0 наименьший элемент множества $W \setminus A$. Существует $s_0 \in S$, такое, что $x_0 \in U_{s_0}$. Как легко видеть, $0 < x_0$. Значит, найдется $y \in [0, x_0)$, для которого $(y, x_0] \in U_{s_0}$. По определению x_0 имеем $y \in A$. Следовательно, $[0, y] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{s_i}$ для некоторых $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$. Заключаем отсюда, что $[0, x_0] \subset \bigcup\limits_{i=0}^{k} U_{s_i}$ — получили противоречие.

Рассмотрим теперь подпространство $W_0 = W \setminus \{\omega_1\}$ пространства W. Пространство W_0 нормально. Более того, каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые подмножества A, B пространства W_0, их замыкания $\bar{A}$ и $\bar{B}$ в пространстве W не пересекаются. Это следует из того, что самое большее одно из множеств A и B может быть конфинально W_0. Действительно, если бы A и B оба были конфинальны W_0, мы могли бы определить по индукции две последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ счетных ординалов, удовлетворяющих условиям

$$a_i < b_i < a_{i+1} \quad \text{и} \quad a_i \in A, \quad b_i \in B \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Так как никакое счетное множество не конфинально W_0, множество C всех элементов множества W_0, больших чем каждое a_i и каждое b_i, было бы не пусто, — а это невозможно, так как наименьший элемент множества C тогда принадлежал бы $A \cap B$, что легко проверяется.

Из сказанного выше можно вывести (см. теорему 3.2.1 или следствие 3.6.4), что каждая непрерывная функция $f\colon W_0 \to I$ продолжается на W. Оказывается, можно утверждать нечто большее: для каждой непрерывной функции $f\colon W_0 \to I$ найдется ординал $x_0 < \omega_1$, такой, что $f(x) = f(x_0)$ при всех $x \geqslant x_0$, — т. е. f, начиная с некоторого члена, является константой.

Достаточно показать, что для каждого целого положительного числа i найдется $x_i \in W_0$, такое, что $|f(x) - f(x_i)| < 1/i$ при всех $x \geqslant x_i$. Действительно, легко проверить, что любое x_0, большее чем все x_i, будет обладать требуемым свойством.

Предположим, что для некоторого i и каждого $x \in W_0$ можно найти $x' \in W_0$, такое, что $|f(x) - f(x')| \geqslant 1/i$ и $x' \geqslant x$. Это позволяет нам определить по индукции две последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ счетных ординалов, удовлетворяющих условиям

$$a_j < b_j < a_{j+1} \quad \text{и} \quad |f(a_j) - f(b_j)| \geqslant 1/i \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Оказывается, однако, что существование таких последовательностей входит в противоречие с непрерывностью f. В самом деле, пусть c — наименьший ординал, больший, чем все a_i и все b_i. Имеем $c \in W_0$, и, как легко проверяется, каждая окрестность элемента c содержит почти все члены обеих последовательностей. Так как множество $f^{-1}((f(c) - 1/2i, f(c) + 1/2i))$ содержит самое большее одну из точек a_j, b_j при каждом $j = 1, 2, \ldots$, это множество не является окрестностью точки c.

Множество F всех счетных предельных ординалов замкнуто в W_0. Так как не существует непрерывной функции $f\colon W_0 \to I$, такой, что $F = f^{-1}(0)$, из теоремы Веденисова следует, что пространство W_0 не совершенно нормально. Значит, и пространство W не совершенно нормально. С другой стороны, можно показать (см. задачи 3.12.3(c) и 2.7.5(c)), что W является наследственно нормальным пространством. Пространство W_0 удовлетворяет первой аксиоме счетности; пространство W не имеет счетной базы в точке ω_1 — в действительности W даже не является секвенциальным пространством.

Как читатель несомненно заметил, топологии, рассмотренные на W и на W_0, так же как и естественные топологии на R и I, тесно связаны с естественными линейными упорядочениями, определенными на этих множествах. Подобным образом можно определить некоторую топологию на каждом линейно упорядоченном множестве. Топологические пространства, так полученные, образуют интересный класс линейно упорядоченных пространств (см. задачи 1.7.4, 2.7.5, 3.12.3, 3.12.4, 3.12.12(f), 5.5.22, 6.3.2 и 8.5.13(j)). ∎

3.1.28. Пример. Мы покажем сейчас, что канторово множество $D^{\aleph_0}$ гомеоморфно некоторому подпространству вещественной прямой. Рассмотрим множество C всех вещественных чисел сегмента I, в троичном разложении которых не встречается 1, т. е. множество всех чисел вида

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}, \quad \text{где} \quad x_i \in \{0, 1\} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Любой элемент x множества C представи́м в виде (3) единственным образом. Значит, полагая $f(x) = \{x_i\}$, мы получаем взаимно однозначное отображение f множества C на пространство $D^{\aleph_0}$. Из 2.3.6 следует, что f непрерывно относительно топологии подпространства пространства R на C. По теореме 3.1.13, чтобы установить, что f является гомеоморфизмом, достаточно показать, что пространство C компактно. Последнее следует, однако, из равенства $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — подмножество отрезка I, состоящее из всех чисел, в троичном разложении которых в j-м разряде (при всех $j \leqslant i$) стоит не единица. Действительно, все множества F_i замкнуты. Легко видеть, что множество F_1 получается из I удалением «среднего» интервала $(1/3, 2/3)$, множество F_2 получается из F_1 удалением «средних» интервалов $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ из двух сегментов, составляющих F_1, и т. д.

Из сказанного выше следует, что канторово множество $D^{\aleph_0}$ компактно. В следующем параграфе мы покажем, что канторов куб $D^{\mathfrak{m}}$ компакген при каждом $m \geqslant \aleph_0$ (см. теорему 3.2.4). ∎

В заключение параграфа приведем важную теорему, из которой следует, в частности, что мощность каждого компакта[1]) с первой аксиомой счетности не превосходит $\mathfrak{c}$ (см. задачи 3.12.11(d) и 3.12.10(a)).

3.1.29. Теорема. *Для каждого бесконечного компакта X имеем $|X| \leqslant \exp \chi(X)$.*

Доказательство. Пусть X — бесконечный компакт и $\chi(X) = \mathfrak{m}$. Ясно, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Для каждого $x \in X$ возьмем базу $\mathscr{B}(x)$ пространства X в точке x, такую, что $|\mathscr{B}(x)| \leqslant \mathfrak{m}$.

Пусть τ — наименьший начальный ординал мощности, большей чем $\mathfrak{m}$; этот ординал τ регулярен. По трансфинитной индукции будет определена трансфинитная последовательность $F_0, F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots, \alpha < \tau$, замкнутых подмножеств пространства X, такая, что для каждого $\alpha < \tau$

$$(4) \qquad |F_\alpha| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}, \quad F_\beta \subset F_\alpha \quad \text{при} \quad \beta < \alpha$$

и

(5) для каждого конечного подсемейства $\mathscr{U}$ семейства

$$\bigcup \Big\{ \mathscr{B}(x) \colon x \in \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta \Big\}, \quad \text{если}$$

$$X \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \varnothing, \quad \text{то} \quad F_\alpha \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \varnothing.$$

Предположим, что $\alpha_0 = 0$ или что $\alpha_0 > 0$ и множества F_α, удовлетворяющие условиям (4) и (5), определены для всех

[1]) Компактами мы именуем компактные хаусдорфовы пространства. — *Прим. перев.*

$\alpha < \alpha_0$. Положим

$$\mathscr{B} = \bigcup \left\{ \mathscr{B}(x) \colon \ x \in \bigcup_{\alpha < \alpha_0} F_\alpha \right\},$$

$$\boldsymbol{B} = \{\mathscr{U} \subset \mathscr{B} \colon \ |\mathscr{U}| \text{ конечно и } X \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \varnothing\}.$$

Ясно, что $|\mathscr{B}| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ и $|\boldsymbol{B}| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Обозначим через B множество, которое получается, если для каждого $\mathscr{U} \in \boldsymbol{B}$ выбрать точку из дополнения к $\bigcup \mathscr{U}$. Очевидно, $|B| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$. В силу второго неравенства теоремы 1.5.3, мощность множества $F_{\alpha_0} = B \cup \bigcup_{\alpha < \alpha_0} F_\alpha$ не превосходит $2^{\mathfrak{m}}$, так что условия (4) и (5) при $\alpha = \alpha_0$ выполняются.

Для завершения доказательства достаточно показать, что объединение $F = \bigcup_{\alpha < \tau} F_\alpha$ совпадает с X. Так как ординал τ регулярен, из второй части условия (4) следует, что для каждого множества $A \subset F$ мощности, не большей чем $\mathfrak{m}$, найдется $\alpha < \tau$, такое, что $A \subset F_\alpha$. Значит, $\bar{A} \subset F_\alpha \subset F$, а отсюда и из $\chi(X) = \mathfrak{m}$ следует, что множество F замкнуто в X. В частности, пространство F компактно.

Предположим теперь, что существует точка $y \in X \setminus F$, и для каждого $x \in F$ выберем $U_x \in \mathscr{B}(x)$, для которого $y \notin U_x$. Найдется конечное подсемейство $\mathscr{U}$ семейства $\{U_x\}_{x \in F}$, такое, что $F \subset \bigcup \mathscr{U}$, и найдется ординал $\alpha < \tau$, для которого $\mathscr{U} \subset \bigcup \left\{ \mathscr{B}(x) \colon \ x \in \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta \right\}$. Значит, $X \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \varnothing$, а $F_\alpha \setminus \bigcup \mathscr{U} = \varnothing$, что противоречит (5). ∎

3.1.30. Следствие. *Если компакт удовлетворяет первой аксиоме счетности, то его мощность не превосходит* $\mathfrak{c}$. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Зарождение понятия компактности связано с теоремой Бореля (доказанной в 1894 г.), утверждающей, что каждое счетное открытое покрытие замкнутого интервала содержит бесконечное подпокрытие этого интервала, и с наблюдением Лебега, что это остается верным и для любого открытого покрытия замкнутого интервала (в [1903] Борель распространил этот результат (в формулировке Лебега) на все замкнутые ограниченные подмножества конечномерных евклидовых пространств). Когда общая топология была еще в пеленках, за основу при определении новых классов пространств часто принимали различные свойства отрезка I или вещественной прямой R: брали класс всех пространств, обладающих таким свойством. По этой схеме были определены классы сепарабельных, компактных, полных и связных пространств. Сначала этим методом выделяли классы метрических пространств, затем определения были распространены на топологические пространства. Иногда свойства, равносильные в классе метрических пространств, после распространения на топологические пространства приводили к разным классам пространств (см., например, теорему 4.1.15), и не сразу было ясно, какой из этих классов являлся правильным обобщением. Так произошло с компактностью: некоторое время были сомнения, является ли правильным расширением класса компактных метрических пространств класс компактных пространств, класс счетно компактных пространств или класс секвенциально компактных пространств (см. § 3.10). Сейчас совершенно ясно, что таким классом является класс компактных хаусдорфовых пространств (компактов). Этот класс хорошо себя ведет по отношению к операциям над топологическими пространствами, наиболее часто встречается в приложениях и приводит к самым интересным задачам.

Понятие (регулярного) компактного пространства было введено Вьеторисом в [1921]. Данное им определение сходно с условием, которое фигурирует в теореме 3.1.23. В той работе Вьеторис доказал теоремы 3.1.1, 3.1.8 и 3.1.9. Понятие компактного хаусдорфова пространства (аналогично определенное) появилось ранее в работе Янишевского [1912]; в этой работе, однако, нет результатов об этом классе пространств. (Рисс утверждает в [1908], что каждое центрированное семейство ограниченных замкнутых подмножеств евклидова пространства имеет непустое пересечение.) Эквивалентность некоторых топологических свойств условию Бореля — Лебега, определяющему компактные пространства, была доказана Куратовским и Серпинским в [1921] и Саксом в [1921], но они не рассматривали класс компактных пространств. Данное здесь определение компактности было сформулировано П. С. Александровым и П. С. Урысоном в [1923]. Они определили класс компактных хаусдорфовых пространств совершенно независимо от Вьеториса и осуществили глубокий анализ понятия компактности в важной работе [1929] (основные определения и результаты были объявлены в [1923] и [1924]). В частности, их работа содержит теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.8 и 3.1.9. Теоремы 3.1.10, 3.1.12 и 3.1.13 были доказаны П. С. Александровым в [1927] (объявлены в [1925]).

Теоремы 3.1.6 и 3.1.7 свидетельствуют о достаточно общей, но несколько туманной закономерности, обычно выражаемой фразой: «компактные множества ведут себя как точки» (см. теоремы 3.2.10 и 3.3.2). Куратовский доказал в [1931], что в классе метрических пространств проекции параллельно компактному пространству являются замкнутыми отображениями. Это утверждение было распространено на топологические пространства Бурбаки [1940], а Мрувка заметил в [1959], что данное свойство характеризует компактные пространства.

Сети были введены Архангельским в [1959], где теорема 3.1.9 была установлена; наше доказательство этой теоремы основано на работе Голштынского [1966a]. Теорема 3.1.21 легко следует из ранних результатов П. С. Александрова (см. упр. 3.1.F(a)). Теорема 3.1.22 была доказана П. С. Александровым в [1939]. Двойная окружность Александрова была определена в работе Александрова и Урысона [1929]. Теорема 3.1.29 была доказана Архангельским в [1969a]; она решает известную проблему общей топологии, которой занимались около 50 лет. Наше доказательство взято из работы Р. Поля [1974] (оно тесно связано с доказательством, данным Пономаревым в [1971]); аналогичное доказательство содержится в работе Шапировского [1974]; оглядываясь сейчас назад, мы видим, что идея доказательств Поля и Шапировского содержалась в оригинальном рассуждении Архангельского.

Кроме многих важных теорем глава 3 содержит ряд примеров, имеющих основополагающее значение для общей топологии. Не все они рассматриваются в основном тексте книги. Примеры, намеченные в упр. 3.1.I, 3.2.E, 3.6.I(a) и 3.10.C, а также примеры в задачах 3.12.18 и 3.12.19 заслуживают особого внимания читателя.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1.A. Покажите на примерах, что теоремы 3.1.8, 3.1.9, 3.1.12, 3.1.13, 3.1.19, 3.1.21 и 3.1.22 перестают быть верными, если в них вместо компактных хаусдорфовых пространств говорить о компактных T_1-пространствах.

3.1.B. Докажите, что каждое компактное подпространство прямой Зоргенфрея счетно.

Указание. Примените теорему 3.1.13.

3.1.C. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство Y называется *неприводимым*, если $f(A) \neq Y$ для каждого собственного замкнутого подмножества A пространства X.

(a) Покажите, что для каждого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство Y с компактными прообразами точек существует замкнутое подпространство $X_0 \subset X$, такое, что $f(X_0) = Y$ и отображение $f|X_0\colon X_0 \to Y$ неприводимо (см. задачу 5.5.12).

Указание. Примените лемму Куратовского — Цорна.

(b) Проверьте, что каждое неприводимое открытое отображение хаусдорфова пространства является гомеоморфизмом, и заметьте, что это не верно для отображений T_1-пространств.

(c) Заметьте, что если множество всех одноточечных прообразов при непрерывном отображении $f\colon X\to Y$ пространства X на пространство Y всюду плотно в X, то f неприводимо. Приведите пример неприводимого отображения $f\colon X\to Y$ компакта X на компакт Y, при котором нет одноточечных прообразов точек.

3.1.D. Покажите с помощью теоремы Куратовского, что отображение f пространства X на компакт Y непрерывно в том и только том случае, если график отображения f является замкнутым в $X\times Y$ множеством (см. упр. 2.3.C(b)).

3.1.E (Архангельский [1965], Чобан [1967]). (a) Докажите, что если подмножества A_1 и A_2 пространства X таковы, что $A_1\subset A_2$ и для каждого замкнутого в A_2 множества $F\subset A_2\setminus A_1$ существуют непересекающиеся открытые множества в X, содержащие соответственно A_1 и F, то $\chi(A_1, X)\leqslant\chi(A_1, A_2)\chi(A_2, X)$ (см. теорему 3.1.6 и упр. 3.8.B).

Выведите отсюда, что для компактных подмножеств F_1 и F_2 хаусдорфова пространства X, таких, что $F_1\subset F_2$, всегда $\chi(F_1, X)\leqslant\chi(F_1, F_2)\chi(F_2, X)$.

Указание. Пусть $\mathfrak{m}=\chi(A_1, A_2)\chi(A_2, X)$ и $\{W_s\}_{s\in S}$, $\{W_t\}_{t\in T}$ — базы множества A_2 в X и множества A_1 в A_2 соответственно, причем $|S|\leqslant\mathfrak{m}$ и $|T|\leqslant\mathfrak{m}$. Для каждого $t\in T$ возьмите непересекающиеся открытые множества G_t, $H_t\subset X$, такие, что $A_1\subset G_t$ и $A_2\setminus V_t\subset H_t$, и проверьте, что множества $U_{t,s}=G_t\cap W_s$ составляют базу множества A_1 в X.

(b) Хаусдорфово пространство X называется пространством *точечно счетного типа*, если для каждой точки $x\in X$ найдется компактное множество $F(x)\subset X$, такое, что $x\in F(x)$ и $\chi(F(x), X)\leqslant\aleph_0$.

Заметьте, что компакты и хаусдорфовы пространства с первой аксиомой счетности являются пространствами точечно счетного типа. Докажите, что замкнутые подпространства и G_δ-подпространства пространства точечно счетного типа являются пространствами точечно счетного типа. Приведите пример нормального пространства, не являющегося пространством точечно счетного типа; обратите внимание на то, что свойство быть пространством точечно счетного типа не является наследственным (можно применить теорему 3.2.4).

3.1.F. (a) (П. С. Александров [1924a]). *Псевдохарактер T_1-пространства X в точке x* определяется как наименьший кардинал вида $|\mathcal{U}|$, где $\mathcal{U}$— семейство открытых в X множеств, такое, что $\bigcap\mathcal{U}=\{x\}$; этот кардинал обозначается через $\psi(x, X)$. *Псевдохарактер T_1-пространства X* определяется как супремум всех кардиналов $\psi(x, X)$, где $x\in X$; обозначается этот кардинал через $\psi(X)$.

Заметьте, что $\psi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$ и $\psi(X) \leqslant \chi(X)$ для каждого T_1-пространства X и любого $x \in X$. Докажите, что если X — компакт, то $\psi(x, X) = \chi(x, X)$ для всех $x \in X$ и $\psi(X) = \chi(X)$.

Убедитесь, что отсюда следует теорема 3.1.21. Покажите, что $\psi(X) \leqslant \exp d(X)$ для каждого хаусдорфова пространства X (см. теорему 1.5.6).

(b) Для любого хаусдорфова пространства X обозначим через $h(X)$ наименьший кардинал $\mathfrak{m}$, такой, что, какова бы ни была точка $x \in X$, найдется компакт $F(x) \subset X$ со свойствами: $x \in F(x)$ и $\chi(F(x), X) \leqslant \mathfrak{m}$. Таким образом, хаусдорфово пространство X является пространством точечно счетного типа (см. упр. 3.1.E(b)) в том и только том случае, если $h(X) \leqslant \aleph_0$.

Докажите, что $\chi(X) = \psi(X) h(X)$ для каждого хаусдорфова пространства X.

(c) Заметьте, что если хаусдорфово пространство X допускает открытое отображение на хаусдорфово пространство Y, то $h(Y) \leqslant h(X)$, и что для замкнутых отображений это не обязательно так (см. упр. 3.7.F(b)).

(d) Покажите, что $|X| \leqslant \exp[d(X)\psi(X)]$, если пространство X регулярно. Проверьте, что здесь не достаточно требовать хаусдорфовости вместо регулярности.

Указание. Имея в виду, что $d(I^{\mathfrak{c}}) = \aleph_0$, определите хаусдорфово пространство X мощности $2^{\mathfrak{c}}$, со счетным всюду плотным множеством A изолированных в X точек, такое, что подпространство $X \setminus A$ дискретно.

3.1.G. Пусть X — компакт, $X_i = X \times \{i\}$, где $i = 1, 2$, и $A(X) = X_1 \cup X_2$. В обобщение примера 3.1.26 определите на $A(X)$ топологию компактного хаусдорфова пространства таким образом, чтобы X_1 было гомеоморфно X, а X_2 было дискретным подпространством. Проверьте, что для каждого множества $M \subset X$ подпространство $X_1 \cup M_2$ пространства $A(X)$, где $M_2 = M \times \{2\} \subset X_2$, компактно и что при дополнительном предположении, что M всюду плотно в X, а X плотно в себе, множество M_2 всюду плотно в $X_1 \cup M_2$.

3.1.H. (a) (Энгелькинг [1968]). Докажите, что дискретное пространство $D(\mathfrak{c})$ вложимо в качестве замкнутого подпространства в $[D(\aleph_0)]^{\mathfrak{c}}$. Выведите отсюда, что декартово произведение $[D(\aleph_0)]^{\mathfrak{c}}$ не нормально (см. задачу 2.7.16(a)).

Указание. Пусть X_1 — отрезок I с естественной топологией, и пусть X_2 — тот же отрезок с дискретной топологией. Для каждого $t \in I$ определим отображение f_t множества I в дискретное пространство $D(\aleph_0) = N \oplus \{0\}$, положив $f_t(t) = 0$ и $f_t(x) = i$ при $\frac{1}{i+1} < |x - t| \leqslant \frac{1}{i}$. Проверьте, что $f = \underset{t \in I}{\triangle} f_t$ является гомеоморфным вложением пространства X_2 в пространство

$Y=[D(\aleph_0)]^{\mathfrak{c}}$, и заметьте, что если $y=\{y_t\}\notin f(I)$ и $y_t=0$ для некоторого $t\in I$, то у точки y в пространстве Y есть окрестность, не пересекающаяся с $f(I)$. Покажите, что если $y=\{y_t\}\in\overline{f(I)}$, то $y_t=0$ для некоторого $t\in I$; для этого рассмотрите семейство $\{\overline{f^{-1}(U)}\}_{U\in\mathscr{B}}$ замкнутых подмножеств пространства X_1, где $\mathscr{B}$ — некоторая база в точке $y\in Y$.

(b) (Юхас [1969]). Пользуясь тем, что существует компакт X, для которого $|X|=2^{\mathfrak{m}}$ и $\chi(x, X)=\mathfrak{m}$ при всех $x\in X$ (см. теоремы 2.3.24 и 3.2.4), покажите, что, каково бы ни было $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, дискретное пространство $D(2^{\mathfrak{m}})$ можно вложить в качестве замкнутого подпространства в $[D(\mathfrak{m})]^{2^{\mathfrak{m}}}$.

Указание. Для каждого $t\in X$ возьмем базу $\{U_s(t)\}_{s\in S}$ в точке t, где S — некоторое вполне упорядоченное множество мощности $\mathfrak{m}$, такое, что $0\notin S$, и определим отображение f_t множества X в дискретное пространство $D(\mathfrak{m})=S\oplus\{0\}$, положив $f_t(t)=0$ и (при $x\neq t$) $f_t(x)=s$, где s — наименьший элемент в S, такой, что $x\notin U_s(t)$. Следуйте теперь указанию из (a).

3.1.I (Александров и Немыцкий [1938], Маколей [1956]). Зададим топологию на плоскости, оставив неизменными окрестности всех точек (x, y), для которых $y\neq 0$, и приняв за базу в точке $(x, 0)$ семейство $\{\{(x, 0)\}\cup U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $U_i(x)$ — множество всех точек, лежащих внутри круга радиуса $1/i$ с центром в $(x, 0)$, но вне двух кругов радиуса i, касающихся оси x в точке $(x, 0)$.

Покажите, что полученное таким образом пространство X совершенно нормально и что на множествах $X_1=\{(x, 0)\colon x\in R\}$ и $X_2=X\setminus X_1$ топология, порожденная топологией пространства X, совпадает с топологией, порожденной обычной топологией плоскости R^2. Проверьте, что $d(X)=\chi(X)=nw(X)=\aleph_0$ и что $w(X)=\mathfrak{c}$.

3.1.J. (a) Заметьте, что если M — подпространство пространства X, то $nw(M)\leqslant nw(X)$.

(b) Докажите, что сетевой вес бесконечного декартова произведения $X=\prod_{s\in S}X_s$, где $nw(X_s)>1$, равняется наибольшему из кардиналов $|S|$ и $\sup_{s\in S}\{nw(X_s)\}$.

3.1.K. (a) Применив теорему о диагональном отображении и пример 3.1.28, докажите, что для каждого счетного ординала α подпространство $Y_\alpha=\{\gamma\colon\gamma\leqslant\alpha\}$ пространства W, определенного в 3.1.27, вложимо в вещественную прямую.

Заметьте, что подпространство W_0 пространства W не вложимо в вещественную прямую.

(b) (Хигман и Стоун [1954], Исбелл [1964]). Пусть Y_α, $\alpha\in W_0$, — пространства, определенные в (a); рассмотрим обратный спектр $S=\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, W_0\}$, где X_α — дискретное пространство, состоящее из всех гомеоморфных вложений пространства Y_α в вещественную прямую, и $\pi^\alpha_\beta(f)=f|Y_\beta$ при $f\in X_\alpha$ и $\alpha, \beta\in W_0$, где $\beta\leqslant\alpha$. Все отображения π^α_β являются отображениями «на», и тем не менее $\varprojlim S=\varnothing$ (см. упр. 2.5.A(b) и теорему 3.2.13).

3.2. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПАКТАМИ

Обсудим сначала задачи, связанные с переходом к подпространству. Отметим прежде всего, что компактность в классе хаусдорфовых пространств наследуется при переходе к замкнутым и только таким подпространствам (см. теоремы 3.1.2 и 3.1.8).

Следующая теорема дает критерий того, что отображение в компакт можно продолжить.

3.2.1. Теорема. *Пусть A — всюду плотное подпространство топологического пространства X и f — непрерывное отображение пространства A в компакт Y. Отображение f можно непрерывно продолжить на X в том и только том случае, если для каждой пары B_1, B_2 непересекающихся замкнутых в Y множеств замыкания их прообразов $f^{-1}(B_1)$ и $f^{-1}(B_2)$ в пространстве X не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $F\colon X\to Y$ — продолжение отображения f. Если $B_i=\overline{B}_i\subset Y$ при $i=1, 2$ и $B_1\cap B_2=\varnothing$, то

$$F^{-1}(B_i)=\overline{F^{-1}(B_i)} \text{ при } i=1, 2 \text{ и } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2)=\varnothing,$$

так что

$$\overline{f^{-1}(B_1)}\cap\overline{f^{-1}(B_2)}\subset F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2)=\varnothing.$$

Значит, условие теоремы необходимо для того, чтобы f можно было продолжить.

Покажем теперь, что это условие также и достаточно. Для каждого $x\in X$ обозначим через $\mathscr{B}(x)$ семейство всех окрестностей точки x в пространстве X и рассмотрим семейство $\mathscr{F}(x)=\{\overline{f(A\cap U)}\}_{U\in\mathscr{B}(x)}$ замкнутых множеств в Y.

Так как при $U_1, \ldots, U_k\in\mathscr{B}(x)$

$$(1)\qquad \overline{f(A\cap U_1\cap U_2\cap\ldots\cap U_k)}\subset\overline{f(A\cap U_1)}\cap\ldots\cap\overline{f(A\cap U_k)},$$

семейство $\mathscr{F}(x)$ центрировано. По теореме 3.1.1, пересечение $F(x)=\bigcap\mathscr{F}(x)$ не пусто для каждой точки $x\in X$.

Докажем, что множество $F(x)$ состоит ровно из одной точки; отсюда будет следовать, в частности, что $F(x)=\{f(x)\}$ для всех $x\in A$. Пусть $y_1, y_2\in F(x)$ и $y_1\neq y_2$. Найдутся окрестности V_1 и V_2 точек y_1 и y_2 соответственно, такие, что $\overline{V}_1\cap\overline{V}_2=\varnothing$. По условию теоремы тогда $\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing$, так что

$$X = W_1 \cup W_2, \quad \text{где} \quad W_i = X \setminus \overline{f^{-1}(V_i)} \quad \text{при} \quad i = 1, 2.$$

Тогда $x \in W_{i_0}$ для $i_0 = 1$ или для $i_0 = 2$. Так как $V_{i_0} \cap$ $\cap f\left(A \setminus \overline{f^{-1}(V_{i_0})}\right) = \varnothing$ и множество V_{i_0} открыто, имеем

$$V_{i_0} \cap \overline{f\left(A \setminus \overline{f^{-1}(V_{i_0})}\right)} = \varnothing,$$

откуда следует, что

$$y_{i_0} \notin \overline{f\left(A \setminus \overline{f^{-1}(V_{i_0})}\right)} = \overline{f(A \cap W_{i_0})} \in \mathscr{F}(x),$$

и мы получили противоречие.

Поставив в соответствие точке $x \in X$ точку $F(x)$, мы определим отображение F пространства X в пространство Y, являющееся продолжением отображения f. Остается показать, что F непрерывно. Покажем, что F удовлетворяет условию (iii) предложения 1.4.1.

Пусть V — окрестность точки $F(x)$ в пространстве Y. Так как $\{F(x)\} = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subset V$, из 3.1.5 следует, что существует конечное семейство $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} \subset \mathscr{B}(x)$, такое, что

$$(2) \qquad \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \ldots \cap \overline{f(A \cap U_k)} \subset V.$$

Ясно, что $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k = U \in \mathscr{B}(x)$, и, в силу (1) и (2), имеем $F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subset V$ для каждого $x' \in U$, т. е. $F(U) \subset$ $\subset V$. ∎

Следующая теорема является следствием теоремы 3.2.1.

3.2.2. Теорема. *Каждый компакт веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ является непрерывным образом замкнутого подпространства канторова куба $D^{\mathfrak{m}}$.*

Доказательство. Пусть Y — компакт веса $\mathfrak{m}$. Из теоремы 2.3.26 следует, что Y гомеоморфно подпространству александровского куба $F^{\mathfrak{m}}$. Для простоты предположим, что $Y \subset F^{\mathfrak{m}}$. Пространства $F^{\mathfrak{m}}$ и $D^{\mathfrak{m}}$ состоят из одного и того же множества точек, и каждый элемент канонической базы $\mathscr{B}$ пространства $F^{\mathfrak{m}}$ является открыто-замкнутым множеством в $D^{\mathfrak{m}}$, так что тождественное отображение h пространства $D^{\mathfrak{m}}$ на пространство $F^{\mathfrak{m}}$ непрерывно.

Покажем, что предположения теоремы 3.2.1 будут выполнены, если положить $A = h^{-1}(Y)$, $X = \overline{A} \subset D^{\mathfrak{m}}$ и $f = h|A\colon A \to Y$.

Пусть B_1, B_2 — любая пара непересекающихся замкнутых множеств в Y. Существуют замкнутые множества K_1 и K_2 в $F^{\mathfrak{m}}$, такие, что $B_i = Y \cap K_i$ при $i = 1, 2$. Так как $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, имеем

$Y \subset F^{\mathfrak{m}} \setminus (K_1 \cap K_2)$. Так как последнее множество открыто, для каждого $x \in Y$ найдется $U_x \in \mathscr{B}$, такое, что $x \in U_x \subset F^{\mathfrak{m}} \setminus (K_1 \cap \cap K_2)$.

По теореме 3.1.3, найдется конечное множество $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \subset Y$, такое, что

$$Y \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k} \subset F^{\mathfrak{m}} \setminus (K_1 \cap K_2).$$

Объединение $U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k}$ является открыто-замкнутым множеством в $D^{\mathfrak{m}}$, содержащим A. Значит,

$$X = \overline{A} \subset U \subset D^{\mathfrak{m}} \setminus (K_1 \cap K_2).$$

Так как $\overline{f^{-1}(B_i)} = \overline{A \cap K_i} \subset \overline{A} \cap K_i$ при $i = 1, 2$, имеем

$$\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} \subset \overline{A} \cap K_1 \cap K_2 \subset [D^{\mathfrak{m}} \setminus (K_1 \cap K_2)] \cap K_1 \cap K_2 = \varnothing$$

и, по теореме 3.2.1, существует продолжение $F\colon X \to Y$ отображения f. Так как $f(A) = Y$, пространство Y является непрерывным образом замкнутого подпространства X пространства $D^{\mathfrak{m}}$. ∎

Единственная наша теорема, относящаяся к операции суммы, такова:

3.2.3. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, является компактом (компактным пространством) в том и только том случае, если все пространства X_s являются компактами (соответственно компактны) и множество S конечно.*

Доказательство. Если сумма $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ является компактным пространством, то все пространства X_s компактны как замкнутые подпространства пространства X, и множество S конечно, так как иначе открытое покрытие $\{X_s\}_{s \in S}$ не содержало бы конечного подпокрытия.

Обратно, если $\{X_i\}_{i=1}^{k}$ — конечное семейство компактов (компактных пространств), то сумма $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$ является компактом (компактным пространством) в силу теоремы 2.2.7 и следствия 3.1.4. ∎

Рассмотрим теперь операцию (декартова) произведения. Следующая теорема является основной в этом отношении и одной из главных теорем общей топологии.

3.2.4. Теорема Тихонова. *Произведение $\prod_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, является компактом (компактным пространством) в том и только том случае, если компактами (соответственно компактными пространствами) являются все пространства X_s.*

Доказательство. Пусть произведение $X = \prod_{s \in S} X_s$ является непустым компактом. Тогда все X_s — хаусдорфовы пространства (по теореме 2.3.11) и все X_s являются компактными пространствами в силу теоремы 3.1.10, так как проекция $p_s\colon X \to X_s$ является непрерывным отображением пространства X на пространство X_s.

Рассмотрим теперь произвольное семейство $\{X_s\}_{s \in S}$ компактов. По теореме 2.3.11, произведение $X = \prod_{s \in S} X_s$ является хаусдорфовым пространством. Возьмем любое центрированное семейство $\mathscr{F}_0$ замкнутых множеств в X. Так как центрированность является свойством конечного типа, из леммы Тейхмюллера — Тьюки (см. введение) вытекает, что семейство $\mathscr{F}_0$ содержится в некотором максимальном центрированном семействе $\mathscr{F}$ множеств в X.

Чтобы доказать, что $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достаточно найти точку $x \in X$, для которой

$$x \in \bar{A} \quad \text{при всех} \quad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

Из максимальности $\mathscr{F}$ получаем

$$\text{если } A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathscr{F}, \quad \text{то } A_1 \cap \ldots \cap A_k \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

и

$$\text{если } A_0 \subset X \quad \text{и} \quad A_0 \cap A \neq \varnothing \quad \text{для каждого} \quad A \in \mathscr{F}, \quad \text{то} \quad A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Так как $\mathscr{F}$ центрировано, семейство $\mathscr{F}_s = \{\overline{p_s(A)}\}_{A \in \mathscr{F}}$ также обладает этим свойством при всех $s \in S$. Значит, для каждого $s \in S$ существует точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s.$$

Пусть W_s — любая окрестность точки x_s в X_s. Из выписанной выше формулы следует, что $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всех $A \in \mathscr{F}$, т. е.

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \quad \text{для каждого} \quad A \in \mathscr{F}.$$

На основании (5) заключаем, что $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а из (4) следует, что все члены канонической базы пространства X, которые содержат точку $x = \{x_s\}$, принадлежат семейству $\mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}$ центрировано, каждое $A \in \mathscr{F}$ пересекает все члены канонической базы пространства X, содержащие точку x, а это дает нам (3). ∎

Заметим, что компактность конечного произведения компактов можно доказать непосредственно и проще; она вытекает также из теоремы Куратовского, так как для каждого пространства Y проекция $p\colon X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times Y \to Y$ является замкнутым отображением как композиция замкнутых отображений

$$p_1\colon X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times Y \to X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k \times Y,$$
$$p_2\colon X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k \times Y \to X_3 \times X_4 \times \ldots \times X_k \times Y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_k\colon X_k \times Y \to Y.$$

Теорема Тихонова вместе с теоремой 2.3.23 дает следующие две теоремы.

3.2.5. Теорема. *Тихоновский куб $I^{\mathfrak{m}}$ является универсальным (по вложению) пространством для всех компактов веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.* ∎

3.2.6. Теорема. *Пространство X является тихоновским в том и только том случае, если его можно вложить в некоторый компакт.* ∎

3.2.7. Пример. Из теоремы Тихонова и теоремы 3.1.9 следует, что рассмотренное в примере 2.3.36 произведение $X \times Y$ является нормальным пространством. Однако с помощью теоремы Тихонова легко получить другой пример не нормального подпространства нормального пространства: по теореме 2.3.23, тихоновский куб $I^{\mathfrak{c}}$ содержит подпространство, гомеоморфное плоскости Немыцкого. ∎

Подмножество A n-мерного евклидова пространства R^n называется *ограниченным*, если существует такой отрезок $J = [a, b] \subset R$, что $A \subset J^n \subset R^n$. Вещественная функция f, определенная на топологическом пространстве X, называется *ограниченной*, если образ $f(X)$ является ограниченным множеством в R.

Теорема Тихонова позволяет охарактеризовать компактные подмножества евклидова пространства.

3.2.8. Теорема. *Подпространство A n-мерного евклидова пространства R^n является компактом в том и только том случае, если множество A замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Пусть A — компактное подпространство пространства R^n. Из теоремы 3.1.8 следует, что множество A замкнуто. Так как $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^n$, где $K_i = (-i, i)$, и $K_i^n \subset K_j^n$ при $i \leqslant j$, найдется такое i_0, что $A \subset K_{i_0}^n$, а это означает, что A ограничено.

Обратно, так как для каждого $J = [a, b]$ пространство J^n является, по теореме Тихонова, компактом, каждое замкнутое ограниченное подпространство пространства R^n есть компакт в силу теоремы 3.1.2. ∎

3.2.9. Следствие. *Каждая непрерывная вещественная функция на компактном пространстве ограничена и достигает своих наибольшего и наименьшего значений.* ∎

Докажем еще одну теорему, относящуюся к произведениям.

3.2.10. Теорема Уоллеса. *Пусть A_s — компактное подпространство топологического пространства X_s при $s \in S$ и W — открытое множество в произведении $\prod_{s \in S} X_s$, содержащее множество $\prod_{s \in S} A_s$. Найдутся открытые множества $U_s \subset X_s$, такие, что $U_s \neq X_s$ лишь для конечного числа $s \in S$ и $\prod_{s \in S} A_s \subset \prod_{s \in S} U_s \subset W$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай произведения двух пространств, т. е. предположим, что $S = \{1, 2\}$. Из леммы 3.1.15 следует, что для каждого $y \in A_2$ найдутся открытые множества $U_1(y) \subset X_1$ и $U_2(y) \subset X_2$, такие, что $A_1 \times \{y\} \subset U_1(y) \times U_2(y) \subset W$. Так как пространство A_2 компактно, существует конечное множество $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subset A_2$, для которого $A_2 \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_2(y_i)$. Легко проверяется, что множества $U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} U_1(y_i)$ и $U_2 = \bigcup_{i=1}^{k} U_2(y_i)$ обладают всеми нужными свойствами.

Предположим теперь, что теорема выполняется для произведения $k-1$ пространств для некоторого $k \geqslant 3$, и рассмотрим открытое подмножество W произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$, содержащее множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$. Так как произведение $A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_k$ компактно, то, в силу частного случая теоремы, доказанного выше, существуют открытые множества $U_1 \subset X_1$ и $U'_2 \subset X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k$, такие, что

$$A_1 \times (A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_k) \subset U_1 \times U'_2 \subset W \subset$$
$$\subset X_1 \times (X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k).$$

По индуктивному предположению, найдутся открытые множества $U_2 \subset X_2$, $U_3 \subset X_3$, ..., $U_k \subset X_k$, для которых

$$A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_k \subset U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_k \subset U'_2.$$

Легко видеть, что множества $U_1, U_2, \ldots, U_k$ обладают всеми нужными свойствами; таким образом, теорема установлена для конечных произведений.

Рассмотрим, наконец, произвольное произведение и множество $A = \prod_{s \in S} A_s \subset W \subset \prod_{s \in S} X_s$. Для каждого $a \in A$ возьмем какой-нибудь элемент канонической базы произведения $\prod_{s\in S} X_s$, содержащий a и содержащийся в W. По теореме Тихонова, A содержится в объединении конечного семейства таких множеств:

$$A \subset \prod_{s\in S} W_s^1 \cup \prod_{s\in S} W_s^2 \cup \ldots \cup \prod_{s\in S} W_s^k \subset W.$$

Найдется конечное множество $S_0=\{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$, такое, что $W_s^i=X_s$ при $s\in S\setminus S_0$ и $i=1, \ldots, k$. Положим

$$W_1=\bigcup_{i=1}^{k} \prod_{s\in S_0} W_s^i, \quad W_2=\prod_{s\in S\setminus S_0} X_s \quad \text{и} \quad A_2=\prod_{s\in S\setminus S_0} A_s.$$

Имеем

$$(A_{s_1}\times A_{s_2}\times \ldots \times A_{s_l})\times A_2\subset W_1\times W_2\subset W,$$

и, так как наша теорема для конечных произведений доказана, существуют открытые множества $U_{s_1}\subset X_{s_1}$, $U_{s_2}\subset X_{s_2}$, ..., $U_{s_l}\subset X_{s_l}$, такие, что

$$A_{s_1}\times A_{s_2}\times \ldots \times A_{s_l}\subset U_{s_1}\times U_{s_2}\times \ldots \times U_{s_l}\subset W_1.$$

Положим $U_s=X_s$ при всех $s\in S\setminus S_0$; открытые множества $U_s\subset X_s$ определены теперь для всех $s\in S$. Легко проверить, что эти множества искомые. ∎

В связи с операцией перехода к факторпространству имеет место следующая простая теорема.

3.2.11. Теорема П. С. Александрова. *Для каждого замкнутого отношения эквивалентности E на компакте X существуют ровно одно (с точностью до гомеоморфизма) хаусдорфово пространство Y и непрерывное отображение f: $X\to Y$ пространства X на Y, такие, что $E=E(f)$, а именно: факторпространство X/E и естественное факторное отображение φ: $X\to X/E$; более того, Y при этом является компактом.*

Обратно, для каждого непрерывного отображения компакта X на хаусдорфово пространство Y отношение эквивалентности $E(f)$ замкнуто.

Доказательство. Если E — замкнутое отношение эквивалентности на компакте X, то естественное отображение q: $X\to X/E$ замкнуто; поэтому, в силу теорем 3.1.9 и 1.5.20, факторпространство X/E нормально. Более того, по теореме 3.1.10, пространство X/E является компактом.

Если Y — хаусдорфово пространство и существует отображение f: $X\to Y$ пространства X на пространство Y, такое, что $E=E(f)$, то отображение f замкнуто и $\bar{f}$: $X/E\to Y$ является гомеоморфизмом в силу 2.4.3 и 2.4.8. Ясно, что если отождествить

X/E с Y посредством гомеоморфизма $\bar{f}$, то отображение f совпадает с естественным отображением q: $X \to X/E$.

Вторая часть теоремы является переформулировкой теоремы 3.1.12. ∎

3.2.12. Примеры. Покажем, что предположение о компактности существенно в первой части приведенной выше теоремы. Пусть $X = D(\mathfrak{c})$ и f_1: $X \to I$, f_2: $X \to I \oplus \{2\}$ — произвольные взаимно однозначные отображения «на». Ясно, что $E(f_1) = E(f_2)$ — отношение тождества на X; таким образом, одно и то же замкнутое отношение эквивалентности на X определяется отображениями пространства X на различные компакты.

Нельзя опустить и предположение, что пространство Y хаусдорфово. Действительно, пусть $X = I$ и Y — отрезок I с топологией, описанной в примере 1.2.6. Непрерывное отображение f: $X \to Y$, определенное правилом $f(x) = x$, порождает то же замкнутое отношение эквивалентности, что и тождественное отображение id_X: $X \to X$, а именно отношение тождества, хотя X и Y при этом не гомеоморфны. ∎

Перейдем теперь к обсуждению обратных спектров из компактов.

3.2.13. Теорема. *Предел обратного спектра $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ непустых компактов является непустым компактом.*

Доказательство. Для каждого $\rho \in \Sigma$ положим

$$Z_\rho = \left\{ \{x_\sigma\} \in \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma \colon \pi^\rho_\tau(x_\rho) = x_\tau \text{ при } \tau \leqslant \rho \right\}.$$

Возьмем точку $z_\rho \in X_\rho \neq \varnothing$, положим $z_\tau = \pi^\rho_\tau(z_\rho)$ при $\tau \leqslant \rho$ и выберем произвольно $z_\sigma \in X_\sigma$ для всех остальных $\sigma \in \Sigma$.

Ясно, что $z = \{z_\sigma\} \in Z_\rho$, так что $Z_\rho \neq \varnothing$. Из теоремы 1.5.4 следует, что множество Z_ρ замкнуто в $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$. Так как $Z_{\rho_1} \subset Z_{\rho_2}$ при $\rho_2 \leqslant \rho_1$ и множество Σ направлено, семейство $\{Z_\rho\}_{\rho \in \Sigma}$ замкнутых подмножеств произведения $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ центрировано. По теореме Тихонова $\bigcap_{\rho \in \Sigma} Z_\rho \neq \varnothing$, что вместе с очевидным соотношением $\varprojlim S = \bigcap_{\rho \in \Sigma} Z_\rho$ завершает доказательство. ∎

3.2.14. Теорема. *Пусть $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ — отображение обратного спектра $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ компактов в обратный спектр $S' = \{Y_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$ T_1-пространств. Если все отображения $f_{\sigma'}$ являются отображениями «на», то предельное отображение $f = \varprojlim \{\varphi, f_{\sigma'}\}$ тоже является отображением «на».*

Доказательство. В силу следствия 2.5.11, можно предположить, что $\varphi(\Sigma') = \Sigma$. Рассмотрим вспомогательный обратный спектр $S'' = \{X_{\varphi(\sigma')}, \pi^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}, \Sigma'\}$, где каждое пространство X_σ встречается $|\varphi^{-1}(\sigma)|$ раз и где связующие отображения те же, что и в S. Далее, рассмотрим отображение $\{\mathrm{id}_{\Sigma'}, f_{\sigma'}\}$ обратного спектра S'' в обратный спектр S'и обозначим через f' предельное отображение $\varprojlim\{\mathrm{id}_{\Sigma'}, f_{\sigma'}\}$.

Пусть $y = \{y_{\sigma'}\}$ — любая точка из $\varprojlim S'$. Для каждого $\sigma' \in \Sigma'$ множество $Z_{\sigma'} = f^{-1}_{\sigma'}(y_{\sigma'})$ замкнуто в $X_{\varphi(\sigma')}$ и, следовательно, является компактом. Для произвольных $\sigma', \rho' \in \Sigma'$, таких, что $\rho' \leqslant \sigma'$, имеем

$$\pi^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}(Z_{\sigma'}) = \pi^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')} f^{-1}_{\sigma'}(y_{\sigma'}) \subset f^{-1}_{\rho'} \pi^{\sigma'}_{\rho'}(y_{\sigma'}) = f^{-1}_{\rho'}(y_{\rho'}) = Z_{\rho'}.$$

Таким образом, $S''' = \{Z_{\sigma'}, \tilde{\pi}^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}, \Sigma'\}$, где $\tilde{\pi}^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}(x) = \pi^{\varphi(\sigma')}_{\varphi(\rho')}(x)$ при $x \in Z_{\sigma'}$, есть обратный спектр из непустых компактов. По теореме 3.2.13, существует точка $x' = \{x_{\sigma'}\} \in \varprojlim S'''$; очевидно, $f'(x') = y$.

Рассмотрим теперь отображение $\{\varphi, \mathrm{id}_{X_{\varphi(\sigma')}}\}$ обратного спектра S в обратный спектр S''. Из предложения 2.5.10 следует, что предельное отображение $f'' = \varprojlim\{\varphi, \mathrm{id}_{X_{\varphi(\sigma')}}\}$ является гомеоморфизмом, так что существует точка $x \in \varprojlim S$, для которой $f''(x) = x'$. Так как $f = f'f''$ (что легко проверить), то $f(x) = y$. ■

Из теорем 3.2.14 и 2.5.14 вытекает

3.2.15. Следствие. *Если в обратном спектре* $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ *компактов все связующие отображения* π^σ_ρ *являются отображениями «на», то и проекции* π_σ: $\varprojlim S \to X_\sigma$ *также являются отображениями «на».* ■

Вот еще два следствия, относящиеся к двум частным случаям отображений обратных спектров, обсуждавшимся в конце § 2.5.

3.2.16. Следствие. *Если* $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ *где* $\Sigma \neq \varnothing$, *есть обратный спектр* T_1*-пространств,* X *— компакт и* $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, *где* f_σ: $X \to X_\sigma$, *— семейство отображений «на», такое, что* $\pi^\sigma_\rho f_\sigma = f_\rho$ *для всех* $\sigma, \rho \in \Sigma$, *удовлетворяющих условию* $\rho \leqslant \sigma$, *то предельное отображение* $\varprojlim f_\sigma$ *также является отображением «на».* ■

3.2.17. Следствие. *Если* $S = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$, *где* $\Sigma \neq \varnothing$, *— обратный спектр компактов,* X *есть* T_1*-пространство и* $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, *где* f_σ: $X_\sigma \to X$, *— семейство отображений «на», такое, что* $f_\rho \pi^\sigma_\rho = f_\sigma$ *для* *всех* σ, $\rho \in \Sigma$, *удовлетворяющих условию* $\rho \leqslant \sigma$, *то предельное отображение* $\varprojlim f_\sigma$ *тоже является отображением «на».* ∎

Завершает этот параграф важная теорема о пространстве всех непрерывных вещественных функций на компакте. Общие функциональные пространства будут обсуждены в § 3.4.

Семейство $P \subset R^X$ непрерывных вещественных функций на топологическом пространстве X является *кольцом функций*, если для всех f, $g \in P$ функции $f+g$, $f-g$ и $f \cdot g$ тоже принадлежат P.

Как показано в § 1.4, пространство R^X является кольцом функций, содержащим все константы и замкнутым относительно равномерной сходимости. Более того, если X — тихоновское пространство, то семейство R^X разделяет точки, т. е. для любой пары различных точек x, $y \in X$ существует функция $f \in R^X$, такая, что $f(x) \neq f(y)$. Для компактов верно и обратное: каждое кольцо непрерывных вещественных функций на компакте X, удовлетворяющее указанным выше условиям, совпадает со всем R^X. Доказательству этой теоремы будут предпосланы три леммы. Вторая из них является частным случаем хорошо известной теоремы из курса анализа; она включена для полноты. Первая лемма нужна только для доказательства второй.

3.2.18. Лемма (теорема Дини). *Пусть X — компакт и $\{f_i\}$ — последовательность непрерывных вещественных функций на X, такая, что $f_i(x) \leqslant f_{i+1}(x)$ для всех $x \in X$ и $i = 1, 2, \ldots$. Если существует функция $f \in R^X$, для которой $f(x) = \lim f_i(x)$ при каждом $x \in X$, то $f = \lim f_i$, т. е. последовательность $\{f_i\}$ сходится к f равномерно.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Множества $F_i = \{x\colon f(x) - f_i(x) \geqslant \varepsilon\}$ замкнуты и образуют убывающую последовательность $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$. Так как $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$, семейство $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ не может быть центрированным. Значит, найдется i_0, для которого $F_{i_0} = \varnothing$, а это доказывает лемму. ∎

3.2.19. Лемма. *Существует последовательность $\{w_i\}$ полиномов, равномерно сходящаяся к функции $\sqrt{t}$ на отрезке I.*

Доказательство. Последовательность $\{w_i\}$ определяется рекуррентными формулами

$$(6) \qquad w_1(t) = 0 \text{ и } w_{i+1}(t) = w_i(t) + \frac{1}{2}\left(t - w_i^2(t)\right) \text{ при } i = 1, 2, \ldots .$$

Докажем по индукции, что

$$(7) \qquad w_i(t) \leqslant \sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \in I \quad \text{и} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Последнее неравенство верно при $i=1$. Предположим, что $w_i(t) \leqslant \sqrt{t}$. Так как

$$\sqrt{t} - w_{i+1}(t) = \sqrt{t} - w_i(t) - \frac{1}{2}(t - w_i^2(t)) =$$
$$= (\sqrt{t} - w_i(t))\left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + w_i(t))\right],$$

из индуктивного предположения и неравенства $t \leqslant 1$ следует, что

$$\sqrt{t} - w_{i+1}(t) \geqslant (\sqrt{t} - w_i(t))\left(1 - \frac{1}{2}2\sqrt{t}\right) \geqslant 0,$$

чем доказательство (7) завершено.

Из (6) и (7) вытекает, что $w_i(t) \leqslant w_{i+1}(t)$ при $t \in I$ и $i = 1, 2, \ldots$. Вместе с (7) это показывает, что при каждом $t \in I$ существует предел $f(t)$ последовательности $\{w_i(t)\}$.

Переход к пределу в (6) дает равенство $f(t) = \sqrt{t}$ при всех $t \in I$. Из предшествующей леммы следует, что $f = \lim w_i$. ∎

3.2.20. Лемма. *Пусть P — некоторое кольцо непрерывных ограниченных вещественных функций на топологическом пространстве X. Если кольцо P содержит все постоянные функции и замкнуто относительно равномерной сходимости, то для всех $f, g \in P$ функции $\max(f, g)$ и $\min(f, g)$ тоже принадлежат P.*

Доказательство. Так как

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|) \quad \text{и} \quad \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|),$$

достаточно показать, что если $f \in P$, то $|f| \in P$. Возьмем любое $f \in P$ и положительное число c, такое, что $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Достаточно доказать, что $\frac{1}{c}|f| \in P$; поэтому можно предположить, что $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X$. По предыдущей лемме, функция $|f| = \sqrt{f^2}$ является пределом равномерно сходящейся последовательности функций, принадлежащих P, а именно последовательности $\{f_i\}$, где $f_i(x) = w_i[(f(x))^2]$. ∎

3.2.21. Теорема Стоуна — Вейерштрасса. *Если кольцо P непрерывных вещественных функций на компакте X содержит все постоянные функции, разделяет точки и замкнуто относительно равномерной сходимости (т. е. замкнуто в пространстве R^X, наделенном топологией равномерной сходимости, то P совпадает с кольцом всех непрерывных вещественных функций на X.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждого $f \in R^X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $f_\varepsilon \in P$, такое, что $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$.

Для каждой пары различных точек a, $b \in X$ существует функция $h \in P$, такая, что $h(a) \neq h(b)$. Функция g, определенная формулой $g(x) = (h(x) - h(a))(h(b) - h(a))^{-1}$, принадлежит P и обладает тем свойством, что $g(a) = 0$ и $g(b) = 1$. Для функции $f_{a,b} \in P$, определенной формулой $f_{a,b}(x) = (f(b) - f(a))g(x) + f(a)$, имеем

$$f_{a,b}(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f_{a,b}(b) = f(b).$$

Множества

$$U_{a,b} = \{x\colon f_{a,b}(x) < f(x) + \varepsilon\} \quad \text{и} \quad V_{a,b} = \{x\colon f_{a,b}(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

являются соответственно окрестностями точек a и b. Зафиксируем точку b и возьмем конечное подпокрытие $\{U_{a_i,b}\}_{i=1}^{k}$ открытого покрытия $\{U_{a,b}\}_{a \in X}$ пространства X. В силу леммы 3.2.20, функция $f_b = \min\{f_{a_1,b}, f_{a_2,b}, \ldots, f_{a_k,b}\}$ принадлежит P; очевидно, $f_b(x) < f(x) + \varepsilon$ при $x \in X$ и $f_b(x) > f(x) - \varepsilon$ при $x \in V_b = \bigcap_{i=1}^{k} V_{a_i,b}$.

Множество V_b является окрестностью точки b. Возьмем конечное подпокрытие $\{V_{b_i}\}_{i=1}^{l}$ открытого покрытия $\{V_b\}_{b \in X}$ пространства X. В силу леммы 3.2.20 функция $f_\varepsilon = \max\{f_{b_1}, \ldots, f_{b_l}\}$ принадлежит P, и ясно, что $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$ для каждого $x \in X$. ∎

Важность теоремы Стоуна — Вейерштрасса в том, что она дает метод равномерной аппроксимации всех непрерывных вещественных функций, определенных на каком-либо компакте X, специальными классами функций. Действительно, каждая непрерывная вещественная функция на X может быть сколь угодно хорошо аппроксимирована полиномами (от нескольких переменных) от элементов произвольного фиксированного семейства непрерывных функций, разделяющего точки. Так как для каждого отрезка $J \subset R$ семейство $\{f\}$, состоящее из функции $f\colon J \to R$, заданной правилом $f(x) = x$, разделяет точки, теорема 3.2.21 влечет за собой классическую теорему Вейерштрасса, которая утверждает, что каждая непрерывная вещественная функция на J является пределом равномерно сходящейся последовательности полиномов.

3.2.22. Пример. Покажем, что предположение о компактности в теореме 3.2.21 существенно. Действительно, кольцо P, являющееся замыканием по отношению к топологии равномерной сходимости в пространстве R^R множества всех непрерывных отображений пространства R в себя, постоянных вне какого-нибудь интервала, удовлетворяет всем предположениям теоремы Стоуна — Вейерштрасса, но не совпадает со всем R^R, так как оно не содержит функцию $\sin x$ — это легко проверить. Можно доказать, что если вполне регулярное пространство X удовлетворяет теореме Стоуна — Вейерштрасса, то X является компактом (см. упр. 3.2.К). ∎

Читатель легко проверит, что для не хаусдорфовых компактных пространств аналоги теорем 3.2.1, 3.2.2, 3.2.11, 3.2.13, 3.2.14 и 3.2.21 не верны.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теорема 3.2.1 была доказана Таймановым в [1952] и, в виде двойственного утверждения (см. упр. 3.2.А(а)), Эйленбергом и Стинродом в [1952]. Теорема 3.2.2 доказана П. С. Александровым в [1936]. Тихонов доказал теоремы 3.2.5 и 3.2.6 в [1930]. В частности, он показал, что все кубы $I^{\mathfrak{m}}$ компактны, откуда легко следует, что теорема 3.2.4 верна, но сама эта теорема была впервые сформулирована в работе Тихонова [1935а]. Данное нами доказательство теоремы Тихонова следует Шевалле и и О. Фринку [1941]. Конечный случай теоремы Уоллеса появился в работах Готшелка и Хедлунда [1955] и Келли [1955], где отмечается, что результат принадлежит Уоллесу; теорема в полной общности была доказана Фроликом в [1960] и Линoм в [1960]. Теорема П. С. Александрова была объявлена в [1925] и доказана в [1927]. Теорема 3.2.13 по существу доказана Стинродом в [1936]. Следствие 3.2.15 можно найти в работе Эйленберга и Стинрода [1952]. Лемма 3.2.18 установлена У. Дини в 1878 г. для функций, определенных на отрезке. Теорема Стоуна — Вейерштрасса, обобщающая классический результат Вейерштрасса, полученный в 1885 г. (он сформулирован перед примером 3.2.22), доказана М. Стоуном в [1937]. Простое ее доказательство, приведенное нами, и интересное обсуждение предмета можно найти в статье М. Стоуна [1947].

УПРАЖНЕНИЯ

3.2.А. (а) (Эйленберг и Стинрод [1952]). Пусть A — всюду плотное подпространство топологического пространства X и f — непрерывное отображение пространства A в компакт Y. Докажите, что отображение f можно продолжить до непрерывного отображения всего X в том и только том случае, если для каждого открытого покрытия $\{V_i\}_{i=1}^k$ пространства Y существует открытое покрытие $\{U_i\}_{i=1}^l$ пространства X, такое, что открытое покрытие $\{U_i \cap A\}_{i=1}^l$ подпространства A вписано в покрытие $\{f^{-1}(V_i)\}_{i=1}^k$.

(b) (Бурбаки и Дьедонне [1939]). Пусть A — всюду плотное подпространство топологического пространства X и f — непрерывное отображение пространства A в регулярное пространство Y. Докажите, что f можно продолжить до непрерывного отображения всего X в том и только том случае, если f непрерывно продолжается на $A \cup \{x\}$ для каждого $x \in X \setminus A$. Заметьте, что предположение о регулярности Y нельзя ослабить до предположения, что пространство Y хаусдорфово.

3.2.B. Покажите, что формула

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

где $x = \{x_i\}$, определяет непрерывное отображение канторова множества $D^{\aleph_0}$ на отрезок I. Докажите с помощью этого факта теорему 3.2.2. Проверьте, что существует счетное множество $A \subset I$, такое, что $|f^{-1}(y)| = 2$ для каждого $y \in A$ и $|f^{-1}(y)| = 1$ для $y \in I \setminus A$.

3.2.C. *Сегмент в* R^n *с концами* $x, y \in R^n$ есть множество всех точек вида $(1-t)x + ty$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, а сложение точек и умножение точки на число определяются так же, как в начале приложения к § 7.3. *Луч в* R^n с началом в точке $x \in R^n$, проходящий через точку $y \in R^n$, отличную от x, есть множество всех точек вида $(1-t)x + ty$, где $t > 0$. Подмножество A множества R^n называется *выпуклым*, если для каждой пары x, y точек множества A сегмент с концами в x, y содержится в A.

Покажите, что каждый выпуклый компакт $A \subset R^n$, такой, что $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, гомеоморфен единичному n-шару B^n, а его граница $\operatorname{Fr} A$ гомеоморфна $(n-1)$-сфере S^{n-1}. В частности, гомеоморфны пространства I^n и B^n, так же как и пространства $\operatorname{Fr} I^n \subset R^n$ и S^{n-1}, при $n = 1, 2, \ldots$.

Указание. Зафиксируйте точку $x \in \operatorname{Int} A$ и докажите, что каждый луч с началом в точке x пересекает $\operatorname{Fr} A$ в точности в одной точке.

3.2.D. Заметьте, что теорема Тихонова вытекает из теоремы Куратовского и теоремы Уоллеса.

3.2.E. (Келли [1955]). Докажите, что подпространство X тихоновского куба $I^{\mathfrak{c}} = \prod_{t \in I} I_t$, где $I_t = I$ для каждого $t \in I$, которое состоит из всех неубывающих отображений отрезка I в I, обладает следующими свойствами:

(a) X — компакт.

(b) Пространство X содержит подпространство, гомеоморфное дискретному пространству $D(\mathfrak{c})$, и подпространство, гомеоморфное прямой Зоргенфрея K.

(c) Пространство X не наследственно нормально.

Указание. Проверьте, что X^2 можно вложить в X.

(d) Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Указание. Множество точек разрыва произвольной функции, входящей в X, счетно.

(e) Пространство X сепарабельно.

Указание. См. доказательство теоремы Хьюитта — Марчевского — Пондицери.

Пространство X называется *пространством Хелли.*

3.2.F (Архангельский [1965]). Покажите, что произведение $\prod_{s\in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, является пространством точечно счетного типа в том и только том случае, если все X_s являются пространствами точечно счетного типа и существует счетное множество $S_0 \subset S$, такое, что X_s является компактом для всех $s \in S \setminus S_0$ (см. упр. 3.1.E(b)).

3.2.G. Покажите, что если X — компакт, то отношение эквивалентности E на X замкнуто в том и только том случае, если множество E замкнуто в произведении $X \times X$.

3.2.H. (a) (Мибу [1944]). Докажите с помощью теоремы Стоуна — Вейерштрасса, что каждая непрерывная вещественная функция $f\colon \prod_{s\in S} X_s \to R$, определенная на произведении компактов, зависит лишь от счетного числа координат (см. определение в задаче 2.7.12(c)).

(b) Покажите, что существует непрерывная вещественная функция (в действительности непрерывная функция, принимающая лишь значения 0 и 1) на произведении $X = T \times \prod_{t\in T} D_t$, где $T = D(\mathfrak{c})$ и $D_t = D$ при всех $t \in T$, которая зависит от несчетного множества координат.

Указание. Рассмотрите разбиение пространства X на непересекающиеся открыто-замкнутые множества $A_{t,i} = \{x \in X\colon p(x) = t$ и $p_t(x) = i\}$, где $t \in T$, $i \in D$, p — проекция пространства X на T и p_t — проекция пространства X на D_t.

(c) (Келлерер [1968]). Докажите, что если X_s для каждого $s \in S$ — хаусдорфово пространство, в котором есть всюду плотное подпространство, являющееся объединением счетного семейства компактов (в частности, если каждое X_s сепарабельно), то любая непрерывная вещественная функция $f\colon \prod_{s\in S} X_s \to R$ зависит лишь от счетного числа координат (см. задачу 2.7.12(c) и упр. 4.1.G).

Указание. Пусть $X_{s,1}, X_{s,2}, \ldots$ — возрастающая последовательность компактов в X_s, такая, что объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_{s,i}$ всюду плотно в X_s. Рассмотрите произведения $X_i = \prod_{s \in S} X_{s, i}$ и заметьте, что объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ всюду плотно в $\prod_{s \in S} X_s$.

(d) Докажите аналоги утверждений (a) и (c) для непрерывных отображений декартовых произведений в тихоновские пространства веса $\mathfrak{m}$.

3.2.I. (a) Покажите, что для любого тихоновского пространства X и произвольного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ каждое из следующих условий вытекает из предыдущего и что если X — компакт, то все эти условия равносильны:

(1) *Пространство R^X с топологией равномерной сходимости содержит всюду плотное подмножество мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(2) *Пространство X имеет базу мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(3) *В множестве R^X есть подмножество мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, разделяющее точки.*

Примените этот результат для доказательства теоремы 3.1.21 и — при дополнительном предположении, что X компактно, — для доказательства теоремы 3.1.22.

Проверьте, что ни условия (1) и (2), ни условия (2) и (3) не равносильны.

Указание. Доказывая теорему 3.1.22, заметьте, что если существует непрерывное отображение пространства X на пространство Y, то R^Y можно (гомеоморфно) вложить в R^X, и проверьте, что если $d(R^X) \leqslant \mathfrak{m}$, то и $w(R^X) \leqslant \mathfrak{m}$.

(b) Докажите, что условие (3) в (a) равносильно такому:

(4) *Пространство R^X с топологией поточечной сходимости содержит всюду плотное множество мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

Выведите отсюда, что $d(R^{2^\mathfrak{m}}) \leqslant \mathfrak{m}$ (сравните этот результат с теоремой Хьюитта — Марчевского — Пондицери).

3.2.J (М. Стоун [1947]). (a) Покажите, что каждая непрерывная вещественная функция, определенная на компактном подпространстве M тихоновского пространства X, непрерывно продолжается на X.

Указание. Вложите X в тихоновский куб и примените теорему Титце — Урысона.

(b) Заметьте, что утверждение (a) вытекает из теоремы Стоуна — Вейерштрасса без помощи теоремы Титце — Урысона (см. упр. 3.6.C).

3.2.K (Хьюитт [1947]). Заметьте, что если вполне регулярное пространство X удовлетворяет теореме Стоуна — Вейерштрасса, то X — компакт.

Указание. Вложите X в тихоновский куб.

3.3. ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И k-ПРОСТРАНСТВА

Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если для каждого $x \in X$ существует окрестность U точки x, такая, что $\bar{U}$ является компактным подпространством пространства X.

3.3.1. Теорема. *Каждое локально компактное хаусдорфово пространство является тихоновским пространством.*

Доказательство. Пусть x — точка локально компактного хаусдорфова пространства X и F — замкнутое в X множество, такое, что $x \notin F$. Возьмем окрестность U точки x, для которой $\bar{U}$ является компактом. Множество $F_0 = (\bar{U} \setminus U) \cup (\bar{U} \cap F)$ — замкнутое подмножество пространства $\bar{U}$. Так как $x \in \bar{U} \setminus F_0$, существует непрерывная функция f_1: $\bar{U} \to I$, такая, что $f_1(x) = 0$ и $f_1(F_0) \subset \{1\}$. Так как $\bar{U} \cap (X \setminus U) = \bar{U} \setminus U \subset F_0$, комбинация f функции f_1 и постоянной функции f_2: $X \setminus U \to I$, определенной правилом $f_2(y) = 1$ для всех $y \in X \setminus U$, является непрерывной функцией в силу 2.1.13. Легко видеть, что $f(x) = 0$ и $f(F) \subset \{1\}$. ∎

3.3.2. Теорема. *Для каждого компактного подпространства A локально компактного хаусдорфова пространства X и каждого открытого множества $V \subset X$, содержащего A, найдется открытое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset \bar{U} \subset V$ и $\bar{U}$ — компакт.*

Доказательство. Для каждого $x \in A$ возьмем окрестность V_x точки x, такую, что $\bar{V}_x \subset V$, и окрестность W_x точки x, для которой $\bar{W}_x$ является компактом. Множество $\bar{U}_x$, где $U_x = V_x \cap W_x$, компактно, так как оно замкнуто в компактном пространстве $\bar{W}_x$. В силу теоремы 3.1.3, найдется конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset A$, такое, что $A \subset U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Множество $\bar{U} = \bar{U}_{x_1} \cup \bar{U}_{x_2} \cup \ldots \cup \bar{U}_{x_k}$ — компакт в силу теоремы 3.1.4, и очевидно, что $\bar{U} \subset \bar{V}_{x_1} \cup \bar{V}_{x_2} \cup \ldots \cup \bar{V}_{x_k} \subset V$. ∎

Из теорем 3.3.1, 3.1.7 и 3.1.2 получаем

3.3.3. Следствие. *Для каждого компактного подпространства A локально компактного хаусдорфова пространства X и каждого открытого множества V, содержащего A, существует непрерывная функция f: $X \to I$, такая, что $f(x) = 0$ при $x \in A$, $f(x) = 1$ при $x \in X \setminus V$ и множество $f^{-1}([0, a])$ является компактом для каждого $a < 1$.* ∎

Следующая теорема дает оценку характерам точек в локально компактном хаусдорфовом пространстве (см. упр. 3.1.F(a)).

3.3.4. Теорема. *Характер произвольной точки x в локально компактном хаусдорфовом пространстве X равен наименьшему кар-*

диналу вида $|\mathcal{U}|$, где $\mathcal{U}$ — семейство открытых множеств в X, такое, что $\bigcap\mathcal{U} = \{x\}$.

Доказательство. Пусть $\{x\} = \bigcap_{s \in S} V_s$, где V_s открыто в X и $|S| \leqslant \mathfrak{m}$. Достаточно показать, что $\chi(x, X) \leqslant \mathfrak{m}$. Можно предположить, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, так как если $\mathfrak{m}$ конечно, то x — изолированная точка в X и $\chi(x, X) = 1 \leqslant \mathfrak{m}$. Из теоремы 3.3.2 следует, что $\{x\} = \bigcap_{s \in S} \overline{U}_s$, где U_s — окрестность точки x, такая, что $\overline{U}_s$ компактно. В силу 3.1.5, для каждой окрестности U точки x найдется конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$, такое, что $U_{s_1} \cap U_{s_2} \cap \ldots \cap U_{s_k} \subset \overline{U}_{s_1} \cap \overline{U}_{s_2} \cap \ldots \cap \overline{U}_{s_k} \subset U$. Значит, все конечные пересечения элементов семейства $\{U_s\}_{s \in S}$ образуют базу в точке x. Так как мощность семейства всех таких пересечений не превосходит $\mathfrak{m}$, имеем $\chi(x, X) \leqslant \mathfrak{m}$. ∎

Оказывается, теорему 3.1.19, как и ее следствия, можно распространить на локально компактные хаусдорфовы пространства (см. упр. 3.9.E).

3.3.5. Теорема. *Для каждого локально компактного хаусдорфова пространства X имеем $nw(X) = w(X)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $w(X) \leqslant nw(X)$. Очевидно, можно предположить, что $nw(X) = \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Пусть $\mathcal{N}$ — сеть в X, для которой $|\mathcal{N}| = \mathfrak{m}$. Из определения локальной компактности следует, что семейство $\{M_s\}_{s \in S}$, состоящее из всех членов семейства $\mathcal{N}$, замыкание которых компактно, покрывает X. В силу 3.3.2, для каждого $s \in S$ найдется открытое множество $U_s \subset X$, такое, что $\overline{M}_s \subset U_s$ и $\overline{U}_s$ — компакт. Так как $nw(\overline{U}_s) \leqslant \leqslant nw(X) = \mathfrak{m}$, из теоремы 3.1.19 следует, что $w(U_s) \leqslant \mathfrak{m}$, т. е. подпространство U_s пространства X обладает базой $\mathcal{B}_s$ мощности $\leqslant \mathfrak{m}$. Легко видеть, что объединение $\bigcup_{s \in S} \mathcal{B}_s$ является базой мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ пространства X. Значит, $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. ∎

Заметим, что последняя теорема немедленно следует из теоремы 3.1.19 и теоремы 3.5.11, которая будет доказана далее.

3.3.6. Следствие. *Для каждого локально компактного хаусдорфова пространства X имеем $w(X) \leqslant |X|$.* ∎

3.3.7. Следствие. *Если локально компактное хаусдорфово пространство Y является непрерывным образом пространства X, то $w(Y) \leqslant w(X)$.* ∎

3.3.8. Теорема. *Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то каждое подпространство пространства X, представимое в виде $F \cap V$, где F замкнуто в X, а V открыто в X, тоже локально компактно.*

Доказательство. Достаточно показать, что локальная компактность хаусдорфова пространства наследуется как замкнутыми подпространствами, так и открытыми подпространствами, поскольку $F \cap V$ является открытым подпространством замкнутого подпространства F пространства X.

Пусть F — замкнутое подпространство локально компактного пространства X. Для каждого $x \in F$ найдется окрестность U точки x в пространстве X, такая, что $\bar{U}$ компактно. Пересечение $F \cap U$ — окрестность точки x в пространстве F, и замыкание $\overline{F \cap U} \cap F = \overline{F \cap U}$ этой окрестности в F компактно как замкнутое подпространство компактного пространства $\bar{U}$[1]).

Тот факт, что локальная компактность хаусдорфова пространства наследуется открытыми подпространствами, следует сразу из теоремы 3.3.2, примененной к одноточечному множеству A. ∎

3.3.9. Теорема. *Локально компактное подпространство M хаусдорфова пространства X является открытым множеством в замыкании $\bar{M}$ множества M в пространстве X; следовательно, M можно представить в виде $F \cap V$, где F замкнуто в X, а V открыто в X.*

Доказательство. Достаточно показать, что всюду плотное локально компактное подпространство M хаусдорфова пространства X открыто в X.

Каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью U в подпространстве M, такой, что множество $\bar{U} \cap M$ компактно и, значит, замкнуто в X. Так как $U \subset \bar{U} \cap M$, имеем $\bar{U} \subset \bar{U} \cap M \subset M$. Пусть W — открытое множество в X, для которого $U = M \cap W$. В силу теоремы 1.3.6,

$$x \in W \subset \bar{W} = \overline{M \cap W} = \bar{U} \subset M,$$

откуда следует, что каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью W в пространстве X, содержащейся в подпространстве M. Значит, M открыто в X. ∎

Последние две теоремы дают

3.3.10. Следствие. *Подпространство M локально компактного хаусдорфова пространства X локально компактно в том и только том случае, если его можно представить в виде $F \cap V$, где F замкнуто в X, а V открыто в X.* ∎

Из 3.3.10, 3.3.1 и 3.2.6 получаем

---

[1]) Предположение, что X — хаусдорфово пространство, в этой части рассуждения не использовалось. — *Прим. перев.*

3.3.11. Следствие. *Хаусдорфово пространство локально компактно в том и только том случае, если оно гомеоморфно открытому подпространству некоторого компакта.* ∎

3.3.12. Теорема. *Сумма* $\bigoplus_{s\in S} X_s$ *является локально компактным (хаусдорфовым) пространством в том и только том случае, если все пространства* X_s *локально компактны (и хаусдорфовы).*

Доказательство. Если сумма $\bigoplus_{s\in S} X_s$ локально компактна, то и все X_s локально компактны (см. следствие 2.2.2 и доказательство теоремы 3.3.8).

Обратно, пусть все X_s локально компактны. Тогда для каждого $x \in X = \bigoplus_{s\in S} X_s$ найдется $s_0 \in S$, такое, что $x \in X_{s_0}$, и найдется окрестность U точки x в X_{s_0}, замыкание которой в X_{s_0} компактно. Ясно, что U является окрестностью точки x в X и что замыкание множества U в X, совпадающее с замыканием множества U в X_{s_0}, компактно. ∎

3.3.13. Теорема. *Декартово произведение* $\prod_{s\in S} X_s$, *где* $X_s \neq \varnothing$ *при* $s \in S$, *локально компактно в том и только том случае, если все пространства* X_s *локально компактны и существует конечное множество* $S_0 \subset S$, *такое, что* X_s *компактны при всех* $s \in S \setminus S_0$.

Доказательство. В силу теоремы Тихонова и предложения 2.3.7, достаточность этого условия будет установлена, если мы покажем, что произведение любого конечного числа локально компактных пространств локально компактно. Возьмем точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. В силу локальной компактности X_i, при $i = 1, 2, \ldots, k$ найдется окрестность V_i точки x_i в X_i, такая, что $\overline{V}_i$ компактно. Множество $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k$ является окрестностью точки x в $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ и $\overline{V}$ компактно в силу 2.3.3 и теоремы Тихонова.

Обратно, предположим, что $\prod_{s\in S} X_s$ — непустое локально компактное пространство. Возьмем $s_0 \in S$ и точку $x \in X_{s_0}$ и покажем, что у точки x есть окрестность $W \subset X_{s_0}$, для которой $\overline{W}$ является компактным подпространством пространства X_{s_0}. Пусть x_s — любая точка пространства X_s при $s \neq s_0$ и $x_{s_0} = x$. Точка $\{x_s\} \in \prod_{s\in S} X_s$ обладает окрестностью U, замыкание которой $\overline{U}$ компактно. Ясно, что существует член $\prod_{s\in S} W_s$ канонической базы пространства $\prod_{s\in S} X_s$, такой, что $\{x_s\} \in \prod_{s\in S} W_s \subset U$ и $W_s = X_s$ при $s \in S \setminus S_0$, где $|S_0| < \aleph_0$. В силу теоремы 3.1.2, произведение $\prod_{s \in S} \overline{W}_s = \overline{\prod_{s \in S} W_s} \subset \overline{U}$ компактно. Следовательно, $W = W_{s_0} \subset X_{s_0}$ — окрестность точки x, замыкание которой компактно, и X_s компактно при $s \in S \setminus S_0$. ∎

Из последней теоремы и примера 2.5.3 следует, что предел счетного обратного спектра локально компактных хаусдорфовых пространств может не быть локально компактным пространством.

3.3.14. Примеры. Каждое дискретное пространство локально компактно. Вещественная прямая локально компактна так как она гомеоморфна открытому подпространству $(-1, 1)$ компакта $[-1, 1]$. Из последней теоремы следует, что n-мерное евклидово пространство R^n тоже локально компактно. Локально компактно и пространство W_0 всех счетных ординалов.

Пространство Z, определенное в примере 2.3.36, локально компактно как открытое подпространство компакта $X \times Y$; оно является примером не нормального локально компактного хаусдорфова пространства. ∎

3.3.15. Теорема. *Если $f: X \to Y$ — открытое отображение локально компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y, то Y — локально компактное пространство.*

Доказательство. Пусть y — любая точка из Y. Возьмем произвольную точку $x \in f^{-1}(y)$ и окрестность U точки x в X, для которой $\overline{U}$ — компактное подпространство пространства X. Образ $f(U)$ является окрестностью точки y в Y. Множество $f(\overline{U})$ компактно и, значит, замкнуто в Y; следовательно, $\overline{f(U)} \subset f(\overline{U})$ и $\overline{f(U)}$ — компакт. ∎

С другой стороны, локальная компактность не сохраняется замкнутыми отображениями:

3.3.16. Пример. В примере 1.4.17 мы определили замкнутое отображение $f: X \to Y$ вещественной прямой $R = X$ на факторпространство $R/N = Y$, полученное отождествлением множества N положительных целых чисел в точку $y_0 \in Y$. Было отмечено, что пространство Y не имеет счетной базы в точке y_0; в силу следствия 3.3.7, это означает, что пространство Y не локально компактно.

Другой пример можно получить, отождествив в точку замкнутое подмножество A локально компактного пространства Z, описанного в примере 2.3.36; факторпространство Z/A не регулярно — значит, оно и не локально компактно. ∎

Как показано в примере 2.4.20, декартово произведение факторного отображения и тождественного отображения не обязано быть факторным отображением. Однако для тождественных отображений локально компактных пространств имеет место следующее утверждение (см. задачу 3.12.14(b)):

3.3.17. Теорема Уайтхеда. *Для каждого локально компактного хаусдорфова пространства X и произвольного факторного отображения g: $Y \to Z$ декартово произведение $f = \mathrm{id}_X \times g$: $X \times Y \to X \times Z$ является факторным отображением.*

Доказательство. Предположим, что прообраз $f^{-1}(W) \subset X \times Y$ множества $W \subset X \times Z$ открыт, и возьмем произвольную точку $(x_0, z_0) \in W$. Выберем точку $y_0 \in g^{-1}(z_0)$ и возьмем окрестность U точки x_0, для которой $\bar{U}$ компактно и $\bar{U} \times \{y_0\} \subset f^{-1}(W)$. Для каждого $y \in Y$ имеем

$$(1) \qquad \bar{U} \times g^{-1}g(y) \subset f^{-1}(W), \quad \text{если} \quad \bar{U} \times \{y\} \subset f^{-1}(W);$$

поэтому выполняется включение $\bar{U} \times g^{-1}(z_0) \subset f^{-1}(W)$. Множество $V = \{z \in Z\colon \bar{U} \times g^{-1}(z) \subset f^{-1}(W)\}$ удовлетворяет условию $(x_0, z_0) \in U \times V \subset W$; значит, достаточно показать, что V открыто в Z. Так как отображение g факторно, это сводится к доказательству открытости в Y множества

$$g^{-1}(V) = \{y \in Y\colon \bar{U} \times g^{-1}g(y) \subset f^{-1}(W)\}.$$

Из (1) следует, что $g^{-1}(V) = \{y \in Y\colon \bar{U} \times \{y\} \subset f^{-1}(W)\}$, а по теореме Куратовского последнее множество открыто, так как оно является дополнением проекции замкнутого множества $(\bar{U} \times Y) \setminus f^{-1}(W)$ при проектировании p: $\bar{U} \times Y \to Y$ параллельно компактному сомножителю $\bar{U}$. ∎

Вторая половина этого параграфа посвящена изучению k-пространств; класс этих пространств тесно связан с классом локально компактных хаусдорфовых пространств. Топологическое пространство X называется *k-пространством*, если оно хаусдорфово и представимо в виде образа некоторого локально компактного хаусдорфова пространства при факторном отображении. Иными словами, k-пространства — это хаусдорфовы пространства, являющиеся факторпространствами локально компактных хаусдорфовых пространств. Ясно, что каждое локально компактное хаусдорфово пространство есть k-пространство.

3.3.18. Теорема. *Хаусдорфово пространство X является k-пространством в том и только том случае, если в X замкнуто каждое множество $A \subset X$, пересекающееся со всяким компактным подпространством Z пространства X по замкнутому в Z множеству.*

Доказательство. Пусть X есть k-пространство и f: $Y \to X$ — факторное отображение локально компактного хаусдорфова пространства Y на X. Предположим, что пересечение множества $A \subset X$ с каждым компактным подпространством Z пространства

X замкнуто в Z. Возьмем любую точку $y \in \overline{f^{-1}(A)}$ и произвольную окрестность $U \subset Y$ точки y, такую, что $\bar{U}$ компактно. Множество $f^{-1}(A \cap f(\bar{U})) \subset f^{-1}(A)$ замкнуто в Y и содержит множество $\overline{f^{-1}(A) \cap \bar{U}}$; значит, $y \in f^{-1}(A)$. Отсюда следует, что $\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(A)$, и так как отображение f факторно, мы заключаем, что $\bar{A} = A$.

Рассмотрим теперь произвольное хаусдорфово пространство X и обозначим через $\mathscr{Z}(X)$ семейство всех непустых компактных подпространств пространства X. Пространство $\tilde{X} = \bigoplus_{Z \in \mathscr{Z}(X)} Z$ локально компактно и хаусдорфово, а отображение $f = \nabla_{Z \in \mathscr{Z}(X)} i_Z$: $\tilde{X} \to X$, где i_Z — тождественное вложение подпространства Z в пространство X, непрерывно в силу 2.1.11. Легко видеть, что если в X замкнуто каждое множество $A \subset X$, пересечение $A \cap Z$ которого с Z замкнуто в Z для всех $Z \in \mathscr{Z}(X)$, то отображение f факторно. ∎

Заметим, что в приведенной выше теореме можно с тем же успехом предполагать, что все пересечения $A \cap Z$ компактны или что все они замкнуты в X.

3.3.19. Следствие. *Хаусдорфово пространство X является k-пространством в том и только том случае, если в X открыто каждое множество $A \subset X$, пересечение которого со всяким компактным подпространством Z пространства X открыто в Z.* ∎

3.3.20. Теорема. *Каждое секвенциальное хаусдорфово пространство — и, в частности, каждое хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности — является k-пространством.*

Доказательство. Предположим, что подмножество A секвенциального пространства X не замкнуто. Существуют последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек множества A и точка $x_0 \in \lim x_i$, такие, что $x_0 \notin A$. Если X является к тому же хаусдорфовым пространством, то, как легко проверить, подпространство $Z = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ пространства X гомеоморфно пространству $A(\aleph_0)$; при этом x_0 — единственная предельная точка для Z. Отсюда следует, что пересечение множества A с компактным подпространством Z пространства X не замкнуто. ∎

3.3.21. Теорема. *Отображение f k-пространства X в топологическое пространство Y непрерывно в том и только том случае, если для каждого компактного подпространства $Z \subset X$ сужение $f|Z$: $Z \to Y$ является непрерывным отображением.*

Доказательство. Достаточно показать, что из непрерывности всех таких сужений $f|Z$ следует непрерывность f. Возьмем любое замкнутое множество $A \subset Y$. Для каждого компактного

$Z \subset X$ множество $f^{-1}(A) \cap Z = (f|Z)^{-1}(A)$ замкнуто, откуда следует, что $f^{-1}(A)$ замкнуто. Следовательно, f непрерывно. ∎

3.3.22. Теорема. *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства X в k-пространство Y замкнуто (открыто, факторно) в том и только том случае, если для каждого компактного подпространства $Z \subset Y$ сужение $f_Z\colon f^{-1}(Z) \to Z$ является замкнутым (открытым, факторным) отображением.*

Доказательство. В силу предложений 2.1.4 и 2.4.15, достаточно показать, что если все такие сужения f_Z замкнуты, открыты или факторны, то таким же будет и отображение f.

Предположим сначала, что сужение $f_Z\colon f^{-1}(Z) \to Z$ замкнуто (открыто) для каждого компактного подпространства $Z \subset Y$, и рассмотрим произвольное замкнутое (открытое) множество $A \subset X$. Равенства

$$f(A) \cap Z = f(A \cap f^{-1}(Z)) = f_Z(A \cap f^{-1}(Z))$$

и тот факт, что f_Z замкнуто (открыто), показывают, что множество $f(A) \cap Z$ замкнуто (открыто) в Z для каждого компактного подпространства $Z \subset Y$. Так как Y есть k-пространство, заключаем, что $f(A)$ замкнуто (открыто), а это означает, что отображение f замкнуто (открыто).

Предположим теперь, что сужение $f_Z\colon f^{-1}(Z) \to Z$ является факторным отображением для каждого компактного подпространства $Z \subset Y$, и рассмотрим любое множество $B \subset Y$, такое, что $f^{-1}(B)$ замкнуто в X. Множество $f_Z^{-1}(B \cap Z) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(Z)$ замкнуто в $f^{-1}(Z)$; значит, пересечение $B \cap Z$ замкнуто в Z для каждого компактного подпространства $Z \subset Y$. Так как Y является k-пространством, множество B замкнуто в Y, а это показывает, что отображение f факторно. ∎

Из определения k-пространства получаем сразу следующий результат:

3.3.23. Теорема. *Если $f\colon X \to Y$ — факторное отображение k-пространства X на хаусдорфово пространство Y, то Y является k-пространством.* ∎

3.3.24. Примеры. Отметим, что существуют не регулярные k-пространства; одно из таких пространств определено во втором примере из 3.3.16.

Существуют также совершенно нормальные пространства, не являющиеся k-пространствами: таково пространство Y, определенное в примере 1.6.20. Чтобы доказать, что Y не является k-пространством, достаточно показать, что все компактные подпространства пространства Y конечны, так как множество $Y \setminus \{0\}$ не замкнуто в Y, но пересекается по замкнутому множеству с каждым конечным подмножеством пространства Y.

Предположим, что Z — бесконечное компактное подпространство пространства Y. Так как каждое из пересечений $Z \cap \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$ конечно, найдется последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек множества Z, сходящаяся к 0 относительно естественной топологии вещественной прямой. Множество $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset Z$, наделенное топологией подпространства пространства Y, гомеоморфно дискретному пространству $D(\aleph_0)$ и замкнуто в Y, а это противоречит предположению, что Z компактно.

Данное пространство Y — непрерывный образ пространства $D(\aleph_0)$, являющегося k-пространством. Значит, непрерывный образ k-пространства не обязан быть k-пространством, даже если он совершенно нормален.

Заметим, что пространство Y является подпространством секвенциального пространства (а именно пространства X, описанного в примере 1.6.19). Таким образом, как показывает теорема 3.3.20, свойство быть k-пространством не наследственно (см. задачу 3.12.15). ∎

Из 3.3.8 и 2.4.15, однако, следует

3.3.25. Теорема. *Свойство быть k-пространством наследуется как замкнутыми, так и открытыми подпространствами.* ∎

Из теоремы 3.3.18 вытекает

3.3.26. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ является k-пространством в том и только том случае, если все X_s суть k-пространства.* ∎

Теорема Уайтхеда влечет за собой такой результат:

3.3.27. Теорема. *Декартово произведение $X \times Y$ локально компактного хаусдорфова пространства X и k-пространства Y является k-пространством.* ∎

Из теоремы 3.3.23 следует, что если непустое произведение $\prod_{s \in S} X_s$ является k-пространством, то k-пространствами являются и все X_s.

Докажем теперь теорему о декартовых произведениях, из которой будет вытекать важный факт: свойство быть k-пространством не мультипликативно.

3.3.28. Теорема. *Если f_i: $X_i \to Y_i$ — факторные отображения при $i = 1, 2$ и как X_1, так и $Y_1 \times Y_2$ являются k-пространствами, то декартово произведение $f = f_1 \times f_2$: $X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ является факторным отображением.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $X \times T$ есть k-пространство, то, каково бы ни было факторное отображение g: $Y \to T$, декартово произведение $h = \mathrm{id}_X \times g$: $X \times Y \to X \times T$ является факторным отображением. Для этого рассмотрим компактные подпространства $Z_1 \subset X$ и $Z_2 \subset T$, их произведение $Z = Z_1 \times Z_2$ и сужение h_Z: $h^{-1}(Z) \to Z$. Из равенства $h^{-1}(Z) = Z_1 \times g^{-1}(Z_2)$ следует, что $h_Z = \mathrm{id}_{Z_1} \times g_{Z_2}$. Значит, h_Z — факторное отображение по теореме Уайтхеда. Так как каждое компактное подпространство произведения $X \times T$ содержится в произведении его проекций в X и T, т. е. в компактном множестве вида $Z_1 \times Z_2$, из теоремы 3.3.22 следует, что отображение h факторно.

Рассмотрим теперь частный случай этой теоремы, а именно случай локально компактного хаусдорфова пространства X_1. Так как, в силу 3.3.27, произведение $X_1 \times Y_2$ является k-пространством, из установленного в предшествующем абзаце факта следует, что отображения

$$\mathrm{id}_{X_1} \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to X_1 \times Y_2 \quad \text{и} \quad f_1 \times \mathrm{id}_{Y_2}\colon X_1 \times Y_2 \to Y_1 \times Y_2$$

являются факторными. Следовательно, и отображение f как композиция этих отображений тоже является факторным.

Наконец, рассмотрим случай произвольного k-пространства X_1. Существуют локально компактное хаусдорфово пространство X' и факторное отображение $f'\colon X' \to X_1$ пространства X' на пространство X_1. Согласно частному случаю доказываемой теоремы, уже установленному выше, декартово произведение $(f_1 f') \times f_2$: $X' \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ является факторным отображением. Так как $(f_1 f') \times f_2 = (f_1 \times f_2)(f' \times \mathrm{id}_{X_2})$, то декартово произведение $f = f_1 \times f_2$ является факторным отображением в силу 2.4.5. ∎

3.3.29. Пример. В 2.4.20 мы рассмотрели подпространство $X_1 = Y_1 = R \setminus \{1/2, 1/3, \ldots\}$ вещественной прямой и факторпространство Y_2, полученное из $X_2 = R$ отождествлением множества всех положительных целых чисел в точку. Оба пространства Y_1 и Y_2 являются k-пространствами, и тем не менее их произведение $Y_1 \times Y_2$ k-пространством не является. Действительно, как показано в 2.4.5, декартово произведение $f = f_1 \times f_2$, где $f_1 = \mathrm{id}_{X_1}$ и f_2 — естественное факторное отображение, не является факторным отображением. Значит, из последней теоремы следует, что $Y_1 \times Y_2$ не может быть k-пространством. ∎

Мы завершаем этот параграф конструкцией, которая ведет от произвольного хаусдорфова пространства к некоторому k-пространству, состоящему из того же множества точек. Пусть X — любое хаусдорфово пространство. Легко проверяется, что семейство $\mathscr{C}$ всех подмножеств пространства X, пересекающихся с каждым компактным подпространством пространства X по замкнутому подпространству, обладает свойствами (C1)—(C3). Множество X вместе с топологией, порожденной семейством $\mathscr{C}$ замкнутых подмножеств, будет обозначаться через kX. Ясно, что подмножество пространства kX открыто в том и только том случае, если его пересечение с каждым компактным подпространством Z пространства X открыто в Z. Топология пространства kX сильнее топологии пространства X; значит, пространство kX хаусдорфово и формула $\varkappa_X(x)=x$ определяет непрерывное отображение $\varkappa_X$: $kX\to X$. Из теоремы 3.1.10 вытекает, что если Z — компактное подпространство пространства kX, то Z является также компактным подпространством пространства X. С другой стороны, если Z — компактное подпространство пространства X, то обе топологии на Z — а именно индуцированная топологией пространства X и индуцированная топологией пространства kX — совпадают; значит, Z в этом случае является компактным подпространством и пространства kX. Таким образом, пространства kX и X обладают одними и теми же компактными подпространствами, причем эти подпространства несут одну и ту же топологию. Следовательно, kX является k-пространством и, в силу теоремы 3.3.21, имеет место такой факт. По произвольному непрерывному отображению f: $X\to Y$ хаусдорфовых пространств X и Y определим отображение kf: $kX\to kY$, поставив в соответствие точке $x\in kX$ точку $f(x)\in kY$. Отображение kf непрерывно; ясно, что для kf выполняется равенство $f\varkappa_X=\varkappa_Y kf$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие локально компактного хаусдорфова пространства было введено П. С. Александровым в [1923]; в этой работе были объявлены теорема 3.3.4 и следствие 3.3.11 (доказательства были даны в [1924b]). Теорема 3.3.17 была доказана Уайтхедом в [1948]. Класс k-пространств был введен в статье Гэйла [1950] (где это понятие приписывается Гуревичу). Характеристика k-пространств, установленная в теореме 3.3.18, в статье Гэйла принята за определение, и затем доказано, что локально компактные хаусдорфовы пространства и пространства с первой аксиомой счетности являются k-пространствами. Статья Д. Коэна [1954] содержит теорему 3.3.27, построение kX и вторую половину доказательства теоремы 3.3.18. Келли доказал в [1955] теоремы 3.3.21 и 3.3.23. Теорема 3.3.25 была доказана в статье Архангельского [1965] (объявлена в [1963]), а теорема 3.3.28 получена Майклом в [1968a]. Первый пример двух k-пространств, произведение которых не является k-пространством, был приведен Даукером в [1952].

УПРАЖНЕНИЯ

3.3.A. Докажите, что каждое пространство X, представимое в виде объединения локально конечного семейства локально компактных замкнутых хаусдорфовых подпространств, само локально компактно (и хаусдорфово) (см. теорему 3.7.22).

3.3.B. (a) Проверьте, что каждое хаусдорфово пространство, которое можно представить в виде объединения некоторого семейства локально компактных открытых подпространств, само локально компактно.

(b) Приведите пример T_1-пространства, представимого в виде объединения двух открытых компактных хаусдорфовых подпространств, но не являющегося T_2-пространством.

3.3.C. Определите подпространство вещественной прямой, являющееся объединением двух локально компактных подпространств, которое тем не менее не локально компактно.

3.3.D (Пархоменко [1941]). Покажите, что каждое локально компактное хаусдорфово пространство можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на некоторое компактное хаусдорфово пространство.

Указание. Примените следствие 3.3.11 и теорему 3.2.11.

3.3.E. (a) (Келли [1955]). Проверьте, что декартово произведение $N^{\aleph_1}$ не является k-пространством.

Указание. Рассмотрите в $N^{\aleph_1}$ подмножество, состоящее из всех точек x, таких, что для некоторого $i > 1$ самое большее i координат точки x равны 1, а остальные координаты равны i.

(b) Покажите, что предел обратного спектра пространств Фреше — Урысона не обязан быть k-пространством.

Указание. Представьте пространство Y_1 из примера 3.3.29 в виде предела обратного спектра локально компактных хаусдорфовых пространств и примените теорему 3.3.17 и упр. 2.5.D(b).

3.3.F. Докажите теорему 3.3.27, применив характеристику k-пространств, данную в теореме 3.3.18.

3.3.G (Архангельский [1965]). Приведите пример k-пространства X, подмножества $A \subset X$ и точки $x \in \bar{A}$, таких, что $x \notin \overline{A \cap Z}$, каково бы ни было компактное подпространство $Z \subset X$.

Указание. Существует даже секвенциальное пространство с этим свойством.

3.3.H (Архангельский [1965]). Покажите, что для каждого хаусдорфова пространства существует ровно одно k-пространство, обладающее тем же множеством точек и теми же самыми компактными подпространствами.

3.3.I (Архангельский [1965]). (a) Заметьте, что каждое локально компактное хаусдорфово пространство является пространством точечно счетного типа.

(b) Докажите, что каждое пространство точечно счетного типа является k-пространством.

Указание. Видоизмените доказательство теоремы 3.9.5.

(c) Приведите пример k-пространства, не являющегося пространством точечно счетного типа.

3.4. ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ II: КОМПАКТНО-ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ

В § 2.6 мы определили топологию поточечной сходимости на множестве Y^X всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y как топологию, порожденную базой, состоящей из всех множеств вида $\bigcap_{i=1}^{k} M(A_i, U_i)$, где A_i — конечное множество в X и U_i — открытое в Y множество при $i = 1, 2, \ldots, k$ и где при любых $A \subset X$ и $B \subset Y$

$$M(A, B) = \{f \in Y^X\colon f(A) \subset B\}.$$

Компактно-открытая топология на Y^X — это топология, порожденная базой, состоящей из всех множеств вида $\bigcap_{i=1}^{k} M(C_i, U_i)$, где C_i — компактное множество в X и U_i — открытое множество в Y при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Как и в случае обеих топологий, о которых шла речь в § 2.6, каково бы ни было топологическое пространство Y и одноточечное пространство $\{p\}$, поставив в соответствие точке $y \in Y$ элемент $i_Y(y)$ пространства $Y^{\{p\}}$, где $[i_Y(y)](p) = y$, мы получаем гомеоморфизм пространства Y на пространство $Y^{\{p\}}$ с компактно-открытой топологией.

Формулы (11) из § 2.6 позволяют заключить, что

(1) $\Phi_g\colon Y^X \to Z^X$ непрерывно для каждого непрерывного отображения $g\colon Y \to Z$,

и

(2) $\Psi_h\colon Y^X \to Y^T$ непрерывно, каково бы ни было непрерывное отображение $h\colon T \to X$ в топологическое пространство X,

где $\Phi_g(f) = gf$ при $f \in Y^X$, $\Psi_h(f) = fh$ при $f \in Y^X$, и рассматриваемые пространства отображений несут компактно-открытую топологию.

Читатель легко проверит, что для каждого гомеоморфного вложения $i\colon Y \to Z$ и отображения $h\colon T \to X$ в топологическое пространство X, такого, что для каждого компактного $C \subset X$ найдется компактное $C' \subset T$, удовлетворяющее равенству $h(C') = C$ (см. задачу 5.5.11 и теорему 3.7.2), — в частности, для каждого непрерывного отображения $h\colon T \to X$ компактного пространства T на топологическое пространство X, — отображения Φ_i: $Y^X \to Z^X$ и Ψ_h: $Y^X \to Y^T$ являются гомеоморфными вложениями.

Заметим, что на R^X компактно-открытая топология обычно отличается от топологии равномерной сходимости (см. теоремы 4.2.17 и 4.2.19); действительно, это следует из примера 2.6.8, так как на R^N компактно-открытая топология совпадает с топологией поточечной сходимости. Компактно-открытая топология обычно отличается и от топологии поточечной сходимости. Читатель легко проверит, что множество I^I служит тому примером.

3.4.1. Теорема. *Для каждой пары X, Y топологических пространств компактно-открытая топология на Y^X является собственной.*

Доказательство. Пусть Z — произвольное топологическое пространство и f — отображение из $Y^{(Z\times X)}$. Возьмем множество $M(C, U) \subset Y^X$, где C — компактное подмножество в X и U — открытое множество в Y. В силу равенства (13) § 2.6,

$$\begin{aligned}[\Lambda(f)]^{-1}(M(C, U)) &= \{z \in Z\colon\ \{[\Lambda(f)](z)\}(x) \in U \ \text{ при } \ x \in C\} = \\ &= \{z \in Z\colon\ f(z, x) \in U \ \text{ при } \ x \in C\} = \\ &= \{z \in Z\colon\ f(\{z\} \times C) \subset U\} = \\ &= \{z \in Z\colon\ \{z\} \times C \subset f^{-1}(U)\}.\end{aligned}$$

Из леммы 3.1.15 вытекает, что последнее множество открыто. Так как множества $M(C, U)$ составляют предбазу топологии пространства Y^X, это означает, что $\Lambda(f) \in (Y^X)^Z$. ∎

Из последней теоремы, части (iii) предложения 2.6.12 и предпоследнего абзаца § 2.6 следует, что на R^X компактно-открытая топология слабее топологии равномерной сходимости. Так как одноточечные множества компактны и для каждого конечного $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ имеет место соотношение $M(A, U) = \bigcap_{i=1}^{k} M(\{x_i\}, U)$, компактно-открытая топология сильнее, чем топология поточечной сходимости.

3.4.2. Теорема. *Для каждой пары X, Z топологических пространств и произвольного локально компактного хаусдорфова пространства Y композиция Σ: $Z^Y \times Y^X \to Z^X$ является непрерывным отображением по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.*

Доказательство. Мы покажем, что если множество $C \subset X$ компактно, а множество $U \subset Z$ открыто, то прообраз $\Sigma^{-1}(M(C, U))$ открыт. Для каждой пары $(g, f) \in \Sigma^{-1}(M(C, U))$ имеем $gf(C) \subset U$, т. е. $f(C) \subset g^{-1}(U)$. Так как пространство Y локально компактно и хаусдорфово, из теоремы 3.3.2 следует, что существует открытое множество $W \subset Y$, для которого $f(C) \subset \subset W \subset \overline{W} \subset g^{-1}(U)$ и $\overline{W}$ компактно. Легко проверяется, что

$$(g, f) \in M(\overline{W}, U) \times M(C, W) \subset \Sigma^{-1}(M(C, U));$$

значит, множество $\Sigma^{-1}(M(C, U))$ открыто. ∎

3.4.3. Теорема. *Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то для каждого топологического пространства Y компактно-открытая топология на Y^X является приемлемой.*

Доказательство. Из теоремы 3.4.2, формулы (12) § 2.6 и предложения 2.6.11 следует, что компактно-открытая топология на Y^X является допустимой. Значит, достаточно применить теорему 3.4.1. ∎

Оказывается, предположение о локальной компактности пространства X нельзя заменить. Действительно, можно доказать (см. упр. 3.4.A), что если для вполне регулярного пространства X на множестве R^X существует приемлемая топология, то пространство X локально компактно.

Читатель легко докажет следующие аналоги предложений 2.6.9 и 2.6.10:

3.4.4. Предложение. *Для каждого семейства $\{X_s\}_{s \in S}$ непустых топологических пространств и любого топологического пространства Y комбинация отображений $\nabla\colon \prod_{s \in S} (Y^{X_s}) \to Y^{\left(\bigoplus_{s \in S} X_s\right)}$ является гомеоморфизмом по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.* ∎

3.4.5. Предложение. *Для любого топологического пространства X и произвольного семейства $\{Y_s\}_{s \in S}$ топологических пространств диагональное отображение $\triangle\colon \prod_{s \in S} (Y_s^X) \to \left(\prod_{s \in S} Y_s\right)^X$ является гомеоморфизмом относительно компактно-открытой топологии на пространствах отображений.* ∎

Рассмотрим теперь сужение экспоненциального отображения Λ на множество $Y^{(Z \times X)}$. Для простоты это сужение тоже будет обозначаться через Λ и называться *экспоненциальным отображением.*

3.4.6. Лемма. *Пусть X — хаусдорфово пространство. Тогда для любого топологического пространства Y и любой предбазы $\mathcal{P}$ пространства Y множества $M(C, U)$, где C — компактное множество в X и $U \in \mathcal{P}$, составляют предбазу пространства Y^X в компактно-открытой топологии.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждого компактного множества $C \subset X$, каждого открытого множества $U \subset Y$ и произвольного $f \in M(C, U)$ найдутся компактные мно-

жества $C_1, C_2, \ldots, C_k$ в X и элементы $U_1^1, U_2^1, \ldots, U_{n_1}^1, U_1^2, U_2^2, \ldots$
$\ldots, U_{n_k}^k$ семейства $\mathscr{P}$, такие, что

(3) $$f \in W = \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{j=1}^{n_i} M(C_i, U_j^i) \subset M(C, U).$$

По определению предбазы, для каждого $x \in C$ найдутся множества $U_1^x, U_2^x, \ldots, U_{n_x}^x \in \mathscr{P}$, удовлетворяющие условиям

(4) $$x \in \bigcap_{j=1}^{n_x} f^{-1}(U_j^x) \quad \text{и} \quad \bigcap_{j=1}^{n_x} U_j^x \subset U.$$

Из теоремы 3.1.3 следует, что найдется конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset C$, такое, что $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bigcap_{j=1}^{n_i} f^{-1}(U_j^i)$, где $U_j^i = U_j^{x_i}$ и $n_i = n_{x_i}$. По теореме 1.5.18, существует замкнутое покрытие $\{C_i\}_{i=1}^k$ пространства C, для которого

(5) $$C_i \subset \bigcap_{j=1}^{n_i} f^{-1}(U_j^i) \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

(это можно доказать и непосредственно, воспользовавшись регулярностью и компактностью C). Ясно, что множества C_i компактны, а из (5) следует, что отображение f принадлежит множеству W, определенному в (3). Остается доказать, что $W \subset M(C, U)$. Возьмем любое $g \in W$ и любую точку $x \in C$. Найдется $i \leqslant k$, для которого $x \in C_i$; тогда $g(x) \in \bigcap_{j=1}^{n_i} U_j^i$. Отсюда и из второй части соотношения (4) следует, что $g(x) \in U$; значит, $g \in M(C, U)$. ∎

3.4.7. Теорема. *Для каждой пары X, Z хаусдорфовых пространств и произвольного топологического пространства Y экспоненциальное отображение Λ: $Y^{(Z \times X)} \to (Y^X)^Z$ является гомеоморфным вложением по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.*

Доказательство. Если $C \subset X$, $U \subset Y$ и $C' \subset Z$, то очевидно, что

(6) $$\Lambda^{-1}[M(C', M(C, U))] = M(C' \times C, U).$$

Следовательно, последняя лемма влечет за собой непрерывность Λ. Так как отображение Λ взаимно однозначно, остается доказать, что для каждого открытого множества $W \subset Y^{(Z \times X)}$ его образ $\Lambda(W)$ открыт в подпространстве $\Lambda\left(Y^{(Z\times X)}\right)$ пространства $(Y^X)^Z$. Из равенства (6) вытекает, что

$$\Lambda(M(C'\times C,\ U))=\Lambda\left(Y^{(Z\times X)}\right)\cap M(C',\ M(C,\ U)).$$

Следовательно, в силу взаимной однозначности отображения Λ, достаточно показать, что множества

(7) $M(C'\times C,\ U)$, где $C\subset X$ и $C'\subset Z$ компактны и $U\subset Y$ открыто,

составляют предбазу пространства $Y^{(Z\times X)}$.

Возьмем компактное подмножество C'' пространства $Z\times X$, открытое множество U в Y и отображение $f\in M(C'',\ U)$. Так как C'' компактно, найдутся открытые множества $V_1,\ V_2,\ \ldots$ $\ldots,\ V_k\subset X$ и $V_1',\ V_2',\ \ldots,\ V_k'\subset Z$, для которых

(8) $$C''\subset\bigcup_{i=1}^{k}(V_i'\times V_i)\subset f^{-1}(U).$$

Найдем, как в доказательстве леммы 3.4.6, покрытие $\{C_i\}_{i=1}^k$ пространства C'', состоящее из компактных множеств, таких, что

(9) $$C_i\subset V_i'\times V_i\quad\text{при}\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Из формул (8) и (9) следует, что $f\in\bigcap_{i=1}^{k}M(p'(C_i)\times p(C_i),\ U)\subset$ $\subset M(C'',\ U)$, где $p'\colon Z\times X\to Z$ и $p\colon Z\times X\to X$ — проекции. Так как Z и X — хаусдорфовы пространства, множества $p'(C_i)$ и $p(C_i)$ компактны; тем самым доказано, что множества (7) образуют предбазу пространства $Y^{(Z\times X)}$. ∎

Из теорем 3.4.3 и 3.4.7 вытекает

3.4.8. Теорема. *Каковы бы ни были топологическое пространство Y, хаусдорфово пространство Z и локально компактное хаусдорфово пространство X, экспоненциальное отображение $\Lambda\colon Y^{(Z\times X)}\to$ $\to\left(Y^X\right)^Z$ является гомеоморфизмом относительно компактно-открытой топологии на пространствах отображений.* ∎

3.4.9. Теорема. *Если $Z\times X$ есть k-пространство, то для любого топологического пространства Y экспоненциальное отображение $\Lambda\colon Y^{(Z\times X)}\to\left(Y^X\right)^Z$ является гомеоморфизмом относительно компактно-открытой топологии на пространствах отображений.*

Доказательство. В силу теоремы 3.4.7, достаточно показать, что если $Z\times X$ является k-пространством, то для каждого $g\in$ $\in(Y^X)^Z$ отображение $\Lambda^{-1}(g)$ пространства $Z\times X$ в пространство Y непрерывно. Как следует из теоремы 3.3.21, достаточно доказать, что сужение $\Lambda^{-1}(g)\,|\,C$: $C\to Y$ непрерывно, каково бы ни было компактное подмножество C пространства $Z\times X$. Верно даже большее: сужение отображения $\Lambda^{-1}(g)$ на более широкое множество $Z\times X_0$, где X_0 — проекция множества C в пространство X, непрерывно. Действительно, так как X_0 компактно, из теоремы 3.4.3 мы заключаем, что экспоненциальное отображение Λ_0: $Y^{(Z\times X_0)}\to (Y^{X_0})^Z$ является отображением «на»; очевидно, что

$$\Lambda^{-1}(g)\,|\,(Z\times X_0)=\Lambda_0^{-1}(g_0),$$

где $g_0\in (Y^{X_0})^Z$ определено формулой $[g_0(z)](x)=[g(z)](x)$ при $x\in X_0$. ∎

3.4.10. Следствие. *Если X и Z — хаусдорфовы пространства с первой аксиомой счетности, то для каждого топологического пространства Y экспоненциальное отображение Λ: $Y^{(Z\times X)}\to (Y^X)^Z$ является гомеоморфизмом по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.* ∎

Покажем теперь, как представить пространство отображений произвольного k-пространства X в топологическое пространство Y в виде предела обратного спектра пространств отображений Y^C, где C — компактное подпространство пространства X.

Пусть $\mathscr{Z}(X)$ — семейство всех непустых компактных подмножеств хаусдорфова пространства X. Семейство $\mathscr{Z}(X)$ упорядочено отношением $\leqslant$, определенным так:

$$C_2\leqslant C_1 \text{ в том и только том случае, если } C_2\subset C_1.$$

Более того, семейство $\mathscr{Z}(X)$ направлено отношением $\leqslant$, так как объединение двух компактных множеств снова является компактным множеством. Для любых $C_1, C_2\in\mathscr{Z}(X)$, таких, что $C_2\leqslant C_1$, и для произвольного топологического пространства Y определено непрерывное отображение $\pi^{C_1}_{C_2}$: $Y^{C_1}\to Y^{C_2}$, а именно $\pi^{C_1}_{C_2}=\Psi_i$, где i: $C_2\to C_1$ — тождественное вложение. Ясно, что $\pi^{C_1}_{C_2}(f)=f\,|\,C_2$ при всех $f\in Y^{C_1}$.

3.4.11. Теорема. *Если X есть k-пространство, то для всех топологических пространств Y пространство Y^X с компактно-открытой топологией (с топологией поточечной сходимости) гомеоморфно пределу обратного спектра $\boldsymbol{S}(X)=\{Y^C, \pi^{C_1}_{C_2}, \mathscr{Z}(X)\}$ пространств Y^C с компактно-открытой топологией (с топологией поточечной сходимости).*

Доказательство. Для всех $f=\{f_C\}\in\varprojlim \boldsymbol{S}(X)$ отображения $\{f_C\}_{C\in\mathscr{Z}(X)}$ согласованы, и из теоремы 3.1.21 следует, что отображение $F(f)=\mathop{\nabla}\limits_{C\in\mathscr{Z}(X)} f_C$: $X\to Y$ непрерывно, т. е. $F(f)\in Y^X$. Ясно, что F взаимно однозначно отображает $\varprojlim \boldsymbol{S}(X)$ на Y^X.

Так как для всех $f=\{f_C\}$, всех $C\in\mathscr{Z}(X)$ и любого $A\subset C$

$F(f)\in M(A,\ U)$ в том и только том случае, если $f_C\in M(A,\ U)$,

то, по предложению 2.5.5, F — гомеоморфизм. ∎

Теперь мы обсудим, как топологические свойства пространства Y^X с компактно-открытой топологией зависят от свойств X и Y. Начнем с аксиом отделимости. Так как компактно-открытая топология сильнее, чем топология поточечной сходимости, из теоремы 2.6.4 немедленно следует, что если Y является T_i-пространством, то Y^X с компактно-открытой топологией тоже является T_i-пространством при $i\leqslant 2$. Покажем, что то же самое имеет место при $i=3$ и $3\frac{1}{2}$.

3.4.12. Лемма. *Каковы бы ни были топологические пространства X, Y, подмножество A пространства X и замкнутое подмножество B пространства Y, множество $M(A,\ B)$ замкнуто в пространстве Y^X с топологией поточечной сходимости и тем более в пространстве Y^X с компактно-открытой топологией.*

Доказательство. Ясно, что

$$M(A,\ B)=\bigcap_{x\in A} M(\{x\},\ B),$$

и так как множество $M(\{x\},\ B)=Y^X\setminus M(\{x\},\ Y\setminus B)$ замкнуто при всех $x\in A$, множество $M(A,\ B)$ замкнуто. ∎

3.4.13. Теорема. *Если Y — регулярное пространство, то пространство Y^X с компактно-открытой топологией тоже регулярно.*

Доказательство. В силу предложения 1.5.5, достаточно показать, что для каждого $f\in Y^X$ и каждой окрестности $M(C,\ U)$ точки f, где C — компактное множество в X и U — открытое множество в Y, найдется открытое множество $V\subset Y$, такое, что

$$f\in M(C,\ V)\subset\overline{M(C,\ V)}\subset M(C,\ U). \tag{10}$$

Из теорем 3.1.10 и 3.1.6 следует, что существует открытое множество $V\subset Y$, удовлетворяющее условию

$$f(C)\subset V\subset\overline{V}\subset U. \tag{11}$$

В силу последней леммы, множество $M(C,\ \overline{V})$ замкнуто; поэтому $\overline{M(C,\ V)}\subset M(C,\ \overline{V})$, и (10) следует из (11). ∎

3.4.14. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство и C — компактное подпространство в X. Приписывая каждому $f\in I^X$ число $\Xi(f)=\sup\limits_{x\in C} f(x)$, мы получаем функцию $\Xi\colon I^X\to I$, непрерывную относительно компактно-открытой топологии на I^X.*

Доказательство. Покажем, что, каков бы ни был открытый интервал $(a, b) \subset R$, прообраз $\Xi^{-1}(I \cap (a, b))$ открыт в I^X. Следствие 3.2.9 показывает, что $\sup\limits_{x \in C} f(x) < b$ в том и только том случае, если $f(x) < b$ при всех $x \in C$. Значит, для $A = \{x \in I: x \leqslant a\}$ и $B = \{x \in I: x < b\}$ имеем

$$\Xi^{-1}(I \cap (a, b)) = (I^X \setminus M(C, A)) \cap M(C, B).$$

Отсюда и из леммы 3.4.12 следует, что множество $\Xi^{-1}(I \cap (a, b))$ открыто в I^X. ∎

3.4.15. Теорема. *Если Y — тихоновское пространство, то пространство Y^X с компактно-открытой топологией тоже является тихоновским пространством.*

Доказательство. В силу предложения 1.5.8, достаточно показать, что для каждого $f \in Y^X$ и произвольной окрестности $M(C, U)$ функции f, где C — компактное множество в X и U — открытое множество в Y, найдется непрерывная функция $G: Y^X \to I$, такая, что $G(f) = 0$ и $G(h) = 1$ при $h \in Y^X \setminus M(C, U)$.

В силу теорем 3.1.10 и 3.1.7, существует функция $g: Y \to I$, для которой $g(f(C)) \subset \{0\}$ и $g(y) = 1$ при $y \in Y \setminus U$. Положим $G(h) = \sup\limits_{x \in C} gh(x)$ при всех $h \in Y^X$. Так как $G = \Xi\Phi_g$, последняя лемма показывает, что G является непрерывным отображением пространства Y^X в I. Ясно, что $G(f) = 0$; если $h \notin M(C, U)$, то найдется точка $x \in C$, для которой $h(x) \in Y \setminus U$. Тогда $gh(x) = 1$, откуда следует, что $G(h) = 1$. ∎

Как легко видеть, если пространство X дискретно, то пространство Y^X с компактно-открытой топологией гомеоморфно декартову произведению $\prod\limits_{x \in X} Y_x$, где $Y_x = Y$ при всех $x \in X$. Так как существует совершенно нормальное пространство, квадрат которого не нормален (см. упр. 2.3.12), то пространство Y^X с компактно-открытой топологией не обязано быть нормальным, даже если Y — совершенно нормальное пространство, а X — дискретное двухточечное пространство.

3.4.16. Теорема. *Если вес пространств X и Y не превосходит $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ и X локально компактно и хаусдорфово, то вес пространства Y^X с компактно-открытой топологией не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — база пространства X, такая, что $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, конечные объединения элементов семейства $\mathscr{B}$ принадлежат $\mathscr{B}$ и $\overline{V}$ компактно для каждого $V \in \mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{D}$ — база пространства Y, содержащая все конечные объединения своих элементов и такая, что $|\mathscr{D}| \leqslant \mathfrak{m}$. Мощность семейства $\mathscr{E}$ всех множеств $M(\overline{V}, W)$, где $V \in \mathscr{B}$ и $W \in \mathscr{D}$, не превосходит $\mathfrak{m}$. Значит, для завершения доказательства достаточно показать, что

$\mathscr{E}$ — предбаза пространства Y^X. Действительно, если $f \in Y^X$, C — компактное множество в X и U — открытое множество в Y, для которых $f \in M(C, U)$, то найдется $V \in \mathscr{B}$, удовлетворяющее условию $C \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(U)$, и найдется $W \in \mathscr{D}$, такое, что $f(\overline{V}) \subset W \subset U$. Следовательно, $f \in M(\overline{V}, W) \subset M(C, U)$ и $M(\overline{V}, W) \in \mathscr{E}$. ∎

Можно доказать (см. упр. 3.4.E), что если пространство R^X с компактно-открытой топологией удовлетворяет первой аксиоме счетности и X — тихоновское пространство с первой аксиомой счетности, то X локально компактно. Аналогично можно доказать (см. упр. 5.1.H), что если пространство R^X с компактно-открытой топологией удовлетворяет первой аксиоме счетности и X — метризуемое пространство, то пространство X локально компактно и обладает счетной базой.

В заключение этого параграфа приведем две характеристики компактных подпространств пространств отображений с компактно-открытой топологией. В этих характеристиках применяется понятие однообразной непрерывности семейства отображений. Как читатель увидит в гл. 8, это понятие является топологическим аналогом понятия равностепенной непрерывности семейства отображений. Мы говорим, что семейство F отображений пространства X в пространство Y *однообразно непрерывно*, если, каковы бы ни были $x \in X$, $y \in Y$ и окрестность V точки y, найдутся окрестность U точки x и окрестность W точки y, такие, что $\Omega[(F \cap M(\{x\}, W)) \times \Phi] \subset V$, т. е. условия $f \in F$ и $f(x) \in W$ влекут за собой включение $f(U) \subset V$. Из этого определения прямо следует, что если семейство F отображений пространства X в пространство Y однообразно непрерывно, то все отображения из F непрерывны, т. е. $F \subset Y^X$.

3.4.17. Лемма. *Если Y — регулярное пространство, то для каждого однообразно непрерывного семейства отображений $F \subset Y^X$ замыкание $\overline{F}$ множества F в произведении $\prod_{x \in X} Y_x$, где $Y_x = Y$ при всех $x \in X$, является однообразно непрерывным семейством отображений и, в частности, $\overline{F} \subset Y^X$.*

Доказательство. Возьмем произвольно точку $x_0 \in X$ и точку $y_0 \in Y$. Каждой окрестности V точки y_0 сопоставим окрестность V' этой точки, такую, что $\overline{V'} \subset V$. Так как семейство F однообразно непрерывно, для каждого V найдутся окрестность U_V точки x_0 и окрестность W_V точки y_0, удовлетворяющие условию $\Omega[(F \cap M(\{x_0\}, W_V)) \times U_V] \subset V'$. Отсюда следует, что

$$F \subset F(x_0, y_0, V) = \left\{ f \in \prod_{x \in X} Y_x \colon \text{если } f(x_0) \in W_V, \text{ то } f(U_V) \subset \overline{V'} \right\} =$$

$$= p_{x_0}^{-1}(Y \setminus W_V) \cup \bigcap_{x \in U_V} p_x^{-1}(\overline{V'}).$$

Последнее множество замкнуто; следовательно, $\overline{F} \subset F(x_0, y_0, V)$. Значит, множество $\overline{F}$ содержится в пересечении всех множеств $F(x, y, V)$, где $x \in X$, $y \in Y$ и V — произвольная окрестность точки y, а отсюда вытекает, что семейство отображений $\overline{F}$ однообразно непрерывно. ∎

3.4.18. Лемма. *Если $F \subset Y^X$ — однообразно непрерывное семейство отображений, то сужение $\Omega | F \times X$ отображения вычисления является непрерывным отображением по отношению к топологии поточечной сходимости на F.*

Доказательство. Для $f \in F$, $x \in X$, $y = f(x)$ и произвольной окрестности V точки y найдутся окрестность U точки x и окрестность W точки y, такие, что $\Omega[(F \cap M(\{x\}, W)) \times U] \subset V$. Достаточно теперь заметить, что множество $(F \cap M(\{x\}, W)) \times U$ является окрестностью точки (f, x) в пространстве $F \times X$. ∎

3.4.19. Лемма. *Пусть Y — регулярное пространство, X — произвольное топологическое пространство и Y^X — пространство всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y с топологией поточечной сходимости. Если множество $F \subset Y^X$ компактно и сужение $\Omega | F \times X$ отображения вычисления непрерывно, то F — однообразно непрерывное семейство отображений.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и V — произвольная окрестность точки y. Так как пространство Y регулярно, найдется окрестность W точки y, для которой $\overline{W} \subset V$. Из леммы 3.4.12 следует, что множество $F_0 = F \cap M(\{x\}, \overline{W})$ компактно. Так как $\Omega(F_0 \times \{x\}) \subset V$, то $F_0 \times \{x\} \subset (\Omega | F \times X)^{-1}(V)$ и, по лемме 3.1.15, найдется окрестность U точки x, такая, что $\Omega(F_0 \times U) \subset \subset V$. Очевидно, $\Omega[(F \cap M(\{x\}, W)) \times U] \subset \Omega(F_0 \times U)$; значит, семейство F однообразно непрерывно. ∎

3.4.20. Теорема Асколи. *Пусть X есть k-пространство, а Y — регулярное пространство. Тогда замкнутое подмножество F пространства Y^X с компактно-открытой топологией является компактом в том и только том случае, если F — однообразно непрерывное семейство отображений и замыкание множества $\Omega(F \times \{x\}) = \{f(x) : f \in F\} \subset Y$ компактно при всех $x \in X$.*

Доказательство. Предположим, что $F \subset Y^X$ — однообразно непрерывное семейство отображений и что множество $F_x = \overline{\Omega(F \times \{x\})} \subset Y$ компактно при всех $x \in X$. Декартово произведение $\prod_{x \in X} F_x$ компактно; значит, замыкание $\overline{F}$ множества F в произведении $\prod_{x \in X} Y_x$, где $Y_x = Y$ при всех $x \in X$, является компактом. По лемме 3.4.17, $\overline{F} \subset Y^X$ — однообразно непрерывное семейство отображений, и из леммы 3.4.18 следует, что сужение $\Omega_0 = \Omega | \overline{F} \times X$ непрерывно, т. е. что $\Omega_0 \in Y^{\overline{F} \times X}$. В силу теоремы 3.4.1, $\Lambda(\Omega_0) \in (Y^X)^{\bar{F}}$, где Y^X взято с компактно-открытой топологией. Так как $[\Lambda(\Omega_0)](f) = f$ при всех $f \in \bar{F}$, из теоремы 3.1.13 вытекает, что на $\bar{F}$ компактно-открытая топология совпадает с топологией поточечной сходимости. Значит, $F = \bar{F}$ и множество F — компакт.

Обратно, предположим, что F — компактное подмножество в Y^X. В силу леммы 3.4.19, достаточно показать, что сужение $\Omega|F \times X$ отображения вычисления непрерывно, так как компактность множеств $\Omega(F \times \{x\})$ следует немедленно из компактности F и непрерывности отображения $\Omega|F \times X$. Так как, в силу теоремы 3.3.27, пространство $F \times X$ является k-пространством, достаточно для каждого компактного пространства $C \subset X$ проверить непрерывность сужения $\Omega_0 = \Omega|F \times C$. По теореме 3.4.3, отображение вычисления Ω_C: $Y^C \times C \to Y$ непрерывно, а это влечет за собой непрерывность отображения Ω_0, так как $\Omega_0 = \Omega_C[(\Psi_i|F) \times \mathrm{id}_C]$, где i: $C \to X$ — тождественное вложение подпространства C в X. ∎

Следующая теорема — разновидность теоремы Асколи. В ее формулировке через $F|Z$ при $F \subset Y^X$ и $Z \subset X$ обозначено семейство сужений $\{f|Z$: $f \in F\} \subset Y^Z$.

3.4.21. Теорема. *Пусть X есть k-пространство, а Y — регулярное пространство. Тогда замкнутое подмножество F пространства Y^X с компактно-открытой топологией является компактом в том и только том случае, если $F|Z$ — однообразно непрерывное семейство отображений для всякого компактного подпространства $Z \subset X$ и замыкание множества $\Omega(F \times \{x\}) = \{f(x) : f \in F\} \subset Y$ компактно при всех $x \in X$.*

Доказательство. В силу теоремы Асколи, достаточно показать, что из условий теоремы вытекает компактность множества F. Последнее, однако, является следствием утверждений 2.5.7, 3.4.17, 3.4.20, 3.4.11 и 3.2.13. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Компактно-открытая топология была определена Фоксом в [1945]. Фокс доказал теоремы 3.4.1 и 3.4.3 и показал, что экспоненциальное отображение Λ в следствии 3.4.10 является взаимно однозначным отображением «на». Тот факт, что Λ — гомеоморфизм, был доказан Джексоном в [1952a]. Работа Джексона содержит также лемму 3.4.6 и теоремы 3.4.7 и 3.4.8. Теорема 3.4.9 доказана Моритой в [1956a]. Теоремы 3.4.13, 3.4.15 и 3.4.16 доказаны Аренсом в [1946]. Понятие однообразно непрерывного семейства отображений было введено Келли и Морсом (см. Келли [1955]). Они доказали также теоремы 3.4.21 и 3.4.20, причем последнюю при более ограничительном предположении, что пространство X локально компактно и хаусдорфово; обобщение на случай k-пространств было получено Бэгли и Янгом в [1966]. Различные варианты теоремы Асколи (обобщающие классический результат Асколи, полученный в 1883 г.) часто применяются в анализе — главным образом в доказательствах теорем существования (например, в доказательстве существования решения дифференциального уравнения $y'=u(x, y)$ при единственном предположении, что функция $u(x, y)$ непрерывна).

УПРАЖНЕНИЯ

3.4.A (Фокс [1945], Аренс [1946]). Докажите, что если X — вполне регулярное пространство и на R^X существует приемлемая топология, то пространство X локально компактно (см. упр. 2.6.E).

Указание. Определим f: $X \to R$, положив $f(x)=0$ при всех $x \in X$. Для произвольной точки $x_0 \in X$ возьмите любую ее окрестность V и окрестность W функции f, такие, что $\Omega(W \times V) \subset \subset (-1, 1)$, и покажите, что $\overline{V}$ компактно. С этой целью для произвольного семейства $\{V_s\}_{s \in S}$ открытых множеств в X, покрывающего $\overline{V}$, рассмотрите топологию на R^X, порожденную базой, состоящей из всех множеств вида $\bigcap_{i=1}^{k} M(A_i, U_i)$, где A_i замкнуто и содержится либо в некотором V_s, либо в $X \setminus \overline{V}$, а U_i — открытое множество в R при $i=1, 2, \ldots, k$.

3.4.B. Проверьте, что для произвольного семейства $\{X_s\}_{s \in S}$ хаусдорфовых пространств и произвольного семейства $\{Y_s\}_{s \in S}$ топологических пространств декартово произведение $\prod$: $\prod_{s \in S} Y_s^{X_s} \to \left(\prod_{s \in S} Y_s\right)^{\left(\prod_{s \in S} X_s\right)}$ является гомеоморфным вложением по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.

3.4.C. (a) Покажите, что если X — компакт, а Y — хаусдорфово пространство, то множество всех непрерывных отображений пространства X на пространство Y замкнуто в пространстве Y^X с компактно-открытой топологией. Проверьте, что предположение о компактности пространства X нельзя опустить.

(b) Пусть X — компакт и H — подпространство пространства X^X, состоящее из всех гомеоморфизмов пространства X на себя. Покажите, что, поставив в соответствие всякому $h \in H$ обратный к нему гомеоморфизм $h^{-1} \in H$, мы получим гомеоморфизм пространства H на себя (см. теорему 3.4.2 и пример 8.1.17). Проверьте, что предположение о компактности X существенно.

3.4.D (А. Стоун [1963]). Проверьте, что пространство всех непрерывных отображений отрезка I в тихоновский куб $I^{\mathfrak{c}}$ с компактно-открытой топологией не нормально (см. упр. 3.8.D).

Указание. Заметьте, что пространство I^I содержит $D(\aleph_0)$ в качестве замкнутого подпространства, затем примените предложение 3.4.5 и упр. 3.1.H(a).

3.4.E (Аренс [1946]). Хаусдорфово пространство X называется *хемикомпактным*, если в семействе всех компактных подпространств пространства X, упорядоченном отношением $\subset$, существует счетное конфинальное подсемейство.

(a) Докажите, что каждое хемикомпактное пространство с первой аксиомой счетности локально компактно.

(b) Приведите пример счетного хемикомпактного пространства, не являющегося k-пространством.

(c) Покажите, что в классе пространств со счетной базой хемикомпактность равносильна локальной компактности.

(d) Докажите, что если пространство R^X с компактно-открытой топологией удовлетворяет первой аксиоме счетности, а X является тихоновским пространством, то пространство X хемикомпактно.

3.4.F. Заметьте, что если X — тихоновское пространство, а Y содержит подпространство, гомеоморфное R, то пространство Y^X с компактно-открытой топологией компактно тогда и только тогда, когда Y компактно, а X дискретно.

3.4.G. (a) (Майкл [1961]). Покажите, что $nw(Y^X) \leqslant w(X)w(Y)$ по отношению к компактно-открытой топологии и по отношению к топологии поточечной сходимости на Y^X. Выведите отсюда, что если X и Y — пространства со счетной базой, то пространство Y^X наследственно сепарабельно как по отношению к компактно-открытой топологии, так и по отношению к топологии поточечной сходимости [1]).

Указание. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$ — базы мощности $\leqslant w(X)w(Y)$ пространств X и Y соответственно. Рассмотрите топологию на Y^X, порожденную базой, состоящей из множеств $\bigcap_{i=1}^{k} M(U_i, V_i)$, где $U_i \in \mathscr{B}$ и $V_i \in \mathscr{D}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$; примените теорему 3.4.1 и предложение 2.6.11.

(b) (Уорнер [1958]). Докажите, что если X — тихоновское пространство, то пространство R^X с компактно-открытой топологией содержит всюду плотное подпространство мощности $\leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ в том и только том случае, если существует взаимно однозначное непрерывное отображение пространства X на тихоновское пространство веса $\leqslant \mathfrak{m}$.

[1]) В работе Майкла [1961] нет понятия сети и сетевого веса. В ней доказывается именно последнее утверждение. — *Прим. перев.*

Указание. Выведите из упр. 3.2.J(a), что если h: $X \to Z$ — взаимно однозначное непрерывное отображение пространства X на пространство Z, то Ψ_h отображает R^Z на всюду плотное в R^X множество, и примените (a).

(c) Покажите, что, каковы бы ни были тихоновское пространство X и кардинал $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, следующие условия равносильны:

(1) *В пространстве* R^X *с компактно-открытой топологией есть всюду плотное множество мощности* $\leqslant \mathfrak{m}$.

(2) *В пространстве* R^X *с топологией поточечной сходимости есть всюду плотное множество мощности* $\leqslant \mathfrak{m}$.

Указание. См. упр. 3.2.I.

3.4.H (Кол [1969]). Назовем семейство F отображений пространства X в пространство Y *равномерно регулярным*, если, каково бы ни было открытое покрытие $\mathscr{V}$ пространства Y, найдется открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X, которое вписано в каждое покрытие вида $\{f^{-1}(V)\colon V \in \mathscr{V}\}$, где $f \in F$.

Докажите, что если X есть k-пространство, а Y — регулярное пространство, то замкнутое в пространстве Y^X с компактно-открытой топологией множество F компактно в том и только том случае, если F — равномерно регулярное семейство отображений и замыкание множества $\Omega(F \times \{x\}) = \{f(x)\colon f \in F\} \subset Y$ компактно для каждого $x \in X$.

Указание. Покажите, что если замыкание множества $\{f(x)\colon f \in F\}$ компактно при всех $x \in X$, то семейство F равномерно регулярно в том и только том случае, если оно однообразно непрерывно.

3.4.I. Покажите, что сложение, вычитание и умножение функций являются непрерывными отображениями произведения $R^X \times R^X$ в R^X и что умножение на вещественные числа является непрерывным отображением пространства $R^X \times R$ в R^X по отношению к компактно-открытой топологии на R^X.

3.5. КОМПАКТИФИКАЦИИ

Пара (Y, c), где Y — компакт, а c: $X \to Y$ — гомеоморфное вложение пространства X в Y, такое, что $\overline{c(X)} = Y$, называется *компактификацией пространства* X (*или компактным хаусдорфовым расширением* пространства X). Если некоторое пространство X вложимо в компакт Y, т. е. существует гомеоморфизм f: $X \to M$ на подпространство $M = f(X)$ пространства Y, то ясно, что пара $(\overline{f(X)}, if)$, где i — тождественное вложение пространства M в $\overline{M}$, является компактификацией пространства X. Следовательно, каждое пространство, вложимое в компакт, обладает компактификацией. Этот факт вместе с теоремами 3.2.6, 3.2.5 и 2.3.23 влечет за собой следующие две теоремы:

3.5.1. Теорема. *Пространство X обладает компактификацией в том и только том случае, если оно тихоновское.* ∎

3.5.2. Теорема. *Каждое тихоновское пространство X имеет такую компактификацию (Y, c), что $w(X) = w(Y)$.* ∎

В дальнейшем под компактификацией пространства X мы понимаем не только пару (Y, c), но и любой компакт Y, в который X можно вложить в качестве всюду плотного подпространства. Компактификации пространства X обычно обозначаются через cX, c_iX, γX и т. д., где c, c_i и γ символизируют гомеоморфные вложения пространства X в соответствующие компактификации. Таким образом, когда компактификация будет рассматриваться как пространство, будет каждый раз известно, какое гомеоморфное вложение используется: для компактификации cX пространства X имеем

$$c\colon X \to cX, \quad c|X\colon X \to c(X) \text{ — гомеоморфизм и } \overline{c(X)} = cX.$$

Назовем компактификации c_1X и c_2X пространства X *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $f\colon c_1X \to c_2X$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} c_1X \arrow[r, "f"] & c_2X \\ X \arrow[u, "c_1"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[u, "c_2"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $fc_1(x) = c_2(x)$ при всех $x \in X$. Таким образом, две компактификации пространства X эквивалентны, если они гомеоморфны и пространство X вложено в них одинаковым образом. Легко проверяется, что эквивалентность компактификаций является отношением эквивалентности.

В дальнейшем мы будем часто отождествлять эквивалентные компактификации; любой класс эквивалентности компактификаций будет рассматриваться как одна компактификация и будет обозначаться символом cX, где cX — произвольная компактификация этого класса.

Если cX — компактификация компакта X, то $c(X) = cX$ и c — гомеоморфизм. Значит, для любых двух компактификаций c_1X и c_2X компакта X отображение $f = c_2c_1^{-1}\colon c_1X \to c_2X$ является гомеоморфизмом и $fc_1(x) = c_2(x)$ при всех $x \in X$, т. е. любые две компактификации произвольного компакта эквивалентны. В частности, каждая компактификация компакта X эквивалентна компактификации (X, id_X), которую мы отождествляем с самим пространством X.

Теоремы 1.5.3 и 1.5.6 приводят к следующему результату:

3.5.3. Теорема. *Для каждой компактификации Y пространства X имеем:* $|Y| \leqslant \exp\exp d(X)$ и $w(Y) \leqslant \exp d(X)$. ∎

Из последней теоремы и теоремы 3.2.5 вытекает, что все компактификации пространства X (с точностью до эквивалентности) являются подпространствами тихоновского куба $I^{\exp d(X)}$. Это позволяет для любого пространства X рассмотреть семейство $\mathscr{C}(X)$ всех его компактификаций. Строго говоря, $\mathscr{C}(X)$ является семейством классов эквивалентных компактификаций пространства X, являющихся подпространствами тихоновского куба $I^{\exp d(X)}$.

Определим теперь упорядочение на семействе $\mathscr{C}(X)$. Положим $c_2X \leqslant c_1X$, если существует непрерывное отображение $f\colon c_1X \to c_2X$, такое, что $fc_1 = c_2$. Таким образом, неравенство $c_2X \leqslant c_1X$ означает, что c_1X можно отобразить на c_2X таким образом, что каждая точка пространства X, рассматриваемого как подпространство каждого из пространств c_1X, c_2X, перейдет в себя. Как легко видеть, если $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_3X$, то $c_1X \leqslant c_3X$. Значит, чтобы показать, что $\leqslant$ является упорядочением на семействе $\mathscr{C}(X)$, достаточно доказать следующую теорему.

3.5.4. Теорема. *Компактификации c_1X и c_2X пространства X эквивалентны в том и только том случае, если $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$.*

Доказательство. Ясно, что если c_1X и c_2X эквивалентны, то $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$.

Предположим теперь, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$. Пусть $f_1\colon c_1X \to c_2X$ и $f_2\colon c_2X \to c_1X$ удовлетворяют условиям: $f_1c_1 = c_2$ и $f_2c_2 = c_1$. В силу теоремы 3.1.13, чтобы доказать, что f_1 является гомеоморфизмом, откуда будет следовать, что c_1X и c_2X эквивалентны, достаточно показать, что

$$(1) \qquad f_2f_1(x) = x \quad \text{при всех} \quad x \in c_1X.$$

Композиция $f_2f_1\colon c_1X \to c_1X$ удовлетворяет равенству $f_2f_1c_1 = c_1$; поэтому $f_2f_1(x) = x$ при всех $x \in c_1(X) \subset c_1X$. Это означает, что сужение отображения f_2f_1 на всюду плотное подпространство $c_1(X)$ пространства c_1X совпадает с сужением тождественного отображения id_{c_1X} на $c_1(X)$; соотношение (1) вытекает теперь из теоремы 2.1.9. ∎

Другое необходимое и достаточное условие эквивалентности двух компактификаций содержит следующая теорема.

3.5.5. Теорема. *Компактификации c_1X и c_2X пространства X эквивалентны в том и только том случае, если для любых замкнутых в X множеств A и B выполняется условие:*

$$(2) \qquad \overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \varnothing \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad \overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \varnothing.$$

Доказательство. Ясно, что если c_1X и c_2X эквивалентны, то условие (2) выполняется для каждой пары A, B замкнутых в X множеств.

Пусть теперь компактификации c_1X и c_2X таковы, что условие (2) выполняется для каждой пары замкнутых множеств в X. В силу теоремы 3.2.1, отображения

$$c_1h_2\colon c_2(X)\to c_1X \quad \text{и} \quad c_2h_1\colon c_1(X)\to c_2X,$$

где $h_i\colon c_i(X)\to X$ — обратные отображения к гомеоморфизмам $c_i|X$ при $i=1, 2$, продолжаются до отображений

$$C_2\colon c_2X\to c_1X \quad \text{и} \quad C_1\colon c_1X\to c_2X.$$

Так как, очевидно, $C_2c_2=c_1$ и $C_1c_1=c_2$, из теоремы 3.5.4 вытекает эквивалентность c_1X и c_2X. ∎

Пусть cX — произвольная компактификация пространства X. Множество $cX\setminus c(X)$, т. е. множество всех точек, которыми cX отличается от $c(X)$, называется *наростом* компактификации cX. Главное свойство наростов устанавливается ниже в теореме 3.5.7. В доказательстве этой теоремы применяется следующая лемма.

3.5.6. Лемма. *Пусть A — всюду плотное подпространство хаусдорфова пространства X и $f\colon X\to Y$ — отображение пространства X в произвольное пространство Y. Если $f|A\colon A\to f(A)\subset Y$ — гомеоморфизм, то $f(X\setminus A)\cap f(A)=\varnothing$.*

Доказательство. Пусть существует точка $x\in X\setminus A$, для которой $f(x)\in f(A)$. Не теряя общности, можно предположить, что $X=A\cup\{x\}$ и $Y=f(A)$. Пусть $f(x)=f(y)$, где $y\in A$, и пусть U, $V\subset X$ — непересекающиеся окрестности точек x, y соответственно. Множество $f(A\setminus V)=(f|A)(A\setminus V)$ замкнуто в $Y=f(A)$, поэтому множество $f^{-1}f(A\setminus V)=A\setminus V$ замкнуто в X. Так как $x\notin \overline{V}$, это доказывает замкнутость множества A в X, и мы получили противоречие. ∎

3.5.7. Теорема. *Если c_1X и c_2X — компактификации пространства X и отображение $f\colon c_1X\to c_2X$ удовлетворяет условию $fc_1=c_2$, то*

$$f(c_1(X))=c_2(X) \quad \text{и} \quad f(c_1X\setminus c_1(X))=c_2X\setminus c_2(X).$$

Доказательство. Первое из равенств следует из условия $fc_1=c_2$. Второе равенство вытекает из первого равенства, последней леммы и того, что $f(c_1X)=c_2X$. ∎

Оказывается, некоторые классы тихоновских пространств можно охарактеризовать свойствами наростов компактификаций. Мы покажем, как охарактеризовать таким образом локально компактные хаусдорфовы пространства. Другой важный класс пространств, допускающих такую характеристику, класс полных по Чеху пространств, будет рассмотрен в § 3.9 (см. также упр. 3.5.G, теорему 3.11.10, задачи 3.12.24, 3.12.25 и 8.5.13(b)).

3.5.8. Теорема. *Для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X локально компактно.*

(ii) *Для каждой компактификации cX пространства X нарост $cX \setminus c(X)$ замкнут в cX.*

(iii) *Существует компактификация cX пространства X, для которой нарост $cX \setminus c(X)$ замкнут в cX.*

Доказательство. Импликации (ii)$\Rightarrow$(iii) и (iii)$\Rightarrow$(i) очевидны; импликация (i)$\Rightarrow$(ii) вытекает из теоремы 3.3.9. ∎

В следующей теореме устанавливается важное свойство семейства $\mathscr{C}(X)$ всех компактификаций произвольного пространства X.

3.5.9. Теорема. *Каждое непустое подсемейство $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}(X)$ обладает точной верхней гранью в $\mathscr{C}(X)$ по отношению к упорядочению $\leqslant$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}_0 = \{c_sX\}_{s \in S}$. Рассмотрим декартово произведение $\prod_{s \in S} c_sX$ и отображение $c_S = \mathop{\triangle}_{s \in S} c_s\colon X \to \prod_{s \in S} c_sX$, которое по теореме о диагональном отображении является гомеоморфным вложением. Покажем, что $c_SX = \overline{c_SX} \subset \prod_{s \in S} c_sX$ является наименьшей верхней гранью семейства $\mathscr{C}_0$.

Так как проекция $p_s\colon \prod_{s \in S} c_sX \to c_sX$ удовлетворяет условию $p_sc_S = c_s$, имеем $c_sX \leqslant c_SX$ при всех $s \in S$. Пусть cX — некоторая компактификация пространства X, для которой $c_sX \leqslant cX$ при всех $s \in S$, т. е. существуют отображения $f_s\colon cX \to c_sX$, такие, что $f_sc = c_s$ при всех $s \in S$. Легко видеть, что диагональное отображение $F = \mathop{\triangle}_{s \in S} f_s$ удовлетворяет условию $Fc = c_S$; значит, $c_SX \leqslant cX$. ∎

3.5.10. Следствие. *Для каждого тихоновского пространства X существует наибольший элемент относительно упорядочения $\leqslant$ на $\mathscr{C}(X)$.* ∎

Наибольший элемент семейства $\mathscr{C}(X)$ называется *стоун-чеховской компактификацией* (или *стоун-чеховским расширением*) *пространства X* или *максимальной компактификацией пространства X* и обозначается через βX. Эта компактификация будет подробно изучена в следующем параграфе.

В связи с последней теоремой возникает вопрос, для каких пространств X каждое подсемейство семейства $\mathscr{C}$ обладает наибольшей нижней гранью. Если для подсемейства $\mathscr{C}_0$ семейства

$\mathscr{C}(X)$ множество $\mathscr{C}'_0=\{c'X\colon c'X\leqslant cX$ при всех $cX\in\mathscr{C}_0\}$ непусто, то его наименьшая верхняя грань будет наибольшей нижней гранью семейства $\mathscr{C}_0$. Следовательно, наибольшие нижние грани в $\mathscr{C}(X)$ существуют в том и только том случае, если в $\mathscr{C}(X)$ есть наименьший элемент. Оказывается, это условие эквивалентно локальной компактности пространства X.

3.5.11. Теорема об александровской компактификации. *Каждое некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X обладает компактификацией αX с одноточечным наростом. Эта компактификация является наименьшим элементом семейства $\mathscr{C}(X)$ по отношению к упорядочению $\leqslant$, а ее вес равен весу пространства X.*

Доказательство. Возьмем любую точку $\Omega\notin X$ и положим $\alpha X=X\cup\{\Omega\}$. Назовем открытыми множествами в αX множества вида $\{\Omega\}\cup(X\setminus F)$, где F — любое компактное множество в X, а также все открытые в X множества. Легко видеть, что αX с этой топологией является хаусдорфовым пространством и что отображение $\alpha\colon X\to\alpha X$, определенное правилом $\alpha(x)=x$, является гомеоморфным вложением, образ при котором $\alpha(X)=X$ всюду плотен в αX. Покажем, что пространство αX компактно. Пусть $\{U_s\}_{s\in S}$ — произвольное открытое покрытие пространства αX. Существует $s_0\in S$, такое, что $\Omega\in U_{s_0}$, и из определения топологии на αX следует, что множество $F=X\setminus U_s$ компактно. По теореме 3.1.3, найдется конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}\subset S$, для которого $F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_s$; значит, покрытие $\{U_s\}_{s\in S}$ содержит конечное подпокрытие $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{k}$.

Соотношение $cX\geqslant\alpha X$, где cX — любая компактификация пространства X, будет доказано, если мы покажем, что отображение f пространства cX в пространство αX, определенное правилом

$$f(x)=\begin{cases}\alpha(c^{-1}(x)) & \text{при}\quad x\in c(X),\\ \Omega & \text{при}\quad x\in cX\setminus c(X),\end{cases}$$

удовлетворяет условию $fc=\alpha$ и непрерывно. Равенство $fc=\alpha$ следует прямо из определения, а по теореме 3.5.8 прообраз каждого открытого в αX множества открыт в cX — либо как открытое подмножество открытого подпространства $c(X)$, либо как дополнение компактного множества в cX.

Последняя часть теоремы вытекает из 3.1.20. ∎

Компактификация αX локально компактного хаусдорфова некомпактного пространства X называется *александровской компактификацией*, *одноточечной компактификацией* или *мини-*

мальной компактификацией этого пространства. Можно сказать, что она получается присоединением к пространству X «бесконечно удаленной точки».

3.5.12. Теорема. *Если в семействе $\mathscr{C}(X)$ всех компактификаций некомпактного тихоновского пространства X есть наименьший элемент cX по отношению к упорядочению $\leqslant$, то X локально компактно и cX эквивалентно александровской компактификации αX пространства X.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что нарост $cX\setminus c(X)$ является одноточечным множеством, так как это влечет за собой локальную компактность X и, в силу теорем 3.5.11 и 3.5.4, эквивалентность cX и αX.

Предположим, что нарост $cX\setminus c(X)$ содержит две различные точки x_1 и x_2. Пространство $X_1 = cX\setminus\{x_1, x_2\}$ локально компактно, и александровская компактификация пространства X_1 является компактификацией также и пространства X, т. е. $\alpha X_1 = c_1X$. Так как $cX \leqslant c_1X$, существует отображение $f: c_1X \to cX$, такое, что $f|c(X) = \mathrm{id}_{c(X)}$. В силу теоремы 2.1.9, $f|X_1 = \mathrm{id}_{X_1}$; применив теорему 3.5.7 к компактификациям c_1X и cX пространства X_1, заключаем, что $f(\{\Omega\}) = \{x_1, x_2\}$, а это невозможно. ∎

3.5.13. Теорема. *Если компакт Y является непрерывным образом нароста $cX\setminus c(X)$ компактификации cX локально компактного хаусдорфова пространства X, то у пространства X есть компактификация $c'X \leqslant cX$, нарост которой гомеоморфен Y.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение пространства $cX\setminus c(X)$ на Y. Из теорем 3.5.8 и 2.4.13 следует, что разбиение пространства cX на прообразы точек при f и одноточечные подмножества множества $c(X)$ полунепрерывно сверху. Отношение эквивалентности E, отвечающее этому разбиению пространства cX, замкнуто, а факторпространство cX/E является компактом. Подпространство $c(X)$ открыто в cX. Поэтому из предложения 2.4.15 следует, что пространство $cX/E = c'X$, где $c' = qc$ и $q: cX \to cX/E$ — естественное факторное отображение, является компактификацией пространства X с наростом, гомеоморфным Y. ∎

3.5.14. Примеры. Окружность S^1 и отрезок I являются компактификациями вещественной прямой R; при этом окружность S^1 является александровской компактификацией прямой R.

Вообще, n-мерная сфера S^n и n-мерный куб I^n являются компактификациями евклидова n-мерного пространства R^n; при этом сфера S^n является александровской компактификацией R^n.

Пространство W, описанное в примере 3.1.27, является александровской компактификацией своего подпространства W_0.

Пространство $A(\mathfrak{m})$, определенное в 1.4.20, является александровской компактификацией дискретного пространства $D(\mathfrak{m})$. Каждая конечная сумма $A(\mathfrak{m})\oplus A(\mathfrak{m})\oplus \ldots \oplus A(\mathfrak{m})$ также является компактификацией пространства $D(\mathfrak{m})$. Двойная окружность Александрова, определенная в 3.1.26, является компактификацией дискретного пространства $D(\mathfrak{c})$; эта компактификация не сравнима (по отношению к упорядочению $\leqslant$) с компактификацией $A(\mathfrak{c})\oplus A(\mathfrak{c})$ пространства $D(\mathfrak{c})$. ∎

3.5.15. Пример. Рассмотрим подпространство $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ плоскости R^2, где $X_1 = \{0\} \times [-1, 1]$, $X_2 = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right): 0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\pi\right\}$ и X_3 — какая-нибудь дуга с концами в точках $(0, -1)$ и $\left(\frac{2}{3}\pi, -1\right)$, которая не имеет других общих точек с $X_1 \cup X_2$. Так как X — замкнутое и ограниченное множество в R^2, пространство X является компактом. Подпространство $X \setminus X_1$ пространства X гомеоморфно R и всюду плотно в X, так что X является компактификацией пространства R. Нарост этой компактификации гомеоморфен I. Заменив $X \setminus X_1$ подходящим дискретным подпространством Y мощности $\aleph_0$, мы получим компактификацию $Y \cup X_1$ пространства $D(\aleph_0)$, нарост которой гомеоморфен I.

Из теоремы 3.5.13 следует, что каждый компакт, являющийся непрерывным образом отрезка I (см. задачу 6.3.14), служит наростом некоторой компактификации пространства R, а также наростом некоторой компактификации пространства $D(\aleph_0)$. Из примера 3.1.26 мы заключаем, что каждое такое пространство является также наростом некоторой компактификации пространства $D(\mathfrak{c})$ (см. упр. 3.5.H). ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Компактификации (открытых подмножеств плоскости) впервые изучал Каратеодори в [1913] в связи с некоторыми проблемами, касающимися аналитических функций. Ранее похожие конструкции использовались в различных теориях вещественных чисел. Теоремы 3.5.1 и 3.5.2 можно найти в работе Тихонова [1930]. Упорядочение $\leqslant$ в семействе всех компактификаций произвольного пространства было определено Люббеном в [1941], где были доказаны теоремы 3.5.9 и 3.5.12. Существование наибольшей компактификации было установлено ранее Чехом в [1937] и М. Стоуном в [1937]. Теорема 3.5.5 доказана Смирновым в [1952] (приведенное нами доказательство принадлежит Мрувке [1956a]). Теорема 3.5.11 была доказана П. С. Александровым в [1924b]. Теорема 3.5.13 являлась частью топологического фольклора в тридцатые годы (по крайней мере в классе метризуемых пространств); см. заключительные замечания в книгах Хаусдорфа [1938] и Куратовского [1938]. Видимо, впервые она была сформулирована в явном виде в работе Магилла [1966].

УПРАЖНЕНИЯ

3.5.A. Покажите, что если c_sX_s — компактификация пространства X_s при $s \in S$, то произведение $\prod_{s\in S} c_sX_s$ является компактификацией произведения $\prod_{s\in S} X_s$.

3.5.B. Пусть cX — компактификация пространства X и E — замкнутое отношение эквивалентности на cX. Покажите, что если все одноточечные подмножества множества $c(X)$ являются классами эквивалентности отношения E, то cX/E — тоже компактификация пространства X.

3.5.C. Покажите, что предел обратного спектра $\{c_\sigma X, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ компактификаций пространства X, где $c_\rho = \pi^\sigma_\rho c_\sigma$ при любых $\sigma, \rho \in \Sigma$, таких, что $\rho \leqslant \sigma$, является компактификацией пространства X.

3.5.D. Обратите внимание на то, что любые две компактификации c_1N и c_2N пространства $N = D(\aleph_0)$, обладающие конечными наростами одной мощности, гомеоморфны, и что тем не менее они могут быть не сравнимы по отношению к упорядочению $\leqslant$. Приведите пример двух негомеоморфных компактификаций пространства $D(\mathfrak{c})$, наросты которых двухточечны.

3.5.E. Покажите, что максимальную компактификацию тихоновского пространства X можно получить, взяв в $\prod_{f\in\mathcal{F}} I_f$ замыкание образа пространства X при отображении $\triangle_{f\in\mathcal{F}} f$, где $\mathcal{F}$ — семейство всех непрерывных отображений пространства X в отрезок I и $I_f = I$ при $f \in \mathcal{F}$.

3.5.F. Докажите, что для каждой компактификации cX пространства X существует компактификация $c'X \leqslant cX$, такая, что $w(c'X) = w(X)$.

3.5.G. (а) (Архангельский [1965]). Докажите, что для произвольного тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X точечно счетного типа.*

(2) *Какова бы ни была компактификация cX пространства X, подпространство $c(X)$ можно представить в виде объединения некоторого семейства G_δ-множеств в cX.*

(3) *Существует компактификация cX пространства X, для которой $c(X)$ представимо в виде объединения некоторого семейства G_δ-множеств в cX.*

(b) Покажите, что для любого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X хемикомпактно.*

(2) *Для каждой компактификации cX пространства X имеет место неравенство $\chi(cX\setminus c(X), cX)\leqslant \aleph_0$.*

(3) *Существует компактификация cX пространства X, для которой $\chi(cX\setminus c(X), cX)\leqslant \aleph_0$.*

3.5.H. Покажите, что для каждого компакта X, такого, что $d(X)\leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, найдется компактификация дискретного пространства $D(\mathfrak{m})$, нарост которой гомеоморфен X.

Указание. Примените упр. 3.1.G и теорему 3.5.13.

Замечание. Как доказано Паровиченко в [1963], каждый компакт X веса $\leqslant \aleph_1$ является непрерывным образом нароста $\beta N\setminus N$ (см. доказательство в работе Уокера [1974]), так что (в силу теоремы 3.5.13) найдется компактификация пространства N, нарост которой гомеоморфен X.

3.5.I. Докажите, что окружность и отрезок являются единственными компактификациями вещественной прямой, наросты которых конечны.

Указание. Примените заключительную часть примера 2.2.8.

3.5.J (Леви и Макдауэлл [1975], Ван Дауэн [1977]). (a) Покажите, что для любого тихоновского пространства X все его компактификации имеют одну и ту же плотность.

Указание. Примените упр. 3.1.C(c) и заметьте, что неприводимое замкнутое отображение не может понизить плотность.

(b) Приведите пример тихоновского пространства X и его компактификации cX, таких, что $d(cX)< d(X)$.

Указание. Воспользуйтесь следствием 2.3.16.

3.6. СТОУН-ЧЕХОВСКАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ И РАСШИРЕНИЕ ВОЛМЭНА

Напомним, что наибольший элемент в семействе всех компактификаций тихоновского пространства X называется компактификацией Стоуна — Чеха пространства X и обозначается через βX.

Для простоты в этом параграфе мы будем отождествлять пространство X с подпространством $c(X)$ любой его компактификации cX, т. е. будем предполагать, что X является подпространством любой своей компактификации cX (это предполагается и в некоторых других местах книги уже без специальных оговорок). Тождественное вложение подпространства X в cX будет обозначаться через c. Отождествление X и $c(X)$ позволяет ставить и обсуждать вопрос о возможности продолжения отображений пространства X на его компактификации.

3.6.1. Теорема. *Каждое непрерывное отображение f: $X \to Z$ произвольного тихоновского пространства X в любой компакт Z можно продолжить до непрерывного отображения F: $\beta X \to Z$.*

Если каждое непрерывное отображение тихоновского пространства X в компакт можно непрерывно продолжить на некоторую компактификацию γX пространства X, то γX эквивалентна стоун-чеховской компактификации пространства X.

Доказательство. Теорема о диагональном отображении показывает, что $c = \beta \triangle f$: $X \to \beta X \times Z$ является гомеоморфным вложением, так что $cX = \overline{c(X)} \subset \beta X \times Z$ — компактификация пространства X. В силу максимальности компактификации βX, существует непрерывное отображение g: $\beta X \to cX$, такое, что $g\beta = c$. Пусть p: $cX \to Z$ — сужение на cX проекции пространства $\beta X \times Z$ на Z; положим $F = pg$: $\beta X \to Z$. Так как $F\beta = pg\beta = pc = f$, отображение F является продолжением отображения f.

Если какая-нибудь компактификация γX тихоновского пространства X обладает свойством, сформулированным во второй части теоремы, то найдется продолжение B: $\gamma X \to \beta X$ тождественного вложения β: $X \to \beta X$. Имеем тогда $B\gamma = \beta$, т. е. $\beta X \leqslant \gamma X$, откуда следует, что компактификации γX и βX эквивалентны. ∎

Из теоремы 3.6.1 вытекает ряд важных следствий.

3.6.2. Следствие. *Замыкания в βX любых двух вполне отделенных подмножеств тихоновского пространства X не пересекаются.*

Если в компактификации γX тихоновского пространства X замыкания любых двух вполне отделенных подмножеств пространства X не пересекаются, то γX эквивалентна стоун-чеховской компактификации пространства X.

Доказательство. Пусть A, B — любые два вполне отделенных подмножества тихоновского пространства X и f: $X \to I$ — непрерывная функция, отделяющая A и B. В силу последней теоремы, f можно продолжить до непрерывной функции F: $\beta X \to I$. Значит, $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$, так как $\bar{A} \subset F^{-1}(0)$ и $\bar{B} \subset F^{-1}(1)$.

Если компактификация γX тихоновского пространства X обладает свойством, сформулированным во второй части следствия, то вполне отделенные подмножества пространства X и (в силу леммы Урысона и теоремы 3.1.9) только такие подмножества имеют непересекающиеся замыкания в γX. То же самое выполняется и для βX, так что компактификации γX и βX эквивалентны по теореме 3.5.5. ∎

3.6.3. Следствие. *Каждое непрерывное отображение f: $X \to I$ тихоновского пространства X в отрезок I продолжается до непрерывной функции F: $\beta X \to I$.*

Если каждая непрерывная функция на тихоновском пространстве X со значениями в отрезке I непрерывно продолжается на компактификацию γX пространства X, то γX эквивалентна стоун-чеховской компактификации пространства X. ∎

3.6.4. Следствие. *Для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств нормального пространства X их замыкания в βX не пересекаются.*

Если компактификация γX тихоновского пространства X обладает тем свойством, что, какова бы ни была пара непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X, их замыкания в γX не пересекаются, то X нормально и γX эквивалентна стоун-чеховской компактификации пространства X. ∎

3.6.5. Следствие. *Для каждого открыто-замкнутого подмножества A тихоновского пространства X замыкание $\bar{A}$ множества A в βX открыто и замкнуто.* ∎

Пусть X и Y — тихоновские пространства, cX и $c'Y$ — компактификации пространств X и Y соответственно, и пусть f: $X \to Y$ — любое непрерывное отображение. Если существует непрерывное отображение F: $cX \to c'Y$, такое, что $F(x) = f(x)$ при $x \in X$, то мы говорим, что отображение f *продолжается на компактификации cX и $c'Y$*, и называем F *продолжением отображения f на cX и $c'Y$*. Эта модификация понятия продолжаемости позволяет просто сформулировать следующее важное свойство стоун-чеховского расширения.

3.6.6. Следствие. *Для каждой компактификации γY тихоновского пространства Y и любого непрерывного отображения f: $X \to Y$ тихоновского пространства X в пространство Y существует продолжение F: $\beta X \to \gamma Y$ на βX и γY.* ∎

3.6.7. Следствие. *Если M — подпространство тихоновского пространства X и каждая непрерывная функция f: $M \to I$ непрерывно продолжается на X, то замыкание $\bar{M}$ множества M в βX является компактификацией пространства M, эквивалентной βM. Если, сверх того, M всюду плотно в X, то $\beta X = \beta M$.* ∎

Последнее следствие и теорема Титце — Урысона приводят к таким утверждениям.

3.6.8. Следствие. *Для каждого замкнутого подпространства M нормального пространства X замыкание $\bar{M}$ множества M в βX является компактификацией пространства M, эквивалентной βM.* ∎

3.6.9. Следствие. *Для каждого тихоновского пространства X и любого пространства T, такого, что $X \subset T \subset \beta X$, имеет место равенство $\beta T = \beta X$.* ∎

3.6.10. Пример. Как показано в примере 3.1.27, всякая непрерывная функция $f\colon W_0 \to I$, определенная на пространстве W_0 всех счетных ординалов, продолжается на пространство W всех ординалов $\leqslant \omega_1$; имеем, следовательно, $W = \beta W_0$.

Пространство W_0 имеет только одну компактификацию. Действительно, александровская компактификация αW_0 получается отождествлением нароста $\beta W_0 \setminus W_0$ в точку. Значит, для нашего пространства $\alpha W_0 = \beta W_0$. Вообще, равенство $\alpha X = \beta X$ выполняется для любого пространства X вида $\beta Y \setminus \{x\}$, где $x \in \beta Y \setminus Y$, так как для такого пространства $\alpha X = \beta Y$ и, в силу следствия 3.6.9, $\beta X = \beta Y$. ∎

Изучим теперь подробно стоун-чеховские компактификации дискретных пространств и, в частности, компактификацию βN, где N — пространство положительных целых чисел с дискретной топологией.

3.6.11. Теорема. *Для каждого $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ стоун-чеховская компактификация дискретного пространства $D(\mathfrak{m})$ имеет мощность $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ и вес $2^{\mathfrak{m}}$.*

Доказательство. Тихоновский куб $I^{2^{\mathfrak{m}}}$ является компактом мощности $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ и веса $2^{\mathfrak{m}}$. В силу теоремы Хьюитта — Марчевского — Пондицери, $I^{2^{\mathfrak{m}}}$ содержит всюду плотное множество A мощности $\mathfrak{m}$. Пусть $f\colon D(\mathfrak{m}) \to I$ — произвольное отображение пространства $D(\mathfrak{m})$ в $I^{2^{\mathfrak{m}}}$, для которого $f(D(\mathfrak{m})) = A$. Из теоремы 3.6.1 следует, что f продолжается до непрерывного отображения $F\colon \beta D(\mathfrak{m}) \to I^{2^{\mathfrak{m}}}$. Очевидно, $F(\beta D(\mathfrak{m})) = I^{2^{\mathfrak{m}}}$, так как множество $F(\beta D(\mathfrak{m}))$ замкнуто в $I^{2^{\mathfrak{m}}}$ и содержит всюду плотное в $I^{2^{\mathfrak{m}}}$ множество A. Имеем теперь $|\beta D(\mathfrak{m})| \geqslant |I^{2^{\mathfrak{m}}}| = 2^{2^{\mathfrak{m}}}$ и, в силу теоремы 3.1.22, $w(\beta D(\mathfrak{m})) \geqslant w\left(I^{2^{\mathfrak{m}}}\right) = 2^{\mathfrak{m}}$. Чтобы завершить доказательство, достаточно применить теорему 3.5.3 и теорему Кантора — Бернштейна. ∎

3.6.12. Следствие. *Мощность пространства βN равна $2^{\mathfrak{c}}$, а вес его равен $\mathfrak{c}$.* ∎

3.6.13. Теорема. *Для каждой точки $x \in \beta D(\mathfrak{m})$ и любой окрестности V точки x существует открыто-замкнутое множество U в $\beta D(\mathfrak{m})$, такое, что $x \in U \subset V$.*

Доказательство. Пусть W — произвольная окрестность точки x, удовлетворяющая условию $x \in W \subset \overline{W} \subset V$; положим $A = W \cap D(\mathfrak{m})$. В силу следствия 3.6.5, множество $U = \overline{A}$ открыто-замкнуто в $\beta D(\mathfrak{m})$, а из теоремы 1.3.6 следует, что $U = \overline{W \cap D(\mathfrak{m})} = \overline{W}$. ∎

Теорему 3.6.11 можно значительно усилить в случае $\mathfrak{m} = \aleph_0$. А именно, имеет место следующий результат.

3.6.14. Теорема. *Каждое бесконечное замкнутое множество $F \subset \beta N$ содержит подмножество, гомеоморфное βN. В частности, мощность F равна $2^{\mathfrak{c}}$, а вес F равен $\mathfrak{c}$.*

Доказательство. По индукции без труда определяются последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$ и последовательность открытых множеств $V_1, V_2, \ldots$, такие, что $a_i \in V_i$, $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset F$.

Пусть $g\colon A \to I$ — произвольная непрерывная функция. Функция $g_0\colon N \to I$, определенная формулой

$$g_0(n) = \begin{cases} g(a_i), & \text{если} \quad n \in N \cap V_i, \\ 0, & \text{если} \quad n \in N \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i, \end{cases}$$

имеет продолжение $G_0\colon \beta N \to I$. Так как N всюду плотно в βN, для всех $x \in \overline{V}_i = \overline{N \cap V_i}$ имеем $G_0(x) = g(a_i)$, так что $G_0 | A = g$. Значит, для каждой непрерывной функции $g\colon A \to I$ существует продолжение $G = G_0 | \overline{A}\colon \overline{A} \to I$ на компактификацию $\overline{A}$ пространства A, и, в силу следствия 3.6.3, $\overline{A} = \beta A$. Так как пространство A гомеоморфно N, заключаем, что пространство $\beta A = \overline{A} \subset F$ гомеоморфно βN. ∎

3.6.15. Следствие. *Пространство βN не содержит никакого подпространства, гомеоморфного $A(\aleph_0)$, т. е. в βN нет нетривиальных сходящихся последовательностей.* ∎

3.6.16. Следствие. *Никакое недискретное подпространство пространства βN не является секвенциальным пространством.* ∎

3.6.17. Следствие. *Никакое пространство $N \cup \{x\} \subset \beta N$, где $x \in \beta N \setminus N$, не удовлетворяет первой аксиоме счетности.* ∎

3.6.18. Пример. В пространстве $\beta N \setminus N$, наросте стоун-чеховской компактификации дискретного пространства мощности $\aleph_0$, существует семейство мощности $\mathfrak{c}$ попарно непересекающихся непустых открытых множеств.

Отметим сначала, что в множестве N есть семейство $\{N_t\}_{t \in I}$ бесконечных подмножеств, такое, что пересечение $N_t \cap N_{t'}$ конечно для каждой пары t, t' различных чисел из отрезка I. Действительно, достаточно организовать все рациональные числа отрезка I в последовательность $q_1, q_2, \ldots$ и положить $N_t = \{n_1, n_2, \ldots\}$, где $q_{n_1}, q_{n_2}, \ldots$ — какая-нибудь подпоследовательность последовательности $q_1, q_2, \ldots$, сходящаяся к t, все элементы которой различны.

Семейство $\{U_t\}_{t \in I}$, где $U_t = (\beta N \setminus N) \cap \overline{N}_t$, имеет мощность $\mathfrak{c}$ и состоит из непустых открытых в $\beta N \setminus N$ множеств. Для каждой пары t, t' различных чисел из отрезка I имеем $N_{t'} = F \cup M$, где $|F| < \aleph_0$ и $M \cap N_t = \varnothing$. Так как $\overline{F} = F \subset N$ и, согласно следствию 3.6.4, $\overline{M} \cap \overline{N}_t = \varnothing$, то

$$U_t \cap U_{t'} = (\beta N \setminus N) \cap \overline{N}_t \cap \overline{N}_{t'} = (\beta N \setminus N) \cap \overline{N}_t \cap (\overline{F} \cup \overline{M}) =$$
$$= (\beta N \setminus N) \cap [(\overline{N}_t \cap \overline{F}) \cup (\overline{N}_t \cap \overline{M})] \subset (\beta N \setminus N) \cap N = \varnothing. \blacksquare$$

3.6.19. Пример. С помощью семейства $\{U_t\}_{t \in I}$, построенного в предыдущем примере, мы определим теперь интересное ненормальное тихоновское пространство, которое пригодится нам в § 6.2.

Выберем точку $x_t \in U_t$ для каждого $t \in I$ и положим $X = N \cup \bigcup\limits_{t \in I} \{x_t\}$. Так как N локально компактно и всюду плотно в X, из теоремы 3.3.9 следует, что множество $X \setminus N$ замкнуто в X. Так как все точки пространства $X \setminus N$ изолированы, оно гомеоморфно $D(\mathfrak{c})$. Рассуждая так же, как в примере 2.1.10 или в примере 1.5.9, заключаем, что пространство X не нормально. $\blacksquare$

Пространство βN участвует в построении многих интересных примеров; некоторые из них будут рассмотрены в последующих параграфах этой главы.

Из теорем 3.6.11 и 2.3.23 следует, что пространство $\beta D(\mathfrak{m})$ можно вложить в тихоновский куб $I^{2^\mathfrak{m}}$. Опишем теперь подпространство канторова куба $D^{2^\mathfrak{m}} \subset I^{2^\mathfrak{m}}$, гомеоморфное $\beta D(\mathfrak{m})$.

3.6.20. Пример. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех отображений пространства $D(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, в двухточечное дискретное пространство $D = \{0, 1\}$. Ясно, что $|\mathcal{F}| = 2^\mathfrak{m}$. По теореме о диагональном отображении, отображение $F = \mathop{\triangle}\limits_{f \in \mathcal{F}} f\colon D(\mathfrak{m}) \to D^{2^\mathfrak{m}} = \prod\limits_{f \in \mathcal{F}} D_f$ где $D_f = D$ при всех $f \in \mathcal{F}$, является гомеоморфным вложением. Значит, замыкание $\overline{F(D(\mathfrak{m}))} \subset D^{2^\mathfrak{m}}$ является компактификацией пространства $D(\mathfrak{m})$. Для каждой пары A, B непересекающихся замкнутых множеств в $D(\mathfrak{m})$ замыкания множеств $F(A)$ и $F(B)$ в этой компактификации не пересекаются. В самом деле, для функции $f\colon D(\mathfrak{m}) \to D$, определенной формулами

$$f(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \in A, \quad \text{и} \quad f(x) = 1, \quad \text{если} \quad x \in D(\mathfrak{m}) \setminus A,$$

имеем

$$F(A) \subset p_f^{-1}(0) \quad \text{и} \quad F(B) \subset p_f^{-1}(1),$$

причем множества $p_f^{-1}(0)$ и $p_f^{-1}(1)$ не пересекаются и замкнуты в $D^{2^\mathfrak{m}}$.

Следствие 3.6.4 показывает, что $\overline{F(D(\mathfrak{m}))}$ — компактификация пространства $D(\mathfrak{m})$, эквивалентная $\beta D(\mathfrak{m})$. $\blacksquare$

Определим теперь для каждого T_1-пространства X компактное T_1-пространство ωX, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства и обладающее тем свойством, что каждое непрерывное отображение $f\colon X \to Z$ пространства X в любой компакт Z продолжается до непрерывного отображения $F\colon \omega X \to Z$. Таким образом, ωX играет роль стоун-чеховской компактификации в случае произвольного T_1-пространства X. Оказывается, пространство ωX является хаусдорфовым в том и только том случае, если пространство X — нормально. Очевидно, в этом случае ωX является компактификацией пространства X, эквивалентной βX.

Пусть X есть T_1-пространство и $\mathscr{D}(X)$ — семейство всех замкнутых в X множеств. Из леммы Тейхмюллера — Тьюки следует, что каждое центрированное семейство замкнутых в X множеств содержится в некотором ультрафильтре на $\mathscr{D}(X)$; обычно такой ультрафильтр не единствен. Семейство всех ультрафильтров на $\mathscr{D}(X)$ будет обозначаться через $F(X)$. Каждый ультрафильтр $\mathscr{F} \in F(X)$ обладает следующими свойствами:

(1) $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

(2) *Если* $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$, *то* $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$.

(3) *Если* $A_0 \in \mathscr{D}(X)$ *и* $A_0 \cap A \neq \varnothing$ *при всех* $A \in \mathscr{F}$, *то* $A_0 \in \mathscr{F}$.

(4) *Если* $A \in \mathscr{F}$ *и* $A \subset A_1 \in \mathscr{D}(X)$, *то* $A_1 \in \mathscr{F}$.

(5) *Если* $A_1, A_2 \in \mathscr{D}(X)$ *и* $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{F}$, *то либо* $A_1 \in \mathscr{F}$, *либо* $A_2 \in \mathscr{F}$.

(6) *Если* $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$, *то существуют* $A \in \mathscr{F}$ *и* $A' \in \mathscr{F}'$, *такие, что* $A \cap A' = \varnothing$.

Свойства (1), (2) и (4) вытекают из определения фильтра, свойство (3) следует из того, что семейство $\mathscr{F} \cup \{A_0\} \subset \mathscr{D}(X)$ центрировано и, значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{F}'$ на $\mathscr{D}(X)$, который должен совпадать с $\mathscr{F}$. Для доказательства (5) заметим, что если $A_1 \notin \mathscr{F}$ и $A_2 \notin \mathscr{F}$, то, в силу (3), найдутся A_1', $A \in \mathscr{F}$, такие, что $A_1 \cap A_1' = \varnothing = A_2 \cap A_2'$.

Значит, $(A_1 \cup A_2) \cap A_1' \cap A_2' = \varnothing$, откуда, в силу (1) и (2), следует, что $A_1 \cup A_2 \notin \mathscr{F}$. Наконец, свойство (6) вытекает из того факта, что если $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$, то, в силу максимальности $\mathscr{F}$, существует $A \in \mathscr{F}$, для которого $A \notin \mathscr{F}'$, и, согласно (3), найдется $A' \in \mathscr{F}'$, такое, что $A \cap A' = \varnothing$.

Легко видеть, что свойства (1)—(3) характеризуют ультрафильтры в классе всех подсемейств семейства $\mathscr{D}(X)$.

Каждому $x \in X$ отвечает ультрафильтр $\mathscr{F}(x) = \{A \in \mathscr{D}(X)\colon x \in A\}$; ясно, что $\bigcap \mathscr{F}(x) = \{x\}$. Если $\mathscr{F} \in F(x)$ и $x \in \bigcap \mathscr{F}$, то $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}(x)$, так что $\mathscr{F} = \mathscr{F}(x)$. Значит, для каждого ультрафильтра $\mathscr{F} \in F(X)$ пересечение $\bigcap \mathscr{F}$ либо является одноточечным множеством, либо пусто. Ультрафильтры с пустым пересечением называются *свободными ультрафильтрами*; они составляют подсемейство $F_0(X)$ семейства $F(X)$.

Положим $\omega X = X \cup F_0(X)$; для каждого открытого множества $U \subset X$ пусть

$$U^* = U \cup \{\mathcal{F} \in F_0(X)\colon\ A \subset U \text{ для некоторого } A \in \mathcal{F}\} \subset \omega X,$$

и для каждого замкнутого множества $A \subset X$ пусть

$$A_* = A \cup \{\mathcal{F} \in F_0(X)\colon\ A \in \mathcal{F}\} \subset \omega X.$$

В силу (3), если $\mathcal{F} \in F(X)$ и множество $U \subset X$ открыто, то

$$X \setminus U \notin \mathcal{F} \text{ тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда } A \subset U \text{ для некоторого } A \in \mathcal{F}.$$

Поэтому

(7) $$U^* = \omega X \setminus (X \setminus U)_* \quad \text{и} \quad A_* = \omega X \setminus (X \setminus A)^*.$$

Из (2), (5) и (4) следует, что если множества $A_1, A_2 \subset X$ замкнуты, то

(8) $$(A_1 \cap A_2)_* = A_{1*} \cap A_{2*} \quad \text{и} \quad (A_1 \cup A_2)_* = A_{1*} \cup A_{2*},$$

откуда, в силу (7) и формул де Моргана, следует, что если множества $U_1, U_2 \subset X$ открыты, то

(9) $$(U_1 \cup U_2)^* = U_1^* \cup U_2^* \quad \text{и} \quad (U_1 \cap U_2)^* = U_1^* \cap U_2^*.$$

Второе соотношение в (9) вместе с равенством $X^* = \omega X$ показывает, что семейство $\mathcal{B}$ всех множеств U^*, где U открыто в X, обладает свойствами (B1)—(B2) из § 1.1. Множество ωX с топологией, порожденной базой $\mathcal{B}$, называется *волмэновским расширением* (*расширением Волмэна*) *пространства* X.

3.6.21. Теорема. *Для каждого T_1-пространства X его волмэновское расширение ωX является компактным T_1-пространством, содержащим X в качестве всюду плотного подпространства, причем каждое непрерывное отображение $f\colon X \to Z$ пространства X в произвольный компакт Z можно продолжить до непрерывного отображения $F\colon \omega X \to Z$.*

Доказательство. То, что на X топология подпространства пространства ωX совпадает с исходной топологией пространства X, и то, что X всюду плотно в ωX, вытекает прямо из определения множеств U^*.

Покажем, что ωX является T_1-пространством.

Прежде всего из второй части (7) следует, что множество A_* замкнуто в ωX для всех $A \in \mathcal{D}(X)$. Так как ясно, что $\{x\} = \{x\}_*$ для каждого $x \in X$, и, в силу (6), $\{\mathcal{F}\} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A_*$ при любых $\mathcal{F} \in F_0(X)$, все одноточечные подмножества пространства ωX замкнуты.

Для доказательства компактности ωX рассмотрим произвольное центрированное семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнутых в ωX множеств. По определению топологии на ωX, при всех $s\in S$ имеем $F_s=\bigcap_{t\in T_s} A_{t*}$, где A_t — замкнутое множество в X. Семейство $\{A_t\}_{t\in T}$, где $T=\bigcup_{s\in S} T_s$, центрировано. Первая формула из (8) показывает, что семейство $\{A_t\}_{t\in T}$ замкнутых множеств в X также центрировано; значит, семейство $\{A_t\}_{t\in T}$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{F}$ на $\mathcal{D}(X)$. Если $\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$, то существует точка $x\in X$, такая, что $\mathcal{F}=\mathcal{F}(x)$; тогда $x\in \bigcap_{t\in T} A_t\subset$ $\subset\bigcap_{t\in T} A_{t*}=\bigcap_{s\in S} F_s$. Если $\bigcap\mathcal{F}=\varnothing$, то $\mathcal{F}\in F_0(X)$ и $\mathcal{F}\in\bigcap_{t\in T} A_{t*}=$ $=\bigcap_{s\in S} F_s$. Значит, в обоих случаях пересечение семейства $\{F_s\}_{s\in S}$ не пусто.

Рассмотрим теперь произвольное непрерывное отображение $f\colon X\to Z$ пространства X в компакт Z. Для любых непересекающихся замкнутых множеств B_1 и B_2 в Z их прообразы $f^{-1}(B_1)$ и $f^{-1}(B_2)$ замкнуты в X и не пересекаются. Значит, в силу первого равенства в (8), множества $[f^{-1}(B_1)]_*$ и $[f^{-1}(B_2)]_*$ не пересекаются. Так как последние два множества замкнуты в ωX и содержат соответственно $f^{-1}(B_1)$ и $f^{-1}(B_2)$, то замыкания множеств $f^{-1}(B_1)$ и $f^{-1}(B_2)$ в ωX не пересекаются. Существование продолжения $F\colon \omega X\to Z$ отображения f следует теперь из теоремы 3.2.1. ∎

3.6.22. Теорема. *Волмэновское расширение ωX T_1-пространства X является хаусдорфовым пространством в том и только том случае, если X нормально.*

Доказательство. Если пространство ωX хаусдорфово, то ωX является компактификацией пространства X. Так как замыкания в ωX произвольной пары непересекающихся замкнутых в X множеств не пересекаются, пространство X нормально.

Предположим теперь, что X — нормальное пространство. В силу (6), для любых двух различных элементов $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ семейства $F(X)$ найдутся замкнутые множества $A\in\mathcal{F}$ и $A'\in\mathcal{F}'$, такие, что $A\cap A'=\varnothing$. Далее, в силу нормальности X, найдутся открытые множества $U(\mathcal{F},\mathcal{F}')$, $V(\mathcal{F},\mathcal{F}')\subset$ $\subset X$, для которых $A\subset U(\mathcal{F},\mathcal{F}')$, $A'\subset V(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ и $U(\mathcal{F},\mathcal{F}')\cap$ $\cap V(\mathcal{F},\mathcal{F}')=\varnothing$. Легко видеть, что для каждой пары различных точек $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'\in F_0(X)\subset\omega X$ (для каждой пары различных точек x, $x'\in X\subset\omega X$, для каждой пары точек $\mathcal{F}\in F_0(X)$, $x\in$ $\in X$) множества $U(\mathcal{F},\mathcal{F}')_*$ и $V(\mathcal{F},\mathcal{F}')_*$ (множества $U(\mathcal{F}(x),$ $\mathcal{F}(x'))_*$ и $V(\mathcal{F}(x),\mathcal{F}(x'))_*$, множества $U(\mathcal{F},\mathcal{F}(x))_*$ и

$V(\mathscr{F}, \mathscr{F}(x))_*)$ являются непересекающимися окрестностями этих точек в пространстве ωX. Значит, пространство ωX хаусдорфово. ∎

3.6.23. Следствие. *Если пространство X нормально, то его волмэновское расширение ωX является компактификацией пространства X, эквивалентной стоун-чеховской компактификации этого пространства.* ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Стоун-чеховская компактификация была введена Чехом в [1937] и М. Стоуном в [1937]. Эти работы, вместе со статьей М. Стоуна [1948], содержат все фундаментальные результаты о βX, а именно теорему 3.6.1 и следствия 3.6.2—3.6.9. Первый из этих двух авторов определил максимальную компактификацию с помощью метода, указанного в упр. 3.5.E, развив таким образом идею, появившуюся в работе Тихонова [1930]. Второй автор применил конструкцию, описанную в задаче 3.12.21(c) ниже. Заметим, что Тихонов определил пространство, гомеоморфное βN, в [1935] (см. упр. 3.6.H). Пример 3.6.10 приведен Чехом в [1937]. Теорема 3.6.11 доказана Поспишилом [1937]; ее доказательство, приведенное нами, принадлежит Мрувке [1959a] (эту теорему можно вывести также из более раннего результата теории множеств (см. упр. 3.6.F)). Теорема 3.6.14 была доказана Новаком в [1953a]. Существование в наросте $\beta N \setminus N$ семейства мощности $\mathfrak{c}$ попарно непересекающихся непустых открытых множеств было замечено Накамурой и Какутани в [1943]. Построение такого семейства, приведенное в примере 3.6.18, так же как и пример 3.6.19, взяты из работы Катетова [1950] (семейство $\{N_t\}_{t \in T}$ в принципе было определено Серпинским [1928a]). Волмэновское расширение было построено Волмэном в [1938]; там же доказаны теоремы 3.6.21 и 3.6.22. Большое число результатов, относящихся к стоун-чеховской компактификации, собрано в книге Уокера [1974].

Проблемы, связанные со стоун-чеховской компактификацией, относятся к числу наиболее интересных проблем общей топологии. Некоторые из них, в частности проблемы, относящиеся к стоун-чеховским компактификациям дискретных пространств, очень близки к теории множеств. Компактификация βX может быть построена многими способами (см. упр. 3.5.E, 3.6.K, задачи 3.12.21(c), 8.5.8(a), примеры 8.3.18 и 8.4.14). Она обладает множеством интересных свойств (см., например, теоремы 7.1.15 и 7.1.17), применяется при построении большого числа интересных примеров (см. примеры 3.10.19, 3.10.29, 5.1.23, задачи 3.12.17 и 4.5.19(c)), а также при доказательстве ряда теорем (см. указания к задачам 5.5.8(a), 7.4.15 и 7.4.16).

УПРАЖНЕНИЯ

3.6.A (Новак [1953], У. Рудин [1956]). Проверьте, что все открыто-замкнутые подмножества нароста $\beta N \setminus N$ имеют вид $W(M) = \overline{M} \cap (\beta N \setminus N)$, где $M \subset N$, и что $W(M_1) \subset W(M_2)$ в том и только том случае, если разность $M_1 \setminus M_2$ конечна. Покажите, что внутренность каждого непустого G_δ-множества в $\beta N \setminus N$ не пуста.

3.6.B. Определите функцию f: $D(\mathfrak{c}) \to I$, которую нельзя непрерывно продолжить на компактификации пространства $D(\mathfrak{c})$, описанные в 3.5.14.

3.6.C (М. Стоун [1948]). Выведите следствие 3.6.8 из следствия 3.6.4 и, применив упр. 3.2.J(b), получите теорему Титце — Урысона.

3.6.D. (a) Выведите из упр. 3.2.H, что произведение $\beta X \times \beta Y$ не обязательно является стоун-чеховской компактификацией пространства $X \times Y$ (даже если Y — компакт).

Замечание. Необходимое и достаточное условие равенства $\prod\limits_{s \in S} \beta X_s = \beta \prod\limits_{s \in S} X_s$ дано в задаче 3.12.20.

(b) Покажите, что функцию f: $N \times N \to I$, определенную формулой

$$f(m, n) = \frac{n}{n+m} \quad \text{при} \quad (m, n) \in N \times N,$$

нельзя непрерывно продолжить на $\beta N \times \beta N$. Выведите отсюда, что произведение $\beta N \times \beta N$ не является стоун-чеховской компактификацией пространства $N \times N$ (см. задачу 6.3.21(b)).

(c) Докажите, что, каков бы ни был сепарабельный компакт X, произведение $W \times X$ является стоун-чеховской компактификацией пространства $W_0 \times X$.

Замечание. Предположение о сепарабельности не существенно (см. задачи 3.12.19(c) или 3.12.20(c)).

(d) Докажите, что для каждого вполне регулярного пространства Y существует вполне регулярное пространство Z, такое, что $\beta Z \setminus Z = Y$.

Указание. Если $w(Y) \leqslant \aleph_0$, то существование такого Z следует из (c); если $w(Y) = \mathfrak{c}$, то искомое заключение вытекает из (c) и следствия 2.3.16. Чтобы получить общее утверждение, видоизмените (c), рассмотрев подходящее пространство ординалов вместо W_0.

Замечание. Этот результат прямо следует из задачи 3.12.19(c) и задачи 3.12.23(c).

(e) Заметьте, что стоун-чеховская компактификация предела обратного спектра $\{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ тихоновских пространств может отличаться от предела обратного спектра $\{\beta X_\sigma, \bar{\pi}_\rho^\sigma, \Sigma\}$, где $\bar{\pi}_\rho^\sigma$ — продолжение отображения π_ρ^σ на βX_σ и βX_ρ.

3.6.E. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ тихоновского пространства X на тихоновское пространство Y существуют компактификации cX и $c'Y$, такие, что $w(cX) = w(X)w(Y)$, $w(c'Y) = w(Y)$ и f продолжается до непрерывного отображения $F\colon cX \to c'Y$.

3.6.F. Будем говорить, что семейство $\{A_s\}_{s\in S}$ подмножеств множества X состоит из *независимых множеств*, если для каждой конечной последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_k$ различных элементов множества S и каждой последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_k$ из нулей и единиц всегда $A_{s_1}^{i_1} \cap A_{s_2}^{i_2} \cap \ldots \cap A_{s_k}^{i_k} \neq \varnothing$, где $A^0 = A$ и $A^1 = X \setminus A$.

(a) (Хаусдорф [1936a]; при $\mathfrak{m} = \aleph_0$ и $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$ — **Фихтенгольц** и Канторович [1934]). Покажите, что семейство всех подмножеств множества X мощности $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ содержит подсемейство мощности $2^{\mathfrak{m}}$, состоящее из независимых **множеств.**

Указание. Примените теорему Хьюитта — Марчевского — Пондицери и возьмите в качестве X всюду плотное множество в канторовом кубе $D^{2^{\mathfrak{m}}}$.

(b) Выведите из (a), что канторов куб $D^{2^{\mathfrak{m}}}$ содержит всюду плотное множество мощности $\mathfrak{m}$.

Указание. Воспользуйтесь семейством независимых подмножеств на множестве мощности $\mathfrak{m}$ для нумерации $2^{\mathfrak{m}}$ сомножителей канторова куба $D^{2^{\mathfrak{m}}}$.

(c) Заметьте, что теорема 3.6.11 следует из (a).

3.6.G. (a) (Чех [1959], Гиллман и Джерисон [1960]). Докажите, что для любого тихоновского пространства X мощность всякого непустого замкнутого G_δ-множества в βX, содержащегося в наросте $\beta X \setminus X$, не меньше, чем $2^{\mathfrak{c}}$.

Указание. Пусть $f\colon \beta X \to I$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль только в точках рассматриваемого множества. Определите последовательность $a_1, a_2, \ldots$ точек пространства X, такую, что $f(a_1) > f(a_2) > \ldots$ и $f(a_i) \leqslant 1/i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Воспользовавшись нормальностью отрезка $[0, 1]$, заметьте, что каждая пара непересекающихся замкнутых множеств подпространства $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ вполне отделена в X, и выведите отсюда, что замыкание множества A в βX гомеоморфно βN.

(b) (Чех [1937]). Покажите, что тихоновские пространства X и Y, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, гомеоморфны в том и только том случае, если компактификации βX и βY гомеоморфны.

3.6.H. Для всякого $t \in I$ и $i = 1, 2, \ldots$ обозначим через $d_i(t)$ i-й разряд двоичного разложения числа t, причем если у t есть два таких разложения, то рассмотрим то из них, в котором число нулей бесконечно. Этим при каждом i определена точка

d_i тихоновского куба $I^{\mathfrak{c}} = \prod_{t \in I} I_t$, где $I_t = I$ при $t \in I$. Покажите, что подпространство $\{d_1, d_2, \ldots\}$ пространства $I^{\mathfrak{c}}$ гомеоморфно N и что его замыкание в $I^{\mathfrak{c}}$ гомеоморфно βN.

3.6.I. (a) (Мрувка [1954], Франклин [1967]). Пусть $\{N_s\}_{s \in S}$, где $S \cap N = \varnothing$, — бесконечное семейство бесконечных подмножеств множества N, такое, что пересечение $N_s \cap N_{s'}$ конечно для каждой пары s, s' различных элементов семейства S, причем $\{N_s\}_{s \in S}$ максимально относительно последнего свойства (см. пример 3.6.18 и лемму Тейхмюллера — Тьюки). Зададим топологию на множестве $X = N \cup S$ системой окрестностей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, где $\mathscr{B}(x) = \{\{n\}\}$ при $x = n \in N$ и $\mathscr{B}(x) = \{\{s\} \cup (N_s \setminus \{1, 2, \ldots \ldots, i\})\}_{i=1}^{\infty}$ при $x = s \in S$. Проверьте, что X — не нормальное локально компактное хаусдорфово пространство, и докажите, что αX является секвенциальным пространством, но не пространством Фреше — Урысона.

(b) Из существования локально компактного хаусдорфова пространства X со счетным всюду плотным множеством A изолированных в X точек, такого, что подпространство $X \setminus A$ содержит $\mathfrak{c}$ изолированных точек, легко следует наличие в наросте $\beta N \setminus N$ семейства мощности $\mathfrak{c}$ попарно непересекающихся непустых открытых множеств.

3.6.J (Гиллман и Джерисон [1960]). Заметьте, что теорема Тихонова вытекает как из теоремы 3.6.1, так и из теоремы 3.6.21.

Указание. Рассмотрите стоун-чеховскую компактификацию и волмэновское расширение декартова произведения.

3.6.K (Гиллман и Джерисон [1960]). (a) Проверьте, что если X — тихоновское пространство, то, видоизменив построение волмэновского расширения, а именно взяв ультрафильтры на семействе $\mathscr{D}_0(X)$ всех функционально замкнутых подмножеств пространства X вместо ультрафильтров на $\mathscr{D}(X)$, мы получим стоун-чеховскую компактификацию пространства X.

В этом случае семейство всех множеств вида U^*, где U — любое функционально открытое множество в X, образует базу пространства $X \cup F_0(X)$.

(b) Тихоновское пространство X компактно в том и только том случае, если каждое центрированное семейство функционально замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.

3.7. СОВЕРШЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *совершенным*, если X — хаусдорфово пространство, f — замкнутое отображение и все прообразы $f^{-1}(y)$ являются компактными подмножествами в X. Инъективное отображение $f: X \to Y$ хаусдорфова пространства X совершенно в том и только том случае, если оно является замкнутым отображением, т. е. если f — гомеоморфное вложение и множество $f(X)$ замкнуто в Y. В частности, вложение i_M: $M \to X$ является совершенным отображением в том и только том случае, если пространство M хаусдорфово и $\overline{M} = M$. Теоремы 3.1.2 и 3.1.12 показывают, что каждое непрерывное отображение компакта в хаусдорфово пространство совершенно. Из теоремы Куратовского следует

3.7.1. Теорема. *Если X — компакт, а Y — хаусдорфово пространство, то проекция p: $X \times Y \to Y$ является совершенным отображением.* ∎

3.7.2. Теорема. *Если f: $X \to Y$ — совершенное отображение, то для каждого компактного подпространства $Z \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(Z)$ является компактом.*

Доказательство. Очевидно, $f^{-1}(Z)$ — хаусдорфово пространство. Остается показать, что для каждого центрированного семейства $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых множеств в $f^{-1}(Z)$ пересечение $\bigcap_{s \in S} F_s$ непусто. При этом можно предполагать, что все конечные пересечения элементов семейства $\mathcal{F}$ входят в $\mathcal{F}$, так как, добавив к $\mathcal{F}$ эти пересечения, мы снова получим центрированное семейство. В силу предложения 2.1.4, сужение f_Z: $f^{-1}(Z) \to Z$ является замкнутым отображением. Значит, $\{f(F_s)\}_{s \in S}$ — центрированное семейство замкнутых множеств в Z, и существует точка $y \in \bigcap_{s \in S} f(F_s)$. Таким образом, для всех $s \in S$ имеем $f^{-1}(y) \cap F_s \neq \varnothing$, и так как $f^{-1}(y)$ компактно, а $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений, найдется точка $x \in \bigcap_{s \in S} (f^{-1}(y) \cap F_s) \subset \bigcap_{s \in S} F_s$. ∎

Последняя теорема влечет за собой

3.7.3. Следствие. *Композиция совершенных отображений является совершенным отображением.* ∎

Из предложения 2.1.4 получаем

3.7.4. Предложение. *Если f: $X \to Y$ — совершенное отображение, то для каждого замкнутого $A \subset X$ и любого $B \subset Y$ сужения $f|A$: $A \to Y$ и f_B: $f^{-1}(B) \to B$ являются совершенными отображениями.* ∎

Из предложений 2.1.15, 2.1.11 и 2.1.13 вытекают следующие два предложения.

3.7.5. Предложение. *Пусть X — хаусдорфово пространство, $\{A_i\}_{i=1}^k$ — конечное покрытие пространства X и $\{f_i\}_{i=1}^k$ — семей-*

ство согласованных отображений $f_i\colon A_i \to Y$, *комбинация* $f = f_1 \nabla f_2 \nabla \ldots \nabla f_k$ *которых является непрерывным отображением. Тогда если все отображения* f_i *совершенны, то и их комбинация* f *— совершенное отображение.* ∎

3.7.6. Предложение. *Если* $\{A_i\}_{i=1}^k$ *— конечное замкнутое покрытие или конечное открытое покрытие хаусдорфова пространства* X *и* $\{f_i\}_{i=1}^k$ *— семейство согласованных совершенных отображений* $f_i\colon A_i \to Y$, *то их комбинация* $f = f_1 \nabla f_2 \nabla \ldots \nabla f_k$ *является совершенным отображением пространства* X *в* Y. ∎

3.7.7. Теорема. *Декартово произведение* $f = \prod_{s\in S} f_s$, *где* $f_s\colon X_s \to Y_s$ *и* $X_s \neq \varnothing$ *при* $s \in S$, *является совершенным отображением в том и только том случае, если совершенны все отображения* f_s.

Доказательство. Из предложения 3.7.4 следует, что если декартово произведение f совершенно, то и все отображения f_s совершенны.

Предположим теперь, что все отображения f_s совершенны. По теореме 2.3.11, произведение $\prod_{s\in S} X_s$ является хаусдорфовым пространством и, по теореме Тихонова, прообраз $f^{-1}(y) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$ является компактом при всех $y = \{y_s\} \in \prod_{s\in S} Y_s$. Значит, остается показать, что отображение f замкнуто.

Возьмем любую точку $y = \{y_s\} \in \prod_{s\in S} Y_s$ и произвольное открытое множество $U \subset \prod_{s\in S} X_s$, содержащее $f^{-1}(y) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$. По теореме Уоллеса, существуют открытые множества $U_s \subset X_s$, такие, что $U_s \neq X_s$ лишь для $s \in \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ и $\prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s) \subset \prod_{s\in S} U_s \subset U$. Так как f_{s_i} — замкнутое отображение, в силу теоремы 1.4.13 при $i = 1, 2, \ldots, k$ найдется окрестность $V_{s_i} \subset Y_{s_i}$ точки y_{s_i}, для которой $f_{s_i}^{-1}(V_{s_i}) \subset U_{s_i}$. Окрестность $V = \prod_{s\in S} V_s$ точки y, где $V_s = Y_s$ при $s \notin \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, удовлетворяет условию

$$f^{-1}(V) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(V_s) \subset \prod_{s\in S} U_s \subset U;$$

значит, отображение f замкнуто по теореме 1.4.13. ∎

Из теоремы о декартовом произведении совершенных отображений мы выведем серию важных свойств таких отображений. Чтобы сразу дать читателю представление о том, как сильна эта теорема, отметим, что и теорема Тихонова и теорема Уоллеса для хаусдорфовых пространств X_s являются ее непосредственными следствиями. Действительно, если $\{X_s\}_{s\in S}$ — произвольное семейство компактов, то отображение $f_s\colon X_s \to Y_s$ пространства X_s в одноточечное пространство Y_s совершенно при всех $s \in S$; значит, отображение $f = \prod_{s\in S} f_s$ тоже совершенно и произведение $\prod_{s\in S} X_s = f^{-1}(y)$, где $\{y\} = \prod_{s\in S} Y_s$, является компактом. Чтобы вывести теорему Уоллеса из 3.7.7, рассматривают естественные факторные отображения $f_s\colon X_s \to X_s/A_s$.

Из теоремы 3.7.7 легко вытекает

3.7.8. Теорема. *Диагональное произведение любого семейства совершенных отображений является совершенным отображением.*

Доказательство. Диагональное отображение можно представить как сужение декартова произведения отображений на замкнутое множество. ∎

Заметим, что если диагональное произведение $f_1 \triangle f_2$ является совершенным отображением, то это еще не означает, что отображения f_1 и f_2 совершенны (см. 2.3.31).

Последнюю теорему можно значительно усилить.

3.7.9. Теорема. *Пусть дано семейство $\{f_s\}_{s\in S}$ непрерывных отображений $f_s\colon X \to Y_s$. Если существует $s_0 \in S$, такое, что f_{s_0} совершенно и Y_s — хаусдорфово пространство при всех $s \in S \setminus \{s_0\}$, то диагональное произведение $\triangle_{s\in S} f_s$ является совершенным отображением.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть диагональное произведение $h = f \triangle g$ любого совершенного отображения $f\colon X \to Y$ и произвольного непрерывного отображения $g\colon X \to Z$ на хаусдорфово пространство Z. Это диагональное произведение h можно представить в виде композиции

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \triangle g} X \times Z \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_Z} Y \times Z.$$

Отображение $\mathrm{id}_X \triangle g$ совершенно в силу следствия 2.3.22, а отображение $f \times \mathrm{id}_Z$ совершенно по теореме 3.7.7. Таким образом, из следствия 3.7.3 вытекает, что отображение h совершенно. ∎

Последняя теорема фактически является усилением теоремы 3.7.8. Действительно, если $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение, то, как показано ниже в теореме 3.7.20, $f(X)$ — хаусдорфово пространство и замкнутое подпространство в Y.

3.7.10. Предложение. *Если композиция gf непрерывных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ является совершенным отображением и Y — хаусдорфово пространство, то отображения $g|f(X)$ и f тоже совершенны.*

Доказательство. Для каждой точки $z \in Z$ прообраз $(g|f(X))^{-1}(z) = f(X) \cap g^{-1}(z) = f[(gf)^{-1}(z)]$ компактен, так как компактен прообраз $(gf)^{-1}(z)$. Замкнутость отображения $g|f(X)$ следует из предложения 2.1.3.

Отображение f можно представить в виде композиции

$$X \xrightarrow{f\Delta(gf)} Y \times Z \xrightarrow{p} Y,$$

где p — проекция. Диагональное произведение $h = f\Delta(gf)$ является совершенным отображением в силу последней теоремы. Легко видеть, что множество $h(X) \subset Y \times Z$ совпадает с графиком отображения $g|f(X)$ и потому содержится в графике $G(g)$ отображения g. Значит, $f = (p|G(g))h_{G(g)}$, откуда следует, что отображение f совершенно, так как $p|G(g)$ — гомеоморфизм (см. следствие 2.3.22) и отображение $h_{G(g)}$ совершенно в силу предложения 3.7.4. ∎

Теорема 3.7.7 вместе с теоремами 2.5.13 и 2.5.14 приводит к следующим двум теоремам.

3.7.11. Теорема. *Если $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ — отображение обратного спектра $\boldsymbol{S}$ в обратный спектр $\boldsymbol{S}'$ и все отображения $f_{\sigma'}$ совершенны, то предельное отображение $\varprojlim \{\varphi, f_{\sigma'}\}$ тоже является совершенным отображением.* ∎

3.7.12. Теорема. *Если все связующие отображения π^σ_ρ обратного спектра $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ совершенны, то и все проекции являются совершенными отображениями.* ∎

Следующая интересная характеристика совершенных отображений тоже связана с теоремой 3.7.7.

3.7.13. Теорема. *Для произвольного непрерывного отображения $f\colon X \to Z$ хаусдорфова пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Отображение f совершенно.*

(ii) *Для каждого хаусдорфова пространства Y декартово произведение $f \times \mathrm{id}_Y$ является совершенным отображением.*

(iii) *Для каждого хаусдорфова пространства Y декартово произведение $f \times \mathrm{id}_Y$ является замкнутым отображением.*

Доказательство. Импликации (i)$\Rightarrow$(ii) и (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидны. В силу предложения 2.3.27, для доказательства импликации (iii)$\Rightarrow$(i) достаточно показать, что из (iii) вытекает компактность всех прообразов точек при f. Возьмем любое $z_0 \in Z$ и произвольное хаусдорфово пространство Y. Сужение $g_0 = g_{(\{z_0\} \times Y)}\colon f^{-1}(z_0) \times Y \to \{z_0\} \times Y$ замкнутого отображения $g = f \times \mathrm{id}_Y$ замкнуто. Значит, композиция $p_0 g_0$, где $p_0\colon \{z_0\} \times Y \to Y$ — проекция, тоже является замкнутым отображением. Эта композиция совпадает с проекцией $p\colon f^{-1}(z_0) \times Y \to Y$. Таким образом, поскольку $f^{-1}(z_0) \subset X$ — хаусдорфово пространство, компактность $f^{-1}(z_0)$ следует из теоремы Куратовского. ∎

Из замечания 3.1.17 вытекает также следующее: если для отображения $f\colon X \to Z$ декартово произведение $f \times \mathrm{id}_Y$ является замкнутым отображением при любом выборе компакта Y, такого, что $w(Y) \leqslant w(X)$, то отображение f совершенно. Ясно, что декартово произведение $f \times g$ совершенного отображения f и произвольного замкнутого отображения g не обязательно является замкнутым отображением (см. пример 2.3.28).

Среди тихоновских пространств класс совершенных отображений можно охарактеризовать в терминах расширений. Мы дадим сейчас две характеристики такого рода, основанные на общей лемме. В первой из этих характеристик предполагается, что пространства X и Y являются подпространствами рассматриваемых в теореме компактификаций.

3.7.14. Лемма. *Совершенное отображение $f\colon X \to Y$ нельзя непрерывно продолжить ни на какое хаусдорфово пространство Z, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства.*

Доказательство. Если $F\colon Z \to Y$ — продолжение отображения f на хаусдорфово пространство Z, содержащее X, то, так как композиция $Fi_X = f$ является совершенным отображением, из предложения 3.7.10 следует, что отображение i_X совершенно. Значит, X — замкнутое подпространство пространства Z. ∎

3.7.15. Теорема. *Для произвольного непрерывного отображения $f\colon X \to Y$, где X и Y — тихоновские пространства, следующие условия равносильны:*

(i) *Отображение f совершенно.*

(ii) *Какова бы ни была компактификация γY, продолжение $F_\gamma\colon \beta X \to \gamma Y$ отображения f удовлетворяет условию $F_\gamma(\beta X \setminus X) \subset \subset \gamma Y \setminus Y$.*

(iii) *Продолжение $F\colon \beta X \to \beta Y$ отображения f удовлетворяет условию $F(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$.*

(iv) *Существует компактификация γY, такая, что для продолжения $F_\gamma\colon \beta X \to \gamma Y$ отображения f выполняется условие $F_\gamma(\beta X \setminus X) \subset \gamma Y \setminus Y$.*

Доказательство. Предположим, что отображение $f\colon X \to Y$ совершенно, и рассмотрим его продолжение $F_\gamma\colon \beta X \to \gamma Y$. Так как f можно продолжить на $Z = F_\gamma^{-1}(Y)$, не изменив области значений, из леммы вытекает, что $Z = X$, т. е. что $F_\gamma^{-1}(Y) \subset X$ и $F_\gamma(\beta X \setminus X) \subset \gamma Y \setminus Y$. Этим импликация (i) ⇒ (ii) доказана.

Импликации (ii) ⇒ (iii) и (iii) ⇒ (iv) очевидны; импликация (iv) ⇒ (i) вытекает из предложения 3.7.4. ∎

3.7.16. Теорема. *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, где X и Y — тихоновские пространства, совершенно в том и только том* *случае, если его нельзя непрерывно продолжить ни на какое хаусдорфово пространство Z, содержащее X в качестве всюду плотного собственного подпространства.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если $f\colon X \to Y$ не совершенно, то, по последней теореме, для продолжения $F\colon \beta X \to \beta Y$ отображения f имеет место соотношение $F(\beta X \setminus X) \cap Y \neq \varnothing$; значит, f продолжается на пространство $Z = F^{-1}(Y)$, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства, и $Z \neq X$. ∎

Применяя теорему 3.3.22, получаем следующую характеристику совершенных отображений со значениями в k-пространствах.

3.7.17. Теорема. *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ хаусдорфова пространства X в k-пространство Y совершенно в том и только том случае, если для каждого компактного подпространства $Z \subset Y$ сужение $f_Z\colon f^{-1}(Z) \to Z$ совершенно.* ∎

Из последней теоремы и теоремы 3.7.2 получаем следующий результат.

3.7.18. Теорема. *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ хаусдорфова пространства X в k-пространство Y совершенно в том и только том случае, если прообраз $f^{-1}(Z)$ каждого компактного множества $Z \subset Y$ компактен.* ∎

Рассмотрим теперь вопрос о сохранении топологических свойств совершенными отображениями в сторону образа и в сторону прообраза.

3.7.19. Теорема. *Если пространство X совершенно отображается на пространство Y, то $w(Y) \leqslant w(X)$.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение на Y и $\mathfrak{m} = w(X)$. Очевидно, теорема верна при $\mathfrak{m} < \aleph_0$, поэтому можно предположить, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — база пространства X, для которой $|S| = \mathfrak{m}$, и пусть $\mathscr{T}$ — семейство всех конечных подмножеств множества S. Так как $|\mathscr{T}| = \mathfrak{m}$, достаточно показать, что семейство $\{W_T\}_{T \in \mathscr{T}}$, где $W_T = Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{s \in T} U_s\right)$, является базой пространства Y. Из определения вытекает, что множества W_T открыты. Возьмем точку $y \in Y$ и произвольную ее окрестность $W \subset Y$. Прообраз $f^{-1}(y)$ — компактное подмножество множества $f^{-1}(W)$; значит, найдется $T \in \mathscr{T}$, такое, что $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{s \in T} U_s \subset f^{-1}(W)$. Ясно, что $y \in W_T$, и так как

$$Y \setminus W = f(X \setminus f^{-1}(W)) \subset f\left(X \setminus \bigcup_{s \in T} U_s\right),$$

имеем $W_T \subset W$. ∎

Как отмечено в последнем абзаце примера 3.1.26, совершенные отображения могут увеличивать характер пространств. Из последней теоремы следует, что при отождествлении конечного числа компактных попарно непересекающихся подмножеств хаусдорфова пространства в точки (см. пример 2.4.12) вес не возрастает. Пример 1.4.17 показывает, что предположение о компактности существенно.

3.7.20. Теорема. *Класс T_i-пространств инвариантен относительно совершенных отображений при* $i = 2, 3, 4, 5$ *и* 6.

Доказательство. В силу теоремы 1.5.20 и отмеченной в § 2.1 инвариантности класса наследственно нормальных пространств относительно замкнутых отображений, достаточно эту теорему доказать для $i = 2$ и 3. Эти случаи аналогичны друг другу, поэтому мы рассмотрим только случай $i = 2$.

Пусть $f: X \to Y$ — совершенное отображение хаусдорфова пространства X на пространство Y и y_1, y_2 — любые две различные точки пространства Y. Прообразы $f^{-1}(y_1)$ и $f^{-1}(y_2)$ компактны и не пересекаются. Следовательно, по теореме 3.1.6, существуют открытые множества $U, V \subset X$, такие, что $f^{-1}(y_1) \subset U$, $f^{-1}(y^2) \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Множества $Y \setminus f(X \setminus U)$ и $Y \setminus f(X \setminus V)$ открыты в Y, причем первое из них содержит y_1, а второе содержит y_2. Далее,

$$Y \setminus f(X \setminus U)] \cap [Y \setminus f(X \setminus V)] = Y \setminus [f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)] =$$
$$= Y \setminus f[(X \setminus U) \cup (X \setminus V)] = Y \setminus f[X \setminus (U \cap V)] = Y \setminus f(X) = \varnothing. \blacksquare$$

Отображение $q: T^* \to T$, описанное в примере 2.4.21, совершенно. Следовательно, вполне регулярность не сохраняется совершенными отображениями.

Теоремы 3.7.20 и 3.1.10 влекут за собой инвариантность класса компактов относительно совершенных отображений. Аналогично из теорем 3.7.20 и 3.3.23 следует, что и свойство быть k-пространством инвариантно относительно совершенных отображений.

То же имеет место и для локально компактных хаусдорфовых пространств.

3.7.21. Теорема. *Локальная компактность сохраняется совершенными отображениями.*

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ — совершенное отображение локально компактного (хаусдорфова) пространства X на пространство Y. По теореме 3.3.2, для каждого $y \in Y$ найдется открытое множество $V \subset X$, такое, что $f^{-1}(y) \subset V$ и $\overline{V}$ компактно. Множество $W = Y \setminus f(X \setminus V)$ является окрестностью точки y, и так как

$$W = Y \setminus f(X \setminus V) \subset Y \setminus f(X \setminus \overline{V}) \subset f(\overline{V}),$$

замыкание $\overline{W}$ является компактным подпространством пространства Y. $\blacksquare$

3.7.22. Теорема. *Пусть $\mathscr{P}$ — (конечно) аддитивное топологическое свойство, инвариантное относительно совершенных отображений. Если пространство X можно представить в виде объединения локально конечного (конечного) семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ замкнутых подпространств, обладающих свойством $\mathscr{P}$, то X тоже имеет свойство $\mathscr{P}$.*

Доказательство. Отображение $\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} i_{X_s}\colon \bigoplus\limits_{s\in S} X_s \to X$ совершенно. ∎

Обсудим теперь, какие свойства сохраняются совершенными отображениями в сторону прообраза.

3.7.23. Теорема. *Регулярность сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями.*

Доказательство. Пусть $f\colon X\to Y$ — совершенное отображение на регулярное пространство Y. Возьмем точку $x\in X$ и замкнутое множество $F\subset X$, такие, что $x\notin F$. Множество $F\cap f^{-1}f(x)$ компактно и не содержит x; следовательно, по теореме 3.1.6, существуют непересекающиеся открытые множества U_1, $V_1\subset X$, для которых $x\in U_1$ и $F\cap f^{-1}f(x)\subset V_1$. Множество $f(F\setminus V_1)$ замкнуто в Y и не содержит $f(x)$; значит, в силу регулярности Y, найдутся непересекающиеся открытые множества U_2, $V_2\subset Y$, такие, что $f(x)\in U_2$ и $f(F\setminus V_1)\subset V_2$. Множества $U=U_1\cap f^{-1}(U_2)$ и $V=V_1\cup f^{-1}(V_2)$ открыты в X, не пересекаются и содержат точку x и множество F соответственно. ∎

Остальные аксиомы отделимости не сохраняются в сторону прообраза совершенными отображениями. Чтобы убедиться в этом в случае наследственной нормальности и совершенной нормальности, достаточно отобразить I^c на одноточечное пространство (см. упр. 3.10.C(c)). По поводу нормальности см. задачу 3.12.19(e) или пример 5.1.40, а по поводу вполне регулярности см. замечания к этому параграфу.

3.7.24. Теорема. *Компактность и локальная компактность сохраняются в сторону прообраза совершенными отображениями.*

Доказательство. Сохранение компактности прямо следует из теоремы 3.7.2. Если $f\colon X\to Y$ — совершенное отображение, а Y — локально компактное пространство, то для каждой точки $x\in X$ найдется окрестность $U\subset X$, такая, что $f(U)$ содержится в некотором компактном подпространстве Z пространства Y. Так как $f(\bar U)\subset\overline{f(U)}\subset Z$, множество $\bar U\subset f^{-1}(Z)$ компактно. ∎

3.7.25. Теорема. *Если $f\colon X\to Y$ — совершенное отображение пространства X на k-пространство Y, то X — тоже k-пространство.*

Доказательство. Рассмотрим пространства kX и kY и отображение $kf\colon kX\to kY$, определенное в конце § 3.3. Так как Y есть k-пространство, то $Y=kY$ и $kf=f\varkappa_X$. В силу теоремы 3.7.17, отображение kf совершенно, а отсюда и из теоремы 3.7.10 следует, что $\varkappa_X$ совершенно. Будучи взаимно однозначным, отображение $\varkappa_X$ является гомеоморфизмом. Значит, X есть k-пространство. ∎

Из теоремы 3.7.1 вытекает, что если топологическое свойство $\mathcal{P}$ сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями, то произведение компакта X на T_2-пространство Y со свойством $\mathcal{P}$ тоже имеет свойство $\mathcal{P}$. Следовательно, теоремы о сохранении в сторону прообраза совершенными отображениями топологических свойств являются обобщениями соответствующих теорем о произведениях. Как показано в следующей теореме, в классе тихоновских пространств для всех топологических свойств, наследуемых замкнутыми подпространствами, сохранение в сторону прообраза совершенными отображениями равносильно сохранению этих свойств при умножении на любые компакты.

3.7.26. Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ — топологическое свойство, наследуемое замкнутыми подпространствами и сохраняющееся при умножении на любой компакт. Тогда если тихоновское пространство X совершенно отображается на пространство Y со свойством $\mathcal{P}$, то и само X обладает свойством $\mathcal{P}$.*

Доказательство. По теореме 3.2.6, существует гомеоморфное вложение $g\colon X \to Z$ пространства X в компакт Z. Диагональное отображение $f \triangle g\colon X \to Y \times Z$ является одновременно гомеоморфным вложением (см. теорему 2.3.20) и совершенным отображением (см. теорему 3.7.9). Значит, X гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $Y \times Z$ и, следовательно, обладает свойством $\mathcal{P}$. ∎

Вполне регулярность наследуется замкнутыми подпространствами и сохраняется при умножении на компакт; тем не менее она не сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями. Значит, в последней теореме существенно предположение, что X является тихоновским пространством.

3.7.27. Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ — топологическое свойство, наследуемое замкнутыми подпространствами и конечно мультипликативное. Предположим, что пространство X допускает инъективное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y со свойством $\mathcal{P}$ и совершенное отображение $g\colon X \to Z$ в пространство Z со свойством $\mathcal{P}$. Тогда и пространство X обладает свойством $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Диагональное отображение $f \triangle g\colon X \to Y \times Z$ совершенно и инъективно и, значит, является гомеоморфным вложением. Следовательно, X гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $Y \times Z$ и, значит, обладает свойством $\mathcal{P}$. ∎

Простые примеры показывают, что ни первая, ни вторая аксиомы счетности не сохраняются в сторону прообраза совершенными отображениями (см. упр. 3.7.Е). Однако из последней теоремы вытекает

3.7.28. Следствие. *Если $nw(X) \leqslant \mathfrak{m}$ и пространство X можно совершенно отобразить в пространство Y веса $\leqslant \mathfrak{m}$ (характера $\leqslant \mathfrak{m}$), то $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$ (то $\chi(X) \leqslant \mathfrak{m}$).*

Доказательство. Утверждение очевидно при $\mathfrak{m} < \aleph_0$; поэтому можно предположить, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Свойства «вес $\leqslant \mathfrak{m}$» и «характер $\leqslant \mathfrak{m}$» наследственны и конечно мультипликативны. Далее, пространство X хаусдорфово, так как на нем определено совершенное отображение. Значит, следствие вытекает из леммы 3.1.18 и теоремы 3.7.27. ∎

3.7.29. Теорема. *Если топологическое свойство $\mathscr{P}$ сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями и наследуется открыто-замкнутыми подпространствами, то в хаусдорфовых пространствах свойство $\mathscr{P}$ наследуется и замкнутыми подпространствами.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое подпространство хаусдорфова пространства X, обладающего свойством $\mathscr{P}$. Комбинация $i_F \nabla \mathrm{id}_X$ является совершенным отображением суммы $F \oplus X$ на X. Так как F — открыто-замкнутое подпространство пространства $F \oplus X$, пространство F обладает свойством $\mathscr{P}$. ∎

Топологические свойства хаусдорфовых пространств, сохраняемые совершенными отображениями как в сторону образа, так и в сторону прообраза, называются *совершенными свойствами.* Класс всех хаусдорфовых пространств с фиксированным совершенным свойством называется *совершенным классом пространств.* Из теорем этого параграфа вытекает, что классы регулярных пространств, компактов, локально компактных хаусдорфовых пространств и k-пространств являются совершенными классами.

Помимо совершенных отображений рассматривается и более широкий класс почти совершенных отображений. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *почти совершенным*, если f замкнуто и все прообразы точек $f^{-1}(y)$ — компактные подпространства пространства X. Следовательно, совершенные отображения — это в точности почти совершенные отображения, определенные на хаусдорфовых пространствах. Читателю не составит труда проверить, что теоремы и предложения 3.7.1—3.7.7 и теорема 3.7.13 остаются верными (вместе с их доказательствами), если заменить «совершенное» на «почти совершенное», «компакт» на «компактное пространство» и «хаусдорфово пространство» на «топологическое пространство». Легко проверяется также, что теорема 3.7.9 и предложение 3.7.10 верны и для почти совершенных отображений; однако предположение, что эти отображения принимают значения в хаусдорфовых пространствах, существенно в обоих утверждениях (см. упр. 3.7.А).

Рассмотрев отображения в одноточечные пространства, легко убедиться, что в теоремах о сохранении топологических свойств в сторону прообраза необходимо налагать некоторые ограничения на прообразы точек. В этом параграфе было показано, что предположение о компактности прообразов точек вместе с предположением о замкнутости отображения ведет к серии теорем о сохранении свойств в сторону прообраза. Оказывается, топологические свойства, как правило, не сохраняются в сторону прообраза открытыми отображениями с компактными прообразами точек (см. упр. 3.7.Н). Поэтому в дальнейшем, обсуждая вопросы сохранения свойств в сторону прообраза, мы ограничиваемся замкнутыми отображениями, прообразы точек при которых удовлетворяют различным требованиям «типа компактности».

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Класс совершенных отображений (для метрических пространств) был введен Вайнштейном в [1947]. Независимо совершенные отображения были введены и исследованы (в классе локально компактных хаусдорфовых пространств) Лере в [1950] и Бурбаки в [1951]. Два последних автора определили этот класс отображений посредством характеристики, содержащейся в теореме 3.7.18. Теорема 3.7.2 была доказана Люббеном в [1941]. Важная теорема 3.7.7, которая показывает, что совершенные отображения играют среди всех непрерывных отображений роль, сходную с ролью компактов среди всех топологических пространств, была доказана Фроликом в [1960] и Бурбаки в [1961]. Теорема 3.7.9 доказана Архангельским в [1967a] (В. И. Пономарев показал в [1966], что эта теорема имеет место в классе тихоновских пространств). Теорема 3.7.10 доказана Бурбаки в [1961], а теорема 3.7.16 была сформулирована Исбеллом в [1962]. Приведенные нами доказательства этих трех теорем взяты из работы Майкла [1971b]. Бурбаки в [1961] определил совершенные отображения как отображения, удовлетворяющие условию (iii) теоремы 3.7.13, и доказал эквивалентность всех условий этой теоремы. Работа Хенриксена и Исбелла [1958] содержит теорему 3.7.15 (импликация (i)$\Rightarrow$(ii) была замечена Таймановым в [1955]), с помощью которой эти авторы доказали сохранение совершенными отображениями многих свойств в сторону образа и в сторону прообраза. Книга Келли [1955] содержит теоремы 3.7.19, 3.7.20 и 3.7.21 (теорема 3.7.19 при $\mathfrak{m} = \aleph_0$ была доказана Уайберном в [1942]). Теорема 3.7.23

получена Хенриксеном и Исбеллом в [1958], теорема 3.7.24 была в принципе доказана Вайнштейном в [1952] (объявлена в [1947]), а теорема 3.7.25 доказана Архангельским в [1965] (объявлена в [1963]). Работа ван дер Слота [1966] содержит теорему 3.7.26, статья Архангельского [1967a] содержит теорему 3.7.27, а работа Хенриксена и Исбелла [1958] содержит теорему 3.7.29. Пример, показывающий, что вполне регулярность не сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями, был приведен Хенриксеном и Исбеллом в [1958]. Хабер в [1972] упростил и усилил этот их результат.

УПРАЖНЕНИЯ

3.7.A. (a) Диагональное произведение двух почти совершенных отображений может не быть замкнутым отображением.

(b) Докажите существенность в теоремах 3.7.9 и 3.7.10 предположения о том, что рассматриваемые отображения принимают значения в хаусдорфовых пространствах.

(c) Укажите пример совершенного отображения $f\colon X \to I$, которое можно непрерывно продолжить на некоторое T_1-пространство Y, содержащее X в качестве собственного всюду плотного подпространства.

3.7.B. Проверьте, что сумма $\bigoplus_{s \in S} f_s$ является совершенным отображением в том и только том случае, если все отображения f_s совершенны.

3.7.C. Докажите, что отображение $f^*\colon X/E \to Y/E'$, определенное в упр. 2.4.B, является совершенным отображением, когда оба отображения $f\colon X \to Y$ и $q'\colon Y \to Y/E'$ совершенны и пространство X/E хаусдорфово.

3.7.D (Динь Ньё Тонг [1963]). Пусть $f\colon X \to Y$ — наследственно факторное отображение с компактными прообразами точек, определенное на хаусдорфовом пространстве X. Докажите, что $w(Y) \leqslant w(X)$ и что если пространство X локально компактно и хаусдорфово, а пространство Y хаусдорфово, то Y локально компактно.

3.7.E. (a) Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение регулярного пространства X в топологическое пространство Y и для каждого $x \in X$ выполняются неравенства $\chi(f(x), Y) \leqslant \mathfrak{m}$ и $\chi(x, f^{-1}f(x)) \leqslant \mathfrak{m}$, то $\chi(x, X) \leqslant \mathfrak{m}$.

(b) Заметьте, что если отображение f совершенно, то в утверждении (a) можно опустить предположение о регулярности X.

3.7.F (Чобан [1967]). (a) Если пространство X можно совершенно отобразить на пространство Y, то $h(X) \leqslant h(Y)$.

(b) Приведите пример совершенного отображения пространства с первой аксиомой счетности X на пространство Y, такое, что $h(Y)=2^{\aleph_0}$.

Указание. Воспользуйтесь упр. 3.1.I.

3.7.G (Годел [1969a]). Пусть $\mathscr{P}$ — топологическое свойство, наследственное по замкнутым множествам и такое, что каждое пространство X, представимое в виде объединения локально конечного семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ замкнутых подпространств со свойством $\mathscr{P}$, само обладает свойством $\mathscr{P}$ (см. теорему 3.7.22).

(a) Покажите, что если существует открытое покрытие $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_i$ пространства X, такое, что все семейства $\mathscr{U}_i$ локально конечны и $\overline{U}$ обладает свойством $\mathscr{P}$ для каждого $U\in\mathscr{U}$, то и все пространство X обладает свойством $\mathscr{P}$.

(b) Пусть $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_i$ — открытое покрытие пространства X, где все $\mathscr{U}_i$ — локально конечные семейства множеств. Если каждое $U\in\mathscr{U}$ обладает свойством $\mathscr{P}$ и может быть представлено в виде объединения счетного семейства открытых множеств, содержащихся в U вместе с замыканием (в частности, если покрытие $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_i$ состоит из функционально открытых множеств, обладающих свойством $\mathscr{P}$), то и само пространство X имеет свойство $\mathscr{P}$.

(c) Пусть $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_i$ — открытое покрытие хаусдорфова пространства X, где все семейства $\mathscr{U}_i$ локально конечны, каждое $U\in\mathscr{U}$ обладает свойством $\mathscr{P}$ и $\operatorname{Fr} U$ компактна для всех $U\in\mathscr{U}$. Тогда пространство X тоже обладает свойством $\mathscr{P}$.

(d) Приведите пример нерегулярного хаусдорфова пространства, представимого в виде объединения двух нормальных подпространств со счетной базой, граница одного из которых компактна.

3.7.H. Приведите пример открытого отображения не нормального вполне регулярного пространства на отрезок I, при котором все прообразы точек гомеоморфны I.

Указание. Возьмите сужение определенного в 1.4.15 отображения плоскости Немыцкого на вещественную прямую.

3.8. ЛИНДЕЛЁФОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Мы называем топологическое пространство X *линделёфовым пространством*, или пространством *со свойством Линделёфа*, если X регулярно и из каждого открытого покрытия этого пространства можно выбрать счетное подпокрытие[1]). Ясно, что регулярное пространство X является линделёфовым пространством в том и только том случае, если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать счетное покрытие. Из этих определений следует, что каждый компакт является линделёфовым пространством.

Из теоремы 1.1.14 следует

3.8.1. Теорема. *Каждое регулярное пространство со счетной базой является линделёфовым пространством.* ∎

Из леммы 1.5.14 вытекает

3.8.2. Теорема. *Каждое линделёфово пространство нормально.* ∎

Будем говорить, что семейство $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s \in S}$ подмножеств множества X *счетно центрировано*, если $\mathcal{F} \neq \varnothing$ и $\bigcap_{s \in S_0} F_s \neq \varnothing$ для каждого счетного множества $S_0 \subset S$.

Доказательства следующих четырех теорем параллельны доказательствам теорем 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 и 3.1.10; мы оставляем их читателю.

3.8.3. Теорема. *Регулярное пространство X обладает свойством Линделёфа в том и только том случае, если каждое счетно центрированное семейство замкнутых в X множеств имеет непустое пересечение.* ∎

3.8.4. Теорема. *Каждое замкнутое подпространство линделёфова пространства является линделёфовым пространством.* ∎

3.8.5. Теорема. *Если подпространство A топологического пространства X обладает свойством Линделёфа, то для любого семейства $\{U_s\}_{s \in S}$ открытых в X множеств, такого, что $A \subset \bigcup_{s \in S} U_s$, найдется счетное множество $\{s_1, s_2, \ldots\} \subset S$, такое, что $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{s_i}$.* ∎

3.8.6. Теорема. *Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение линделёфова пространства X на регулярное пространство Y, то Y — линделёфово пространство.* ∎

Доказать следующую теорему предоставляется читателю.

3.8.7. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, обладает свойством Линделёфа в том и только том случае, если все пространства X_s обладают свойством Линделёфа и множество S счетно.* ∎

[1]) Если X — произвольное топологическое пространство и из каждого его открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие, то пространство X называется *финально компактным*. — *Прим. перев.*

Из теоремы 3.8.5 следует, что если регулярное пространство является объединением счетного семейства подпространств со свойством Линделёфа, то оно само является линделёфовым пространством. В частности, каждое регулярное пространство, являющееся объединением счетного семейства компактных подпространств (пространства с этим свойством называются *σ-компактными*), обладает свойством Линделёфа и, следовательно, нормально. Применив теорему 3.8.4, мы заключаем, что каждое F_σ-множество в линделёфовом пространстве является линделёфовым пространством.

Тривиальным видоизменением доказательства теоремы 3.7.2 получается

3.8.8. Теорема. *Если f: $X \to Y$ — замкнутое отображение регулярного пространства X и все прообразы точек $f^{-1}(y)$ обладают свойством Линделёфа, то для каждого линделёфова подпространства $Z \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(Z)$ тоже является линделёфовым пространством.* ∎

3.8.9. Теорема. *Класс всех линделёфовых пространств является совершенным классом.*

Доказательство. Сохранение свойства Линделёфа (в сторону образа) при совершенных отображениях вытекает из теорем 3.7.20 и 3.8.6; сохранение его в сторону прообраза следует из теорем 3.7.23 и 3.8.8. ∎

3.8.10. Следствие. *Декартово произведение линделёфова пространства и компакта является линделёфовым пространством.* ∎

В следующей теореме устанавливается важное свойство линделёфовых пространств.

3.8.11. Теорема. *В каждое открытое покрытие линделёфова пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие линделёфова пространства X. Так как X регулярно, для каждой точки $x \in X$ найдутся открытые множества U_x, $V_x \subset X$, такие, что $x \in U_x \subset \subset \overline{U}_x \subset V_x$ и V_x содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$. Пусть $\{U_{x_i}\}_{i=1}^\infty$ — счетное подпокрытие покрытия $\{U_x\}_{x \in X}$ пространства X. Множества

$$W_i = V_{x_i} \setminus (\overline{U}_{x_1} \cup \overline{U}_{x_2} \cup \ldots \cup \overline{U}_{x_{i-1}}), \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

открыты и покрывают X. Действительно, для любого $x \in X$ имеем $x \in W_{i(x)}$, где $i(x)$ — наименьшее натуральное число i, такое, что $x \in V_{x_i}$. Покрытие $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ вписано в $\mathcal{U}$ и локально конечно, так как $U_{x_j} \cap W_i = \varnothing$ при $i > j$. ∎

Понятие линделёфова пространства приводит к понятию *числа Линделёфа*: наименьший кардинал $\mathfrak{m}$, такой, что из каждого открытого покрытия пространства X можно выбрать подпокрытие мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, называется *числом Линделёфа* пространства X и обозначается через $l(X)$. Таким образом, регулярное пространство X обладает свойством Линделёфа в том и только том случае, если $l(X) \leqslant \aleph_0$.

Из замечания 1.1.16 сразу вытекает

3.8.12. Теорема. *Для каждого топологического пространства X имеет место неравенство $l(X) \leqslant nw(X)$.* ∎

3.8.13. Примеры. Плоскость Немыцкого — сепарабельное не линделёфово пространство (пример нормального пространства с теми же свойствами приведен в упр. 3.8.E).

Пространство $A(\mathfrak{m})$ при $\mathfrak{m} > \aleph_0$ является линделёфовым не сепарабельным пространством.

Так как каждое счетное регулярное пространство обладает свойством Линделёфа, из 3.3.24 вытекает, что существуют линделёфовы пространства, не являющиеся k-пространствами. ∎

3.8.14. Пример. Покажем теперь, что прямая Зоргенфрея K является линделёфовым пространством. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — произвольное открытое покрытие пространства K и V_s — внутренность множества U_s по отношению к обычной топологии вещественной прямой. Покажем, что множество $L = K \setminus \bigcup_{s \in S} V_s$ счетно. Действительно, для каждого $x \in L$ найдутся $s(x) \in S$ и вещественное число $r(x) > x$, такие, что $[x, r(x)) \subset U_{s(x)}$. Далее, из определения множества L следует, что если $x \neq x'$, то $[x, r(x)) \cap [x', r(x')) = \varnothing$. Так как мощность каждого семейства попарно не пересекающихся полуоткрытых интервалов не превосходит $\aleph_0$, имеем $|L| \leqslant \aleph_0$.

Множество $K \setminus L$ с топологией, индуцированной обычной топологией вещественной прямой, обладает счетной базой. Значит, покрытие $\{V_s\}_{s \in S}$ множества $K \setminus L$ содержит счетное подпокрытие $\{V_{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$ этого множества. Ясно, что семейство $\{U_{s(x)}\}_{x \in L} \cup \{U_{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$ является счетным подпокрытием покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$; следовательно, K — линделёфово пространство. Пространство K является примером сепарабельного линделёфова пространства с первой аксиомой счетности, но без счетной базы [1]).

3.8.15. Пример. В примере 2.3.12 было показано, что произведение $K \times K$ не нормально. Применив теорему 3.8.2, мы заклю-

---

[1]) Прямая Зоргенфрея K является также наследственно линделёфовым пространством без счетной сети. — *Прим. перев.*

чаем, что произведение двух линделёфовых пространств может не быть линделёфовым пространством (см. упр. 3.8.G и 3.9.F). ∎

Существует пространство X, все конечные степени которого являются линделёфовыми пространствами и все же $X^{\aleph_0}$ не нормально. В частности, отсюда следует, что предел обратной последовательности линделёфовых пространств может не быть линделёфовым пространством (этот факт можно установить проще; см. задачу 5.5.4(c)).

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие линделёфова пространства было введено П. С. Александровым и П. С. Урысоном в [1929] (Линделёф доказал в [1903], что произвольное семейство открытых в R^n множеств содержит счетное подсемейство с тем же объединением). Теорема 3.8.9 доказана Хенриксеном и Исбеллом в [1958]. Теорема 3.8.11 была доказана Моритой в [1948] (а при дополнительном предположении локальной компактности или метризуемости — Дьедонне в [1944]). Примеры 3.8.14 и 3.8.15 приведены Зоргенфреем в [1947]. Пространство X, упомянутое в конце параграфа, было определено Пшимусинским в [1980]. Ранее такое пространство было определено Майклом в [1971] при дополнительном предположении континуум-гипотезы.

УПРАЖНЕНИЯ

3.8.A. (a) Пространство X является наследственно линделёфовым пространством в том и только том случае, если все открытые подпространства пространства X обладают свойством Линделёфа.

(b) Покажите, что линделёфово пространство X является наследственно линделёфовым пространством в том и только том случае, если X совершенно нормально.

3.8.B (Ю. М. Смирнов [1950]). Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в регулярном пространстве X, причем A и B обладают свойством Линделёфа. Покажите, что найдутся открытые множества U, $V \subset X$, такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.

3.8.C. (a) Каждое хемикомпактное пространство σ-компактно, но обратное (в классе хаусдорфовых пространств) может не иметь места (см. упр. 3.4.E).

(b) Докажите, что для локально компактного хаусдорфова пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X линделёфово.*

(2) *Пространство X хемикомпактно.*

(3) *Пространство X σ-компактно.*

(4) *Существует последовательность* $A_1, A_2, \ldots$ *компактных подпространств пространства* X, *такая, что* $A_i \subset \operatorname{Int} A_{i+1}$ *и* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) *Пространство* X *компактно или* $\chi(\Omega, \alpha X) = \aleph_0$.

3.8.D (М. Рудин и Кли [1956], Майкл [1961]). Докажите, что если X и Y — пространства со счетной базой и Y регулярно, то пространство Y^X наследственно линделёфово как в компактно-открытой топологии, так и в топологии поточечной сходимости (см. задачу 5.5.13).

Указание. Примените упр. 3.4.G(a).

3.8.E (Энгелькинг [1968]). Пусть Y — подпространство тихоновского куба $T = I^{\mathfrak{c}}$, гомеоморфное пространству W_0 всех счетных ординалов, и пусть C — счетное всюду плотное множество в T. Рассмотрим пространство $A(T)$, определенное в упр. 3.1.G, и его подпространство $X = Y_1 \cup C_2$. Докажите, что X — нормальное сепарабельное не линделёфово пространство (см. задачу 3.12.17(c)).

Указание. Если A и B — непересекающиеся замкнутые множества в W_0, то хотя бы одно из них компактно.

Замечание. Первые примеры пространств с подобными свойствами были построены М. Рудин в [1956] и Маколеем в [1956a].

3.8.F (Хенриксен, Исбелл и Джонсон [1961]). (a) Пусть X — подпространство компакта Z и $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное семейство замкнутых в Z множеств, причем для любых $x \in X$ и $y \in Z \setminus X$ найдется такое i, что $x \in F_i$ и $y \notin F_i$. Докажите, что тогда пространство X линделёфово[1]).

Указание. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — открытое покрытие пространства X. Множества $V_s = Z \setminus \overline{X \setminus U_s}$ открыты в Z и $X \subset V = \bigcup_{s \in S} V_s$. Покажите, что X содержится в объединении всех конечных пересечений $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_k}$, не имеющих общих точек с $Z \setminus V$.

(b) Пусть X — компакт и $\mathscr{L}$ — наименьшее семейство подпространств пространства X, содержащее все замкнутые множества и замкнутое относительно счетных объединений и пересечений. Докажите, что все элементы семейства $\mathscr{L}$ обладают свойством Линделёфа.

3.8.G (Хейджер [1969]). Докажите, что произведение счетного семейства регулярных σ-компактных пространств является линделёфовым пространством.

Указание. Примените упр. 3.8.F(a).

---

[1]) Класс всех пространств X, таких, как в этом примере, совпадает с классом *линделёфовых* Σ-*пространств*, введенным Нагами в [1969*].

3.8.H. Пусть $\mathscr{P}$ — топологическое свойство, наследуемое замкнутыми подпространствами и такое, что если какое-либо пространство X является объединением локально конечного семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ замкнутых подпространств, обладающих свойством $\mathscr{P}$, то и само X имеет свойство $\mathscr{P}$ (см. теорему 3.7.22 и упр. 3.7.G).

(a) Пусть пространство X регулярно и существует локально конечное открытое покрытие $\mathscr{U}$ этого пространства, такое, что каждое $U \in \mathscr{U}$ обладает свойством $\mathscr{P}$ и $\operatorname{Fr} U$ является линделёфовым пространством для всех $U \in \mathscr{U}$. Покажите, что тогда и само X имеет свойство $\mathscr{P}$.

Указание. Примените упр. 3.8.B.

(b) Приведите пример не нормального тихоновского пространства, представимого в виде объединения счетного семейства открытых нормальных подпространств, граница каждого из которых линделёфова.

(c) Покажите, что если нормальное пространство X допускает открытое покрытие $\mathscr{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{U}_i$, где каждое семейство $\mathscr{U}_i$ локально конечно, все $U \in \mathscr{U}$ обладают свойством $\mathscr{P}$ и $\operatorname{Fr} U$ — линделёфово пространство для каждого $U \in \mathscr{U}$, то и все пространство X имеет свойство $\mathscr{P}$.

3.9. ПОЛНЫЕ ПО ЧЕХУ ПРОСТРАНСТВА

Следующая теорема, аналогичная теореме 3.5.8, ляжет в основу последующего определения.

3.9.1. Теорема. *Для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Нарост $cX \setminus c(X)$ каждой компактификации cX пространства X является F_σ-множеством в cX.*

(ii) *Нарост $\beta X \setminus \beta(X)$ является F_σ-множеством в βX.*

(iii) *Существует компактификация cX пространства X, такая, что нарост $cX \setminus c(X)$ является F_σ-множеством в cX.*

Доказательство. Импликации (i)$\Rightarrow$(ii) и (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидны; остается доказать, что (iii)$\Rightarrow$(i).

Покажем сначала, что (iii)$\Rightarrow$(ii). В силу максимальности βX, существует непрерывное отображение $f\colon \beta X \to cX$, такое, что $f\beta = c$. По теореме 3.5.7, $f^{-1}(cX \setminus c(X)) = \beta X \setminus \beta(X)$. Значит, так как нарост $cX \setminus c(X)$ является F_σ-множеством в cX, нарост $\beta X \setminus \beta(X)$ является F_σ-множеством в βX.

Покажем теперь, что (ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $\beta X \setminus \beta(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — замкнутые в βX множества. Рассмотрим произвольную компактификацию cX пространства X и непрерывное отображение $f\colon \beta X \to cX$, для которого $f\beta = c$. По теореме 3.5.7, имеем $cX \setminus c(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(F_i)$. Так как множества $f(F_i)$ замкнуты в cX, нарост $cX \setminus c(X)$ является F_σ-множеством в cX. ∎

Топологическое пространство X называется *полным по Чеху*, если X — тихоновское пространство, удовлетворяющее условию (i), а следовательно, и всем остальным условиям теоремы 3.9.1.

Заметьте, что каждый компакт полон по Чеху. Локально компактные хаусдорфовы пространства тоже полны по Чеху, так как каждое не компактное локально компактное хаусдорфово пространство обладает компактификацией с одноточечным наростом. Пространство всех иррациональных чисел с топологией подпространства вещественной прямой служит примером не локально компактного пространства, полного по Чеху.

Данное нами определение полных по Чеху пространств является внешним определением: оно характеризует полные по Чеху пространства через их отношение к другим топологическим пространствам, а именно их компактификациям. Установим теперь внутреннюю характеристику полных по Чеху пространств.

Сначала введем вспомогательное понятие. Будем говорить, что *диаметр подмножества* A топологического пространства X *меньше, чем покрытие* $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ этого пространства, и писать $\delta(A) < \mathscr{A}$, если существует $s \in S$, такое, что $A \subset A_s$.

3.9.2. Теорема. *Тихоновское пространство X полно по Чеху тогда и только тогда, когда существует счетное семейство $\{\mathscr{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых покрытий пространства X со свойством: если $\mathscr{F}$ — центрированное семейство замкнутых в X множеств, такое, что для каждого $i = 1, 2, \ldots$ в $\mathscr{F}$ есть множество диаметра, меньшего чем $\mathscr{A}_i$, то пересечение семейства $\mathscr{F}$ не пусто.*

Доказательство. Предположим, что тихоновское пространство $X \subset \beta X$ обладает семейством $\{\mathscr{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых покрытий с требуемым свойством. Пусть $\mathscr{A}_i = \{U_{s,i}\}_{s \in S_i}$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $V_{s,i}$ — открытое множество в βX, такое, что $U_{s,i} = X \cap V_{s,i}$ при $s \in S_i$ и $i = 1, 2, \ldots$. Ясно, что

$$X \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{s \in S_i} V_{s,i};$$

будет доказано, что X полно по Чеху, если мы установим обратное включение.

Возьмем любую точку $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{s \in S_i} V_{s,i}$ и пусть $\mathscr{B}(x)$ — семейство всех окрестностей точки x в βX. Семейство $\mathscr{F} =$

$=\{X\cap\overline{V}\colon V\in\mathscr{B}(x)\}$, где $\overline{V}$ — замыкание множества V в βX, центрировано и состоит из замкнутых в X множеств. Так как для каждого i существует $s\in S_i$, такое, что $x\in V_{s,i}$, из регулярности βX следует, что семейство $\mathscr{F}$ содержит множества диаметра, меньшего чем $\mathscr{A}_i$, при $i=1, 2, \ldots$. По предположению, $X\cap\bigcap\{\overline{V}\colon V\in\mathscr{B}(x)\}\neq\varnothing$. Так как $\bigcap\{\overline{V}\colon V\in\mathscr{B}(x)\}=\{x\}$, заключаем, что $x\in X$.

Рассмотрим теперь произвольное полное по Чеху пространство $X\subset\beta X$. Множество X — типа G_δ в βX, т. е. существует семейство $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ открытых в βX множеств, такое, что $X=\bigcap\limits_{i=1}^\infty G_i$. Для каждого $x\in X$ и $i=1, 2, \ldots$ выберем открытое множество $V_{x,i}\subset\beta X$, такое, что $x\in V_{x,i}\subset\overline{V}_{x,i}\subset G_i$, и положим $\mathscr{A}_i=\{X\cap V_{x,i}\}_{x\in X}$. Покажем, что семейство $\{\mathscr{A}_i\}_{i=1}^\infty$ открытых покрытий пространства X обладает нужным свойством.

Рассмотрим произвольное центрированное семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнутых в X множеств, содержащее множества диаметра, меньшего чем $\mathscr{A}_i$, при $i=1, 2, \ldots$. Так как $\{\overline{F}_s\}_{s\in S}$ — центрированное семейство замкнутых в βX множеств, найдется точка $x\in\bigcap\limits_{s\in S}\overline{F}_s$. Будет доказано, что $x\in\bigcap\limits_{s\in S}F_s$, если мы установим, что $x\in X$.

Для каждого целого положительного i выберем $s_i\in S$, такое, что $\delta(F_{s_i})<\mathscr{A}_i$, и $x_i\in X$, такое, что $F_{s_i}\subset X\cap V_{x_i,i}$. Так как

$$x\in\overline{F}_{s_i}\subset\overline{X\cap V_{x_i,i}}\subset\overline{V}_{x_i,i}\subset G_i$$

при $i=1, 2, \ldots$, то $x\in\bigcap\limits_{i=1}^\infty G_i=X$. ∎

Следующая теорема важна разнообразными приложениями. Ее название объясняется тем, что счетные объединения нигде не плотных множеств иногда называют *множествами первой категории*.

3.9.3. Теорема Бэра о категории. *В полном по Чеху пространстве X объединение $A=\bigcup\limits_{i=1}^\infty A_i$ любой последовательности нигде не плотных множеств является коплотным множеством, т. е. его дополнение $X\setminus A$ всюду плотно в X.*

Доказательство. Покажем, что множество $G\setminus A$ не пусто, каково бы ни было непустое открытое множество $G\subset X$.

Пусть $\{\mathscr{A}_i\}_{i=1}^\infty$ — семейство открытых покрытий пространства X, такое, как в теореме 3.9.2. Так как множество A_1 нигде не плотно, найдутся точка $x \in G \setminus \bar{A}_1$ и ее окрестность G_1, такие, что

$$\bar{G}_1 \subset G \setminus \bar{A}_1 \quad \text{и} \quad \delta(\bar{G}_1) < \mathscr{A}_1.$$

Аналогично, пользуясь тем, что $G_1 \setminus \bar{A}_2$ — непустое открытое множество, получаем непустое открытое множество G_2, для которого

$$\bar{G}_2 \subset G_1 \setminus \bar{A}_2 \quad \text{и} \quad \delta(\bar{G}_2) < \mathscr{A}_2.$$

По индукции определяется последовательность $G_1, G_2, \ldots$ непустых открытых множеств в X, удовлетворяющая условиям $G \supset \bar{G}_1 \supset \bar{G}_2 \supset \ldots$, $\bar{G}_i \cap A_i = \varnothing$ и $\delta(\bar{G}_i) < \mathscr{A}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Легко проверяется, что $\varnothing \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{G}_i \subset G \setminus A$. ∎

Следующее утверждение является двойственным вариантом теоремы Бэра о категории.

3.9.4. Следствие. *В полном по Чеху пространстве X пересечение $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ любой последовательности $G_1, G_2, \ldots$ всюду плотных открытых множеств всюду плотно.* ∎

3.9.5. Теорема. *Каждое полное по Чеху пространство является k-пространством.*

Доказательство. Пусть X — полное по Чеху пространство и $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ — семейство открытых множеств в βX, такое, что $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$. Рассмотрим произвольное множество $A \subset X$, пересечение которого с каждым компактным подпространством пространства X замкнуто, и предположим, что само A не замкнуто в X, т. е. что существует точка $x \in X \cap (\bar{A} \setminus A)$, где черта обозначает замыкание в βX. Пусть $U_0 = \beta X, U_1, U_2, \ldots$ — последовательность окрестностей точки x в βX, такая, что $\bar{U}_i \subset U_{i-1} \cap G_i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Пересечение $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{U}_i \subset X$ компактно; значит, компактно и множество $A \cap Z$. Так как $x \notin A \cap Z$, найдется окрестность $V \subset \beta X$ точки x, для которой $\bar{V} \cap A \cap Z = \varnothing$.

Окрестность $V \cap U_i$ точки x пересекает множество A. Выберем точку $x_i \in A \cap V \cap U_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ и положим $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Из 3.1.5 следует, что

(1) если U открыто в βX и $Z \subset U$, то для некоторого i имеем $U_i \subset U$,

а отсюда вытекает, что множество $Z \cup B$ компактно. Значит, пересечение $A \cap [\bar{V} \cap (Z \cup B)]$ тоже компактно. Так как $B \subset A \cap V$, то

$$A \cap [\bar{V} \cap (Z \cup B)] = (\bar{V} \cap A \cap Z) \cup (A \cap \bar{V} \cap B) = B,$$

откуда следует, что $U = \beta X \setminus B$ открыто в βX и $Z \subset U$. В силу (1), найдется такое i, что $U_i \cap B = \varnothing$, — что невозможно, так как $x_i \in U_i \cap B$. Полученное противоречие показывает, что A замкнуто, т. е. что X есть k-пространство[1]). ∎

3.9.6. Теорема. *Полнота по Чеху наследуется замкнутыми множествами и G_δ-множествами.*

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает сразу из теоремы 3.9.2. Вторая часть следует из того, что если X есть G_δ-множество в βX и A есть G_δ-множество в X, то A есть G_δ-множество в βX и тем более в замыкании $\bar{A} \subset \beta X$, которое является компактификацией пространства A. ∎

3.9.7. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ полна по Чеху в том и только том случае, если все пространства X_s полны по Чеху.*

Доказательство. Если сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ полна по Чеху, то все пространства X_s полны по Чеху в силу 2.2.2 и 3.9.6

Предположим теперь, что все пространства X_s полны по Чеху, и для каждого $s \in S$ возьмем некоторую компактификацию c_sX_s пространства X_s; имеем $c_sX_s \setminus X_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{s,i}$, где $F_{s,i}$ — замкнутые множества в c_sX_s при $s \in S$ и $i = 1, 2, \ldots$. В силу 3.3.12, сумма $X = \bigoplus_{s \in S} c_sX_s$ — локально компактное хаусдорфово пространство; тем более X полно по Чеху. Так как $X \setminus \bigoplus_{s \in S} X_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{s \in S} F_{s,i} \right)$ и множества $\bigcup_{s \in S} F_{s,i}$ замкнуты в X при $i = 1, 2, \ldots$, сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ полна по Чеху в силу 3.9.6. ∎

3.9.8. Теорема. *Произведение счетного семейства полных по Чеху пространств является полным по Чеху пространством.*

Доказательство. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — семейство полных по Чеху пространств. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ возьмем произвольную компактификацию c_iX_i пространства X_i. Тогда $c_iX_i \setminus X_i$ есть F_σ-множество в c_iX_i при $i = 1, 2, \ldots$. В силу 2.3.5 и 3.2.4, про-

[1]) Не всегда G_δ-множество в k-пространстве является k-пространством, как можно было бы предположить после теоремы 3.9.5 (см. пример 1.6.19). — *Прим. перев.*

странство $\prod_{i=1}^{\infty} c_i X_i$ является компактификацией произведения $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Множество $F_j = \prod_{i=1}^{\infty} A_{i,j}$, где $A_{j,j} = c_j X_j \setminus X_j$ и $A_{i,j} = c_i X_i$ при $i \neq j$, является множеством типа F_σ в $\prod_{i=1}^{\infty} c_i X_i$ при $j = 1, 2, \ldots$. Так как $\prod_{i=1}^{\infty} c_i X_i \setminus \prod_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, произведение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ является полным по Чеху пространством. ∎

3.9.9. Следствие. *Предел обратной последовательности полных по Чеху пространств является полным по Чеху пространством.* ∎

Из упр. 3.9.C(b) следует, что предположение о счетности существенно в последней теореме и что следствие 3.9.9 не распространяется на произвольные обратные спектры.

Из определения полноты по Чеху и теоремы 3.7.15 получаем следующий результат:

3.9.10. Теорема. *Пусть X и Y — тихоновские пространства и $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение пространства X на пространство Y. Тогда пространство X полно по Чеху в том и только том случае, если пространство Y полно по Чеху.* ∎

С другой стороны, полнота по Чеху не сохраняется ни замкнутыми, ни открытыми отображениями (см. упр. 3.9.I и задачи 3.12.18(d) и 5.5.8(b)).

Предположение, что X и Y — тихоновские пространства, существенно в последней теореме. Действительно, совершенное отображение в примере 2.4.21 преобразует полное по Чеху пространство в пространство, не являющееся тихоновским. Существуют также примеры открытых совершенных отображений не тихоновских пространств на пространства, полные по Чеху. Таким образом, класс полных по Чеху пространств совершенен лишь «по модулю аксиом отделимости».

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Полные по Чеху пространства были определены в работе Чеха [1937]; эта работа содержит также доказательство теоремы Бэра о категории, известной до этого для более узкого класса пространств, метризуемых полной метрикой (см. замечания к § 4.3). Внутренняя характеристика полных по Чеху пространств, данная в теореме 3.9.2, была независимо установлена Froliком в [1960b] и Архангельским в [1961]. Аналогичная характеристика была дана Шаниным в [1943a]. Теорема 3.9.5 была доказана Архангельским в [1965], а теорема 3.9.10 — Хенриксеном и Исбеллом в [1958]. Пример открытого совершенного отображения не тихоновского пространства на нормальное полное по Чеху пространство приведен Хабером в [1972].

УПРАЖНЕНИЯ

3.9.A. Покажите, что если полное по Чеху пространство X является подпространством хаусдорфова пространства Y, то найдется G_δ-множество $Z \subset Y$, такое, что $X = \overline{X} \cap Z$.

Выведите отсюда, что подпространство M полного по Чеху пространства X полно по Чеху в том и только том случае, если M можно представить в виде $F \cap Z$, где F замкнуто в X, а Z есть G_δ-множество в X.

3.9.B. Покажите, что пространство всех рациональных чисел, наделенное топологией подпространства вещественной прямой, не полно по Чеху. Выведите отсюда, что множество всех иррациональных чисел не является F_σ-множеством на вещественной прямой.

3.9.C. (a) (Окстоби [1961]). Докажите, что теорема Бэра о категории выполняется для произведения любого множества полных по Чеху пространств.

(b) Заметьте, что произведение $N^{\aleph_1}$ не полно по Чеху.

Указание. См. упр. 3.3.E(a).

(c) Выведите теорему Бэра о категории прямо из определения полноты по Чеху.

3.9.D. Покажите с помощью теоремы 3.9.2, что плоскость Немыцкого полна по Чеху.

Указание. Заметьте сначала, что подпространство $L_2 \subset L$ полно по Чеху.

3.9.E (Архангельский [1960a], Архангельский и Голштынский [1963]). Пусть X — тихоновское пространство. Обозначим через $g(X)$ наименьший кардинал $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, для которого существует компакт Y, содержащий X, и семейство $\mathcal{U}$ открытых в Y множеств, такие, что $|\mathcal{U}| = \mathfrak{m}$, и если $x \in X$ и $y \in Y \setminus X$, то найдется $U \in \mathcal{U}$ со свойствами: $x \in U$ и $y \notin U$.

(a) Заметьте, что $g(X) = \aleph_0$ для каждого полного по Чеху пространства X. Покажите, что $h(X) \leqslant g(X)$, каково бы ни было тихоновское пространство X (см. упр. 3.1.F), и приведите пример совершенно нормального пространства X, для которого $h(X) < g(X)$.

(b) *Внешней базой подпространства* X в пространстве Y называется семейство $\mathcal{B}$ открытых в Y множеств, такое, что если $x \in X$ и U — любая окрестность точки x в пространстве Y, то найдется $V \in \mathcal{B}$, для которого $x \in V \subset U$. Докажите, что для любого подпространства X компакта Y и любого кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ следующие условия равносильны:

(1) *Сетевой вес пространства* X *не превосходит* $\mathfrak{m}$, *и существует семейство* $\mathcal{U}$ *открытых в* Y *множеств, такое, что* $|\mathcal{U}| \leqslant \mathfrak{m}$, *и для любых* $x \in X$ *и* $y \in Y \setminus X$ *найдется* $U \in \mathcal{U}$, *удовлетворяющее условиям* $x \in U$ *и* $y \notin U$.

(2) *Существует семейство* $\mathcal{F}$ *замкнутых множеств в* Y, *такое, что* $|\mathcal{F}| \leqslant \mathfrak{m}$, *и для любой пары различных точек* $x_1 \in X$, $x_2 \in Y$ *найдутся непересекающиеся множества* F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, *такие, что* $x_1 \in F_1$ *и* $x_2 \in F_2$.

(3) *Существует семейство* $\mathcal{V}$ *открытых множеств в* Y, *для которого* $|\mathcal{V}| \leqslant \mathfrak{m}$, *и, каковы бы ни были различные точки* $x_1 \in X$, $x_2 \in Y$, *можно найти непересекающиеся множества* V_1, $V_2 \in \mathcal{V}$, *такие, что* $x_1 \in V_1$ *и* $x_2 \in V_2$.

(4) *Существует внешняя база* $\mathcal{B}$ *пространства* X *в пространстве* Y, *для которой* $|\mathcal{B}| \leqslant \mathfrak{m}$.

(c) Выведите из (b), что $w(X) = nw(X)g(X)$ для каждого бесконечного тихоновского пространства X и что $w(X) = nw(X)$, если пространство X полно по Чеху.

(d) Покажите, что если пространство X можно вложить в совершенно нормальный компакт, то $w(X) = nw(X)$.

3.9.F (Фролик [1960], Энгелькинг [1966]). Докажите, что произведение счетного семейства полных по Чеху линделёфовых пространств является полным по Чеху линделёфовым пространством (см. задачу 5.5.9(b)).

Указание (Хейджер [1969]). Примените упр. 3.8.F (a).

3.9.G (Зенор [1970]). Заметьте, что пространство полно по Чеху в том и только том случае, если оно является пределом обратной последовательности локально компактных хаусдорфовых пространств.

3.9.H (Майкл [1963a]; для метрических пространств Аренс [1958]). Пусть $\boldsymbol{S} = \{X_i, \pi_j^i\}$ — обратная последовательность непустых полных по Чеху пространств, такая, что $\pi_j^i(X_i)$ всюду плотно в X_j при всех i, j, таких, что $j \leqslant i$. Покажите, что для каждого i проекция $\pi_i(X)$ предела $X = \varprojlim \boldsymbol{S}$ всюду плотна в X_i и что, в частности, предел X не пуст.

Указание. Рассмотрим обратную последовательность $\tilde{\boldsymbol{S}} = \{\tilde{X}_i, \tilde{\pi}_j^i\}$, где $\tilde{X}_i = \beta X_i$ и $\tilde{\pi}_j^i$ — продолжение отображения π_j^i на βX_i и βX_j. Положим $G_i = \tilde{\pi}_i^{-1}(X_i)$, где $\tilde{\pi}_i$ — проекция предела $\tilde{X} = \varprojlim \tilde{\boldsymbol{S}}$ в X_i. Покажите, что все G_i являются всюду плотными G_δ-множествами в $\tilde{X}$, и примените следствие 3.9.4.

3.9.I. Заметьте, что каждое полное по Чеху пространство является пространством точечно счетного типа, и выведите отсюда, что полнота по Чеху не сохраняется замкнутыми отображениями.

3.10. СЧЕТНО КОМПАКТНЫЕ, ПСЕВДОКОМПАКТНЫЕ И СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическое пространство X называется *счетно компактным*, если из каждого счетного открытого покрытия пространства X можно выбрать конечное подпокрытие. Значит, каждое компактное пространство счетно компактно. Точнее, имеет место

3.10.1. Теорема. *Топологическое пространство является компактом в том и только том случае, если оно счетно компактно и обладает свойством Линделёфа.* ∎

Примеры счетно компактных, но не компактных хаусдорфовых пространств приводятся ниже (см. примеры 3.10.16—3.10.19).

Следующие две теоремы содержат характеристики счетно компактных пространств в терминах центрированных семейств множеств и в терминах локально конечных семейств множеств. Доказательство первой теоремы можно получить, слегка видоизменив доказательство теоремы 3.1.1.

3.10.2. Теорема. *Для произвольного пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X счетно компактно.*

(ii) *Пересечение каждого счетного центрированного семейства замкнутых в X множеств не пусто.*

(iii) *Для любой убывающей последовательности $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ непустых замкнутых в X множеств пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ не пусто.* ∎

3.10.3. Теорема. *Для любого пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X счетно компактно.*

(ii) *Любое локально конечное семейство непустых множеств в X конечно.*

(iii) *Каждое локально конечное семейство одноточечных подмножеств пространства X конечно.*

(iv) *Каждое бесконечное подмножество пространства X имеет в X строгую предельную точку.*

(v) *Любое счетное бесконечное подмножество пространства X имеет в X строгую предельную точку*[1]).

[1]) Точка x называется строгой предельной точкой для множества A, если в любой ее окрестности лежит бесконечно много точек из A. Множество всех таких точек обозначается через A^h. Если X — хаусдорфово пространство, можно слово «строгую» в (iv) и (v) опустить. — *Прим. перев.*

Доказательство. Покажем сначала, что (i)$\Rightarrow$(ii). Предположим, что (ii) не выполняется. Существует, таким образом, локально конечное семейство $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ непустых подмножеств в X. Легко проверяется, что непустые замкнутые множества F_1, F_2, ..., где $F_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} \overline{A}_j$, составляют убывающую последовательность и что $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$. Значит, по последней теореме, пространство X не счетно компактно.

Импликации (ii)$\Rightarrow$(iii), (iii)$\Rightarrow$(iv) и (iv)$\Rightarrow$(v) очевидны. Для завершения доказательства достаточно показать, что (v)$\Rightarrow$(i). Пусть (i) не выполняется. Тогда, по последней теореме, найдется убывающая последовательность $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ непустых замкнутых в X множеств, такая, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$. Выберем по точке $x_i \in F_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ и положим $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Множество A бесконечно, так как в противном случае некоторая его точка принадлежала бы бесконечному числу множеств F_i и было бы $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$. Покажем, что $A^h = \varnothing$, т. е. что (v) не выполняется. Действительно, для каждого $x \in X$ найдется такое i, что $x \notin F_i$; тогда множество $U = X \setminus F_i$ является окрестностью точки x и $U \cap A \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\}$ — конечное множество. ∎

Следующая теорема является следствием теоремы 3.10.2.

3.10.4. Теорема. *Каждое замкнутое подпространство счетно компактного пространства счетно компактно.* ∎

Заметим, что счетно компактное хаусдорфово пространство может не быть нормальным; существуют даже не регулярные счетно компактные хаусдорфовы пространства (см. упр. 3.10.В или пример 5.1.40).

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1.10; провести его предоставляем читателю.

3.10.5. Теорема. *Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение счетно компактного пространства X на топологическое пространство Y, то пространство Y счетно компактно.* ∎

Каждое подпространство вещественной прямой обладает счетной базой; значит, в силу 3.8.1 и 3.10.1, каждое счетно компактное подпространство вещественной прямой компактно. Применив 3.10.5 и 3.2.8, приходим к следующему утверждению.

20 Зак. 697

3.10.6. Теорема. *Каждая непрерывная вещественная функция на счетно компактном пространстве ограничена и принимает наименьшее и наибольшее значения.* ∎

3.10.7. Теорема. *Пусть X — счетно компактное пространство и Y — секвенциальное пространство (в частности, пространство с первой аксиомой счетности). Тогда проекция p: $X \times Y \to Y$ является замкнутым отображением.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество в $X \times Y$. Рассмотрим последовательность y_1, y_2, ... точек множества $p(F)$ и любую точку $y \in \lim y_i$. Выберем точку $x_i \in X$ так, чтобы было $(x_i, y_i) \in F$ при $i = 1, 2, \ldots$. Если множество $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно, то найдется $x \in X$, такое, что $x_{k_i} = x$ для бесконечной последовательности $k_1 < k_2 < \ldots$ натуральных чисел. Тогда $(x, y) \in \lim (x_{k_i}, y_{k_i})$, откуда следует, что $(x, y) \in \bar{F} = F$ и, значит, $y \in p(F)$. С другой стороны, если A бесконечно, то найдется $x \in A^h$. Легко проверяется, что тогда $(x, y) \in \bar{F} = F$, откуда получаем $y \in p(F)$. Так как пространство Y секвенциально, множество $p(F)$ замкнуто в Y. ∎

Характеристика счетно компактных пространств в терминах проекций, аналогичная характеристике компактных пространств, содержащейся в теореме 3.1.16, сформулирована в упр. 3.10.A (b).

В последней теореме предположение, что Y — секвенциальное пространство, нельзя заменить предположением, что Y есть k-пространство. Действительно, можно определить счетно компактное хаусдорфово пространство X и компакт Y, для которых проекция p: $X \times Y \to Y$ не является замкнутым отображением (см. пример 3.10.16).

Читатель легко докажет следующую теорему.

3.10.8. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при всех $s \in S$, является счетно компактным (хаусдорфовым) пространством в том и только том случае, если все пространства X_s счетно компактны (и хаусдорфовы), а множество S конечно.* ∎

Тривиально видоизменяя доказательство теоремы 3.7.2, получаем следующий результат:

3.10.9. Теорема. *Если f: $X \to Y$ — замкнутое отображение топологического пространства X и все прообразы точек $f_{-1}(y)$, счетно компактны, то для каждого счетно компактного подпространства $Z \subset Y$ прообраз $f^{-1}(Z)$ счетно компактен.* ∎

Из последней теоремы и теорем 3.10.5 и 3.7.20 вытекает

3.10.10. Теорема. *Класс всех счетно компактных хаусдорфовых пространств совершенен.* ∎

Счетная компактность не сохраняется, вообще говоря, конечными произведениями: в примере 3.10.19 ниже будут определены два счетно компактных хаусдорфовых пространства, произведение которых не счетно компактно. Однако если один из сомножителей является k-пространством, то произведение двух счетно компактных пространств счетно компактно.

3.10.11. Лемма. *Если f: $X \to Y$ — совершенное отображение, то для каждого локально конечного семейства $\mathscr{A}$ множеств в X семейство $\{f(A)$: $A \in \mathscr{A}\}$ их образов локально конечно в Y.*

Доказательство. Из компактности прообразов точек при f вытекает, что для каждого $y \in Y$ найдется открытое множество $U(y) \subset X$, содержащее $f^{-1}(y)$ и пересекающееся лишь с конечным числом членов семейства $\mathscr{A}$. Так как f замкнуто, из теоремы 1.4.13 следует, что у точки y есть окрестность $V(y)$, для которой $f^{-1}(V(y)) \subset U(y)$. Очевидно, окрестность $V(y)$ пересекается лишь с конечным числом членов семейства $\{f(A)$: $A \in \mathscr{A}\}$. ∎

3.10.12. Лемма. *Пусть $\{A_s \times B_s\}_{s \in S}$,* где $|S| \geqslant \aleph_0$, *— произвольное локально конечное семейство непустых множеств в произведении $X \times Y$, где X — любое топологическое пространство, а Y есть k-пространство. Тогда найдется бесконечное подмножество $S_0 \subset S$, такое, что либо семейство $\{A_s\}_{s \in S_0}$, либо семейство $\{B_s\}_{s \in S_0}$ локально конечно.*

Доказательство. Если семейство $\{\overline{B}_s\}_{s \in S}$ локально конечно, то годится $S_0 = S$. Значит, можно предположить, что семейство $\{\overline{B}_s\}_{s \in S}$ не локально конечно.

Покажем, что существуют компакт $Z \subset Y$ и бесконечное множество $S_0 \subset S$, для которых $Z \cap \overline{B}_s \neq \varnothing$ при всех $s \in S_0$. Пусть y — любая точка пространства Y, каждая окрестность которой пересекается с $\overline{B}_s$ для бесконечного числа $s \in S$. Если множество $S(y) = \{s \in S$: $y \in \overline{B}_s\}$ бесконечно, можно положить $Z = \{y\}$ и $S_0 = S(y)$. Если, напротив, множество $S(y)$ конечно, то объединение $B = \bigcup\{\overline{B}_s$: $s \in S \setminus S(y)\}$ не замкнуто, так как $y \in \overline{B} \setminus B$. В этом случае возьмем в качестве Z произвольное компактное подмножество пространства Y, для которого пересечение $Z \cap B = \bigcup\{Z \cap \overline{B}_s$: $s \in S \setminus S(y)\}$ не замкнуто, и положим $S_0 = \{s \in S \setminus S(y)$: $Z \cap \overline{B}_s \neq \varnothing\}$. Очевидно, что последнее множество бесконечно.

Семейство $\{A_s \times (Z \cap \overline{B}_s)\}_{s \in S_0}$ непустых подмножеств пространства $X \times Z$ локально конечно. Применив теорему 3.7.1 и лемму 3.10.11, заключаем, что семейство $\{A_s\}_{s \in S_0}$ тоже локально конечно. ∎

Из эквивалентности условий (i) и (iii) в 3.10.3 и последней леммы получается

3.10.13. Теорема. *Произведение счетно компактного пространства X и счетно компактного k-пространства Y счетно компактно.* ∎

Первое из двух приведенных ниже следствий вытекает из теоремы 3.10.9, а второе следует из теорем 3.10.7 и 3.10.9.

3.10.14. Следствие. *Произведение $X \times Y$ счетно компактного пространства X и компактного пространства Y счетно компактно.* ∎

3.10.15. Следствие. *Произведение $X \times Y$ счетно компактного пространства X и счетно компактного секвенциального пространства Y счетно компактно.* ∎

Счетно компактные пространства были определены и изучались раньше компактных пространств. Сначала казалось, что они составляют класс, более отвечающий сути вещей. До некоторой степени, это объяснялось тем, что для широкого и важного класса метризуемых пространств оба определения равносильны (см. теорему 4.1.17). В те времена счетно компактные пространства именовались компактными пространствами, а наши компактные пространства назывались *бикомпактными пространствами*. Сейчас в ходу терминология, принятая нами в этой книге[1]). Главная причина превосходства компактных пространств над счетно компактными пространствами — в том, что компактность мультипликативна, в то время как счетная компактность даже не конечно мультипликативна (см. пример 3.10.19).

3.10.16. Пример. Пространство W_0 всех счетных ординалов (см. пример 3.1.27) служит примером счетно компактного некомпактного пространства.

Ясно, что пространство W_0 не компактно, — ведь оно вложено в пространство $W = W_0 \cup \{\omega_1\}$ в качестве не замкнутого подпространства. С другой стороны, для каждого счетного бесконечного множества $A \subset W_0$ найдется $x_0 < \omega_1$, такое, что $A \subset$ $\subset W_1 = [0, x_0] \subset W_0$. Но W_1 компактно как замкнутое подпространство в W. Значит, $A^h = \varnothing$, а это показывает, что пространство W_0 счетно компактно.

Легко проверяется, что проекция p: $W_0 \times W \to W$ не является замкнутым отображением (см. теорему 3.10.7). ∎

3.10.17. Пример. Мы определим теперь всюду плотное подпространство в I^c, которое счетно компактно, но не компактно.

---

[1]) См. примечание переводчика на стр. 208. — *Прим. перев.*

Пусть $I^c = \prod_{t \in R} I_t$, где $I_t = I$ при $t \in R$, и X — подпространство пространства I^c, состоящее из всех тех точек $\{x_t\}$, не более чем счетное число координат которых отлично от нуля. Так как X — всюду плотное в I^c подпространство, отличное от всего I^c, пространство X не компактно. Пусть A — произвольное счетное бесконечное подмножество в X. В силу определения пространства X, найдется счетное множество $R_0 \subset R$, такое, что $p_t(x) = 0$ при всех $x \in A$ и всех $t \in R \setminus R_0$, где p_t — проекция пространства I^c на I_t. Значит, A является подмножеством произведения $\prod_{t \in R} X_t$, где $X_t = I_t$ при $t \in R_0$ и $X_t = \{0\}$ при $t \in R \setminus R_0$. Так как последнее произведение компактно, у множества A есть предельная точка в $\prod_{t \in R} X_t$. Так как $\prod_{t \in R} X_t \subset X$, множество A имеет предельную точку и в X; значит, X счетно компактно. ∎

3.10.18. Пример. Еще одним примером счетно компактного не компактного пространства может служить пространство $X = \beta N \setminus \{x\}$, где $x \in \beta N \setminus N$. Так как X всюду плотно в βN и не совпадает с βN, пространство X не компактно. С другой стороны, для каждого счетного бесконечного подмножества A пространства $X \subset \beta N$, в силу теоремы 3.6.14, $|\overline{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$, откуда следует, что $A^h \cap X \neq \varnothing$. Таким образом, в X есть предельная для множества A точка. Значит, пространство X счетно компактно. ∎

3.10.19. Пример. Определим теперь счетно компактные тихоновские пространства X и Y, такие, что произведение $X \times Y$ не счетно компактно. Они будут подпространствами пространства βN, подчиненными условиям: $X \cup Y = \beta N$ и $X \cap Y = N$.

Для каждого $M \subset \beta N$ обозначим через $\mathscr{P}(M)$ семейство всех счетных бесконечных подмножеств множества M, и пусть f — отображение, которое каждому члену A семейства $\mathscr{P}(\beta N)$ сопоставляет некоторую предельную точку множества A в пространстве βN.

Полагая $X_0 = N$ и

$$X_\alpha = \Big(\bigcup_{\gamma < \alpha} X_\gamma\Big) \cup f\Big[\mathscr{P}\Big(\bigcup_{\gamma < \alpha} X_\gamma\Big)\Big] \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < \omega_1,$$

мы определяем по трансфинитной индукции трансфинитную последовательность $X_0, X_1, \ldots, X_\alpha, \ldots, \alpha < \omega_1$, подмножеств пространства βN. Пространство $X = \bigcup_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$ счетно компактно, так как каждое $A \in \mathscr{P}(X)$ содержится в некотором X_α и имеет, следовательно, предельную точку в $X_{\alpha+1}$ и тем более в X. Легко показывается по трансфинитной индукции, что $|X_\alpha| \leqslant \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} + (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c})^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Значит, $|X| \leqslant \mathfrak{c}$. Положим $Y = N \cup (\beta N \setminus X)$. По теореме 3.6.14, $|\overline{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$ для каждого $A \in \mathscr{P}(Y)$. Значит, каждое бесконечное подмножество пространства Y имеет предельную точку в Y и пространство Y счетно компактно.

Рассмотрим теперь произведение $X \times Y$ и обозначим через Δ_0 пересечение множества $X \times Y$ и диагонали Δ произведения $\beta N \times \beta N$. Так как $X \cap Y = N$, имеем $\Delta_0 = \{(1, 1), (2, 2), \ldots\}$. Множество $\{i\}$ открыто в βN при $i = 1, 2, \ldots$, поэтому Δ_0 — открытое дискретное подпространство пространства $X \times Y$. С другой стороны, так как Δ — замкнутое множество в $\beta N \times \beta N$, множество Δ_0 замкнуто в $X \times Y$, а это показывает, что пространство $X \times Y$ не счетно компактно.

По теореме 3.10.13, ни X, ни Y не являются k-пространствами. В частности, X и Y не полны по Чеху (см. теорему 3.9.5). ∎

Отметим в связи с последним примером, что можно построить хаусдорфово пространство X, все конечные степени которого счетно компактны, а $X^{\aleph_0}$ не счетно компактно. Отсюда следует, в частности, что предел обратной последовательности счетно компактных пространств может не быть счетно компактным пространством (последнее можно установить непосредственно, видоизменив конструкцию в примере 3.10.19 таким образом, чтобы получилась убывающая последовательность $X_1 \supset \supset X_2 \supset \ldots$ счетно компактных подпространств пространства βN, для которой $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = N$).

Изучим теперь еще один класс пространств, имеющих прямое отношение к компактным пространствам.

Топологическое пространство X называется *псевдокомпактным*, если X — тихоновское пространство и каждая непрерывная вещественная функция на X ограничена. Как легко проверить, последнее условие равносильно тому, что каждая непрерывная вещественная функция на X принимает наибольшее и наименьшее значения. Из теоремы 3.10.6 следует

3.10.20. Теорема. *Каждое счетно компактное тихоновское пространство псевдокомпактно.* ∎

Для нормальных пространств справедлива и обратная импликация.

3.10.21. Теорема. *Каждое псевдокомпактное нормальное пространство счетно компактно.*

Доказательство. Пусть X — нормальное не счетно компактное пространство. Существует множество $A = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$, такое, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и $A^d = \emptyset$. Ясно, что A — замкнутое дискретное подпространство пространства X. По теореме Титце — Урысона, существует непрерывная функция $f\colon X \to R$, для которой $f(x_i)=i$ при $i=1, 2, \ldots$. Так как функция f не ограничена, пространство X не псевдокомпактно. ∎

Следующие две теоремы характеризуют псевдокомпактные пространства в терминах локально конечных и центрированных семейств множеств.

3.10.22. Теорема. *Для любого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X псевдокомпактно.*

(ii) *Каждое локально конечное семейство непустых открытых множеств в X конечно.*

(iii) *Каждое локально конечное покрытие пространства X непустыми открытыми множествами конечно.*

(iv) *Каждое локально конечное открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. Покажем сначала, что (i) ⇒ (ii). Предположим, что условие (ii) не выполняется. Тогда существует локально конечное семейство $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ непустых открытых множеств в X. Выберем по точке $x_i \in U_i$ при $i=1, 2, \ldots$. Так как X — тихоновское пространство, при $i=1, 2, \ldots$ найдутся функции $f_i\colon X \to R$, такие, что $f_i(x_i)=i$ и $f_i(X \setminus U_i) \subset \{0\}$. В силу локальной конечности семейства $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, формула $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|$ определяет некоторую непрерывную функцию $f\colon X \to R$. Так как функция f не ограничена, пространство X не псевдокомпактно.

Импликации (ii) ⇒ (iii) и (iii) ⇒ (iv) очевидны. Для завершения доказательства остается показать, что (iv) ⇒ (i). Пусть f — произвольная непрерывная вещественная функция на пространстве X, удовлетворяющем условию (iv). Ясно, что $\{f^{-1}((i-1, i+1))\colon i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X. Из существования в этом покрытии конечного подпокрытия следует, что функция f ограничена. ∎

3.10.23. Теорема. *Для произвольного тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X псевдокомпактно.*

(ii) *Для каждой убывающей последовательности $W_1 \supset W_2 \supset \ldots$ непустых открытых множеств в X пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{W}_i$ не пусто.*

(iii) *Для каждого счетного центрированного семейства $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых множеств в X пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{V}_i$ не пусто.*

Доказательство. Покажем сначала, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть X — псевдокомпактное пространство и $W_1 \supset W_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность непустых открытых множеств в X. Из теоремы 3.10.22 следует, что семейство $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ не локально конечно. Значит, существует точка $x \in X$, каждая окрестность которой пересекает бесконечно много множеств W_i. Ясно, что $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{W}_i$.

Для доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) достаточно рассмотреть последовательность V_1, $V_1 \cap V_2$, ... Наконец, (iii) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (i), так как если существует не ограниченная непрерывная функция f: $X \to R$, то семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $V_i = \{x\colon |f(x)| > i\}$, центрировано, и тем не менее $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i = \varnothing$. ∎

Из определения псевдокомпактности следует

3.10.24. Теорема. *Если f: $X \to Y$ — непрерывное отображение псевдокомпактного пространства X на тихоновское пространство Y, то Y псевдокомпактно.* ∎

Читатель легко докажет следующую теорему.

3.10.25. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, является псевдокомпактным пространством в том и только том случае, если все пространства X_s псевдокомпактны и множество S конечно.* ∎

Как показано ниже в примере 3.10.29, псевдокомпактность не наследуется, вообще говоря, замкнутыми подпространствами. Так как, очевидно, псевдокомпактность наследуется открыто-замкнутыми подпространствами, из теоремы 3.7.29 следует, что псевдокомпактность не сохраняется (вообще говоря) в сторону прообраза совершенными отображениями даже в классе тихоновских пространств (см. упр. 3.10.G).

Псевдокомпактность не конечно мультипликативна. Действительно, пространства X и Y, определенные в примере 3.10.19, псевдокомпактны, а произведение $X \times Y$ содержит $D(\aleph_0) = \Delta_0$ в качестве открыто-замкнутого подпространства. Значит, произведение $X \times Y$ не псевдокомпактно. Оказывается, однако, что если хотя бы один из сомножителей является k-пространством, то произведение двух псевдокомпактных пространств псевдокомпактно.

3.10.26. Теорема. *Произведение $X \times Y$ псевдокомпактного пространства X и псевдокомпактного k-пространства Y псевдокомпактно.*

Доказательство. Достаточно заметить, что каждое непустое открытое в декартовом произведении $X \times Y$ множество содержит непустое открытое множество вида $U \times V$, применить лемму 3.10.12 и воспользоваться эквивалентностью условий (i) и (ii) в теореме 3.10.22. ∎

3.10.27. Следствие. *Произведение псевдокомпактного пространства X и компакта Y псевдокомпактно.* ∎

3.10.28. Следствие. *Произведение $X \times Y$ псевдокомпактного пространства X и псевдокомпактного секвенциального пространства Y псевдокомпактно.* ∎

Можно построить пространство X, все конечные степени которого псевдокомпактны, но $X^{\aleph_0}$ не псевдокомпактно[1]. Отсюда следует, в частности, что предел обратной последовательности псевдокомпактных пространств может не быть псевдокомпактным пространством (последнее можно установить непосредственно, применив задачу 3.12.23(c): см. указание к задаче 6.3.25).

Приведем теперь пример псевдокомпактного пространства X, содержащего дискретное пространство $D(\aleph_0)$ в качестве замкнутого подпространства. Этот пример показывает, что псевдокомпактное пространство не обязано быть счетно компактным и что псевдокомпактность не всегда наследуется замкнутыми подпространствами.

3.10.29. Пример. В силу следствия 3.6.8, стоун-чеховская компактификация βN является подпространством стоун-чеховской компактификации βR. Рассмотрим пространство $X = \beta R \setminus (\beta N \setminus N)$. Ясно, что X содержит дискретное пространство $N = D(\aleph_0)$ в качестве замкнутого подпространства. Покажем, что X псевдокомпактно. Предположим, что нашлась не ограниченная непрерывная функция $f\colon X \to R$. Так как множество $R \setminus N$ всюду плотно в X, найдется последовательность $x_1, x_2, \ldots$ различных точек множества $R \setminus N$, такая, что $|f(x_i)| > i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Так как функция f непрерывна, множество $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ не имеет предельных точек в X. Значит, A — замкнутое в R дискретное подпространство пространства X. В силу следствия 3.6.4, $\bar{A} \cap \bar{N} = \bar{A} \cap \beta N = \varnothing$, т. е. $\bar{A} \subset X$. Следовательно, $A = \bar{A}$ — бесконечный дискретный компакт. Полученное противоречие показывает, что X псевдокомпактно[2]. ∎

---

[1]) Отметим, что если пространство G топологической группы псевдокомпактно, то и любая степень пространства G псевдокомпактна (см. Комфорт, Росс [1966*]). — *Прим. перев.*

[2]) Можно построить псевдокомпактное пространство X, каждое счетное подпространство которого замкнуто и дискретно. Примеры таких пространств, обладающих дополнительными интересными свойствами, построены Д. Б. Шахматовым и Е. А. Резниченко. — *Прим. перев.*

Секвенциальная компактность — еще одно свойство, связанное с компактностью. Топологическое пространство X называется *секвенциально компактным*, если каждая последовательность точек в X содержит сходящуюся подпоследовательность. Из эквивалентности условий (i) и (v) в теореме 3.10.3 следует

3.10.30. Теорема. *Каждое секвенциально компактное пространство счетно компактно.* ∎

Обратная импликация не верна. Существуют даже не секвенциально компактные компакты: в силу следствия 3.6.15, стоун-чеховская компактификация βN является таким пространством (см. пример 3.10.38). Однако имеет место

3.10.31. Теорема. *Секвенциальная компактность и счетная компактность равносильны в классе секвенциальных T_1-пространств и, в частности, T_1-пространств с первой аксиомой счетности.*

Доказательство. Достаточно показать, что в любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек счетно компактного секвенциального пространства X есть сходящаяся подпоследовательность. Конечно, можно предположить, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Пусть x — какая-нибудь предельная точка для бесконечного множества $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Множество $A \setminus \{x\}$ не замкнуто, так как $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Но пространство X секвенциально. Значит, в множестве $A \setminus \{x\}$ есть последовательность, сходящаяся к некоторой точке дополнения к $A \setminus \{x\}$. Расположив подходящим образом члены этой последовательности, мы получим сходящуюся подпоследовательность последовательности $x_1, x_2, \ldots$. ∎

Из последней теоремы следует, что пространство W_0 всех счетных ординалов секвенциально компактно как счетно компактное пространство с первой аксиомой счетности. Это пример секвенциально компактного некомпактного пространства. Заметим в связи с последней теоремой, что существуют секвенциально компактные пространства, не являющиеся секвенциальными пространствами. К числу таких пространств относится, очевидно, пространство всех ординалов $\leqslant \omega_1$. Существуют также не регулярные секвенциально компактные хаусдорфовы пространства (см. упр. 3.10.B и пример 5.1.40).

Следующие три теоремы вытекают непосредственно из определения секвенциальной компактности.

3.10.32. Теорема. *Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение секвенциально компактного пространства X на топологическое пространство Y, то Y секвенциально компактно.* ∎

На примере отображения компактного, но не секвенциально компактного пространства на одноточечное пространство видно, что секвенциальная компактность не сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями.

3.10.33. Теорема. *Каждое замкнутое подпространство секвенциально компактного пространства секвенциально компактно.* ∎

3.10.34. Теорема. *Сумма* $\bigoplus_{s\in S} X_s$, *где* $X_s \neq \varnothing$ *при* $s \in S$, *секвенциально компактна в том и только том случае, если все пространства* X_s *секвенциально компактны и множество* S *конечно.* ∎

В заключение этого параграфа приведем три теоремы о произведениях секвенциально компактных пространств.

3.10.35. Теорема. *Произведение любого счетного семейства секвенциально компактных пространств является секвенциально компактным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное семейство секвенциально компактных пространств и $z_1, z_2, z_3, \ldots$, где $z_j = \{x_i^j\}$, последовательность точек произведения $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Последовательность $x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots$ точек пространства X_1 содержит сходящуюся подпоследовательность $x_1^{k_{1,1}}, x_1^{k_{2,1}}, x_1^{k_{3,1}}, \ldots$; пусть x_1 — предел этой подпоследовательности. Аналогично последовательность $x_2^{k_{1,1}}, x_2^{k_{2,1}}, x_2^{k_{3,1}}, \ldots$ точек пространства X_2 содержит сходящуюся подпоследовательность $x_2^{k_{1,2}}, x_2^{k_{2,2}}, x_2^{k_{3,2}} \ldots$; пусть x_2 — предел этой подпоследовательности. По индукции определяем для $i = 3, 4, \ldots$ подпоследовательность $x_i^{k_{1,i}}, x_i^{k_{2,i}}, x_i^{k_{3,i}}, \ldots$ последовательности $x_i^{k_{1,i-1}}, x_i^{k_{2,i-1}}, x_i^{k_{3,i-1}}, \ldots$, сходящуюся к точке $x_i \in X_i$. Заметим, что если опустить первые $i-1$ членов последовательности $k_{1,1}, k_{2,2}, k_{3,3}, \ldots$, то она станет подпоследовательностью последовательности $k_{1,i}, k_{2,i}, k_{3,i}, \ldots$. Теперь не составляет труда показать, применив предложение 2.3.34, что точка $\{x_i\} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ является пределом подпоследовательности $z_{k_{1,1}}, z_{k_{2,2}}, z_{k_{3,3}}, \ldots$ последовательности $z_1, z_2, z_3, \ldots$. ∎

3.10.36. Теорема. *Произведение* $X \times Y$ *счетно компактного пространства* X *и секвенциально компактного пространства* Y *счетно компактно.*

Доказательство. Рассмотрим счетное бесконечное множество $A = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\} \subset X \times Y$, где $z_i = (x_i, y_i)$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $z_i \neq z_j$, если $i \neq j$. Пусть $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots$ — некоторая подпоследовательность последовательности $y_1, y_2, \ldots$, сходящаяся к точке $y \in Y$. Если множество $\{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots\}$ конечно, то найдутся точка $x \in X$ и подпоследовательность $k_{m_1}, k_{m_2}, \ldots$ последовательности $k_1, k_2, \ldots$, такие, что $x_{k_{m_i}} = x$ при $i = 1, 2, \ldots$. Если множество $\{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots\}$ бесконечно, то у него есть строгая предельная точка $x \in X$. Легко видеть, что и в том, и в другом случае $(x, y) \in X \times Y$ является строгой предельной точкой для A. ∎

3.10.37. Теорема. *Произведение $X \times Y$ псевдокомпактного пространства X и секвенциально компактного тихоновского пространства Y псевдокомпактно.*

Доказательство. Предположим, что нашлась не ограниченная непрерывная функция $f\colon X \times Y \to R$, и выберем точки $z_i = (x_i, y_i) \in X \times Y$ так, чтобы было $|f(z_i)| \geqslant i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots$ — подпоследовательность последовательности $y_1, y_2, \ldots$, сходящаяся к точке $y \in Y$. Подпространство $Y_0 = \{y, y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots\} \subset Y$ является компактом; поэтому пространство $X \times Y_0$ псевдокомпактно в силу следствия 3.10.27. Тем не менее непрерывная функция $f | X \times Y_0\colon X \times Y_0 \to R$ не ограничена. Это противоречие показывает, что каждая непрерывная вещественная функция на $X \times Y$ ограничена. ∎

Так как существуют секвенциально компактные хаусдорфовы пространства, не являющиеся k-пространствами (см. упр. 3.10.H), теоремы 3.10.36 и 3.10.37 не зависят от теорем 3.10.13 и 3.10.26.

3.10.38. Пример. Мы заметили выше, применив следствие 3.6.15 что пространство βN не секвенциально компактно. Это можно доказать и непосредственно. Последовательность 1, 2, ... точек пространства βN не содержит никакой сходящейся подпоследовательности, так как для любой возрастающей последовательности $k_1 < k_2 < \ldots$ положительных целых чисел замыкания множеств $A = \{k_1, k_3, k_5, \ldots\}$ и $B = \{k_2, k_4, k_6, \ldots\}$ в βN не пересекаются, а отсюда вытекает, что последовательность k_1, k_2, k_3, ... не сходится. ∎

Как показано в примере 3.6.20, пространство βN можно вложить в канторов куб D^c. Значит, по теореме 3.10.33, канторов куб D^c не секвенциально компактен, и мы видим, что предположение о счетности в теореме 3.10.35 существенно.

Из того, что D^c не секвенциально компактно, и примера 2.5.3 вытекает, что предел обратного спектра секвенциально компактных пространств может не быть секвенциально компактным пространством. С другой стороны, из теорем 3.10.33 и 3.10.35 сразу следует, что предел обратной последовательности секвенциально компактных пространств является секвенциально компактным пространством.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Счетно компактные пространства были введены Фреше в [1906]. Характеристика счетной компактности условием (iv) теоремы 3.10.3 была установлена Хаусдорфом в [1914]. Теорема 3.10.7 доказана Флейшером и Франклином в [1967] (Ханаи [1961] и Исивата [1963] доказали эту теорему при более сильных предположениях, что Y — пространство с первой аксиомой счетности и что Y — пространство Фреше — Урысона соответственно). Теорема 3.10.10 была установлена Хенриксеном и Исбеллом в [1958]. Теорема 3.10.13 доказана Ноблом в [1969] (следствие 3.10.14 получено Ю. М. Смирновым в [1951d], а следствие 3.10.15 — Франклином в [1965]). В примере 3.10.17, приведенном Понтрягиным в [1954], применено важное понятие Σ-произведения; оно обсуждается также в упр. 3.10.D и задачах 2.7.13, 2.7.14, 3.12.23 и 4.5.12. Пример 3.10.19 был построен Новаком в [1953a] (данное нами описание следует статье Фролика [1959]). Сходный пример был приведен Терасакой в [1952] Существование тихоновского пространства X, все конечные степени которого счетно компактны, тогда как $X^{\aleph_0}$ не счетно компактно, было установлено Фроликом в [1967]. В примере Фролика пространство $X^{\aleph_0}$ даже не псевдокомпактно. Однако в случае псевдокомпактности аналогичные примеры можно определить проще (см. Комфорт [1967] и Фролик [1967a]).

Псевдокомпактные пространства были определены Хьюиттом в [1948]; в этой его статье были доказаны теоремы 3.10.20 и 3.10.21. Эквивалентность псевдокомпактности условиям (ii), (iii) и (iv) теоремы 3.10.22 была замечена Гликсбергом в [1952], Керстаном в [1957] и Ю. М. Смирновым в [1954] соответственно. Теорема 3.10.23 приведена Колмесом в [1951]. Теорема 3.10.26 установлена Тамано в [1960] (следствие 3.10.27 было независимо доказано Гликсбергом в [1959] и Мрувкой в [1959]; следствие 3.10.28 было доказано Бэгли, Коннеллом и Макнайтом в [1958] при более сильном предположении, что пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счетности). Пример 3.10.29 приведен Катетовым в [1951a].

Понятие секвенциально компактного пространства, как и теоремы 3.10.30 и 3.10.32—3.10.35, долгое время принадлежало топологическому фольклору. Возникновение этого понятия связано с характеристикой компактности в классе метрических пространств. Теорема 3.10.31 была доказана Франклином в [1965] (эквивалентность секвенциальной компактности и счетной компактности в метрических пространствах была установлена Хаусдорфом в [1914]). Теорема 3.10.36 доказана Мрувкой в [1959] (Рыль-Нардзевский в [1954] доказал эту теорему при более сильном предположении, что Y счетно компактно и удовлетворяет первой аксиоме счетности). Теорема 3.10.37 появилась в статье Скарборо и А. Стоуна [1966].

В связи с тем что D_c не секвенциально компактно (см. пример 3.10.38), а каждый компакт мощности $< 2^{\aleph_1}$ секвенциально компактен (см. задачу 3.12.11(е)), возникает вопрос, является ли секвенциально компактным пространство $D^{\aleph_1}$. Как показано Бутом в [1974], ответ на этот вопрос не зависит от обычных аксиом теории множеств. Иными словами, существуют модели теории множеств, в которых $D^{\aleph_1}$ является секвенциально компактным пространством, и есть модели, в которых $D^{\aleph_1}$ не секвенциально компактно.

Дальнейшие результаты о произведениях счетно компактных, псевдокомпактных и секвенциально компактных пространств можно найти в работах Гликсберга [1959], Скарборо и А. Стоуна [1966], Кендерова [1968], Стефенсона [1968] и Нобла [1969].

УПРАЖНЕНИЯ

3.10.A. (a) Заметьте, что топологическое пространство X счетно компактно в том и только том случае, если каждое его счетное замкнутое подпространство компактно.

(b) (Ханаи [1961]). Проверьте, что пространство X счетно компактно в том и только том случае, если проекция $p: X \times A(\aleph_0) \to A(\aleph_0)$ является замкнутым отображением (см. теоремы 3.1.16 и 3.10.7 и задачу 3.12.14(a)).

3.10.B (Бурбаки [1948]). Покажите, что пространство, которое получается из пространства W всех ординалов $\leqslant \omega_1$, если дополнительно объявить множество Z всех счетных предельных ординалов замкнутым (см. пример 1.5.7), является нерегулярным счетно компактным (и даже секвенциально компактным) хаусдорфовым пространством (см. пример 5.1.40).

3.10.C (П. С. Александров и Урысон [1929]). Положим $X = C_0 \cup C_1 \subset R^2$, где $C_0 = \{(x, 0): 0 < x \leqslant 1\}$ и $C_1 = \{(x, 1): 0 \leqslant x < 1\}$, и возьмем на X топологию, порожденную базой, состоящей из множеств вида

$$\{(x, i) \in X: x_0 - 1/k < x < x_0 \text{ и } i = 0, 1\} \cup \{(x_0, 0)\},$$

где $0 < x_0 \leqslant 1$ и $k = 1, 2, \ldots$, а также из множеств вида

$$\{(x, i) \in X: x_0 < x < x_0 + 1/k \text{ и } i = 0, 1\} \cup \{(x_0, 1)\},$$

где $0 \leqslant x_0 < 1$ и $k = 1, 2, \ldots$. Так полученное пространство X называется *две стрелки*.

(a) Заметьте, что подпространства C_0 и C_1 пространства X гомеоморфны прямой Зоргенфрея. Выведите отсюда, что пространство X наследственно сепарабельно, наследственно линделёфово и, значит, совершенно нормально.

Указание. См. упр. 2.1.I, 3.8.A(b) и пример 3.8.14.

(b) Докажите, что пространство X компактно, и выведите отсюда, что прямая Зоргенфрея не полна по Чеху.

Указание. Примените теорему 3.10.1.

(c) Заметьте, что пространство X^2 не наследственно нормально, и выведите отсюда, что ни наследственная нормальность, ни совершенная нормальность не сохраняются в сторону прообраза при открытых совершенных отображениях, при которых прообразы точек совершенно нормальны.

3.10.D (Нобл [1970]). Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство топологических пространств и $a=\{a_s\}$ — точка произведения $\prod_{s\in S} X_s$. Через $\Sigma(a)$ обозначим подпространство пространства $\prod_{s\in S} X_s$, состоящее из всех точек $x=\{x_s\}$, для которых множество $S(x)=\{s\in S\colon x_s\neq a_s\}$ счетно. Докажите, что если все пространства X_s удовлетворяют первой аксиоме счетности, то $\Sigma(a)$ — пространство Фреше — Урысона. Отсюда следует, в частности, что пространство, рассмотренное в примере 3.10.17, является пространством Фреше — Урысона (и, значит, k-пространством); проверьте, что оно не полно по Чеху.

Указание. Пусть $x=\{x_s\}\in\overline{A}\subset\Sigma(a)$ и $\{U_{s,i}\}_{i=1}^{\infty}$ — база пространства X_s в точке x_s. Определите по индукции последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек множества A так, чтобы было $x_i\in\left(\prod_{s\in S_i} U_{s,i}\times\prod_{s\in S\setminus S_i} X_s\right)$, где $S_i=\{s_{j,k}\colon 0\leqslant j,\ k<i\}$ и индексы $s_{j,k}$ определяются равенствами $S(x_i)=\{s_{i,0}, s_{i,1}, \ldots\}$ и $x_0=x$. Покажите, что $x=\lim x_i$.

3.10.E. (a) (Хьюитт [1948]). Покажите, что тихоновское пространство X псевдокомпактно в том и только том случае, если нарост $\beta X\setminus X$ не содержит никакого непустого множества типа G_δ в βX.

(b) (Колмес [1951], Гликсберг [1952]). Докажите, что тихоновское пространство X псевдокомпактно в том и только том случае, если X удовлетворяет теореме Дини, т. е. если для каждой последовательности $\{f_i\}$ непрерывных вещественных функций на X, такой, что $f_i(x)\leqslant f_{i+1}(x)$ при всех $x\in X$ и $i=1, 2, \ldots$, для которой существует функция $f\in R^X$, такая, что $f(x)=\lim f_i(x)$ при всех $x\in X$, имеет место соотношение $f=\lim f_i$, т. е. последовательность $\{f_i\}$ равномерно сходится к f (см. лемму 3.2.18).

(c) Заметьте, что если каждое замкнутое подпространство пространства X псевдокомпактно, то пространство X счетно компактно.

(d) (Колмес [1951]). Покажите, что псевдокомпактность наследуется каноническими замкнутыми множествами.

(e) (Колмес [1952]). Заметьте, что теорема Бэра о категории выполняется в регулярных счетно компактных пространствах и в псевдокомпактных пространствах.

3.10.F (Мрувка [1954]). Покажите, что пространство X, определенное в упр. 3.6.I (a), псевдокомпактно, но не счетно компактно.

3.10.G (Ханаи и Окуяма [1962]; для открытых совершенных отображений — Пономарев [1960a]). Если $f: X \to Y$ — открытое отображение тихоновского пространства X на псевдокомпактное пространство Y, при котором образ каждого функционально замкнутого подмножества пространства X замкнут в Y и все прообразы точек псевдокомпактны, то пространство X псевдокомпактно.

Указание. Примените упр. 1.5.L (a).

3.10.H. Действуя по той же схеме, что и в примере 3.1.27, определите на множестве всех ординалов $\leqslant \omega_2$ некоторую топологию (см. задачу 1.7.4) и проверьте, что подпространство, которое получается, если удалить все ординалы, конфинальные ω_1, секвенциально компактно, но не является k-пространством.

3.10.I. Топологическое пространство X называется *локально секвенциально компактным*, если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности U найдется окрестность V точки x, такая, что $\overline{V}$ секвенциально компактно и $\overline{V} \subset U$.

(a) Проверьте, что теорема 3.3.17 остается справедливой и в том случае, когда Y — секвенциальное, а X — локально секвенциально компактное пространство.

(b) (Бёме [1965]). Докажите, что произведение $X \times Y$ секвенциальных пространств секвенциально, если пространство X локально секвенциально компактно (см. упр. 2.3.K(a)).

Указание. Примените (a) и упр. 2.4.G(b).

3.11. ВЕЩЕСТВЕННО ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическое пространство X называется *вещественно полным* (или *R-полным*, или *полным по Хьюитту*), если оно является тихоновским пространством и не существует тихоновского пространства $\tilde{X}$, которое удовлетворяло бы следующим двум условиям:

(RC1) Существует гомеоморфное вложение $r: X \to \tilde{X}$, такое, что $r(X) \neq \overline{r(X)} = \tilde{X}$.

(RC2) Для каждой непрерывной вещественной функции $f: X \to R$ найдется непрерывная функция $\tilde{f}: \tilde{X} \to R$, такая, что $\tilde{f}r = f$ [1]).

[1]) Вещественно полные пространства именуются также Q-пространствами, вещественно компактными пространствами, функционально замкнутыми пространствами, R-компактными пространствами, пространствами Хьюитта — Нахбина и полными по Хьюитту пространствами.— *Прим. перев.*

Из этого определения сразу следует, что каждый компакт является вещественно полным пространством. Точнее, имеет место.

3.11.1. Теорема. *Топологическое пространство является компактом в том и только том случае, если оно псевдокомпактно и вещественно полно.*

Доказательство. Каждый компакт псевдокомпактен и вещественно полон. Если не компактное пространство X вещественно полно, то, так как $X \neq \beta X$, найдется непрерывная функция f: $X \to R$, которую нельзя непрерывно продолжить на βX. Ясно, что функция f не ограничена; следовательно, X не псевдокомпактно. ∎

3.11.2. Примеры. Из последней теоремы следует, что пространства, рассмотренные в примерах 3.10.16—3.10.19 и 3.10.29, не вещественно полны. В частности, заключаем, что существует не вещественно полное локально компактное хаусдорфово пространство. ∎

Теперь мы установим важную характеристику вещественно полных пространств и выведем из нее несколько следствий. Две дальнейшие характеристики полных пространств будут даны в теоремах 3.11.10 и 3.11.11.

3.11.3. Теорема. *Топологическое пространство вещественно полно в том и только том случае, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству произведения некоторого множества копий вещественной прямой.*

Доказательство. Пусть X — вещественно полное пространство. Через $\mathcal{F}$ обозначим семейство всех непрерывных вещественных функций на X и рассмотрим отображение $F = \underset{f \in \mathcal{F}}{\Delta} f$: $X \to \prod_{f \in \mathcal{F}} R_f$, где $R_f = R$ при $f \in \mathcal{F}$. Так как пространство X тихоновское, из теоремы о диагональном отображении следует, что F — гомеоморфное вложение. Положим $\tilde{X} = \overline{F(X)} \subset \prod_{f \in \mathcal{F}} R_f$. Для каждой непрерывной вещественной функции f: $X \to R$ найдется непрерывная функция $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to R$, такая, что $\tilde{f}F = f$, а именно такой функцией является сужение $p_f | \tilde{X}$ проекции p_f: $\prod_{f \in \mathcal{F}} R_f \to R_f$. Значит, по определению вещественной полноты, $\tilde{X} = F(X)$, т. е. пространство X гомеоморфно замкнутому подпространству $F(X)$ произведения $\prod_{f \in \mathcal{F}} R_f$.

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое подпространство X произведения $\prod_{s \in S} R_s$, где $R_s = R$ при $s \in S$, и пусть даны тихоновское пространство $\tilde{X}$ и гомеоморфное вложение r: $X \to \tilde{X}$, удовлетворяющие условию (RC2). Очевидно, можно предположить, что $\overline{r(X)} = \tilde{X}$. Для каждого $s \in S$ найдется непрерывная функция $\tilde{p}_s$: $\tilde{X} \to R_s = R$, такая, что $\tilde{p}_s r = p_s$. Положим $F = \underset{s \in S}{\Delta} \tilde{p}_s$: $\tilde{X} \to \prod_{s \in S} R_s$. Так как $Fr(x) = x$ при всех $x \in X$, то $F(\tilde{X}) = F(\overline{r(X)}) \subset \overline{Fr(X)} = \overline{X} = X$; таким образом, сужение F_X отображает $\tilde{X}$ на X. При всех $x \in X$ имеем $rFx(r(x)) = r(x)$. Значит, отображение rF_X: $\tilde{X} \to \tilde{X}$ при сужении на $r(X)$ совпадает с $\mathrm{id}_{r(X)}$. Из теоремы 1.5.4 теперь следует, что $rF_X = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Так как $rF_X(\tilde{X}) \subset r(X)$, заключаем, что $r(X) = \tilde{X}$. Следовательно, не существует тихоновского пространства $\tilde{X}$, которое удовлетворяло бы условиям (RC1) и (RC2), т. е. пространство X вещественно полно. ∎

Следующая теорема вытекает из теоремы 3.11.3.

3.11.4. Теорема. *Каждое замкнутое подпространство вещественно полного пространства вещественно полно.* ∎

Из теоремы 3.11.3 и утверждений 3.11.4, 2.3.7 и 2.3.4 получается

3.11.5. Теорема. *Произведение $\prod_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, вещественно полно в том и только том случае, если все пространства X_s вещественно полны.* ∎

Из теорем 3.11.4 и 3.11.5 вытекает

3.11.6. Следствие. *Предел обратного спектра вещественно полных пространств является вещественно полным пространством.* ∎

3.11.7. Следствие. *Пусть X — топологическое пространство и $\{A_s\}_{s \in S}$ — некоторое семейство его подпространств. Тогда если все A_s вещественно полны, то и пересечение $\bigcap_{s \in S} A_s$ вещественно полно.*

Доказательство. Пространство $\bigcap_{s \in S} A_s$ гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $\prod_{s \in S} A_s$, а именно пересечению множества $\prod_{s \in S} A_s$ с диагональю произведения $\prod_{s \in S} X_s$, где $X_s = X$ при $s \in S$. Остается заметить, что пространство $\prod_{s \in S} A_s$ вещественно полно (см. также пример 2.5.4). ∎

3.11.8. Следствие. *Если f: $X \to Y$ — непрерывное отображение вещественно полного пространства X в хаусдорфово пространство Y, то для каждого вещественно полного подпространства B*

пространства Y его полный прообраз $f^{-1}(B)\subset X$ вещественно полон.

В частности, *вещественная полнота наследуется функционально открытыми подмножествами.*

Доказательство. График $G(f_B)$ сужения f_B: $f^{-1}(B)\to B$ совпадает с пересечением $(X\times B)\cap G(f)$ и, следовательно, замкнут в вещественно полном пространстве $X\times B$. Так как прообраз $f^{-1}(B)$ гомеоморфен $G(f_B)$, пространство $f^{-1}(B)$ вещественно полно. ■

3.11.9. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство и A — его подпространство. Если каждая непрерывная функция g: $A\to R$, для которой $g(x)\geqslant 1$ при всех $x\in A$, продолжается на X, то и любая непрерывная функция f: $A\to R$ продолжается на X.*

Доказательство. Пусть f: $A\to R$ — любая непрерывная функция. Положим

$$g_1(x)=1+\max(f(x),0) \quad \text{и} \quad g_2(x)=1-\min(f(x),0).$$

Ясно, что функция g_i: $A\to R$ непрерывна и $g_i(x)\geqslant 1$ при всех $x\in A$ и $i=1, 2$. Так как $f(x)=g_1(x)-g_2(x)$ при $x\in A$, функция F: $X\to R$, где $F(x)=G_1(x)-G_2(x)$ и G_i — непрерывное продолжение функции g_i на X при $i=1, 2$, является продолжением функции f на X. ■

3.11.10. Теорема. *Тихоновское пространство X вещественно полно в том и только том случае, если для каждой точки $x_0\in \beta X\setminus X$ найдется непрерывная функция h: $\beta X\to I$, такая, что $h(x_0)=0$ и $h(x)>0$ при всех $x\in X$.*

Доказательство. Пусть X — вещественно полное пространство и $x_0\in\beta X\setminus X$. Так как для $\tilde{X}=X\cup\{x_0\}\subset\beta X$ выполняется условие (RC1), существует непрерывная функция f: $X\to R$, которую нельзя продолжить на $\tilde{X}$. Последняя лемма позволяет предположить, что $f(x)\geqslant 1$ при всех $x\in X$. Функция $1/f$: $X\to I$ продолжается до непрерывной функции h: $\beta X\to I$, причем очевидно, что $h(x)>0$ при всех $x\in X$. Если бы было $h(x_0)\neq 0$, можно было бы определить продолжение $\tilde{f}$: $\tilde{X}\to R$ функции f, положив $\tilde{f}(x)=1/h(x)$. Значит, $h(x_0)=0$.

Предположим теперь, что для каждой точки $z\in\beta X\setminus X$ найдется непрерывная функция h_z: $\beta X\to I$, такая, что $h_z(z)=0$ и $h_z(x)>0$ при всех $x\in X$. Тогда $X=\bigcap\limits_{z\in\beta X\setminus X} h_z^{-1}((0, 1])$ и X вещественно полно в силу следствия 3.11.7 и второй части следствия 3.11.8. ■

Характеристики вещественно полных пространств, данные в теоремах 3.11.3 и 3.11.10, так же как и определение этого класса пространств, носят внешний характер. Внутренняя характеристика вещественной полноты содержится в следующей теореме Через $\mathscr{D}_0(X)$ в формулировке этой теоремы обозначено семейство всех функционально замкнутых подмножеств тихоновского пространства X.

3.11.11. Теорема. *Тихоновское пространство X вещественно полно в том и только том случае, если каждый счетно центрированный ультрафильтр на $\mathscr{D}_0(X)$ имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное не вещественно полное тихоновское пространство X и возьмем точку $x_0 \in \beta X \setminus X$, такую, что для всякой функции f из семейства $\mathscr{F} = \{f \in I^{\beta X}: f(x_0) = 0\}$ имеет место соотношение $Z_f = X \cap f^{-1}(0) \neq \varnothing$. Семейство $\mathscr{Z} = \{Z_f\}_{f \in \mathscr{F}} \subset \mathscr{D}_0(X)$ замкнуто относительно счетных пересечений, и, значит, пересечение любого счетного множества его элементов не пусто.

Покажем, что $\mathscr{Z}$ — ультрафильтр на $\mathscr{D}_0(X)$. Рассмотрим любое центрированное семейство $\mathscr{Z}' \subset \mathscr{D}_0(X)$, содержащее $\mathscr{Z}$. Возьмем $Z \in \mathscr{Z}'$, непрерывную функцию g: $X \to I$, удовлетворяющую условию $g^{-1}(0) = Z$, и продолжение G: $\beta X \to I$ отображения g. Если $x_0 \notin G^{-1}(0)$, то найдется $f \in \mathscr{F}$, для которой $f^{-1}(0) \cap G^{-1}(0) = \varnothing$ и

$$Z_f \cap Z = X \cap f^{-1}(0) \cap G^{-1}(0) = \varnothing,$$

что невозможно. Значит, $x_0 \in G^{-1}(0)$, т. е. $G \in \mathscr{F}$ и, следовательно, $Z = Z_G \in \mathscr{Z}$. Таким образом, $\mathscr{Z}$ — счетно центрированный ультрафильтр на $\mathscr{D}_0(X)$. Так как $\bigcap \mathscr{Z} = \varnothing$, условие теоремы не выполняется для пространства X.

Рассмотрим теперь произвольное вещественно полное пространство X и любой счетно центрированный ультрафильтр $\mathscr{Z} = \{Z_s\}_{s \in S}$ на $\mathscr{D}_0(X)$. Из максимальности $\mathscr{Z}$ сразу следует, что семейство $\mathscr{Z}$ замкнуто относительно счетных пересечений. Семейство $\{\overline{Z}_s\}_{s \in S}$ замыканий элементов семейства $\mathscr{Z}$ в βX имеет непустое пересечение. Для завершения доказательства достаточно показать, что любое $x_0 \in \bigcup\limits_{s \in S} \overline{Z}_s$ принадлежит X, так как тогда $x_0 \in \bigcup\limits_{s \in S} Z_s$.

Предположим, что $x_0 \in \beta X \setminus X$, и рассмотрим непрерывную функцию f: $\beta X \to I$, для которой $f(x_0) = 0$ и $f(x) > 0$ при всех $x \in X$. Положим $Z_i = X \cap f^{-1}([0, 1/i])$. Ясно, что $Z_i \in \mathscr{D}_0(X)$ при $i = 1, 2, \ldots$. Так как $f^{-1}([0, 1/i))$ — окрестность точки x_0, имеем $Z_i \cap Z_s \neq \varnothing$ при всех $s \in S$ и $i = 1, 2, \ldots$. Из максимальности семейства $\mathscr{Z}$ следует, что $Z_i \in \mathscr{Z}$ при $i = 1, 2, \ldots$; таким образом, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Z_i \in \mathscr{Z}$. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Z_i = \varnothing$, мы пришли к противоречию; значит, $x_0 \in X$. ∎

Из теоремы 3.11.11 вытекает

3.11.12. Теорема. *Каждое линделёфово пространство вещественно полно.* ∎

Последняя теорема вместе с 3.8.13 показывает, что не все вещественно полные пространства являются k-пространствами (см. упр. 3.3.E(a)).

3.11.13. Пример. Так как прямая Зоргенфрея K является линделёфовым пространством (см. пример 3.8.14), она вещественно полна. Значит, произведение $K \times K$ вещественно полно. Это пример не нормального вещественно полного пространства (см. пример 2.3.12). Пространство $K \times K$ содержит дискретное пространство $D(\mathfrak{c})$ в качестве замкнутого подпространства; значит, пространство $D(\mathfrak{c})$ вещественно полно. ∎

В связи с последним примером естественно задать вопрос: каждое ли дискретное пространство вещественно полно?

Это вопрос теоретико-множественного характера; он равносилен вопросу о том, каждый ли кардинал неизмерим (см. упр. 3.11.D(a)). Чтобы определить, какие кардиналы называются неизмеримыми, нам нужно одно вспомогательное понятие.

Пусть $\mathscr{A}$ — семейство множеств, замкнутое относительно счетных объединений. Под *счетно аддитивной двузначной мерой* на $\mathscr{A}$ мы понимаем любое отображение семейства $\mathscr{A}$ в множество $\{0, 1\}$, такое, что

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

если $A_i \in \mathscr{A}$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Кардинал $\mathfrak{m}$ называется *неизмеримым*, если каждая двузначная мера на семействе всех подмножеств множества X мощности $\mathfrak{m}$, обращающаяся в нуль на всех одноточечных подмножествах, тривиальна — равна тождественно нулю.

Очевидно, что класс $\mathscr{N}$ всех неизмеримых кардиналов содержит кардинал $\aleph_0$. Можно доказать, что если $\mathfrak{m} \in \mathscr{N}$, то в $\mathscr{N}$ входят все кардиналы, меньшие $\mathfrak{m}$, сумма любого семейства $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in S}$ кардиналов из $\mathscr{N}$, где $|S| \leqslant \mathfrak{m}$ (т. е. мощность множества $\bigcup_{s \in S} A_s$, где $|A_s| = \mathfrak{m}_s$ и $A_s \cap A_{s'} = \varnothing$ при $s \neq s'$), а также кардинал $2^{\mathfrak{m}}$. Можно также доказать, что первый сильно недостижимый кардинал принадлежит $\mathscr{N}$ (кардинал $\aleph_\alpha$ называется *сильно недостижимым*, если $\alpha > 0$, ординал ω_α регулярен и из неравенства $\mathfrak{m} < \aleph_\alpha$ следует, что $2^{\mathfrak{m}} < \aleph_\alpha$). Известно, что предположение о неизмеримости всех кардиналов (и даже предположение о том, что не существует сильно недостижимого кардинала) совместимо с обычными аксиомами теории множеств.

Известно также, что предположение о существовании измеримого кардинала сильнее предположения о непротиворечивости теории множеств.

Сделаем несколько замечаний о сохранении вещественной полноты в сторону образа и в сторону прообраза при отображениях. Так как пространство всех счетных ординалов является непрерывным образом пространства $D(\mathfrak{c})$, мы заключаем, что вещественная полнота не сохраняется непрерывными отображениями. Оказывается, вещественная полнота не сохраняется в сторону образа ни открытыми отображениями (см. упр. 3.11.E), ни совершенными отображениями (см. упр. 3.11.G). Последнее следует из существования не вещественно полного тихоновского пространства, представимого в виде объединения двух замкнутых вещественно полных подпространств (см. теорему 3.7.22). Однако такое пространство довольно сложно устроено, и описывать его в этой книге мы не будем.

Из теорем 3.11.4, 3.11.5 и 3.7.26 вытекает

3.11.14. Теорема. *Если $f\colon X\to Y$ — совершенное отображение тихоновского пространства X на вещественно полное пространство Y, то пространство X вещественно полно.* ∎

В заключение параграфа мы построим для каждого тихоновского пространства X вещественно полное пространство υX, свойства которого параллельны свойствам βX.

3.11.15. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство и A — его подпространство. Если каждая непрерывная вещественная функция $f\colon A\to R$ непрерывно продолжается на X, то каждое непрерывное отображение $f\colon A\to\prod_{s\in S}R_s$ в произведение копий вещественной прямой тоже непрерывно продолжается на X. Если, кроме того, A всюду плотно в X, то каждое непрерывное отображение $f\colon A\to B=\overline{B}\subset\prod_{s\in S}R_s$ в замкнутое подпространство B такого произведения продолжается до непрерывного отображения всего X в B.*

Доказательство. Пусть дано непрерывное отображение $f\colon A\to\prod_{s\in S}R_s$, где $R_s=R$ при $s\in S$. Для каждого $s\in S$ определено продолжение $\bar f_s\colon X\to R_s$ композиции $p_sf\colon A\to R_s$. Как легко видеть, диагональное отображение $F=\mathop{\Delta}_{s\in S}\bar f_s\colon X\to\prod_{s\in S}R_s$ является продолжением отображения f. Если $\overline{A}=X$ и $f\colon A\to B=\overline{B}\subset\prod_{s\in S}R_s$, то для продолжения $F\colon X\to\prod_{s\in S}R_s$ композиции $i_Bf\colon A\to\prod_{s\in S}R_s$ имеют место соотношения $F(X)=F(\overline{A})\subset$

$\subset \overline{F(A)} \subset \bar{B} = B$, так что сужение F_B: $X \to B$ является продолжением отображения f. ∎

3.11.16. Теорема. *Для каждого тихоновского пространства X существует ровно одно (с точностью до гомеоморфизма) вещественно полное пространство υX, обладающее следующими двумя свойствами:*

(i) *Существует гомеоморфное вложение υ: $X \to \upsilon X$, для которого* $\overline{\upsilon(X)} = \upsilon X$.

(ii) *Какова бы ни была непрерывная вещественная функция f: $X \to R$, найдется непрерывная функция $\bar{f}$: $\upsilon X \to R$, такая, что* $\bar{f}\upsilon = f$.

Пространство υX удовлетворяет также условию

(iii) *Для каждого непрерывного отображения f: $X \to Y$ пространства X в произвольное вещественно полное пространство Y найдется непрерывное отображение $\bar{f}$: $\upsilon X \to Y$, такое, что $\bar{f}\upsilon = f$.*

Доказательство. Для каждого непрерывного f: $X \to R$ возьмем продолжение F: $\beta X \to \alpha R$, где αR — одноточечная компактификация вещественной прямой, и положим $W_f = F^{-1}(R)$. Очевидно, $X \subset W_f$. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство всех непрерывных вещественных функций на X и $\upsilon X = \bigcap_{f \in \mathscr{F}} W_f$. Отображение υ: $X \to \upsilon X$, определенное правилом $\upsilon(x) = \beta(x)$ при $x \in X$, является гомеоморфным вложением и $\overline{\upsilon(X)} = \upsilon X$, т. е. условие (i) выполнено. Из построения следует, что υX удовлетворяет и условию (ii). Вещественная полнота пространства υX вытекает из следствий 3.11.7 и 3.11.8.

Из теоремы 3.11.3, свойств (i) и (ii) и леммы 3.11.15 следует, что υX удовлетворяет также условию (iii).

Пусть $\upsilon_1 X$ — какое-нибудь вещественно полное пространство, для которого выполняются условия (i) и (ii). Тогда $\upsilon_1 X$ удовлетворяет также условию (iii), откуда следует, как в доказательстве теоремы 3.5.4, что $\upsilon_1 X$ гомеоморфно υX. ∎

Пространство υX называется *хьюиттовым пополнением* (*пополнением по Хьюитту*) пространства X.

Отметим, что другое построение хьюиттова пополнения пространства X указано в доказательстве теоремы 3.11.3: пространство υX можно получить, взяв в $\prod_{f \in \mathscr{F}} R_f$, где $\mathscr{F}$ — семейство всех непрерывных вещественных функций на X и $R_f = R$ при $f \in \mathscr{F}$, замыкание образа пространства X при отображении $F = \mathop{\Delta}_{f \in \mathscr{F}} f$ (см. упр. 3.11.F(b)).

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вещественно полные пространства были введены Хьюиттом в [1948]. Он определил их посредством условия, близкого к характеристике, приведенной ниже в задаче 3.12.21(g). Эквивалентность принятого нами определения и первоначального определения Хьюитта была установлена Катетовым в [1951]. Нахбин в [1950] независимо определил тот же класс пространств в терминах равномерностей — а именно условием, что слабейшая равномерность, относительно которой все непрерывные вещественные функции равномерно непрерывны, полна (см. примеры 8.1.19, 8.3.19 и упр. 8.1.D). Статья Хьюитта [1948] содержит теоремы 3.11.1, 3.11.11, 3.11.12 и 3.11.16. Теоремы 3.11.3, 3.11.4 и 3.11.5 были доказаны Широтой в [1952] (теорема 3.11.4 получена также Катетовым в [1951]). Теорема 3.11.10 установлена Мрувкой в [1957]. Результаты о замкнутости класса $\mathcal{N}$ всех неизмеримых кардиналов относительно указанных в тексте арифметических операций были получены Уламом в [1930]. Неизмеримость первого сильно недостижимого алефа (и даже некоторых больших кардиналов) доказана Кейслером и Тарским в [1963]. Доказательства этих результатов и дальнейшую информацию можно найти в книге Куратовского и Мостовского [1968]. Некоторые теоремы о сохранении вещественной полноты при отображениях установлены Исиватой в [1967] и Кендеровым в [1967]. Не вещественно полное тихоновское пространство, которое можно представить в виде объединения двух вещественно полных замкнутых подпространств, описано в работе Мрувки [1958] (исправление — в [1970]). Более простой пример был приведен Мысьором в [1981]; как заметил Р. Л. Блэр (на него ссылается Исбелл в [1962a]), примеры такого рода показывают, что вещественная полнота может не сохраняться совершенными отображениями. В нашем изложении вопросов вещественной полноты мы следуем Энгелькингу и Мрувке [1958] и Ван дер Слоту [1972]. Книга Гиллмана и Джерисона [1960] содержит важное развитие теории вещественно полных пространств. Обзор последующих результатов можно найти в книге Вейра [1975].

УПРАЖНЕНИЯ

3.11.A (Гиллман и Джерисон [1960]). Пусть A — вещественно полное подпространство, а B — компактное подпространство тихоновского пространства X. Докажите, что пространство $A \cup B$ вещественно полно.

3.11.B. (a) (Широта [1952], Гиллман и Джерисон [1960]). Докажите, что для произвольного тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X наследственно вещественно полно.*

(2) *Для каждого $x \in X$ пространство $X \setminus \{x\}$ вещественно полно.*

(3) *Любое тихоновское пространство, которое можно непрерывно отобразить на пространство X так, что прообразы всех точек компактны, вещественно полно.*

(4) *Каждое тихоновское пространство, уплотняющееся*[1]) *на пространство X, вещественно полно.*

Указание. Примените упр. 3.11.А и следствие 3.11.8.

(b) Выведите из (а), что плоскость Немыцкого вещественно полна.

(с) Выведите из (b), доказательства теоремы 3.11.3 и теоремы о диагональном отображении, что пространство R^{c} не нормально (см. упр. 3.1.Н (а) и задачу 2.7.16 (а)).

3.11.С. Заметьте, что тихоновское пространство X псевдокомпактно в том и только том случае, если $\upsilon X = \beta X$.

3.11.D. (а) (Макки [1944], Хьюитт [1950]). Докажите, что пространство $D(\mathfrak{m})$ вещественно полно в том и только том случае, если $\mathfrak{m}$ — неизмеримый кардинал.

Указание. Примените теорему 3.11.11.

(b) (Гиллман и Джерисон [1960]). Покажите, что сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, вещественно полна в том и только том случае, если все пространства X_s и пространство $D(|S|)$ вещественно полны.

Указание. Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ гомеоморфна замкнутому подпространству произведения $D(|S|) \times \prod_{s \in S} X_s$.

3.11.Е (Фролик [1961]). Нормальное пространство, являющееся непрерывным образом вещественно полного пространства при открытом отображении, может не быть вещественно полным.

Указание. Возьмите в качестве области значений пространство W_0 всех счетных ординалов, а в качестве области определения сумму $\bigoplus_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$, где $X_\alpha = \{x \in W_0 \colon x \leqslant \alpha\}$.

3.11.F. (а) (Вулих [1952], Энгелькинг [1964]). Докажите, что непрерывное отображение $f \colon A \to Y$ всюду плотного подпространства топологического пространства X в вещественно полное пространство Y непрерывно продолжается на X в том и только том случае, если для каждой последовательности $F_1, F_2, \ldots$ функционально замкнутых в Y множеств, такой, что

---

[1]) Напомним, что *уплотнением* называется взаимно однозначное непрерывное отображение одного пространства на другое. — *Прим. перев.*

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$, имеет место соотношение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{f^{-1}(F_i)} = \varnothing$, где черта обозначает замыкание в X.

Указание. Рассмотрите сначала случай $Y = R$: примените теорему 3.2.1.

(b) (Гиллман и Джерисон [1960]). Покажите, что если взять в конструкции βX, описанной в упр. 3.6.K (a), только те ультрафильтры на $\mathcal{D}_0(X)$, которые счетно центрированы, то получится хьюиттово пополнение vX.

3.11.G (Пономарев [1959], Фролик [1961]). Докажите, что если $f: X \to Y$ — совершенное открытое отображение вещественно полного пространства X на тихоновское пространство Y, то Y вещественно полно.

Указание. Примените упр. 1.5.L (a) и теоремы 3.7.15 и 3.11.10.

3.11.H (Пасынков [1965]). Топологическое пространство X вещественно полно в том и только том случае, если оно гомеоморфно пределу обратного спектра линделёфовых пространств (или — что эквивалентно — гомеоморфно пределу обратного спектра из подпространств гильбертова куба $I^{\aleph_0}$).

3.12. ЗАДАЧИ

Дальнейшие характеристики компактности: точки полного накопления и теорема Александера о предбазе

3.12.1 (Куратовский и Серпинский [1921], Вьеторис [1921], П. С. Александров и Урысон [1929] (объявлено в [1923])). Точка x топологического пространства X называется *точкой полного накопления для множества* $A \subset X$, если $|A \cap U| = |A|$ для каждой окрестности U точки x.

Докажите, что для произвольного топологического пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X компактно.*

(2) *Для каждого бесконечного подмножества пространства X в X есть точка полного накопления.*

(3) *Для каждой убывающей трансфинитной последовательности $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_\xi \supset \ldots$, $\xi < \alpha$, непустых замкнутых в X множеств пересечение $\bigcap\limits_{\xi<\alpha} F_\xi$ не пусто.*

Указание. Для каждого бесконечного ординала λ существует начальный ординал, конфинальный λ (см. Куратовский и Мостовский [1968]).

Замечание. Легко показать, что если для каждого несчетного множества $A \subset X$ в X есть точка полного накопления, то $l(X) \leqslant \aleph_0$. С другой стороны, пространство всех ординалов $< \omega_{\omega_0}$ с топологией, порожденной естественным линейным упорядочением $<$, является линделёфовым пространством, в котором нет точки полного накопления (для всего пространства). П. С. Александров и Урысон доказали в [1929], что если $l(X) \leqslant \aleph_0$, то каждое несчетное множесто $A \subset X$ регулярной мощности имеет в X точку полного накопления. А. С. Мищенко в [1962a] определил тихоновское не линделёфово пространство X, в котором каждое несчетное множество $A \subset X$ регулярной мощности имеет точку полного накопления, и доказал, что каждое счетно паракомпактное нормальное пространство, обладающее последним свойством, является линделёфовым пространством (см. задачу 3.12.7 (d)).

3.12.2 (Александер [1939]). (a) Пусть X — топологическое пространство и $\mathscr{P}$ — некоторая его предбаза. Покажите, что X компактно в том и только том случае, если из каждого покрытия пространства X элементами семейства $\mathscr{P}$ можно выделить конечное подпокрытие (это и есть *теорема Александера о предбазе*).

Указание. В классе всех семейств открытых подмножеств пространства X свойство не содержать никакого конечного подсемейства, покрывающего X, является свойством конечного характера. Если X не компактно, то найдется максимальное семейство $\mathscr{R}$, которое обладает указанным свойством и покрывает X. Покажите, что если $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — открытые множества и $G_i \notin \mathscr{R}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, то $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_k \notin \mathscr{R}$, и что если $G_1 \notin \mathscr{R}$ и $G_1 \subset G_2$, то $G_2 \notin \mathscr{R}$. Выведите отсюда, что пересечение $\mathscr{R} \cap \mathscr{P}$ покрывает X.

(b) Докажите теорему Тихонова с помощью характеристики компактности, установленной в (a).

Линейно упорядоченные пространства III (см. задачи 1.7.4, 2.7.5, 3.12.12(f), 5.5.22, 6.3.2 и 8.5.13(j)).

3.12.3. (a) (Хаар и Кёниг [1910]). Покажите, что пространство X с топологией, порожденной линейным упорядочением $<$, компактно в том и только том случае, если каждое подмножество $A \subset X$ обладает в X наименьшей верхней гранью.

Указание. Наименьшей верхней гранью пустого множества служит наименьший элемент множества X.

(b) Докажите, что каждое пространство X с топологией, порожденной линейным упорядочением $<$, обладает компактификацией cX, топология которой порождается некоторым линейным упорядочением $<'$, таким, что $x <' y$ равносильно $x < y$ для всех $x, y \in X$.

Указание. Рассмотрите множество сечений множества X; примените задачу 2.7.5 (a).

Замечание. Линейно упорядоченные компактификации линейно упорядоченных пространств были исследованы Федорчуком в [1969] (объявлено в [1966a]) и Кауфманом в [1967].

(c) Проверьте, что топология на множестве всех ординалов $\leqslant\omega_1$, определенная в примере 3.1.27, совпадает с топологией, порожденной естественным линейным упорядочением $<$.

(d) Рассмотрите линейное упорядочение $<$ на квадрате I^2, определенное правилом: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или если $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$ (это упорядочение называется *лексикографическим упорядочением*). Докажите, что квадрат с топологией, порожденной указанным линейным упорядочением, компактен и удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен и не совершенно нормален. Проверьте, что наделенный такой топологией квадрат содержит пространство «две стрелки», определенное в упр. 3.10.C.

3.12.4. (a) (Мардешич и Папич [1962]). Покажите, что для каждого линейно упорядоченного пространства X имеют место неравенство $\chi(X) \leqslant c(X)$.

(b) (Латцер и Беннет [1969]; для компактного X — Мардешич и Папич [1962]). Покажите, что для каждого линейно упорядоченного пространства X имеет место неравенство $hl(X) \leqslant \leqslant c(X)$, где hl — наследственное число Линделёфа (см. задачу 2.7.9 и § 3.8).

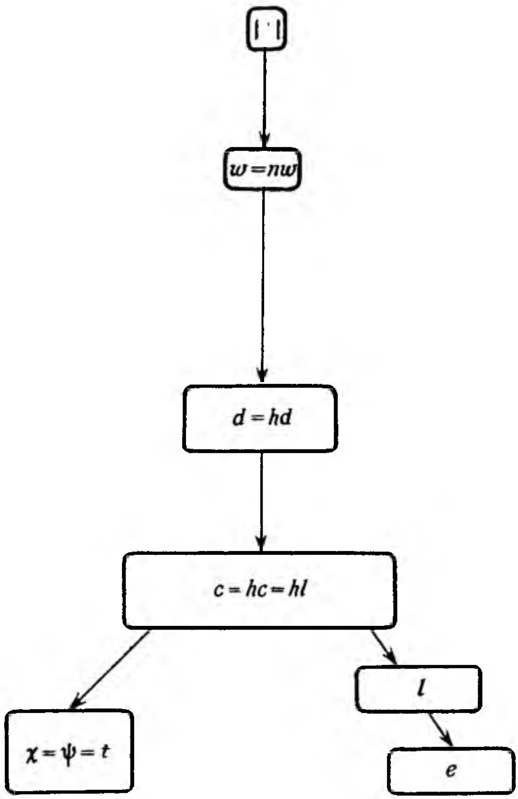
Указание. Применив 3.12.3 (b), сведите задачу к случаю компактного пространства X. Заметьте, что каждое открытое множество может быть представлено как объединение некоторого семейства попарно не пересекающихся интервалов, примените (a) и подходящее обобщение упр. 3.8.A (a).

(c) (Скула [1965]). Покажите, что для каждого линейно упорядоченного пространства X имеет место равенство $d(X) = = hd(X)$.

Указание (Латцер и Беннет [1969]). Пусть D — всюду плотное множество в X, такое, что $|D| = d(X)$. Для произвольного $A \subset X$ выберем по одной точке из каждого непустого пересечения $A \cap (a, b)$, где $a, b \in D$ и $a < b$. Проверьте, что объединение E так полученного множества и множества всех изолированных точек множества A всюду плотно в A; с помощью (b) покажите, что $|E| \leqslant d(X)$.

(d) Покажите, что для каждого линейно упорядоченного пространства X имеют место равенства $\chi(X) = \psi(X) = t(X)$ и $w(X) = nw(X)$.

(e) Проверьте, что следующая диаграмма (см. задачу 1.7.12(a)) содержит все равенства и неравенства, которые выполняются в классе всех линейно упорядоченных пространств для вошедших в нее кардинальных функций (символ | | обозначает мощность; по поводу соотношений между $d(X)$ и $c(X)$ см. замечание к задаче 2.7.9 (f)):



Замечание. Хайнал и Юхас доказали в [1969], что если пространство X линейно упорядочено, то либо $d(X) = c(X)$, либо $d(X)$ — наименьший кардинал, больший, чем $c(X)$.

H-замкнутые и *H*-минимальные пространства

3.12.5 (a) (П. С. Александров и Урысон [1929] (объявлено в [1923]), П. С. Александров [1939]). Хаусдорфово пространство X называется *H-замкнутым*, если X замкнуто в каждом хаусдорфовом пространстве, содержащем его в качестве подпространства.

Докажите, что для хаусдорфова пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X H-замкнуто.*

(2) *Если* $\{V_s\}_{s\in S}$ — *центрированное семейство открытых в* X *множеств, то* $\bigcap\limits_{s\in S}\overline{V}_s \neq \varnothing$.

(3) *Каждый ультрафильтр в семействе всех открытых в* X *множеств сходится в* X.

(4) *Каждое открытое покрытие* $\{U_s\}_{s\in S}$ *пространства* X *содержит конечное подсемейство* $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$, *такое, что* $\overline{U}_{s_1}\cup\overline{U}_{s_2}\cup\ldots\cup\overline{U}_{s_k}=X$.

Выведите отсюда, что регулярное пространство H-замкнуто в том и только том случае, если оно компактно, и приведите пример нерегулярного H-замкнутого пространства.

Заметьте, что H-замкнутость не наследуется, вообще говоря, замкнутыми подмножествами.

(b) (Катетов [1940]). Заметьте, что H-замкнутость наследуется каноническими замкнутыми множествами и сохраняется (в сторону образа) непрерывными отображениями на хаусдорфовы пространства.

(c) (М. Стоун [1937], Катетов [1940]). Докажите, что хаусдорфово пространство X компактно в том и только том случае, если все его замкнутые подпространства H-замкнуты.

Указание (Катетов [1940]). Покажите, что каждое семейство $\mathcal{F}$ непустых H-замкнутых подпространств хаусдорфова пространства X, линейно упорядоченное по включению, имеет непустое пересечение. С этой целью убедитесь, что семейство всех открытых множеств $U\subset X$, для которых существует $F\in\mathcal{F}$, такое, что $F\subset\overline{F\cap U}$, центрировано.

(d) (Шевалле и О. Фринк [1941]). Докажите, что произведение $\prod\limits_{s\in S} X_s$, где $X_s\neq\varnothing$ при $s\in S$, H-замкнуто в том и только том случае, если все пространства X_s H-замкнуты.

(e) (Пархоменко [1939], Катетов [1940]). Хаусдорфово пространство X называется *H-минимальным*, если каждое уплотнение пространства X на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

Докажите, что хаусдорфово пространство X является H-минимальным в том и только том случае, если X семирегулярно и H-замкнуто. Приведите пример не компактного H-минимального пространства.

Указание. Примените задачу 1.7.8(b).

Замечание. Помимо H-замкнутых и H-минимальных пространств рассматривают аналогично определяемые $\mathcal{P}$-замкнутые и $\mathcal{P}$-минимальные пространства для различных топологических свойств $\mathcal{P}$. Этой теме посвящена обширная литература, обсуждаемая в статье Берри, Портера и Стефенсона [1968].

3.12.6 (Катетов [1940]). Обозначим через $\mathcal{O}(X)$ семейство всех открытых подмножеств хаусдорфова пространства X. Рассмотрим семейство $T(X)$ всех ультрафильтров на $\mathcal{O}(X)$, не сходящихся ни к какой точке пространства X, и определим топологию на множестве $\tau X = X \cup T(X)$, взяв в качестве окрестностей точки $x \in X$ семейство всех ее окрестностей в пространстве X, а в качестве окрестностей произвольной точки $\mathcal{F} \in T(X)$ семейство всех множеств вида $\{\mathcal{F}\} \cup U$, где $U \in \mathcal{F}$. Пространство τX, полученное таким образом, называется *катетовским расширением пространства* X.

(a) Заметьте, что X является открытым всюду плотным подпространством пространства τX и что подпространство $\tau X \setminus X$ пространства τX дискретно.

(b) Докажите, что τX есть H-замкнутое пространство и что для каждого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ пространства X в хаусдорфово пространство Y, такого, что $\overline{f(X)} = Y$, найдется подпространство Z пространства τX, содержащее X, и продолжение $F\colon Z \to Y$ отображения f, удовлетворяющее условию $F(Z) = Y$.

Заметьте, что указанное свойство характеризует τX (с точностью до гомеоморфизма) в семействе всех хаусдорфовых пространств, содержащих X в качестве всюду плотного подпространства.

(c) Покажите, что если в ситуации, описанной в (b), пространство Y компактно или является H-замкнутым пространством, содержащим X в качестве всюду плотного подпространства, причем $f = \mathrm{id}_X$, то $Z = \tau X$.

Кардинальные функции III (см. задачи 1.7.12, 1.7.13, 2.7.9—2.7.11, 3.12.4, 3.12.12(j) и 8.5.17)

3.12.7. (a) Заметьте, что $hnw(X) = nw(X)$ и $h\psi(X) = \psi(X)$ для каждого топологического пространства X и что $\psi(X) \leqslant hl(X)$ для произвольного хаусдорфова пространства X.

(b) (Ю. М. Смирнов [1950]; для $\aleph_0$ — Серпинский [1921a]). Докажите, что топологическое пространство X удовлетворяет условию $hl(X) \leqslant \aleph_\alpha$ в том и только том случае, если для каждой возрастающей трансфинитной последовательности $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_\xi \subset \ldots$, $\xi < \omega_{\alpha+1}$, открытых в X множеств найдется $\xi_0 < \omega_{\alpha+1}$, такое, что $U_\xi = U_{\xi_0}$ при всех $\xi \geqslant \xi_0$ (см. задачу 2.7.9(e)).

(c) (Серпинский [1921a]). Приведите пример хаусдорфова пространства X, такого, что $hl(X) > hd(X) = \aleph_0$.

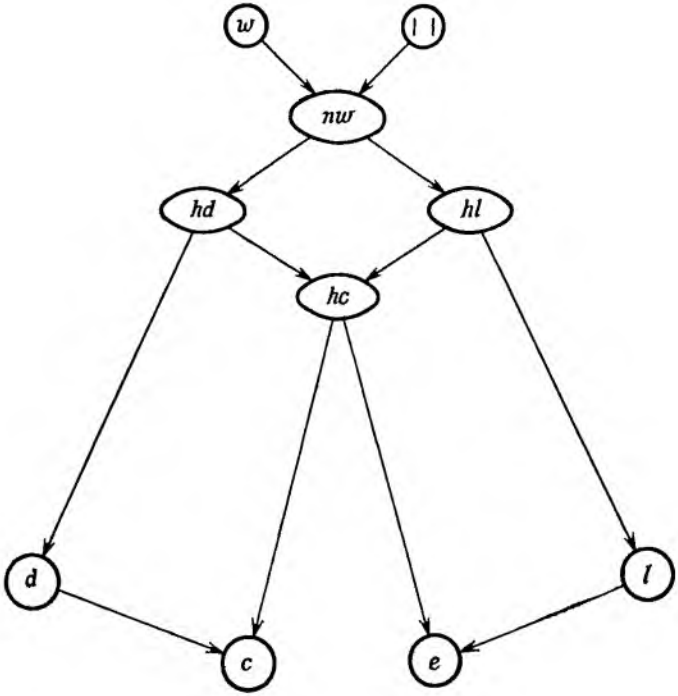
Указание. Рассмотрите некоторое вполне упорядочение $\prec$ вещественной прямой R и возьмите топологию на R, в которой окрестностями произвольной точки $x \in R$ служат множества $U_i(x) = \{x\} \cup \{y \in R\colon |x-y| < 1/i$ и $y \prec x\}$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Замечание. Тодорчевич описал в [1984] вполне регулярное пространство X, для которого $hl(X) > hd(X) > \aleph_0$. Регулярное пространство X, такое, что $hl(X) > hd(X) = \aleph_0$, называется S-пространством. Первый пример S-пространства был приведен М. Э. Рудин в [1972]: в предположении, что существует пространство Суслина (см. замечание к задаче 2.7.9(f)), она определила нормальное наследственно сепарабельное пространство X, которое не обладает свойством Линделёфа (и удовлетворяет условию $\psi(X) > \aleph_0$). Пример наследственно нормального и наследственно сепарабельного счетно компактного пространства X, не являющегося линделёфовым пространством, был построен в [1974] Хайналом и Юхасом в предположении континуум-гипотезы. Осташевский в [1976] вывел из одного теоретико-множественного утверждения, совместимого с аксиомами теории множеств, что существует наследственно сепарабельное счетно компактное локально компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности, не являющееся линделёфовым пространством. Слив воедино последние две конструкции, Юхас, Кунен и М. Э. Рудин привели в [1976] (в предположении континуум-гипотезы) намного более простой пример наследственно сепарабельного локально компактного хаусдорфова пространства с первой аксиомой счетности, не являющегося линделёфовым пространством. Из примера Осташевского и одного результата Сентмиклоси [1978] следует, что существование компактных S-пространств совместимо с обычными аксиомами теории множеств и не зависит от них. Как показал Тодорчевич в [1981], существование S-пространства также не зависит от аксиом теории множеств (доказательство этого и дальнейшие сведения см. в работе Ройтман [1984]).

Тодорчевич также описал в [1984] вполне регулярное пространство X, для которого $hd(X) > hl(X) > \aleph_0$. Регулярное пространство X, для которого $hd(X) > hl(X) = \aleph_0$, называется L-пространством. Пример L-пространства в рамках классической теории множеств не известен (хаусдорфово пространство X, определенное в указании к задаче 2.7.9(f), удовлетворяет условиям $hd(X) > hl(X) = \aleph_0$). Любое пространство Суслина является наследственно линделёфовым несепарабельным пространством (см. задачу 3.12.4(e)); таковы же пространства, построенные в предположении континуум-гипотезы и упомянутые в последнем абзаце замечания к задаче 2.7.9(f) (пространство, построенное Хайналом и Юхасом, удовлетворяет неравенству $hl(X) < t(X)$). Существование компактного L-пространства совместимо с обычными аксиомами (достаточно указать на континуум Суслина). Юхас [1970] показал, что существование компактного L-пространства не зависит от аксиом теории множеств[1]).

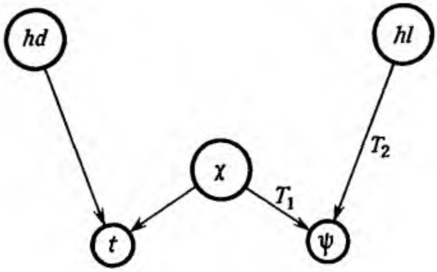
(d) (Куратовский и Серпинский [1921]). Покажите, что регулярное пространство X наследственно линделёфово в том и только том случае, если каждое несчетное множество $A \subset X$ обладает точкой конденсации, лежащей в A, т. е. если $A \cap A^0 \neq \varnothing$ (см. задачу 1.7.11).

(e) Воспользовавшись приведенным выше замечанием к части (c), проверьте, что следующая диаграмма (см. задачу 1.7.12(a)) содержит все неравенства, которые выполняются для кардинальных функций, входящих в эту диаграмму (через $|\ |$ обозначена мощность):



[1]) Сентмиклоси в [1978] показал, что в предположении аксиомы Мартина и отрицания континуум-гипотезы (совместимом с обычными аксиомами теории множеств) каждый наследственно сепарабельный компакт совершенно нормален, а Юхас в [1970] вывел из того же предположения, что каждый совершенно нормальный компакт наследственно сепарабелен. Федорчук в [1976] установил, что с аксиомами теории множеств совместимо существование наследственно сепарабельного компакта X мощности $2^{\aleph_1}$, в котором нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности, а А. В. Иванов в [1980*] показал, что можно дополнительно потребовать, чтобы простран-

(f) С помощью сделанного выше замечания к части (с) проверьте, что следующая диаграмма содержит все неравенства, выполняющиеся для входящих в эту диаграмму кардинальных функций (символ T_i рядом со стрелкой означает, что соответствующее неравенство выполняется для T_i-пространств):



(g) Для кардинальной функции f обозначим через hcl (через $hopf$) кардинальную функцию, значение которой на пространстве X равно $\sup f(M)$, где супремум берется по всем замкнутым (по всем открытым) подпространствам M пространства X. Покажите, что для каждого топологического пространства X имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &hcld(X) \leqslant hd(X), && hopd(X) = d(X),\\ &hclc(X) = hc(X), && hopc(X) = c(X),\\ &hcll(X) = l(X), && hopl(X) = hl(X),\\ &hcle(X) = e(X), && hope(X) \leqslant hc(X). \end{aligned}$$

Покажите, что $hope(X) = hc(X)$ для каждого T_1-пространства X, и приведите пример T_0-пространства X, такого, что $hope(X) \neq hc(X)$.

Приведите пример хаусдорфова пространства X, для которого $hcld(X) = \aleph_0 < hd(X)$.

Указание. Измените топологию «двух стрелок» (см. упр. 3.10.С), объявив открытыми все множества вида $U \setminus A$,

---

ство X^n было наследственно сепарабельным при всех целых положительных n. Как заметил Толл в [1969], с аксиомами теории множеств совместимо существование L-пространства, вес которого больше $2^{\aleph_0}$ Нельзя в рамках классической теории множеств доказать, что если пространство наследственно линделёфово, то его плотность не превосходит $\aleph_1$ (или $\aleph_2$, $\aleph_3$ и т. д.) — см. Юхас [1971]. В той же работе показано, что если регулярное пространство наследственно сепарабельно, то это еще не означает, что его число Линделёфа не превосходит $\aleph_1$ (или $\aleph_2$, $\aleph_3$ и т. д.). К. Кунен в [1977*] доказал, что в предположении аксиомы Мартина и стрицания континуум-гипотезы следующие утверждения о регулярном пространстве X равносильны: (a) пространство X^n наследственно линделёфово при всех целых положительных n и (b) X^n наследственно сепарабельно при всех целых положительных n. — *Прим. перев.*

где U открыто в исходной топологии, а A — счетное подмножество множества C_0; примените упр. 3.1.В.

Замечание. Пространство, определенное выше в указании, является модификацией первого примера пространства с аналогичными свойствами, приведенного Оллом в [1975]. Пример регулярного пространства X, такого, что $hcld(X) \neq hd(X)$, не известен (см. задачи 3.12.9(d) и (e)) [1]).

(h) (Зенор [1980]). Покажите, что если семейство $\{X_s\}_{s \in S}$ топологических пространств таково, что $hl\left(\prod_{s \in S_0} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$ для каждого конечного $S_0 \subset S$ и $|S| \leqslant \mathfrak{m}$, то $hl\left(\prod_{s \in S} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$.

(i) (Зенор [1980]). Докажите, что если $hc(X \times Y) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, то либо $hl(X) \leqslant \mathfrak{m}$, либо $hd(Y) \leqslant \mathfrak{m}$.

Указание. Воспользуйтесь пунктом (b) и задачей 2.7.9(e).

3.12.8. (a) (Архангельский и В. И. Пономарев [1968]). Покажите, что если $f: X \to Y$ — факторное отображение «на», то $t(Y) \leqslant t(X)$.

Указание. Примените задачу 1.7.13(b).

(b) Если X есть k-пространство, то $t(X)$ является точной верхней гранью всех кардиналов вида $t(F)$, где F — компактное подпространство пространства X.

(c) *Теснотой множества* A в топологическом пространстве X называется наименьший кардинал $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такой, что если $A \cap \overline{C} \neq \varnothing$, то найдется $C_0 \subset C$, для которого $|C_0| \leqslant \mathfrak{m}$ и $A \cap \overline{C_0} \neq \varnothing$. Этот кардинал обозначается через $t(A, X)$.

Заметьте, что для произвольного топологического пространства X и любого множества $A \subset X$ имеет место неравенство $t(A, X) \leqslant \chi(A, X)$.

Докажите, что если A_1 и A_2 — подмножества пространства X, такие, что $A_1 \subset A_2$, и для каждого замкнутого в A_2 множества $F \subset A_2 \setminus A_1$ найдутся непересекающиеся открытые в X множества, содержащие A_1 и F соответственно, то $t(A_1, X) \leqslant t(A_1, A_2) t(A_2, X)$.

Выведите отсюда, что если F_1, F_2 — компактные подмножества хаусдорфова пространства X и $F_1 \subset F_2$, то $t(F_1, X) \leqslant t(F_1, F_2) t(F_2, X)$, и что для любого замкнутого в регулярном пространстве X множества F и каждой точки $x \in F$ имеет место неравенство $t(x, X) \leqslant t(x, F) t(F, X)$.

Указание. Положим $\mathfrak{m} = t(A_1, A_2) t(A_2, X)$. Предположим что нашлось $C \subset X$, такое, что $A_1 \cap \overline{C} \neq \varnothing$, и тем не менее

[1]) В. И. Малыхин построил (в предположении континуум-гипотезы) не наследственно сепарабельное тихоновское пространство, все замкнутые подпространства которого сепарабельны. — *Прим. перев.*

$A_1 \cap \overline{[C]_\mathfrak{m}} = \varnothing$, где $[C]_\mathfrak{m} = \bigcup \{\overline{M}: M \subset C$ и $|M| \leqslant \mathfrak{m}\}$. Проверьте, что $A_1 \cap \overline{A_2 \cap [C]_\mathfrak{m}} = \varnothing$, возьмите открытое множество $U \subset X$, для которого $A_1 \subset U$ и $\overline{U} \cap A_2 \cap [C]_\mathfrak{m} = \varnothing$, и заметьте, что $A_2 \cap \overline{U \cap C} \neq \varnothing$. Примените неравенство $t(A_2, X) \leqslant \mathfrak{m}$.

(d) Заметьте, что если отображение f: $X \to Y$ замкнуто, то $t(f^{-1}(B), X) \leqslant t(B, Y)$ для всех $B \subset Y$.

Выведите отсюда, что если f: $X \to Y$ — замкнутое отображение регулярного пространства X в топологическое пространство Y и для каждого $x \in X$ выполняются неравенства $t(f(x), Y) \leqslant \mathfrak{m}$ и $t(x, f^{-1}f(x)) \leqslant \mathfrak{m}$, то $t(x, X) \leqslant \mathfrak{m}$.

Если отображение f совершенно, то предположение о регулярности пространства X можно опустить.

(e) (Архангельский [1972]). Определите нормальные пространства X и Y, такие, что $t(X) = t(Y) = \aleph_0$ и $t(X \times Y) > \aleph_0$.

Указание. В качестве X возьмите сумму счетного множества копий пространства $A(\aleph_0)$, в которой все предельные точки отождествлены, а в качестве Y возьмите пространство, полученное таким же образом из суммы континуума копий пространства $A(\aleph_0)$ [1]).

(f) (Малыхин [1972]). Покажите, что если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то для каждого хаусдорфова пространства Y имеет место неравенство $t(X \times Y) \leqslant \max(t(X), t(Y))$.

Докажите, что если семейство $\{X_s\}_{s \in S}$ топологических пространств таково, что $t\left(\prod_{s \in S_0} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$ для каждого конечного $S_0 \subset S$ и $|S| \leqslant \mathfrak{m}$, то $t\left(\prod_{s \in S} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$.

Указание. Примените (d) в доказательстве первой части.

(g) Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — семейство хаусдорфовых пространств, такое, что $t(X_s) \leqslant \mathfrak{m}$ и $h(X_s) \leqslant \mathfrak{m}$ при $s \in S$ и $|S| \leqslant \mathfrak{m}$. Покажите, что тогда $t\left(\prod_{s \in S} X_s\right) \leqslant \mathfrak{m}$.

3.12.9. (a) (Шапировский [1972]). Докажите, что для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ топологического пространства X существует $S_0 \subset S$, обладающее следующими свойствами: при всех $s \in S_0$ можно выбрать точку $x_s \in U_s$ таким образом, чтобы было $x_s \neq x_{s'}$ при $s \neq s'$, подпространство $A = \bigcup_{s \in S_0} \{x_s\}$ было дискретным и имело место равенство $X = \bigcup_{s \in S_0} U_s \cup \overline{A}$.

---

[1]) Пространство, которое получается отождествлением всех неизолированных точек в сумме $\mathfrak{m}$ экземпляров пространства $A(\aleph_0)$, называется *веером Фреше — Урысона* мощности $\mathfrak{m}$ и обозначается через $V(\mathfrak{m})$. — *Прим. перев.*

Выведите отсюда, что $X = \bigcup_{s \in S_0} U_s \cup \overline{A}$, где $|S_0| \leqslant hc(X)$ и $|A| \leqslant hc(X)$.

Указание. Применив трансфинитную индукцию, определите точки $x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots, \xi < \alpha$, пространства X и элементы $U_0, U_1, \ldots, U_\xi, \ldots, \xi < \alpha$, данного покрытия, такие, что

$$x_\xi \in U_\xi \setminus \Big[\bigcup_{\gamma < \xi} U_\gamma \cup \overline{A}_\xi\Big], \text{ где } A_\xi = \bigcup_{\gamma \in \xi} \{x_\gamma\} \text{ и } X = \bigcup_{\gamma \in \alpha} U_\xi \cup \overline{A}_\alpha.$$

(b) (Шапировский [1972]; для компактов — Архангельский [1971]). Покажите, что для каждого хаусдорфова пространства X выполняется неравенство $t(X) \leqslant hc(X)h(X)$.

Выведите отсюда, что $t(X) \leqslant hc(X)$ для каждого k-пространства X.

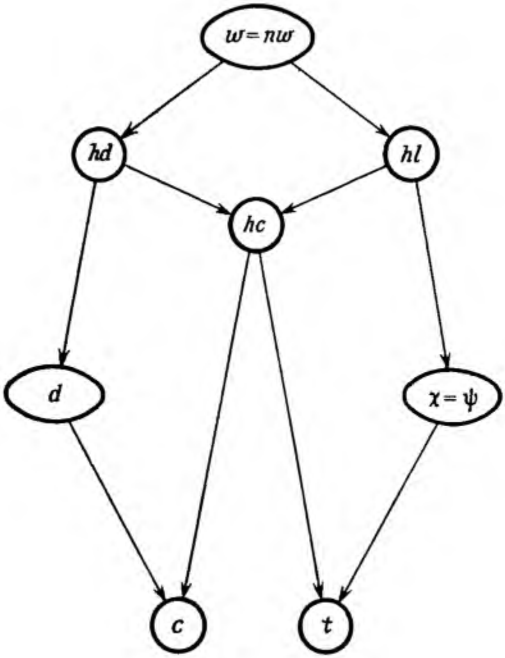
Указание. Применив 3.12.8 (c), сведите задачу к случаю компакта X. Пусть $\mathfrak{m} = hc(X)$; докажите, что если $\overline{C} \neq [C]_\mathfrak{m}$ для некоторого $C \subset X$, то $[C]_\mathfrak{m} \neq C$. С этой целью для произвольной точки $x_0 \in \overline{C} \setminus [C]_\mathfrak{m}$ возьмите семейство $\{U_s\}_{s \in S}$ открытых в X множеств, такое, что $x_0 \notin \overline{U}_s$ и $C \subset \bigcup_{s \in S} U_s$, и, применив (a), выберите $S_0 \subset S$ и $A \subset C$, для которых $|S_0| \leqslant \mathfrak{m}$, $|A| \leqslant \mathfrak{m}$ и $C \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s \cup \overline{A}$. Определите семейство $\{V_t\}_{t \in T}$ открытых в X множеств так, чтобы было $|T| \leqslant \mathfrak{m}$, $\{x_0\} = (C \cup \cup \{x_0\}) \cap \bigcap_{t \in T} V_t$ и $\bigcap_{t \in T} \overline{V}_t = \bigcap_{t \in T} V_t$. Заметьте, что $\chi(Z, X) \leqslant \mathfrak{m}$ для $Z = \bigcap_{t \in T} \overline{V}_t$, и рассмотрите базу $\mathscr{B}$ пространства X в Z, для которой $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$. Составьте множество B, взяв по точке из каждого пересечения $C \cap U$, где $U \in \mathscr{B}$, и покажите, что произвольное $z_0 \in \overline{B} \cap Z$ удовлетворяет условию $z_0 \in [C]_\mathfrak{m} \setminus C$.

(c) Воспользовавшись замечанием к задаче 3.12.7(c), проверьте, что диаграмма на с. 342 (см. задачу 1.7.12(a)) содержит все равенства и неравенства между входящими в нее кардинальными функциями, которые выполняются в классе всех компактов (ясно, что для каждого компакта X имеют место равенства $l(X) = e(X) = \aleph_0$).

Замечание. Шапировский доказал в [1974], что если X — компакт, то либо $hd(X) = hc(X)$, либо $hd(X)$ равно наименьшему кардиналу, большему чем $hc(X)$.

(d) Для каждого пространства X имеет место неравенство $hd(X) \leqslant hcld(X)t(X)$. Заметьте, что $hcld(X) = hd(X)$, если X — пространство счетной тесноты.

(e) Покажите, что для каждого хаусдорфова пространства X имеет место неравенство $hd(X) \leqslant hcld(X)h(X)$. Заметьте, что



$hcld(X)=hd(X)$, если X — пространство точечно счетного типа.

Указание. Примените (b).

(f) Приведите примеры нормальных пространств X и Y, для которых $h(X)<t(X)$ и $t(Y)<h(Y)$.

3.12.10. (a) (Архангельский [1969]). Докажите, что для каждого хаусдорфова пространства X выполняется неравенство $|X|\leqslant\exp[l(X)\chi(X)]$.

Указание (Р. Поль [1974]). Видоизмените доказательство теоремы 3.1.29 [1]).

(b) (Хайнал и Юхас [1967]). Докажите, что для каждого хаусдорфова пространства X выполняется неравенство $|X|\leqslant\leqslant\exp[c(X)\chi(X)]$.

Указание (Р. Поль [1974]). Видоизмените доказательство каждого $x\in X$ возьмем базу $\mathscr{B}(x)$ в точке x, такую, что $|\mathscr{B}(x)|\leqslant\mathfrak{m}$. Определим возрастающую трансфинитную последовательность $A_0\subset A_1\subset\ldots\subset A_\alpha\subset\ldots$, $\alpha<\tau$, подмножеств пространства X, где τ — наименьший начальный ординал мощности, большей чем $\mathfrak{m}$, такую, что $|A_\alpha|\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ и выполняется условие: для каждого семейства $\{\mathscr{U}_s\}_{s\in S}$ подсемейств семейства

[1]) См. также упрощенные варианты доказательства теоремы 3.1.29 и ее обобщений в работах Архангельского 1974, 1976 и 1978 гг. — *Прим. перев.*

$\bigcup\left\{\mathscr{B}(x)\colon x\in\bigcup\limits_{\beta<\alpha}A_\beta\right\}$, где $|S|\leqslant\mathfrak{m}$ и $|\mathscr{U}_s|\leqslant\mathfrak{m}$ при $s\in S$, если $X\setminus\bigcup\{\overline{\bigcup\mathscr{U}_s}\colon s\in S\}\neq\varnothing$, то $A_\alpha\setminus\bigcup\{\overline{\bigcup\mathscr{U}_s}\colon s\in S\}\neq\varnothing$. Покажите, что объединение $A=\bigcup\limits_{\alpha<\tau}A_\alpha$ равно X. Для этого предположите, что нашлась точка $y\in X\setminus A$, положите $\mathscr{B}(y)=\{V_s\}_{s\in S}$, где $|S|\leqslant\mathfrak{m}$, и для каждого $s\in S$ рассмотрите максимальное семейство $\mathscr{U}_s$ попарно непересекающихся открытых множеств, содержащееся в семействе $\{U\in\mathscr{B}(x)\colon x\in A$ и $U\cap V_s=\varnothing\}$.

(c) (Хайнал и Юхас [1967]). Докажите, что для каждого T_1-пространства X имеет место неравенство $|X|\leqslant\exp[hc(X)\psi(X)]$ (см. (h) ниже).

Указание (Годел [1976]). Положим $\mathfrak{m}=hc(X)\psi(X)$. Для каждого $x\in X$ возьмем семейство $\mathscr{U}(x)$ открытых множеств, такое, что $\bigcap\mathscr{U}(x)=\{x\}$ и $|\mathscr{U}(x)|\leqslant\mathfrak{m}$. Определим возрастающую трансфинитную последовательность $A_0\subset A_1\subset\ldots\subset A_\alpha\subset\subset\ldots$, $\alpha<\tau$, подмножеств пространства X, где τ — наименьший начальный ординал мощности, большей чем $\mathfrak{m}$, для которой $|A_\alpha|\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ и выполняется условие: для каждого подсемейства $\{U_s\}_{s\in S}$ семейства $\bigcup\left\{\mathscr{U}(x)\colon x\in\bigcup\limits_{\beta<\alpha}A_\beta\right\}$, где $|S|\leqslant\mathfrak{m}$, и каждого семейства $\{B_t\}_{t\in T}$ подмножеств множества $\bigcup\limits_{\beta<\alpha}A_\beta$, где $|T|\leqslant\mathfrak{m}$ и $|B_t|\leqslant\mathfrak{m}$ при $t\in T$, если $X\setminus\left[\bigcup\limits_{s\in S}U_s\cup\bigcup\limits_{t\in T}\overline{B}_t\right]\neq\varnothing$, то $A_\alpha\setminus\left[\bigcup\limits_{s\in S}U_s\cup\bigcup\limits_{t\in T}\overline{B}_t\right]\neq\varnothing$. Покажите, что объединение $A=\bigcup\limits_{\alpha<\tau}A_\alpha$ равно X. С этой целью предположите, что нашлась точка $y\in X\setminus A$, положите $X\setminus\{y\}=\bigcup\limits_{t\in T}F_t$, где $|T|\leqslant\mathfrak{m}$ и $\overline{F}_t=F_t$ при $t\in T$, и с помощью задачи 3.12.9(a) получите при каждом $t\in T$ подсемейство $\mathscr{V}_t$ семейства $\bigcup\{\mathscr{U}(x)\colon x\in A\cap F_t\}$ и подмножество $B_t\subset A\cap F_t$, мощность каждого из которых не превосходит $\mathfrak{m}$, такие, что $A\cap F_t\subset(\bigcup\mathscr{V}_t)\cup\overline{B}_t\subset X\setminus\{y\}$. В качестве $\{U_s\}_{s\in S}$ возьмите объединение $\bigcup\limits_{t\in T}\mathscr{V}_t$.

(d) (Шапировский [1972]). Покажите, что для каждого хаусдорфова пространства X имеет место неравенство $\psi(X)\leqslant\exp hc(X)$.

Указание. Возьмите точку $x_0\in X$ и, применив задачу 3.12.9(a), найдите семейство $\{U_s\}_{s\in S_0}$ открытых подмножеств пространства X и подмножество $A\subset X_0=X\setminus\{x_0\}$, такие, что $x_0\notin\overline{U}_s$, $|S_0|\leqslant hc(X)$, $|A|\leqslant hc(X)$ и $X_0=\bigcup\limits_{s\in S_0}U_s\cup(\overline{A}\cap X_0)$. Воспользовавшись упр. 3.1.F(a), заметьте, что для $X_1 = (\bar{A} \cap X_0) \cup \{x_0\}$ имеет место неравенство $\psi(X_1) \leqslant \exp hc(X)$.

(e) (Шапировский [1972]). Докажите, что для каждого T_1-пространства X найдется множество $S \subset X$ мощности $\leqslant [\psi(X)]^{hc(X)}$, такое, что

$$X = \bigcup\{\bar{M}: M \subset S \quad \text{и} \quad |M| \leqslant hc(X)\}.$$

Указание. Пусть τ — наименьший начальный ординал мощности, большей чем $hc(X)$. Определите трансфинитную последовательность $S_0, S_1, \ldots, S_\alpha, \ldots, \alpha < \tau$, подмножеств пространства X и трансфинитную последовательность $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{U}_\alpha, \ldots, \alpha < \tau$, семейств открытых подмножеств пространства X так, чтобы при всех $\alpha < \tau$ выполнялись следующие условия:

(1) $|S_\alpha| \leqslant [\psi(X)]^{hc(X)}$ и $|\mathcal{U}_\alpha| \leqslant [\psi(X)]^{hc(X)}$.

(2) Если $\alpha > 0$ и $S_\alpha \subset (\bigcup \mathcal{U}) \cup \bar{A}$, где $\mathcal{U} \subset \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta$, $A \subset \bigcup\limits_{\beta<\alpha} S_\beta$, $|\mathcal{U}| \leqslant hc(X)$ и $|A| \leqslant hc(X)$, то $X = (\bigcup \mathcal{U}) \cup \bar{A}$.

(3) Каждая точка множества S_α является пересечением некоторого подсемейства семейства $\mathcal{U}_\alpha$.

Примените затем задачу 3.12.9(a).

(f) (Шапировский [1972]). Покажите, что для каждого хаусдорфова пространства X найдется множество $S \subset X$ мощности $\leqslant \exp hc(X)$, такое, что

$$X = \bigcup\{\bar{M}: M \subset S \text{ и } |M| \leqslant hc(X)\}.$$

(g) (Хайнал и Юхас [1967]; для регулярного X — де Гроот [1965]). Докажите, что для каждого хаусдорфова пространства X имеет место неравенство $|X| \leqslant \exp\exp hc(X)$.

Указание (Шапировский [1972]). Примените (f) и теорему 1.5.3.

Замечание. Более слабое неравенство $|X| \leqslant \exp\exp\exp hc(X)$ было доказано для вполне регулярных пространств Исбеллом в [1964a], а для хаусдорфовых пространств де Гроотом в [1965] и Б. А. Ефимовым в [1965].

(h) (Шапировский [1972]). Заметьте, что для регулярных пространств неравенство в (c) следует из (f) и упр. 3.1.F(d).

(i) (Ю. М. Смирнов [1950]; для $hl(X) = \aleph_0$ — П. С. Александров и Урысон [1929]). Докажите, что для произвольного хаусдорфова пространства X имеет место неравенство $|X| \leqslant \exp hl(X)$.

Указание. Докажите сначала, что $|X| \leqslant \exp[d(X)hl(X)]$, и выведите отсюда, что множества M из (f) удовлетворяют условию $|\bar{M}| \leqslant \exp hl(X)$. Видоизменив доказательство теоремы 3.1.29, можно показать также, что если хаусдорфово пространство X удовлетворяет неравенствам $\psi(X)\leqslant\mathfrak{m}$ и $|X|>2^{\mathfrak{m}}$, то у него есть подпространство M, для которого $l(M)>\mathfrak{m}$.

(j) (Хайнал и Юхас [1967]). Покажите, что для каждого хаусдорфова пространства X имеет место неравенство $hd(X)\leqslant\leqslant \exp hc(X)$.

Указание. Примените (f).

(k) (Шапировский [1972]). Покажите, что если пространство X регулярно, то $nw(X)\leqslant\exp hc(X)$.

Выведите отсюда, что $hl(X)\leqslant\exp hc(X)$ для каждого регулярного пространства X.

Указание. Заметьте, что множества $\overline{M}$ из (f) образуют сеть пространства X.

(l) (Шапировский [1972]). Докажите, что если пространство X регулярно, то $w(X)\leqslant\exp(hc(X)h(X)]$.

Указание. Пусть $\mathfrak{m}=\exp[hc(X)h(X)]$. Заметьте, что $d(X)\leqslant\leqslant\mathfrak{m}$ и $\chi(X)\leqslant\mathfrak{m}$ (воспользуйтесь для этого упр. 3.1.E(a)). Возьмите базу мощности $\leqslant\mathfrak{m}$ в каждой точке некоторого всюду плотного множества мощности $\leqslant\mathfrak{m}$, рассмотрите объединение $\mathcal{U}$ этих баз и докажите, что семейство $\{\operatorname{Int}(\overline{\bigcup\mathcal{U}_0})\colon \mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ и $|\mathcal{U}_0|\leqslant c(X)\}$ является базой пространства X.

3.12.11. (a) (Чех и Поспишил [1938]). Докажите, что если для каждой точки x компакта X имеет место неравенство $\chi(x,X)\geqslant\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, то $|X|\geqslant\exp\mathfrak{m}$ (здесь имеется в виду определение характера, принятое в основном тексте этой книги, т. е. мы отходим от соглашения, введенного в задаче 1.7.12, по которому значениями кардинальных функций могут служить лишь бесконечные кардиналы).

Указание. Пусть τ — начальный ординал мощности $\mathfrak{m}$. Для каждого $\alpha\leqslant\tau$ обозначим через $D(\alpha)$ множество всех трансфинитных последовательностей типа α, принимающих только значения 0 и 1. Для каждого $f\in D(\alpha)$ и любого $\beta<\alpha$ обозначим через f_β элемент множества $D(\beta)$, определенный так: $f_\beta(\gamma)=f(\gamma)$ при $\gamma<\beta$. Для каждого $f\in D(\alpha)$, где $\alpha<\tau$, и $i=0,1$ обозначим через f^i элемент множества $D(\alpha+1)$, определенный следующим образом: $f^i(\beta)=f(\beta)$ при $\beta<\alpha$ и $f^i(\alpha)==i$.

Применив трансфинитную индукцию, определите для каждого $\alpha<\tau$ и каждого $f\in D(\alpha)$ открытое множество $V_\alpha(f)\subset X$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $\overline{V_{\alpha+1}(f^i)}\subset V_\alpha(f)$ при $i=0, 1$ и $f\in D(\alpha)$.

(2) $\overline{V_{\alpha+1}(f^0)}\cap\overline{V_{\alpha+1}(f^1)}=\varnothing$ при $f\in D(\alpha)$.

(3) $\bigcap\limits_{\beta\leqslant\alpha} V_\beta(f_\beta)\neq\varnothing$ при $f\in D(\alpha)$.

(4) $V_\alpha(f)=X$ для каждого предельного ординала α и каждого $f\in D(\alpha)$.

Каждому $f \in D(\tau)$ поставьте в соответствие какую-нибудь точку из пересечения $\bigcap\limits_{\alpha<\tau} V_\alpha(f_\alpha)$ и покажите, что если f и f' отличаются на некотором непредельном ординале, то соответствующие f и f' точки различны.

(b) (Чех и Поспишил [1938]). В обобщение (a) покажите, что предположение о компактности X можно заменить предположением, что X является пересечением $\aleph_0$ открытых множеств в некотором компакте (т. е. что пространство X полно по Чеху).

(c) Заметьте, что $\aleph_0$ в (b) нельзя заменить на $\mathfrak{m}$.

Указание. Примените конструкцию, описанную в упр. 2.3.E, к $X = A(\mathfrak{c})$.

(d) (Архангельский [1969]). Покажите, что каждый компакт, удовлетворяющий первой аксиоме счетности, либо счетен, либо имеет мощность ровно $\mathfrak{c}$.

Указание. Покажите, что множество точек конденсации пространства X плотно в себе, и примените (a).

(e) (Франклин [1969]). Выведите из (b), что каждый компакт мощности $< 2^{\aleph_1}$ секвенциально компактен.

Указание. Из (b) следует, что каждый несчетный компакт мощности $< 2^{\aleph_1}$ содержит несчетное множество точек, характер в которых $\leqslant \aleph_0$.

Диадические пространства I (см. задачи 4.5.9—4.5.11)

3.12.12. Компакт X называется *диадическим* (П. С. Александров [1936]), если он является непрерывным образом канторова куба $D^{\mathfrak{m}}$ при некотором $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

(a) (Марчевский [1941], Тьюки [1941]). Заметьте, что $c(X) = \aleph_0$ для каждого диадического компакта X, и выведите отсюда, что компакт $A(\mathfrak{m})$ не диадический, если $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

Указание. См. теорему 2.3.17.

(b) (Шанин [1948] (объявлено в [1946b])). Покажите, что каждый диадический компакт веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ является непрерывным образом канторова куба $D^{\mathfrak{m}}$.

Указание (Энгелькинг и Пелчинский [1963]). Примените упр. 3.2.H(d).

(c) (Энгелькинг и Пелчинский [1963]). Докажите, что для каждой непрерывной вещественной функции $f: X \to R$ на диадическом компакте X найдется компакт $X_0 \subset X$ веса $\aleph_0$, такой, что $f(X_0) = f(X)$.

Заметьте, что R здесь можно заменить на любое тихоновское пространство веса $\aleph_0$.

(d) (Энгелькинг и Пелчинский [1963]). Выведите из (c), что компакт «две стрелки» не диадичен и что если стоун-чеховское расширение пространства X диадично, то X псевдокомпактно.

Указание. Покажите, что βR не является диадическим компактом, и заметьте, что любое не псевдокомпактное тихоновское пространство можно непрерывно отобразить на всюду плотное подпространство пространства R.

(e) (Есенин-Вольпин [1949]). Покажите, что если компакт X диадичен, то $w(X)=\chi(X)$ (см. (g) и (h) ниже).

Указание. Докажите аналог задачи 2.7.13(a) для пространства Y, одноточечные подмножества которого являются пересечениями $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ открытых множеств.

(f) (Шанин [1948] (объявлено в [1946a])). Докажите, что каждый линейно упорядоченный диадический компакт обладает счетной базой.

Указание. Примените (e) и задачу 3.12.4(a).

(g) (Б. А. Ефимов [1963a]). Докажите, что если $\chi(x,X)\leqslant\leqslant\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ для каждого x из некоторого всюду плотного подмножества диадического компакта X, то $w(X)\leqslant\mathfrak{m}$.

Указание (Э. Поль и Р. Поль [1976]). Пусть $\chi(x,X)\leqslant\mathfrak{m}$ для каждого x из множества B, всюду плотного в X. Рассмотрите отображение $f\colon D^{\mathfrak{n}}\to X$ канторова куба $D^{\mathfrak{n}}=\prod\limits_{s\in S}D_s$ на X и при каждом $a\in A=f^{-1}(B)$ выберите $S(a)\subset S$, такое, что $\overset{-1}{p}_{S(a)}p_{S(a)}(a)=f^{-1}f(a)$ и $|S(a)|\leqslant\mathfrak{m}$. Определите по индукции возрастающие последовательности $S_1\subset S_2\subset\ldots$ и $A_1\subset A_2\subset\subset\ldots$ подмножеств множеств S и A соответственно, такие, что $|S_i|\leqslant\mathfrak{m}$, $|A_i|\leqslant\mathfrak{m}$,

$$p_{S_i}(A)\subset\overline{p_{S_i}(A_i)}\quad\text{и}\quad S_{i+1}=S_i\cup\bigcup\{S(a)\colon a\in A_i\}.$$

Заметьте, что для $S_0=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$ и $A_0=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ имеют место соотношения $p_{S_0}(A)\subset\overline{p_{S_0}(A_0)}$ и $f(p_{S_0}^{-1}p_{S_0}(a))=f(a)$ при всех $a\in A$. Рассмотрите множество $A'=p_{S_0}(A)\times\prod\limits_{s\in S\setminus S_0}\{a_s\}$, где $a_s=0$ при $s\in S\setminus S_0$, и покажите, что $f(\bar{A}')=X$.

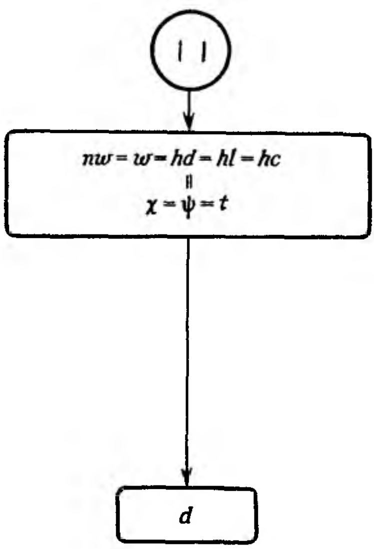
(h) (Архангельский и В. И. Пономарев [1968]). Докажите, что $w(X)=t(X)$ для каждого диадического компакта X.

Указание (Архангельский [1969]). Рассмотрите отображение $f\colon D^{\mathfrak{m}}\to X$ на X и множество $\Sigma_{\mathfrak{n}}\subset D^{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{n}=t(X)$, состоящее из тех точек пространства $D^{\mathfrak{m}}$, не более чем $\mathfrak{n}$ координат которых отличны от нуля. Покажите, что $f(\Sigma_{\mathfrak{n}})=X$, и заметьте, что теперь достаточно доказать неравенство $d(X)\leqslant\mathfrak{n}$. С помощью теоремы 2.3.15 убедитесь, что для каждого $\mathfrak{k}\geqslant\mathfrak{n}$ и произвольного множества $A\subset X$ мощности $\leqslant\exp\mathfrak{k}$ найдется множество $B\subset X$, такое, что $A\subset B$ и $|B|\leqslant\mathfrak{k}$. Трижды воспользовавшись этим наблюдением и применив теорему 1.5.3, покажите, что $|X| \geqslant \exp \mathfrak{n}$ (с этой целью рассмотрите произвольное множество $A \subset X$, для которого $|A| \leqslant \exp \exp \exp \mathfrak{n}$). Еще дважды воспользовавшись тем же соображением, докажите, что $d(X) \leqslant \mathfrak{n}$.

(i) (Энгелькинг [1965]; для кардиналов $\mathfrak{m}$ вида $\aleph_{\alpha+1}$ — Б. А. Ефимов [1965a]). Докажите, что если X — диадический компакт и $\chi(x_0, X) = \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, то X содержит подпространство M, гомеоморфное $D(\mathfrak{m})$, такое, что $M \cup \{x_0\}$ гомеоморфно $A(\mathfrak{m})$.

Указание. Рассмотрите непрерывное отображение $f\colon \prod\limits_{s \in S} D_s \to X$ на X, прообраз $A = f^{-1}(x_0)$ и множество $S_0 \subset S$, состоящее из тех $s \in S$, для которых можно найти точки $a(s) \in A$ и $b(s) \notin A$, такие, что $p_{s'}(a(s)) = p_{s'}(b(s))$ при $s' \neq s$. Для каждого $s \in S_0$ выберем точки $a(s)$ и $b(s)$ с этими свойствами. Докажите, что $A = p_{S_0}(A) \times \prod\limits_{s \in S \setminus S_0} D_s$, и выведите отсюда, что $|S_0| \geqslant \mathfrak{m}$. Прообразы точек при отображении b множества S_0 на множество $B = b(S_0)$ конечны; выведите отсюда, что $|B| \geqslant \mathfrak{m}$. Проверьте, что все предельные точки множества B принадлежат A, и положите $M = f(B)$.

(j) Проверьте, что следующая диаграмма (см. задачу 1.7.12(a)) содержит все равенства и неравенства, выполняющиеся для входящих в нее кардинальных функций в классе всех диадических компактов (символ $|X|$ обозначает здесь мощность множества X; в силу (a), $c(X) = \aleph_0$ для каждого диадического компакта X; ясно, что $l(X) = e(X) = \aleph_0$ для такого компакта X):



(k) (Б. А. Ефимов [1963a]). Докажите, что каждый наследственно нормальный диадический компакт обладает счетной базой.

Указание. Рассмотрите любое непрерывное отображение f: $D^{\mathfrak{m}} \to X$ на X и Σ-произведение $\Sigma(a) \subset D^{\mathfrak{m}}$. Покажите, что если $f(\Sigma(a)) = X$, то $w(X) \leqslant \aleph_0$ (см. задачу 3.12.23(f)). С этой целью заметьте, что каждое сепарабельное подпространство пространства X обладает счетной базой и что это же относится и к каждому подпространству мощности $\leqslant \mathfrak{c}$. Примените затем (i) и (e). Если $f(\Sigma(a)) \neq X$, возьмите любую точку $x \in X \setminus f(\Sigma(a))$ и покажите с помощью (i) и теоремы 3.10.21, что пространство $X \setminus \{x\}$ не нормально.

Обратные спектры II (см. задачи 2.7.19 и 6.3.16)

3.12.13 (Мардешич [1971]). Пусть $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр хаусдорфовых пространств и A_σ для каждого $\sigma \in \Sigma$ — компактное подпространство пространства X_σ, такое, что $\pi^\sigma_\rho(A_\sigma) \subset A_\rho$ при любых $\sigma, \rho \in \Sigma$, удовлетворяющих условию $\rho \leqslant \sigma$, т. е. $\boldsymbol{S}' = \{A_\sigma, \tilde{\pi}^\sigma_\rho, \Sigma\}$, где $\tilde{\pi}^\sigma_\rho(x) = \pi^\sigma_\rho(x)$ при $x \in A_\sigma$, является обратным спектром. Докажите, что $\boldsymbol{S}'' = \{X_\sigma/A_\sigma, (\pi^\sigma_\rho)^*, \Sigma\}$, где $(\pi^\sigma_\rho)^*$: $X_\sigma/A_\sigma \to X_\rho/A_\rho$ определено в упр. 2.4.B, является обратным спектром и что предельное пространство $\varprojlim \boldsymbol{S}''$ гомеоморфно факторпространству $(\varprojlim \boldsymbol{S})/(\varprojlim \boldsymbol{S}')$.

Проверьте, что предположение о компактности пространств A_σ нельзя опустить.

Вокруг теоремы Куратовского и теоремы Уайтхеда

3.12.14. (a) (Мрувка [1959]). Пусть X — такое топологическое пространство, что проекция p: $X \times Y \to Y$ является замкнутым отображением для каждого компакта Y, удовлетворяющего неравенству $w(Y) \leqslant w(X)$. Докажите, что тогда X компактно.

Указание. Воспользуйтесь условием (3) задачи 3.12.1, заметьте, что можно предполагать, что $|\alpha| \leqslant w(X)$, и возьмите в качестве Y пространство всех ординалов $\leqslant \alpha$ с топологией, порожденной естественным линейным упорядочением $<$.

(b) (Майкл [1968]). Докажите, что если декартово произведение $\mathrm{id}_X \times g$, где X — регулярное пространство, является факторным отображением для каждого факторного отображения g, то пространство X локально компактно (см. теорему 3.3.17).

Указание. Воспользуйтесь конструкцией, приведенной в указании к пункту (a), и примените пример 2.4.20.

(c) (Майкл [1968]). Докажите, что если произведение

$X \times Y$, где X — регулярное пространство, является k-пространством для каждого k-пространства Y, то пространство X локально компактно (см. теорему 3.3.27).

Указание. Примените (b) и пример 3.3.29.

(d) (Майкл [1968]). Докажите, что если произведение $X \times Y$, где X — регулярное пространство, является секвенциальным пространством для каждого секвенциального пространства Y, то пространство X локально секвенциально компактно (см. упр. 3.10.1(b)).

Указание. Примените теорему 3.10.33 и видоизмените конструкцию, приведенную в указании к пункту (а).

Наследственно k-пространства совпадают с пространствами Фреше — Урысона

3.12.15 (Архангельский [1968]). Докажите, что хаусдорфово пространство является наследственно k-пространством в том и только том случае, если оно пространство Фреше — Урысона.

Указание. Заметьте прежде всего, что если X — наследственно k-пространство, то для каждого подмножества $A \subset X$ и любой точки $x \in \bar{A} \setminus A$ найдется компакт $Z \subset A \cup \{x\}$, такой, что $x \in \overline{Z \setminus \{x\}}$. Возьмите затем такой компакт Z наименьшей мощности $\mathfrak{m}$, покажите, что $\chi(x, Z) = \mathfrak{m}$, и рассмотрите базу $V_1, V_2, \ldots, V_\alpha, \ldots, \alpha < \tau$, пространства Z в точке x, где τ — начальный ординал мощности $\mathfrak{m}$. Применив трансфинитную индукцию, определите трансфинитную последовательность $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha, \ldots, \alpha < \tau$, окрестностей точки x в Z и трансфинитную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots, \alpha < \tau$, точек множества Z, такие, что

$$\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} \{x_\beta\}\Big) \cap \bar{U}_\alpha = \varnothing, \quad U_\alpha \subset V_\alpha \quad \text{и} \quad x_\alpha \in \Big(\bigcap_{\beta \leqslant \alpha} U_\beta\Big) \setminus \{x\} \quad \text{при} \quad \alpha < \tau.$$

Покажите, что $\{x\} \cup \bigcup_{\alpha<\tau} \{x_\alpha\}$ содержит $A(\mathfrak{m})$.

Компактификации

3.12.16. (а) (Хьюитт [1947]). Докажите, что для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны (см. задачу 8.5.11):

(1) *Пространство X обладает единственной (с точностью до эквивалентности) компактификацией.*

(2) *Пространство X компактно или $|\beta X \setminus X| = 1$.*

(3) *Из любых двух замкнутых вполне отделенных подмножеств пространства X по крайней мере одно компактно.*

(b) Покажите, что каждое тихоновское пространство, удовлетворяющее условиям в (а), псевдокомпактно и локально компактно (см. задачу 3.12.19(а)).

(c) Приведите пример счетно компактного локально компактного пространства, у которого есть бесконечно много неэквивалентных компактификаций.

(d) Заметьте, что если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновского пространства X, обладающего единственной компактификацией, на некомпактное тихоновское пространство Y, то Y обладает единственной компактификацией, а отображение f совершенно.

(e) (Вислисени и Флаксмайер [1965]). Докажите, что если для любых двух компактификаций тихоновского пространства X с первой аксиомой счетности существует наибольшая нижняя грань (т. е. семейство $\mathscr{C}(X)$ является решеткой), то пространство X локально компактно. Покажите, что предположение о первой аксиоме счетности существенно.

Указание. Покажите, что если некоторая последовательность точек множества $\beta X \setminus X$ сходится к точке из X, то у пространства X есть компактификации c_1X и c_2X, для которых не существует компактификации cX, удовлетворяющей неравенствам $cX \leqslant c_iX$ при $i = 1$ и 2.

3.12.17 (Франклин и Раджагопалан [1971]). (a) Определите по трансфинитной индукции трансфинитную последовательность $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_\alpha \subset \ldots$, $\alpha < \omega_1$, открыто-замкнутых подмножеств пространства $\beta N \setminus N$, такую, что $U_\alpha \neq U_\beta$ при $\beta < \alpha$, и проверьте, что формула

$$f(x) = \begin{cases} \omega_1 & \text{при} \quad x \in (\beta N \setminus N) \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} U_\alpha, \\ \inf\{\alpha\colon x \in U_\alpha\} & \text{при} \quad x \in \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} U_\alpha \end{cases}$$

задает непрерывное отображение $f\colon \beta N \setminus N \to W$ на пространство W всех ординалов $\leqslant \omega_1$.

Указание. Примените упр. 3.6.A.

(b) Определите трансфинитную последовательность $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_\alpha \subset \ldots$, $\alpha < \delta$, открыто-замкнутых собственных подмножеств пространства $\beta N \setminus N$, такую, что $U_\beta \neq U_\alpha$ при $\beta < \alpha$ и объединение $\bigcup\limits_{\alpha<\delta} U_\alpha$ всюду плотно в $\beta N \setminus N$. Заметьте, что $\aleph_1 \leqslant |\delta| \leqslant \mathfrak{c}$ и что в предположении континуум-гипотезы можно взять $\delta = \omega_1$. Определите непрерывное отображение $f\colon \beta N \setminus W(\delta + 1)$ на пространство $W(\delta + 1)$ всех ординалов $< \delta + 1$ с топологией, порожденной естественным линейным упорядочением $<$.

(c) Покажите, что существует компактификация γN пространства N, нарост которой совпадает с W. Отметьте, что γN — сепарабельный компакт мощности $\aleph_1$, не являющийся секвенциальным пространством. Проверьте, что $\gamma N \setminus \{\omega_1\}$ — сепарабельное локально компактное нормальное пространство с первой аксиомой счетности, не являющееся линделёфовым пространством.

Указание. Примените (а) и теорему 3.5.13.

(d) Покажите, что существует компактификация $\gamma' N$ пространства N, нарост которой совпадает с $W(\delta+1)$, такая, что никакая последовательность точек из N не сходится к точке δ. Заметьте, что $\gamma' N \setminus \{\delta\}$ — сепарабельное, локально компактное, секвенциально компактное нормальное пространство, которое не компактно.

Замечание. Первый пример секвенциально компактного не компактного нормального пространства, содержащего в качестве всюду плотного подпространства локально компактное сепарабельное метрическое пространство, был определен (в предположении континуум-гипотезы) М. Рудин в [1965].

(e) Заметьте, что в предположении континуум-гипотезы пространство $\gamma' N \setminus \{\delta\}$ в (d) удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Длинная прямая и длинный отрезок

3.12.18. Пусть W_0 — множество всех счетных ординалов. Рассмотрим линейное упорядочение $<$ на множестве $V_0 = W_0 \times [0, 1)$, определенное так: $(\alpha_1, t_1) < (\alpha_2, t_2)$, если $\alpha_1 < \alpha_2$ или $\alpha_1 = \alpha_2$ и $t_1 < t_2$. Множество V_0 с топологией, порожденной линейным упорядочением $<$, называется *длинной прямой.* Присоединив к множеству V_0 точку ω_1 и приняв, что $x < \omega_1$ при всех $x \in V_0$, мы получим некоторое линейно упорядоченное множество V. Это множество V с топологией, порожденной линейным упорядочением $<$, называется *длинным отрезком.*

(а) Покажите, что длинный отрезок является стоун-чеховской компактификацией длинной прямой.

(b) Докажите, что для любого $x_0 \in V_0$ подпространство $M = \{x \in V_0\colon\ x \leqslant x_0\}$ пространства V_0 гомеоморфно отрезку $[0, 1]$.

Указание. Пусть Q — множество всех рациональных чисел интервала $(0, 1)$. Покажите, что элементы множеств Q и $M \cap (W_0 \times Q)$ можно так расположить в последовательности $r_1, r_2, \ldots$ и $s_1, s_2, \ldots$, что неравенство $r_i < r_j$ будет выполняться в том и только том случае, если $s_i < s_j$. Проверьте, что формула $f(r_i) = s_i$ определяет непрерывное отображение $f\colon Q \to M$, и примените теорему 3.2.1.

(c) (Архангельский [1961], Фролик [1961]). Тихоновское пространство X называется *локально полным по Чеху*, если у каждой точки $x \in X$ есть полная по Чеху окрестность.

Покажите, что пространство, получающееся при удалении из длинной прямой всех точек $(\alpha, 0)$, где α — любой непредельный ординал, локально полно по Чеху, но не полно по Чеху (см. задачу 5.5.8(c)).

(d) Заметьте, что каждое локально полное по Чеху пространство является образом некоторого полного по Чеху пространства при открытом отображении, и выведите отсюда, что полнота по Чеху не является инвариантом открытых отображений (см. задачу 5.5.8(b)).

Плоскость Тихонова и близкие к ней пространства

3.12.19. (a) (Тихонов [1930], Хьюитт [1948], Тонг [1949]). Пусть W — пространство всех ординалов $\leqslant\omega_1$ и W' — его подпространство, состоящее из всех ординалов $\leqslant\omega_0$. Пространство $T = W \times W' \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ называется *плоскостью Тихонова.*

Заметьте, что $\beta T = W \times W'$, и выведите отсюда, что пространство T не нормально. Плоскость Тихонова обладает единственной компактификацией и не счетно компактна (см. задачу 3.12.16(b)).

(b) (П. С. Александров и Урысон [1929]). Докажите, что если каждому счетному ординалу $\alpha > 0$ поставить в соответствие ординал $\varphi(\alpha)$ таким образом, что $\varphi(\alpha) < \alpha$ при всех $\alpha < \omega_1$, то найдется ординал $\alpha_0 < \omega_1$, для которого $|\varphi^{-1}(\alpha_0)| = \aleph_1$.

(c) Докажите, что для каждого компакта X произведение $W \times X$ является стоун-чеховской компактификацией пространства $W_0 \times X$, где W_0 — пространство всех счетных ординалов (см. задачу 3.12.20(c)).

Указание (Ван Дауэн [1978]). Пусть $f\colon W_0 \times X \to I$ — произвольное непрерывное отображение. Возьмите любое положительное целое число i и покажите, что для каждого счетного ординала $\alpha > 0$ найдется ординал $\varphi(\alpha) < \alpha$, такой, что $|f(\alpha', x) - f(\alpha, x)| < 1/i$ при всех $x \in X$ и всех α', удовлетворяющих условию $\varphi(\alpha) < \alpha' \leqslant \alpha$. Примените затем (b).

(d) (Дьедонне [1939b], Хьюитт [1948]). Покажите, что произведение $W \times W$ является стоун-чеховской компактификацией пространства $W_0 \times W$, и выведите отсюда, что пространство $W_0 \times W$ не нормально. Отметьте, что пространство $W_0 \times W$ счетно компактно.

(e) Выведите из (d), что нормальность не сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями.

Стоун-чеховская компактификация произведений

3.12.20. (a) (Исивата [1969], Нобл [1969a] и [1969b], Комфорт и Хейджер — ссылка в работе Нобла [1969a]). Докажите, что для произвольных тихоновских пространств X и Y следующие условия равносильны:

(1) *Проекция* $p\colon X \times Y \to X$ *отображает функционально замкнутые подмножества пространства* $X \times Y$ *на замкнутые подмножества пространства* X.

(2) *Каждую ограниченную непрерывную функцию* $f\colon X \times Y \to R$ *можно непрерывно продолжить на* $X \times \beta Y$.

(3) *Для каждой непрерывной ограниченной вещественной функции* $f\colon X \times Y \to R$ *формула* $F(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$ *определяет непрерывную функцию* $F\colon X \to R$.

Указание (Комфорт и Хейджер — цитировано в работе Нобла [1969a]). Доказывая, что (3) $\Rightarrow$ (1), рассмотрите для произвольного функционально замкнутого множества $Z = g^{-1}(0) \subset X \times Y$ и любой точки $x_0 \in X \setminus p(Z)$ функцию $f\colon X \times Y \to R$, определенную правилом: $f(x, y) = -\min(|g(x, y)/g(x_0, y)|, 1)$.

(b) (Тамано [1960]). Докажите, что произведение $X \times Y$ тихоновских пространств X и Y псевдокомпактно в том и только том случае, если пространства X и Y псевдокомпактны и при проекции $p\colon X \times Y \to X$ образами функционально замкнутых подмножеств пространства $X \times Y$ служат замкнутые подмножества пространства X.

Указание (Комфорт и Хейджер [1971]). Доказывая, что если $X \times Y$ псевдокомпактно, то $p(Z)$ замкнуто в X для каждого функционально замкнутого множества $Z \subset X \times Y$, рассмотрите произвольную точку $x_0 \in \overline{p(Z)} \setminus p(Z)$ и непрерывную функцию $f\colon X \times Y \to I$, такую, что $Z = f^{-1}(0)$ и $f(x_0, y) = 1$ при всех $y \in Y$ (см. указание в пункте (a)). Определите затем по индукции последовательность $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ точек множества Z, а также последовательности $W_1, W_2, \ldots$ и $W'_1, W'_2, \ldots$ открытых подмножеств пространства $X \times Y$, где $W_i = U_i \times V_i$ — окрестность точки (x_i, y_i), удовлетворяющая условию $f(W_i) \subset [0, 1/3]$, и $W'_i = U'_i \times V_i$ — окрестность точки (x_0, y_i), такая, что $f(W'_i) \subset [2/3, 1]$, и где $U_{i+1} \cup U'_{i+1} \subset U'_i$ при $i = 1, 2, \ldots$. С помощью теоремы 3.10.22 получите противоречие. При доказательстве обратной импликации воспользуйтесь эквивалентностью условий (1) и (3) в (a).

(c) (Гликсберг [1959]). Докажите, что если произведение $X \times Y$ пространств X и Y псевдокомпактно, то $\beta X \times \beta Y$ является стоун-чеховской компактификацией пространства $X \times Y$, т. е. каждая непрерывная функция $f\colon X \times Y \to I$ непрерывно продолжается на $\beta X \times \beta Y$. Покажите, что если $\beta X \times \beta Y$ — стоун-чеховская компактификация пространства $X \times Y$ и оба пространства X, Y бесконечны, то произведение $X \times Y$ псевдокомпактно.

Указание (Комфорт и Хейджер [1971]). Заметьте, что если при проекции $p\colon Z\times T\to Z$, где Z — произвольный бесконечный компакт, образы функционально замкнутых подмножеств пространства $Z\times T$ являются замкнутыми подмножествами пространства Z, то пространство T псевдокомпактно. Для этого определите непрерывную функцию $f\colon Z\to I$, такую, что при некотором $z_0\in Z$ выполняются условия: $f(z_0)=0$ и $z_0\notin \operatorname{Int} f^{-1}(0)$. Предположив, что пространство T не псевдокомпактно, определите непрерывную функцию $g\colon T\to(0,1]$, для которой $\inf\limits_{t\in T} g(t)=0$. Рассмотрите функцию $h\colon Z\times T\to R$, заданную формулой $h(z,t)=-g(t)^{f(z)}$, и воспользуйтесь эквивалентностью условий (1) и (3) в (a). При доказательстве псевдокомпактности $X\times Y$ примените сделанное выше наблюдение к произведениям $\beta X\times Y$ и $X\times\beta Y$.

(d) (Гликсберг [1959]). Докажите, что если произведение $\prod\limits_{s\in S} X_s$ тихоновских пространств X_s псевдокомпактно, то $\beta\prod\limits_{s\in S} X_s=\prod\limits_{s\in S}\beta X_s$, и что если $\beta\prod\limits_{s\in S} X_s=\prod\limits_{s\in S}\beta X_s$ и произведение $\prod\limits_{s\in S\setminus\{s_0\}} X_s$ бесконечно при всех $s_0\in S$, то произведение $\prod\limits_{s\in S} X_s$ псевдокомпактно.

Указание. Сначала убедитесь, что если произведение $\prod\limits_{s\in S} X_s$ псевдокомпактно, то для каждой непрерывной функции $f\colon\prod\limits_{s\in S} X_s\to I$ и каждого $\varepsilon>0$ найдется конечное множество $S_0\subset S$, такое, что выполняется условие: если $x, y\in\prod\limits_{s\in S} X_s$ и $p_s(x)=p_s(y)$ при всех $s\in S_0$, то $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Для этого предположите, что такого S_0 не существует, и определите последовательность $S_1, S_2, \ldots$ попарно не пересекающихся конечных подмножеств множества S и последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ точек множества $\prod\limits_{s\in S} X_s$, такие, что $|f(x_i)-f(y_i)|\geqslant\varepsilon/2$ и $p_s(x_i)=p_s(y_i)$ при $s\notin S_i$. Найдите окрестности $U_i=\prod\limits_{s\in S} U_{s,i}$ и $V_i=\prod\limits_{s\in S} V_{s,i}$ точек x_i и y_i, для которых $U_{s,i}=V_{s,i}$ при $s\notin S_i$ и $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon/4$, когда $x\in U_i$ и $y\in V_i$, и выведите отсюда противоречие.

Рассмотрите затем произвольную пару A, B вполне отделенных подмножеств пространства $\prod\limits_{s\in S} X_s$ и для произвольной непрерывной функции f, отделяющей A и B, и числа $\varepsilon=1/3$ возьмите конечное множество $S_0\subset S$ с указанным выше свойством. Применив (c), продолжите f до непрерывной функции

$f^*\colon \prod_{s\in S_0} \beta X_s \times \prod_{s\in S\setminus S_0} X_s \to I$ и заметьте, что проекции множеств A и B на пространство $\prod_{s\in S_0} X_s$ имеют непересекающиеся замыкания в $\prod_{s\in S_0} \beta X_s$.

(e) (Гликсберг [1959]). Докажите, что если X — любое псевдокомпактное пространство и $\{X_s\}_{s\in S}$ произвольное семейство локально компактных псевдокомпактных пространств, то произведение $X \times \prod_{s\in S} X_s$ псевдокомпактно.

Указание. Заметьте сначала, что достаточно рассмотреть случай счетного семейства $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ некомпактных пространств. Покажите затем, что никакая бесконечная последовательность U_1, U_2, ... элементов канонической базы произведения $X \times \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ не локально конечна. С этой целью рассмотрите произведение $X \times \prod_{i=1}^{\infty} \alpha X_i$ и последовательность V_1, V_2, ... его открытых подмножеств, где V_k получается из U_k заменой каждого сомножителя X_i на αX_i.

Кольца непрерывных функций и компактификации

3.12.21 (М. Стоун [1937], Гельфанд и Колмогоров [1939], Хьюитт [1948] и [1950]). Для произвольного тихоновского пространства X через $C(X)$ (через $C^*(X)$) обозначается кольцо всех непрерывных вещественных (всех ограниченных непрерывных вещественных) функций на пространстве X. *Идеалом* в $C(X)$ (в $C^*(X)$) называется произвольное собственное подмножество Δ кольца $C(X)$ (кольца $C^*(X)$), такое, что если f, $g \in \Delta$, то $f+g \in \Delta$, и если $f \in \Delta$ и $g \in C(X)$ (если $g \in C^*(X)$), то $fg \in \Delta$. Идеал Δ называется *максимальным идеалом*, если для каждого идеала Δ', содержащего Δ, имеет место равенство $\Delta' = \Delta$.

(a) Покажите, что каждый идеал содержится в некотором максимальном идеале.

(b) Докажите, что тихоновское пространство X компактно в том и только том случае, если для каждого максимального идеала Δ в кольце $C(X)$, или, что равносильно, для каждого максимального идеала Δ в кольце $C^*(X)$, найдется точка $x \in X$, такая, что условия $f(x) = 0$ и $f \in \Delta$ эквивалентны.

Указание. Предположите, что для компакта X нашелся идеал Δ, содержащий при каждом $x \in X$ неотрицательную функцию f_x, такую, что $f_x(x) = 1$, и рассмотрите покрытие $\{f_x^{-1}((1/2, 3/2))\}_{x\in X}$ пространства X.

Пусть X — некомпактное тихоновское пространство. Возьмите открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$, в котором нет конечного подпокрытия. Для каждого $x \in X$ выберите $s(x) \in S$, такое, что $x \in U_{s(x)}$, и функцию $f_x \in C^*(X)$, для которой $f_x(x) = 1$ и $f_x(X \setminus U_{s(x)}) = \{0\}$; рассмотрите любой идеал, содержащий все отобранные функции.

(c) На множестве $\mathscr{M}$ всех максимальных идеалов кольца $C(X)$ (кольца $C^*(X)$) введите топологию, взяв в качестве базы семейство всех множеств вида $U_f = \{\Delta: f \notin \Delta\}$, и покажите, что $\mathscr{M}$ — компакт. Проверьте, что если поставить в соответствие каждой точке $x \in X$ максимальный идеал $\Delta(x)$ всех функций, обращающихся в точке x в нуль, то получится гомеоморфное вложение пространства X в пространство $\mathscr{M}$. Докажите, что $\mathscr{M}$ является стоун-чеховской компактификацией пространства X.

Выведите отсюда, что компакты X и Y гомеоморфны в том и только том случае, если кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны, т. е. если существует взаимно однозначное отображение Φ множества $C(X)$ на множество $C(Y)$, такое, что $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ и $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$ при всех f, $g \in C(X)$. Покажите, что тихоновские пространства X и Y, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, гомеоморфны в том и только том случае, если кольца $C(X)$ и $C(Y)$, или, что равносильно, кольца $C^*(X)$ и $C^*(Y)$, изоморфны.

Указание. Чтобы доказать, что $\mathscr{M}$ является стоун-чеховской компактификацией пространства X, примените теорему 3.2.1.

(d) Проверьте, что если Δ — максимальный идеал в $C(X)$, то $\mathscr{F}(\Delta) = \{f^{-1}(0): f \in \Delta\}$ — ультрафильтр на семействе $\mathscr{D}_0(X)$ всех функционально замкнутых подмножеств пространства X, и что если $\mathscr{F}$ — произвольный ультрафильтр на $\mathscr{D}_0(X)$, то $\Delta(\mathscr{F}) = \{f \in C(X): f^{-1}(0) \in \mathscr{F}\}$ — максимальный идеал в $C(X)$. Покажите, что $\Delta(\mathscr{F}(\Delta)) = \Delta$ и $\mathscr{F}(\Delta(\mathscr{F})) = \mathscr{F}$, т. е. имеет место взаимно однозначное соответствие между ультрафильтрами на $\mathscr{D}_0(X)$ и максимальными идеалами в $C(X)$. Заметьте, что конструкция пространства βX, указанная в (c), по существу идентична конструкции, описанной в упр. 3.6.K(a).

Приведите пример максимального идеала Δ в $C^*(N)$, такого, что семейство $\{f^{-1}(0): f \in \Delta\}$ не центрировано, и приведите пример ультрафильтра $\mathscr{F}$ на $\mathscr{D}_0(N)$, для которого множество $\{f \in C^*(N): f^{-1}(0) \in \mathscr{F}\}$ не является максимальным идеалом.

(e) Будем называть кольцо $P \subset C^*(X)$ *полным кольцом функций* на тихоновском пространстве X, если P содержит все постоянные функции, разделяет точки и замкнутые множества и замкнуто относительно топологии равномерной сходимости. Докажите, что конструкция из (c), примененная к множеству $\mathscr{M}$ всех максимальных идеалов в полном кольце функций P на тихоновском пространстве X, дает некоторую компактификацию пространства X и что семейство всех функций на X, допускающих непрерывное продолжение на эту компактификацию, совпадает с P. Проверьте, что таким образом установлено взаимно однозначное соответствие между всеми полными кольцами функций на тихоновском пространстве X и всеми компактификациями пространства X.

Указание. Доказывая, что пространство всех максимальных идеалов в P хаусдорфово, заметьте, что если $f \in P$ и $1/2 \leqslant f(x) \leqslant 3/2$ при всех $x \in X$, то f не принадлежит никакому идеалу (примените равенство $1/f = 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_0^i$, где $f_0 = 1 - f$). Рассмотрите компактификацию cX пространства X, для которой семейство всех функций на X, непрерывно продолжаемых на cX, совпадает с P.

(f) *Линейно-мультипликативный функционал* на $C(X)$ (на $C^*(X)$) — это функционал φ, сопоставляющий каждому $f \in C(X)$ (каждому $f \in C^*(X)$) вещественное число $\varphi(f)$ таким образом, что для всех f_1, f_2 и всех вещественных чисел t_1, t_2 выполняются условия:

$$\varphi(t_1 f_1 + t_2 f_2) = t_1 \varphi(f_1) + t_2 \varphi(f_2) \quad \text{и} \quad \varphi(f_1 \cdot f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2).$$

Функционал φ называется *нетривиальным*, если существует функция f, для которой $\varphi(f) \neq 0$. Функционал φ *определяется точкой* $x \in X$, если $\varphi(f) = f(x)$ при всех f.

Покажите, что тихоновское пространство X компактно в том и только том случае, если каждый нетривиальный линейно-мультипликативный функционал на $C^*(X)$ определяется некоторой точкой.

Заметьте, что имеется взаимно однозначное соответствие между нетривиальными линейно-мультипликативными функционалами на $C^*(X)$ и максимальными идеалами в $C^*(X)$, т. е. точками стоун-чеховской компактификации пространства X.

Указание. Если φ — нетривиальный линейно-мультипликативный функционал, то множество $\Delta = \{f\colon \varphi(f) = 0\}$ является максимальным идеалом.

(g) Покажите, что тихоновское пространство X вещественно полно в том и только том случае, если каждый нетривиальный линейно-мультипликативный функционал на $C(X)$ определяется некоторой точкой.

Заметьте, что имеет место взаимно однозначное соответствие между нетривиальными линейно-мультипликативными функционалами на $C(X)$ и точками пополнения по Хьюитту (т. е. вещественного пополнения) пространства X.

Выведите отсюда, что вещественно полные пространства X и Y гомеоморфны в том и только том случае, если кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны.

Указание. Примените (f) и теорему 3.11.10.

Замечание. Так как $\upsilon X \subset \beta X$, возникает вопрос, чем характеризуются те максимальные идеалы в $C(X)$ (в $C^*(X)$), которые отвечают точкам пространства υX. Как мы знаем, в конструкции пространства βX в терминах ультрафильтров на $\mathscr{D}_0(X)$ счетно центрированные ультрафильтры отвечают точкам пространства υX (см. упр. 3.11.F(b)). Оказывается, этим ультрафильтрам соответствуют те идеалы Δ (идеалы $\Delta \cap C^*(X)$), для которых факторкольцо $C(X)/\Delta$ изоморфно полю вещественных чисел; см. книгу Гиллмана и Джерисона [1960].

Счетная компактность

3.12.22. (a) (Акуаро [1965]). Докажите, что если каждое дискретное семейство непустых подмножеств пространства X конечно (имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$), то каждое открытое точечно конечное покрытие $\mathscr{U}$ (каждое открытое покрытие $\mathscr{U}$ с тем свойством, что никакая точка пространства X не принадлежит более чем $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ элементам семейства $\mathscr{U}$) пространства X содержит конечное подпокрытие (подпокрытие мощности $\leqslant\mathfrak{m}$).

Заметьте, что если пространство X счетно компактно, то каждое открытое точечно счетное покрытие $\mathscr{U}$ пространства X (каждое открытое покрытие $\mathscr{U}$ со свойством, что никакая точка пространства X не принадлежит более чем $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ элементам семейства $\mathscr{U}$) содержит конечное подпокрытие (подпокрытие мощности $\leqslant\mathfrak{m}$).

Указание. Рассмотрите максимальное множество $A \subset X$, такое, что $|A \cap U| \leqslant 1$ для всех $U \in \mathscr{U}$, и покажите, что $X = \bigcup\{U \in \mathscr{U}: A \cap U \neq \varnothing\}$.

(b) (Исэки и Касахара [1957], Левшенко [1957]). Докажите, что регулярное пространство X счетно компактно в том и только том случае, если каждое точечно конечное открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие.

Указание. Примените упр. 2.1.G.

(c) (Фролик [1960a]). Покажите, что предположение о регулярности существенно в (b).

Указание. При $i = 1, 2, \ldots$ пусть A_i обозначает множество всех чисел вида $k/2^i$, где $k = 1, 3, \ldots, 2^i - 1$. На множестве $X = X_0 \cup \{x_1, x_2, \ldots\}$, где $X_0 = \left(I \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ и $x_i \notin I$ при $i = 1, 2, \ldots$, введем топологию следующим образом. Множество X_0 наделим топологией, порожденной I, и объявим открытым подпространством пространства X; в качестве базы топологии в точке x_i возьмем семейство всех множеств вида $\{x_i\}\cup(U\cap X_0)$, где U — любое открытое множество в I, для которого $A_i\subset U$. С помощью теоремы Бэра о категории покажите, что для каждой возрастающей последовательности $k_1<k_2<\ldots$ натуральных чисел и произвольного семейства $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых в I множеств, такого, что $A_{k_i}\subset U_i$ при $i=1, 2, \ldots$, найдется точка $x_0\in X_0$, принадлежащая бесконечно многим U_i.

(d) (Р. С. Хьюстон — цитировано в работе Флейшмана [1970]; для регулярных пространств — Флейшман [1970]). Докажите, что хаусдорфово пространство X счетно компактно в том и только том случае, если для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X найдется конечное множество $F\subset X$, такое, что $X=\bigcup\{U\in\mathcal{U}: F\cap U\neq\varnothing\}$.

Указание. Пусть X — хаусдорфово пространство, в котором есть счетное бесконечное множество A, для которого никакая точка пространства X не является предельной. Представьте A в виде объединения $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $|A_i|=i$ и $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Для каждого $x\in A$ возьмите окрестность U_x, такую, что $A\cap U_x=\{x\}$ и $U_x\cap U_y=\varnothing$, когда x и y различны и принадлежат одному и тому же множеству A_i. Рассмотрите покрытие $\{U_x\}_{x\in A}\cup\{X\setminus A\}$.

(e) (Хабер [1976]). Докажите, что если пространство X счетно компактно и диагональ Δ является G_δ-множеством в произведении $X\times X$, то X компактно.

Указание. Определите сначала счетное семейство $\{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых покрытий пространства X, такое, что для каждой пары x, y различных точек множества X найдется натуральное число i, при котором никакой член семейства $\mathcal{V}_i$ не содержит одновременно x и y. Предположите, что X обладает открытым покрытием $\mathcal{U}$, у которого нет счетного подпокрытия. Заметьте, что если множество $F\subset X$ нельзя покрыть счетным подсемейством семейства $\mathcal{U}$, то для каждого $x\in X$ найдется такое i, что и множество $F\setminus\bigcup\{V\in\mathcal{V}_i: x\in V\}$ не покрывается никаким счетным подсемейством семейства $\mathcal{U}$. Определите последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек пространства X и последовательность $i_1, i_2, \ldots$ натуральных чисел таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $x_k\in F_k=X\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}\bigcup\{V\in\mathcal{V}_{i_j}: x_j\in V\}$.

(2) Множество $F_k\setminus\bigcup\{V\in\mathcal{V}_{i_k}: x_k\in V\}$ не покрывается никаким счетным подсемейством семейства $\mathcal{U}$.

(3) Для каждого $x \in F_k$ и любого $i < i_k$ множество $F_k \setminus \bigcup\{V \in \mathscr{V}_i: x \in V\}$ может быть покрыто счетным подсемейством семейства $\mathscr{U}$.

Покажите, что некоторое натуральное число i встречается в последовательности $i_1, i_2, \ldots$ бесконечно много раз, и получите противоречие.

(f) (А. С. Мищенко [1962], Корсон и Майкл [1964]). Докажите, что если некоторая база $\mathscr{B}$ счетно компактного (компактного) T_1-пространства X точечно-счетна (обладает тем свойством, что никакая точка пространства X не принадлежит более чем $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ элементам базы $\mathscr{B}$), то $\mathscr{B}$ счетна (имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$).

Указание. Докажите, что $d(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Для этого определите последовательность $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ подмножеств пространства X, такую, что $|C_i| \leqslant \mathfrak{m}$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ всюду плотно в X: примите за C_1 произвольное одноточечное подмножество пространства X и определите C_{i+1} как множество, полученное из C_i присоединением по одной точке из каждого непустого множества вида $X \setminus \bigcup \mathscr{V}$, где $\mathscr{V}$ — произвольное конечное подсемейство семейства $\{B \in \mathscr{B}: B \cap C_i \neq \varnothing\}$.

В случае компактного пространства можно воспользоваться также следующим фактом, известным под названием *леммы Мищенко*: если семейство $\mathscr{A}$ подмножеств множества X обладает тем свойством, что никакая точка множества X не принадлежит более чем $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ элементам семейства $\mathscr{A}$, то существует самое большее $\mathfrak{m}$ неприводимых (т. е. не содержащих собственных подпокрытий) конечных покрытий множества X элементами семейства $\mathscr{A}$. Чтобы установить лемму Мищенко, поступите следующим образом. Предположите, что для некоторого целого k семейство $\boldsymbol{A}$ всех неприводимых покрытий множества X, состоящих ровно из k элементов семейства $\mathscr{A}$, имеет мощность $> \mathfrak{m}$, и определите по индукции различные члены $A_1, A_2, \ldots, A_k$ семейства $\mathscr{A}$ таким образом, чтобы при каждом $i \leqslant k$ семейство $\boldsymbol{A}(A_1, A_2, \ldots, A_i)$ всех покрытий из $\boldsymbol{A}$, содержащих множества $A_1, A_2, \ldots, A_i$, имело мощность $> \mathfrak{m}$.

(g) (Фролик [1959]). Покажите, что хаусдорфово пространство X счетно компактно в том и только том случае, если каждая полунепрерывная снизу (сверху) вещественная функция, определенная на X, ограничена снизу (сверху).

Σ-произведения II (см. задачи 2.7.13, 2.7.14, 4.5.12 и упр. 3.10.D)

3.12.23. (a) (Энгелькинг [1966]). Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ — некоторое семейство топологических пространств и $a = \{a_s\}$ — точка произведения $\prod_{s\in S} X_s$. Через $\Sigma'(a)$ обозначим подпространство пространства $\prod_{s\in S} X_s$, состоящее из всех точек $\{x_s\}$, таких, что $x_s \neq a_s$ лишь для конечного числа $s \in S$. Докажите, что если все конечные произведения $X_{s_1} \times X_{s_2} \times \ldots \times X_{s_k}$, где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$, обладают свойством Линделёфа, то для каждого семейства точек $\{x_t\}_{t\in T}$ в $\Sigma'(a)$, где $|T| > \aleph_0$, найдется точка $x_0 \in \Sigma'(a)$, каждая окрестность которой содержит точки x_t для бесконечного числа $t \in T$.

Указание. Примените задачу 2.7.10(c).

(b) (Энгелькинг [1966]). Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство топологических пространств, причем все конечные произведения $X_{s_1} \times X_{s_2} \times \ldots \times X_{s_k}$, где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$, обладают свойством Линделёфа (см. упр. 3.8.G и 3.9.F) и Y — такое хаусдорфово пространство, что диагональ $\Delta \subset Y \times Y$ является G_δ-множеством. Докажите, что тогда для каждой точки $a \in \prod_{s\in S} X_s$ и любого непрерывного отображения $f\colon \Sigma(a) \to Y$ найдутся счетное множество $S_0 \subset S$ и непрерывное отображение $f_0\colon \prod_{s\in S_0} X_s \to Y$, такие, что f совпадает с композицией $f_0(p_{S_0}|\Sigma(a))$ сужения проекции $p_{S_0}\colon \prod_{s\in S} X_s \to \prod_{s\in S_0} X_s$ на $\Sigma(a)$ и отображения f_0.

Указание. Сначала покажите, применив (a), что множество S_0 всех тех $s \in S$, для которых существуют точки $x, x' \in \Sigma'(a)$, отличающиеся только на s-й координате и удовлетворяющие условию $f(x) \neq f(x')$, счетно. Проверьте затем, что если для точек $x = \{x_s\}$, $x' = \{x'_s\}$ из $\Sigma'(a)$ множество $\{s \in S\colon x_s \neq x'_s\}$ конечно и не пересекается с S_0, то $f(x) = f(x')$. Чтобы завершить доказательство, воспользуйтесь непрерывностью f и тем, что $\Sigma'(a)$ всюду плотно в $\Sigma(a)$.

(c) (Гликсберг [1959]). Докажите, что для каждого семейства $\{X_s\}_{s\in S}$ компактов и любой точки $a \in \prod_{s\in S} X_s$ произведение $\prod_{s\in S} X_s$ является стоун-чеховской компактификацией Σ-произведения $\Sigma(a)$.

(d) (Корсон [1959], Энгелькинг [1966]). Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство тихоновских пространств, для которого все конечные произведения $X_{s_1} \times X_{s_2} \times \ldots \times X_{s_k}$, где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$, обладают свойством Линделёфа (см. упр. 3.8.G и 3.9.F). Докажите, что для любой точки $a \in \prod_{s\in S} X_s$ произведение $\prod_{s\in S} X_s$ является пополнением по Хьюитту Σ-произведения $\Sigma(a)$.

(e) (Корсон [1959]). Приведите пример нормального пространства, для которого пополнение по Хьюитту не нормально.

Указание. Примените (d) и задачи 2.7.14 и 2.7.16(a).

(f) (Б. А. Ефимов [1963a]). Пусть $\{X_s\}_{s\in S}$ — семейство компактов, таких, что $w(X_s)\leqslant \mathfrak{m}\geqslant \aleph_0$ при всех $s\in S$, и пусть $a=\{a_s\}$ — какая-нибудь точка произведения $\prod_{s\in S} X_s$. Обозначим через $\Sigma_{\mathfrak{m}}(a)$ подпространство пространства $\prod_{s\in S} X_s$, состоящее из всех точек $\{x_s\}$, для которых мощность множества $\{s\in S\colon x_s\neq a_s\}$ не превосходит $\mathfrak{m}$. Докажите, что если компакт X является непрерывным образом пространства $\Sigma_{\mathfrak{m}}(a)$, то $w(X)\leqslant\mathfrak{m}$.

Указание. Примените (c) и указание к задаче 3.12.12(h).

Нормально расположенные множества III (см. задачи 1.7.6 и 2.7.3)

3.12.24. (a) (Ю. М. Смирнов [1951c]). Покажите, что если пространство X линделёфово, то каждое нормально расположенное подмножество пространства X, наделенное топологией подпространства, является линделёфовым пространством. Докажите, что для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X обладает свойством Линделёфа.*

(2) *Пространство X нормально расположено в каждой своей компактификации.*

(3) *Пространство X нормально расположено в βX.*

(4) *Пространство X нормально расположено в некоторой своей компактификации.*

Выведите отсюда, что никакая точка $x\in\beta N\setminus N$ не является G_δ-множеством в βN (см. упр. 3.6.G(a)).

(b) Проверьте, что тихоновское пространство X обладает свойством Линделёфа в том и только том случае, если для каждого компакта $Z\subset\beta X\setminus X$ найдется непрерывная функция $h\colon \beta X\to I$, такая, что $h(Z)\subset\{0\}$ и $h(x)>0$ при всех $x\in X$. Заметьте, что в приведенной выше характеристике компактификацию βX можно заменить любой компактификацией пространства X.

Регулярно расположенные множества

3.12.25 (Мрувка [1957]). Будем говорить, что множество A *регулярно расположено* в пространстве X, если для каждой точки $x\in X\setminus A$ в X существует множество H типа F_σ, такое, что $A\subset H\subset X\setminus\{x\}$.

(a) Заметьте, что каждое множество, нормально расположенное в T_1-пространстве X, регулярно расположено в X.

(b) Покажите, что тихоновское пространство X вещественно полно в том и только том случае, если X регулярно расположено в βX. Приведите пример вещественно полного пространства X и его компактификации, в которой X не регулярно расположено.

(c) Докажите, что если X — вещественно полное пространство, то каждое регулярно расположенное в нем подмножество в топологии подпространства вещественно полно.

(d) Выведите из (b) и (c), что произведение любого множества вещественно полных пространств вещественно полно.

Пространства замкнутых подмножеств II (см. задачи 2.7.20, 4.5.22, 6.3.22 и 8.5.16)

3.12.26. (a) (Вьеторис [1922]). Докажите, что если X — компактное пространство, то экспоненциальное пространство 2^X тоже компактно и $w(2^X)=w(X)$. Заметьте, что если X есть T_1-пространство и пространство 2^X компактно, то и пространство X тоже компактно.

Указание (Майкл [1951]). Проверьте, что семейство всех множеств вида $\{B\in 2^X\colon\ B\subset U\}$ и $\{B\in 2^X\colon\ B\cap U\neq\varnothing\}$, где U — произвольное открытое множество в X, является предбазой пространства 2^X, и примените задачу 3.12.2.

Замечание. Кислинг доказал в [1970], что нормальность пространства 2^{2^X} эквивалентна тому, что X — компакт. В [1970a] он доказал, что в предположении континуум-гипотезы пространство 2^X нормально в том и только том случае, если X — компакт. Как показано Величко в [1975], равносильность последних условий можно доказать без помощи континуум-гипотезы. Заметим также, что, как доказал Л. Б. Шапиро в [1976], пространство 2^X может не быть диадическим компактом, если X — диадический компакт.

(b) (Майкл [1951]). Для произвольного T_1-пространства X обозначим через $\mathscr{Z}(X)$ подпространство пространства 2^X, образованное всеми непустыми компактными замкнутыми подмножествами пространства X. Покажите, что $\mathscr{Z}(X)$ является T_i-пространством в том и только том случае, если X является T_i-пространством при $i=2$, 3 и $3\frac{1}{2}$. Приведите пример совершенно нормального линделёфова пространства X, для которого $\mathscr{Z}(X)$ не нормально. Проверьте, что $w(\mathscr{Z}(X))=w(X)$ для каждого T_1-пространства X.

(c) (М.М. Чобан [1971]). Проверьте, что если X — подпространство компакта Z, то, ставя в соответствие произвольному $A\in\mathscr{Z}(X)$ то же $A\in 2^Z$, мы определяем гомеоморфное вложение пространства $\mathscr{Z}(X)$ в пространство 2^Z. Выведите отсюда, что пространство $\mathscr{Z}(X)$ локально компактно и хаусдорфово в том и только том случае, если пространство X локально компактно и хаусдорфово. Заметьте, что пространство 2^R не локально компактно.

Покажите для произвольного T_1-пространства X, что, сопоставляя каждому $A \in 2^X$ замыкание $\bar{A}$ в волмэновском расширении ωX, мы получаем гомеоморфное вложение пространства 2^X в пространство $2^{\omega X}$. Докажите, что $w(2^X) = w(\omega X)$ для каждого T_1-пространства X.

(d) (М. М. Чобан [1971] (объявлено в [1969]); для $\mathfrak{m} = \aleph_0$ — Вулберт [1968]). Докажите, что для произвольного хаусдорфова пространства X неравенство $\chi(\mathscr{Z}(X)) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ выполняется в том и только том случае, если $d(A) \leqslant \mathfrak{m}$ и $\chi(A, X) \leqslant \mathfrak{m}$ при всех $A \in \mathscr{Z}(X)$.

Выведите отсюда, что для компакта X неравенство $\chi(2^X) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ выполняется в том и только том случае, если $hd(X) \leqslant \mathfrak{m}$ и $\chi(A, X) \leqslant \mathfrak{m}$ для каждого замкнутого $A \subset X$.

Указание. Заметьте, что $\mathscr{V}(U_1, U_2, \ldots, U_k) \subset \mathscr{V}(V_1, V_2, \ldots, V_m)$ в том и только том случае, если $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ и в каждом V_j содержится некоторое U_i. Воспользуйтесь тем, что если $\chi(X) \leqslant \mathfrak{m}$ и $d(A) \leqslant \mathfrak{m}$ для каждого замкнутого $A \subset X$, то $hd(X) \leqslant \mathfrak{m}$ (это следует из задачи 3.12.9(d), но может быть доказано и прямо).

(e) (М. М. Чобан [1971]). Проверьте, что если X и Y — хаусдорфовы пространства и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то, положив $\bar{f}(A) = f(A)$ для каждого $A \in \mathscr{Z}(X)$, мы получим непрерывное отображение $\bar{f}\colon \mathscr{Z}(X) \to \mathscr{Z}(Y)$. Покажите, что если X и Y — тихоновские пространства, то $\bar{f}$ совершенно в том и только том случае, если f совершенно.

Указание. Привлеките стоун-чеховскую компактификацию.

(f) (Зенор [1970]; для компактов С. Сирота [1968]). Докажите, что если $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр хаусдорфовых пространств, то $\tilde{\boldsymbol{S}} = \{\mathscr{Z}(X_\sigma), \tilde{\pi}^\sigma_\rho, \Sigma\}$, где $\tilde{\pi}^\sigma_\rho\colon \mathscr{Z}(X_\sigma) \to \mathscr{Z}(X_\rho)$ определено как в (e), тоже обратный спектр и что предел $\underleftarrow{\lim}\, \tilde{\boldsymbol{S}}$ гомеоморфен пространству $\mathscr{Z}(\underleftarrow{\lim}\, \boldsymbol{S})$.

Выведите отсюда, что если $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр компактов, то $\tilde{\boldsymbol{S}} = \{2^{X_\sigma}, \tilde{\pi}^\sigma_\rho, \Sigma\}$ тоже является обратным спектром и что предел $\underleftarrow{\lim}\, \tilde{\boldsymbol{S}}$ гомеоморфен пространству $2^{\underleftarrow{\lim}\, \boldsymbol{S}}$.

(g) (М. М. Чобан [1971] (объявлено в [1969]), Зенор [1970]). Докажите, что пространство $\mathscr{Z}(X)$ полно по Чеху в том и только том случае, если X полно по Чеху.

Указание. Примените (c) или воспользуйтесь (f) и упр. 3.9.G.

(h) (Зенор [1970]). Докажите, что пространство $\mathscr{Z}(X)$ вещественно полно в том и только том случае, если X вещественно полно.

Указание. Либо воспользуйтесь (c) и задачей 3.12.25(c), либо примените (f) и упр. 3.11.H.

(i) (Марьянович [1966]). Докажите, что произведение $\prod_{s \in S} X_s$, где все пространства X_s являются компактами, можно вложить в экспоненциальное пространство одноточечной компактификации суммы $\bigoplus_{s \in S} X_s$, и заметьте, что отсюда следует теорема Тихонова для хаусдорфовых пространств.

(j) Покажите, что если X — компакт и Y — хаусдорфово пространство, то, сопоставляя каждому $f \in Y^X$ график $G(f) \subset X \times Y$, мы получаем гомеоморфное вложение функционального пространства Y^X с компактно-открытой топологией в экспоненциальное пространство $2^{X \times Y}$.

(k) Проверьте, что если X — компакт и Y — хаусдорфово пространство, то, поставив в соответствие каждой паре $(f, A) \in Y^X \times 2^X$ образ $f(A) \in 2^Y$, мы получаем отображение из $Y^X \times 2^X$ в 2^Y, непрерывное по отношению к компактно-открытой топологии на Y^X.

Многозначные отображения III (см. задачи 1.7.17 и 2.7.21)

3.12.27. (a) (Энгелькинг [1963]; для метрических пространств — Куратовский [1932]). Докажите, что для любого семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ полунепрерывных сверху многозначных отображений топологического пространства Y в хаусдорфово пространство X с компактными образами точек пересечение $F = \bigcap_{t \in T} F_t$, определенное формулой $F(y) = \bigcap_{t \in T} F_t(y)$, является полунепрерывным сверху отображением.

Указание. Заметьте, что $\{y\colon F(y) \subset U\} = \bigcup \bigcap_{t \in T} \{y\colon F_t(y) \subset U_t\}$, где объединение берется по всем семействам $\{U_t\}_{t \in T}$ открытых множеств в X, для которых $\bigcap_{t \in T} U_t = U$ и множество $\{t \in T\colon U_t \neq X\}$ конечно.

(b) (Энгелькинг [1963]). Для каждого $t \in T$ пусть F_t — некоторое многозначное отображение, сопоставляющее точкам топологического пространства Y замкнутые подмножества пространства X_t. Проверьте, что если все отображения F_t полунепрерывны снизу, то декартово произведение $F = \prod_{t \in T} F_t$, определенное формулой $F(y) = \prod_{t \in T} F_t(y)$, является полунепрерывным снизу многозначным отображением, при котором точкам пространства Y соответствуют замкнутые подмножества произведения $\prod_{t \in T} X_t$.

Покажите, что если при всех отображениях F_t образы точек компактны и все F_t полунепрерывны сверху, то декартово произведение $F = \prod_{t \in T} F_t$ тоже является полунепрерывным сверху отображением.

Выведите отсюда, что для произвольного семейства $\{X_t\}_{t \in T}$ хаусдорфовых пространств, приписывая каждой точке $\{A_t\} \in \in \prod_{t \in T} \mathscr{Z}(X_t)$ произведение $\prod_{t \in T} A_t \in \mathscr{Z}\left(\prod_{t \in T} X_t\right)$, мы получаем непрерывное отображение.

(c) (Энгелькинг [1963]). Докажите, что хаусдорфово пространство X компактно в том и только том случае, если, каково бы ни было индексное множество T, поставив в соответствие произвольной точке $\{A_t\} \in \prod_{t \in T} 2^{X_t}$, где $X_t = X$ при $t \in T$ и 2^X взято с топологией Вьеториса, пересечение $\bigcap_{t \in T} A_t \in 2^X$ (или, что равносильно, произведение $\prod_{t \in T} A_t \in 2^{\left(\prod_{t \in T} X_t\right)}$), мы получаем полунепрерывное сверху многозначное отображение.

Глава 4

МЕТРИЧЕСКИЕ И МЕТРИЗУЕМЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие топологического пространства можно рассматривать как аксиоматизацию понятия близости точки к множеству: точка близка к множеству, если она принадлежит его замыканию. В этой главе мы будем изучать теорию метрических пространств, которая является аксиоматизацией понятия близости точек: в метрическом пространстве каждой паре точек соответствует вещественное число — расстояние между ними, основные свойства которого описывает система аксиом. Расстояние между точками можно использовать для определения расстояния между точкой и множеством; считая все точки, расстояние которых до множества A равно нулю, близкими к множеству A и определяя замыкание множества A как множество всех таких точек, мы получаем топологическое пространство. Топологические пространства, которые могут быть получены таким образом, называются метризуемыми пространствами.

В гл. 8 мы обсудим две другие системы аксиом, описывающие родственные понятия равномерных пространств и пространств близости. В равномерных пространствах тоже рассматривается расстояние между парами точек, но оно измеряется не так, как в метрических пространствах. Теория пространств близости есть аксиоматизация понятия близости между парами множеств.

Итак, эти три понятия — метрическое пространство, равномерное пространство и пространство близости — существенно отличаются от понятия топологического пространства. Причина, по которой они изучаются в данной книге, заключается в многочисленных и интересных взаимосвязях этих пространств с топологическими пространствами, что и делает их частью общей топологии.

Из чисто логических соображений мы должны были бы отложить изучение метрических пространств до гл. 8, как мы поступили с равномерными пространствами и пространствами близости, и завершить прежде всего ту часть этой книги, которая целиком посвящена топологическим пространствам. Однако класс метрических пространств внутренним образом связан с представляющим большой интерес классом метризуемых пространств (которые образуют особый класс топологических пространств). Метризуемые пространства играют важную роль в приложениях общей топологии, и, кроме того, работа с этим классом способствует развитию правильной топологической интуиции, а наш запас топологических понятий и фактов уже достаточен для того, чтобы установить наиболее важные результаты о метрических и метризуемых пространствах.

Параграф 4.1 открывается определениями метрического и метризуемого пространства; мы показываем, как метрика индуцирует топологию, и называем две метрики эквивалентными, если они индуцируют одну и ту же топологию. Затем мы показываем, что всякое метризуемое пространство является совершенно нормальным и удовлетворяет первой аксиоме счетности и что для метризуемого пространства наличие счетной базы (т. е. выполнение второй аксиомы счетности) равносильно сепарабельности и свойству Линделёфа. Параграф завершается двумя важными теоремами, утверждающими, что для метризуемых пространств понятия компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности эквивалентны и что эти свойства влекут за собой сепарабельность.

В § 4.2 определяются и изучаются операции на метрических пространствах. Мы доказываем, что подпространства, суммы и счетные декартовы произведения метризуемых пространств метризуемы. Более того, показано, что для топологического пространства X пространство отображений R^X, наделенное топологией равномерной сходимости, метризуемо. Приводятся также несколько условий, достаточных для метризуемости факторпространств, пределов обратных спектров и пространств отображений, наделенных компактно-открытой топологией. Параграф завершается определением метрики на множестве всех ограниченных отображений топологического пространства в метрическое пространство, что в свою очередь приводит к определению топологии равномерной сходимости в этой более общей ситуации.

Параграф 4.3 посвящен изучению двух важных классов метрических пространств: вполне ограниченных пространств и полных пространств. Далее мы даем топологические характеристики этих классов пространств. Кроме того, для каждого метрического пространства X мы определяем его пополнение $\tilde{X}$ — наименьшее полное пространство, содержащее X. В конце этого параграфа обсуждаются метрические свойства метризуемых компактов.

По сравнению с классическими результатами первых трех параграфов результаты § 4.4 относительно новы. Они связаны с теоремой А. Стоуна о возможности вписать локально конечное подпокрытие в любое открытое покрытие метризуемого пространства и дают топологические условия, характеризующие метризуемость, и условия сохранения метризуемости при отображениях.

24 Зак. 697

4.1. МЕТРИЧЕСКИЕ И МЕТРИЗУЕМЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Метрическое пространство есть пара (X, ρ), состоящая из множества X и функции ρ, определенной на множестве $X \times X$, принимающей неотрицательные вещественные значения и удовлетворяющей следующим условиям:

(M1) $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *для всех* $x, y \in X$.

(M3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ *для всех* $x, y, z \in X$.

Множество X в таком случае называется *пространством*, его элементы — *точками*, функция ρ — *метрикой* на множестве X, а число $\rho(x, y)$ — *расстоянием между* x *и* y. Условие (M1) означает, что расстояние между двумя разными точками положительно и что каждая точка находится на нулевом расстоянии от самой себя. Условие (M2) утверждает, что функция расстояния симметрична, т. е. не зависит от порядка точек x и y. Условие (M3), называемое *неравенством треугольника*, утверждает, образно говоря, что сумма двух сторон треугольника не меньше третьей стороны.

Неотрицательная вещественная функция ρ, определенная на множестве $X \times X$ и удовлетворяющая условиям (M2), (M3) и условию

(M1′) $\rho(x, x) = 0$ *для каждого* $x \in X$,

называется *псевдометрикой* на множестве X.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, x_0 — точка пространства X и r — положительное число; множество $B(x_0, r) = \{x \in X\colon \rho(x_0, x) < r\}$ называется *открытым шаром с центром* x_0 *радиуса* r или просто r-*шаром с центром* x_0. Для множества $A \subset X$ и положительного числа r под r-*шаром вокруг* A мы понимаем множество $B(A, r) = \bigcup\limits_{x \in A} B(x, r)$. Заметим, что так как $x \in B(x, r)$, то $A \subset B(A, r)$ и что если $x_1 \in B(x_0, r)$, то $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$ для $r_1 = r - \rho(x_0, x_1) > 0$. В самом деле, если $x \in B(x_1, r_1)$, то, в силу (M3),

$$\rho(x_0, x) \leqslant \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x) < \rho(x_0, x_1) + r - \rho(x_0, x_1) = r.$$

Из последнего неравенства следует, что, положив $\mathscr{B}(x) = \{B(x, r)\colon r > 0\}$ для каждого $x \in X$, мы получим совокупность семейств подмножеств пространства X, обладающую свойствами (BP1)—(BP2) и, следовательно, в силу предложения 1.2.3, порождающую некоторую топологию $\mathcal{O}$ на множестве X. Поэтому каждое метрическое пространство (X, ρ) определяет топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$. При этом элементами топологии $\mathcal{O}$, т. е. открытыми подмножествами пространства $(X, \mathcal{O})$, являются объединения открытых шаров. Очевидно, что семейство всех открытых шаров есть база пространства $(X, \mathcal{O})$. Семейство всех $(1/i)$-шаров с центром x_0, где $i = 1, 2, 3, \ldots$, есть база пространства $(X, \mathcal{O})$ в точке x_0. Отсюда следует, что пространство $(X, \mathcal{O})$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. Топология $\mathcal{O}$ на множестве X называется *топологией, индуцированной метрикой* ρ.

Так как $\rho(x_1, x_2) > 0$ для любой пары x_1, x_2 различных точек пространства X, из неравенства треугольника следует, что множества $B(x_1, r/2)$ и $B(x_2, r/2)$ — непересекающиеся окрестности точек x_1 и x_2. Таким образом, всякое пространство с топологией, индуцированной метрикой, является хаусдорфовым пространством.

Как и в случае топологического пространства, мы будем обозначать метрическое пространство просто через X. Из контекста всегда будет ясно, какая метрика на множестве X рассматривается.

Аналогичную конструкцию можно осуществить в предположении, что функция ρ является псевдометрикой. При этом получается весьма широкий класс топологических пространств, который мы здесь рассматривать не будем. Заметим только, что пространство X с топологией, индуцированной псевдометрикой ρ, является T_0-пространством тогда и только тогда, когда ρ — метрика. В самом деле, если $\rho(x_1, x_2) = 0$ для $x_1 \neq x_2$, то каждая окрестность точки x_1 содержит точку x_2, и наоборот, так что X не является T_0-пространством. Легко также установить следующее: если X — множество, состоящее более чем из одной точки, то, полагая $\rho(x, y) = 0$ для любых $x, y \in X$, мы получим псевдометрику на множестве X, которая индуцирует на нем антидискретную топологию. Хотя мы и не изучаем здесь псевдометрики ради них самих, мы пользуемся ими в дальнейшем как удобным техническим средством.

Понятие метрического пространства приводит к важному топологическому понятию, а именно к понятию метризуемого пространства. Топологическое пространство X *метризуемо*, если существует такая метрика ρ на множестве X, что индуцированная этой метрикой топология совпадает с исходной топологией пространства X. Те метрики, которые индуцируют исходную топологию пространства X, называются *метриками на пространстве X*.

Мы уделяем такое внимание метрическим и метризуемым пространствам потому, что многие важные топологические пространства, используемые в разных областях математики, метризуемы и, более того, их топология часто индуцирована естественной метрикой.

Заметим, что метризуемость есть топологическое свойство, однако приведенное здесь определение класса метризуемых пространств не является внутренним определением. Возникает вопрос, существует ли внутренняя характеристика метризуемых пространств. Как мы увидим в дальнейшем, ответ на этот вопрос положителен. Теоремы , дающие необходимые и достаточные внутренние условия метризуемости топологических пространств, сформулированные в терминах топологических инвариантов, называются *метризационными теоремами*. Две из них будут доказаны в § 4.4, другие — в § 5.4.

Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются *эквивалентными*, если они индуцируют на нем одну и ту же топологию. Очевидно, что определенное таким образом отношение является отношением эквивалентности. Мы рассматриваем две метрики, индуцирующие одну и ту же топологию как эквивалентные объекты по той причине, что в этой книге нас интересуют в первую очередь топологии, а метрики играют только вспомогательную роль, подобную той, которую играют системы координат при изучении евклидовых пространств.

Ниже, в теореме 4.1.2, мы приведем удобный критерий эквивалентности метрик. Сначала покажем, как описать в терминах метрики замыкание множества.

Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек метрического пространства (X, ρ) *сходится* к точке $x \in X$, если последовательность вещественных чисел $\rho(x, x_1), \rho(x, x_2), \ldots$ сходится к нулю. Точка x в этом случае называется *пределом* последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и обозначается $\lim x_i$. Из условий (M1) и (M3) вытекает, что всякая последовательность точек метрического пространства имеет не более одного предела.

4.1.1. Предложение. *Точка x принадлежит замыканию $\bar{A}$ множества $A \subset X$ в топологии, индуцированной на X метрикой ρ, в том и только том случае, если существует последовательность точек множества A, сходящаяся к x.*

Доказательство. Пусть $x \in \bar{A}$. Для каждого натурального числа i выберем точку $x_i \in A \cap B(x, 1/i)$. Очевидно, что $\rho(x, x_i) < 1/i$ и $x = \lim x_i$. С другой стороны, если $x \notin \bar{A}$, то существует такое $r > 0$, что $A \cap B(x, r) = \varnothing$. Следовательно, $\rho(x, x') \geqslant r$ для любого $x' \in A$, и потому не существует последовательности точек множества A, сходящейся к x. ∎

Из предложения 4.1.1 вытекает

4.1.2. Теорема. *Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X эквивалентны тогда и только тогда, когда они индуцируют одну и ту же сходимость, т. е. для каждой точки $x \in X$ и каждой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек множества X условия $\lim \rho_1(x, x_i) = 0$ и $\lim \rho_2(x, x_i) = 0$ эквивалентны.* ∎

В связи с понятиями, изученными в § 1.6, заметим, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ в метрическом пространстве (X, ρ)

сходится в точке $x \in X$ в том и только том случае, если $x = \lim x_i$ в пространстве X с топологией, индуцированной метрикой ρ. Тем самым оправдано использование одних и тех же символов и терминов в обоих случаях. Очевидно, что предложение 4.1.1 есть непосредственное следствие сделанного выше замечания и теоремы 1.6.14. Заметим также, что из предложения 1.6.15 (или предложений 4.1.1 и 1.4.1) вытекает, что отображение f метризуемого пространства X в метризуемое пространство Y непрерывно в том и только том случае, если для любой последовательности $x, x_1, x_2, \ldots$ в пространстве X равенство $x = \lim x_i$ влечет за собой равенство $f(x) = \lim f(x_i)$.

Диаметр непустого множества A в метрическом пространстве (X, ρ) определяется как точная верхняя грань всех расстояний между точками множества A и обозначается через $\delta(A)$. Диаметр может быть конечным или равным ∞. Таким образом,

$$(1) \qquad \delta(A) = \sup\{\rho(x_1, x_2) : \ x_1, \ x_2 \in A\};$$

положим также $\delta(\varnothing) = 0$. Легко проверить, что $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.

Множество A называется *ограниченным*, если $\delta(A) < \infty$. Метрика ρ на множестве X *ограничена вещественным числом* r (*ограничена*), если $\delta(X) \leqslant r$ (если $\delta(X) < \infty$). Аналогично определяются те же понятия относительно псевдометрики.

4.1.3. Теорема. *Для каждого метрического пространства* (X, ρ) *существует метрика* ρ_1 *на множестве* X, *эквивалентная метрике* ρ *и ограниченная числом* 1.

Доказательство. Положим

$$\rho_1(x, y) = \min(1, \rho(x, y)) \quad \text{для всех} \quad x, \ y \in X.$$

Покажем, что ρ_1 — метрика. Тот факт, что ρ_1 удовлетворяет условиям (M1) и (M2), вытекает непосредственно из того, что ρ удовлетворяет этим условиям. Пусть x, y и z — три произвольные точки множества X, и пусть $a = \rho(x, y)$, $b = \rho(y, z)$ и $c = \rho(x, z)$. Так как каждое из чисел 2, $1 + a$, $1 + b$ и $a + b$ больше или равно 1, либо c, то

$$\min(2, \ 1 + a, \ 1 + b, \ a + b) \geqslant \min(1, c),$$

поэтому

$$\rho_1(x, \ y) + \rho_1(y, \ z) = \min(1, \ a) + \min(1, \ b) =$$
$$= \min(2, \ 1 + a, \ 1 + b, \ a + b) \geqslant \min(1, \ c) = \rho_1(x, \ z).$$

Следовательно, ρ_1 удовлетворяет и условию (M3). Очевидно, что ρ_1 ограничена числом 1 и ее эквивалентность метрике ρ следует из теоремы 4.1.2. ∎

4.1.4. Примеры. Пусть X — произвольное множество; для любых $x, y \in X$ положим

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \neq y, \\ 0, & \text{если} \quad x = y. \end{cases}$$

Легко видеть, что ρ — метрика на X. Так как $B(x, 1) = \{x\}$ для каждого $x \in X$, метрика ρ индуцирует дискретную топологию на множестве X. Следовательно, каждое дискретное пространство метризуемо. Термин *дискретное пространство* будет применяться также к описанному выше метрическому пространству (X, ρ).

Вещественная прямая R и единичный отрезок I также метризуемы: расстояние между двумя точками на них можно определить как абсолютное значение разности соответствующих чисел. Легко показать, что в § 1.1 мы определили открытые множества в R и I как объединения открытых шаров относительно указанных метрик.

Так как каждое метризуемое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, то пространство $A(\mathfrak{m})$ с $\mathfrak{m} > \aleph_0$ является примером неметризуемого пространства. ∎

4.1.5. Пример. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечный кардинал, S — множество мощности $\mathfrak{m}$ и $I_s = I \times \{s\}$ для каждого $s \in S$. Полагая

$$(x, s_1) E (y, s_2) \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0 = y$$
$$\text{или } x = y \text{ и } s_1 = s_2,$$

мы определим отношение эквивалентности E на множестве $\bigcup_{\in S} I_s$.

Читатель может легко установить, что формула

$$\rho([(x, s_1)], [(y, s_2)]) = \begin{cases} |x - y|, & \text{если} \quad s_1 = s_2, \\ x + y, & \text{если} \quad s_1 \neq s_2, \end{cases}$$

определяет метрику на множестве классов эквивалентности отношения E. Полученное таким образом метризуемое пространство для фиксированного кардинала $\mathfrak{m}$ не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора множества S. Это пространство назовем *ежом колючести* $\mathfrak{m}$ и обозначим через $J(\mathfrak{m})$. Легко видеть, что для каждого $s \in S$ отображение j_s отрезка I в $J(\mathfrak{m})$, определенное формулой $j_s(x) = [(x, s)]$, является гомеоморфным вложением. Семейство всех шаров с рациональными радиусами и центрами в точках вида $[(r, s)]$, где r — рациональное число, образует базу в $J(\mathfrak{m})$. Таким образом, $w(J(\mathfrak{m})) \leqslant \mathfrak{m}$. Так как подпространство пространства $J(\mathfrak{m})$, состоящее из всех точек вида $[(1, s)]$, является дискретным пространством мощности $\mathfrak{m}$, то $w(J(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$. ∎

4.1.6. Пример. Пусть $X = R \times R$; положим

$$\rho(z_1, z_2) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{если} \quad x_1 = x_2, \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & \text{если} \quad x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

для каждой пары точек $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ плоскости X.

Читатель может легко проверить, что ρ — метрика на X, не эквивалентная метрике, определенной в примере 4.1.4. (Такой метрикой могли бы пользоваться обитатели джунглей, по которым протекает река $y = 0$: чтобы иметь доступ к воде, они прорубили тропы, ведущие к реке, и путь от точки (x_1, y_1) к (x_2, y_2) проходит сначала по такой тропе к реке, затем по реке до точки, ближайшей к (x_2, y_2), и снова по тропе.) ∎

4.1.7. Пример. Пусть H — множество всех бесконечных последовательностей $\{x_i\}$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Покажем, что, полагая

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} \quad \text{для} \quad x = \{x_i\}, \quad y = \{y_i\} \in H,$$

мы определяем метрику на H.

Прежде всего покажем, что ρ определена корректно, т. е. что ряд в определении ρ сходится. Для доказательства применим неравенство Коши

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2},$$

справедливое для всех конечных последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ вещественных чисел[1]).

Заметим, что для каждой пары точек $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ из H и любого положительного целого числа k имеют место соот-

---

[1]) Пусть $a = \sum_{i=1}^{k} a_i^2$, $b = \sum_{i=1}^{k} b_i^2$ и $c = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$; чтобы доказать неравенство Коши, т. е. неравенство $c^2 \leqslant ab$, достаточно заметить, что многочлен $ax^2 + 2cx + b = \sum_{i=1}^{k} (a_i x + b_i)^2$ не имеет различных вещественных корней, и потому $4c^2 \leqslant 4ab$.

ношения

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^2-2\sum_{i=1}^{k}x_iy_i+\sum_{i=1}^{k}y_i^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}x_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}y_i^2}+\sum_{i=1}^{k}y_i^2=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}y_i^2}\right)^2\leqslant\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2}\right)^2.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого целого положительного k, то ряд в определении ρ сходится и $\rho(x,y)$ определено корректно.

Очевидно, что ρ удовлетворяет условиям (M1) и (M2). Покажем, что выполняется и условие (M3).

Пусть $x=\{x_i\}$, $y=\{y_i\}$ и $z=\{z_i\}$ — произвольные точки из H; положим

$$x^k=\{x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots\}, \qquad y^k=\{y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots\},$$
$$z^k=\{z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, 0, \ldots\}$$

и

$$a_i=x_i-y_i, \quad b_i=y_i-z_i, \quad c_i=x_i-z_i.$$

В силу неравенства Коши, имеем

$$[\rho(x^k, z^k)]^2=\sum_{i=1}^{k}c_i^2=\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{k}a_i^2+2\sum_{i=1}^{k}a_ib_i+\sum_{i=1}^{k}b_i^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}+\sum_{i=1}^{k}b_i^2=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}\right)=[\rho(x^k, y^k)+\rho(y^k, z^k)]^2.$$

Из последнего неравенства следует, что для любого $k=1, 2, \ldots$ имеют место неравенства

$$\rho(x, y)+\rho(y, z)\geqslant\rho(x^k, y^k)+\rho(y^k, z^k)\geqslant\rho(x^k, z^k),$$

откуда в свою очередь вытекает, что

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$$

Пространство H называется *гильбертовым пространством.* Множество всех последовательностей $\{x_i\}$, где все x_i — рациональные числа и только конечное множество из них отлично от нуля, всюду плотно в H и счетно. Таким образом, гильбертово пространство сепарабельно. ∎

Эквивалентность условий (i) и (iii) в предложении 1.4.1 непосредственно влечет за собой следующие характеристики непрерывности отображений метризуемых пространств.

4.1.8. Предложение. *Отображение f пространства X с топологией, индуцированной метрикой ρ, в пространство Y с топологией, индуцированной метрикой σ, непрерывно в том и только том случае, если для каждого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$, как только $\rho(x, x') < \delta$.* ∎

Метрические пространства позволяют также ввести понятие равномерно непрерывных отображений. Отображение f пространства X с метрикой ρ в пространство Y с метрикой σ называется *равномерно непрерывным относительно метрик* ρ *и* σ, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$ для каждой пары x, $x' \in X$, удовлетворяющей условию $\rho(x, x') < \delta$. Очевидно, что каждое равномерно непрерывное отображение непрерывно, однако обратное не имеет места. Понятие равномерной непрерывности не является топологическим; оно относится к конкретным метрикам на пространствах X и Y. Отображение f: $X \to Y$ может быть равномерно непрерывным относительно одних метрик и не быть таковым относительно других метрик (см. теорему 4.3.32). Понятие равномерной непрерывности относится к теории равномерных пространств, развитой в гл. 8 (см. упр. 8.1.A(a) и задачу 8.5.19(a)).

Отображение f пространства X с метрикой ρ в пространство Y с метрикой σ называется *изометрией*, если $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$ для каждой пары точек $x, y \in X$. Если существует изометрия пространства X на пространство Y, то говорят, что X и Y *изометричны*. Легко видеть, что изометрия — равномерно непрерывное инъективное отображение. Так как обратное отображение к некоторой изометрии «на» также является изометрией, то изометрии «на» — это гомеоморфизмы и изометричные пространства гомеоморфны.

Расстояние $\rho(x, A)$ *от точки* x *до множества* A в метрическом пространстве (X, ρ) определяется выражением

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a), \quad \text{если } A \neq \varnothing, \quad \text{и } \rho(x, \varnothing) = 1.$$

Подобным же образом для двух множеств A, B в метрическом пространстве (X, ρ) мы полагаем

$$\rho(A, B) = \inf \{\rho(a, b): a \in A,\ b \in B\}, \quad \text{если} \quad A \neq \varnothing \neq B,$$

и

$$\rho(A, \varnothing) = 1 = \rho(\varnothing, B).$$

4.1.9. Предложение. *Пусть* (X, ρ) — *метрическое пространство,* x, $y \in X$ *и* $A \subset X$; *тогда*

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

Доказательство. Можем считать, что $A = \varnothing$. Для каждого $a \in A$ имеем

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(x, a) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, a),$$

откуда, поскольку точка $a \in A$ произвольна, следует, что $\rho(x, A) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, A)$, т. е.

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, y).$$

Из соображений симметрии имеем также

$$\rho(y, A) - \rho(x, A) \leqslant \rho(x, y). \blacksquare$$

Из предложений 4.1.8 и 4.1.9 следует

4.1.10. Теорема. *Пусть множество $A \subset X$ фиксировано; тогда функция ρ, сопоставляющая каждой точке $x \in X$ расстояние $\rho(x, A)$, непрерывна на пространстве X.* $\blacksquare$

Из 4.1.1 и 4.1.10 мы получаем

4.1.11. Следствие. *Для каждого множества $A \subset X$ имеем*

$$\bar{A} = \{x\colon \rho(x, A) = 0\}. \blacksquare$$

Сформулируем еще три следствия теоремы 4.1.10.

4.1.12. Следствие. *Каждое замкнутое подмножество метризуемого пространства функционально замкнуто и, в частности, является G_δ-множеством.*

Доказательство. Если $A = \bar{A}$, то, полагая $f(x) = \rho(x, A)$, имеем $A = f^{-1}(0)$. $\blacksquare$

Предыдущее следствие и теорема 1.5.19 позволяют получить

4.1.13. Следствие. *Каждое метризуемое пространство совершенно нормально.* $\blacksquare$

Заметим, что нормальность метризуемого пространства X непосредственно следует из того, что для любой пары A, B непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X и любой метрики ρ на пространстве X формула

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$$

определяет непрерывную вещественную функцию на пространстве X, такую, что $f(A) \subset \{0\}$, $f(B) \subset \{1\}$.

4.1.14. Следствие. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Для каждого компактного множества $A \subset X$ и любого открытого множества U, содержащего A, существует такое $r > 0$, что $B(A, r) \subset U$.*

Доказательство. Положим $f(x) = \rho(x, X \setminus U)$; тем самым определена функция $f\colon X \to R$, положительная на множестве A.

Поэтому, в силу следствия 3.2.9, существует такое $r > 0$, что $f(x) \geqslant r$ для каждого $x \in A$; следовательно, $B(A, r) \subset U$. ∎

Как уже известно, все метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности, но не все — второй аксиоме счетности. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия того, что метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.

4.1.15. Теорема. *Пусть $\mathfrak{m}$ — произвольный кардинал и X — произвольное метризуемое пространство; тогда следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X имеет базу мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(ii) *Пространство X имеет сеть мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(iii) *Каждое открытое покрытие пространства X имеет подпокрытие мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(iv) *Каждое замкнутое дискретное подпространство пространства X имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(v) *Каждое дискретное подпространство пространства X имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(vi) *Каждое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.*

(vii) *Пространство X имеет всюду плотное подмножество мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

Доказательство. Легко установить, что если $\mathfrak{m}$ — конечное число, то все сформулированные утверждения равносильны неравенству $|X| \leqslant \mathfrak{m}$. Поэтому будем считать, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна; (ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из теоремы 3.8.12 или замечания 1.1.16.

Пусть A — замкнутое дискретное подпространство пространства X. Для любого $x \in A$ существует открытое множество $U_x \subset X$, такое, что $A \cap U_x = \{x\}$. Так как открытое покрытие $\{U_x\}_{x \in A} \cup \{X \setminus A\}$ пространства X не содержит подпокрытия мощности $< |A|$, то (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Перейдем теперь к доказательству импликации (iv) $\Rightarrow$ (v). Пусть A — дискретное подпространство пространства X. Легко установить, что A — открытое подмножество замыкания $\bar{A} \subset X$. В силу совершенной нормальности пространства X, существует последовательность $A_1, A_2, \ldots$ замкнутых подмножеств множества $\bar{A}$, такая, что $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Так как множества A_i также замкнуты в X, то из условия (iv) следует, что $|A_i| \leqslant \mathfrak{m}$ для $i = 1, 2, \ldots$, а из этих неравенств в свою очередь вытекает, что $|A| \leqslant \mathfrak{m}$.

Для доказательства импликации (v) $\Rightarrow$ (vi) достаточно заметить, что, выбирая по точке из каждого элемента некоторого семейства попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X, мы получим дискретное подпространство пространства X, имеющее ту же мощность, что и рассматриваемое семейство.

Для доказательства импликации (vi)$\Rightarrow$(vii) выберем какую-нибудь метрику ρ на пространстве X и, применяя лемму Тейхмюллера — Тьюки, возьмем для каждого $i=1, 2, \ldots$ максимальное подмножество $A_i \subset X$ с тем свойством, что $\rho(x, y) \geqslant 1/i$ для любых $x, y \in A_i$. Так как $(1/2i)$-пары с центрами в точках множества A_i попарно не пересекаются, то $|A_i| \leqslant \mathfrak{m}$. Поэтому достаточно доказать, что объединение $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ всюду плотно в X. Тем не менее если бы существовала точка $x \in X \setminus \bar{A}$, то для некоторого целого положительного i_0 выполнялось бы неравенство $\rho(x, A_{i_0}) \geqslant \rho(x, A) > 1/i_0$ что невозможно в силу максимальности множества A_{i_0}.

Остается показать, что (vii)$\Rightarrow$(i). Пусть ρ — некоторая метрика на пространстве X, и пусть A — всюду плотное подмножество пространства X, имеющее мощность $\leqslant \mathfrak{m}$. Обозначим через $\mathscr{B}$ семейство всех шаров $B(x, r)$, где $x \in A$, а r — рациональное число. Очевидно, что $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$. Докажем, что $\mathscr{B}$ — база пространства X. Выберем произвольную точку $x \in X$ и некоторую ее окрестность U. Можно считать, что $U = B(x, r)$. Так как множество A всюду плотно в X, существует точка $x_0 \in A \cap B(x, r/3)$. Для любого рационального числа r_0, удовлетворяющего условию $r/3 < r_0 < r/2$, имеем

$$x \in B(x_0, r_0) \subset B(x, r) = U \quad \text{и} \quad B(x_0, r_0) \in \mathscr{B}. \ \blacksquare$$

4.1.16. Следствие. *Для любого метризуемого пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

(ii) *Пространство X обладает свойством Линделёфа.*

(iii) *Пространство X сепарабельно.*

(iv) *Каждое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X счетно.* ■

Из равносильности условий (iii) и (iv) теоремы 4.1.15 и утверждения теоремы 3.10.3 следует, что любое счетно компактное метризуемое пространство обладает свойством Линделёфа. Поэтому, в силу теорем 3.10.1 и 3.10.31, имеет место

4.1.17. Теорема. *Для любого метризуемого пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X — компакт.*

(ii) *Пространство X счетно компактно.*

(iii) *Пространство X секвенциально компактно.* ■

Заметим, что, в силу теорем 3.10.20 и 3.10.21, к сформулированным выше условиям можно присоединить псевдокомпактность пространства X.

Из равносильности условий (iv) и (vii) теоремы 4.1.15 следует

4.1.18. Теорема. *Каждое компактное метризуемое пространство сепарабельно.* ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Класс метрических пространств стал первым классом абстрактных пространств, на который был успешно обобщен ряд понятий и результатов, открытых на заре общей топологии при изучении подмножеств вещественной прямой и евклидовых пространств. Класс метрических пространств достаточно обширен и включает в себя много объектов, изучаемых в различных областях математики. Это позволяет описывать эти объекты на геометрическом языке. В то же время пространства этого класса кажутся достаточно простыми, к ним применима геометрическая интуиция. Понятие метрического пространства было введено Фреше в его диссертации [1906]. В течение многих лет внимание топологов было приковано к метрическим пространствам и, в частности, к сепарабельным метрическим пространствам. Несомненно, это наиболее изученный класс топологических пространств. Двухтомная монография Куратовского [1966] и [1968] представляет собой настоящую энциклопедию по этому предмету.

Равносильность условий (ii) и (iii) следствия 4.1.16 и условий (i) и (ii) теоремы 4.1.17 установлена Гроссом в [1914]. Хаусдорф [1914] доказал равносильность условий (i) и (iii) следствия 4.1.16 и условий (ii) и (iii) теоремы 4.1.17, а также теорему 4.1.18. Пространство $J(\mathfrak{m})$ было открыто Урысоном в [1927]. Гильбертово пространство, описанное в примере 4.1.7, как показал Андерсон [1966], гомеоморфно произведению $\aleph_0$ копий вещественной прямой; это трудный и глубокий результат.

УПРАЖНЕНИЯ

4.1.A. Покажите, что в метрическом пространстве (X, ρ) замыкание шара $B(x_0, r)$, вообще говоря, не совпадает с множеством $\{x\colon \rho(x_0, x) \leqslant r\}$.

4.1.B. (a) Покажите, что для каждого метрического пространства (X, ρ) формула

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

определяет метрику на множестве X, эквивалентную метрике ρ и ограниченную числом 1.

(b) Назовем две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X *равномерно эквивалентными*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что при всех $x, x' \in X$ мы имеем $\rho_2(x, x') < \varepsilon$, как только $\rho_1(x, x') < \delta_1$, и $\rho_1(x, x') < \varepsilon$, как только $\rho_2(x, x') < \delta_2$.

Покажите, что любые равномерно эквивалентные метрики эквивалентны, и приведите пример двух метрик на вещественной прямой, которые эквивалентны, но не равномерно эквивалентны. Покажите, что метрики ρ_1 и ρ_2 на пространстве X равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда тождественное отображение id_X: $X \to Y$ равномерно непрерывно относительно ρ_1 и ρ_2, а также относительно ρ_2 и ρ_1, или, что равносильно, когда для каждого метрического пространства (Y, σ) класс всех отображений X в Y, равномерно непрерывных относительно ρ_1 и σ, совпадает с классом всех отображений X в Y, равномерно непрерывных относительно ρ_2 и σ (ср. с упр. 8.1.A(b) и задачей 8.5.19(b)).

(c) Покажите, что метрика ρ_1 из теоремы 4.1.3 и метрика ρ_1 из пункта (a) равномерно эквивалентны метрике ρ.

(d) Покажите, что метрика, равномерно эквивалентная ограниченной метрике, вообще говоря, не является ограниченной.

4.1.C. Покажите, что гильбертов куб $I^{\aleph_0}$ гомео**морфен подмножеству** гильбертова пространства, состоящему из всех точек $\{x_i\}$, где $0 \leqslant x_i \leqslant 1/i$ для $i = 1, 2, \ldots$.

4.1.D. Приведите пример метризуемого пространства, которое нельзя вложить в локально компактное метризуемое пространство.

4.1.E. (a) Покажите, что для замкнутого подмножества A метризуемого пространства X неравенство $\chi(A, X) \leqslant \aleph_0$ выполняется в том и только том случае, если множество $\mathrm{Fr}\, A$ есть компакт. Докажите, что плотное в себе метризуемое пространство X есть компакт в том и только том случае, если $\chi(A, X) \leqslant \aleph_0$ для любого замкнутого $A \subset X$.

(b) (Хенриксен и Исбелл [1958]). Докажите, что если cX — компактификация метризуемого пространства X, то нарост $cX \setminus X$ обладает свойством Линделёфа.

Указание. Примените (a) и упр. 2.1.C(b).

4.1.F (Хаусдорф [1919]). Покажите, что если A — замкнутое подпространство метризуемого пространства X, то для любой функции f: $A \to I$ и любой метрики ρ на пространстве X формула

$$F(x) = \begin{cases} \inf\limits_{a \in A} \left\{ f(a) + \dfrac{\rho(x, a)}{\rho(x, A)} - 1 \right\}, & \text{если} \quad x \in X \setminus A, \\ f(x), & \text{если} \quad x \in A, \end{cases}$$

определяет непрерывное продолжение F функции f на X (ср. с теоремой 2.1.8).

4.1.G. Покажите, что в упр. 3.2.H(a) и (c) можно считать, что отображение f принимает значения в произвольном метризуемом пространстве.

Указание. Воспользуйтесь теоремой 4.1.18.

4.1.H (Эрдеш и Тарский [1943]; неявно — Харатоми [1931]). (a) Покажите, что в любом метризуемом пространстве веса $\mathfrak{m}$ существует семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств, имеющее мощность $\mathfrak{m}$.

Указание. Трудности возникают, когда $w(X) = \mathfrak{m}$ есть точная верхняя грань кардиналов $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$, где $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m}_i < \mathfrak{m}$ для $i = 1, 2, \ldots$. Сначала рассмотрите случай, когда существует непустое открытое множество $U \subset X$, такое, что $w(V) = \mathfrak{m}$ для каждого непустого открытого множества $V \subset U$. Затем, предполагая, что такого множества не существует, рассмотрите максимальное семейство $\{U_s\}_{s \in S}$ попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X, таких, что $w(U_s) < \mathfrak{m}$ для каждого $s \in S$, и покажите, что $\sup\limits_{s \in S} w(U_s) = \mathfrak{m}$.

Замечание. Проблема существования регулярного пространства X, в котором точная верхняя грань мощностей всех семейств попарно непересекающихся непустых открытых множеств не достигается ни для какого из таких семейств, имеет теоретико-множественный характер. Ее обсуждение см. в работе Комфорта [1971].

(b) Выведите из (a), что всякое метризуемое пространство веса $\mathfrak{m}$ содержит дискретное подпространство мощности $\mathfrak{m}$. Приведите пример метрического пространства веса $\mathfrak{m} > \aleph_0$, не содержащего замкнутого дискретного подпространства мощности $\mathfrak{m}$.

Указание. Рассмотрите подходящее подпространство пространства $J(\aleph_\omega)$.

4.2. ОПЕРАЦИИ НА МЕТРИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Начнем с простого замечания о том, что любое подпространство метризуемого пространства метризуемо. В самом деле, пусть X — метризуемое пространство и ρ — метрика на нем. Пусть расстояние между двумя точками некоторого подмножества $M \subset X$ равно расстоянию между этими точками в метрике ρ. Тем самым мы определяем метрику из M. Легко показать, что индуцированная этой метрикой топология совпадает с топологией на M как подпространстве пространства X. Сужение $\rho | M \times M$ метрики ρ, заданной на X, на подпространство $M \subset X$

будет обозначаться ρ_M, а метрическое пространство (M, ρ_M) — просто (M, ρ).

4.2.1. Теорема. *Сумма* $\bigoplus_{s \in S} X_s$ *метризуема в том и только том случае, если метризуемы все пространства* X_s.

Доказательство. В силу сделанных выше замечаний, достаточно доказать, что сумма попарно непересекающихся метризуемых пространств $\{X_s\}_{s \in S}$ метризуема. Согласно теореме 4.1.3, можно считать, что для каждого $s \in S$ топология на X_s индуцирована метрикой ρ_s, ограниченной числом 1, т. е. что $\rho_s(x, y) \leqslant \leqslant 1$ для $x, y \in X_s$, $s \in S$. Для каждой пары точек $x, y \in X = = \bigoplus_{s \in S} X_s$ положим

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_s(x, y), & \text{если существует такое } s \in S, \text{ что } x, y \in X_s, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что ρ — метрика на множестве X. Условия (M1) и (M2) с очевидностью выполнены, и остается проверить условие (M3). Пусть x, y и z — любые точки пространства X. Покажем, что

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z). \tag{1}$$

Если $x, z \in X_s$ для некоторого $s \in S$, то левая часть неравенства (1) равна $\rho_s(x, z)$, а правая часть равна $\rho_s(x, y) + \rho_s(y, z)$, если $y \in X_s$, или равна 2, если $y \notin X_s$. Таким образом, неравенство (1) выполнено. С другой стороны, если $x \in X_{s_1}$ и $z \in X_{s_2}$ для $s_1 \neq s_2$, то левая часть неравенства (1) равна 1, а правая часть не меньше 1, так как либо $y \notin X_{s_1}$, либо $y \notin X_{s_2}$. Следовательно, неравенство (1) выполнено и в этом случае.

Далее, для каждого $s \in S$ множество X_s открыто в пространстве X с топологией, индуцированной метрикой ρ. Так как $\rho_{X_s} = \rho_s$ индуцирует исходную топологию на X_s, то, в силу предложения 2.2.4, ρ индуцирует на X топологию суммы топологических пространств $\{X_s\}_{s \in S}$. ∎

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность метризуемых пространств и ρ_i — метрика на пространстве X_i, ограниченная числом 1, $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим множество $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ и для каждой пары $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ его точек положим

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i). \tag{2}$$

Читатель может легко установить, что ρ удовлетворяет условиям (M1)—(M3). Возникает вопрос, совпадает ли топология, индуцированная метрикой ρ, с тихоновской топологией на произведении $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Положительный ответ на него содержится в следующей теореме.

4.2.2. Теорема. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ — *последовательность метризуемых пространств и* ρ_i — *метрика на пространстве* X_i, *ограниченная числом* 1, $i = 1, 2, \ldots$. *Топология, индуцированная на множестве* $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *метрикой* ρ, *определенной в* (2), *совпадает с топологией произведения пространств* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Доказательство. Для точек $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\} \in X$ с очевидностью $\rho(x, y) < \varepsilon$, как только $\rho_i(x_i, y_i) < \varepsilon/2^i$. Поэтому, в силу предложения 4.1.8, проекция p_i пространства X в X_i непрерывна в топологии, индуцированной метрикой ρ. Далее, по определению тихоновской топологии топология, индуцированная метрикой ρ, сильнее топологии произведения на X.

Покажем теперь, что каждое множество $U \subset X$, открытое в топологии, индуцированной метрикой ρ, открыто и в топологии произведения. Возьмем произвольную точку $x = \{x_i\} \in U$; существует такое $r > 0$, что $B(x, r) \subset U$. Для завершения доказательства достаточно найти положительное число k и открытые множества $B_i \subset X_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, такие, что

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(B_i) \subset B(x, r) \subset U. \tag{3}$$

Пусть k — положительное целое число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2} r; \tag{4}$$

для $i = 1, 2, \ldots, k$ положим

$$B_i = B(x_i, r/2) = \{z \in X_i\colon\ \rho_i(x_i, z) < r/2\}.$$

Для каждой точки $y = \{y_i\} \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(B_i)$ имеем $\rho_i(x_i, y_i) < r/2$, где $i \leqslant k$, так что (в силу соотношений (2) и (4))

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho(x_i, y_i) < r/2 + r/2 = r,$$

что и доказывает включение (3). ∎

Предположение последней теоремы о том, что метрики ρ_i ограничены числом 1, необходимо только для сходимости ряда в формуле (2). Для конечной последовательности $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_k$ метризуемых пространств расстояние между двумя точками $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ множества $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ можно определить, полагая

$$\rho(x, y) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) + \ldots + \rho_k(x_k, y_k),$$

где ρ_i — некоторая метрика на пространстве X_i. Легко проверить, что ρ — метрика на X, индуцирующая топологию произведения.

Из теоремы 4.2.2 вытекает несколько следствий.

4.2.3. Следствие. *Гильбертов куб $I^{\aleph_0}$ метризуем.* ∎

4.2.4. Следствие. *Произведение $\prod_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ для $s \in S$, метризуемо в том и только том случае, если все пространства X_s метризуемы и существует счетное множество $S_0 \subset S$, такое, что X_s есть одноточечное пространство для $s \in S \setminus S_0$.*

Доказательство. Из теоремы 2.3.24 следует, что произведение несчетной совокупности метризуемых пространств, каждое из которых содержит не менее двух точек, не удовлетворяет первой аксиоме счетности. ∎

4.2.5. Следствие. *Предел обратной последовательности метризуемых пространств метризуем.* ∎

4.2.6. Следствие. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Поставив в соответствие каждой точке $(x, y) \in X \times X$ расстояние $\rho(x, y)$, мы получим непрерывную функцию $\rho\colon X \times X \to R$.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$|\rho(x, y) - \rho(x', y')| \leqslant \rho(x, x') + \rho(y, y'). \ ∎$$

Из теоремы 4.2.2 несложным подсчетом получается такое следствие (его можно также вывести непосредственно из предложения 2.3.34).

4.2.7. Следствие. *Последовательность точек $\{x_i^1\}, \{x_i^2\}, \ldots$ произведения $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ метризуемых пространств сходится к точке $x = \{x_i\} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ тогда и только тогда, когда последовательность $x_i^1, x_i^2, \ldots$ сходится к x_i, $i = 1, 2, \ldots$.* ∎

4.2.8. Теорема. *Компактное пространство метризуемо в том и только том случае, если оно удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Из 4.1.18 и 4.1.16 следует, что каждый метризуемый компакт удовлетворяет второй аксиоме счетности. Так как каждый компакт является тихоновским пространством, из 2.3.23 и 4.2.3 следует, что каждый компакт со второй аксиомой счетности метризуем. ∎

4.2.9. Теорема. *Пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо в том и только том случае, если оно регулярно.*

Доказательство. Из 4.1.13 следует, что каждое метризуемое пространство регулярно. Так как каждое регулярное пространство со второй аксиомой счетности в силу 1.5.15 является тихоновским пространством, то из предложений 2.3.23 и 4.2.3 вытекает, что каждое регулярное пространство со второй аксиомой счетности метризуемо. ∎

4.2.10. Теорема. *Гильбертов куб $I^{\aleph_0}$ является универсальным пространством для всех метризуемых компактов и всех сепарабельных метризуемых пространств.* ∎

Теоремы 4.2.8 и 4.2.9 — это метризационные теоремы: они устанавливают в терминах топологических инвариантов (вторая аксиома счетности и регулярность соответственно) необходимые и достаточные условия метризуемости для двух специальных классов топологических пространств: компактов и пространств со второй аксиомой счетности.

4.2.11. Пример. Пусть X_i — метризуемое пространство, $i = 1, 2, \ldots, k$, и пусть ρ_i — метрика на пространстве X_i. Определим расстояние между двумя точками $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ множества $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$, полагая

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\rho_i(x_i, y_i))^2}. \tag{5}$$

Как в примере 4.1.7, легко проверить, что ρ удовлетворяет неравенству треугольника. Условия (M1) и (M2) выполняются очевидным образом, так что ρ — метрика на X. Легко установить, что ρ индуцирует на X топологию произведения. Отсюда, в частности, следует, что топология произведения на евклидовом n-мерном пространстве R^n, определенном в 2.3.9, совпадает с топологией, индуцированной естественной метрикой на этом пространстве, т. е. метрикой ρ, определенной формулой (5), где $\rho_i(x_i, y_i) = |x_i - y_i|$. Читатель легко проверит, что понятие ограниченного подмножества пространства R^n, определенное в § 3.2, совпадает с понятием ограниченного множества в метрическом пространстве (R^n, ρ). ∎

4.2.12. Пример. Пусть X_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — дискретное пространство $D(\mathfrak{m})$ мощности $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ с метрикой ρ_i, определенной следующим образом:

$$\rho_i(x, y) = 1, \quad \text{если} \quad x \neq y, \quad \text{и} \quad \rho_i(x, x) = 0.$$

Из теоремы 4.2.2 следует, что пространство $B(\mathfrak{m}) = [D(\mathfrak{m})]^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ метризуемо и формула

$$\sigma(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i)$$

определяет метрику на пространстве $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Легко можно проверить, что формула

$$(6) \qquad \rho(\{x_i\}, \{y_i\}) = \begin{cases} 1/k, & \text{если} \quad x_k \neq y_k \text{ и } x_i = y_i \text{ при } i < k, \\ 0, & \text{если} \quad x_i = y_i \text{ при всех } i, \end{cases}$$

определяет метрику на множестве $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Последовательность $\{x_i^1\}, \{x_i^2\}, \ldots$ в пространстве $B(\mathfrak{m})$ сходится к точке $x = \{x_i\}$ в том и только том случае, если для каждого i существует такое $k(i)$, что $x_i^j = x_i$, как только $j \geqslant k(i)$. То же условие необходимо и достаточно для сходимости последовательности $\{x_i^1\}, \{x_i^2\}, \ldots$ к точке $x = \{x_i\}$ в пространстве $(B(\mathfrak{m}), \rho)$, где метрика ρ определена формулой (6). Таким образом, в силу теоремы 4.1.2, (6) определяет метрику на пространстве $B(\mathfrak{m})$.

Пространство $B(\mathfrak{m})$ называется *пространством Бэра веса* $\mathfrak{m}$. Говоря о метрике на пространстве Бэра, мы всегда будем иметь в виду метрику, определенную формулой (6). ∎

Факторпространства метризуемых пространств, вообще говоря, не метризуемы. Примеры 1.4.17 и 2.4.12 показывают, что для сепарабельного метризуемого пространства X и замкнутого отношения эквивалентности E на X факторпространство X/E, вообще говоря, не удовлетворяет первой аксиоме счетности. В § 4.4 мы покажем, что если E — замкнутое отношение эквивалентности на метризуемом пространстве X и факторпространство X/E удовлетворяет первой аксиоме счетности или классы эквивалентности отношения E компактны, то X/E — метризуемое пространство. Заметим, что уже сейчас, основываясь на теоремах 3.7.19, 3.7.20 и 4.2.9, мы можем сформулировать несколько более слабый результат.

4.2.13. Теорема. *Если E — замкнутое отношение эквивалентности на сепарабельном метризуемом пространстве X с компакт-*

ными классами эквивалентности, то факторпространство X/E метризуемо. ∎

Заключительная часть этого параграфа посвящена пространствам отображений.

Пусть X — топологическое пространство и (Y, ρ) — метрическое пространство. Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ *ограничено*, если ограничено множество $f(X) \subset Y$. На множестве всех ограниченных непрерывных отображений X в Y опредлим метрику $\hat{\rho}$, положив

$$\hat{\rho}(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)). \tag{7}$$

Так как множества $f(X)$ и $g(X)$ ограничены, то $\hat{\rho}(f, g)$ — корректно определенное число. Легко проверить, что $\hat{\rho}$ удовлетворяет условиям (M1)—(M3).

Понятие ограниченного отображения не является топологическим понятием: оно зависит от выбора конкретной метрики на Y. Из теоремы 4.1.3 вытекает, что на Y существует метрика, относительно которой все непрерывные отображения X в Y ограничены. Таким образом, существует метрика на множестве Y^X всех непрерывных отображений X в Y, и эта метрика индуцирует топологию на Y^X. К сожалению, эта топология на Y^X зависит от выбора ограниченной метрики на Y.

4.2.14. Пример. Пусть ρ_1 — метрика на множестве R вещественных чисел, определенная формулой $\rho_1(x, y) = \min(1, |x - y|)$, а ρ_2 — другая метрика на множестве R, определенная равенством $\rho_2(x, y) = \rho(h(x), h(y))$, где $h\colon R \to S^1 \setminus \{(0, 1)\} \subset R^2$ — некоторый гомеоморфизм и ρ — естественная метрика на R^2. Очевидно, что метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны, хотя $\rho_1(-i, i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда как $\lim \rho_2(-i, i) = 0$.

Для $X = N$ и $Y = R$ множество Y^X состоит из всех отображений X в Y. Метрики ρ_1 и ρ_2 на R порождают соответственно метрики $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ на Y^X. Покажем, что метрики $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ не эквивалентны.

Рассмотрим отображение $f_i\colon X \to Y$, $i = 1, 2, \ldots$, определенное формулами

$$f_i(i) = -i \quad \text{и} \quad f_i(k) = k \quad \text{при} \quad k \neq i.$$

Определим отображение $f\colon X \to Y$, положим $f(i) = i$. Очевидно, что $\hat{\rho}_1(f, f_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда как $\lim \hat{\rho}_2(f, f_i) = 0$. Следовательно, метрики $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ не эквивалентны в силу теоремы 4.1.2. ∎

Итак, с топологической точки зрения нет оснований рассматривать топологию на Y^X, индуцированную метрикой $\hat{\rho}$, определенной формулой (7). Тем не менее пространство всех ограниченных непрерывных отображений из X в Y с топологией, индуцированной метрикой $\hat{\rho}$, обладает интересными свойствами и весьма полезно, причем главным образом потому, что (как мы увидим в следующем параграфе) в нем справедлива теорема Бэра о категории, когда (Y, ρ) — полное пространство. Отметим также, что (как показано ниже в теореме 4.2.17) для компакта X топология, индуцированная метрикой $\hat{\rho}$, совпадает с компактно-открытой топологией и, следовательно, не зависит от выбора конкретной метрики ρ на пространстве Y.

Докажем теперь следующую теорему.

4.2.15. Теорема. *Для каждого топологического пространства X и любого метрического пространства (Y, ρ), где ρ ограничена, топология на Y^X, индуцированная метрикой $\hat{\rho}$, допустима.*

Доказательство. В силу предложения 2.6.11, достаточно показать, что отображение вычисления Ω: $Y^X \times X \to X$ непрерывно. Пусть $(f_0, x_0) \in Y^X \times X$ и $f_0(x_0) = y_0$. Так как f_0 непрерывно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $V \subset X$ точки x_0, что $f_0(V) \subset B(y_0, \varepsilon/2)$. Легко установить, что $\Omega(B(f_0, \varepsilon/2) \times V) \subset B(y_0, \varepsilon)$. Отсюда вытекает непрерывность отображения Ω. ∎

Последняя теорема вместе с 3.4.1 и 2.6.12 дает

4.2.16. Следствие. *Для любого топологического пространства X и любого метрического пространства (Y, ρ), где ρ ограничена, топология, индуцированная метрикой $\hat{\rho}$ из Y^X, сильнее, чем компактно-открытая топология.* ∎

Пусть X — компакт; тогда, в силу 4.2.6 и 3.2.9, каждое непрерывное отображение X в метризуемое пространство Y ограничено относительно любой метрики ρ на пространстве Y. Таким образом, в случае, когда X — компакт, $\hat{\rho}$ — метрика на всем множестве Y^X.

4.2.17. Теорема. *Пусть X — компакт, Y — метризуемое пространство и ρ — метрика на Y. Тогда топология на Y^X, индуцированная метрикой $\hat{\rho}$, совпадает с компактно-открытой топологией и не зависит от выбора метрики ρ.*

Доказательство. В силу 4.2.16, достаточно показать, что для каждого $f \in Y^X$ и любого $r > 0$ существует такое множество $V \subset Y^X$, открытое относительно компактно-открытой топологии, что

$$f \in V \subset B(f, r). \tag{8}$$

Семейство $\{U_x\}_{x \in X}$ множеств $U_x = f^{-1}(B(f(x), r/4))$ является открытым покрытием компакта X, поэтому существует конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$, такое, что

$$X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k}. \tag{9}$$

Для $i = 1, 2, \ldots, k$ положим

$$C_i = \overline{U}_{x_i} = \overline{f^{-1}(B(f(x_i), r/4))} \quad \text{и} \quad V_i = B(f(x_i), r/3). \tag{10}$$

Так как подмножества $C_1, C_2, \ldots, C_k$ пространства X компактны, а подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_k$ пространства Y открыты, то множество

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} M(C_i, V_i)$$

открыто в компактно-открытой топологии на Y^X. Покажем, что V удовлетворяет включению (8).

Из равенств (10) вытекает, что $f(C_i) \subset V_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, поэтому $f \in V$. Рассмотрим теперь произвольное $g \in V$. В силу (9) и (10), для любой точки $x \in X$ существует такое $i \leqslant k$, что $x \in C_i$. Очевидно, $g(x) \in V_i$ и $f(x) \in V_i$. Так как $\delta(V_i) \leqslant 2r/3$, то $\rho(f(x), g(x)) \leqslant 2r/3$ и, в силу произвольности выбора точки x, $\hat{\rho}(f, g) < r$. Тем самым включение (8) доказано. ∎

Теоремы 4.2.17 и 3.4.16 дают

4.2.18. Следствие. *Для всякого метризуемого компакта X и любого сепарабельного метрического пространства (Y, ρ) пространство $(Y^X, \hat{\rho})$ сепарабельно.* ∎

Читатель легко может установить, что в последнем следствии требование компактности пространства X нельзя ослабить до локальной компактности и сепарабельности.

В заключение этого параграфа приведем теорему, проясняющую природу топологии равномерной сходимости на R^X, введенной в § 2.6. Для этого сначала обобщим понятие равномерно сходящейся последовательности функций.

Пусть X — топологическое пространство, (Y, ρ) — метрическое пространство и $\{f_i\}$ — последовательность отображений X в Y. Будем говорить, что последовательность $\{f_i\}$ *равномерно сходится* к отображению f пространства X в Y, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что $\rho(f(x), f_i(x)) < \varepsilon$ для любого $x \in X$ и $i \geqslant k$. Доказательство следующей теоремы, аналогичное доказательству теоремы 1.4.7, предоставляется читателю.

4.2.19. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство, (Y, ρ) — метрическое пространство и $\{f_i\}$ — последовательность непрерывных отображений f_i: $X \to Y$. Если последовательность $\{f_i\}$ равномерно сходится к отображению f, то f: $X \to Y$ непрерывно. Если все отображения f_i ограничены, то f также ограничено.* ∎

Легко видеть, что последовательность $\{f_i\}$ непрерывных отображений из X в (Y, ρ) равномерно сходится к отображению f: $X \to Y$ в том и только том случае, если $\lim \hat{\rho}(f, f_i) = 0$, где

$\rho_1(x, y) = \min(1, \rho(x, y))$, т. е. в том и только том случае, если $f = \lim f_i$ в метрическом пространстве $(Y^X, \hat{\rho}_1)$. Следовательно, из предложения 4.1.1 и формулы (1) § 2.6 вытекает

4.2.20. Теорема. *Для каждого топологического пространства X пространство отображений R^X с топологией равномерной сходимости метризуемо.*

Точнее, топология равномерной сходимости на R^X индуцируется метрикой $\hat{\rho}$, где ρ — метрика на вещественной прямой, заданная формулой $\rho(x, y) = \min(1, |x - y|)$. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Информация о происхождении операций на метрических и метризуемых пространствах содержится в замечаниях к гл. 2. Теоремы 4.2.8 и 4.2.9 были доказаны Урысоном в [1924] (объявлено в [1928]) и в [1925a] соответственно. В первоначальной формулировке последней теоремы вместо регулярности была нормальность. Тихонов в [1925] установил, что теорема верна в приведенной здесь более сильной форме (ср. с теоремой 1.5.15). Топологическая характеристика метризуемых компактов была дана также Читтенденом и Питчером в [1919]. Бэровские пространства $B(\mathfrak{m})$ были определены Бэром в [1909] для $\mathfrak{m} = \aleph_0$. Теорему 4.2.13 доказал Уайберн в [1942]. Пространство ограниченных отображений с метрикой $\hat{\rho}$, задаваемой формулой (7), было изучено Фреше в [1906] (идея приписывается там Вейерштрассу). Следствие 4.2.16 было отмечено впервые в работе Джексона [1952].

УПРАЖНЕНИЯ

4.2.A. (a) Покажите, что если две метрики ρ и σ на множестве X равномерно эквивалентны, то для каждого $M \subset X$ метрики ρ_M и σ_M на подпространстве M также равномерно эквивалентны.

(b) Установите, что если для $i = 1, 2, \ldots$ метрики ρ_i и σ_i на множестве X_i равномерно эквивалентны и ограничены 1, то метрики ρ и σ на $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, определенные формулой (2), также равномерно эквивалентны.

(c) Докажите, что если две метрики ρ и σ на множестве Y равномерно эквивалентны и ограничены, то для каждого пространства X метрики $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ на Y^X, определенные формулой (7), также равномерно эквивалентны и, следовательно, индуцируют одну и ту же топологию на Y^X (ср. с упр. 4.3.I(b)).

4.2.B (Шнейдер [1945]). Покажите, что компактное пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда диагональ

Δ есть G_δ-множество в произведении $X \times X$ (см. задачу 3.12.22(e); ср. с задачей 4.5.15 и упр. 5.1.1).

Указание. Определите счетное семейство $\{\mathscr{V}_i\}_{i=1}^{\infty}$ конечных открытых покрытий пространства X, такое, что для любой пары x, y различных точек пространства X найдется номер i, при котором точки x и y не принадлежат одновременно замыканию никакого элемента покрытия $\mathscr{V}_i$. Покажите, что семейство всех конечных пересечений $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k$, где $V_i \in \mathscr{V}_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, является базой пространства X.

Можно также выбрать функцию $f\colon X \times X \to I$ таким образом, что $\Delta = f^{-1}(0)$, и положить $\rho(x, y) = \sup\limits_{z \in X} |f(x, z) - f(y, z)|$.

4.2.C (Вон [1937]). Докажите, что для метризуемого пространства X сепарабельность и локальная компактность являются необходимым и достаточным условием существования на X такой метрики, что подпространство $A \subset X$ компактно в том и только том случае, когда множество A замкнуто и ограничено.

4.2.D. (a) (Пономарев [1960]). Докажите, что T_0-пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в том и только том случае, когда X есть непрерывный образ метризуемого пространства при открытом отображении.

Указание. Пусть пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, и пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ — его база. Рассмотрите бэровское пространство $B(\mathfrak{m}) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i = S$, снабженное дискретной топологией, и подмножество $T \subset B(\mathfrak{m})$, состоящее из всех точек $\{s_i\}$, таких, что $\{U_{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$ является базой в точке $x \in X$. Точке $\{s_i\} \in T$ поставьте в соответствие точку $x \in X$.

(b) (Майкл [1971a]). Покажите, что каждое пространство X с первой аксиомой счетности есть непрерывный образ хаусдорфова пространства с первой аксиомой счетности при открытом отображении, и выведите отсюда, что в (a) предположение о том, что X является T_0-пространством, можно опустить.

Указание (Шимрат [1956]). Определите в $B(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m} = |X|$, семейство $\{A_x\}_{x \in X}$ попарно непересекающихся всюду плотных подмножеств и возьмите подмножество $\bigcup\limits_{x \in X} (\{x\} \times A_x)$ произведения $X \times B(\mathfrak{m})$.

Замечание. Конструкция, приведенная в указании, говорит о том, что каждое топологическое пространство есть непрерывный образ хаусдорфова пространства при некотором открытом отображении. Исбелл [1969] доказал более сильное утверждение: каждое топологическое пространство есть непрерывный образ наследственно паракомпактного и наследственно сильно нульмерного пространства при открытом отображении. Дополнительную информацию, относящуюся к пунктам (a) и (b), можно найти в работах Юннилы [1978] и Р. Поля [1981].

(c) (Архангельский [1963], Франклин [1965]). Покажите, что конструкция, описанная в упр. 2.4.G(b), показывает, что секвенциальные пространства можно охарактеризовать как образы метризуемых пространств при факторных отображениях, а пространства Фреше — Урысона — как образы метризуемых пространств при наследственно факторных отображениях.

4.2.E (Куратовский [1947]; для вещественных функций — Хан [1921]). Докажите, что если X — метризуемый компакт и (Y, ρ) — метрическое пространство, то последовательность $\{f_i\}$ непрерывных отображений из X в Y равномерно сходится к отображению $f \in Y^X$ тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек пространства X, сходящейся к точке $x \in X$, последовательность $f_i(x_i)$ сходится к $f(x)$ (ср. с упр. 2.6.C).

4.2.F (Куратовский [1931]). Покажите, что если X — метризуемый компакт, а Y — хаусдорфово пространство, то все топологические вложения пространства X в Y образуют G_δ-множество в пространстве Y^X с компактно-открытой топологией.

4.2.G (Джексон [1952]). Пусть X — тихоновское пространство, Y — метризуемое пространство, содержащее подпространство, гомеоморфное прямой R, и ρ — ограниченная метрика на пространстве Y. Покажите, что если метрика $\hat{\rho}$ индуцирует компактно-открытую топологию на Y^X, то X — компакт.

Указание. Видоизмените рассуждение, предложенное в указании к упр. 3.4.A.

4.2.H (Аренс [1946]). Докажите, если X — хемикомпактное пространство, то для любого метризуемого пространства Y пространство Y^X с компактно-открытой топологией метризуемо (ср. с упр. 3.4.E, 3.5.G(b), 3.8.C(b) и 4.3.F).

4.2.I. Пусть ρ — псевдометрика на множестве X; положим $xE(\rho)y$ в том и только том случае, если $\rho(x, y) = 0$. Покажите, что тем самым определено отношение эквивалентности $E(\rho)$ на X. Проверьте, что формула $\bar{\rho}([x], [y]) = \rho(x, y)$ определяет метрику на множестве всех классов эквивалентности отношения $E(\rho)$. Полученное так метрическое пространство обозначается через X/ρ.

Пусть X — топологическое пространство и ρ — псевдометрика на множестве X, такая, что $\rho\colon X \times X \to R$ — непрерывная функция. Покажите, что, относя точке $x \in X$ класс $[x] \in X/\rho$, мы определяем непрерывное отображение $f\colon X \to X/\rho$. Установите, что, вообще говоря, топология на X/ρ, индуцированная метрикой $\bar{\rho}$, слабее топологии факторпространства $X/E(\rho)$ и что две эти топологии совпадают, если топология на X индуцирована псевдометрикой ρ.

Пусть X — топологическое пространство и ρ — псевдометрика на множестве X, такая, что $\rho\colon X \times X \to R$ — непрерывная функция. Покажите, что в этом случае топология на X, индуцированная псевдометрикой ρ, слабее исходной топологии.

4.3. ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. КОМПАКТНОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и A — подмножество пространства X. Говорят, что A *ε-плотно* в (X, ρ), если для каждого $x \in X$ существует такое $x' \in A$, что $\rho(x, x') < \varepsilon$.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $A \subset X$, ε-плотное в (X, ρ). Метрика ρ на множестве X называется *вполне ограниченной*, если пространство (X, ρ) вполне ограничено. Топологическое пространство X *метризуемо вполне ограниченной метрикой*, если на нем существует вполне ограниченная метрика.

Первое из приведенных выше определений задает некоторый класс метрических пространств. Третье определение задает класс топологических пространств, который вместе с некоторым пространством X содержит и все гомеоморфные ему пространства. Однако определение последнего класса не является внутренним, так как в нем использовано понятие метрики.

Теперь мы коротко обсудим класс всех вполне ограниченных метрических пространств и покажем, что класс всех пространств, метризуемых вполне ограниченной метрикой, совпадает с классом всех сепарабельных метризуемых пространств. Как мы увидим, последний факт приводит к внутренней характеристике класса всех пространств, метризуемых вполне ограниченной метрикой.

Сначала рассмотрим несколько примеров.

4.3.1. Примеры. Дискретное пространство (X, ρ), определенное в 4.1.4, не является вполне ограниченным, если множество X не является конечным. В самом деле, если X бесконечно, то никакое конечное множество не может быть ε-плотным в (X, ρ) при $\varepsilon = 1$.

Читатель легко установит, что вещественная прямая R, пространство $J(\mathfrak{m})$, плоскость с метрикой ρ из примера 4.1.6, гильбертово пространство H и бэровское пространство $B(\mathfrak{m})$ не являются вполне ограниченными.

С другой стороны, каждый отрезок $J = [a, b] \subset R$ вполне ограничен. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ множество $J \cap$

$\cap\{i/k\colon i=0, +1, \pm 2, \ldots\}$, где k — целое положительное число, удовлетворяющее неравенству $1/k < \varepsilon$, конечно и ε-плотно в J. Более общо, каждый метрический компакт вполне ограничен (см. теорему 4.3.27). Каждый открытый интервал также вполне ограничен. Так как вещественная прямая гомеоморфна интервалу $(-1, 1)$, то ясно, что пространство, гомеоморфное вполне ограниченному пространству, может не быть вполне ограниченным. Однако оно метризуемо вполне ограниченной метрикой. Читатель легко установит, что пространство, изометричное вполне ограниченному пространству, является вполне ограниченным. ∎

4.3.2. Теорема. *Пусть* (X, ρ) — *вполне ограниченное пространство; тогда для любого подмножества* $M \subset X$ *пространство* (M, ρ) *вполне ограничено.*

Если (X, ρ) — *произвольное метрическое пространство и подмножество* $M \subset X$ *таково, что* (M, ρ) *вполне ограничено, то пространство* $(\overline{M}, \rho)$ *также вполне ограничено.*

Доказательство. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$ и конечное множество $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\varepsilon/2$-плотное в (X, ρ). Пусть $\{x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_l}\}$ — подмножество множества A, состоящее из всех точек, расстояние которых от M меньше $\varepsilon/2$, и пусть $x'_1, x'_2, \ldots, x'_l$ — произвольные точки множества M, такие, что

$$(1) \qquad \rho\left(x'_j, x'_{m_j}\right) < \varepsilon/2, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Мы покажем, что множество $A' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_l\}$ ε-плотно в M.

Пусть $x \in M$; по определению множества A существует такое $i \leqslant k$, что

$$(2) \qquad \rho(x, x_i) < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $x_i = x_{m_j}$ для некоторого $j \leqslant l$ и, в силу (1) и (2), $\rho\left(x, x'_j\right) < \varepsilon$.

Вторая часть теоремы вытекает из следующего простого факта: любое множество, $\varepsilon/2$-плотное в (M, ρ), ε-плотно в $(\overline{M}, \rho)$. ∎

Читатель может легко установить, что если $\{(X_s, \rho_s)\}_{s \in S}$ — семейство непустых метрических пространств, причем метрика ρ_s при каждом $s \in S$ ограничена числом 1, то сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ с метрикой ρ, определенной в доказательстве теоремы 4.2.1, вполне ограничена тогда и только тогда, когда все пространства (X_s, ρ_s) вполне ограничены и $|S| < \aleph_0$.

4.3.3. Теорема. *Пусть* $\{(X_i, \rho_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — *семейство непустых метрических пространств, таких, что метрики* ρ_i *ограничены числом* 1,

$i = 1, 2, \ldots$. Произведение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ с метрикой ρ, определенной формулой (2) *в* § 4.2, *вполне ограничено тогда и только тогда, когда все пространства (X_i, ρ_i) вполне ограничены.*

Доказательство. Предположим, что пространство $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \rho\right)$ вполне ограничено. Подпространство $X_j^* = \prod_{i=1}^{\infty} A_i \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, где $A_j = X_j$ и $A_i = \{x_i^*\}$ — одноточечное подмножество пространства X_i при всех $i \neq j$, вполне ограничено в силу теоремы 4.3.2. Легко установить, что если множество A и $\varepsilon/2^j$-плотно в (X_j^*, ρ), то множество $p_j(A)$ является ε-плотным в (X_j, ρ_j). Таким образом, пространство (X_j, ρ_j) вполне ограничено.

Допустим теперь, что все пространства (X_i, ρ_i) вполне ограничены. Выберем $\varepsilon > 0$ и натуральное число k, такое, что $1/2^k < \varepsilon/2$. Для каждого $i \leqslant k$ выберем конечное множество $\{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{m(i)}^i\}$, $\varepsilon/2$-плотное в X_i, а для каждого $i > k$ выберем произвольную точку $x_0^i \in X_i$.

Множество $A \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, состоящее из всех точек вида

(3) $$y = \{x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, \ldots, x_{j_k}^k, x_0^{k+1}, x_0^{k+2}, \ldots\}, \quad \text{где } 1 \leqslant j_i \leqslant m(i) \text{ для } i \leqslant k,$$

конечно. Для завершения доказательства достаточно показать, что A ε-плотно в пространстве $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \rho\right)$.

Пусть $x = \{x_i\}$ — произвольная точка пространства $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Для каждого $i \leqslant k$ существует такое $j_i \leqslant m(i)$, что $\rho_i\left(x_i, x_{j_i}^i\right) < \varepsilon/2$. Для точки y, определенной в (3), имеем

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \rho_i\left(x_i, x_{j_i}^i\right) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i\left(x_i, x_0^i\right) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, множество A ε-плотно в $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \rho\right)$. ∎

4.3.4. Следствие. *Гильбертов куб $I^{\aleph_0}$ с метрикой ρ, определенной формулой*

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i - y_i|, \quad \text{где } x = \{x_i\} \text{ и } y = \{y_i\},$$

является вполне ограниченным пространством. ∎

4.3.5. Теорема. *Метризуемое пространство метризуемо вполне ограниченной метрикой в том и только том случае, если оно сепарабельно.*

Доказательство. Достаточность условия сепарабельности следует из 4.2.10, 4.3.4 и 4.3.2. Для доказательства его необходимости заметим, что если ρ — вполне ограниченная метрика на пространстве X и $A_i \subset X$ — конечное множество, $1/i$-плотное в (X, ρ), то объединение $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — счетное всюду плотное подмножество пространства X. ∎

Последняя теорема вместе с 4.1.16 и 4.2.9 дает

4.3.6. Следствие. *Топологическое пространство метризуемо вполне ограниченной метрикой в том и только том случае, когда оно регулярно и удовлетворяет второй аксиоме счетности.* ∎

Перейдем теперь к классу полных метрических пространств.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $\{x_i\}$ — последовательность точек X. Будем называть $\{x_i\}$ *последовательностью Коши* в (X, ρ), если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число k, такое, что $\rho(x_i, x_k) \leqslant \varepsilon$, как только $i \geqslant k$. Легко видеть, что каждая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве есть последовательность Коши.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая последовательность Коши в (X, ρ) сходится к некоторой точке пространства X. Метрика ρ на множестве X называется *полной*, если пространство (X, ρ) полное. Будем говорить, что топологическое пространство X *метризуемо полной метрикой*, если существует полная метрика на пространстве X.

Замечание, сделанное в начале этого параграфа в связи с вполне ограниченными пространствами и пространствами, метризуемыми вполне ограниченными метриками, применимо к полным метрическим и метризуемым полной метрикой пространствам.

Вначале рассмотрим класс полных метрических пространств, затем класс пространств, метризуемых полной метрикой, и в заключение дадим внутреннюю характеристику пространств, метризуемых полной метрикой.

Рассмотрим сначала несколько примеров.

4.3.7. Примеры. Дискретное пространство (X, ρ), определенное в 4.1.4, полное. В самом деле, каждая последовательность Коши в (X, ρ) постоянна, начиная с некоторого члена.

Мы покажем, что вещественная прямая R с естественной метрикой есть полное пространство. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность Коши в R. Существует натуральное число k, такое, что $|x_i - x_k| \leqslant 1$, как только $i \geqslant k$. Таким образом, все члены последовательности $\{x_i\}$, начиная с k-го, содержатся в замкнутом интервале $J=[x_k-1,\ x_k+1]$. Из компактности J и теоремы 4.1.17 следует, что найдется подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$ последовательности $\{x_i\}$, сходящаяся к точке $x\in J$. Прямое вычисление показывает, что последовательность $\{x_i\}$ также сходится к точке x.

Каждый замкнутый интервал — тоже полное пространство (см. теорему 4.3.28). С другой стороны, открытый интервал $(-1, 1)$ и любой другой открытый интервал не являются полными. В самом деле, $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ — последовательность Коши в интервале $(-1, 1)$, которая не сходится ни к какой его точке. Так как интервал $(-1, 1)$ гомеоморфен вещественной прямой, мы видим, что пространство, гомеоморфное полному пространству, не обязательно полно, хотя и метризуемо полной метрикой. Читатель легко проверит, что пространство, изометричное полному пространству, само является полным пространством.

Стоит также отметить, что открытое подмножество полного пространства необязательно полно, как видно на примере подпространства $(-1, 1)\subset R$. ∎

Заметим, что для каждого полного метрического пространства (X, ρ) существует полная метрика ρ_1 на множестве X, эквивалентная метрике ρ и ограниченная числом 1. В самом деле, метрика ρ_1 из теоремы 4.1.3 полна, так как последовательность $\{x_i\}$ точек пространства X есть последовательность Коши в (X, ρ) тогда и только тогда, когда она есть последовательность Коши в (X, ρ_1).

Следующие две теоремы содержат две характеристики полноты. Первая аналогична характеристике счетной компактности, данной в теореме 3.10.2(iii), вторая — характеристике компактности, данной в теореме 3.1.1.

4.3.8. Теорема Кантора. *Метрическое пространство (X, ρ) полно тогда и только тогда, когда каждая убывающая последовательность $F_1\supset F_2\supset\ldots$ непустых замкнутых подмножеств пространства X, таких, что $\lim\delta(F_i)=0$, имеет непустое пересечение:* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i\neq\varnothing$.

Доказательство. Пусть (X, ρ) — полное пространство и F_1, F_2, ... — последовательность непустых замкнутых подмножеств пространства X, таких, что

$$(4)\qquad \lim\delta(F_i)=0 \quad \text{и} \quad F_{i+1}\subset F_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots .$$

Выберем точку $x_i\in F_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots$. Легко видеть, что все члены последовательности $\{x_i\}$, начиная с i-го, содержатся в множестве F_i. Таким образом, в силу первого соотношения из

(4), $\{x_i\}$ — последовательность Коши и потому сходится к некоторой точке $x \in X$. Так как множества F_i замкнуты, то $x \in F_i$, $i = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$.

Пусть теперь (X, ρ) — метрическое пространство, удовлетворяющее условиям нашей теоремы, и пусть $\{x_i\}$ — последовательность Коши в (X, ρ). Множества $F_i = \overline{\{x_i, x_{i+1}, \ldots\}}$, $i = 1, 2, \ldots$, замкнуты и удовлетворяют соотношениям (4). Следовательно, существует точка $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Легко показать, что $x = \lim x_i$. Поэтому пространство (X, ρ) полное. ∎

4.3.9. Следствие. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $M \subset X$ — такое подмножество, что (M, ρ) — полное пространство; тогда M замкнуто в X.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in \overline{M}$ последовательность $F_1, F_2, \ldots$ подмножеств M, где $F_i = \overline{M \cap B(x, 1/i)}$, удовлетворяет условиям теоремы Кантора. Следовательно, в силу полноты пространства (M, ρ), мы имеем $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$. Так как $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \subset \{x\}$, то $x \in M$ и потому $\overline{M} = M$. ∎

4.3.10. Теорема. *Метрическое пространство (X, ρ) полно в том и только том случае, когда каждое центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства X, в котором для любого $\varepsilon > 0$ содержится множество диаметра $< \varepsilon$, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Достаточность этого условия вытекает из теоремы Кантора.

Докажем теперь его необходимость. Пусть (X, ρ) — полное пространство. Пусть $\{F_s\}_{s \in S}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств $F_i \subset X$. Пусть для любого натурального числа j это семейство содержит такое множество F_{s_j}, что $\delta(F_{s_j}) < 1/j$. Легко видеть, что последовательность $F_1, F_2, \ldots$, где $F_i = \bigcap_{j \leqslant i} F_{s_j}$, удовлетворяет условиям теоремы Кантора. Поэтому существует точка $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Очевидно, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \{x\}$. Выберем теперь произвольное $s_0 \in S$ и положим

$$F_1' = F_{s_0} \quad \text{и} \quad F_i' = F_{s_0} \cap F_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots .$$

Мы получим последовательность $F'_1, F'_2, \ldots$, удовлетворяющую условиям теоремы Кантора. Так как

$$\varnothing \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} F'_i = F_{s_0} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = F_{s_0} \cap \{x\},$$

то $x \in F_{s_0}$. Следовательно, $x \in \bigcap_{s \in S} F_s$. ∎

Изучим теперь операции над полными пространствами.

4.3.11. Теорема. *Пусть* (X, ρ) *— полное пространство. Для того чтобы пространство* (M, ρ), $M \subset X$, *было полным, необходимо и достаточно, чтобы* M *было замкнутым в* X.

Доказательство. В силу следствия 4.3.9, достаточно показать, что если $M = \overline{M}$, то пространство (M, ρ) полное. Каждая последовательность Коши в (M, ρ) является последовательностью Коши в (X, ρ) и, следовательно, сходится к точке $x \in X$. Так как $M = \overline{M}$, то очевидно, что $x \in M$. ∎

Пусть $\{(X_s, \rho_s)\}_{s \in S}$ — семейство непустых метрических пространств, таких, что метрика ρ_s ограничена числом 1 для каждого $s \in S$. Легко установить, что сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$, снабженная метрикой ρ, определенной в доказательстве теоремы 4.2.1, является полным пространством тогда и только тогда, когда все пространства (X_s, ρ_s) полны. Следовательно, сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ пространств X_s, метризуемых полной метрикой, тоже метризуема полной метрикой.

4.3.12. Теорема. *Пусть* $\{(X_i, \rho_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *— семейство непустых метрических пространств, таких, что метрика* ρ_i *ограничена числом* 1, $i = 1, 2, \ldots$. *Произведение* $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *с метрикой* ρ, *определенной формулой* (2) *в* § 4.2, *полно тогда и только тогда, когда все пространства* (X_i, ρ_i) *полны.*

Доказательство. Допустим, что пространство $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \rho\right)$ полное. Подпространство $X_j^* = \prod_{i=1}^{\infty} A_i \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, где $A_j = X_j$ и $A_i = \{x_i^*\}$ — одноточечное подмножество пространства X_i при $i \neq j$, замкнуто и, в силу теоремы 4.3.11, полно. Легко установить, что $p_j^* = p_j | X_j^*\colon X_j^* \to X_j$ — гомеоморфизм и что для каждой последовательности Коши $\{x_i\}$ в (X_j, ρ_j) последовательность $\{p_j^{*-1}(x_i)\}$ есть последовательность Коши в X_j^*. Образ предела последовательности $\{p_j^{*-1}(x_i)\}$ есть предел последовательности $\{x_i\}$. Таким образом, пространство (X_j, ρ_j) полно.

Допустим теперь, что все пространства (X_i, ρ_i) полны. Если $\{x_i^1\}, \{x_i^2\}, \ldots$ — последовательность Коши в $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \rho\right)$, то для $i = 1, 2, \ldots$ последовательность $x_i^1, x_i^2, \ldots$ является последовательностью Коши в пространстве (X_i, ρ_i) и, таким образом, сходится к точке $x_i \in X_i$. Из следствия 4.2.7 вытекает, что последовательность $\{x_i^1\}, \{x_i^2\}, \ldots$ сходится к точке $x = \{x_i\} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Значит, пространство $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \rho\right)$ полно.

4.3.13. Теорема. *Для каждого топологического пространства X и любого полного метрического пространства (Y, ρ) пространство всех ограниченных непрерывных отображений из X в Y с метрикой $\hat{\rho}$, определенной формулой* (7) § 4.2, *является полным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{f_i\}$ — последовательность Коши в рассматриваемом пространстве. Очевидно, что $\{f_i(x)\}$ — последовательность Коши в пространстве (Y, ρ) для любой точки $x \in X$. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ предел последовательности $\{f_i(x)\}$. Тем самым определено некоторое отображение f из X в Y. Легко видеть, что последовательность $\{f_i\}$ равномерно сходится к f. Поэтому, в силу теоремы 4.2.19, отображение f ограничено и непрерывно. Следовательно, $\lim \hat{\rho}(f, f_i) = 0$, т. е. последовательность $\{f_i\}$ сходится к f. ∎

4.3.14. Теорема. *Каждое метрическое пространство изометрично подпространству полного метрического пространства.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. В силу последней теоремы, пространство (Y, σ) всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X, где $\sigma(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, полно. Зафиксируем некоторую точку $a \in X$. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ функцию $f_x \in R^X$, определенную следующей формулой:

$$f_x(z) = \rho(z, x) - \rho(z, a), \quad z \in X.$$

Так как $|f_x(z)| \leqslant \rho(a, x)$ в силу неравенства треугольника, то $f_x \in Y$ для каждого $x \in X$. Мы покажем, что

$$(5) \qquad \sigma(f_x, f_y) = \rho(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in X.$$

Заметим сначала, что для любого $z \in X$ имеет место неравенство

$$f_x(z) - f_y(z) = \rho(z, x) - \rho(z, a) - \rho(z, y) + \rho(z, a) \leqslant \rho(x, y).$$

Из симметрии предположений вытекает, что $|f_x(z)-f_y(z)|\leqslant \leqslant \rho(x,y)$, т. е.

$$\sigma(f_x, f_y)\leqslant \rho(x,y).$$

С другой стороны, так как $f_x(y)-f_y(y)=\rho(y,x)-\rho(y,a)+ +\rho(y,a)=\rho(y,x)$, то

$$\sigma(f_x, f_y)\geqslant \rho(x,y).$$

Таким образом, равенство (5) доказано, а с ним и утверждение теоремы. ∎

4.3.15. Следствие. *Каждое метризуемое пространство можно вложить в пространство, метризуемое полной метрикой.* ∎

Заметим в связи с последним доказательством, что если (X,ρ) ограничено, то изометрию между (X,ρ) и (Y,σ) можно получить более простым способом: достаточно поставить в соответствие каждой точке $x\in X$ функцию $f_x\in Y$, определенную равенством $f_x(z)=\rho(x,z)$.

Очевидно, что для данного метрического пространства (X,ρ) есть много полных метрических пространств (Y,σ), содержащих изометричное (X,ρ) подпространство. Однако если добавить требование, что подпространство, изометричное (X,ρ), должно быть всюду плотно в (Y,σ), то пространство (Y,σ) определяется однозначно (с точностью до изометрии). Для доказательства этого факта нам потребуется теорема о продолжаемости отображений в полные метрические пространства.

Пусть X — топологическое пространство, (Y,σ) — метрическое пространство и $f\colon A\to Y$ — непрерывное отображение всюду плотного подмножества A пространства X. Будем говорить, что *колебание отображения f в точке $x\in X$ равно нулю*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такая окрестность U точки x, что $\delta(f(A\cap U))<\varepsilon$. Для любого целого i множество всех точек $x\in X$, имеющих такую окрестность U, что $\delta(f(A\cap U))<1/i$, открыто и содержит A. Поэтому множество всех точек, в которых колебание отображения f равно нулю, есть G_δ-множество, содержащее A.

4.3.16. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, (Y,σ) — полное метрическое пространство и $f\colon A\to Y$ — непрерывное отображение, определенное на плотном подмножестве A пространства X. Тогда отображение f продолжимо до непрерывного отображения $F\colon B\to Y$, определенного на множестве B, состоящем из всех точек пространства X, в которых колебание f равно нулю.*

Доказательство. Для каждого $x\in B$ обозначим через $\mathscr{B}(x)$ семейство всех окрестностей точки x. Рассмотрим семейство

$\{\overline{f(A\cap U)}\}_{U\in\mathscr{B}(x)}$ замкнутых подмножеств пространства Y. Указанное семейство центрировано и для любого $\varepsilon>0$ содержит множество, диаметр которого меньше ε. Таким образом, в силу теоремы 4.3.10, пересечение $\bigcap\limits_{U\in\mathscr{B}(x)}\overline{f(A\cap U)}$ не пусто. Так как диаметр этого пересечения равен нулю, оно состоит из единственной точки $F(x)$. Очевидно, что $F(x)=f(x)$ для $x\in A$. Поставим в соответствие каждой точке $x\in B$ точку $F(x)$. Тем самым мы определим отображение $F\colon B\to Y$, являющееся продолжением отображения f. Остается доказать непрерывность отображения F. Возьмем произвольную точку $x\in B$ и $\varepsilon>0$. Из определения множества B следует, что существует $U\in\mathscr{B}(x)$, удовлетворяющее соотношению $\delta(\overline{f(A\cap U)})<\varepsilon$. Для любого $x'\in B\cap U$ имеем $U\in\mathscr{B}(x')$ и, следовательно, $F(x')\in\overline{f(A\cap U)}$. Так как $F(x)\in\overline{f(A\cap U)}$, то имеет место соотношение $\sigma(F(x),F(x'))\leqslant\delta(\overline{f(A\cap U)})<\varepsilon$, из которого следует непрерывность отображения F. ∎

4.3.17. Теорема. *Пусть* (X,ρ) — *метрическое пространство и* (Y,σ) — *полное метрическое пространство; тогда каждое отображение* $f\colon A\to Y$ *всюду плотного подмножества* A *пространства* X *в пространство* Y, *равномерно непрерывное относительно* ρ *и* σ, *продолжается до отображения* $F\colon X\to Y$, *равномерно непрерывного относительно* ρ *и* σ.

Доказательство. Из равномерной непрерывности отображения f вытекает, что колебание отображения f в каждой точке x равно нулю. Следовательно, в силу леммы, существует продолжение $F\colon X\to Y$ отображения f. Остается доказать равномерную непрерывность отображения F.

Выберем произвольные $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, такие, что для любых $x,\ x'\in A$ мы имеем $\sigma(f(x),\ f(x'))<\varepsilon/2$, как только $\rho(x,\ x')<\delta$. Для любой пары $x_0,\ x_0'\in X$, такой, что $\rho(x_0,\ x_0')<\delta$, множество $U=B(x_0,\ r)\cup B(x_0',\ r)$, где $r=\frac{1}{3}(\delta-\rho(x_0,\ x_0'))$, открыто и его диаметр меньше δ. Следовательно, $\delta(f(A\cap U))\leqslant\varepsilon/2$ и $\delta(\overline{f(A\cap U)})\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$. Так как $F(x_0)$ и $F(x_0')$ принадлежат множеству $\overline{f(A\cap U)}$, то $\sigma(F(x_0),\ F(x_0'))<\varepsilon$. ∎

Изометрии равномерно непрерывны, поэтому последняя теорема вместе с 1.5.4 и 4.2.6 дает

4.3.18. Следствие. *Пусть* (X,ρ) *и* (Y,σ) — *полные метрические пространства; тогда каждая изометрия между* (A,ρ_A) *и* (B,σ_B), *где* A *и* B — *всюду плотные подмножества в пространствах* X *и* Y *соответственно, продолжается до изометрии между* (X,ρ) *и* (Y,σ). ∎

4.3.19. Теорема. *Для любого метрического пространства (X, ρ) существует ровно одно (с точностью до изометрии) полное метрическое пространство $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$, такое, что $\tilde{X}$ содержит всюду плотное подпространство, изометричное пространству (X, ρ). Более того, $w(\tilde{X}) = w(X)$, и если пространство (X, ρ) вполне ограничено, то $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ также вполне ограничено.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. В силу теоремы 4.3.14, существуют полное метрическое пространство (Y, σ) и изометрия $f\colon X \to Y$. Положим $\tilde{X} = \overline{f(X)} \subset Y$ и $\tilde{\rho} = \sigma_{\tilde{X}}$; мы получим метрическое пространство $(\tilde{X}, \rho)$ с требуемыми свойствами. Единственность $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ следует из 4.3.18.

Равенство $w(\tilde{X}) = w(X)$ следует из теоремы 4.1.15. Если пространство (X, ρ) вполне ограничено, то в силу второй части теоремы 4.3.2 пространство $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ также вполне ограничено. ∎

Пространство $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$, удовлетворяющее условиям теоремы 4.3.19, называется *пополнением метрического пространства* (X, ρ).

Теперь перейдем к рассмотрению класса пространств, метризуемых полной метрикой. Начнем с одной простой теоремы о продолжении отображений.

4.3.20. Теорема. *Пусть Y — пространство, метризуемое полной метрикой. Тогда каждое непрерывное отображение $f\colon A \to Y$, где A — всюду плотное подмножество топологического пространства X, продолжается до непрерывного отображения $F\colon B \to Y$, определенного на G_δ-множестве $B \subset X$, содержащем множество A.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть любую полную метрику на пространстве Y, взяв в качестве B множество всех тех точек, в которых колебание отображения f равно нулю, и применить 4.3.16. ∎

Наша следующая теорема — важный результат о продолжении гомеоморфизмов.

4.3.21. Теорема Лаврентьева. *Пусть X и Y — пространства, метризуемые полной метрикой, и пусть $A \subset X$ и $C \subset Y$ — произвольные подпространства. Любой гомеоморфизм $f\colon A \to C$ продолжается до гомеоморфизма $F\colon B \to D$, где $A \subset B \subset X$, $C \subset D \subset Y$ и B, D суть G_δ-множества в X и Y соответственно.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{A} = X$ и $\bar{C} = Y$. Пусть $g\colon C \to A$ — обратное отображение к f. Из 4.3.20 вытекает существование продолжений

$$F_0\colon B_0 \to Y \quad \text{и} \quad G_0\colon D_0 \to X$$

отображений f и g на G_δ-множества $B_0 \subset X$ и $D_0 \subset Y$. Пересечения $B = B_0 \cap F_0^{-1}(D_0)$ и $D = D_0 \cap G_0^{-1}(B_0)$ суть G_δ-множества в X и Y соответственно. Очевидно, что $A \subset B$, $C \subset D$. Покажем, что

(6) $\quad G_0F_0(x) = x \quad$ для каждого $\quad x \in B \quad$ и $\quad F_0(B) \subset D$.

Согласно теореме 1.5.4, из того, что сужение отображения $G_0F_0|B$ на A совпадает с вложением $i_A\colon A \to X$, вытекает первая часть (6), откуда в свою очередь следует, что $F_0(B) \subset G_0^{-1}(B) \subset G_0^{-1}(B_0)$. Так как $F_0(B) \subset D_0$, то справедлива и вторая часть (6). В силу симметричности наших предположений,

(7) $\quad F_0G_0(y) = y \quad$ для каждого $\quad y \in D \quad$ и $\quad G_0(D) \subset B$.

Из соотношений (6) и второй части (7) следует, что $G_0(D) = B$. Подобным же образом имеем $F_0(B) = D$. Отсюда следует, что отображения $F = F_0|B\colon B \to D$ и $G = G_0|D\colon D \to B$ взаимно обратны, а это означает, что F — гомеоморфизм. ∎

В следующих двух теоремах мы обсуждаем операцию перехода к подпространству.

4.3.22. Лемма. *Каждое G_δ-множество в метризуемом пространстве X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $X \times R^{\aleph_0}$.*

Доказательство. Пусть A есть G_δ-множество в X и ρ — произвольная метрика на пространстве X. Представим дополнение $X \setminus A$ как объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ замкнутых множеств F_i и рассмотрим отображение $f = \mathop{\triangle}_{i=0}^{\infty} f_i\colon A \to \prod_{i=0}^{\infty} X_i$, где $f_0\colon A \to X_0 = X$ — вложение и $f_i\colon A \to X_i = R$ определено формулой

$$f_i(x) = [\rho(x, F_i)]^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

По теореме о диагонали, f — гомеоморфное вложение. Следовательно, остается показать, что образ $f(A)$ замкнут в $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$.

Мы покажем, что каждая точка $x = \{x_i\} \in \prod_{i=0}^{\infty} X_i \setminus f(A)$ обладает окрестностью U, содержащейся в дополнении к множеству $f(A)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $x_0 \in A$. Так как $x \notin f(A)$, найдется такое $i > 0$, что $x_i \neq f_i(x_0)$. Пусть U_1 и U_2 — непересекающиеся окрестности точек x_i и $f_i(x_0)$ соответственно. Так как функция f_i непрерывна, существует такая окрестность $U_0 \subset X$ точки x_0, что $f_i(A \cap U_0) \subset U_2$. Легко проверить, что

(8) $$x = \{x_i\} \in U = p_0^{-1}(U_0) \cap p_i^{-1}(U_1) \subset \prod_{i=0}^{\infty} X_i \setminus f(A).$$

Пусть теперь $x_0 \notin A$. Очевидно, что $x_0 \in F_i$ для некоторого $i > 0$. Пусть $r > 0$ таково, что $x_i + 1 < 1/r$, и пусть $U_0 = B(x_0, r)$, $U_1 = \{x \in R: x < x_i + 1\}$. Легко видеть, что формула (8) верна также и в этом случае. ∎

Эта лемма вместе с теоремами 4.3.11 и 4.3.12 приводит (ср. с упр. 2.3.L(a)) к следующей теореме.

4.3.23. Теорема. *Метризуемость полной метрикой наследуется G_δ-множествами.* ∎

4.3.24. Теорема. *Если подпространство M метризуемого пространства X метризуемо полной метрикой, то M есть G_δ-множество в X.*

Доказательство. По теореме 4.3.20, отображение id_M: $M \to M$ всюду плотного подмножества M пространства $\overline{M} \subset X$ продолжается до непрерывного отображения F: $B \to M$, определенного на G_δ-множестве $B \subset \overline{M}$, содержащем M. Предположение о существовании точки $x \in B \setminus M$ противоречит непрерывности отображения F. Таким образом, $B = M$ и M есть G_δ-множество в $\overline{M}$, а потому и в X. ∎

Так как всякое сепарабельное метризуемое пространство вкладывается в $R^{\aleph_0}$, из 4.3.22—4.3.24 получаем

4.3.25. Следствие. *Сепарабельное метризуемое пространство метризуемо полной метрикой в том и только том случае, когда оно вкладывается в $R^{\aleph_0}$ как замкнутое подпространство.* ∎

Из теорем 4.3.14, 4.3.23 и 4.3.24 следует, что среди метризуемых пространств пространства, метризуемые полной метрикой, можно охарактеризовать как *абсолютные G_δ-множества*, т. е. пространства, являющиеся G_δ-множествами в любом метризуемом пространстве, в которое они вложены.

4.3.26. Теорема. *Топологическое пространство метризуемо полной метрикой в том и только том случае, если оно есть полное по Чеху метризуемое пространство.*

Доказательство. Пусть X метризуемо полной метрикой и ρ — полная метрика на нем. Из теоремы 4.3.10 следует, что любое центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства X, содержащее множества, диаметр которых меньше чем диаметр множеств покрытия $\mathscr{A}_i = \{B(x, 1/i)\}_{x \in X}$, $i = 1, 2, \ldots$, имеет непустое пересечение. Следовательно, пространство X полно по Чеху в силу теоремы 3.9.2.

Пусть теперь X — метризуемое пространство, полное по Чеху. Возьмем его пополнение $\tilde{X}$ и компактификацию $c\tilde{X}$ пространства $\tilde{X}$. Очевидно, что $c\tilde{X}$ — компактификация пространства X. Из теоремы 3.9.1 следует, что X есть G_δ-множество в $c\tilde{X}$, а потому и в $\tilde{X}$. Теорема 4.3.23 показывает тогда, что X метризуемо полной метрикой. ∎

Отметим, что, поскольку классы метризуемых пространств и полных по Чеху пространств допускают внутреннюю характеристику (см. § 4.4, 5.4 и теорему 3.9.2), последняя теорема дает внутреннее описание пространств, метризуемых полной метрикой.

Теоремы 4.3.26 и 3.9.10 показывают, что метризуемость полной метрикой сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями, определенными на метрических пространствах. Отметим также, что метризуемость полной метрикой сохраняется при замкнутых и открытых отображениях на метризуемые пространства (см. задачи 4.5.13(e) и 5.5.8(d)).

Мы закончим этот параграф исследованием метрик на компактах.

4.3.27. Теорема. *Каждая метрика на компакте вполне ограничена.*

Доказательство. Пусть ρ — метрика на компакте X. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Открытое покрытие $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ компакта X имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечное множество $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$, такое, что

$$X = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_k, \varepsilon).$$

Легко видеть, что множество A ε-плотно в X. ∎

Из теоремы Кантора следует

4.3.28. Теорема. *Каждая метрика на компакте полна.* ∎

Наша следующая теорема характеризует компактность метризуемых пространств в терминах метрики.

4.3.29. Теорема. *Метризуемое пространство X есть компакт в том и только том случае, когда на нем существует полная и вполне ограниченная метрика ρ.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из 4.3.27 и 4.3.28.

Пусть теперь (X, ρ) — метрическое пространство, вполне ограниченное и полное. Для любого натурального числа i выберем конечное множество $\{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{k(i)}^i\}$, $(1/2i)$-плотное в (X, ρ). Полагая $B_j^i = B(x_j^i, 1/2i)$ для $j = 1, 2, \ldots, k(i)$, получаем

$$X = \bigcup_{j=1}^{k(i)} B_j^i \quad \text{и} \quad \delta(B_j^i) \leqslant 1/i \quad \text{для} \quad j \leqslant k(i). \tag{9}$$

Мы покажем, что каждое бесконечное подмножество A пространства X имеет предельную точку. Согласно теоремам 3.10.3 и 4.1.17, этого достаточно для завершения доказательства теоремы.

Так как множество A бесконечно, то, в силу первого равенства (9), найдется такое $j \leqslant k(1)$, что пересечение $A \cap B_j^1$ бесконечно. Обозначим это пересечение A_1. Тогда

$$A \supset A_1, \quad \delta(A_1) \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |A_1| \geqslant \aleph_0.$$

Аналогичным образом мы получим множество A_2, равное одному из пересечений $A_1 \cap B_j^2$ и удовлетворяющее условиям

$$A \supset A_1 \supset A_2, \quad \delta(A_2) \leqslant 1/2 \quad \text{и} \quad |A_2| \geqslant \aleph_0.$$

Определим по индукции последовательность $A_1, A_2, \ldots$ множеств, удовлетворяющих условиям

$$(10) \qquad A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad \delta(A_i) \leqslant 1/i \quad \text{и} \quad |A_i| \geqslant \aleph_0.$$

По теореме Кантора, существует точка $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i$. Из соотношений (10) следует, что каждая окрестность точки x содержит бесконечно много точек множества A. Следовательно, x — предельная точка множества A. ∎

4.3.30. Следствие. *Пополнение метрического пространства (X, ρ) есть компакт в том и только том случае, если (X, ρ) — вполне ограниченное пространство.* ∎

Мы завершим этот параграф простой, но полезной теоремой об открытых покрытиях компактных метрических пространств.

4.3.31. Теорема Лебега о покрытиях. *Для любого открытого покрытия $\mathscr{A}$ метрического компакта X существует такое $\varepsilon > 0$, что покрытие $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ вписано в $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ выберем такое $\varepsilon_x > 0$, что шар $B(x, 2\varepsilon_x)$ содержится в элементе покрытия $\mathscr{A}$. Открытое покрытие $\{B(x, \varepsilon_x\}_{x \in X}$ пространства X имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечное множество точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$, такое, что

$$X = B(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup B(x_2, \varepsilon_{x_2}) \cup \ldots \cup B(x_k, \varepsilon_{x_k}).$$

Легко видеть, что число $\varepsilon = \min(\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \ldots, \varepsilon_{x_k})$ обладает требуемым свойством. ∎

Всякое число ε, удовлетворяющее требованиям последней теоремы, называется *числом Лебега* покрытия $\mathscr{A}$.

Из теоремы Лебега о покрытиях следует

4.3.32. Теорема. *Всякое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ метризуемого компакта X в метризуемое пространство Y равномерно непрерывно относительно любых метрик ρ и σ соответственно на пространствах X и Y.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ пусть $\delta = \delta(\varepsilon)$ — число Лебега открытого покрытия $\{f^{-1}(B(y, \varepsilon/2))\}_{y \in Y}$ пространства X. Если $\rho(x, x') < \delta$, то найдется такая точка $y \in Y$, что $x' \in B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon/2))$, и потому $\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вполне ограниченные пространства были введены Хаусдорфом в [1914], а полные и метризуемые полной метрикой пространства — Фреше в [1906]. Куратовский в [1933] доказал теоремы 4.3.3, 4.3.10 и 4.3.13; в [1930] он обнаружил, что условие теоремы Кантора достаточно для полноты. Необходимость этого условия была установлена Хаусдорфом в [1914] (Кантор доказал эту теорему для вещественной прямой в [1880]). Замечание о том, что каждое вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно, можно найти в книге Хаусдорфа [1927]. Теорема 4.3.14 была доказана Хаусдорфом в [1914]; наше доказательство заимствовано из работы Куратовского [1935a] (аналогичной конструкцией пользовался Фреше в [1910]). Пополнение метрического пространства было описано Хаусдорфом в [1914] (единственность была отмечена в [1927]); конструкция Хаусдорфа (см. задачу 4.5.6) связана с теорией вещественных чисел Кантора — Мерэ. Теоремы 4.3.20 и 4.3.21 доказал Лаврентьев в [1924]. Теорема 4.3.23 была доказана Александровым в [1924] для сепарабельных пространств и обобщена на произвольные метризуемые пространства Хаусдорфом в [1924]. Лемма 4.3.22 была установлена в книге Куратовского [1933]. Теорема 4.3.24 легко следует из факта, установленного Лаврентьевым в [1924] (для подмножеств евклидовых пространств — Мазуркевичем в [1916]), что свойство быть G_δ-множеством в полном пространстве топологически инвариантно. Теорема 4.3.26 была доказана Чехом в [1937]; из нее следует, что теорема Бэра о категории имеет место для всех пространств, метризуемых полной метрикой (ср. с упр. 4.3.С), — это впервые было доказано Хаусдорфом в [1914] (Бэр доказал эту теорему для вещественной прямой в 1889 г.). Теорема Бэра о категории в применении к пространствам отображений (см. теорему 4.3.13) или к пространствам замкнутых подмножеств (см. задачи 4.5.21(с) и (d)) дает эффективный и широко применяемый метод для установления существования некоторых математических объектов (так называемый *категорный метод*). Читатель может попытаться доказать, используя категорный метод, что существует непрерывная функция $f\colon R \to R$, не дифференцируемая ни в какой точке прямой R (это классическая теорема Вейерштрасса; доказательство категорным методом дано Банахом в [1931]). Теоремы 4.3.27—4.3.29 доказаны Фреше в [1910a], однако он не рассматривал класс вполне ограниченных пространств. Теорему 4.3.31 доказал Лебег в работе [1921] (там эта теорема приводится в двойственной формулировке); наше доказательство основано на идее Мазуркевича [1920a]. Теорему 4.3.32 можно найти в книге Хаусдорфа [1914].

УПРАЖНЕНИЯ

4.3.A. (a) Покажите, что метрическое пространство (X, ρ) вполне ограничено тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие X множествами, диаметр которых меньше ε.

(b) Установите, что если отображение $f\colon X \to Y$ метризуемого пространства X на метризуемое пространство Y равномерно непрерывно относительно метрик ρ и σ соответственно на пространствах X и Y и пространство (X, ρ) вполне ограничено, то и пространство (Y, σ) вполне ограничено.

(c) Пусть пространство (X, ρ) вполне ограничено и метрика ρ равномерно эквивалентна метрике σ на пространстве X: тогда пространство (X, σ) также вполне ограничено.

4.3.B. (a) Приведите пример полного метрического пространства (X, ρ), которое допускает равномерно непрерывное относительно метрик ρ и σ отображение на неполное пространство (Y, σ).

(b) Пусть (X, ρ) — полное пространство и метрика ρ равномерно эквивалентна некоторой метрике σ на пространстве X; покажите, что тогда пространство (X, σ) также полное.

(c) Покажите, что еж $J(\mathfrak{m})$, плоскость с метрикой из примера 4.1.6, гильбертово пространство H и пространство Бэра $B(\mathfrak{m})$ — полные пространства.

4.3.C. (a) Приведите прямое доказательство теоремы Бэра о категории для пространств, метризуемых полной метрикой (ср. с упр. 4.4.F(d) и (e)).

Указание. Для непустого открытого множества G определите, как при доказательстве теоремы 3.9.3, последовательность $G_1, G_2, \ldots$ непустых открытых множеств, таких, что

$$G \supset \overline{G}_1 \supset G_1 \supset \overline{G}_2 \supset \ldots, \quad \overline{G}_i \cap A_i = \varnothing \text{ и } \delta(\overline{G}_i) < 1/i, \ i = 1, 2, \ldots .$$

(b) Приведите пример подпространства X на плоскости, для которого справедлива теорема Бэра о категории, несмотря на то что X не метризуемо полной метрикой.

Указание. Используйте такой факт: если теорема Бэра о категории имеет место для всюду плотного подпространства пространства X, то она имеет место и для X.

4.3.D (Линденбаум [1926]). (a) Покажите, что если (X, ρ) — вполне ограниченное пространство, то для каждой изометрии $f\colon X \to X$ образ $f(X)$ всюду плотен в X (ср. с задачей 4.5.4).

Указание. Воспользуйтесь тем, что для каждой точки $x \in X$ последовательность $f(x), f(f(x)), \ldots$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к x.

(b) Выведите из (a), что если (X, ρ) — компакт, то каждая изометрия $f\colon X \to X$ есть отображение «на». Покажите, что предположение о компактности нельзя ослабить до условия, что (X, ρ) вполне ограничено.

4.3.E. (a) Пусть (X, ρ) и (Y, σ) — метрические пространства и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Покажите, что формула

$$\bar{\rho}(x, y) = \rho(x, y) + \sigma(f(x), f(y))$$

определяет метрику $\bar{\rho}$ на пространстве X, эквивалентную метрике ρ, и что отображение f равномерно непрерывно относительно метрик $\bar{\rho}$ и σ. Проверьте, что если метрики ρ и σ вполне ограничены, то $\bar{\rho}$ вполне ограничена.

(b) Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение; покажите, что формула

$$\bar{\rho}(x, y) = \rho(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho(f^i(x), f^i(y)),$$

где $f^i(x) = f(f^{i-1}(x))$ при $i \geqslant 1$ и $f^0(x) = x$, определяет метрику $\bar{\rho}$ на пространстве X, эквивалентную метрике ρ, и что отображение f равномерно непрерывно относительно ρ и $\bar{\rho}$. Покажите также, что если ρ вполне ограничена, то и $\bar{\rho}$ вполне ограничена.

(c) Покажите, что метризуемое пространство X — компакт в том и только том случае, когда каждая метрика на нем вполне ограничена, или, что равносильно, каждая метрика на нем ограничена (ср. с задачей 4.5.20(d)).

(d) (Немыцкий и Тихонов [1928]). Докажите, что метризуемое пространство X является компактом в том и только том случае, когда каждая метрика на нем полна (ср. с упр. 4.4.E(b) и задачей 4.5.20(d)).

Указание. Пусть X — некомпактное метризуемое пространство и $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность непустых замкнутых подмножеств пространства X, такая, что пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ пусто. Выберите некоторую метрику σ на пространстве X, ограниченную числом 1, и проверьте, что для $i = 1, 2, \ldots$ формула

$$\rho_i(x, y) = |\sigma(x, F_i) - \sigma(y, F_i)| + [\min(\sigma(x, F_i), \ \sigma(y, F_i))]\, \sigma(x, y)$$

определяет псевдометрику на множестве X. Используя построенные так псевдометрики, определите метрику ρ на пространстве X, такую, чтобы $\delta(F_i) \leqslant 1/2^i$, $i = 1, 2, \ldots$ (ср. с леммой 4.4.6).

4.3.F. (a) Пусть X — локально компактное пространство Линделёфа, а Y — пространство, метризуемое полной метрикой. Докажите, что пространство Y^X с компактно-открытой топологией метризуемо полной метрикой (см. упр. 4.2.H и 3.8.C(b)).

(b) Приведите пример хемикомпактного пространства X, такого, что пространство I^X с компактно-открытой топологией не метризуемо полной метрикой (ср. упр. 4.2.H).

Указание. Возьмите в качестве X пространство Y из примера 1.6.20 и рассмотрите множество, состоящее из всех функций $f \in I^X$, принимающих только значения 0 и 1 и постоянных на каждом подпространстве вида $Y \cap (1/i, 1/i + 1/i^2]$.

4.3.G (Бэр [1909]). Докажите, что пространство P всех иррациональных чисел (с топологией подпространства вещественной прямой) гомеоморфно пространству Бэра $B(\aleph_0) = N^{\aleph_0}$ (ср. с упр. 6.2.A).

Указание. Прежде всего покажите, что для каждой метрики ρ на пространстве P, всякого $\varepsilon > 0$ и любого непустого открытого множества $U \subset P$ существует последовательность $F_1, F_2, \ldots$ попарно непересекающихся непустых открыто-замкнутых подмножеств пространства P, такая, что $\delta(F_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$, и $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Затем выберите полную метрику ρ на пространстве P и для каждой последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_k$ натуральных чисел определите по индукции непустое открыто-замкнутое множество $F_{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset P$ диаметра, меньшего $1/k$, такое, что

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \quad F_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{i_1 i_2 \ldots i_k i} \text{ и } F_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cap F_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \varnothing,$$

если последовательности индексов различны.

4.3.H. (a) (Брауэр [1913]; неявно — Фреше [1910]). Докажите, что для любых двух счетных всюду плотных подмножеств A, B вещественной прямой R существует гомеоморфизм $f: R \to R$, такой, что $f(A) = B$ (ср. с задачей 4.5.2).

Указание. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Определите по индукции функцию $f: A \to R$, полагая $f(a_1) = b_1$ и выбирая в качестве $f(a_i)$ элемент B с наименьшим возможным индексом, такой, что условия $a_j < a_k$ и $f(a_j) < f(a_k)$ равносильны при $j, k \leqslant i$. Рассмотрите продолжение функции f на R и докажите, что это — гомеоморфизм.

(b) (Фреше [1910]). Покажите, что пространство Q всех рациональных чисел (с топологией подпространства вещественной прямой) есть универсальное пространство для всех счетных метризуемых пространств.

Указание. Заметьте, что счетные метризуемые пространства вкладываются в R. Для счетного $X \subset R$ рассмотрите множества $X \cup Q$ и Q и примените (a).

(c) Пусть A_1, A_2, B_1 и B_2 — счетные всюду плотные подмножества прямой R, удовлетворяющие условию $A_1 \cap A_2 = \varnothing = B_1 \cap B_2$; покажите, что существует гомеоморфизм f: $R \to R$, такой, что $f(A_i) = B_i$ при $i = 1, 2$.

(d) Покажите, что для любых двух счетных всюду плотных подмножеств A, B пространства P иррациональных чисел существует гомеоморфизм f: $P \to P$, такой, что $f(A) = B$.

(e) Покажите, что для любых двух счетных всюду плотных подмножеств A, B канторовского подмножества C существует гомеоморфизм f: $C \to C$, такой, что $f(A) = B$.

Указание. Заметьте, что для каждого счетного множества $A \subset C$ существует гомеоморфизм g: $C \to C$, такой, что множество $g(A)$ не пересекается с множеством концов всех интервалов, выброшенных из I при построении канторовского множества, и примените упр. 3.2.В.

4.3.I. (a) Покажите, что любые две метрики на метризуемом компакте равномерно эквивалентны.

(b) Пусть Y — метризуемый компакт. Покажите, что для каждого топологического пространства X топология на Y^X, индуцированная метрикой $\hat{\rho}$, определенной по формуле (7) в § 4.2, не зависит от выбора конкретной метрики ρ на пространстве Y. Покажите, что так определенная топология на Y^X, вообще говоря, не совпадает с компактно-открытой топологией.

Указание. См. упр. 4.2.A(c) и 4.2.G.

4.3.J (Банах [1922]). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение f: $X \to X$ называется *сжимающим*, если существует такое число $c \in (0, 1]$, что $\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x, y)$ для всех x, $y \in X$. Покажите, что для каждого сжимающего отображения полного метрического пространства X в себя существует в точности одна точка $x_0 \in X$, такая, что $f(x_0) = x_0$ (это и есть *теорема Банаха о неподвижной точке*).

Указание. Возьмите любую точку $x \in X$ и покажите, что $f(x), f(f(x)), \ldots$ — последовательность Коши.

4.4. МЕТРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ I

Семейство множеств называется *σ-локально конечным* (*σ-дискретным*), если оно может быть представлено как счетное объединение локально конечных (дискретных) семейств.

Следующая теорема устанавливает одно из самых важных свойств метризуемых пространств.

4.4.1. Теорема Стоуна. *В каждое открытое покрытие метризуе-*

мого пространства можно вписать открытое подпокрытие, являющееся одновременно локально конечным и σ-дискретным.

Доказательство. Пусть $\{U_s\}_{s\in S}$ — открытое покрытие метризуемого пространства X. Выберем метрику ρ на пространстве X и отношение вполне упорядочения $<$ на множестве S. Определим индуктивно семейства $\mathscr{V}_i=\{V_{s,i}\}_{s\in S}$ подмножеств пространства X, полагая

$$V_{s,i}=\bigcup B(c, 1/2^i),$$

где объединение берется по всем точкам $c\in X$, удовлетворяющим следующим условиям:

(1) s — наименьший элемент множества S, такой, что $c\in U_s$;

(2) $\qquad c\notin V_{t,j}$ при $j<i$ и $t\in S$;

(3) $\qquad B(c, 3/2^i)\subset U_s$.

Из определения непосредственно вытекает, что множества $V_{s,i}$ открыты. Включение (3) показывает, что $V_{s,i}\subset U_s$. Пусть $x\in X$; выберем наименьшее $s\in S$, такое, что $x\in U_s$, и натуральное число i, такое, что $B(x, 3/2^i)\subset U_s$. Очевидно, что либо $x\in V_{t,j}$ для некоторых $j<i$ и $t\in S$, либо $x\in V_{s,i}$. Следовательно, объединение $\mathscr{V}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{V}_i$ является открытым покрытием, вписанным в покрытие $\{U_s\}_{s\in S}$.

Мы докажем, что для каждого i

(4) $\quad$ если $x_1\in V_{s_1,i}$, $x_2\in V_{s_2,i}$ и $s_1\neq s_2$, то $\rho(x_1, x_2)>1/2^i$.

Эти соотношения в свою очередь означают, что семейства $\mathscr{V}_i$ дискретны, ибо каждый $(1/2^{i+1})$-шар пересекается не более чем с одним элементом семейства $\mathscr{V}_i$.

Допустим, что $s_1<s_2$. По определению множеств $V_{s_1,i}$ и $V_{s_2,i}$ найдутся такие точки c_1 и c_2, удовлетворяющие соотношениям (1) — (3), что $x_k\in B(c_k, 1/2^i)\subset V_{s_k,i}$, $k=1, 2$. Из включения (3) следует, что $B(c_1, 3/2^i)\subset U_{s_1}$, а из (1) видно, что $c_2\notin U_{s_1}$, так что $\rho(c_1, c_2)\geqslant 3/2^i$. Значит,

$$\rho(x_1, x_2)\geqslant\rho(c_1, c_2)-\rho(c_1, x_1)-\rho(c_2, x_2)>1/2^i,$$

что и доказывает неравенство (4).

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что для каждого $t\in S$ и любой пары k, j натуральных чисел

(5) $\quad$ если $B(x, 1/2^k)\subset V_{t,j}$, то $B(x, 1/2^{j+k})\cap V_{s,i}=\varnothing$
при $i\geqslant j+k$ и $s\in S$.

В самом деле, для каждого $x \in X$ существуют такие k, j и t, что $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$, и, таким образом, шар $B(x, 1/2^{j+k})$ пересекается не более чем с $j+k-1$ элементами семейства $\mathscr{V}$.

Из (2) вытекает, что точки c в определении множеств $V_{s,i}$ не принадлежат $V_{t,j}$, если $i \geqslant j+k$. Так как $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$, то $\rho(x, c) > 1/2^k$ для каждого такого c. Из неравенств $j+k \geqslant k+1$ и $i \geqslant k+1$ вытекает, что $B(x, 1/2^{j+k}) \cap B(c, 1/2^i) = \varnothing$, откуда следует (5). ∎

4.4.2. Замечание. Отметим, что доказательство теоремы Стоуна дает больше, чем утверждается теоремой: во всякое открытое покрытие пространства X, топология которого индуцирована некоторой псевдометрикой, можно вписать покрытие, одновременно локально конечное и σ-дискретное.

4.4.3. Теорема. *Каждое метризуемое пространство имеет σ-дискретную базу.*

Доказательство. Пусть ρ — метрика на метризуемом пространстве X и $\mathscr{B}_i$ — открытое σ-дискретное покрытие, вписанное в открытое покрытие пространства X, состоящее из всех $(1/i)$-шаров. Легко показать, что σ-дискретное семейство $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ есть база пространства X. ∎

4.4.4. Следствие. *Каждое метризуемое пространство имеет σ-локально конечную базу.* ∎

Мы докажем, что существование σ-локально конечной базы также и достаточно для метризуемости регулярного пространства. Начнем с леммы, обобщающей теорему 1.5.15.

4.4.5. Лемма. *Каждое регулярное пространство, имеющее σ-локально конечную базу, совершенно нормально.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$, где семейства $\mathscr{B}_i$ локально конечны, есть база регулярного пространства X. Рассмотрим открытое множество $W \subset X$. Для каждого $x \in W$ существуют натуральное число $i(x)$ и открытое множество $U(x) \subset \mathscr{B}_{i(x)}$, такие, что $x \in U(x) \subset \overline{U(x)} \subset W$. Положим $W_i = \bigcup\{U(x) : i(x) = i\}$. Мы получим последовательность $W_1, W_2, \ldots$ открытых подмножеств пространства X, такую, что $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ и, в силу теоремы 1.1.11, $\overline{W}_i \subset W$, $i = 1, 2, \ldots$. Нормальность пространства X теперь следует из леммы 1.5.14. Так как $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{W}_i$, пространство X совершенно нормально (ср. с упр. 1.5.K). ∎

4.4.6. Лемма. *Пусть X есть T_0-пространство, $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ счетное семейство псевдометрик на множестве X, которые все ограничены числом 1 и удовлетворяют следующим условиям:*

(i) ρ_i: $X \times X \to R$ — *непрерывная функция*, $i = 1, 2, \ldots$.

(ii) *Для каждой точки $x \in X$ и каждого непустого замкнутого множества $A \subset X$, такого, что $x \notin A$, найдется i, при котором* $\rho_i(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \rho_i(x, a) > 0$.

Тогда пространство X метризуемо и функция ρ, определенная формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x, y),$$

есть метрика на пространстве X.

Доказательство. Легко видеть, что $\rho(x, x) = 0$ для каждого $x \in X$ и ρ удовлетворяет условиям (M2) и (M3). Так как X есть T_0-пространство, то для любой пары различных точек x, $y \in X$ либо $x \notin \overline{\{y\}}$, либо $y \notin \overline{\{x\}}$. Следовательно, $\rho(x, y) > 0$ в силу (ii), т. е. ρ — метрика на множестве X. Для того чтобы доказать, что ρ — метрика на пространстве X, достаточно показать, в силу следствия 4.1.11, что

$$\rho(x, A) = 0 \text{ в том и только том случае, когда } x \in \bar{A}.$$

Если $x \notin \bar{A}$, то, в силу (ii), существует такое число i, что $\rho_i(x, \bar{A}) = r > 0$, и $\rho(x, A) \geqslant \rho(x, \bar{A}) \geqslant r/2^i > 0$. С другой стороны, из (i) вытекает (в силу теоремы 1.4.7), что ρ: $X \times X \to R$ — непрерывная функция, а тогда предложение 4.1.9 показывает, что функция f: $X \to R$, определенная формулой $f(x) = \rho(x, A)$, также непрерывна. Следовательно, если $x \in \bar{A}$, то $f(x) \in f(\bar{A}) \subset \subset \overline{f(A)} = \{0\}$, т. е. $\rho(x, A) = 0$. ∎

4.4.7. Метризационная теорема Нагаты — Смирнова. *Топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, когда оно регулярно и имеет σ-локально конечную базу.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы следует из 4.1.13 и 4.4.4. Мы покажем, что эти условия также и достаточны.

Пусть X — регулярное пространство с базой $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$, где $\mathscr{B}_i = \{U_s\}_{s \in S_i}$ локально конечное семейство. Для фиксированной пары натуральных чисел i, k и любого $s \in S_i$, в силу леммы 4.4.5 и следствия 1.5.12, существует непрерывная функция f_s: $X \to I$, такая, что $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$. Так как семейство $\{W_s\}_{s \in S_i}$, где $W_s = (U_s \times X) \cup (X \times U_s)$, есть локально конечное открытое покрытие пространства $X \times X$ и $|f_s(x) - f_s(y)| = 0$ для $(x, y) \notin W_s$, то, полагая

$$g_i(x, y) = \sum_{s \in S_i} |f_s(x) - f_s(y)| \quad \text{для} \quad (x, y) \in X \times X,$$

мы определяем (в силу следствия 2.1.12) непрерывную функцию g_i: $X \times X \to R$. Очевидно, что формула $\rho_i(x, y) = \min(1, g_i(x, y))$ задает псевдометрику на множестве X, ограниченную числом 1. Семейство $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию 4.4.6(i). Выполнено и условие (ii). В самом деле, для каждого $x \in X$ и каждого непустого замкнутого множества $A \subset X$, такого, что $x \notin A$, существует такое $U \in \mathscr{B}$, что $x \in U$ и $A \subset X \setminus U$. Далее, $U = U_s \in \mathscr{B}_i$ при некоторых i и $s \in S_i$, и так как $f_s(x) > 0$ и $f_s(A) = \{0\}$, получаем $\inf\limits_{a \in A} \rho_i(x, a) \geqslant f_s(x) > 0$. Метризуемость пространства X вытекает теперь из леммы 4.4.6 (ср. с упр. 4.4.A(d)). ∎

Отметим также, что из последней теоремы непосредственно вытекает, что условия теорем 4.2.8 и 4.2.9 достаточны для метризуемости.

Из теорем 4.4.3 и 4.4.7 следует

4.4.8. Метризационная теорема Бинга. *Топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, когда оно регулярно и имеет σ-дискретную базу.* ∎

Покажем теперь, что существует универсальное пространство для всех метризуемых пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ (ср. с упр. 4.4.K).

4.4.9. Теорема. *Произведение $[J(\mathfrak{m})]^{\aleph_0}$, составленное из $\aleph_0$ копий ежа $J(\mathfrak{m})$, универсально для всех метризуемых пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.*

Доказательство. Очевидно, что $[J(\mathfrak{m})]^{\aleph_0}$ — метризуемое пространство веса $\mathfrak{m}$.

Пусть X — метризуемое пространство веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. По теореме 4.4.3, существует база $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ пространства X, такая, что $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$, где $\mathscr{B}_i = \{U_s\}_{s \in S_i}$ — дискретное семейство. В силу теоремы 1.1.15, можно считать, что $|S| = \mathfrak{m}$. Без ограничения общности можно предполагать, что множество S совпадает с множеством, использованным в примере 4.1.5 при построении ежа $J(\mathfrak{m})$.

Для каждого натурального числа i и любого $s \in S_i$ существует (в силу следствия 4.1.12) непрерывная функция f_s: $X \to I$, такая, что $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$. Так как семейство $\{\overline{U}_s\}_{s \in S_i}$ дискретно, то, полагая

$$f_i(x) = j_s f_s(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{U}_s \quad \text{и} \quad f_i(x) = j_{s_0}(0)$$
$$\text{при} \quad x \in X \setminus \bigcup_{s \in S_i} U_s,$$

где s_0 — фиксированный элемент множества S, мы определяем (согласно предложению 2.1.13) непрерывную функцию $f_i\colon X \to J(\mathfrak{m})$. Легко показать, что семейство $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ разделяет точки и замкнутые множества. И потому, в силу теоремы о диагональном отображении пространство X вложимо в $[J(\mathfrak{m})]^{\aleph_0}$. ∎

Заключительная часть этого параграфа посвящена изучению сохранения метризуемости при отображениях. Для начала напомним, что в примере 1.4.17 мы определили замкнутое отображение вещественной прямой на пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Таким образом, метризуемость не сохраняется при замкнутых отображениях (ср. с теоремой 4.4.17). Теперь мы приведем два примера, показывающих, что метризуемость не сохраняется и при открытых отображениях (ср. с упр. 4.2.D и задачей 4.5.17).

4.4.10. Пример. Рассмотрим подпространство плоскости:

$$X = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(1, 1/i)\} \cup \left(\{0, 1\} \times \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{1/i + 1/i \cdot j\}\right)$$

и определим на X отношение эквивалентности E; $(x_1, y_1) E (x_2, y_2)$ в том и только том случае, когда $y_1 = y_2$. Естественное фактор-отображение $q\colon X \to X/E = Y$ открыто. В самом деле, пусть множество $A \subset X$ открыто; тогда множество $q^{-1}q(A)$ также открыто, ибо оно получается присоединением к A нескольких изолированных точек пространства X, и, следовательно, множество $q(A) \subset Y$ также открыто. Легко видеть, что Y — хаусдорфово пространство. Покажем, что Y не является регулярным пространством. Множество $q(F)$, где $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(1, 1/i)\}$, замкнуто в Y и не содержит точки $p = q((0, 0))$; тем не менее для каждой пары U, V открытых подмножеств пространства Y, таких, что $p \in U$ и $q(F) \subset V$, мы имеем $U \cap V \neq \varnothing$. В самом деле, существует такое i_0, что $\left(0, \frac{1}{i} + \frac{1}{i \cdot j}\right) \in q^{-1}(U)$, как только $j \geqslant i \geqslant i_0$, и такое $j_0 \geqslant i_0$, что $\left(1, \frac{1}{i_0} + \frac{1}{i_0 \cdot j}\right) \in q^{-1}(V)$, как только $j \geqslant j_0$. Таким образом, для $y = \frac{1}{i_0} + \frac{1}{i_0 \cdot j_0}$ имеем $(0, y) \in q^{-1}(U)$ и $(1, y) \in q^{-1}(V)$, откуда следует, что $q(0, y) = q(1, y) \in U \cap V$.

Заметим, что прообразы точек при отображении q — одноточечные или двухточечные множества. ∎

4.4.11. Пример. Пусть $Y = W_0$ — пространство всех ординалов, меньших ω_1 (см. пример 3.1.27). Положим $X = \bigoplus_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, где $X_\alpha = \{x \in W_0 \colon x \leqslant \alpha\}$ с топологией подпространства. Так как все X_α открыты, комбинация $f = \nabla_{\alpha<\omega_1} i_\alpha \colon X \to Y$, где $i_\alpha \colon X_\alpha \to Y$ — вложение, является открытым отображением в силу предложений 2.1.11 и 2.1.15. Каждое пространство X_α удовлетворяет второй аксиоме счетности, поэтому они метризуемы согласно теореме 4.2.9. Тогда, в силу теоремы 4.2.1, пространство X также метризуемо. С другой стороны, пространство $Y = f(X)$ не метризуемо, так как это счетно компактное, но не компактное пространство (см. пример 3.10.16 и теорему 4.1.17). Отметим, что прообразы точек при отображении f все гомеоморфны дискретному пространству $D(\aleph_1)$. ∎

Докажем теперь, что метризуемость — инвариант совершенных отображений. При доказательстве будут использованы следующие две леммы (вторая является важным частным случаем теоремы 5.1.33).

4.4.12. Лемма. *Пусть в каждое открытое покрытие топологического пространства X можно вписать локально конечное замкнутое покрытие. Тогда в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства X. Выберем локально конечное покрытие $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$, вписанное в $\mathcal{U}$. Для каждой точки $x \in X$ выберем ее окрестность V_x, которая пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{A}$. Пусть, далее, $\mathcal{F}$ — локально конечное замкнутое покрытие, вписанное в открытое покрытие $\{V_x\}_{x \in X}$, пусть для любого $s \in S$

$$W_s = X \setminus \bigcup \{F \in \mathcal{F} \colon F \cap A_s = \varnothing\}.$$

Очевидно, что множество W_s открыто и содержит A_s. Более того, для каждого $s \in S$ и любого $F \in \mathcal{F}$ имеем

(6) $W_s \cap F \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A_s \cap F \neq \varnothing$.

Для каждого $s \in S$ возьмем такое $U(s) \in \mathcal{U}$, что $A_s \subset U_s$. Положим $V_s = W_s \cap U(s)$. Семейство $\{V_s\}_{s \in S}$ является открытым покрытием, вписанным в покрытие $\mathcal{U}$. Каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, пересекающуюся не более чем с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{F}$, и каждый элемент покрытия $\mathcal{F}$ пересекается не более чем с конечным числом элементов покрытия $\mathscr{A}$. Поэтому, в силу (6), покрытие $\{V_s\}_{s \in S}$ локально конечно. ∎

4.4.13. Лемма. *Пусть $f: X \to Y$ — совершенное отображение метризуемого пространства X на пространство Y. Тогда в каждое открытое покрытие пространства Y можно вписать открытое локально конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{V}$ — открытое покрытие пространства Y. По теореме Стоуна, в открытое покрытие $\{f^{-1}(V)\}_{V \in \mathscr{V}}$ пространства X можно вписать локально конечное покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$. Применяя теорему 1.5.18, выберем замкнутое покрытие $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s \in S}$ пространства X, такое, что $F_s \subset U_s$ для каждого $s \in S$. Так как $\mathscr{F}$ локально конечно, из 3.10.11 следует, что семейство $\{f(F_s)\}_{s \in S}$ есть локально конечное измельчение покрытия $\mathscr{V}$ пространства Y. Теперь утверждение леммы вытекает из 4.4.12. ∎

4.4.14. Замечание. Заметим, что в доказательстве леммы 4.4.13 использовались только нормальность пространства X и тот факт, что в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

4.4.15. Теорема. *Метризуемость сохраняется при совершенных отображениях.*

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ — совершенное отображение метризуемого пространства X на некоторое пространство Y. Выберем метрику ρ на X и для $i = 1, 2, \ldots$ и каждого $y \in Y$ рассмотрим открытые множества

$$U_i(y) = B(f^{-1}(y), 1/i), \quad W_i(y) = Y \setminus f(X \setminus U_i(y)),$$
$$V_i(y) = f^{-1}(W_i(y)) \subset U_i(y).$$

Отсюда следует, что для $y \in Y$ имеем

(7) $$U_j(y) \subset U_i(y), \quad j \geqslant i.$$

Семейство $\mathscr{W}_i = \{W_i(y)\}_{y \in Y}$ является открытым покрытием пространства Y. Заметим, что для каждого $y \in Y$

(8) $$\{W_i(y)\}_{i=1}^{\infty} \text{ — база } Y \text{ в точке } y.$$

В самом деле, для любой окрестности V точки y имеем $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$. В силу 4.1.14, существует такое i, что $U_i(y) \subset f^{-1}(V)$, откуда следует включение $W_i(y) \subset V$.

Теперь покажем, что

(9) для каждого $y \in Y$ и каждого i найдется такое j, что $W_j(z) \subset W_i(y)$, где $y \in W_j(z)$.

В силу 4.1.14 и (7), существует такое $j \geqslant 2i$, что $U_j(y) \subset \subset V_{2i}(y)$. Рассмотрим такое $z \in Y$, что $y \in W_j(z)$. Тогда $f^{-1}(y) \subset \subset V_j(z) \subset U_j(z)$, т. е. существуют такие $x \in f^{-1}(z)$ и $x' \in f^{-1}(y)$, что $\rho(x, x') < 1/j$. Отсюда следует, что $U_j(y) \cap f^{-1}(z) \neq \varnothing$ и $f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y)$, ибо последнее множество вместе с любой точкой x содержит также $f^{-1}(f(x))$.

Выберем теперь некоторую точку $t \in W_j(z)$. Тогда $f^{-1}(t) \subset \subset U_j(z)$ и для любой точки $x \in f^{-1}(t)$ существует такая точка $x' \in f^{-1}(z)$, что $\rho(x, x') < 1/j \leqslant 1/2i$. Как показано выше, $f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y) \subset U_{2i}(y)$, следовательно, найдется такая точка $x'' \in f^{-1}(y)$, что $\rho(x', x'') < 1/2i$. Поэтому $\rho(x, x'') < 1/i$, откуда следует, что $f^{-1}(t) \subset U_i(y)$, т. е. что $t \in W_i(y)$, и доказательство утверждения (9) завершено.

В силу леммы 4.4.13, в покрытие $\mathscr{W}_i$ пространства Y можно вписать локально конечное покрытие $\mathscr{B}_i$. Из утверждений (8) и (9) вытекает, что объединение $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ — база пространства Y. Следовательно, будучи нормальным по теореме 1.5.20, пространство Y метризуемо по теореме Нагаты — Смирнова. ∎

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия метризуемости замкнутых образов метризуемых пространств.

4.4.16. Лемма Вайнштейна. *Пусть $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение метризуемого пространства X на пространство Y. Тогда для каждого $y \in Y$, такого, что $\chi(y, Y) \leqslant \aleph_0$, множество $\operatorname{Fr} f^{-1}(y)$ — компакт.*

Доказательство. Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — подмножество множества $F = \operatorname{Fr} f^{-1}(y)$, такое, что $|A| = \aleph_0$, и пусть $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ — база пространства Y в точке y. Рассмотрим метрику ρ на пространстве X и для $i = 1, 2, \ldots$ выберем такую точку $x_i' \in \in f^{-1}(V_i) \setminus f^{-1}(y)$, что $\rho(x_i, x_i') < 1/i$. Такая точка обязательно существует, ибо отображение f замкнуто, множества $\{y\}$, $f^{-1}(y)$ замкнуты и потому $x_i \in F \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_i)$. Следовательно, множество $B(x_i, 1/i) \cap f^{-1}(V_i)$ является окрестностью точки x_i. Для множества $B = \{x_1', x_2', \ldots\}$ имеем $y \in \overline{f(B)} \setminus f(B)$; так как f — замкнутое отображение, $B \neq \bar{B}$ и $B^d \neq \varnothing$. Поскольку $\rho(x_i, x_i') < 1/i$, $i = 1, 2, \ldots$, имеем $A^d = B^d \neq \varnothing$. Следовательно, каждое счетное бесконечное подмножество множества F имеет предельную точку. Этот факт, в силу теорем 3.10.3 и 4.1.17, означает, что F — компакт. ∎

4.4.17. Теорема Ханаи — Мориты — Стоуна. *Для любого замкнутого отображения $f\colon X \to Y$ метризуемого пространства X на пространство Y следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство Y метризуемо.*

(ii) *Пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

(iii) *Для каждой точки $y \in Y$ множество* $\operatorname{Fr} f^{-1}(y)$ — *компакт.*

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) очевидна, а (ii)$\Rightarrow$(iii) вытекает из предыдущей леммы. Покажем, что (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть для любого $y \in Y$ множество $A(y) \subset X$ равно $\operatorname{Fr} f^{-1}(y)$, если последнее множество непусто, и является некоторым одноточечным подмножеством множества $f^{-1}(y)$, если $\operatorname{Fr} f^{-1}(y) = \varnothing$, т. е. если $f^{-1}(y)$ — открыто-замкнутое подмножество пространства X. Множество $A = \bigcup_{y \in Y} A(y)$ замкнуто в X, так как $X \setminus A$ — объединение открытых множеств $\operatorname{Int} f^{-1}(y)$ не более чем с одной выброшенной точкой каждое. Сужение $f|A\colon A \to Y$ есть замкнутое отображение множества A на Y. Так как прообразы точек при отображении $f|A$ либо имеют вид $\operatorname{Fr} f^{-1}(y)$, либо суть одноточечные множества, то отображение $f|A$ совершенно. Метризуемость пространства Y следует теперь непосредственно из теоремы 4.4.15. ∎

Теоремы 1.4.16 и 4.4.17 приводят к следующей теореме.

4.4.18 Теорема. *Метризуемость сохраняется открыто-замкнутыми отображениями.* ∎

Заметим, что метризуемость не сохраняется в сторону прообраза при совершенных открытых отображениях, как показывает отождествление в точку любого неметризуемого компакта.

Следующая теорема, последняя в этом параграфе, является следствием теорем 3.7.22, 4.2.1 и 4.4.15.

4.4.19. Теорема. *Пусть топологическое пространство X имеет локально конечное замкнутое покрытие, состоящее из метризуемых подпространств; тогда и само пространство X метризуемо.* ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теорема 4.4.1 была доказана в работе А. Стоуна [1948]. Это одна из самых важных теорем общей топологии. Приведенное нами доказательство заимствовано из работы М. Рудин [1969a]. Нагата и Смирнов доказали теорему 4.4.7 соответственно в [1950] и [1951a]. Теорема 4.4.8 доказана Бингом в [1951]. Дальнейшие метризационные теоремы будут приведены в § 5.4. Теорема 4.4.9 принадлежит Ковальскому и доказана в [1957]: данное здесь доказательство принадлежит Свордсону [1979]. Пример 4.4.10 взят из книги Александрова и Хопфа [1935], а пример 4.4.11 — из работы А. Стоуна [1956]. Теоремы 4.4.15 и 4.4.17 независимо доказаны Моритой и Ханаи в [1956] и А. Стоуном в [1956] (для сепарабельных пространств Уайберн доказал первую из них в [1942], а равносильность условий (i) и (ii) второй теоремы — в [1950]). Лемма 4.4.12 доказана Майклом в [1953], лемма 4.4.13 — Моритой и Ханаи в [1956], а лемма 4.4.16 — Вайнштейном в [1947]. Теорема 4.4.18 доказана Балачандраном в [1955], а теорема 4.4.19 — Нагатой в [1950].

УПРАЖНЕНИЯ

4.4.A. (a) Покажите, что локально конечное открытое покрытие метрического пространства не обязательно σ-дискретно.

Указание. Рассмотрите дискретное пространство $D(\mathfrak{c})$.

(b) Покажите, что пространство X в примере 1.5.7 удовлетворяет второй аксиоме счетности и потому имеет σ-дискретную базу.

(c) Покажите, что T_1-пространство X обладает локально конечной базой, или, что эквивалентно, базой, представимой в виде конечного объединения локально конечных семейств, в том и только том случае, когда X — дискретное пространство.

(d) Рассмотрите псевдометрики $\rho_{i,k}$, определенные в доказательстве метризационной теоремы Нагаты — Смирнова, и заметьте, что семейство $\{f_{i,k}\}_{i,k=1}^{\infty}$ отображений $f_{i,k}\colon X \to X/\rho_{i,k}$, определенных в упр. 4.2.I, разделяет точки и замкнутые множества. Применяя теорему о диагональном отображении, выведите отсюда, что пространство X метризуемо.

4.4.B. Докажите, что каждое метризуемое полной метрикой пространство веса $\leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $[J(\mathfrak{m})]^{\aleph_0}$.

Указание. Заметьте, что вещественная прямая гомеоморфна замкнутому подпространству пространства $[J(\aleph_0)]^2$, и примените лемму 4.3.22.

4.4.C. (a) Докажите, что для каждого метризуемого пространства X веса $\leqslant \mathfrak{c}$ существует взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ на сепарабельное метризуемое пространство Y.

Указание. Сначала рассмотрите пространство $X = J(\mathfrak{c})$, а затем примените теорему 4.4.9.

(b) (Видосич [1972]). Пусть X — тихоновское пространство и существует его взаимно однозначное отображение на метризуемое пространство. Докажите, что тогда каждое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства R^X с компактно-открытой топологией счетно.

Покажите, что в пространстве $R^{\mathfrak{m}}$ каждое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств счетно (ср. со следствием 2.3.18).

Указание. Рассмотрите сначала случай метризуемого пространства X и модифицируйте доказательство теоремы 2.3.17, используя (a) и упр. 3.4.G(b), а затем примените указание к упр. 3.4.G(b).

4.4.D. (a) Непрерывное отображение f: $X \to Y$ называется ***локальным гомеоморфизмом***, если для каждой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность $U(x)$, что $f|U(x)$ — гомеоморфизм окрестности $U(x)$ на открытое подпространство пространства Y.

Установите, что каждое открытое отображение f: $X \to Y$, определенное на хаусдорфовом пространстве X, при котором прообразы всех точек — конечные множества одинаковой мощности, является локальным гомеоморфизмом.

(b) (Архангельский [1966]). Покажите, что каждый локальный гомеоморфизм f: $X \to Y$, определенный на хаусдорфовом пространстве X, при котором прообразы всех точек конечны и состоят из одного и того же числа точек, есть замкнутое отображение.

(c) Покажите, что если существует открытое отображение f: $X \to Y$ метризуемого пространства X на пространство Y, при котором прообразы всех точек конечны и состоят из одного и того же числа точек, то пространство Y метризуемо.

4.4.E. (a) Примените метризационную теорему Нагаты — Смирнова для решения упр. 4.4.D(c).

(b) Примените метризационную теорему Нагаты — Смирнова для выполнения упр. 4.3.E(d).

Указание. Для некомпактного метризуемого пространства X определим такую последовательность x_1, x_2, ... его точек, что для некоторой метрики ρ на пространстве X имеем $\rho(x_i, x_j) \geqslant 1$ при $i \neq j$. Присоедините к пространству X точку x_0 таким образом, чтобы пространство $X \cup \{x_0\}$ было метризуемым и $x_0 = \lim x_i$.

4.4.F. Топологическое пространство X называется ***локально сепарабельным в точке*** $x \in X$, если x имеет сепарабельную окрестность. Топологическое пространство X называется ***локально сепарабельным***, если оно локально сепарабельно в каждой своей точке $x \in X$.

(a) Проверьте, что еж $J(\mathfrak{c})$ не является локально сепарабельным.

(b) (Урысон [1927a]). Приведите пример метризуемого пространства веса $\mathfrak{c}$, не являющегося локально сепарабельным ни в какой точке.

(c) (Александров [1924b]). Покажите, что если X — локально сепарабельное метризуемое пространство, то $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$, где все пространства X_s сепарабельны (ср. с упр. 5.3.A(b)).

Указание. Возьмите локально конечное открытое покрытие $\mathcal{U}$, вписанное в некоторое открытое покрытие пространства X сепарабельными подмножествами. Определите отношение эквивалентности E на $\mathcal{U}$, полагая UEU', если существует последовательность $U_0, U_1, \ldots, U_k$ элементов покрытия $\mathcal{U}$, такая, что $U_0 = U$, $U_k = U'$ и $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ для $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Для каждого класса эквивалентности $\mathcal{U}_s \subset \mathcal{U}$ отношения E рассмотрите объединение $X_s = \bigcup \mathcal{U}_s$.

(d) (Степанек и Вопенка [1967]). Покажите, что каждое метризуемое пространство X, не являющееся локально сепарабельным ни в какой своей точке, может быть представлено как объединение возрастающей трансфинитной последовательности $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots$, $\alpha < \omega_1$, состоящей из нигде не плотных множеств.

Указание. Пусть $\{U_s\}_{s \in S}$ есть σ-локально конечная база пространства X, и пусть $U_{s,1}, U_{s,2}, \ldots, U_{s,\alpha}, \ldots$, $s \in S$, $\alpha < \omega_1$, — семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств, содержащихся в U_s. Рассмотрите множества $A_\alpha = X \setminus \bigcup\limits_{s \in S} \bigcup\limits_{\beta > \alpha} U_{s,\beta}$.

(e) (Степанек и Вопенка [1967]). Покажите, что каждое метризуемое пространство без изолированных точек может быть представлено как объединение семейства нигде не плотных множеств мощности $\leqslant \mathfrak{c}$.

Указание. Примените (c) и (d).

4.4.G. Покажите, что лемма Вайнштейна легко следует из упр. 2.1.C(d) и 4.1.E(a).

4.4.H. (a) (Архангельский [1960]; для локально компактных пространств — Смирнов [1956a]). Покажите, что если полное в смысле Чеха пространство X имеет счетное покрытие, состоящее из сепарабельных метризуемых пространств, то пространство X метризуемо.

Указание. См. упр. 3.9.E(c).

(b) Покажите, что условие сепарабельности в (a) существенно даже в случае двухэлементного покрытия.

4.4.I. Покажите, что если существует замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ метризуемого пространства X на пространство Y точечно счетного типа (в частности, на полное по Чеху пространство Y), то Y метризуемо.

Указание. Примените упр. 3.1.F(b).

4.4.J (Морита [1955]). Докажите, что каждое метризуемое пространство X веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ есть непрерывный образ некоторого подпространства бэровского пространства $B(\mathfrak{m})$ при совершенном отображении (ср. с указанием к упр. 4.2.D(a)).

Указание. Применяя теорему Стоуна, определите последовательность $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ локально конечных замкнутых покрытий пространства X, таких, что $\mathcal{F}_i = \{F_{s,i}\}_{s \in S}$, $|S| = \mathfrak{m}$ и $\delta(F_{s,i}) \leqslant 1/i$ для каждого $s \in S$. Рассмотрите подмножество $T \subset B(\mathfrak{m}) = S^0$, состоящее из всех точек $\{s_i\}$, таких, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_{s_i, i} \neq \varnothing$, и поставьте в соответствие точке $\{s_i\} \in T$ единственную точку пересечения $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_{s_i, i} \subset X$. Покажите, что $f^{-1}(x) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \{s \in S : x \in F_{s,i}\}$ для каждого $x \in X$.

4.4.K (Даукер [1947a]). Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечный кардинал и S — множество мощности $\mathfrak{m}$. Рассмотрим множество всех вещественных функций x, определенных на S и таких, что $|\{s \in S: x_s \neq 0\}| \leqslant \aleph_0$ и $\sum\limits_{f \in S} x_s^2 < \infty$, где x_s — значение функции x на s; формула $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{s \in S} (x_s - y_s)^2}$ определяет метрику на этом множестве. Полученное так метрическое пространство не зависит (с точностью до изометрии) от выбора множества S. Оно называется *гильбертовым пространством веса* $\mathfrak{m}$ и обозначается через $H(\mathfrak{m})$. Очевидно, что гильбертово пространство H, определенное в примере 4.1.7, совпадает с $H(\aleph_0)$.

Докажите, что гильбертово пространство $H(\mathfrak{m})$ универсально для всех метризуемых пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Замечание. Даукер в [1947a] получил этот результат при дополнительном предположении паракомпактности; тот факт, что все метризуемые пространства паракомпактны, не был еще известен.

4.5. ЗАДАЧИ

Расширение открытых и замкнутых множеств

4.5.1 (Куратовский [1948a]). (a) Покажите, что для каждого семейства $\{V_s\}_{s \in S}$ открытых подмножеств подпространства M метризуемого пространства X существует семейство $\{U_s\}_{s \in S}$ открытых подмножеств пространства X, такое, что $V_s = M \cap U_s$ при всех $s \in S$ и для каждого конечного множества $S_0 \subset S$, удовлетворяющего условию $\bigcap\limits_{s \in S_0} V_s = \varnothing$, мы имеем $\bigcap\limits_{s \in S_0} U_s = \varnothing$.

Указание. Положите $U_s = \{x \in X: \rho(x, V_s) < \rho(x, M \setminus V_s)\}$, где ρ — метрика на пространстве X.

(b) Покажите, что для каждого семейства $\{A_s\}_{s \in S}$ замкнутых подмножеств подпространства M метризуемого пространства X существует семейство $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых подмножеств пространства X, такое, что $A_s = M \cap F_s$ при всех $s \in S$ и для каждого конечного множества $S_0 \subset S$, удовлетворяющего соотношению $\bigcup_{s \in S_0} A_s = M$, мы имеем $\bigcup_{s \in S_0} F_s = X$.

Пространство $\mathbf{R}^n$ однородно относительно счетных всюду плотных подмножеств

4.5.2 (Брауэр [1913a]; неявно — Фреше [1910]). Докажите, что для любых двух счетных всюду плотных подмножеств A, B евклидова n-мерного пространства R^n существует такой гомеоморфизм $f\colon R^n \to R^n$, что $f(A) = B$ (ср. с упр. 4.3.H(a)).

Указание. Говорят, что множество $A \subset R^n$ находится *в общем положении относительно координатных осей*, если для любой пары различных точек $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\} \in A$ разность $x_i - y_i$ не обращается в нуль при $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите сначала, что для каждого счетного множества $A \subset R^n$ существует гомеоморфизм R^n на себя, при котором A переходит в некоторое множество в общем положении относительно координатных осей. Затем покажите, что элементы двух счетных бесконечных множеств в общем положении относительно координатных осей можно упорядочить в две последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, где $x_j = \{x_i^j\}$ и $y_j = \{y_i^j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, таким образом, чтобы разности $x_i^j - x_i^k$ и $y_i^j - y_i^k$ имели одинаковый знак для $j, k = 1, 2, \ldots$ и $i = 1, 2, \ldots, n$.

Топология поточечной сходимости и метрики

4.5.3. (a) Установите, что пространство I^I с топологией поточечной сходимости не метризуемо.

Указание. Примените упр. 2.1.C(a).

(b) Определите две топологии $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ на счетном множестве X таким образом, чтобы пространство $(X, \mathcal{O}_1)$ было метризуемым, а пространство $(X, \mathcal{O}_2)$ — нет и чтобы $x = \lim x_i$ относительно топологии $\mathcal{O}_1$ в том и только том случае, когда $x = \lim x_i$ относительно топологии $\mathcal{O}_2$.

(c) (Форт [1951]). Докажите, что не существует метрики ρ на множестве I^I, обладающей тем свойством, что $\lim \rho(f, f_i) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = \lim f_i$ относительно топологии поточечной сходимости.

Указание (Дугунджи [1966]). Допустим, что существует метрика ρ на I^I, обладающая указанным выше свойством. Для каждого $x \in I$ и $i = 1, 2, \ldots$ положим $d_i(x) = \sup\{f(x)\colon f \in I^I$ и $\rho(f, f_0) < 1/i\}$, где $f_0 \in I^I$ тождественно равна нулю. Покажите, что $\lim d_i(x) = 0$ для каждого $x \in X$ и что для некоторого числа i_0 существуют последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек отрезка I и последовательность $U_1, U_2, \ldots$ открытых подмножеств отрезка I, такие, что $d_{i_0}(x_i) < 1$, $x_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots$, и $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Рассмотрите последовательность $f_1, f_2, \ldots$, где f_i ($i = 1, 2, \ldots$) — непрерывное отображение отрезка I в себя, такое, что $f_i(I \setminus U_i) = \{0\}$ и $f_i(x_i) = 1$.

Расширяющие и сжимающие отображения метрических пространств

4.5.4 (Фрейденталь и Гуревич [1936]). (a) Покажите, что если (X, ρ) — вполне ограниченное пространство, то любое отображение f пространства X в себя, удовлетворяющее условию $\rho(x, y) \leqslant \rho(f(x), f(y))$ при всех $x, y \in X$, является изометрией (ср. с упр. 4.3.D).

Указание. Установите, что f обладает свойством, упомянутым в указании к упр. 4.3.D(a), и примените этот факт к отображению $f \times f$.

(b) Покажите, что если (X, ρ) — вполне ограниченное пространство, то каждое отображение f пространства X в себя, удовлетворяющее условию $\rho(x, y) \geqslant \rho(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in X$ и такое, что $f(X)$ всюду плотно в X, является изометрией.

Указание. Рассмотрите продолжение f до отображения $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ — пополнение X, и примените (a).

Всякое плотное в себе метризуемое полной метрикой пространство содержит канторово множество

4.5.5 (Хаусдорф [1914]). (a) Покажите, что каждое непустое плотное в себе метризуемое полной метрикой пространство содержит подпространство, гомеоморфное канторову множеству.

Указание. Пусть ρ — полная метрика на плотном в себе пространстве X. Для каждой последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_k$, состоящей из нулей и единиц, определите по индукции непустое открытое множество $V_{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset X$, диаметр которого меньше $1/k$, такое, что

$$\overline{V}_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} \cap \overline{V}_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} = \varnothing \quad \text{и} \quad \overline{V}_{i_1 i_2 \ldots i_k i} \subset V_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \qquad i = 0, 1.$$

(b) Покажите, что каждое сепарабельное метризуемое полной метрикой пространство либо счетно, либо имеет мощность $\mathfrak{c}$.

Указание. Примените задачу 1.7.11 и пункт (a) или установите, что этот результат непосредственно следует из задачи 3.12.11(b).

Прямая конструкция пополнения

4.5.6 (Хаусдорф [1914]). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Определим отношение эквивалентности E на множестве всех последовательностей Коши в пространстве (X, ρ), полагая $\{x_i\} E \{y_i\}$ в том и только том случае, если $\lim \rho(x_i, y_i) = 0$.

Покажите, что формула $\tilde{\rho}([\{x_i\}], [\{y_i\}]) = \lim \rho(x_i, y_i)$ определяет метрику на множестве $\tilde{X}$ всех классов эквивалентности отношения E. Каждой точке $x \in X$ поставьте в соответствие точку $[\{x_i\}] \in \tilde{X}$, где $x_i = x$, $i = 1, 2, \ldots$, и покажите, что $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ — пополнение пространства (X, ρ).

Борелевские множества II (см. задачи 1.7.5 и 7.4.22)

4.5.7. Будем говорить, что метризуемое пространство X — *абсолютно мультипликативного* (*аддитивного*) *класса* α, где $\alpha < \omega_1$, если для каждого гомеоморфного вложения $h\colon X \to Y$ пространства X в метризуемое пространство Y образ $h(X)$ является множеством мультипликативного (аддитивного) класса α в Y.

(a) (Лаврентьев [1924]). Докажите, что для каждого $\alpha > 0$ (каждого $\alpha > 1$) метризуемое пространство X — абсолютно мультипликативного (аддитивного) класса α в том и только том случае, если существует гомеоморфное вложение $h\colon X \to Y$ пространства X в метризуемое полной метрикой пространство Y, такое, что образ $h(X)$ есть множество мультипликативного (аддитивного) класса α в Y.

Указание. Примените теорему Лаврентьева.

(b) Покажите, что (a) не имеет места ни для мультипликативного класса 0, ни для аддитивных классов 0 и 1. Покажите, что метризуемое пространство X — абсолютно мультипликативного (аддитивного) класса 0 в том и только том случае, если X — компакт (пусто).

(c) Покажите, что метризуемое сепарабельное пространство X — абсолютно аддитивного класса 1 в том и только том случае, когда X σ-компактно.

Замечание. А. Стоун доказал в [1962], что метризуемое пространство X — абсолютно аддитивного класса 1 в том и только том случае, когда X может быть представлено как счетное объединение локально компактных, или, что равносильно, замкнутых локально компактных подпространств.

4.5.8. (a) (Майкл [1954]). Докажите, что в метризуемом пространстве X объединение локально конечного семейства, состоящего из множеств мультипликативного (аддитивного) класса α, есть множество того же класса.

Указание. Примените теорему Стоуна и трансфинитную индукцию.

Замечание. Тот же результат (и доказательство) имеет место, если X — совершенно нормальное паракомпактное пространство.

(b) (Монтгомери [1935]). Покажите, что если каждая точка подмножества A метризуемого пространства X обладает такой окрестностью U в X, что $A \cap U$ — множество мультипликативного класса $\alpha > 0$ (аддитивного класса α) в подпространстве U пространства X, то A — множество того же класса (ср. с задачей 2.7.1).

Указание (Майкл [1954]). Примените (а) и тот факт, что X обладает σ-локально конечной базой.

(c) (Монтгомери [1935]). Докажите, что если X и Y — метризуемые пространства и $f: X \to Y$ — измеримое отображение класса α, то график $G(f)$ есть множество мультипликативного класса α в произведении $X \times Y$.

Указание (Энгелькинг [1967]). Покажите, что для любой базы $\{B_s\}_{s \in S}$ пространства Y существует семейство $\{A_s\}_{s \in S}$ открытых подмножеств пространства Y, такое, что $(X \times Y) \setminus G(f) = \bigcup_{s \in S} (f^{-1}(A_s) \times B_s)$. Примените (а) и тот факт, что пространство Y имеет σ-локально конечную базу.

Диадические пространства II (см. задачу 3.12.12)

4.5.9. (а) (Серпинский [1928]). Покажите, что каждое непустое замкнутое подмножество A канторовского множества C есть ретракт пространства C.

Указание (Халмош [1963]). Покажите, что метрика σ на множестве $D^{\aleph_0}$, определенная формулой

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^i} |x_i - y_i|, \quad \text{где} \quad x = \{x_i\}, \quad y = \{y_i\},$$

индуцирует топологию на декартовом произведении. Отметьте, что если $\sigma(x, y) = \sigma(x, z)$, то $y = z$, и выведите отсюда, что для каждого $x \in D^{\aleph_0}$ существует ровно одна точка $a \in A$, такая, что $\sigma(x, a) = \sigma(x, A)$.

(b) (Александров [1927] (объявлено в [1925]), Хаусдорф [1927]). Покажите, что из (а) и теоремы 3.2.2 вытекает, что каждый непустой метризуемый компакт есть непрерывный образ канторова множества, т. е. является диадическим пространством (ср. с теоремой 3.2.2 и задачей 3.12.12(а)).

4.5.10 (Ефимов [1963]). Покажите, что каждое непустое замкнутое G_δ-множество $F \subset D^{\mathfrak{m}}$ есть ретракт пространства $D^{\mathfrak{m}}$. Покажите, что диадичность наследуется непустыми замкнутыми G_δ-множествами.

Указание (Энгелькинг и Пелчинский [1963]). Выберите функцию $f: D^{\mathfrak{m}} \to R$, такую, что $F = f^{-1}(0)$, примените упр. 3.2.H(а) и задачу 4.5.9(а).

4.5.11 (Ефимов [1963a]). Покажите, что каждая диадическая компактификация cX метризуемого пространства X удовлетворяет второй аксиоме счетности, т. е. метризуема.

Указание (Энгелькинг и Пелчинский [1963]). Заметьте сначала, что пространство X сепарабельно, затем примените упр. 3.5.F и задачу 3.12.12(c).

Можно также использовать задачу 3.12.12(g) и упр. 2.1.C(a).

Σ-произведения III (см. задачи 2.7.13, 2.7.14, 3.12.23 и упр. 3.10.D)

4.5.12. (a) (Гулько [1977], М. Рудин [1977]). Пусть $\Sigma(a)$ есть Σ-произведение метризуемых пространств $\{X_s\}_{s\in S}$, где $a=\{a_s\}\in\prod_{s\in S}X_s$. Докажите, что для каждого дискретного семейства $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств пространства $\Sigma(a)$ существует открытое σ-локально конечное покрытие $\mathcal{U}$ пространства $\Sigma(a)$, такое, что замыкание каждого элемента $\mathcal{U}$ пересекается не более чем с одним элементом семейства $\mathcal{F}$.

Указание. Для каждого пересечения $U=\Sigma(a)\cap\prod_{s\in S}U_s$ пространства $\Sigma(a)$ с элементом $\prod_{s\in S}U_s$ канонической базы $\mathcal{B}$ произведения $\prod_{s\in S}X_s$ положим $S(U)=\{s\in S\colon U_s\neq X_s\}$. Для каждого $x=\{x_s\}=\Sigma(a)$ пусть $\{s\in S\colon x_s\neq a_s\}=\{s_{x,1}, s_{x,2}, \ldots\}$, и для каждого открытого подмножества $U\subset\Sigma(a)$, пересекающегося более чем с одним элементом семейства $\mathcal{F}$, пусть $A(U)\subset U$ состоит из двух точек, выбранных в двух различных элементах семейства $\mathcal{F}$. Для любого $s\in S$ определим последовательность $\mathcal{U}_{s,1}$, $\mathcal{U}_{s,2}, \ldots$ локально конечных открытых покрытий пространства X_s, такую, что каждый элемент покрытия $\mathcal{U}_{s,i}$ имеет диаметр меньше $1/i$ и может быть представлен как объединение элементов покрытия $\mathcal{U}_{s,i+1}$, и положим $\mathcal{B}_i=\Big\{U=\Sigma(a)\cap\prod_{s\in S}U_s\colon\varnothing\neq\prod_{s\in S}U_s\in\mathcal{B}$ и $U_s\in\mathcal{U}_{s,i}$ для $s\in S(U)\Big\}$. Допустим, что $|\mathcal{F}|\geqslant 2$, и рассмотрим семейство $\mathcal{S}$ всех конечных последовательностей $U_0, U_1, \ldots, U_n$ открытых подмножеств пространства $\Sigma(a)$, где $\Sigma(a)=U_0\supset U_1\supset\ldots\supset U_n$, $U_i\in\mathcal{B}_i$ для $i=1, 2, \ldots, n$. Каждое U_i при $i\leqslant n-1$ пересекается более чем с одним элементом семейства $\mathcal{F}$ и $S(U_i)=\{s_{x,j}\colon x\in A(U_0)\cup A(U_1)\cup\ldots\cup A(U_{i-1}),\ j=1, 2, \ldots, i\}$ для $i=1, 2, \ldots, n$. Рассмотрите семейство $\mathcal{U}_0$, состоящее из всех последних элементов U_n последовательностей из $\mathcal{S}$, которые пересекают не более одного элемента семейства $\mathcal{F}$, и покажите, что $\mathcal{U}_0$ есть σ-локально конечное открытое покрытие пространства $\Sigma(a)$.

Для доказательства того, что $\mathcal{U}_0$ — покрытие, допустим противное, т. е. что существует точка $x=\{x_s\}\in\Sigma(a)\setminus\bigcup\mathcal{U}_0$. Рассмотрим бесконечную последовательность $U_0, U_1, U_2, \ldots$, такую, что $x\in U_i$ для $i=0, 1, 2, \ldots$ и $U_0, U_1, \ldots, U_n$ принадлежат множеству $\mathcal{S}$ для $n=0, 1, 2, \ldots$. Определите $x'=\{x'_s\}\in\Sigma(a)$, положив $x'_s=x_s$ для $s\in\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}S(U_i)$ и $x'_s=a_s$ в противном случае, и получите противоречие, установив, что $x'\in\overline{\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}}$, где $a_i\in A(U_i)\cap\bigcup\{F\in\mathcal{F}\colon x'\notin F\}$. Затем покажите по индукции, что семейство последних элементов последовательностей из $\mathcal{S}$ длины $n+1$ является локально конечным для $n=0, 1, 2, \ldots$. Чтобы получить $\mathcal{U}$, заметьте, что элементы покрытия $\mathcal{U}_0$ функционально открыты. Замените каждый из них счетным множеством подходящих открытых множеств.

(b) (Гулько [1977], М. Рудин [1977]; для пространств, метризуемых полной метрикой, — Корсон [1959]). Докажите, что любое Σ-произведение метризуемых пространств нормально.

Указание. Пусть $\mathcal{F}=\{F_1, F_2\}$, где F_1, F_2 — замкнутые и непересекающиеся множества. Примените (a), определите локально конечное подпокрытие $\mathcal{A}$, вписанное в покрытие $\mathcal{U}$ (см. лемму 5.1.10), и рассмотрите множества $U_i=X\setminus\bigcup\{\bar{A}\colon A\in\mathcal{A}$ и $\bar{A}\cap F_i=\varnothing\}$ для $i=1, 2$.

Замечание. Те же рассуждения показывают, что любое Σ-произведение метризуемых пространств коллективно нормально.

Продолжение замкнутых и открытых отображений

4.5.13. (a) (Вайнштейн [1952]). Непрерывное отображение $f\colon X\to Y$ *замкнуто в точке* $y\in Y$, если для каждого открытого множества $U\in X$, содержащего $f^{-1}(y)$, в Y существует окрестность V точки y, такая, что $f^{-1}(V)\subset U$. Множество всех точек пространства Y, в которых отображение $f\colon X\to Y$ замкнуто, обозначается через $C(f)$.

Покажите, что $C(f)\cap(\overline{f(X)}\setminus f(X))=\varnothing$ и $B\cap C(f)\subset C(f_B)$ для каждого $B\subset Y$. Заметьте, что $C(f|A)\subset C(f)$ для каждого непрерывного отображения $f\colon X\to Y$ нормального пространства X в T_1-пространство Y, где A — всюду плотное множество в X.

(b) (Энгелькинг [1971]). Докажите, что для каждого непрерывного отображения $f\colon X\to Y$, где X — пространство, метризуемое полной метрикой, а Y — хаусдорфово пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, множество $C(f)$ есть G_δ-множество в Y.

Указание. Заметьте, что для каждого $y\in C(f)$ множество $\mathrm{Fr}\,f^{-1}(y)$ — компакт. Возьмите полную метрику ρ на пространстве X и для $i=1, 2, \ldots$ рассмотрите множество W_i, состоящее из всех точек $y \in Y$, имеющих окрестность W с тем свойством, что каждое множество $K \subset f^{-1}(W)$, такое, что $\rho(x, x') \geqslant 1/i$ и $f(x) \neq f(x')$ для любой пары различных точек множества K, конечно. Покажите, что $C(f) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} W_i$.

(c) (Вайнштейн [1952] (объявлено в [1947])). Докажите, что если f: $X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X, метризуемого полной метрикой, в хаусдорфово пространство Y, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, то для всякого множества $A \subset X$, такого, что сужение $f|A$: $A \to f(A)$ замкнуто, найдется такое G_δ-множество $B \subset X$, что $A \subset B$ и сужение $f|B$: $B \to f(B)$ замкнуто. Заметьте, что если сужение $f|A$ совершенно, то существует такое G_δ-множество $B \subset X$, что $A \subset B$ и сужение $f|B$ совершенно.

Указание. Примените (a) и (b).

(d) Пусть X и Y — пространства, метризуемые полной метрикой, и пусть $A \subset X$ и $C \subset Y$ — произвольные подпространства. Выведите из (c), что любое замкнутое отображение f: $A \to C$ подпространства A на C продолжается до замкнутого отображения F: $B \to D$ подпространства B на подпространство D, где $A \subset B \subset X$, $C \subset D \subset Y$ и B есть G_δ-множество в X. Заметьте, что если f — совершенное отображение, то существуют такие B и D, что F: $B \to D$ — также совершенное отображение.

Замечание. Из теорем 4.3.23, 4.3.24 и задачи (e) ниже вытекает, что D есть G_δ-множество в Y.

(e) (Вайнштейн [1952] (объявлено в [1947])). Докажите, что если метризуемое пространство Y является непрерывным образом пространства X, метризуемого полной метрикой, при замкнутом отображении f, то Y также метризуемо полной метрикой.

Указание. Примените (a) и (b); можно также воспользоваться теоремами 4.3.26 и 3.9.10 и сузить замкнутое отображение до совершенного отображения, как при доказательстве теоремы 4.4.17.

4.5.14. (a) (Мазуркевич [1932]). Докажите, что если f: $X \to Y$ — непрерывное отображение сепарабельного пространства X, метризуемого полной метрикой, в метризуемое пространство Y, то для каждого множества $A \subset X$, такого, что сужение $f|A$: $A \to f(A)$ открыто, существует G_δ-множество $B \subset X$, такое, что $A \subset B$ и сужение $f|B$: $B \to f(B)$ открыто.

Указание (Хаусдорф [1934]). Без ограничения общности можно считать, что $\bar{A} = X$ и $\bar{C} = Y$, где $C = f(A)$. Возьмем полную метрику ρ на пространстве X и любую метрику σ на пространстве Y. Для фиксированной счетной базы $\mathscr{B}$ пространства X положим $\mathscr{B}_k = \{U \in \mathscr{B}: \delta(U) < 1/k$ и $\delta(f(U)) < 1/k\}$. Для каждой последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_k$ натуральных чисел определите по индукции множество $U_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathscr{B}_k$, такое, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad U_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{i_1 i_2 \ldots i_k i} \quad \text{и}$$
$$\bar{U}_{i_1 i_2 \ldots i_k i} \subset U_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Выберите открытые множества $V_{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset Y$ диаметра $< 1/k$, удовлетворяющие соотношениям

$$f(A \cap U_{i_1 i_2 \ldots i_k}) = C \cap V_{i_1 i_2 \ldots i_k} \quad \text{и} \quad V_{i_1 i_2 \ldots i_k i} \subset V_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$
$$i = 1, 2, \ldots .$$

Пусть далее

$$W = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \quad \text{и} \quad W_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{i_1 i_2 \ldots i_k i}.$$

Установите, что

$$E = (Y \setminus W) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{\infty} (V_{i_1 i_2 \ldots i_k} \setminus W_{i_1 i_2 \ldots i_k})$$

есть F_σ-множество, не пересекающееся с C. Рассмотрите множество

$$B = f^{-1}(Y \setminus E) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{\infty} U_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cap f^{-1}(V_{i_1 i_2 \ldots i_k}) \right).$$

(b) Пусть X — сепарабельное пространство, метризуемое полной метрикой, Y — пространство, метризуемое полной метрикой, и $A \subset X$, $C \subset Y$ — произвольные подпространства. Выведите из (a), что каждое открытое отображение $f\colon A \to C$ подпространства A на C продолжается до открытого отображения $F\colon B \to D$ подпространства B на D, где $A \subset B \subset X$, $C \subset D \subset Y$ и B есть G_δ-множество в X.

Замечание. Из задачи 5.5.8(d) и теорем 4.3.23, 4.3.24 вытекает, что D есть G_δ-множество в Y.

(c) (Р. Поль [1981]). Докажите, что предположение о сепарабельности пространства X в (a) и (b) существенно.

Указание. Пусть Q — множество всех рациональных чисел, $P = R \setminus Q$ и $S = D(\mathfrak{c})$. Пусть далее $\{C_s\}_{s \in S}$ — семейство всех счетных всюду плотных подмножеств пространства P. Рассмотрите подпространство $X = \{(s, t) \in S \times R\colon\ t \in R \setminus C_s\} \subset S \times R$ и отображение $f\colon X \to R$, определенное формулой $f(s, t) = t$. Покажите, что сужение $f \mid A$, где $A = S \times Q$, открыто. Рассмотрите любое G_δ-множество $B \subset X$, такое, что $A \subset B$. Покажите, что существует G_δ-множество $C \subset R$, такое, что $Q \subset C \subset f(B)$, и рассмотрите множество $f(B \cap [\{s\} \times (R \setminus C_s)])$, где $C_s \subset C$.

(d) Докажите, что если $X \to Y$ — непрерывное отображение метризуемого пространства X в метризуемое пространство Y, то для каждого множества $A \subset X$, такого, что сужение $f|A$: $A \to f(A)$ открыто и $f(A)$ есть G_δ-множество в Y, найдется такое G_δ-множество $B \subset X$, что $A \subset B$ и сужение $f|B$: $B \to f(B)$ открыто.

Указание. Можно считать, что $f(A) = Y$.

Метризуемость компактов и счетно компактных пространств

4.5.15. (а) (Катетов [1948]). Покажите, что компакт X метризуем в том и только том случае, когда произведение $X \times X \times X$ наследственно нормально (ср. с упр. 4.2.В).

Указание. Используйте задачу 2.7.15(а) и упр. 4.2.В.

Замечание. Как показал Никош в [1977], существование неметризуемых компактов X, таких, что произведение $X \times X$ наследственно нормально, совместимо с аксиомами теории множеств.

(b) (Хабер [1976]). Покажите, что предположение о компактности в (а) можно ослабить до счетной компактности.

Указание. См. задачу 3.12.12(е).

Произведения с метризуемым сомножителем

4.5.16. (а) (Майкл [1953]). Докажите, что произведение $X \times Y$ совершенного пространства X и метризуемого пространства Y есть совершенное пространство.

Указание. Воспользуйтесь тем фактом, что пространство Y имеет σ-локально конечную базу.

(b) (Морита [1963]). Докажите, что произведение $X \times Y$ совершенно нормального пространства X и метризуемого пространства Y совершенно нормально.

Указание. Примените упр. 1.5.К.

Замечание. В примере 5.1.32 будет показано, что нормальность и наследственная нормальность не сохраняются при умножении на метризуемое пространство.

(с) (Бурбаки [1958], Дьедонне [1958]; объявлено А. Стоуном [1948]). Докажите, что произведение $X \times Y$ счетно компактного нормального пространства X и метризуемого пространства Y нормально.

Указание. Модифицируйте доказательство леммы 5.2.7; примените теорему 3.10.7.

Замечание. Тот же результат (и доказательство) имеет место, если Y — паракомпактное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности (ср. с примером 5.1.40).

(d) Уиллард [1971]). Докажите, что произведение $X \times Y$ наследственно линделёфова пространства X и сепарабельного метризуемого пространства Y является наследственно линделёфовым пространством.

Указание. Примените (a) и следствие 3.8.10.

Замечание. В работе [1964] Морита описал топологические пространства, произведения которых с любым метрическим пространством нормальны.

Сохранение метризуемости при открытых и факторных отображениях

4.5.17 (А. Стоун [1956]). Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение локально сепарабельного метризуемого пространства X на регулярное пространство Y и все прообразы точек при отображении f сепарабельны, то пространство Y метризуемо (ср. с задачей 5.5.8(d)).

Указание. Пусть $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$, где все пространства X_s сепарабельны (ср. с упр. 4.4.F(b)). Определите отношение эквивалентности E на множестве S, полагая sEs', если существует такая последовательность $s_0, s_1, \ldots, s_k$, что $s_0 = s$, $s_k = s'$ и $f(X_{s_i}) \cap f(X_{s_{i+1}}) \neq \varnothing$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Установите, что объединение X_s, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности отношения E, образуют сепарабельные подпространства пространства X. Образы этих подпространств при отображении f открыты и попарно не пересекаются.

4.5.18 (Чобан [1966]; для сепарабельных X — А. Стоун [1956]). Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — факторное отображение метризуемого пространства X на сепарабельное регулярное пространство Y, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, и все прообразы точек при отображении f — сепарабельные подпространства, то пространство Y метризуемо.

Указание. Покажите, что для любого счетного всюду плотного множества $B \subset Y$ подпространство $A = f^{-1}(B) \subset X$ сепарабельно. Выберите для пространства A счетную базу $\mathscr{B}$, замкнутую относительно конечных объединений, и докажите, что семейство $\{\operatorname{Int}\overline{f(U)}\colon U \in \mathscr{B}\}$ — база пространства Y.

Продолжение функций и метрик

4.5.19. (a) (Дугунджи [1951]; для сепарабельных X — Борсук [1933]). Пусть X — метризуемое пространство и M — его замкнутое подпространство. Докажите, что для каждого непрерывного отображения $f\colon M \to R$ можно задать его непрерывное продолжение $e(f)=F\colon X\to R$ таким образом, что

$$\sup_{x\in X}|[e(f)](x)|=\sup_{x\in M}|f(x)|$$

при всех $f\colon M\to R$ и

$$e(t_1f_1+t_2f_2)=t_1e(f_1)+t_2e(f_2),$$

где $[tf](x)=t\cdot f(x)$, при всех f_1, $f_2\colon M\to R$ и вещественных t_1, t_2.

Указание (Дугунджи [1951], Аренс [1952]). Выберем метрику ρ на пространстве X и локально конечное открытое подпокрытие $\{V_s\}_{s\in S}$, вписанное в покрытие $\left\{B\left(x, \frac{1}{4}\rho(x, M)\right)\right\}_{x\in X\setminus M}$ подпространства $X\setminus M$. Для любого $s\in S$ выберем такую точку $x_s\in X\setminus M$, что $V_s\subset B\left(x_s, \frac{1}{4}\rho(x_s, M)\right)$, и такую точку $a_s\in M$, что $\rho(a_s, x_s)<\frac{5}{4}\rho(x_s, M)$. Используя теорему 1.5.18, определим функции $g_s\colon X\setminus M\to I$, такие, что $g_s(X\setminus V_s)\subset\{0\}$ для любого $s\in S$ и $\sum\limits_{s\in S}g_s(x)=1$ для любого $x\in X\setminus M$; положим

$$[e(f)](x)=\begin{cases} f(x) & \text{при}\quad x\in M,\\ \sum\limits_{s\in S}f(a_s)g_s(x) & \text{при}\quad x\in X\setminus M.\end{cases}$$

Для доказательства непрерывности $e(f)$ заметьте, что для каждого $a\in M$ и любого $x\in V_s$ имеет место неравенство $\rho(a, a_s)<3\rho(a, x)$.

(b) (Дугунджи [1951]). Пусть X — метризуемое пространство и M — его замкнутое подпространство. Докажите, что для каждого непрерывного отображения $f\colon M\to C^*(Y)$, где $C^*(Y)$ — кольцо всех ограниченных непрерывных вещественных функций, определенных на пространстве Y, с топологией, индуцированной метрикой $\hat{\sigma}$, определенной формулой (7) § 4.2, где σ — естественная метрика вещественной прямой, существует продолжение $F\colon X\to C^*(Y)$ отображения f на все пространство X.

Указание. Следуйте конструкции, предложенной в предыдущем указании, и определите F по формуле, задающей $e(f)$.

Замечание. Подобная же конструкция проходит для линейного продолжения функций со значениями в любом локально выпуклом топологическом векторном пространстве.

(c) (Гемба и Семадени [1960]). Покажите, что не существует оператора продолжения e, задающего для каждой непрерывной функции $f\colon \beta N\setminus N\to R$ некоторое продолжение $e(f)\colon \beta N\to R$ таким образом, что

$$\sup_{x\in\beta N}|[e(f)](x)|=\sup_{x\in\beta N\setminus N}|f(x)|$$

при всех f: $\beta N \setminus N \to R$ и

$$e(f_1 + f_2) = e(f_1) + e(f_2)$$

для всех f_1, f_2: $\beta N \setminus N \to R$.

Указание. Рассмотрите семейство $\{U_t\}_{t \in I}$ открытых подмножеств пространства $\beta N \setminus N$, определенных в примере 3.6.18, и семейство $\{f_t\}_{t \in I}$ функций f_t: $\beta N \setminus N \to R$, определенных формулой

$$f_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in U_t, \\ 0, & \text{если} \quad x \in (\beta N \setminus N) \setminus U_t. \end{cases}$$

4.5.20. (a) (Хаусдорф [1938]). Пусть M — замкнутое подпространство метризуемого пространства X и f: $M \to L$ — непрерывное отображение M на метрическое пространство L. Докажите, что пространство L может быть изометрично вложено как замкнутое подмножество в некоторое метрическое пространство Y таким образом, что отображение f продолжается до непрерывного отображения F: $X \to Y$, сужение которого $F|X \setminus M$ есть гомеоморфизм $X \setminus M$ на $Y \setminus L$.

Указание (Куратовский [1938], Аренс [1952]). Рассмотрите продолжение композиции f': $M \to C^*(L)$ отображения f и изометричного вложения L в $C^*(L)$, определенного в доказательстве теоремы 4.3.14, до непрерывного отображения $\bar{f}'$: $X \to C^*(L)$ (ср. с задачей 4.5.19(b)). Рассмотрите произведение $Z = C^*(L) \times R \times C^*(X)$ и отображение F: $X \to Z$, определенное формулой $F(x) = (\bar{f}'(x), \rho(x, M), \rho(x, M) \cdot f_x)$, где ρ — ограниченная метрика на пространстве X и $f_x(y) = \rho(x, y)$. Установите, что в качестве Y можно взять подпространство $F(X) \subset Z$.

(b) Установите, что если отображение f в (a) — гомеоморфизм, то продолжение F, определенное выше в указании, также является гомеоморфизмом.

Указание. Покажите, что если $\{V_s\}_{s \in S}$ — открытое покрытие подпространства $X \setminus M$ и $\{a_s: s \in S\}$ — подмножество в M, описанное в указании к задаче 4.5.19(a), то для каждого $a \in M$ и любого $x \in V_s$ имеет место неравенство $\rho(a, x) < \rho(a, a_s) + 2\rho(x, M)$.

(c) (Хаусдорф [1930]). Докажите, что если M — замкнутое подпространство метризуемого пространства X, то каждая метрика на M продолжается до метрики на пространстве X.

(d) Убедитесь в том, что c) немедленно решает 4.3.E(c) и (d).

(e) Покажите, что если M — замкнутое подпространство пространства X, метризуемого вполне ограниченной метрикой, тогда каждая вполне ограниченная метрика на M продолжается до вполне ограниченной метрики на всем пространстве X.

(f) (Бэкон [1968]). Покажите, что если M — замкнутое подпространство пространства X, метризуемого полной метрикой, то каждая полная метрика на M продолжается до полной метрики на пространстве X.

Указание. Пусть ρ — полная метрика на подпространстве M. Продолжите метрику ρ до метрики $\bar\rho$ на пространстве X и возьмите пополнение $(\tilde X, \bar\rho)$ пространства $(X, \bar\rho)$. Представьте разность $\tilde X \setminus X$ как счетное объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ замкнутых подмножеств пространства $\tilde X$ и рассмотрите метрику σ на X, определенную формулой

$$\sigma(x, y) = \bar\rho(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\left(1, \left|\frac{\bar\rho(x, M)}{\bar\rho(x, F_i)} - \frac{\bar\rho(y, M)}{\bar\rho(y, F_i)}\right|\right).$$

Пространство R^I метрически универсально для всех сепарабельных метрических пространств

4.5.21. (a) Покажите, что для каждого счетного семейства $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченных непрерывных вещественных функций, определенных на сепарабельном метризуемом пространстве X, существует метризуемая компактификация cX пространства X, такая, что все функции f_i непрерывно продолжаются на cX.

Указание. См. упр. 4.3E(a).

(b) Отметьте, что для каждого метрического компакта (X, ρ) пространство $(R^X, \hat\sigma)$, где σ — естественная метрика вещественной прямой, изометрично подпространству пространства $(R^C, \hat\sigma)$, где C — канторово множество.

Указание. Используйте задачу 4.5.9(b).

(c) (Банах и Мазур, как указано Банахом в [1932]). Докажите, что каждое сепарабельное метрическое пространство (X, ρ) изометрично подпространству пространства $(R^I, \hat\sigma)$, где σ — естественная метрика вещественной прямой.

Указание. Заметьте сначала, что пространство $(R^C, \hat\sigma)$ изометрично подпространству $(R^I, \hat\sigma)$. Затем выберите счетное всюду плотное подмножество $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ пространства X и рассмотрите семейство $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ вещественных функций на X, определенных формулой $f_i(x) = \rho(x, a_i) - \rho(x, a)$, где $a \in X$ — фиксированная точка. Далее примените (a), (b) и теорему 4.3.17.

Замечание. Урысон в работе [1927] первым описал метрическое пространство, метрически универсальное для всех сепарабельных метрических пространств.

Пространства замкнутых подмножеств III см. задачи 2.7.20, 3.12.26, 6.3.22 и 8.5.16)

4.5.22. *Хаусдорфова метрика* на семействе всех ограниченных непустых замкнутых подмножеств метрического пространства (X, ρ) определяется формулой

$$\rho_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\}.$$

(a) (Хаусдорф [1914], Майкл [1951]). Установите, что ρ_H — метрика на семействе всех ограниченных непустых замкнутых подмножеств метрического пространства (X, ρ). Проверьте, что (X, ρ) изометрично некоторому замкнутому подпространству полученного таким образом метрического пространства. Приведите пример двух эквивалентных вполне ограниченных метрик ρ и σ на пространстве X, таких, что топологии на 2^X, индуцированные метриками ρ_H и σ_H, различны. Приведите пример ограниченного сепарабельного метрического пространства (X, ρ), такого, что топология Вьеториса на 2^X и топология, индуцированная метрикой ρ_H, несравнимы. Покажите, что топология, индуцированная хаусдорфовой метрикой ρ_H на семействе $\mathscr{Z}(X)$ всех непустых компактных подпространств метрического пространства (X, ρ), совпадает с топологией Вьеториса на $\mathscr{Z}(X)$.

Замечание. Помпейю в [1905] исследовал сходимость, индуцированную метрикой $\rho_P(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B) + \sup_{b \in B} \rho(b, A)$ на семействе всех ограниченных непустых замкнутых подмножеств плоскости.

(b) Проверьте, что если пространство (X, ρ) вполне ограничено, то пространство $(2^X, \rho_H)$ также вполне ограничено. Приведите пример сепарабельного ограниченного метрического пространства (X, ρ), такого, что пространство $(2^X, \rho_H)$ не сепарабельно.

(c) (Хан [1932]). Покажите, что если пространство (X, ρ) полно, то пространство всех ограниченных непустых замкнутых подмножеств пространства (X, ρ) с хаусдорфовой метрикой ρ_H также полно.

(d) (Куратовский [1956]). Покажите, что если пространство (X, ρ) полно, то и пространство $(\mathscr{Z}(X), \rho_H)$ полно.

(e) Установите, что если X есть T_1-пространство, то экспоненциальное пространство 2^X метризуемо в том и только том случае, если X — метризуемый компакт. Убедитесь в том, что пространство $\mathscr{Z}(X)$ метризуемо в том и только том случае, если пространство X метризуемо.

Указание. Используйте задачу 2.7.20(f).

(f) (Куратовский [1948]). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $a \in X$. Каждому ограниченному непустому замкнутому подмножеству $A \subset X$ поставим в соответствие функцию $f_A \in R^X$, определенную формулой $f_A(x) = \rho(x, A) - \rho(x, a)$. Покажите, что это соответствие определяет изометрию между пространством всех ограниченных непустых замкнутых подмножеств пространства (X, ρ) с хаусдорфовой метрикой ρ_H и пространством всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X с метрикой $\hat{\sigma}$, определенной формулой (7) § 4.2, где σ — естественная метрика на вещественной прямой.

Выведите отсюда, что для каждого метризуемого компакта X пространство 2^X с топологией Вьеториса вложимо в пространство отображений R^X с компактно-открытой топологией. Установите, что оба условия — метризуемость и компактность пространства X — являются существенными (ср. с задачей 3.12.26(j)).

Глава 5

ПАРАКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Паракомпактные пространства одновременно обобщают компактные пространства и метризуемые пространства. Хотя они были определены намного позже, чем два предыдущих класса, паракомпактные пространства быстро завоевали популярность у топологов и аналитиков и считаются теперь одним из важнейших классов топологических пространств. Благодаря введению паракомпактности многие теоремы топологии и анализа получили обобщения, а многие доказательства упростились. Кроме того, понятие локально конечного семейства и понятия, связанные с ним, оказались весьма эффективными и естественными средствами изучения топологических пространств.

Параграф 5.1 посвящен паракомпактным пространствам. Мы начинаем с трех теорем, содержащих различные характеристики паракомпактности хаусдорфовых пространств (описания ее в терминах разбиений единицы особенно важны для анализа). Далее доказываем, что паракомпактные хаусдорфовы пространства обладают свойством коллективной нормальности, намного более сильным, чем простая нормальность, и приводим несколько примеров. Во второй части этого параграфа изучаются операции над паракомпактными пространствами и поведение этого класса пространств при отображениях. Параграф завершается теоремой Тамано, в которой устанавливается интересная внешняя характеристика паракомпактных хаусдорфовых пространств.

В § 5.2 мы изучаем класс счетно паракомпактных пространств. Теоремы этого параграфа содержат различные характеристики счетной паракомпактности.

Параграф 5.3 посвящен слабо паракомпактным и сильно паракомпактным пространствам. Как и класс счетно паракомпактных пространств, эти два класса имеют гораздо меньшее значение, чем класс паракомпактных пространств. Однако они играют определенную роль в теории размерности и алгебраической топологии. Среди теорем этого параграфа самыми важными являются теорема Нагами — Майкла о том, что каждое коллективно нормальное слабо паракомпактное пространство паракомпактно, и теорема Уоррелла о сохранении слабой паракомпактности замкнутыми отображениями.

Последний параграф является продолжением § 4.4; в нем приводятся еще пять метризационных теорем.

5.1. ПАРАКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие локально конечного семейства множеств, введенное в гл. 1, приводит к определению важного класса топологических пространств — паракомпактных пространств. Топологическое пространство X называется *паракомпактным*, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие [1]).

Заметим, что, в противоположность определению компактности, в определении паракомпактности нельзя заменить «вписанное покрытие» на «подпокрытие». Действительно, легко видеть, что каждое дискретное пространство паракомпактно: покрытие, состоящее из всех его одноточечных подмножеств, открыто, локально конечно и вписано в любое покрытие этого пространства, — и тем не менее открытое покрытие $\{N \cap [1, i]\}_{i=1}^{\infty}$ пространства натуральных чисел N не содержит никакого локально конечного подпокрытия (ср. с упр. 5.1.A(d)).

Из определения паракомпактного пространства вытекает

5.1.1. Теорема. *Каждое компактное пространство паракомпактно.* ∎

С помощью понятия паракомпактности теоремы 3.8.11 и 4.4.1 можно сформулировать следующим образом:

5.1.2. Теорема. *Каждое линделёфово пространство паракомпактно.* ∎

5.1.3. Теорема. *Каждое метризуемое пространство паракомпактно.* ∎

Читатель легко выведет из теоремы 5.1.12 и замечания 5.1.7, что возможность вписывать открытые покрытия, которые одновременно локально конечны и σ-дискретны, установленная для метризуемых пространств в теореме 4.4.1, лишь формально сильнее паракомпактности в классе хаусдорфовых пространств.

5.1.4. Лемма. *Пусть X — паракомпактное пространство и A, B — два непересекающихся замкнутых множества в X. Если для каждой точки $x \in B$ существуют открытые множества U_x, V_x, такие, что $A \subset U_x$, $x \in V_x$ и $U_x \cap V_x = \varnothing$, то найдутся открытые множества U, V, для которых $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.*

Доказательство. Семейство $\{V_x\}_{x \in B} \cup \{X \setminus B\}$ является от-

---

[1]) Паракомпактные хаусдорфовы пространства называются также *паракомпактами*. — *Прим. перев.*

крытым покрытием паракомпактного пространства X. Значит, существует вписанное в него локально конечное открытое покрытие $\{W_s\}_{s\in S}$. Для $S_0=\{s\in S\colon W_s\cap B\neq\varnothing\}$ имеем

$$A\cap\overline{W}_s=\varnothing \quad \text{при всех} \quad s\in S_0 \quad \text{и} \quad B\subset\bigcup_{s\in S_0}W_s.$$

В силу теоремы 1.1.11, множество $U=X\setminus\bigcup_{s\in S_0}\overline{W}_s$ открыто. Как легко видеть, множества U и $V=\bigcup_{s\in S_0}W_s$ обладают всеми нужными свойствами. ∎

5.1.5. Теорема. *Каждое паракомпактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Подставляя одноточечные множества вместо A в последней лемме, мы видим, что каждое паракомпактное хаусдорфово пространство регулярно. Пользуясь этим фактом и применяя лемму снова, мы получаем теорему. ∎

Отметим, что последняя теорема обобщает одновременно теоремы 1.5.15, 3.1.9 и 3.8.2. Так как каждое регулярное пространство с σ-локально конечной базой паракомпактно (это вытекает из следующей далее теоремы 5.1.11), она обобщает также лемму 4.4.5.

Семейство $\{f_s\}_{s\in S}$ непрерывных отображений пространства X в единичный отрезок I называется *разбиением единицы* на пространстве X, если $\sum_{s\in S}f_s(x)=1$ при всех $x\in X$. Последнее равенство имеет тот смысл, что при произвольном фиксированном $x_0\in X$ лишь счетное множество функций f_s не обращается в нуль в точке x_0 и ряд $\sum_{i=1}^{\infty}f_{s_i}(x_0)$, где $\{s_1, s_2, \ldots\}=\{s\in S\colon f_s(x_0)\neq 0\}$, сходится к 1. Так как этот ряд абсолютно сходится, порядок членов не имеет значения, и сходимость к 1 означает, что 1 является наименьшей верхней гранью множества всех чисел вида $f_{s_{i_1}}(x_0)+f_{s_{i_2}}(x_0)+\ldots+f_{s_{i_k}}(x_0)$, где $s_1, s_2, \ldots, s_k\in S$.

Мы говорим, что разбиение единицы $\{f_s\}_{s\in S}$ на пространстве X *локально конечно*, если покрытие $\{f_s^{-1}((0, 1])\}_{s\in S}$ пространства X локально конечно. Это означает, что для каждой точки $x_0\in X$ найдутся ее окрестность U_0 и конечное множество $S_0=\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}\subset S$, такие, что $f_s(x)=0$ при всех $x\in U_0$ и всех $s\in S\setminus S_0$ и $\sum_{i=1}^{k}f_{s_i}(x)=1$.

Разбиение единицы $\{f_s\}_{s\in S}$ на пространстве X *подчинено покрытию* $\mathscr{A}$ пространства X, если покрытие $\{f_s^{-1}((0, 1])\}_{s\in S}$ вписано в $\mathscr{A}$.

Наша следующая теорема содержит две характеристики паракомпактов в терминах разбиений единицы. Эти характеристики очень полезны не только в топологии, но и в анализе, и в дифференциальной геометрии. Теореме будут предпосланы две леммы. Первая из них будет применяться еще и потом, поэтому мы устанавливаем ее в несколько более общей форме, чем требуется сейчас. В доказательстве нашей теоремы можно применить вместо этой леммы — менее элементарно — теорему 1.5.18.

5.1.6. Лемма. *Если в каждое открытое покрытие регулярного пространства X можно вписать локально конечное покрытие (произвольными множествами), то для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s\in S}$ пространства X найдется замкнутое локально конечное покрытие $\{F_s\}_{s\in S}$ этого пространства, такое, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$*[1]).

Доказательство. В силу регулярности X, существует открытое покрытие $\mathscr{W}$ пространства X, такое, что $\{\overline{W}\colon W\in\mathscr{W}\}$ вписано в $\{U_s\}_{s\in S}$. Возьмем локально конечное покрытие $\{A_t\}_{t\in T}$, вписанное в покрытие $\mathscr{W}$, для каждого $t\in T$ выберем $s(t)\in S$, такое, что $\overline{A}_t\subset U_{s(t)}$, и положим $F_s=\bigcup\limits_{s(t)=s}\overline{A}_t$. Из теорем 1.1.11 и 1.1.13 легко следует, что $\{F_s\}_{s\in S}$ — замкнутое локально конечное покрытие пространства X, а определение множеств F_s показывает, что $F_s\subset U_s$ при всех $s\in S$. ∎

5.1.7. Замечание. Отметим, что если покрытие $\{A_t\}_{t\in T}$ в последнем доказательстве открыто, то множества $V_s=\bigcup\limits_{s(t)=s}A_t$ открыты и $F_s=\overline{V}_s$. Значит, для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s\in S}$ паракомпакта существует локально конечное открытое покрытие $\{V_s\}_{s\in S}$, такое, что $\overline{V}_s\subset U_s$ при всех $s\in S$.

5.1.8. Лемма. *Если для открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства X существует подчиненное ему разбиение единицы $\{f_s\}_{s\in S}$, то в $\mathscr{U}$ можно вписать открытое локально конечное покрытие.*

Доказательство. Для начала заметим, что если $g\colon X\to I$ — непрерывная функция, $x_0\in X$ и $g(x_0)>0$, то найдутся окрестность U_0 точки x_0 и конечное множество $S_0\subset S$, такие, что

$$(1)\qquad f_s(x)<g(x)\quad\text{при}\quad x\in U_0\quad\text{и}\quad s\in S\setminus S_0.$$

Действительно, легко проверяется, что условию (1) удовлетворяют любое множество $S_0=\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}\subset S$, для которого

[1]) Говорят при этом, что покрытие $\{F_s\}_{s\in S}$ комбинаторно вписано в покрытие $\{U_s\}_{s\in S}$. — *Прим. перев.*

$1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x_0) < g(x_0)$, и открытое множество $U_0 = \{x \in X\colon 1 - - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x) < g(x)\}$.

Для каждого $x \in X$ выберем $s(x) \in S$ так, чтобы было $f_{s(x)}(x) > 0$. Взяв $g = f_{s(x)}$ в предыдущем замечании, мы заключаем из 2.1.12, что формула $f(x) = \sup_{s \in S} f_s(x)$ определяет некоторую непрерывную функцию $f\colon X \to (0, 1]$. При каждом $s \in S$ множество

$$V_s = \left\{ x \in X\colon\ f_s(x) > \frac{1}{2} f(x) \right\}$$

открыто, и семейство $\mathscr{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ вписано в $\mathscr{U}$. Положив $g = \frac{1}{2} f(x)$ в нашем первоначальном замечании, мы приходим к выводу, что семейство $\mathscr{V}$ локально конечно.

5.1.9. Теорема. *Для каждого T_1-пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X — паракомпакт.*

(ii) *Для каждого открытого покрытия пространства X найдется подчиненное ему локально конечное разбиение единицы.*

(iii) *Для каждого открытого покрытия пространства X найдется подчиненное ему разбиение единицы.*

Доказательство. Предположим, что X — паракомпакт, и рассмотрим произвольное открытое покрытие $\mathscr{A}$ пространства X. Пусть $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ локально конечное открытое покрытие, вписанное в $\mathscr{A}$. По лемме 5.1.6, найдется замкнутое покрытие $\{F_s\}_{s \in S}$ пространства X, такое, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$. Из леммы Урысона следует, что для каждого $s \in S$ можно найти непрерывную функцию $g_s\colon X \to I$, такую, что $g_s(x) = 0$ при $x \in \in X \setminus U_s$ и $g_s(x) = 1$ при $x \in F_s$. Так как семейство $\mathscr{U}$ локально конечно, то полагая $g(x) = \sum_{s \in S} g_s(x)$, мы получаем непрерывную функцию $g\colon X \to R$. Легко видеть, что семейство $\{f_s\}_{s \in S}$, где $f_s = g_s/g$, является локально конечным разбиением единицы, подчиненным $\mathscr{A}$. Тем самым импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) установлена.

Так как импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна, для завершения доказательства достаточно показать, что (iii) $\Rightarrow$ (i), а это, в силу леммы 5.1.8, сводится к доказательству того, что каждое T_1-пространство X, удовлетворяющее условию (iii), является хаусдорфовым пространством. Мы покажем, что X — тихоновское пространство. Рассмотрим любую точку $x_0 \in X$ и произвольное замкнутое множество $F \subset X$, такое, что $x_0 \notin F$. Открытому покрытию $\mathscr{U} = \{X \setminus F,\ X \setminus \{x_0\}\}$ пространства X подчинено некоторое разбиение единицы $\{f_s\}_{s \in S}$. Возьмем $s_0 \in S$, для которого $f_{s_0}(x_0) = a > 0$, и заметим, что множество $f_{s_0}^{-1}((0, 1])$ содержится в $X \setminus F$, т. е. $f_{s_0}(F) \subset \{0\}$. Непрерывная функция $f\colon X \to I$, определенная формулой $f(x) = 1 - \min(1, f_{s_0}(x)/a)$, удовлетворяет условиям $f(x_0) = 0$ и $f(F) \subset \{1\}$. ∎

Три дальнейшие характеристики паракомпактов устанавливаются в следующей теореме.

5.1.10. Лемма. *В каждое открытое σ-локально конечное покрытие $\mathscr{V}$ произвольного топологического пространства X можно вписать локально конечное покрытие* (произвольными множествами).

Доказательство. Пусть $\mathscr{V} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{V}_i$, где $\mathscr{V}_i = \{V_s\}_{s \in S_i}$ — локально конечное семейство открытых множеств и $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Для каждого $s_0 \in S_i$ положим

$$A_{s_0} = V_{s_0} \setminus \bigcup_{k<i} \bigcup_{s \in S_k} V_s.$$

Семейство $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s \in S}$, где $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$, покрывает X и вписано в $\mathscr{V}$. Покажем, что $\mathscr{A}$ локально конечно. Для произвольной точки $x \in X$ обозначим через k наименьшее натуральное число, такое, что $x \in \bigcup\limits_{s \in S_k} V_s$, и возьмем $s_0 \in S_k$, для которого $x \in V_{s_0}$. Ясно, что V_{s_0} — окрестность точки x, не пересекающаяся с теми A_s, для которых $s \in \bigcup\limits_{i>k} S_i$. Так как семейства $\mathscr{V}_i$ локально конечны, для каждого $i \leqslant k$ найдется окрестность U_i точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом членов семейства $\mathscr{V}_i$. Окрестность $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k \cap V_{s_0}$ точки x пересекается только с конечным числом элементов семейства $\mathscr{A}$. ∎

5.1.11. Теорема. *Для каждого регулярного пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X паракомпактно.*

(ii) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-локально конечное покрытие.*

(iii) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие* (произвольными множествами).

(iv) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое локально конечное покрытие.*

Доказательство. Эта теорема вытекает из 5.1.10, 5.1.6 и 4.4.12. ∎

Из последней теоремы немедленно следует, что каждое линделёфово пространство паракомпактно. Следует отметить также, что в (ii) нельзя заменить второе слово «открытое» на слово «замкнутое» (см. задачу 5.5.3(a)).

Мы введем теперь несколько понятий, связанных с понятием покрытия, с помощью которых будут установлены дальнейшие характеристики паракомпактности. Пусть $\mathcal{A}=\{A_s\}_{s\in S}$ — произвольное покрытие множества X. *Звезда множества* $M\subset X$ *относительно* $\mathcal{A}$ есть множество $\mathrm{St}(M,\mathcal{A})=\bigcup\{A_s\colon\ M\cap A_s\neq\varnothing\}$. Звезда одноточечного множества $\{x\}$ относительно покрытия $\mathcal{A}$ называется *звездой точки* x *относительно* $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathrm{St}(x,\mathcal{A})$. Мы говорим, что покрытие $\mathcal{B}=\{B_t\}_{t\in T}$ множества X *сильно звездно вписано* в покрытие $\mathcal{A}=\{A_s\}_{s\in S}$ того же множества X, если для каждого $t\in T$ найдется $s(t)\in S$, такое, что $\mathrm{St}(B_t,\mathcal{B})\subset A_{s(t)}$. Если для каждого $x\in X$ существует $s(x)\in S$, такое, что $\mathrm{St}(x,\mathcal{B})\subset A_{s(x)}$, то мы говорим, что $\mathcal{B}$ *звездно вписано в* $\mathcal{A}$. Ясно, что из сильной звездной вписанности следует звездная вписанность, а из звездной вписанности вытекает вписанность.

Следующая теорема содержит еще три характеристики паракомпактов. Она будет выведена прямо из лемм 5.1.13, 5.1.15 и 5.1.16, формулируемых и доказываемых ниже.

5.1.12. Теорема. *Для каждого T_1-пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X — паракомпакт.*

(ii) *В каждое открытое покрытие пространства X можно звездно вписать открытое покрытие.*

(iii) *В каждое открытое покрытие пространства X можно сильно звездно вписать открытое покрытие.*

(iv) *Пространство X регулярно, и в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

5.1.13. Лемма. *Если в открытое покрытие $\mathcal{U}$ топологического пространства X можно вписать замкнутое локально конечное покрытие, то в $\mathcal{U}$ можно звездно вписать открытое покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}=\{F_t\}_{t\in T}$ — замкнутое локально конечное покрытие, вписанное в $\mathcal{U}=\{U_s\}_{s\in S}$. Для каждого $t\in T$ выберем $s(t)\in S$, такое, что $F_t\subset U_{s(t)}$. Из локальной конечности семейства $\mathcal{F}$ следует, что множество $T(x)=\{t\in T\colon x\in F_t\}$ конечно при каждом $x\in X$, а отсюда вытекает, что множество

$$V_x = \bigcap_{t \in T(x)} U_{s(t)} \cap \Big(X \setminus \bigcup_{t \notin T(x)} F_t\Big) \tag{2}$$

открыто при всех $x \in X$. Так как $x \in V_x$, семейство $\mathscr{V} = \{V_x\}_{x \in X}$ является открытым покрытием пространства X. Пусть x_0 — любая точка пространства X и t_0 — некоторый элемент множества $T(x_0)$. Из (2) следует, что если $x_0 \in V_x$, то $t_0 \in T(x)$ и, значит, $V_x \subset U_{s(t_0)}$. Таким образом, $\mathrm{St}(x_0, \mathscr{V}) \subset U_{s(t_0)}$ и $\mathscr{V}$ звездно вписано в $\mathscr{U}$. ∎

5.1.14. Замечание. Если $\mathscr{U}$ — локально конечное открытое покрытие, то семейство всех множеств вида (2) является локально конечным покрытием, звездно вписанным в $\mathscr{U}$.

5.1.15. Лемма. *Если покрытие $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ множества X звездно вписано в покрытие $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ множества X, а $\mathscr{B}$ звездно вписано в покрытие $\mathscr{C} = \{C_z\}_{z \in Z}$ того же множества, то $\mathscr{A}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{C}$.*

Доказательство. Возьмем $s_0 \in S$ и для каждого $x \in A_{s_0}$ выберем $t(x) \in T$ так, что

$$\mathrm{St}(x, \mathscr{A}) \subset B_{t(x)}. \tag{3}$$

Имеем, таким образом,

$$\mathrm{St}(A_{s_0}, \mathscr{A}) = \bigcup_{x \in A_{s_0}} \mathrm{St}(x, \mathscr{A}) \subset \bigcup_{x \in A_{s_0}} B_{t(x)}. \tag{4}$$

Пусть x_0 — произвольный элемент множества A_{s_0}. Из (3) следует, что $x_0 \in B_{t(x)}$ при всех $x \in A_{s_0}$, так что

$$\bigcup_{x \in A_{s_0}} B_{t(x)} \subset \mathrm{St}(x_0, \mathscr{B}).$$

Вместе с (4) последнее включение показывает, что $\mathrm{St}(A_{s_0}, \mathscr{A}) \subset \mathrm{St}(x_0, \mathscr{B}) \subset C_z$ при некотором $z \in Z$. ∎

5.1.16. Лемма. *Если в каждое открытое покрытие пространства X можно сильно звездно вписать открытое покрытие, то в каждое открытое покрытие этого пространства можно вписать σ-дискретное открытое покрытие.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ пространства X. Положим $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}$, и пусть $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots$ — какая-нибудь последовательность открытых покрытий пространства X, такая, что

(5) $\mathscr{U}_{i+1}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{U}_i$ при $i = 0, 1, \ldots$.

Для каждого $s \in S$ и $i = 1, 2, \ldots$ возьмем открытое множество $U_{s,i} = \{x \in X$: x обладает окрестностью V, такой, что

$$\operatorname{St}(V, \mathscr{U}_i) \subset U_s\}.$$

Семейство $\{U_{s,i}\}_{s \in S}$ вписано в $\mathscr{U}$ при $i = 1, 2, \ldots$ и состоит из открытых множеств. Заметим, что

(6) если $x \in U_{s,i}$ и $y \notin U_{s,i+1}$, то не существует $U \in \mathscr{U}_{i+1}$, для которого $x, y \in U$.

Действительно, в силу (5), для каждого $U \in \mathscr{U}_{i+1}$ найдется $W \in \mathscr{U}_i$, такое, что $\operatorname{St}(U, \mathscr{U}_{i+1}) \subset W$. Следовательно, если $x \in \in U \cap U_{s,i}$, то $W \subset \operatorname{St}(x, \mathscr{U}_i) \subset U_s$ и, значит, $\operatorname{St}(U, \mathscr{U}_{i+1}) \subset U_s$ и $U \subset U_{s,i+1}$.

Зафиксируем какое-нибудь вполне упорядочение $<$ на множестве S и положим

$$V_{s_0,i} = U_{s_0,i} \setminus \overline{\bigcup_{s < s_0} U_{s,i+1}}. \tag{7}$$

Для произвольной пары s_1, s_2 различных элементов множества S либо $s_1 < s_2$ либо $s_2 < s_1$; в зависимости от того, какое из этих двух соотношений выполняется, имеем в силу (7):

$$\text{либо } V_{s_2,i} \subset X \setminus U_{s_1,i+1}, \quad \text{либо } V_{s_1,i} \subset X \setminus U_{s_2,i+1}.$$

Значит, из (6) вытекает, что если $x \in V_{s_1,i}$ и $y \in V_{s_2,i}$, где $s_1 \neq s_2$, то нет такого $U \in \mathscr{U}_{i+1}$, чтобы было $x, y \in U$. Следовательно, семейство $\{V_{s,i}\}_{s \in S}$ открытых множеств дискретно при $i = 1, 2, \ldots$.

Для завершения доказательства осталось показать, что семейство $\{V_{s,i}\}_{i=1,\, s \in S}^{\infty}$ покрывает X. Пусть x — любая точка из X. Обозначим через $s(x)$ наименьший элемент множества $\{s \in S$: $x \in U_{s,i}$ при каком-нибудь положительном целом $i\}$; существование $s(x)$ следует из того, что при $i = 1, 2, \ldots$ семейство $\{U_{s,i}\}_{s \in S}$ покрывает X. Так как $x \notin U_{s,i+2}$ при $s < s(x)$, из (6) вытекает, что

$$\operatorname{St}(x, \mathscr{U}_{i+2}) \cap \bigcup_{s < s(x)} U_{s,i+1} = \varnothing,$$

а это показывает, что $x \in V_{s(x),i}$. ∎

Доказательство теоремы 5.1.12. В силу последних трех лемм и теоремы 5.1.11, достаточно показать, что каждое T_1-пространство X, которое удовлетворяет условию (iii), регулярно. Рассмотрим любые точку $x \in X$ и замкнутое множество $F \subset X$, для которых $x \notin F$, и возьмем открытое покрытие $\mathscr{U}$, сильно звездно вписанное в открытое покрытие $\{X \setminus F, X \setminus \{x\}\}$ пространства

X. Пусть U — любой элемент семейства $\mathcal{U}$, содержащий x. Так как $\mathrm{St}(U, \mathcal{U}) \subset X \setminus F$, то $\bar{U} \cap F = \varnothing$, так что пространство X регулярно. ∎

Понятие сильной звездной вписанности ведет к понятию нормального покрытия (см. упр. 5.4.H(c) и (d)). Открытое покрытие $\mathcal{W}$ пространства X называется ***нормальным***, если существует такая последовательность $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots$ открытых покрытий пространства X, что $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}$ и $\mathcal{W}_{i+1}$ сильно звездно вписано в $\mathcal{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Из теоремы 5.1.12 следует, что среди T_1-пространств требование нормальности каждого открытого покрытия характеризует паракомпакты. Теорема 1.5.18, леммы 5.1.13, 5.1.15 и замечание 5.1.14 показывают, что каждое локально конечное открытое покрытие нормального пространства нормально. Оказывается, нормальные пространства характеризуются этим свойством в классе T^1-пространств (см. упр. 5.1.A(a)). Таким образом, хотя в названии подчеркнута аналогия между паракомпактностью и компактностью, паракомпактность в соединении с хаусдорфовостью может также рассматриваться как значительное усиление нормальности.

Коллективная нормальность — другое усиление нормальности, более слабое для хаусдорфовых пространств, чем паракомпактность. Топологическое пространство X называется ***коллективно нормальным***, если X есть T_1-пространство и для каждого дискретного семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых множеств в X существует дискретное семейство $\{V_s\}_{s \in S}$ открытых множеств в X, такое, что $F_s \subset V_s$ при всех $s \in S$. Ясно, что каждое коллективно нормальное пространство нормально.

5.1.17. Теорема. *T_1-пространство X коллективно нормально в том и только том случае, если для каждого дискретного семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых множеств в X найдется семейство $\{U_s\}_{s \in S}$ открытых множеств в X, такое, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$ и $U_s \cap U_{s'} = \varnothing$* при $s \neq s'$.

Доказательство. Достаточно доказать, что каждое T_1-пространство X, которое удовлетворяет условию теоремы, коллективно нормально. Ясно, что X нормально. Поэтому для произвольного дискретного семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых множеств в X непересекающиеся замкнутые множества $A = \bigcup_{s \in S} F_s$ и $B = X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s$ содержатся соответственно в непересекающихся открытых множествах U и V. Легко проверяется, что семейство $\{V_s\}_{s \in S}$, где $V_s = U_s \cap U$, дискретно. ∎

Так как каждое локально конечное семейство непустых подмножеств счетно компактного пространства конечно (см. теорему 3.10.3), из теоремы 2.1.14 вытекает, что каждое счетно компактное нормальное пространство коллективно нормально.

5.1.18. Теорема. *Каждый паракомпакт коллективно нормален.*

Доказательство. Пусть $\{F_s\}_{s\in S}$ — дискретное семейство замкнутых множеств в паракомпакте X. Для каждого $x\in X$ возьмем окрестность H_x точки x, пересекающую самое большее одно множество F_s, и, применив теорему 5.1.12, возьмем открытое покрытие $\mathscr{W}=\{W_t\}_{t\in T}$, сильно звездно вписанное в покрытие $\{H_x\}_{x\in X}$. Осталось показать, что каждый член семейства $\mathscr{W}$ пересекается самое большее с одним элементом семейства $\{V_s\}_{s\in S}$, где $V_s=\mathrm{St}(F_s,\mathscr{W})$. Однако для любого $t\in T$ найдется $x\in X$, такое, что $\mathrm{St}(W_t,\mathscr{W})\subset H_x$; тогда если $W_t\cap V_s\neq\varnothing$, то $H_x\cap F_s\neq\varnothing$. ∎

5.1.19. Замечание. Как легко проверить, для любого локально конечного семейства $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнутых множеств в паракомпакте конструкция из последнего доказательства дает локально конечное семейство $\{V_s\}_{s\in S}$ открытых множеств, такое, что $F_s\subset V_s$ при всех $s\in S$ (см. задачи 5.5.17 и 5.5.18).

Как показано в теореме 4.1.17, компактность и счетная компактность в классе метризуемых пространств равносильны. Покажем теперь, что то же самое верно и в более широком классе паракомпактных пространств (см. теорему 5.3.2).

5.1.20. Теорема. *Каждое счетно компактное паракомпактное пространство компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольное открытое покрытие счетно компактного паракомпактного пространства X. Из теоремы 3.10.3 следует, что каждое локально конечное открытое покрытие $\mathscr{B}$, вписанное в $\mathscr{A}$, конечно. Значит, пространство X компактно. ∎.

Обсудим теперь некоторые примеры.

5.1.21. Пример. Из последней теоремы и примера 3.10.16 следует, что пространство W_0 всех счетных ординалов не паракомпактно. Так как W_0 счетно компактно и нормально, оно коллективно нормально. ∎

Конструкция нормального не коллективно нормального пространства намного труднее. Мы предпошлем ей вспомогательный пример, в котором обсуждается одна простая операция над топологическими пространствами, оказавшаяся полезной при построении контрпримеров.

5.1.22. Пример. Пусть M — любое подпространство топологического пространства X. Легко проверить, что семейство всех множеств вида $U \cup K$, где U — открытое множество в X и $K \subset X \setminus M$, составляет некоторую топологию на X. Множество X с этой новой топологией будет обозначаться через X_M. Таким образом, пространства X и X_M имеют одно и то же множество точек, но различные, вообще говоря, топологии: топология пространства X_M тоньше (т. е. сильнее) топологии пространства X. Множество $X \setminus M$ и все его подмножества открыты в X_M, так что $X \setminus M$ является открытым дискретным подпространством пространства X_M. Подпространство $M \subset X_M$ замкнуто, и его топология совпадает с топологией, порожденной на M топологией пространства X.

Некоторые свойства пространства X разделяет с ним и пространство X_M: например, как легко видеть, если X есть T_i-пространство, где $i = 0$, 1 или 2, то X_M тоже T_i-пространство. Читатель может легко проверить, что то же самое верно при $i = 3$ и $3^1/_2$. С другой стороны, пространство X_M не обязано быть нормальным, если X — нормальное пространство или даже компакт (см. упр. 5.1.D).

Покажем теперь, что X_M нормально, если X есть T_1-пространство и для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A_1, B_1 подпространства $M \subset X$ существуют открытые в пространстве X множества U и V, такие, что

$$(8) \qquad A_1 \subset U, \quad B_1 \subset V \quad \text{и} \quad U \cap V = \varnothing.$$

В частности, X_M нормально, если X нормально и M замкнуто в X. Как нам уже известно, X_M является T_1-пространством. Пусть A, B — два любых непересекающихся замкнутых множества в X_M. Множества $A_1 = A \cap M$ и $B_1 = B \cap M$ замкнуты в подпространстве $M \subset X$ и не пересекаются. Значит, найдутся открытые множества U, $V \subset X$, удовлетворяющие условию (8). Легко видеть, что множества

$$(U \setminus B) \cup (A \setminus M) \quad \text{и} \quad (V \setminus A) \cup (B \setminus M)$$

открыты в X_M, не пересекаются и содержат множества A и B соответственно. Значит, пространство X_M нормально.

Покажем также, имея в виду применить это в дальнейшем, что если пространство X наследственно паракомпактно (т. е. каждое подпространство пространства X паракомпактно — что выполняется, например, для любого метризуемого пространства X), то пространство X_M тоже наследственно паракомпактно. Так как каждое подпространство пространства X_M имеет вид $X'_{M'}$, где $X' \subset X$ и $M' = M \cap X'$, достаточно проверить, что X_M паракомпактно. Каждое открытое покрытие пространства X_M имеет вид $\{U_s \cup K_s\}_{s \in S}$, где U_s открыто в X и $K_s \subset X \setminus M$.

В открытое покрытие $\{U_s\}_{s\in S}$ пространства $U=\bigcup_{s\in S} U_s\subset \subset X$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_t\}_{t\in T}$. Как легко проверить, присоединив к этому последнему семейству множеств все одноточечные подмножества множества $X\setminus U$, мы получаем локально конечное открытое покрытие пространства X_M, вписанное в покрытие $\{U_s\cup K_s\}_{s\in S}$.

Дальнейшие свойства операции X_M, определенной в этом примере, можно найти в задаче 5.5.2. ∎

Опишем теперь нормальное пространство, которое не коллективно нормально.

5.1.23. Пример (Бинг). Обозначим через $\mathscr{F}$ семейство всех отображений дискретного пространства $D(\mathfrak{c})$ мощности $\mathfrak{c}$ в двухточечное дискретное пространство $D=\{0, 1\}$. Ясно, что $|\mathscr{F}|=2^{\mathfrak{c}}$. По теореме 2.3.20, диагональное отображение $F=\underset{f\in\mathscr{F}}{\Delta} f\colon D(\mathfrak{c})\to D^{2^\mathfrak{c}}=\prod_{f\in\mathscr{F}} D_f$, где $D_f=D$ при всех $f\in\mathscr{F}$, является гомеоморфным вложением. Для каждой пары непересекающихся замкнутых подмножеств A_1, B_1 подпространства $M=F(D(\mathfrak{c}))\subset D^2$ множества

$$U=p_{f_A}^{-1}(1) \quad \text{и} \quad V=p_{f_A}^{-1}(0),$$

где $A=F^{-1}(A_1)$ и $f_A\in\mathscr{F}$ определено правилом: $f_A(x)=1$, если $x\in A$, и $f_A(x)=0$, если $x\in D(\mathfrak{c})\setminus A$, удовлетворяют соотношениям (8). Значит, в силу примера 5.1.22, пространство $X=D_M^{2^\mathfrak{c}}$ нормально.

Остается показать, что пространство X не коллективно нормально. Предположим, что X коллективно нормально. Так как $M\subset X$ дискретно и $X\setminus M$ открыто, семейство $\{\{x\}\}_{x\in M}$ одноточечных подмножеств пространства X дискретно. Значит, существует семейство $\{V_x\}_{x\in M}$ попарно непересекающихся открытых подмножеств пространства X, таких, что $x\in V_x$ при всех $x\in M$. Так как $V_x=U_x\cup K_x$, где U_x открыто в $D^{2^\mathfrak{c}}$ и $K_x\subset D^{2^\mathfrak{c}}\setminus \setminus M$, имеем $x\in U_x$. Следовательно, $\{U_x\}_{x\in M}$ — семейство мощности $\mathfrak{c}$ попарно непересекающихся непустых открытых множеств в $D^{2^\mathfrak{c}}$, а это противоречит теореме 2.3.18.

Как показано в примере 3.6.20, замыкание множества M в $D^{2^\mathfrak{c}}$ является стоун-чеховской компактификацией пространства $D(\mathfrak{c})$. Как легко проверить, нормальное не коллективно нормальное пространство можно точно так же получить, взяв произвольное гомеоморфное вложение h пространства $D(\mathfrak{c})$ в $D^{2^\mathfrak{c}}$ или в $I^{2^\mathfrak{c}}$, для которого $\overline{h(D(\mathfrak{c})}=\beta D(\mathfrak{c})$, вместо специального вложения F, использованного выше (см. теоремы 3.6.11, 3.6.13 и 6.2.16 или 3.6.11 и 2.3.23). ∎

В следующих двух теоремах описываются соотношения между паракомпактностью и свойством Линделёфа.

5.1.24. Лемма. *Каждое локально конечное семейство непустых подмножеств линделёфова пространства счетно.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — любое локально конечное семейство непустых подмножеств линделёфова пространства X. Для каждого $x \in X$ выберем окрестность U_x точки x, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов семейства $\mathscr{A}$, и возьмем счетное подпокрытие $\mathscr{U}$ покрытия $\{U_x\}_{x \in X}$ пространства X. Так как каждый элемент семейства $\mathscr{A}$ пересекает некоторое $U \in \mathscr{U}$, заключаем, что $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$. ∎

5.1.2.5. Теорема. *Если паракомпакт X содержит всюду плотное подпространство A, обладающее свойством Линделёфа, то X — линделёфово пространство.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. В силу замечания 5.1.7, найдется локально конечное открытое покрытие $\{V_s\}_{s \in S}$ пространства X, такое, что $\overline{V}_s \subset U_s$ при всех $s \in S$. По предшествующей лемме, существует счетное множество $S_0 \subset S$, такое, что $A = \bigcup_{s \in S_0} A \cap V_s$, а отсюда следует, что

$$X = \overline{A} = \overline{\bigcup_{s \in S_0} A \cap V_s} = \bigcup_{s \in S_0} \overline{A \cap V_s} \subset \bigcup_{s \in S_0} \overline{V}_s \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s.$$

Значит, в $\mathscr{U}$ есть счетное подпокрытие. ∎

5.1.26. Следствие. *Каждый сепарабельный паракомпакт является линделёфовым пространством*[1]. ∎

---

[1]) Следующий результат заметно сильнее утверждения 5.1.26:

Теорема А. *Если число Суслина паракомпакта X счетно, то X является линделёфовым пространством.*

Пусть R^X — пространство непрерывных вещественных функций на X в топологии поточечной сходимости. Число Суслина пространства R^X счетно, так как оно всюду плотно в топологической степени прямой. Значит, из теоремы А вытекает

Следствие. *Для пространства R^X в топологии поточечной сходимости паракомпактность и свойство Линделёфа равносильны.*

Пространство X называется *слабо финально компактным*, если из каждого его открытого покрытия можно выделить счетное семейство множеств, объединение которого всюду плотно в X. К числу слабо финально компактных пространств относятся все пространства со счетным числом Суслина все пространства, обладающие всюду плотным линделёфовым подпространством. Имеет место более общая, чем теорема А,

Теорема Б. *Паракомпактное слабо финально компактное пространство*

5.1.27. Теорема. *Каждый локально компактный паракомпакт X можно представить в виде объединения некоторого семейства попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подпространств пространства X, каждое из которых обладает свойством Линделёфа.*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ выберем окрестность U_x точки x, такую, что $\overline{U}_x$ компактно, и возьмем какое-нибудь локально конечное открытое покрытие $\mathscr{V}$, вписанное в покрытие $\{U_x\}_{x \in X}$ пространства X. Для каждого $V \in \mathscr{V}$ и любого $x \in \overline{V}$ существует окрестность W_x точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом членов покрытия $\mathscr{V}$. Так как $V \subset \overline{V} \subset \bigcup_{x \in \overline{V}} W_x$ и $\overline{V}$ компактно, множество V содержится в объединении конечного числа множеств W_x. Значит, каждое $V \in \mathscr{V}$ пересекает лишь конечное число членов семейства $\mathscr{V}$. Для произвольного $V_0 \in \mathscr{V}$ пусть $\mathscr{S}_k(V_0) \subset \mathscr{V}$ состоит из всех тех $V \in \mathscr{V}$, для которых существует конечная последовательность $V_1, \ldots, V_k$ элементов семейства $\mathscr{V}$, такая, что $V_k = V$ и $V_i \cap V_{i+1} \neq \varnothing$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Положим далее $\mathscr{S}(V_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{S}_k(V_0)$ и $S(V_0) = \bigcup \mathscr{S}(V_0)$. Как легко видеть, все семейства $\mathscr{S}_k(V_0)$ конечны, откуда вытекает, что $|\mathscr{S}(V_0)| \leqslant \aleph_0$. При $V_0, V_0' \in \mathscr{V}$ множества $S(V_0)$ и $S(V_0')$ либо совпадают, либо не пересекаются, поэтому все множества $S(V_0)$ открыто-замкнуты. Из равенства $\overline{S(V_0)} = S(V_0)$ следует, что $S(V_0) = \bigcup \{\overline{V} \colon V \in \mathscr{S}(V_0)\}$. Значит, все подпространства $S(V_0)$ обладают свойством Линделёфа как счетные объединения компактов. ∎

Обсудим теперь операции над паракомпактами. Начнем с двух теорем.

5.1.2.8. Теорема. *Подпространство типа F_σ паракомпакта является паракомпактом.*

Доказательство. Пусть M — подпространство паракомпакта X и $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где все F_i замкнуты в X. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства M и возьмем семейство $\{V_s\}_{s \in S}$ открытых множеств в X, такое, что $U_s = M \cap V_s$ при всех $s \in S$. При каждом $i = 1, 2, \ldots$ семейство $\{V_s\}_{s \in S} \cup \cup \{X \setminus F_i\}$ является открытым покрытием пространства X; сле-

---

финально компактно. В частности, слабо финально компактный паракомпакт является линделёфовым пространством.

Теорема Б вытекает из следующей очевидной леммы:

Лемма. *В слабо финально компактном пространстве каждое локально конечное семейство открытых множеств счетно.* — *Прим. перев.*

довательно, в него вписано некоторое локально конечное открытое покрытие $\mathscr{A}_i$. Положим

$$\mathscr{B}_i = \{M \cap U\colon\ U \in \mathscr{A}_i \quad \text{и} \quad U \cap F_i \neq \varnothing\}.$$

Ясно, что $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ — открытое σ-локально конечное покрытие пространства M, вписанное в $\{U_s\}_{s \in S}$. Следовательно, пространство M паракомпактно в силу теоремы 5.1.11. ∎

Из последней теоремы вытекает следующий результат, который можно вывести и прямо из определения паракомпактности.

5.1.29. Следствие. *Каждое замкнутое подпространство паракомпакта является паракомпактом.* ∎

5.1.30. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ является паракомпактом в том и только том случае, если все X_s — паракомпакты.*

Доказательство. Если сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ — паракомпакт, то и все X_s — паракомпакты в силу последнего следствия.

Обратно, если все X_s являются паракомпактами и $\mathscr{V} = \{V_t\}_{t \in T}$ произвольное открытое покрытие суммы $\bigoplus_{s \in S} X_s$, то семейство $\bigcup_{s \in S} \mathscr{A}_s$, где $\mathscr{A}_s$ — локально конечное открытое покрытие, вписанное в открытое покрытие $\{X_s \cap V_t\}_{t \in T}$ подпространства X_s, является открытым локально конечным покрытием суммы $\bigoplus_{s \in S} X_s$, вписанным в $\mathscr{V}$. ∎

Как показано в следующем ниже примере, паракомпактность не мультипликативна.

5.1.31. Пример. Из примера 3.8.14 и теоремы 5.1.2 следует, что прямая Зоргенфрея K является паракомпактом. Так как произведение $K \times K$ не нормально (см. пример 2.3.12), на основании теоремы 5.1.5 мы заключаем, что произведение двух паракомпактов не обязательно является паракомпактом (см. задачи 5.5.5 и 5.5.6). ∎

Покажем теперь, что паракомпактом может не быть даже произведение паракомпакта и сепарабельного метризуемого пространства. С другой стороны, произведение паракомпакта и компакта всегда является паракомпактом (см. теорему 5.1.36).

5.1.32. Пример (Майкл). Через Q и P обозначим подпространства пространства R, состоящие из рациональных и иррациональных чисел соответственно. В силу примера 5.1.22, пространство $X = R_Q$ наследственно паракомпактно. Покажем, что произведение $X \times Y$, где $Y = P$, не нормально.

Рассмотрим непересекающиеся замкнутые множества A, B в $X \times Y$, определенные следующим образом:

$$A = \{(y, y) \colon y \in P\} \quad \text{и} \quad B = Q \times P.$$

Достаточно показать, что, каково бы ни было открытое множество $U \subset X \times Y$, содержащее A, всегда $B \cap \overline{U} \neq \varnothing$. Пусть $\{p_1, p_2, \ldots\}$ — какое-нибудь счетное множество, всюду плотное в P. Так как $A \subset U$, то для каждого $y \in P$ найдутся окрестность $U_y \subset P$ точки y, такая, что

$$(9) \qquad \{y\} \times U_y \subset U,$$

и натуральное число $i(y)$, удовлетворяющие условию

$$(10) \qquad p_{i(y)} \in U_y.$$

Положим $P_i = \{y \in P \colon i(y) = i\}$ при $i = 1, 2, \ldots$. Из теоремы Бэра о категории сразу следует, что P не является F_σ-множеством в R (см. упр. 3.9.B). Значит, найдутся натуральное число i_0 и $q_0 \in Q$, для которых $q_0 \in \overline{P_{i_0}}$, где черта обозначает замыкание в R; очевидно, $(q_0, p_{i_0}) \in B$. Пусть $V \times W$ — произвольная окрестность точки (q_0, p_{i_0}) в произведении $X \times Y = R_Q \times P$. Так как $q_0 \in \overline{P_{i_0}}$, то $V \cap P_{i_0} \neq \varnothing$, т. е. существует $y \in V \cap P_{i_0}$. Но $i(y) = i_0$. Поэтому, в силу (10), $p_{i_0} \in U_y$, а отсюда и из (9) следует, что $(y, p_{i_0}) \in U$. Очевидно, $(y, p_{i_0}) \in V \times W$. Значит, каждая окрестность точки $(q_0, p_{i_0}) \in B$ пересекает множество U, т. е. $B \cap \overline{U} \neq \varnothing$.

Заметим, что в проведенном выше доказательстве мы воспользовались только тремя свойствами множеств P и Q, а именно тем, что P и Q — взаимно дополнительные подмножества топологического пространства, P — не типа F_σ и сепарабельно. ∎

Приступим теперь к обсуждению вопроса об инвариантности паракомпактности при отображениях. Для начала заметим, что паракомпактность не является инвариантом непрерывных отображений; действительно, каждое топологическое пространство является непрерывным образом дискретного — следовательно, паракомпактного — пространства. Пример 4.1.10 или примеры 4.4.11 и 5.1.21 показывают, что паракомпактность не является инвариантом и открытых отображений. С другой стороны, имеет место

5.1.33. Теорема Майкла. *Образ паракомпакта при замкнутом отображении является паракомпактом.*

Доказательство. Пусть $f \colon X \to Y$ — замкнутое отображение паракомпакта X на топологическое пространство Y. Из теорем 1.5.20 и 5.1.5 следует, что пространство Y нормально. Значит, в силу теоремы 5.1.11, достаточно доказать, что в каждое открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства Y можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.

Пусть $<$ — какое-нибудь вполне упорядочение на множестве S. Определим по индукции при $i = 1, 2, \ldots$ замкнутое локально конечное покрытие $\mathcal{F}_i = \{F_{s, i}\}_{s \in S}$ пространства X, удовлетворяющее условиям

$$(11) \qquad F_{s, i} \subset f^{-1}(U_s) \quad \text{при} \quad s \in S \quad \text{и} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$(12) \quad f(F_{s, i}) \cap f(E_{s, i-1}) = \varnothing, \quad \text{где } E_{s, i-1} = \bigcup_{t < s} F_{t, i-1} \quad \text{при} \quad i > 1.$$

Существование $\mathcal{F}_1$ следует из леммы 5.1.6. Предположим, что покрытия $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{k-1}$ уже определены и удовлетворяют условиям (11) и (12) при $i < k$. Так как покрытие $\mathcal{F}_{k-1}$ локально конечно, а отображение f замкнуто, множества

$$(13) \qquad W_{s, k} = f^{-1}(U_s) \setminus f^{-1}f(E_{s, k-1}) \subset f^{-1}(U_s)$$

открыты. Для каждого $x \in X$ обозначим через $s(x)$ наименьший элемент множества S, для которого $x \in f^{-1}(U_{s(x)})$. Так как $E_{s(x), k-1} \subset \bigcup_{s < s(x)} f^{-1}(U_s)$ в силу (11), то $f^{-1}f(E_{s(x), k-1}) \subset$ $\subset \bigcup_{s < s(x)} f^{-1}(U_s)$. Значит, $x \in W_{s(x), k}$, т. е. $\{W_{s, k}\}_{s \in S}$ — открытое покрытие пространства X. Применив лемму 5.1.6, получаем локально конечное замкнутое покрытие $\mathcal{F}_k = \{F_{s, k}\}_{s \in S}$ пространства X, такое, что $F_{s, k} \subset W_{s, k}$ при всех $s \in S$. Из (13) следует, что покрытие $\mathcal{F}_k$ удовлетворяет условиям (11) и (12) при $i = k$. Таким образом, построение покрытий $\mathcal{F}_i$ завершено.

Рассмотрим открытые множества $V_{s, i} = Y \setminus f\left(\bigcup_{t \neq s} F_{t, i}\right)$. Так как семейство $\{f(F_{s, i})\}_{s \in S}$ покрывает Y, имеем $V_{s, i} \subset f(F_{s, i})$, откуда следует, что

$$(14) \qquad V_{s, i} \cap V_{t, i} = \varnothing \quad \text{при} \quad s \neq t.$$

Покажем, что семейство $\mathcal{V} = \{V_{s, i}\}_{i=1, s \in S}^{\infty}$ покрывает пространство Y. Для каждого $y \in Y$ обозначим через $s(y)$ наименьший элемент множества S, такой, что $y \in f(F_{s(y), i})$ при некотором целом положительном i, и возьмем какое-нибудь целое $i(y)$, для которого $y \in f(F_{s(y), i(y)-1})$. Значит, $y \in f(E_{s, i(y)-1})$ при всех $s > s(y)$ и, в силу (12), $y \notin f(F_{s, i(y)})$ при $s > s(y)$. С другой стороны, $y \notin f(F_{s, i(y)})$, когда $s < s(y)$, так что $y \in V_{s(y), i(y)}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ покрывает Y. Из $V_{s, i} \subset f(F_{s, i})$ и (11) вытекает, что $\mathcal{V}$ вписано в $\{U_s\}_{s \in S}$.

Применив еще раз лемму 5.1.6, возьмем замкнутое покрытие $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X, такое, что $K_i \subset f^{-1}(V_i)$, где $V_i =$ $= \bigcup_{s \in S} V_{s, i}$ при $i = 1, 2, \ldots$. Пространство Y нормально, поэтому существуют открытые множества $W_i \subset Y$, для которых

(15) $$f(K_i) \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Применив (14) и последнее включение в (15), мы сразу обнаруживаем, что при фиксированном i семейство $\{V_{s,i} \cap W_i\}_{s \in S}$ дискретно. Из первого включения в (15) вытекает, что семейство $\{V_{s,i} \cap W_i\}_{i=1, s \in S}^{\infty}$ покрывает Y. Ясно, что это открытое σ-дискретное покрытие, вписанное в $\{U_s\}_{s \in S}$. ∎

В связи с теоремой Майкла отметим, что есть характеристики паракомпактов, из которых сразу следует сохранение паракомпактности при замкнутых отображениях хаусдорфовых пространств; некоторая такая характеристика неявно используется в приведенном выше доказательстве (см. упр. 5.1.G). Заметим, что важный частный случай теоремы Майкла: образ паракомпакта при совершенном отображении является паракомпактом, — можно установить гораздо проще (см. лемму 4.4.13 и замечание 4.4.14).

Из последнего утверждения и теорем 5.1.30 и 3.7.22 получаем следующий результат:

5.1.34. Теорема. *Если топологическое пространство X обладает локально конечным замкнутым покрытием из паракомпактов, то X само паракомпакт.* ∎

Последнюю теорему можно вывести также из эквивалентности условий (i) и (iv) в теореме 5.1.11.

5.1.35. Теорема. *Прообраз паракомпакта при совершенном отображении является паракомпактом.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение на паракомпакт Y. Рассмотрим открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X и для каждого $y \in Y$ выберем конечное множество $S(y) \subset S$, такое, что $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{s \in S(y)} U_s$. Воспользовавшись теоремой 1.4.13, возьмем окрестность V_y точки y, такую, что

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_y) \subset \bigcup_{s \in S(y)} U_s.$$

В открытое покрытие $\{V_y\}_{y \in Y}$ пространства Y вписано некоторое локально конечное открытое покрытие $\{W_t\}_{t \in T}$. Семейство $\{f^{-1}(W_t)\}_{t \in T}$ является открытым покрытием пространства X, и для каждого $t \in T$ найдется $y_t \in Y$, такое, что

$$f^{-1}(W_t) \subset f^{-1}(V_{y_t}) \subset \bigcup_{s \in S(y_t)} U_s.$$

Легко проверяется, что семейство $\{f^{-1}(W_t)\cap U_s\colon t\in T$ и $s\in S(y_t)\}$ является открытым локально конечным покрытием, вписанным в $\{U_s\}_{s\in S}$. ∎

Из теорем 3.7.1 и 5.1.35 следует

5.1.36. Теорема. *Произведение $X\times Y$ паракомпакта X и компакта Y является паракомпактом.* ∎

Из теоремы 5.1.35 и теоремы Майкла вытекает

5.1.37. Теорема. *Класс паракомпактов совершенен.* ∎

В заключение этого параграфа приведем интересную внешнюю характеристику паракомпактов:

5.1.38. Теорема Тамано. *Для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X паракомпактно.*

(ii) *Для каждой компактификации cX пространства X произведение $X\times cX$ нормально.*

(iii) *Произведение $X\times\beta X$ нормально.*

(iv) *Существует компактификация cX пространства X, такая, что произведение $X\times cX$ нормально.*

Доказательство. Импликация (i)⇒(ii) следует из теоремы 5.1.36. Очевидно, (ii)⇒(iii) и (iii)⇒(iv); остается показать, что (iv)⇒(i).

Пусть $\{U_s\}_{s\in S}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Для каждого $s\in S$ возьмем открытое множество $V_s\subset cX$, такое, что $U_s=X\cap V_s$. Так как дополнение $Z=cX\setminus\bigcup\limits_{s\in S}V_s$ является компактным подмножеством нароста $cX\setminus X$, диагональ $\Delta\subset X\times X$ и произведение $X\times Z$ — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства $X\times cX$. Следовательно, в силу (iv), найдется непрерывная функция $f\colon X\times cX\to I$, для которой

$$f(\Delta)\subset\{0\}\quad\text{и}\quad f(X\times Z)\subset\{1\}.$$

Положив

$$\rho(x,\ y)=\sup_{z\in cX}|f(x,\ z)-f(y,\ z)|,$$

получаем некоторую псевдометрику ρ на множестве X. Топология $\mathcal{O}_1$, порожденная псевдометрикой ρ, содержится в исходной топологии $\mathcal{O}_2$. Действительно, для каждого $x_0\in X$ и любого $\varepsilon>0$ найдутся открытые множества $G_1\times H_1,\ G_2\times H_2,\ \ldots$ $\ldots,\ G_k\times H_k\subset X\times cX$, такие, что $x_0\in G_i$ и $\delta(f(G_i\times H_i))<\varepsilon$ при $i=1,2,\ldots,k$, и $\{x_0\}\times cX\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}(G_i\times H_i)$. Значит, $x_0\in\bigcap\limits_{i=1}^{k}G_i\subset B(x_0,\varepsilon)=\{x\in X\colon\ \rho(x_0,\ x)<\varepsilon\}$, откуда следует, что все открытые шары по отношению к ρ принадлежат $\mathcal{O}_2$, т. е. $\mathcal{O}_1 \subset \subset \mathcal{O}_2$.

Из замечания 4.4.2 следует, что в покрытие $\{B(x, 1/2)\}_{x \in X}$ множества X вписано некоторое покрытие $\{W_t\}_{t \in T}$, открытое и локально конечное по отношению к топологии $\mathcal{O}_1$, а значит, и по отношению к топологии $\mathcal{O}_2$. При всех $x \in X$ и $y \in B(x, 1/2)$ имеем $f(x, y) = |f(x, y) - f(y, y)| \leqslant \rho(x, y) < 1/2$; следовательно, $f(x, y) \leqslant 1/2$, если $y \in \overline{B(x, 1/2)}$, где черта обозначает замыкание в cX. Так как $f(x, z) = 1$ при $z \in Z$, то $\overline{W}_t \cap Z = \varnothing$ для всех $t \in T$. Множество $\overline{W}_t$ компактно, значит, существует конечное множество $S(t) \subset S$, такое, что $W_t \subset \bigcup_{s \in S(t)} U_s$. Как легко проверить, семейство $\{W_t \cap U_s: t \in T, s \in S(t)\}$ является локально конечным открытым покрытием пространства X, вписанным в $\{U_s\}_{s \in S}$. ∎

Из теоремы 5.1.36 и 5.1.38 вытекает

5.1.39. Теорема. *Топологическое пространство X в том и только том случае является паракомпактом, если произведение $X \times Y$ нормально для каждого компакта Y.* ∎

5.1.40. Пример. Из теоремы Тамано следует, что произведение $W_0 \times W$ пространства W_0 всех счетных ординалов и пространства W всех ординалов $\leqslant \omega_1$ не нормально (это можно доказать и прямо — см. задачу 3.12.19(b)). В самом деле, W — компактификация пространства W_0, и в примере 5.1.21 было показано, что пространство W_0 не паракомпактно. Значит, в пространстве $W_0 \times W$ существуют замкнутые непересекающиеся множества A и B, которые нельзя отделить непересекающимися открытыми множествами. Легко проверить, имея в виду, что пространство $W_0 \times W$ счетно компактно (см. 3.10.14), что полученное отождествлением в точку множества A факторпространство $(W_0 \times \times W)/A$ (см. пример 2.4.12) является счетно компактным (даже секвенциально компактным) не регулярным хаусдорфовым пространством (см. упр. 3.10.B).

На примере проекции пространства $W_0 \times W$ на W_0 видно, что нормальность может не сохраняться в сторону прообраза открытыми совершенными отображениями. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие паракомпактности было введено Дьедонне в [1944]; в этой же работе содержатся теоремы 5.1.5 и 5.1.36, а также следствие 5.1.29. Как отмечено выше, теорема 5.1.2 была установлена Моритой в [1948], а теорема 5.1.3 — А. Стоуном в [1948] (паракомпактность метризуемых пространств со счетной базой и локально компактных метризуемых пространств была установлена Дьедонне в [1944]). Теоремы 5.1.9 и 5.1.11, как и равносильность условий (i) и (iv) в теореме 5.1.12, были доказаны Майклом в [1953]. Приведенное простое доказательство леммы 5.1.8 принадлежит Мазеру [1964]. Равносильность условий (i) и (iii) в теореме 5.1.12 была установлена А. Стоуном в [1948]. Тьюки ввел в [1940] класс *звездно нормальных пространств* как пространств, удовлетворяющих условию (iii) теоремы 5.1.12. Он доказал, что каждое метризуемое пространство звездно нормально (см. упр. 5.1.A(c)), установил эквивалентность условий (ii) и (iii) в теореме 5.1.12 и ввел понятие нормального покрытия. Класс коллективно нормальных пространств был определен Бингом в [1951] (посредством условия, фигурирующего у нас в теореме 5.1.17; то, что это условие эквивалентно данному нами определению, было доказано Даукером в [1952a]). Работа Бинга содержит также теорему 5.1.18 и пример 5.1.23; сейчас не известны примеры нормальных не коллективно нормальных пространств, отличные от этого примера Бинга и его модификаций (см. задачу 5.5.3). Модификация топологий, описанная в примере 5.1.22, была предложена Бингом в [1951] и Ханнером в [1951]. Она была вновь применена Майклом в [1963], где приведен пример 5.1.32 (дальнейшие сведения можно найти в задачах 5.5.2 и 5.5.4). Примеры 5.1.31 (принадлежащий Зоргенфрею [1947]) и 5.1.32 наводят на вопрос, следует ли из нормальности произведения двух паракомпактных пространств, что это произведение паракомпактно. Как показано Пшимусинским в [1980], ответ отрицателен. С другой стороны, М. Рудин и Страбёрд доказали в [1975], что если произведение метрического пространства и паракомпакта нормально, то оно паракомпактно (см. задачу 5.5.19(d)). Теорема 5.1.25 была замечена Уиллардом в [1971]. Как легко показать, каждый паракомпакт со свойством Суслина (см. задачу 1.7.12) тоже является линделёфовым пространством. Цитированная выше работа Мориты [1948] содержит также теорему 5.1.27. Теоремы 5.1.28 и 5.1.34 были доказаны Майклом в [1953], а теорема 5.1.33 доказана им же в [1957] (для совершенных отображений ее доказали Морита и Ханаи в [1956]). Теорема 5.1.35 была в принципе доказана Ханаи в [1956]. Равносильность условий (i) и (iii) в теореме 5.1.38 и теорема 5.1.39 доказаны Тамано в [1960a]. Равносильность условий (i) и (iv) в теореме 5.1.38 была получена независимо Корсоном в [1962], Моритой в [1962] и Тамано в [1962].

УПРАЖНЕНИЯ

5.1.A. (a) Заметьте, что если в каждое двухэлементное открытое покрытие T_1-пространства X можно сильно звездно вписать открытое покрытие, то пространство X нормально.

(b) Покажите непосредственно, что в каждое конечное открытое покрытие нормального пространства можно сильно звездно вписать конечное открытое покрытие.

Указание. Рассмотрите сначала случай двухэлементного покрытия.

(c) (Тьюки [1940]). Покажите непосредственно, что в каждое открытое покрытие метризуемого пространства можно сильно звездно вписать открытое покрытие.

Указание. Пусть $\mathcal{U}$ — произвольное открытое покрытие метризуемого пространства X. Рассмотрите метрику на пространстве X и для каждого $x \in X$ возьмите $\varepsilon_x > 0$, такое, что шар $B(x, 4\varepsilon_x)$ содержится в некотором элементе семейства $\mathcal{U}$. Проверьте, что покрытие $\{B(x, \varepsilon_x)\}_{x \in X}$ звездно вписано в $\mathcal{U}$.

(d) Заметьте, что пространство X компактно в том и только том случае, если каждое открытое покрытие пространства X содержит локально конечное подпокрытие.

(e) Заметьте, что регулярное пространство X обладает свойством Линделёфа в том и только том случае, если каждое открытое покрытие пространства X содержит σ-локально конечное (или, что равносильно, σ-дискретное) подпокрытие.

5.1.B (Архангельский [1965]). (a) Покажите, что регулярное k-пространство X паракомпактно в том и только том случае, если в каждое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X можно вписать замкнутое покрытие $\mathcal{F}$, такое, что каждый компакт, лежащий в X, пересекается лишь с конечным числом членов семейства $\mathcal{F}$.

(b) Покажите, что нормальное k-пространство X паракомпактно в том и только том случае, если в каждое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X можно вписать открытое покрытие $\mathcal{V}$, такое, что каждый компакт, лежащий в X, пересекается лишь с конечным числом членов семейства $\mathcal{V}$.

5.1.C. (a) Проверьте, что коллективная нормальность наследуется замкнутыми подмножествами (см. задачу 5.5.1(b)) и является аддитивным свойством.

(b) Покажите, что коллективная нормальность сохраняется замкнутыми отображениями, но не сохраняется открытыми отображениями (см. упр. 4.2.D).

(c) Заметьте, что коллективная нормальность не сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями.

(d) Приведите пример обратной последовательности паракомпактов, предел которой не нормален (см. задачу 5.5.4(c)).

Указание. Воспользуйтесь примером 5.1.32.

5.1.D. Приведите пример компакта X и его подпространства $M \subset X$, таких, что пространство X_M, определенное в примере 5.1.22, не нормально.

Указание. Рассмотрите пространство $X \times Y$ из примера 2.3.36 или любой другой не наследственно нормальный компакт.

5.1.E. Заметьте, что у каждой точки пространства X из примера 5.1.23 есть паракомпактная открыто-замкнутая окрестность.

5.1.F. (a) (Дьедонне [1944]). Заметьте, что X наследственно паракомпактно в том и только том случае, если все открытые подпространства пространства X паракомпактны.

(b) (Даукер [1947a]). Каждое совершенно нормальное паракомпактное пространство наследственно паракомпактно.

(c) Покажите, что каждое сепарабельное наследственно паракомпактное хаусдорфово пространство является наследственно линделёфовым пространством и, значит, совершенно нормально (см. упр. 3.8.A (b)). Приведите пример наследственно паракомпактного хаусдорфова пространства, которое не совершенно нормально.

5.1.G (Майкл [1957]). Семейство $\{A_s\}_{s\in S}$ подмножеств топологического пространства называется *консервативным*, если $\overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s} = \bigcup_{s\in S_0} \overline{A_s}$ для каждого $S_0 \subset S$.

Докажите, что для произвольного регулярного пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X паракомпактно.*

(2) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое консервативное покрытие.*

(3) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать консервативное покрытие (состоящее из произвольных множеств).*

(4) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое консервативное покрытие.*

Указание. При доказательстве импликации (4) $\Rightarrow$ (1) заметьте сначала, что для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s\in S}$ пространства X существует замкнутое консервативное покрытие $\{F_s\}_{s\in S}$, такое, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$. Заметьте затем, что X нормально, и рассуждайте далее по аналогии с доказательством теоремы 5.1.33, где $Y = X$ и $f = \mathrm{id}_X$.

5.1.H. Докажите, что если пространство X метризуемо, а пространство R^X с компактно-открытой топологией удовлетворяет первой аксиоме счетности, то X локально компактно и обладает счетной базой; заметьте, что и R^X при этом имеет счетную базу (см. теорему 3.4.16).

Указание. Сначала с помощью упр. 3.4.E покажите, что X локально компактно. Затем воспользуйтесь 5.1.27, 3.4.4 и 2.3.F(b).

5.1.I. (Нагата [1950]). Покажите, что полное по Чеху паракомпактное пространство X метризуемо в том и только том случае, если диагональ Δ является G_δ-множеством в произведении $X \times X$ (см. упр. 4.2.B и задачу 5.5.9 (c)).

Указание. Определите счетное семейство $\{\mathscr{V}_i\}_{i=1}^{\infty}$ локально конечных открытых покрытий пространства X, такое, что:

(1) Если семейство $\mathscr{A}$ подмножеств пространства X центрировано и содержит множества диаметра, меньшего чем $\mathscr{V}_i$, для каждого $i = 1, 2, \ldots$, то пересечение $\bigcap\{\bar{A}: A \in \mathscr{A}\}$ не пусто.

(2) Для каждых двух различных точек x, y пространства X найдется натуральное число i, при котором замыкание никакого элемента семейства $\mathscr{V}_i$ не содержит одновременно x и y.

Проверьте, что семейство всех конечных пересечений $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k$, где $V_i \in \mathscr{V}_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, является базой пространства X.

Можно взять также непрерывную функцию $f: X \times \beta X \to I$, для которой $\Delta = f^{-1}(0)$, и положить $\rho(x, y) = \sup\limits_{z \in \beta X} |f(x, z) - f(y, z)|$.

5.1.J (Тьюки [1940], А. Стоун [1948], Майкл [1953], Морита [1964]).

(a) Покажите, что для каждого σ-локально конечного покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X функционально открытыми множествами существуют псевдометрика ρ на X, такая, что отображение $\rho: X \times X \to R$ непрерывно, и покрытие $\{V_s\}_{s \in S}$ множества X, открытое относительно топологии на X, порожденной псевдометрикой ρ, для которого $V_s \subset U_s$ при всех $s \in S$.

Указание. Рассмотрите непрерывные функции $f_s: X \to I$, для которых $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$.

(b) Выведите из (a), что для каждого σ-локально конечного покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X функционально открытыми множествами существуют непрерывное отображение $f: X \to Y$ на метризуемое пространство Y и открытое покрытие $\{W_s\}_{s \in S}$ пространства Y, такие, что $f^{-1}(W_s) \subset U_s$ при всех $s \in S$.

Указание. Примените упр. 4.2.1.

(c) Заметьте, что (a) и (b) выполняются для любого открытого покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X, обладающего подчиненным ему разбиением единицы (см. упр. 5.4.H (c)).

(d) Заметьте, что (a) и (b) выполняются, если пространство X нормально и открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ либо локально конечно, либо точечно конечно и счетно (см. упр. 5.2.F (b)).

(e) Докажите, что T_1-пространство X паракомпактно в том и только том случае, если для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X найдутся непрерывное отображение $f: X \to Y$ на метризуемое пространство Y и открытое покрытие $\{W_s\}_{s \in S}$ пространства Y, такие, что $f^{-1}(W_s) \subset U_s$ при всех $s \in S$.

(f) Выведите из (e), что каждый паракомпакт гомеоморфен замкнутому подпространству произведения некоторого множества метризуемых пространств (см. задачу 8.5.13).

5.2. СЧЕТНО ПАРАКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическое пространство X называется *счетно паракомпактным*, если в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Ясно, что каждое паракомпактное пространство счетно паракомпактно и что таковы все счетно компактные пространства. Из последнего замечания следует, что существуют коллективно нормальные счетно паракомпактные пространства, не являющиеся паракомпактами (см. пример 5.1.21), и что существуют счетно паракомпактные хаусдорфовы не регулярные пространства (см. пример 5.1.40). Из теоремы 3.10.22 вытекает, что каждое псевдокомпактное счетно паракомпактное пространство счетно компактно. Значит, пространство X из примера 3.10.29 является тихоновским не счетно паракомпактным пространством (см. также упр. 5.2.C). С другой стороны, найти нормальное пространство, которое не счетно паракомпактно, было известной задачей общей топологии на протяжении примерно двадцати лет. Сейчас такие пространства известны, но они слишком сложны для того, чтобы их можно было здесь описать.

В этом параграфе содержится несколько характеристик счетно паракомпактных пространств и нормальных счетно паракомпактных пространств. Дальнейшую информацию можно найти в упражнениях (см. также задачу 5.5.15).

5.2.1. Теорема. *Следующие условия равносильны для произвольного топологического пространства X:*

(i) *Пространство X счетно паракомпактно.*

(ii) *Для каждого счетного открытого покрытия $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X существует локально конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X, такое, что $V_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.*

(iii) *Какова бы ни была возрастающая последовательность $W_1 \subset W_2 \subset \ldots$ открытых в X множеств, для которой $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = X$, найдется последовательность $F_1, F_2, \ldots$ замкнутых в X множеств, такая, что $F_i \subset W_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Int} F_i = X$.*

(iv) *Для каждой убывающей последовательности $F_1 \supset \supset F_2 \supset \ldots$ замкнутых в X множеств, такой, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$, най-*

дется последовательность $W_1, W_2, \ldots$ *открытых в* X *множеств, такая, что* $F_i \subset W_i$ *при* $i = 1, 2, \ldots$ *и* $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{W_i} = \varnothing$.

Доказательство. Для доказательства импликации (i)$\Rightarrow$(ii) достаточно взять любое локально конечное открытое покрытие $\mathscr{V}$, вписанное в покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, выбрать для каждого $V \in \mathscr{V}$ номер $i(V)$, такой, что $V \subset U_{i(V)}$, и положить $V_i = \bigcup_{i(V)=i} V$.

Покажем, что (ii)$\Rightarrow$(iii). Так как $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное открытое покрытие пространства X, существует локально конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X, такое, что $V_i \subset W_i$ при $i = 1, 2 \ldots$. Множества $F_i = X \setminus \bigcup_{j>i} V_j \subset \bigcup_{j \leqslant i} V_j$ замкнуты и $F_i \subset W_i$ при $i = 1, 2, \ldots$, так как $\bigcup_{j \leqslant i} V_j \subset \bigcup_{j \leqslant i} W_j = W_i$. Семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ локально конечно, поэтому у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, которая содержится в некотором F_i, т. е. $\bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Int} F_i = X$.

Из формул де Моргана легко следует, что условия (iii) и (iv) равносильны. Значит, для завершения доказательства достаточно показать, что (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное открытое покрытие пространства X. Рассмотрим возрастающую последовательность $W_1 \subset W_2 \subset \ldots$ открытых множеств в X, где $W_i = \bigcup_{j \leqslant i} U_j$. Так как $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = X$, найдется последовательность $F_1, F_2, \ldots$ замкнутых в X множеств, для которой $F_i \subset W_i$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Int} F_i = X$. Множество $V_i = U_i \setminus \bigcup_{j<i} F_j \subset U_i$ открыто при $i = 1, 2, \ldots$; так как $\bigcup_{j<i} F_j \subset \bigcup_{j<i} W_j \subset \bigcup_{j<i} U_j$, то $U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j \subset V_i$, откуда следует, что семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ покрывает X. У каждой точки $x \in X$ есть окрестность вида $\operatorname{Int} F_j$. Эта окрестность не пересекается с теми множествами V_i, для которых $i > j$; значит, покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ локально конечно. ■

5.2.2. Следствие. *Нормальное пространство* X *счетно паракомпактно в том и только том случае, если для каждой убывающей последовательности* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ *замкнутых в* X *множеств, удовлетворяющей условию* $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$, *найдется последовательность*

$W_1, W_2, \ldots$ *открытых в* X *множеств, такая, что* $F_i \subset W_i$ *при* $i = 1, 2, \ldots$ *и* $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \varnothing$. ∎

5.2.3. Теорема. *Для каждого* T_1*-пространства* X *следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство* X *нормально и счетно паракомпактно.*

(ii) *Каково бы ни было счетное открытое покрытие* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ *пространства* X, *найдется локально конечное открытое покрытие* $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ *пространства* X, *для которого* $\overline{V}_i \subset U_i$ *при* $i = 1, 2, \ldots$.

(iii) *Для каждого счетного открытого покрытия* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ *пространства* X *существует замкнутое покрытие* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ *пространства* X, *такое, что* $F_i \subset U_i$ *при* $i = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Для доказательства импликации (i)⇒(ii) достаточно заметить, что, в силу теоремы 5.2.1, существует локально конечное открытое покрытие $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X, для которого $W_i \subset U_i$ при $i = 1, 2 \ldots$, и применить затем теорему 1.5.18.

Импликация (ii)⇒(iii) очевидна. Покажем, что (iii)⇒(i). Заметим сначала, что каждое T_1-пространство X, которое удовлетворяет условию (iii), нормально. Действительно, для произвольных открытых подмножеств U, V пространства X, таких, что $U \cup V = X$, положим $U_1 = U$, $U_2 = V$, $U_3 = U_4 = \ldots = \varnothing$; условие (iii) дает нам тогда замкнутые множества $F_1, F_2 \subset X$, такие, что $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ и $F_1 \cup F_2 = X$. Из формул де Моргана следует, что, какова бы ни была последовательность $F_1, F_2, \ldots$ замкнутых в пространстве X множеств, удовлетворяющая условию (iii) и такая, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$, найдется последовательность $W_1, W_2, \ldots$ открытых множеств в X, такая, что $F_i \subset W_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \varnothing$. Следовательно, X счетно паракомпактно по следствию 5.2.2. ∎

Помимо локально конечных и точечно конечных семейств множеств рассматривают также звездно конечные и звездно счетные семейства: семейство $\{A_s\}_{s \in S}$ подмножеств множества X *звездно конечно* (*звездно счетно*), если при каждом $s_0 \in S$ множество $\{s \in S\colon A_s \cap A_{s_0} \neq \varnothing\}$ конечно (счетно). Ясно, что каждое звездно конечное семейство точечно конечно. Отметим, что произвольное звездно конечное семейство подмножеств топологического пространства не обязано быть локально конечным; однако любое звездно конечное открытое покрытие топологического пространства локально конечно.

Нашей следующей теореме, содержащей еще два условия, равносильных счетной паракомпактности в классе нормальных пространств, предшествует лемма.

5.2.4. Лемма. *В каждое счетное покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ топологического пространства X функционально открытыми множествами U_i можно вписать счетное звездно конечное покрытие, состоящее из функционально открытых множеств.*

Доказательство. Пусть $U_i = f_i^{-1}((0, 1])$, где $f_i\colon X \to I$ — непрерывное отображение. Полагая $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$, мы определяем непрерывную функцию $f\colon X \to I$. Так как $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X$, то $f(x) > 0$ при всех $x \in X$. Семейства $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$V_k = f^{-1}((1/k, 1]) \quad \text{и} \quad F_k = f^{-1}([1/k, 1]),$$

покрывают X и состоят из функционально открытых и функционально замкнутых множеств соответственно.

Докажем, что функционально открытые множества $U_{k,j} = U_j \cap (V_{k+1} \setminus F_{k-1})$, где $1 \leqslant j \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$ и $F_0 = \varnothing$, образуют звездно конечное покрытие пространства X. Пусть x — произвольная точка из X. Обозначим через k наименьшее целое число k, такое, что $x \in F_k$. Как легко проверить, $F_k \subset \bigcup_{j \leqslant k} U_j$, поэтому найдется $j \leqslant k$, для которого $x \in U_j$, откуда следует, что $x \in U_j \cap (F_k \setminus F_{k-1}) \subset U_{k,j}$. Для каждого $j \leqslant k$ имеем $U_{k,j} \subset V_{k+1} \subset F_{k+1}$, так что

$$(1) \qquad U_{k,j} \cap U_{m,i} = \varnothing \quad \text{при} \quad m \geqslant k+2 \quad \text{и} \quad i \leqslant m.$$

Из (1) следует, что покрытие $\{U_{k,j}\}_{k=1,\, j \leqslant k}^{\infty}$ звездно конечно. ∎

Заметим, что приведенная выше лемма и теорема 1.5.19 дают

5.2.5. Следствие. *Каждое совершенно нормальное пространство счетно паракомпактно.* ∎

5.2.6. Теорема. *Для любого нормального пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X счетно паракомпактно.*

(ii) *В каждое счетное открытое покрытие пространства X можно вписать звездно конечное открытое покрытие.*

(iii) *В любое счетное открытое покрытие пространства X можно вписать точечно конечное открытое покрытие.*

Доказательство. Импликация (i) ⇒ (ii) вытекает из теоремы 5.2.3, леммы Урысона и леммы 5.2.4. Импликация (ii) ⇒ (iii) очевидна, а (iii) ⇒ (i) следует из теорем 1.5.18 и 5.2.1. ∎

Мы завершаем этот параграф интересной характеристикой счетно паракомпактных нормальных пространств в терминах произведений.

5.2.7. Лемма. *Произведение $X \times Y$ счетно паракомпактного нормального пространства X и компакта со счетной базой Y нормально.*

Доказательство. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — база пространства Y. Обозначим через $\mathcal{S}$ семейство всех конечных множеств натуральных чисел и для каждого $S \in \mathcal{S}$ положим $W_S = \bigcup_{i \in S} W_i$. В силу теоремы 3.1.16, проекция p: $X \times Y \to X$ является замкнутым отображением. Пусть q: $X \times Y \to Y$ — другая проекция, и для каждого $M \subset X \times Y$ пусть $M_x = q[(\{x\} \times Y) \cap M]$.

Рассмотрим произвольные непересекающиеся замкнутые множества A, B в $X \times Y$ и при всех $S \in \mathcal{S}$ положим

$$U_S = \{x \in X\colon\ A_x \subset W_S \subset \overline{W}_S \subset Y \setminus B_x\}. \tag{2}$$

Так как

$$X \setminus U_S = \{x \in X\colon\ A_x \cap (Y \setminus W_S) \neq \varnothing\} \cup \{x \in X\colon\ B_x \cap \overline{W}_S \neq \varnothing\} =$$
$$= p[A \cap (X \times (Y \setminus W_S))] \cup p[B \cap (X \times \overline{W}_S)],$$

множества U_S открыты. Приняв во внимание компактность Y, легко проверить, что семейство $\{U_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ покрывает X; очевидно, оно является счетным открытым покрытием. Следовательно, по теореме 5.2.3, существует локально конечное открытое покрытие $\{V_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ пространства X, такое, что $V_S \subset \overline{V}_S \subset U_S$ при всех $S \in \mathcal{S}$.

Множество $U = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} (V_S \times W_S)$ открыто. Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$A \subset U \quad \text{и} \quad B \subset V = (X \times Y) \setminus \overline{U}. \tag{3}$$

Для каждого $(x, y) \in A$ существует $S \in \mathcal{S}$, такое, что $x \in V_S \subset U_S$. Из (2) вытекает, что $(x, y) \in V_S \times W_S \subset U$; значит, первое из соотношений (3) выполняется. Предположим теперь, что нашлась точка $(x, y) \in B \cap \overline{U}$. В силу локальной конечности семейства $\{V_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, существует окрестность $W \subset X$ точки $x \in X$, пересекающая лишь конечное число множеств V_S. Значит, окрестность $W \times Y$ точки (x, y) пересекает лишь конечное число произведений $V_S \times W_S$ — например, $V_{S_1} \times W_{S_1}$ $V_{S_2} \times W_{S_2}$, ..., $V_{S_k} \times W_{S_k}$. Так как $(x, y) \in \overline{U}$, то $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{k} (\overline{V_{S_i} \times W_{S_i}})$

и существует $i \leqslant k$, для которого

(4) $(x, y) \in B \cap (\overline{V s_i \times W s_i}) = B \cap (\overline{V} s_i \times \overline{W} s_i) \subset B \cap (U s_i \times \overline{W} s_i)$.

Из (4) следует, что $x \in U s_i$ и $y \in B_x \cap \overline{W} s_i$, что противоречит (2). Таким образом, доказательство второго соотношения в (3) завершено. ∎

5.2.8. Теорема. *Топологическое пространство X нормально и счетно паракомпактно в том и только том случае, если произведение $X \times I$ пространства X на отрезок I нормально.*

Доказательство. В силу предшествующей леммы, для любого счетно паракомпактного нормального пространства X произведение $X \times I$ нормально.

Рассмотрим теперь произвольное топологическое пространство X, такое, что $X \times I$ нормально. Так как X гомеоморфно замкнутому подпространству $X \times \{0\}$ пространства $X \times I$, пространство X нормально. Покажем, что X удовлетворяет условию (iv) теоремы 5.2.1. Пусть $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность замкнутых множеств в X, такая, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$. Множества

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \times \{1/i\}) \quad \text{и} \quad B = X \times \{0\}$$

не пересекаются и замкнуты в $X \times Y$. Следовательно, существуют открытые множества $U, V \subset X \times Y$, для которых $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Множества $W_i = \{x \in X\colon (x, 1/i) \in U\}$ открыты при $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{W}_i = \varnothing$, так как $\overline{U} \cap B = \varnothing$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что $F_i \subset W_i$ при $i = 1, 2, \ldots$. ∎

5.2.9. Замечание. В последнем доказательстве использовалось только то, что в пространстве I есть нетривиальная сходящаяся последовательность; значит, мы доказали несколько больше — а именно, что если произведение $X \times A(\aleph_0)$ нормально, то пространство X нормально и счетно паракомпактно.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Класс счетно паракомпактных пространств был независимо введен Даукером в [1951] и Катетовым в [1951]. Внимание топологов фокусировалось на счетно паракомпактных пространствах в течение двадцати лет после 1951 г. в связи с поиском нормального не счетно паракомпактного пространства. Такое пространство было, наконец, описано М. Рудин в [1971]; это пространство даже коллективно нормально. Класс счетно паракомпактных хаусдорфовых пространств интересен главным образом из-за того, что им указывается граница той области, в которой выполняются некоторые важные теоремы (см. задачи 5.5.18 и 5.5.20). В цитированных выше работах Даукер и Катетов независимо доказали следствие 5.2.2, теорему 5.2.3, следствие 5.2.5 и эквивалентность условий (i) и (iii) в теореме 5.2.6. Теорема 5.2.1 доказана Исикавой в [1955]. Лемма 5.2.4 была в принципе доказана в работе Мориты [1948]. Равносильность условий (i) и (ii) в теореме 5.2.6 доказана Исэки [1954]. Теорема 5.2.8 и лемма 5.2.7 доказаны Даукером в [1951].

УПРАЖНЕНИЯ

5.2.A. Покажите, что T_1-пространство X счетно паракомпактно и нормально в том и только том случае, если каждому счетному открытому покрытию пространства X подчинено разбиение единицы или, что равносильно, локально конечное разбиение единицы.

Указание. Покажите, видоизменив доказательство леммы 5.1.8, что если каждому двухэлементному открытому покрытию T_1-пространства X подчинено некоторое разбиение единицы, то пространство X нормально.

5.2.B. Проверьте, что счетная паракомпактность наследуется замкнутыми подмножествами и является аддитивным свойством (см. задачу 5.5.16).

5.2.C. (a) Проверьте, что пространство $A(\aleph_0)\times A(\aleph_1)\setminus\{(x_0, y_0)\}$ где x_0 и y_0 — единственные предельные точки пространств $A(\aleph_0)$ и $A(\aleph_1)$ соответственно, не счетно паракомпактно (см. пример 2.3.36).

(b) Покажите, что плоскость Немыцкого и квадрат прямой Зоргенфрея не счетно паракомпактны.

Указание. Пусть $Q=\{x_1, x_2, \ldots\}$ — множество всех точек плоскости Немыцкого L вида $(q, 0)$, где q рационально. Применив теорему Бэра о категории, покажите сначала, что Q и $L_1\setminus Q$ нельзя отделить непересекающимися открытыми множествами. Рассмотрите затем открытое покрытие $\{L\setminus Q\}\cup\{U_1(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ и получите противоречие.

(c) Приведите пример не нормального тихоновского пространства, которое счетно паракомпактно.

(d) Проверьте, что пространство X в примере 5.1.23 счетно паракомпактно.

(e) Покажите, что произведение $X\times Y$ в примере 5.1.32 не счетно паракомпактно, и выведите отсюда, что предел обратной последовательности счетно паракомпактных хаусдорфовых пространств может не быть счетно паракомпактным пространством (см. задачу 5.5.19 (d)).

5.2.D (Олл [1965]; для счетно компактных хаусдорфовых пространств — П. С. Александров и Урысон [1929]). Покажите, что каждое счетно паракомпактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности регулярно.

5.2.E. Докажите, что для каждого счетного покрытия $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ топологического пространства X функционально открытыми множествами U_i существует покрытие $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ функционально замкнутыми множествами, такое, что $F_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Указание. Возьмите какую-нибудь непрерывную функцию $f_i\colon X \to I$, такую, что $U_i = f_i^{-1}((0, 1])$ при $i = 1, 2, \ldots$, и рассмотрите функции f_i/f, где $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$.

Можно применить также упр. 5.1.J (b).

5.2.F (Морита [1964]). (a) Покажите, что в каждое σ-локально конечное открытое покрытие счетно паракомпактного нормального пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие.

(b) Заметьте, что утверждения (a) и (b) из упр. 5.1.J выполняются, если X — произвольное счетно паракомпактное нормальное пространство, а открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ σ-локально конечно.

5.2.G. (a) (Ханаи [1956], Хенриксен и Исбелл [1958]). Покажите, что счетная паракомпактность сохраняется в обе стороны замкнутыми отображениями со счетно компактными прообразами точек. Заметьте, что класс счетно паракомпактных пространств совершенен.

Указание. При доказательстве сохранения счетной паракомпактности в сторону образа воспользуйтесь условием (iii) теоремы 5.2.1; доказывая ее сохранение в сторону прообраза, модифицируйте доказательство теоремы 5.1.35, заменив множества V_y на множества $Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup\limits_{s \in S(y)} U_s\right)$.

(b) (Даукер [1951]). Выведите из (a), что произведение $X \times Y$ счетно паракомпактного пространства X и компактного пространства Y счетно паракомпактно. Заметьте, что этот результат следует также из теоремы 3.1.16 и условия (iv) теоремы 5.2.1.

(c) (Зенор [1969]). Докажите, что счетная паракомпактность не сохраняется замкнутыми отображениями в классе хаусдорфовых пространств.

Указание. Пусть Z — не нормальное тихоновское пространство, которое счетно паракомпактно. Возьмем любые непересекающиеся замкнутые множества A, B в Z, не отделимые непересекающимися открытыми множествами (см. упр. 5.2.C (c)). Рассмотрите естественное факторное отображение суммы $X=\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i=Z\times\{i\}$, на пространство Y, получающееся из X при отождествлении множества $\bigcup_{i=1}^{\infty}(B\times\{i\})$ в точку.

(d) (Ханаи [1956]). Покажите, что класс счетно паракомпактных нормальных пространств инвариантен относительно замкнутых отображений.

Указание. Примените следствие 5.2.2.

(e) Покажите, что счетная паракомпактность сохраняется открыто-замкнутыми отображениями на хаусдорфовы пространства.

5.3. СЛАБО И СИЛЬНО ПАРАКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическое пространство X называется *слабо паракомпактным*[1]), если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать точечно конечное открытое покрытие. Каждое паракомпактное пространство слабо паракомпактно, но обратное неверно (см. пример 5.3.4 и задачу 5.5.3 (c)). Из теоремы 5.2.6 вытекает, что каждое слабо паракомпактное нормальное пространство счетно паракомпактно; предположение о нормальности здесь существенно (см. упр. 5.2.C (a) и 5.3.B (b)).

Обсуждению слабо паракомпактных пространств мы предпосылаем простую теорему о точечно конечных покрытиях. Покрытие $\{A_s\}_{s\in S}$ пространства X называется *неприводимым*, если $\bigcup_{s\in S_0} A_s\neq X$ для каждого собственного подмножества S_0 множества S.

5.3.1. Теорема. *Каждое точечно конечное покрытие $\{A_s\}_{s\in S}$ пространства X содержит неприводимое подпокрытие.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathscr{G}$ всех отображений G множества S в семейство всех подмножеств множества X, подчиненных следующим условиям:

$$(1) \qquad G(s)=A_s \quad \text{или} \quad G(s)=\varnothing$$

---

[1]) Употребляются также названия: *метакомпактное* пространство и *точечно паракомпактное* пространство.

и

(2)
$$\bigcup_{s \in S} G(s) = X.$$

Упорядочим семейство $\mathscr{G}$, положив $G_1 \leqslant G_2$ в том и только том случае, если $G_2(s) = \varnothing$ при всех $s \in S$, таких, что $G_1(s) = \varnothing$. Как в доказательстве теоремы 1.5.18, легко проверяется, что если подсемейство $\mathscr{G}_0 \subset \mathscr{G}$ линейно упорядочено, то формула $G_0(s) = \bigcap_{G \in \mathscr{G}_0} G(s)$ для каждого $s \in S$ определяет некоторый элемент семейства $\mathscr{G}$ и $G \leqslant G_0$ при всех $G \in \mathscr{G}_0$.

Из леммы Куратовского — Цорна следует, что в $\mathscr{G}$ существует максимальный элемент G.

Покрытие $\{A_s\}_{s \in S_1}$, где $S_1 = \{s \in S\colon G(s) \neq \varnothing\}$, является неприводимым подпокрытием покрытия $\{A_s\}_{s \in S}$. ∎

Покажем, обобщая теоремы 4.1.17 и 5.1.20, что в классе слабо паракомпактных пространств компактность равносильна счетной компактности (см. задачу 5.5.23).

5.3.2. Теорема. *Каждое счетно компактное слабо паракомпактное пространство компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U}$ — произвольное открытое покрытие счетно компактного слабо паракомпактного пространства X. В силу теоремы 5.3.1, существует неприводимое точечно конечное открытое покрытие $\mathscr{V} = \{V_t\}_{t \in T}$, вписанное в $\mathscr{U}$. Так как покрытие $\mathscr{V}$ неприводимо, при каждом $t \in T$ найдется точка $x_t \in V_t \setminus \bigcup_{t' \neq t} V_{t'}$. Множества V_t покрывают пространство X; значит, у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, которая содержит ровно одну точку множества $A = \bigcup_{t \in T} \{x_t\}$. Следовательно, $A^{\mathrm{d}} = \varnothing$, и из счетной компактности пространства X вытекает, что множество A конечно; значит, множество T тоже конечно и $\mathscr{V}$ — конечное открытое покрытие, вписанное в $\mathscr{U}$. ∎

5.3.3. Теорема Майкла — Нагами. *Каждое слабо паракомпактное коллективно нормальное пространство паракомпактно.*

Доказательство. В силу теоремы 5.1.11, достаточно доказать, что в каждое точечно конечное открытое покрытие $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ коллективно нормального пространства X можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие.

Мы определим по индукции относительно $i = 0, 1, \ldots$ дискретные семейства $\mathscr{V}_i = \{V_T\}_{T \in \mathscr{T}_i}$ открытых в X множеств, такие, что каждый элемент семейства $\mathscr{V}_i$ будет содержаться в некотором U_s и множества $W_i = \bigcup \mathscr{V}_i$ будут удовлетворять условию

(3) $$\text{если } |\{s \in S\colon x \in U_s\}| \leqslant i, \quad \text{то} \quad x \in \bigcup_{j=0}^{i} W_j.$$

Положим $\mathscr{V}_0 = \{\varnothing\}$ и предположим, что семейства $\mathscr{V}_i$, удовлетворяющие условию (3), уже определены при $i \leqslant k$. Обозначим через $\mathscr{T}_{k+1}$ семейство всех подмножеств множества S, состоящих ровно из $k+1$ элементов, и для каждого $T \in \mathscr{T}_{k+1}$ положим

(4) $$A_T = \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{k} W_j\right) \cap \left(X \setminus \bigcup_{s \notin T} U_s\right).$$

Отметим, что

(5) $$A_T \subset \bigcap_{s \in T} U_s \quad \text{при всех} \quad T \in \mathscr{T}_{k+1}.$$

Действительно, если бы при некоторых $x \in A_T$ и $s_0 \in T$ было $x \notin U_{s_0}$, то, в силу (4), точка x принадлежала бы самое большее k элементам семейства $\mathscr{U}$ — а это противоречило бы (3).

Покажем теперь, что у каждой точки $x \in X$ есть окрестность $V(x)$, пересекающаяся не более чем с одним элементом семейства $\{A_T\}_{T \in \mathscr{T}_{k+1}}$. Если в $\mathscr{U}$ есть $k+2$ элементов $U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_{k+2}}$, которым x принадлежит, то для $V(x) = \bigcap_{i=1}^{k+2} U_{s_i}$, в силу (4), имеем $V(x) \cap A_T = \varnothing$ при всех $T \in \mathscr{T}_{k+1}$. Если x принадлежит только $i \leqslant k$ элементам семейства $\mathscr{U}$, то, в силу (3), множество $V(x) = \bigcup_{j=0}^{k} W_j$ — окрестность точки x, не пересекающаяся ни с одним A_T. Наконец, если точка x принадлежит ровно $k+1$ членам семейства $\mathscr{U}$, например $U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_{k+1}}$, то окрестность $V(x) = \bigcap_{i=1}^{k+1} U_{s_i}$ точки пересекается самое большее с одним членом семейства $\{A_T\}_{T \in \mathscr{T}_{k+1}}$ — а именно с множеством A_{T_0}, где $T_0 = \{s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}\}$.

Следовательно, $\{A_T\}_{T \in \mathscr{T}_{k+1}}$ — дискретное семейство замкнутых в X множеств. Пусть $\{G_T\}_{T \in \mathscr{T}_{k+1}}$ — дискретное семейство открытых множеств в X, такое, что $A_T \subset G_T$ при всех $T \in \mathscr{T}_{k+1}$. Покажем, что семейство $\mathscr{V}_{k+1} = \{V_T\}_{T \in \mathscr{T}_{k+1}}$, где

(6) $$V_T = G_T \cap \bigcap_{s \in T} U_s,$$

обладает всеми нужными свойствами.

Ясно, что семейство $\mathscr{V}_{k+1}$ дискретно, состоит из открытых в X множеств и что каждый элемент семейства $\mathscr{V}_{k+1}$ содержится в некотором U_s. Рассмотрим любую точку $x \in X$; пусть она принадлежит не более чем $k+1$ элементам семейства $\mathscr{U}$. Тогда найдется $T \in \mathscr{T}_{k+1}$, для которого $x \in X \setminus \bigcup_{s \notin T} U_s$. Имеем

$$x \in X \setminus \bigcup_{s \notin T} U_s = \left[\left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{k} W_j\right) \cup \bigcup_{j=0}^{k} W_j\right] \cap \left(X \setminus \bigcup_{s \notin T} U_s\right) \subset A_T \cup \bigcup_{j=0}^{k} W_j.$$

Последняя формула вместе с (5), (6), и включением $A_T \subset G_T$ показывает, что $x \in \bigcup_{j=0}^{k+1} W_j$.

Так как покрытие $\mathscr{U}$ точечно конечно, из (3) следует, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{V}_i$ есть σ-локально конечное открытое покрытие, вписанное в $\mathscr{U}$. ∎

5.3.4. Пример. Нерегулярное хаусдорфово пространство X, описанное в примере 1.5.7, слабо паракомпактно.

Пусть $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Открытое подпространство $X \setminus Z$ пространства X, где Z — множество обратных всем целым числам, отличным от нуля, наделено топологией подпространства вещественной прямой. Значит, пространство $X \setminus Z$ паракомпактно, и в открытое покрытие $\{U_s \setminus Z\}_{s \in S}$ пространства $X \setminus Z$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\mathscr{V}$. Для каждого $z \in Z$ выберем $s(z) \in S$, такое, что $z \in U_{s(z)}$, и положим

$$V_z = \begin{cases} (0,\ 2z) \cap U_{s(z)}, & \text{если} \quad z > 0, \\ (2z,\ 0) \cap U_{s(z)}, & \text{если} \quad z < 0. \end{cases}$$

Как легко видеть, семейство $\mathscr{V} \cup \{V_z\}_{z \in Z}$ является точечно конечным открытым покрытием, вписанным в $\mathscr{U}$. ∎

Существуют коллективно нормальные пространства, которые не слабо паракомпактны; в силу теоремы 5.3.2 и примера 5.1.21, пространство W_0 всех счетных ординалов является таким пространством. Существуют также слабо паракомпактные нормальные пространства, которые не коллективно нормальны (см. задачу 5.5.3 (c)).

Мы завершаем первую часть этого параграфа теоремой о сохранении слабой паракомпактности замкнутыми отображениями на хаусдорфовы пространства. Заметим, что этот результат вместе с теоремой 5.3.3 и инвариантностью коллективной нормальности при замкнутых отображениях (см. упр. 5.1.C(b)) дает другое доказательство теоремы 5.1.33. Еще одно доказательство теоремы 5.1.33 можно получить, сделав небольшие изменения, предлагаемые ниже в упр. 5.3.E, в доказательстве теоремы об инвариантности слабой паракомпактности. Однако оба эти доказательства труднее, чем исходное доказательство, приведенное в § 5.1.

5.3.5. Лемма. *Для каждого открытого покрытия* $\{U_s\}_{s\in S}$ *слабо паракомпактного пространства* X *существует точечно конечное открытое покрытие* $\{V_s\}_{s\in S}$ *пространства* X, *такое, что* $V_s\subset U_s$ *при всех* $s\in S$. ∎

5.3.6. Лемма. *Если* $f\colon X\to Y$ — *замкнутое отображение слабо паракомпактного пространства* X *на пространство* Y, *то в каждое открытое покрытие пространства* Y, *представимое в виде объединения счетного семейства точечно конечных семейств, можно вписать точечно конечное открытое покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{U}_i$ — открытое покрытие пространства Y, причем каждое $\mathcal{U}_i=\{U_s\}_{s\in S_i}$ — точечно конечное семейство. По лемме 5.3.5, найдется точечно конечное открытое покрытие $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X, такое, что $G_i\subset f^{-1}(U_i)$ при $i=1, 2, \ldots$, где $U_i=\bigcup\mathcal{U}_i$. Множество $E_k=X\setminus\bigcup\limits_{i\geqslant k}G_i$ замкнуто при $k=1, 2, \ldots$; как легко видеть, $E_1\subset E_2\subset\ldots$ и $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ покрывает X. Далее,

$$f(E_k)\subset f\Big(\bigcup_{i<k}G_i\Big)\subset\bigcup_{i<k}f(G_i)\subset\bigcup_{i<k}U_i\quad\text{при}\quad k=1, 2, \ldots.$$

Положим $S=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$; очевидно, можно предполагать, что $S_i\cap S_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Для завершения доказательства достаточно показать, что семейство $\mathcal{W}=\{W_s\}_{s\in S}$, где

$$W_s=U_s\setminus f(E_i)\quad\text{при}\quad s\in S_i,$$

является точечно конечным открытым покрытием пространства Y.

Так как отображение f замкнуто, множества W_s открыты; мы покажем, что они образуют точечно конечное семейство. Из $Y=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f(E_k)$ следует, что каждая точка $y\in Y$ принадлежит некоторому множеству $f(E_k)$; значит, y не входит ни в одно из множеств W_s, для которых $s\in S_i$ и $i\geqslant k$. Семейства $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ $\ldots, \mathcal{U}_{k-1}$ точечно конечны, поэтому y принадлежит лишь конечному числу членов семейства $\mathcal{W}$. Остается показать, что $\mathcal{W}$ покрывает Y. Для произвольного $y\in Y$ обозначим через $i(y)$ наименьшее натуральное число, для которого $y\in U_{i(y)}$. Так как

$f(E_{i(y)}) \subset \bigcup\limits_{i < i(y)} U_i$, то найдется $s(y) \in S_{i(y)}$, такое, что $y \in \in W_{s(y)}$. ■

5.3.7. Теорема Уоррела. *Если $f: X \to Y$ — замкнутое отображение слабо паракомпактного пространства X на хаусдорфово пространство Y, то пространство Y слабо паракомпактно.*

Доказательство. По лемме 5.3.6, достаточно доказать, что в каждое открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства Y можно вписать открытое покрытие, являющееся объединением счетного семейства точечно конечных семейств.

Пусть $<$ — произвольное вполне упорядочение на множестве S. Определим по индукции относительно $i = 1, 2, \ldots$ открытые точечно конечные покрытия $\mathcal{G}_i = \{G_{s,i}\}_{s \in S}$ пространства X, удовлетворяющие условиям

(7) $\qquad G_{s,i} \subset f^{-1}(U_s)$ при $s \in S$ и $i = 1, 2, \ldots$,

(8) $\quad f(G_{s,i}) \cap f(E_{s,i-1}) = \varnothing$, где $E_{s,i-1} = X \setminus \bigcup\limits_{t \geqslant s} G_{t,i-1}$ при $i > 1$.

Существование $\mathcal{G}_1$ следует из леммы 5.3.5. Предположим, что покрытия $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_{k-1}$ уже определены и удовлетворяют (7) и (8) при $i < k$. Из замкнутости отображения f следует, что множества

(9) $\qquad W_{s,k} = f^{-1}(U_s) \setminus f^{-1}f(E_{s,k-1}) \subset f^{-1}(U_s)$

открыты. Для каждого x через $s(x)$ обозначим наименьший элемент множества S, такой, что $x \in f^{-1}(U_{s(x)})$. Так как $E_{s(x),k-1} \subset \bigcup\limits_{s < s(x)} G_{s,k-1}$ и, в силу (7), $\bigcup\limits_{s < s(x)} G_{s,k-1} \subset \bigcup\limits_{s < s(x)} f^{-1}(U_s)$, имеем $f^{-1}f(E_{s(x),k-1}) \subset \bigcup\limits_{s < s(x)} f^{-1}(U_s)$. Значит, $x \in W_{s(x),k}$, т. е. $\{W_{s,k}\}_{s \in S}$ — открытое покрытие пространства X. Воспользовавшись леммой 5.3.5, получаем точечно конечное покрытие $\mathcal{G}_k = \{G_{s,k}\}_{s \in S}$ пространства X, такое, что $G_{s,k} \subset W_{s,k}$ при всех $s \in S$. Из (9) следует, что покрытие $\mathcal{G}_k$ удовлетворяет условиям (7) и (8) при $i = k$; таким образом, построение покрытий $\mathcal{G}_i$ завершено.

Заметьте, что при всех $s_0 \in S$ и всех $i = 1, 2, \ldots$

(10) $\qquad E_{s_0,i} = X \setminus \bigcup\limits_{s \geqslant s_0} G_{s,i} \subset \bigcup\limits_{s < s_0} (X \setminus \bigcup\limits_{t > s} G_{t,i})$.

Действительно, если $x \notin \bigcup\limits_{s \geqslant s_0} G_{s,i}$, то найдется $s < s_0$, такое, что $x \notin \bigcup\limits_{t > s} G_{t,i}$, а именно наибольшее $s \in S$, для которого $x \in G_{s,i}$. Подобным же образом получаем

(11) $$X=\bigcup_{s\in S}\Big(X\setminus\bigcup_{t>s}G_{t,i}\Big)\quad\text{при}\quad i=1,\,2,\,\ldots\,.$$

Рассмотрим открытые множества $V_{s,i}=Y\setminus f(X\setminus G_{s,i})$. Так как

(12) $$f^{-1}(V_{s,i})\subset G_{s,i}\quad\text{при}\quad s\in S\quad\text{и}\quad i=1,\,2,\,\ldots,$$

семейство $\mathscr{V}_i=\{V_{s,i}\}_{s\in S}$ точечно конечно при $i=1,\,2,\,\ldots$. Покажем, что семейство $\mathscr{V}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{V}_i$ покрывает пространство Y. Для произвольного $y\in Y$ обозначим через $s(y)$ наименьший элемент множества S, для которого $y\in f\Big(X\setminus\bigcup_{t>s(y)}G_{t,i}\Big)$ при некотором целом положительном i, — такой элемент существует в силу (11). Возьмем какое-нибудь целое число $i(y)$, такое, что $y\in\in f\Big(X\setminus\bigcup_{t>s(y)}G_{t,\,i(y)-1}\Big)$. Тогда $y\in f(E_{s,\,i(y)-1})$ при всех $s>s(y)$ и, в силу (8),

$$y\notin\bigcup_{s>s(y)}f(G_{s,\,i(y)})=f\Big(\bigcup_{s>s(y)}G_{s,\,i(y)}\Big),\quad\text{т. е.}$$

$$f^{-1}(y)\cap\bigcup_{s>s(y)}G_{s,\,i(y)}=\varnothing.$$

С другой стороны, в силу (10),

$$f\Big(X\setminus\bigcup_{s\geqslant s(y)}G_{s,\,i(y)}\Big)\subset f\Big(\bigcup_{s<s(y)}\Big(X\setminus\bigcup_{t>s}G_{t,\,i(y)}\Big)\Big)=$$
$$=\bigcup_{s<s(y)}f\Big(X\setminus\bigcup_{t>s}G_{t,\,i(y)}\Big).$$

Так как y не принадлежит последнему объединению, то $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{s\geqslant s(y)}G_{s,\,i(y)}$. Значит, $f^{-1}(y)\subset G_{s(y),\,i(y)}$, т. е. $y\in V_{s(y),\,i(y)}$. Следовательно, $\mathscr{V}$ покрывает Y. Для завершения доказательства достаточно заметить, что $\mathscr{V}$ вписано в $\{U_s\}_{s\in S}$ — последнее вытекает из соотношений (7) и (12). ∎

Перейдем теперь к классу сильно паракомпактных пространств. Топологическое пространство X называется *сильно паракомпактным* [1]), если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать звездно конечное открытое покрытие. Каждое сильно паракомпактное пространство паракомпактно; следовательно, хаусдорфово сильно паракомпактное пространство нормально. Однако не всякий паракомпакт сильно паракомпактен (см. упр. 5.3.F(a) и 6.1.D).

Пусть $\mathscr{A}=\{A_s\}_{s\in S}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Под *цепочкой* от A_s до $A_{s'}$ условимся понимать

[1]) Иногда используется термин *гипокомпактное* пространство.

любую конечную последовательность $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_k}$ элементов семейства $\mathscr{A}$, такую, что $s_1 = s$, $s_k = s'$ и $A_{s_i} \cap A_{s_{i+1}} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Скажем, что семейство $\mathscr{A}$ *связно*, если для любых двух членов A_s, $A_{s'}$ семейства $\mathscr{A}$ найдется цепочка от A_s до $A_{s'}$. *Компоненты* семейства $\mathscr{A}$ определяются как максимальные связные подсемейства семейства $\mathscr{A}$, т. е. связные подсемейства семейства $\mathscr{A}$, не являющиеся собственными подмножествами никакого связного подсемейства семейства $\mathscr{A}$.

Отметим два простых факта (см. доказательство теоремы 5.1.27):

5.3.8. Лемма. *Каждое семейство подмножеств произвольного множества X распадается в объединение своих компонент. Если $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — различные компоненты семейства $\mathscr{A}$, то $(\bigcup \mathscr{A}_1) \cap \cap (\bigcup \mathscr{A}_2) = \varnothing$.* ∎

5.3.9. Лемма. *Каждое связное звездно счетное семейство множеств счетно.* ∎

5.3.10. Теорема. *Для каждого регулярного пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X сильно паракомпактно.*

(ii) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое покрытие, которое одновременно локально конечно и звездно конечно.*

(iii) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое покрытие, которое одновременно локально конечно и звездно счетно.*

(iv) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать звездно счетное открытое покрытие.*

Доказательство. Покажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\mathscr{U}$ — любое открытое покрытие пространства X и $\mathscr{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ — звездно конечное открытое покрытие, вписанное в $\mathscr{U}$. Так как пространство X нормально, а покрытие $\mathscr{V}$ локально конечно, то, по теореме 1.5.18, найдется замкнутое покрытие $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s \in S}$ пространства X, такое, что $F_s \subset V_s$ при всех $s \in S$. Ясно, что $\mathscr{F}$ вписано в $\mathscr{U}$ и что $\mathscr{F}$ одновременно локально конечно и звездно конечно.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна; покажем, что (iii) $\Rightarrow$ (iv). Рассмотрим любое открытое покрытие $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ пространства X и вписанное в него замкнутое покрытие $\mathscr{F}$, локально конечное и звездно счетное одновременно. Пусть $\mathscr{F} = \bigcup_{t \in T} \mathscr{F}_t$, где $\mathscr{F}_t$ — компоненты семейства $\mathscr{F}$.

Из леммы 5.3.9 следует, что все семейства $\mathscr{F}_t$ счетны; пусть $\mathscr{F}_t = \{F_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$. Множества $C_t = \bigcup \mathscr{F}_t$ попарно не пересекаются и, в силу локальной конечности семейства $\mathscr{F}$, открыто-замкнуты. При каждом $t \in T$ и любом натуральном i выберем $s(t, i) \in S$ так, чтобы было $F_{t,i} \subset U_{s(t,i)}$. Семейство $\{C_t \cap U_{s(t,i)}\}_{i=1,\, t \in T}^{\infty}$ является звездно счетным открытым покрытием, вписанным в $\mathscr{U}$.

Докажем теперь, что (iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mathscr{U}$ — произвольное открытое покрытие пространства X и $\mathscr{V}$ — звездно счетное открытое покрытие, вписанное в $\mathscr{U}$. Рассмотрим семейство $\{\mathscr{V}_t\}_{t \in T}$ всех компонент покрытия $\mathscr{V}$. В силу леммы 5.3.9, $\mathscr{V}_t = \{V_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$ при каждом $t \in T$. Семейство $\{V_{t,i}\}_{t \in T}$ дискретно при $i = 1, 2, \ldots$; следовательно, $\mathscr{V}$ является σ-локально конечным открытым покрытием, вписанным в $\mathscr{U}$. Значит, пространство X паракомпактно по теореме 5.1.11. Положим $C_t = \bigcup \mathscr{V}_t$ при всех $t \in T$. Множества C_t открыты и попарно не пересекаются, следовательно, они открыто-замкнуты. Значит, пространство C_t паракомпактно при каждом $t \in T$, и, в силу теоремы 5.2.6, в открытое покрытие $\mathscr{V}_t$ пространства C_t можно вписать некоторое звездно конечное открытое покрытие $\mathscr{U}_t$. Объединение $\bigcup_{t \in T} \mathscr{U}_t$ является звездно конечным открытым покрытием, вписанным в покрытие $\mathscr{U}$. ∎

Заметим, что предположение о локальной конечности в (ii) и (iii) выше нельзя опустить. Действительно, для произвольного T_1-пространства X семейство всех одноточечных подмножеств множества X является звездно конечным замкнутым покрытием, вписанным в произвольное покрытие пространства X.

Последняя теорема дает

5.3.11. Следствие. *Каждое линделёфово пространство сильно паракомпактно.* ∎

5.3.12. Пример. Из следствия выше и примера 3.8.15 вытекает, что произведение двух сильно паракомпактных хаусдорфовых пространств не обязательно сильно паракомпактно. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Слабо паракомпактные пространства были введены Аренсом и Дугунджи в [1950]. Их работа содержит теоремы 5.3.1 и 5.3.2 (другое доказательство последней намечено в указании к задаче 3.12.22(а)). Теорема 5.3.3 была доказана независимо Майклом в [1955] и Нагами в [1955]. Теорема 5.3.6 доказана Уорредом в [1966].

Сильно паракомпактные пространства определены Даукером в [1947]. Теорема 5.3.10 доказана Ю. М. Смирновым в [1956]; следствие 5.3.11 появилось ранее в работе Мориты [1948] (Каплан доказал в [1947], что каждое сепарабельное метризуемое пространство сильно паракомпактно).

УПРАЖНЕНИЯ

5.3.A. (a) (Трэйлор [1964], Годел [1969]). Докажите, что если пространство X локально сепарабельно и в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать точечно счетное открытое покрытие, то в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать звездно счетное открытое покрытие. Выведите отсюда, что каждое локально сепарабельное слабо паракомпактное пространство сильно паракомпактно.

(b) (А. Стоун [1962]). Если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать точечно счетное открытое покрытие и у каждой точки $x \in X$ есть окрестность U, такая, что $w(U) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, то $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$, где $w(X_s) \leqslant \mathfrak{m}$ при всех $s \in S$ (см. упр. 4.4.F(c)).

(c) (Чарльзуорт [1976]). Если топологическое пространство X обладает базой $\mathscr{B}$, такой, что у каждой точки $x \in X$ есть окрестность U, для которой мощность семейства $\{V \in \mathscr{B}\colon U \cap \cap V \neq \varnothing\}$ не превосходит $\mathfrak{m}$, то $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$, где $w(X_s) \leqslant \mathfrak{m}$ при всех $s \in S$.

Указание. Рассмотрите подсемейство семейства $\mathscr{B}$, состоящее из тех множеств, которые пересекают самое большее $\mathfrak{m}$ элементов семейства $\mathscr{B}$.

5.3.B. (a) Проверьте, что плоскость Немыцкого, квадрат прямой Зоргенфрея и пространство всех счетных ординалов не слабо паракомпактны.

Указание. Примените упр. 5.3.A(a).

(b) Покажите, что произведение $A(\aleph_0) \times A(\aleph_1)$ наследственно слабо паракомпактно.

(c) Проверьте, что пространство X из примера 5.3.4 совершенно, но не счетно паракомпактно.

5.3.C. (a) Отметьте, что слабая паракомпактность является аддитивным, но не конечно мультипликативным свойством.

Замечание. Предел обратной последовательности слабо паракомпактных пространств может не быть слабо паракомпактным пространством (см. задачу 5.5.4(c)).

(b) (Чобан [1970]). Покажите, что слабая паракомпактность наследуется F_σ-множествами.

(c) Заметьте, что сильная паракомпактность является аддитивным свойством и наследуется замкнутыми множествами (см. упр. 5.3.F(c)).

5.3.D (Майкл [1955], Нагами [1955]). (a) Покажите, что для каждого счетного точечно конечного открытого покрытия $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ нормального пространства X найдется локально конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ этого пространства, такое, что $V_i \subset W_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Указание. Примените либо теорему 1.5.18 и лемму 5.2.4, либо упр. 5.1.J(d).

(b) Покажите, что в каждое точечно конечное открытое покрытие коллективно нормального пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Указание. Заметьте, что покрытие $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, определенное в доказательстве теоремы 5.3.3, точечно конечно; примените затем (a).

5.3.E (Уоррел [1966]). Докажите теорему 5.1.33, видоизменив доказательство теоремы 5.3.7.

Указание. Пусть покрытия $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \ldots$, фигурирующие в доказательстве теоремы 5.3.7, локально конечны; возьмем замкнутое покрытие $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства X, такое, что $K_i \subset f^{-1}(V_i)$, где $V_i = \bigcup \mathscr{V}_i$. Рассмотрим при $i = 1, 2, \ldots$ открытое покрытие $\mathscr{V}_i \cup \{Y \setminus f(K_i)\}$ пространства Y и применим теорему 1.5.18. Заметьте, что каждое точечно конечное консервативное (см. упр. 5.1.G) семейство замкнутых множеств локально конечно.

5.3.F. (a) (Нагата [1957]). Докажите, что произведение открытого единичного интервала $(0, 1)$ и пространства Бэра $B(\aleph_1)$ не сильно паракомпактно. Выведите отсюда, что предел обратной последовательности сильно паракомпактных хаусдорфовых пространств не обязан быть сильно паракомпактным пространством (см. задачу 5.5.4(c)).

(b) Покажите, что пространство Бэра $B(\mathfrak{m})$ сильно паракомпактно при всех $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ (см. упр. 7.2.E и пример 7.3.14).

Указание. Объединение произвольного семейства $(1/i)$-шаров открыто-замкнуто.

(c) Заметьте, что из (a), (b) и упр. 5.3.H(b) ниже следует, что даже в классе метризуемых пространств сильная паракомпактность не наследуется F_σ-множествами и не конечно мультипликативна.

(d) Приведите пример метризуемого пространства, которое можно представить в виде объединения двух замкнутых сильно паракомпактных подпространств, но которое само не сильно паракомпактно.

Замечание. Ясуи доказал в [1967], что если регулярное пространство X покрывается локально конечным семейством замкнутых сильно паракомпактных подпространств, границы которых в X обладают локально свойством Линделёфа (т. е. у каждой точки есть окрестность, замыкание которой является линделёфовым пространством), то пространство X сильно паракомпактно.

(e) (Морита [1954]). Покажите, что каждое сильно паракомпактное метризуемое пространство веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ можно вложить в произведение $I^{\aleph_0} \times B(\mathfrak{m})$.

5.3.G. (a) Покажите, что сильная паракомпактность равносильна паракомпактности в классе локально компактных хаусдорфовых пространств.

(b) Приведите пример не нормального слабо паракомпактного локально компактного хаусдорфова пространства.

Указание. Посмотрите упр. 5.3.B(b).

5.3.H. (a) (Ханаи [1956]). Покажите, что слабая паракомпактность и сильная паракомпактность сохраняются в сторону прообраза совершенными отображениями.

(b) (Бегль [1949] для сильной паракомпактности). Убедитесь, что произведение $X \times Y$ слабо (сильно) паракомпактного пространства X и компактного пространства Y слабо (сильно) паракомпактно.

(c) (В. И. Пономарев [1962]). Заметьте, что сильная паракомпактность не является инвариантом совершенных отображений.

Указание. Примените упр. 5.3.F(d) и теорему 3.7.22.

(d) (В. И. Пономарев [1962a]). Докажите, что сильная паракомпактность сохраняется открытыми совершенными отображениями.

Указание. Пусть $f\colon X \to Y$ — открытое совершенное отображение пространства X на пространство Y. Проверьте, что если $\{U_s\}_{s \in S}$ — звездно конечное открытое покрытие пространства X, то множества

$$U(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \bigcap_{i=1}^{k} f(U_{s_i}) \cap \left(Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}\right)\right),$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$, образуют звездно конечное открытое покрытие пространства Y.

(e) Покажите, что если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение паракомпактного пространства X на топологическое пространство Y и все прообразы $f^{-1}(y)$ точек компактны, то пространство Y слабо паракомпактно.

5.4. МЕТРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ II

В этом параграфе с помощью понятий паракомпактности, коллективной нормальности и слабой паракомпактности устанавливаются дальнейшие топологические характеристики класса метризуемых пространств.

Последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$ покрытий топологического пространства X называется *измельчающейся*, или *измельчением* пространства X, если все покрытия $\mathscr{W}_i$ открыты и для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдется натуральное число i, такое, что $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_i) \subset U$. Как легко заметить, последовательность открытых покрытий пространства X является его измельчением в том и только том случае, если для каждой точки $x \in X$ любое семейство $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, такое, что $x \in W_i \in \mathscr{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$, является базой пространства X в точке x.

5.4.1. Метризационный критерий Бинга. *Топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, если оно коллективно нормально и обладает измельчением.*

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство и ρ — метрика на X. Для каждого дискретного семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых в X множеств семейство $\{U_s\}_{s \in S}$, где $U_s = \left\{x \in X: \rho(x, F_s) < \rho\left(x, \bigcup_{s' \neq s} F_{s'}\right)\right\}$, удовлетворяет условию теоремы 5.1.7; следовательно, X коллективно нормально. Легко проверяется, что последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, где $\mathscr{W}_i = \{B(x, 1/i)\}_{x \in X}$, является измельчением пространства X.

Рассмотрим теперь коллективно нормальное пространство X, обладающее измельчением $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$. Покажем сначала, что в каждое открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие (в силу теоремы 5.1.11, это означает, что X паракомпактно).

Возьмем произвольное вполне упорядочение $<$ на S и положим

$$F_{s, i} = X \setminus \left[\mathrm{St}(X \setminus U_s, \mathscr{W}_i) \cup \bigcup_{s' < s} U_{s'}\right] \subset U_s.$$

Замкнутые множества $F_{s, i}$, где $s \in S$ и $i = 1, 2, \ldots$, покрывают пространство X. Действительно, взяв для каждого $x \in X$ наименьший элемент $s(x)$ в S, такой, что $x \in U_{s(x)}$, и выбрав натуральное число $i(x)$, для которого $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_{i(x)}) \subset U_{s(x)}$, мы получаем $x \in F_{s(x), i(x)}$. Так как при фиксированном i окрестность $U_{s(x)} \cap \mathrm{St}(x, \mathscr{W}_i)$ точки x пересекается только с одним членом семейства $\mathscr{F}_i = \{F_{s, i}\}_{s \in S}$, а именно с множеством $F_{s(x), i}$, семейство $\mathscr{F}_i$ дискретно. В силу коллективной нормальности X, найдутся открытые множества $U_{s, i}$, для которых $F_{s, i} \subset U_{s, i} \subset U_s$ при $s \in S$ и $i = 1, 2, \ldots$ и семейство $\{U_{s, i}\}_{s \in S}$ дискретно при каждом i. Следовательно, $\{U_{s, i}\}_{i=1, s \in S}^{\infty}$ есть σ-локально конечное открытое покрытие, вписанное в $\{U_s\}_{s \in S}$.

Пусть (при $i = 1, 2, \ldots$) $\mathscr{B}_i$ есть σ-локально конечное открытое покрытие, вписанное в покрытие $\mathscr{W}_i$. Легко проверяется, что

$\mathscr{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ — база пространства X; значит, X метризуемо по метризационной теореме Нагаты — Смирнова. ∎

Заметим, что при доказательстве сохранения метризуемости совершенными отображениями (см. теорему 4.4.15) мы сначала определили некоторое измельчение пространства Y, а затем, пользуясь паракомпактностью Y (установленной ранее в лемме 4.4.13), определили σ-локально конечную базу пространства Y — в точности так, как и при доказательстве метризационной теоремы Бинга.

Покажем теперь, как получить, усилив понятие измельчения, необходимое и достаточное условие метризуемости T_0-пространств.

Последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$ покрытий топологического пространства X называется *сильным измельчением* пространства X, если все покрытия $\mathscr{W}_i$ открыты и для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдутся окрестность V точки x и натуральное число i, такие, что $\mathrm{St}(V, \mathscr{W}_i) \subset U$. Ясно, что каждое сильное измельчение является измельчением.

5.4.2. Метризационная теорема Мора. *Топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, если оно является T_0-пространством и обладает сильным измельчением.*

Доказательство. Легко проверяется, что для произвольной метрики ρ на X последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots,$ где $\mathscr{W}_i = \{B(x, 1/i)\}_{x \in X}$, является сильным измельчением пространства X.

Рассмотрим теперь произвольное T_0-пространство X, обладающее сильным измельчением $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$. В силу метризационного критерия Бинга, достаточно показать, что X коллективно нормально.

Покажем сначала, что X есть T_1-пространство. Возьмем любые две различные точки x, y пространства X. Так как X есть T_0-пространство, найдется открытое множество U, которое содержит ровно одну из точек x, y; можно предположить, что $x \in U$ и $y \notin U$. Выберем натуральное число i, такое, что $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_i) \subset U$, и возьмем какое-нибудь множество $W \in \mathscr{W}_i$, содержащее y. Так как $x \notin W$, мы видим, что X есть T_1-пространство.

Заменив, если нужно, покрытия $\mathscr{W}_i$ покрытиями, состоящими из всевозможных пересечений $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_i$, где $W_k \in \mathscr{W}_k$ при $k \leqslant i$, можно считать, что $\mathscr{W}_j$ вписано в $\mathscr{W}_i$ при $j \geqslant i$. Для сильного измельчения, удовлетворяющего этому дополнительному условию, имеем

(1) если $x \notin A = \overline{A} \subset X$, то $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_i) \cap \mathrm{St}(A, \mathscr{W}_i) = \varnothing$ при некотором натуральном i.

Действительно, по определению сильного измельчения, существуют окрестность V точки x и натуральное число j, такие, что $\mathrm{St}(V, \mathscr{W}_j) \subset X \setminus A$; применив снова определение сильного измельчения, мы находим k, для которого $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_k) \subset V$. Для номера $i = \max(j, k)$ условие (1) выполняется, так как $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_i) \subset \subset \mathrm{St}(x, \mathscr{W}_k) \subset V$ и $\mathrm{St}(V, \mathscr{W}_i) \subset \mathrm{St}(V, \mathscr{W}_j) \subset X \setminus A$, т. е. $\mathrm{St}(A, \mathscr{W}_i) \subset X \setminus V$.

Для произвольного дискретного семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых множеств в X определим теперь семейство $\{U_s\}_{s \in S}$ открытых множеств, такое, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$ и $U_s \cap U_{s'} = \varnothing$, когда $s \neq s'$; по теореме 5.1.17, это завершит доказательство.

При каждом $s \in S$ множество $A_s = \bigcup\limits_{s' \neq s} F_{s'}$ замкнуто, тогда как множества

$$U_{s,i} = \bigcup \mathscr{W}_{s,i}, \quad \text{где} \quad \mathscr{W}_{s,i} = \{W \in \mathscr{W}_i \colon W \cap \mathrm{St}(A_s, \mathscr{W}_i) = \\ = \varnothing \neq W \cap F_s\},$$

и множество $U_s = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{s,i}$ открыты. Так как $F_s \subset X \setminus A_s$, из (1) следует, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$. Будет установлено, что $U_s \cap U_{s'} = \varnothing$ при $s \neq s'$, если мы покажем, что $U_{s,i} \cap U_{s',j} = \varnothing$ при $s \neq s'$ и $j \geqslant i$. Но если $W \in \mathscr{W}_{s,i}$ и $W' \in \mathscr{W}_{s',j}$, то $W \cap \mathrm{St}(A_s, \mathscr{W}_i) = \varnothing$ и $W' \cap F_{s'} \neq \varnothing$. Из последнего неравенства следует, что $W' \subset \mathrm{St}(A_s, \mathscr{W}_j) \subset \mathrm{St}(A_s, \mathscr{W}_i)$; значит, $W \cap W' = \varnothing$, откуда получаем, что $U_{s,i} \cap U_{s',j} = \varnothing$. ∎

Следующие две метризационные теоремы формулируются в терминах специальных баз.

Назовем базу $\mathscr{B}$ топологического пространства X *точечно регулярной*[1]), если для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U множество всех элементов базы $\mathscr{B}$, содержащих x и пересекающихся с $X \setminus U$, конечно. Легко заметить, что база $\mathscr{B}$ пространства X точечно регулярна в том и только том случае, если, какова бы ни была точка $x \in X$, любое бесконечное семейство элементов базы $\mathscr{B}$, содержащих точку x, является базой пространства X в точке x.

Назовем базу $\mathscr{B}$ топологического пространства X *регулярной*, если для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдется окрестность $V \subset U$ точки x, такая, что множество всех элементов базы $\mathscr{B}$, пересекающихся с V и с $X \setminus U$, конечно. Ясно, что каждая регулярная база точечно регулярна.

Доказательства теорем 5.4.6 и 5.4.8 основаны на нескольких леммах, которые мы сейчас докажем. Чтобы упростить формулировки этих лемм, условимся для произвольного семейства $\mathscr{A}$

---

[1]) Точечно регулярные базы называют также *равномерными* базами.

множеств обозначать через $\mathscr{A}^{\mathrm{m}}$ подсемейство семейства $\mathscr{A}$, состоящее из всех максимальных его элементов (т. е. множеств $A \in \mathscr{A}$, таких, что если $A \subset A' \in \mathscr{A}$, то $A = A'$); через $\mathscr{I}(X)$ будем обозначать семейство всех открытых одноточечных подмножеств произвольного топологического пространства X.

5.4.3. Лемма. *Если $\mathscr{B}$ — точечно регулярная (регулярная) база пространства X, то семейство $\mathscr{B}^{\mathrm{m}} \subset \mathscr{B}$ является точечно конечным (локально конечным) покрытием пространства X.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\bigcup \mathscr{B}^{\mathrm{m}} = X$. Для произвольного $x \in X$ найдется $U_0 \in \mathscr{B}$, содержащее x. Предположив, что x не содержится ни в каком элементе семейства $\mathscr{B}^{\mathrm{m}}$, можно определить бесконечную последовательность $U_0 \subset U_1 \subset$ $\subset U_2 \subset \ldots$ элементов базы $\mathscr{B}$, такую, что $U_i \neq U_{i+1}$ при $i =$ $= 1, 2, \ldots$. Получаем бесконечное подсемейство $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ базы $\mathscr{B}$, все элементы которого содержат x и пересекают $X \setminus U_0$, что невозможно. Следовательно, $x \in \bigcup \mathscr{B}^{\mathrm{m}}$ и $\bigcup \mathscr{B}^{\mathrm{m}} = X$.

Покажем теперь, что если база $\mathscr{B}$ точечно регулярна (регулярна), то покрытие $\mathscr{B}^{\mathrm{m}}$ точечно конечно (локально конечно). Возьмем любую точку $x \in X$ и какое-нибудь множество $U \in \mathscr{B}^{\mathrm{m}}$, содержащее x.

Множество всех элементов базы $\mathscr{B}$, пересекающих $X \setminus U$ и $\{x\}$ (и произвольную фиксированную окрестность V точки x), конечно. Но каждое $U' \in \mathscr{B}^{\mathrm{m}} \setminus \{U\}$, содержащее x (пересекающее V) пересекает также и $X \setminus U$, так что лишь конечное число членов семейства $\mathscr{B}^{\mathrm{m}}$ содержит x (пересекает V). Это показывает, что $\mathscr{B}^{\mathrm{m}}$ — точечно конечное (локально конечное) покрытие пространства X. ∎

5.4.4. Лемма. *Если $\mathscr{B}$ — база T_1-пространства X, то для произвольного точечно конечного покрытия $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ семейство $\mathscr{B}'' =$ $= (\mathscr{B} \setminus \mathscr{B}') \cup \mathscr{I}(X)$ является базой пространства X. Далее, если база $\mathscr{B}$ точечно регулярна (регулярна), то и база $\mathscr{B}''$ тоже точечно регулярна (регулярна).*

Доказательство. Пусть x — любая точка пространства X и U — произвольная ее окрестность. Если точка x изолирована, то $x \in \{x\} \in \mathscr{I}(X)$ и $x \in \{x\} \subset U$; если точка x не изолирована, то пересечение $\bigcap \{W \in \mathscr{B}' \colon\ x \in W\}$ содержит некоторую точку $y \neq x$, и любая окрестность $V \in \mathscr{B}$ точки x, удовлетворяющая условию $V \subset U \setminus \{y\}$, принадлежит $\mathscr{B} \setminus \mathscr{B}'$. Вторая часть леммы очевидна. ∎

5.4.5. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ — точечно регулярная (регулярная) база T_1-пространства X; положим*

$$(2)\qquad \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}^{\mathrm{m}} \text{ и } \mathscr{B}_i = \left[\left(\mathscr{B} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathscr{B}_j\right) \cup \mathscr{I}(X)\right]^{\mathrm{m}} \text{ при } i = 2, 3, \ldots .$$

Этим определена последовательность $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ *точечно конечных (локально конечных) открытых покрытий пространства* X, *такая, что* $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$.

Доказательство. Из лемм 5.4.3 и 5.4.4 следует, что $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ — последовательность точечно конечных (локально конечных) открытых покрытий пространства X. База $\mathscr{B}$ точечно регулярна, поэтому для каждого $U \in \mathscr{B}$ лишь конечное число множеств $U' \in \mathscr{B}$ удовлетворяет включению $U \subset U'$. Следовательно, $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ в силу (2). ∎

5.4.6. Метризационная теорема Архангельского. *Топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, если оно является* T_1*-пространством и обладает регулярной базой.*

Доказательство. Проверим сначала, что каждое метризуемое пространство X имеет регулярную базу. Пусть ρ — некоторая метрика на X и $\mathscr{B}_i$ — локально конечное открытое покрытие, вписанное в покрытие $\{B(x, 1/4i)\}_{x \in X}$ (см. теорему 4.4.1). Ясно, что $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ является базой пространства X. Для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдется натуральное число i, такое, что $B(x, 1/i) \subset U$. Положим $V_0 = B(x, 1/2i)$, и пусть V_j при $j = 1, 2, \ldots$ — окрестность точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом членов семейства $\mathscr{B}_j$. Легко проверяется, что множество всех элементов семейства $\mathscr{B}$, пересекающихся и с $V = \bigcap_{j=0}^{i} V_j$, и с $X \setminus U$, конечно.

Рассмотрим теперь любое T_1-пространство X с регулярной базой $\mathscr{B}$. Легко проверить, что множества U и V, фигурирующие в определении регулярной базы, удовлетворяют включению $\overline{V} \subset U$. Следовательно, пространство X регулярно. Для завершения доказательства достаточно применить лемму 5.4.5 и метризационную теорему Нагаты — Смирнова. ∎

Чтобы выяснить соотношение между измельчениями и точечно регулярными базами, мы формулируем следующую лемму в несколько более общем виде, нежели это требуется для доказательства теоремы 5.4.8.

5.4.7. Лемма. *Для произвольного хаусдорфова пространства* X *следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство* X *обладает точечно регулярной базой.*

(ii) *Пространство* X *слабо паракомпактно и имеет измельчение.*

(iii) *Пространство X имеет измельчение, состоящее из точечно конечных покрытий.*

Доказательство. Покажем сначала, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\mathscr{U}$ — любое открытое покрытие хаусдорфова пространства X, обладающего точечно регулярной базой $\mathscr{B}$. Семейство $\mathscr{B}_0$ всех элементов семейства $\mathscr{B}$, содержащихся хотя бы в одном элементе покрытия $\mathscr{U}$, очевидно, образует точечно регулярную базу пространства X. Значит, по лемме 5.4.3, семейство $\mathscr{B}_0^{\mathrm{m}}$ является точечно конечным открытым покрытием, вписанным в $\mathscr{U}$. Следовательно, пространство X слабо паракомпактно.

Остается доказать, что пространство X обладает измельчением. Рассмотрим последовательность $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ открытых покрытий пространства X, определенную в (2). В силу леммы 5.4.5, $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$. Для произвольной точки $x \in X$ и любой ее окрестности U лишь конечное число членов семейства $\mathscr{B}$ — пусть это $U_1, U_2, \ldots, U_k$ — содержат x и пересекаются с $X \setminus U$. Так как $\mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_j \subset \mathscr{I}(X)$ при $i \neq j$ и множества $U_1, U_2, \ldots, U_k$ содержат более одной точки, найдется натуральное число i, такое, что $U_j \notin \mathscr{B}_i$ при $j = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, $\mathrm{St}(x, \mathscr{B}_i) \subset U$; это показывает, что $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ — измельчение пространства X.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна. Покажем, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$ — измельчение пространства X, состоящее из точечно конечных покрытий. Без ограничения общности можно предположить, что $\mathscr{W}_j$ вписано в $\mathscr{W}_i$ при $j \geqslant i$. Ясно, что семейство $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{W}_i$ является базой пространства X. Эта база точечно регулярна, так как для каждого $x \in X$ и любой окрестности U точки x существует натуральное число i, такое, что $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_j) \subset U$ при $j \geqslant i$, и в каждом из покрытий $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots, \mathscr{W}_{i-1}$ лишь конечное число членов содержит точку x. ∎

5.4.8. Метризационный критерий Александрова. *Топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, если оно коллективно нормально и обладает точечно регулярной базой.*

Доказательство. Каждое метризуемое пространство коллективно нормально и, в силу 5.4.6, имеет точечно регулярную базу.

Произвольное коллективно нормальное пространство с точечно регулярной базой метризуемо в силу леммы 5.4.7 и метризационного критерия Бинга. ∎

Заметим, что в последнем доказательстве вместо метризационного критерия Бинга можно было бы применить лемму 5.4.7, теорему Майкла — Нагами и метризационную теорему Нагаты — Смирнова.

Мы заключаем этот параграф наиболее ранней в хронологическом отношении метризационной теоремой.

5.4.9. Метризационная теорема Александрова — Урысона. *Топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, если оно является T_0-пространством и обладает измельчением $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, таким, что для каждого натурального числа i и любых двух пересекающихся множеств $W_1, W_2 \in \mathscr{W}_{i+1}$ найдется множество $W \in \mathscr{W}_i$, такое, что $W_1 \cup W_2 \subset W$.*

Доказательство. Легко проверяется, что для любой метрики ρ на X последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, где $\mathscr{W}_i = \{B(x, 1/2^i)\}_{x \in X}$, является измельчением пространства X и обладает нужным свойством.

Рассмотрим теперь T_0-пространство X и его измельчение $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, обладающее указанным в теореме свойством. Покажем, что $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$ — сильное измельчение пространства X, чем, в силу метризационной теоремы Мора, доказательство будет завершено. Пусть x — произвольная точка пространства X и U — любая ее окрестность. Возьмем натуральное число i, для которого $\mathrm{St}(x, \mathscr{W}_i) \subset U$, и выберем $V \in \mathscr{W}_{i+1}$, для которого $x \in V$. Для каждого $W \in \mathscr{W}_{i+1}$, пересекающегося с V, найдется $W' \in \mathscr{W}_i$, такое, что $V \cup W \subset W'$. Так как $x \in V$, то $V \cup W \subset W' \subset \mathrm{St}(x, \mathscr{W}_i) \subset U$, т. е. $\mathrm{St}(V, \mathscr{W}_{i+1}) \subset U$. ∎

5.4.10. Следствие. *Топологическое пространство X метризуемо в том и только том случае, если оно является T_0-пространством и обладает измельчением $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, таким, что $\mathscr{W}_{i+1}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.* ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Бинг установил свой метризационный критерий в [1951]. Понятие измельчения было введено Читтенденом и Питчером в [1919]; существование измельчения является одной из аксиом Р. Л. Мора для абстрактных пространств (см. замечания к § 1.1). Измельчения появляются также в работе П. С. Александрова и П. С. Урысона [1923].

Регулярные пространства с измельчением называются *моровскими пространствами.* Со времени работы Джоунса [1937], где было показано, что в предположении неравенства $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ каждое сепарабельное нормальное моровское пространство метризуемо, много усилий было посвящено проблеме: метризуемо ли каждое нормальное моровское пространство? Предположение о нормальности существенно: плоскость Немыцкого является моровским пространством. Дж. Х. Силвер, в сотрудничестве с Толлом, доказал совместимость с обычными аксиомами теории множеств существования неметризуемого сепарабельного нормального моровского пространства (см. диссертацию Толла [1969]). Из этих результатов Джоунса и Силвера и Толла следует, что существование неметризуемого сепарабельного нормального моровского пространства не зависит от обычных аксиом теории множеств. Этот факт и результаты Хита в [1964] показывают, что существование неметризуемого сепарабельного нормального пространства с точечно регулярной базой тоже не зависит от обычных аксиом теории множеств (см. упр. 5.4.В). Флейснер доказал в [1982], что существование неметризуемого нормального моровского пространства вытекает из континуум-гипотезы. Как вытекает из результатов Никоша [1980] и Флейснера [1982], несуществование такого пространства связано с аксиомами о больших кардиналах (подробности см. у Флейснера [1984]).

Метризационная теорема Мора имеет длинную историю. В настоящем виде она была доказана независимо А. Стоуном в [1960] и Архангельским в [1961а], где было введено понятие сильного измельчения. В несколько иной форме (предполагалось, что последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$ удовлетворяет условию (1) этого параграфа) эта теорема была приведена Р. Л. Мором в [1935] (см. также Джоунс [1966]) и переоткрыта Моритой в [1951]. Метризационная теорема А. Х. Фринка, установленная в [1937] (см. упр. 5.4.С), может рассматриваться как еще одна разновидность той же теоремы. Отметим также, что Куратовский в [1933] объявил принадлежащую Ароншайну метризационную теорему, весьма близкую к теореме 5.4.2.

Понятие точечно регулярной базы и теорема 5.4.8 появились в работе П. С. Александрова [1960]; эта работа содержит доказательство равносильности условий (i) и (iii) леммы 5.4.7 (то, что условия (i) и (ii) равносильны, было установлено Хитом в [1964]). Теорема 5.4.6 была доказана Архангельским в [1960]; в его работе было введено понятие регулярной базы и дано доказательство теоремы 5.4.8, приведенное выше.

Грубо говоря, понятия сильного измельчения и регулярной базы получаются из понятий измельчения и точечно регулярной базы путем замены точек открытыми множествами; модификации этого рода приводят к условиям, равносильным метризуемости. Другое усиление измельчений и точечно регулярных баз, тоже дающее условия, равносильные метризуемости, обсуждается в упр. 5.4.Е.

Теорема 5.4.9 была доказана Александровым и Урысоном в [1923а]. Следствие 5.4.10 (называемое некоторыми теоремой Александрова — Урысона) появилось в книге Тьюки [1940] — это слабая форма теоремы о порождении равномерностей метриками (см. теорему 8.1.21): она устанавливает только, что если топология пространства X порождена некоторой равномерностью $\mathcal{U}$, обладающей счетной базой, то пространство X метризуемо, в то время как теорема 8.1.21 устанавливает большее — а именно что на X существует метрика, которая порождает равномерность $\mathcal{U}$.

Известно много других метризационных теорем. Некоторые из них формулируются ниже в упражнениях. Есть также много способов выводить их одну из другой. Ясно, что доказательство теоремы, устанавливаемой первой, должно содержать построение метрики. В этой книге мы начали с теоремы Нагаты — Смирнова. Можно было бы начать со следствия 5.4.10 (эскиз построения метрики для этого случая дан в упр. 5.4.H(a)) — упорядочение метризационных теорем по этому принципу представлено в книге Нагаты [1968] (см. упр. 5.4.I). До открытия метризационной теоремы Нагаты — Смирнова и теоремы 8.1.21 в качестве первого звена обычно бралась теорема Читтендена (формулируемая ниже в упр. 5.4.G), которая сводит существование метрики к существованию функции ρ с более слабыми свойствами. Хотя характеристика метризуемости, данная Читтенденом, не является чисто топологической, она была важным достижением в изучении метризуемости.

УПРАЖНЕНИЯ

5.4.A (Ю. М. Смирнов [1951a]). Убедитесь, что каждый локально метризуемый паракомпакт (т. е. паракомпакт, каждая точка которого обладает метризуемой окрестностью) метризуем.

Указание. См. теорему 4.4.19.

5.4.B (Хит [1964]). Пусть X — подмножество плоскости, определенное условием $y \geqslant 0$, т. е. замкнутая верхняя полуплоскость. Введем топологию на X, объявив все точки, лежащие выше оси x, изолированными и объявив базой в точке $(x, 0)$ семейство всех отрезков, начинающихся в $(x, 0)$ и образующих с осью x угол 90°, если x рационально, и угол 45°, если x иррационально. Докажите, что X — вполне регулярное не нормальное пространство с точечно регулярной базой. Покажите, что X слабо паракомпактно и полно по Чеху, но не счетно паракомпактно. Заметьте, что X можно представить в виде объединения двух открытых метризуемых подпространств.

Указание. Примените теорему Бэра о категории для доказательства не нормальности X и не счетной паракомпактности X.

5.4.C (А. Х. Фринк [1937]). Покажите, что T_0-пространство X метризуемо в том и только том случае, если оно обладает системой окрестностей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, где $\mathscr{B}(x) = \{B_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, такой, что для каждого $x \in X$ и каждого натурального числа i найдется j, для которого из $B_j(x) \cap B_j(y) \neq \varnothing$ следует, что $B_j(y) \subset \subset B_i(x)$.

Указание. См. замечания к этому параграфу.

5.4.D. (a) (Морита [1955]). Докажите, что T_0-пространство X метризуемо в том и только том случае, если оно обладает последовательностью $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ локально конечных замкнутых покрытий, такой, что для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдется натуральное число i, такое, что $\mathrm{St}(x, \mathscr{F}_i) \subset U$.

Указание. Можно предположить, что $\mathscr{F}_{i+1}$ вписано в $\mathscr{F}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Проверьте, что последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, где $\mathscr{W}_i = \{\mathrm{Int}\,\mathrm{St}(x, \mathscr{F}_i)\}_{x \in X}$, является сильным измельчением пространства X.

(b) Докажите теорему Ханаи — Мориты — Стоуна с помощью характеристики метризуемости, установленной в (a).

5.4.E. (a) (Джоунс [1958]). Покажите, что T_2-пространство X метризуемо в том и только том случае, если оно обладает последовательностью $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$ открытых покрытий, такой, что для каждого компакта $Z \subset X$ и произвольного открытого множества U, содержащего Z, найдется натуральное число i, для которого $\mathrm{St}(Z, \mathscr{W}_i) \subset U$.

Указание. Примените теорему 5.4.2.

(b) (Архангельский [1965] (объявлено в [1963])). Покажите, что T_2-пространство X метризуемо в том и только том случае, если у него есть база $\mathscr{B}$, такая, что для каждого компакта $Z \subset X$ и произвольного открытого множества U, содержащего Z, множество всех элементов базы $\mathscr{B}$, пересекающих и Z, и $X \setminus U$, конечно.

Указание. Примените теорему 5.4.6.

5.4.F (Нагата [1957a]). Докажите, что T_0-пространство X метризуемо в том и только том случае, если для каждой точки $x \in X$ найдутся последовательность $U_1(x), U_2(x), \ldots$ окрестностей точки x и последовательность $A_1(x), A_2(x), \ldots$ подмножеств множества X, удовлетворяющие условиям:

(i) *Для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U существует i, такое, что $A_i(x) \subset U$.*

(ii) *Если $U_i(x) \cap U_i(y) \neq \varnothing$, то $y \in A_i(x)$.*

(iii) *Если $y \in U_i(x)$, то $U_i(y) \subset A_i(x)$.*

Указание. Можно предположить, что $U_j(x) \subset U_i(x)$ при $j \geqslant i$ и $x \in X$. Проверьте, что последовательность $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$ где $\mathscr{W}_i = \{U_i(x)\}_{x \in X}$, является сильным измельчением пространства X.

5.4.G (Читтенден [1917]). Докажите, что T_0-пространство X метризуемо в том и только том случае, если существует неотрицательная вещественная функция ρ на множестве $X \times X$, такая, что для каждого $A \subset X$ выполняется условие

$$\inf_{a \in A} \rho(x, a) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x \in \overline{A},$$

а также условия (M1) и (M2) из определения метрики и условие

(M3′) *Существует отображение f множества всех неотрицательных вещественных чисел в себя, для которого из $\lim t_n = 0$ следует, что $\lim f(t_n) = 0$ и при всех $x, y, z \in X$ неравенства $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$ и $\rho(y, z) \leqslant \varepsilon$ влекут за собой неравенство $\rho(x, z) \leqslant f(\varepsilon)$.*

5.4.Н. (а) (Тьюки [1940]). Докажите, что для каждой последовательности $\mathscr{W}_0, \mathscr{W}_1, \ldots$ покрытий множества X, где $\mathscr{W}_0 = \{X\}$ и $\mathscr{W}_{i+1}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$, найдется псевдометрика ρ на множестве X, такая, что при всех $i \geqslant 1$ покрытие $\mathscr{W}_i$ вписано в покрытие $\{B(x, 1/2^{i-1})\}_{x \in X}$ и покрытие $\{B(x, 1/2^i)\}_{x \in X}$ вписано в $\mathscr{W}_{i-1}$.

Заметьте, что если X — топологическое пространство, а покрытия $\mathscr{W}_i$ открыты, то ρ — непрерывное отображение пространства $X \times X$ в R.

Воспользовавшись замечанием 4.4.2, выведите из этого результата лемму 5.1.16.

Указание. Определите отображение f множества $X \times X$ в R правилом

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{St}(x, \mathscr{W}_i), \text{ а иначе} \\ 1/2^i, \text{ где } y \in \operatorname{St}(x, \mathscr{W}_i) \setminus \operatorname{St}(x, \mathscr{W}_{i+1}). \end{cases}$$

Определите $\rho(x, y)$ как наибольшую нижнюю грань множества всех чисел вида $\sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1}, x_i)$, где $x_0, x_1, \ldots, x_k$ — любая последовательность точек множества X, такая, что $x_0 = x$ и $x_k = y$, и покажите, что $(1/2) f(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant f(x, y)$ (см. доказательство теоремы 8.1.10).

(b) (Тьюки [1940]). Проверьте, что если $\mathscr{W}_0, \mathscr{W}_1, \ldots$, где $\mathscr{W}_0 = \{X\}$ и $\mathscr{W}_{i+1}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$, является измельчением T_0-пространства X, то псевдометрика ρ, фигурирующая в (а), является метрикой на X (см. следствие 5.4.10).

(c) (Тьюки [1940], Морита [1962] и [1964]). Покажите, что для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ произвольного топологического пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ нормально.*

(2) *Существуют псевдометрика ρ на множестве X, для которой отображение ρ: $X \times X \to R$ непрерывно, и покрытие*

$\{V_s\}_{s\in S}$ *множества* X, *открытое по отношению к топологии, порожденной псевдометрикой* ρ, *такие, что* $V_s \subset U_s$ *при всех* $s \in S$.

(3) *Существуют непрерывное отображение* $f\colon X \to Y$ *на метризуемое пространство* Y *и открытое покрытие* $\{W_s\}_{s\in S}$ *пространства* Y, *такие, что* $f^{-1}(W_s) \subset U_s$ *при всех* $s \in S$.

(4) *В покрытие* $\{U_s\}_{s\in S}$ *можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из функционально открытых множеств.*

(5) *В покрытие* $\{U_s\}_{s\in S}$ *можно вписать* σ*-локально конечное покрытие, состоящее из функционально открытых множеств.*

Указание. Примените упр. 5.1.J.

(d) (А. Х. Стоун [1948]). Проверьте, что открытое покрытие нормального пространства нормально в том и только том случае, если в него можно вписать локально конечное открытое покрытие.

5.4.I (Нагата [1950]). Выведите из следствия 5.4.10, что каждое регулярное пространство, обладающее σ-локально конечной базой, метризуемо.

Указание. Пусть X — регулярное пространство и $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ — база пространства X, где $\mathscr{B}_i = \{U_s\}_{s\in S_i}$ — локально конечное покрытие пространства X. При каждом i обозначим через $\mathscr{T}_i$ семейство всех конечных подмножеств множества S_i. С помощью леммы 4.4.5 при каждом $s \in S_i$ получите замкнутые множества $F_{s,1}, F_{s,2}, \ldots$, такие, что $U_s = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{s,j}$. Затем при $T \in \mathscr{T}_i$ и $j = 1, 2, \ldots$ положите $W_{T,j} = \bigcap_{s\in T} U_s \cap \left(X \setminus \bigcup_{s\notin T} F_{s,j}\right)$. Покажите, что при $i, j = 1, 2, \ldots$ семейство $\mathscr{W}_{i,j} = \{W_{T,j}\}_{T\in\mathscr{T}_i}$ является локально конечным открытым покрытием пространства X и что если расположить покрытия $\mathscr{W}_{i,j}$ как-нибудь в виде последовательности, то они составят измельчение пространства X. С помощью теоремы 1.5.18, лемм 5.1.13 и 5.1.15 и замечания 5.1.14 получите измельчение $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, такое, что $\mathscr{W}_{i+1}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ (можно воспользоваться также теоремами **5.1.11** и **5.1.12**).

5.5. ЗАДАЧИ

Коллективная нормальность

5.5.1. (a) (Маколей [1958]). Докажите, что для любого T_1-пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство* X *наследственно коллективно нормально.*

(2) *Каждое открытое подпространство пространства X коллективно нормально.*

(3) *Для любого семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ подмножеств пространства X, дискретного в объединении $F = \bigcup_{s \in S} F_s$, найдется семейство $\{U_s\}_{s \in S}$ попарно не пересекающихся открытых в X множеств, такое, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$.*

(b) (Шедива [1959]). Покажите, что коллективная нормальность наследуется F_σ-множествами. Заметьте, что совершенно нормальное коллективно нормальное пространство наследственно коллективно нормально.

Указание. См. задачу 2.7.2(a).

(c) Докажите, что T_1-пространство X коллективно нормально в том и только том случае, если для каждого кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ произвольное непрерывное отображение f: $A \to J(\mathfrak{m})$ любого замкнутого подпространства A пространства X в пространство $J(\mathfrak{m})$ можно непрерывно продолжить на всё X.

Указание. Пусть непрерывное отображение f: $A \to J(\mathfrak{m})$ определено на замкнутом подпространстве A коллективно нормального пространства X. Рассмотрите отображение g: $J(\mathfrak{m}) \to I$, определенное так: $g([(x, s)]) = x$ при всех $x \in I$ и $s \in S$, где $[(x, s)]$ и S — такие, как в примере 4.1.5. Возьмите какое-нибудь непрерывное продолжение G: $X \to I$ композиции gf: $A \to I$. Заметьте, что множества $F_s = f^{-1}(\{[(x, s)]: 0 < x \leqslant 1\})$ составляют дискретное семейство замкнутых подмножеств в $G^{-1}((0, 1])$. Воспользовавшись (b), возьмите семейство $\{U_s\}_{s \in S}$ попарно не пересекающихся открытых множеств в X, таких, что $F_s \subset U_s$ при всех $s \in S$. Продолжите функцию h: $A \cup \left(X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s\right) \to I$, определенную условиями $h|A = gf$ и $h\left(X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s\right) \subset \{0\}$, до некоторой непрерывной функции H: $X \to I$. Положите $F(x) = [(H(x), s)]$ при $x \in U_s$ и $F(x) = [(0, s)]$ при $x \in X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s$.

Операция X_M

5.5.2. (a) Проверьте, что для каждого подпространства M наследственно нормального пространства X пространство X_M наследственно нормально.

(b) Проверьте, что для каждого подпространства M наследственно коллективно нормального пространства X пространство X_M наследственно коллективно нормально.

(c) (Фурдзик [1968]). Покажите, что если M — подпространство совершенно нормального пространства X, то пространство

X_M совершенно нормально в том и только том случае, если M — множество типа G_δ в X.

(d) Покажите, что если M — подпространство метризуемого пространства X, то пространство X_M метризуемо в том и только том случае, если M — множество типа G_δ в X.

Вокруг примеров Бинга и Майкла

5.5.3. (a) (Бинг [1951]). Заметьте, что пространство X в примере 5.1.23 наследственно нормально, но не совершенно нормально.

Рассмотрите множество $Z = (M \cup \{0\}) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \times \{1/i\})$ и введите топологию на Z, приняв за базу в каждой точке $(x, 0)$ совокупность всех множеств вида $\{(x, 0)\} \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} (U \times \{1/i\})$, где U — произвольная окрестность точки x в пространстве X и $k = 1, 2, \ldots$, а все остальные точки объявив изолированными. Проверьте, что пространство Z совершенно нормально, но не коллективно нормально. Убедитесь, что Z обладает σ-дискретной сетью, и выведите отсюда, что в каждое открытое покрытие пространства Z можно вписать замкнутое σ-локально конечное покрытие.

Замечание. Топологическое пространство X, в любое открытое покрытие которого можно вписать замкнутое σ-локально конечное покрытие, называется *субпаракомпактным.* Класс субпаракомпактных пространств широко изучался. Он был введен Маколеем в [1958] под названием *F_σ-просеянных пространств.* Позднее Архангельский определил в [1966b] класс σ-паракомпактных пространств. Пространство X называется *σ-паракомпактным*, если для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X найдется последовательность $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots$ открытых покрытий пространства X, обладающая тем свойством, что для каждой точки $x \in X$ существуют натуральное число i и множество $U \in \mathcal{U}$, такие, что $\mathrm{St}(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ (таким образом, каждое топологическое пространство с измельчением σ-паракомпактно). Бурке доказал в [1969] совпадение F_σ-просеянности и σ-паракомпактности; он ввел также термин «субпаракомпактность» и дал другие характеристики субпаракомпактности.

(b) Покажите, что пространство X в примере 5.1.23 и пространство Z в (a) не слабо паракомпактны.

Указание. С помощью задачи 2.7.11(b) покажите, что только счетное число членов произвольного точечно конечного открытого покрытия пространства X может пересекать множество M.

(c) (Майкл [1955]). Пусть S — подпространство пространства X из примера 5.1.23, состоящее из всех точек множества

$D^{2^{\mathfrak{c}}}$, лишь конечное число координат которых отлично от нуля. Проверьте, что пространство $X_0 = S \cup M \subset X$ нормально и слабо паракомпактно, но не коллективно нормально. Приведите пример совершенно нормального пространства с этими свойствами.

5.5.4. (a) (Майкл [1963]). Видоизменив пример 5.1.32, определите наследственно паракомпактное пространство X со свойством Линделёфа и сепарабельное метризуемое пространство Y, такие, что произведение $X \times Y$ не нормально (см. задачу 5.5.5 и упр. 5.1.F(c)).

Указание (Куратовский и Серпинский [1926]). Применив трансфинитную индукцию, докажите, что для каждого множества X мощности $\mathfrak{c}$ и произвольного семейства $\mathscr{C}$ мощности $\mathfrak{c}$, состоящего из подмножеств мощности $\mathfrak{c}$ множества X, найдется множество $A \subset X$, такое, что $|A| = \mathfrak{c}$ и $A \cap C \neq \varnothing \neq (X \setminus A) \cap C$ при всех $C \in \mathscr{C}$. Выведите отсюда, воспользовавшись задачей 4.5.5, что существует подмножество A мощности $\mathfrak{c}$ вещественной прямой, для которого каждый компакт, лежащий либо в A, либо в $R \setminus A$, счетен (произвольное множество $A \subset R$, обладающее последним свойством, называется *множеством Бернштейна*; такие множества были впервые определены Бернштейном в [1908]).

(b) (Майкл [1963]). Видоизменив пример 5.1.32, определите сепарабельное линделёфово пространство X и сепарабельное метризуемое пространство Y, такие, что произведение $X \times Y$ не нормально.

Указание. Определите сепарабельное линделёфово пространство, содержащее пространство X из (a) в качестве замкнутого подпространства.

(c) Определите обратную последовательность линделёфовых пространств, предел которой не нормален и не слабо паракомпактен.

Указание. Разложите R на непересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots$ мощности $\mathfrak{c}$, такие, что при $i = 1, 2, \ldots$ каждый компакт, лежащий в $R \setminus A_i$, счетен.

Паракомпактность произведений

5.5.5. (a) (Майкл [1953]). Докажите, что произведение $X \times Y$ совершенно нормального паракомпактного пространства X и метризуемого пространства Y паракомпактно.

Указание. Покажите, что произведение $X \times Y$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 5.1.11. Воспользуйтесь задачей 4.5.16(a) и тем, что определенное в доказательстве теоремы 5.1.28 семейство $\mathscr{B}$ σ-локально конечно в X.

(b) (Майкл [1953]). Докажите, что произведение $X \times Y$ паракомпакта X и регулярного σ-компактного пространства Y паракомпактно.

(c) (Морита [1953]). Докажите, что произведение $X \times Y$ паракомпакта X и локально компактного паракомпакта Y паракомпактно.

(d) (Уиллард [1971]). Заметьте, что произведение $X \times Y$ линделёфова пространства X и пространства Y, обладающего всюду плотным σ-компактным множеством (в частности, произведение линделёфова пространства X и сепарабельного пространства Y), паракомпактно в том и только том случае, если оно обладает свойством Линделёфа.

Указание. См. теорему 5.1.25.

(e) (Тамано [1962]). Выведите из теоремы Тамано, что для каждого топологического пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Для каждого паракомпакта Y произведение $X \times Y$ является паракомпактом.*

(2) *Для каждого паракомпакта Y произведение $X \times Y$ нормально.*

Замечание. Не существует внутренней характеристики класса пространств, для которых произведение на каждый паракомпакт является паракомпактом (см., однако, Катута [1971]). Работа Тельгарского [1971] содержит новые результаты в этом направлении и обсуждение более ранних результатов (см. задачу 5.5.9(b)).

5.5.6 (А. Х. Стоун [1948]). Докажите, что следующие условия равносильны для произвольного семейства $\{X_s\}_{s \in S}$ метризуемых пространств:

(1) *Произведение* $\prod_{s \in S} X_s$ *нормально.*

(2) *Произведение* $\prod_{s \in S} X_s$ *коллективно нормально.*

(3) *Произведение* $\prod_{s \in S} X_s$ *паракомпактно.*

(4) *Множество некомпактных подпространств семейства $\{X_s\}_{s \in S}$ не более чем счетно.*

Указание. Примените задачу 2.7.16(a).

Замечание. Как отмечено в замечании к задаче 2.7.15(d), существует не нормальное произведение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, для которого все конечные произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_i$ наследственно паракомпактны и хаусдорфовы. С другой стороны, Нагами доказал в [1972], что предел произвольной обратной последовательности совершенно нормальных паракомпактных пространств является совершенно нормальным паракомпактом.

Паракомпакты с диагональю типа G_δ

5.5.7 (Окуяма [1964], Борджес [1966]). (a) Покажите, что если X — паракомпакт и диагональ Δ является множеством типа G_δ в $X \times X$, то существует взаимно однозначное непрерывное отображение[1]) пространства X на некоторое метризуемое пространство.

Указание. Определите счетное семейство $\{\mathscr{V}_i\}_{i=1}^{\infty}$ локально конечных открытых покрытий пространства X так, чтобы для каждой пары x, y различных точек пространства X существовал номер i, при котором никакой элемент семейства $\mathscr{V}_i$ не содержит одновременно x и y. Каждому покрытию $\mathscr{V}_i$ поставьте в соответствие подходящую псевдометрику ρ_i: $X \times X \to R$, а затем определите метрику на множестве X.

Можно взять также замкнутое G_δ-множество $F \subset X \times \beta X$, для которого $F \cap (X \times X) = \Delta$, определить непрерывную функцию f: $X \times \beta X \to I$, такую, что $F = f^{-1}(0)$, и положить $\rho(x, y) = \sup\limits_{z \in \beta X} |f(x, z) - f(y, z)|$.

(b) Докажите, что паракомпакт X с диагональю Δ типа G_δ в $X \times X$ метризуем в том и только том случае, если X допускает совершенное отображение на метризуемое пространство.

Указание. Примените теорему 3.7.27.

(c) Заметьте, что утверждением (b) решается **упр. 4.2.В.**

(d) Приведите пример паракомпакта, который не допускает совершенного отображения на метризуемое пространство.

(e) (Нагата [1969]). Заметьте, что топологическое пространство X допускает совершенное отображение на метризуемое пространство в том и только том случае, если X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $Y \times Z$ метризуемого пространства Y на компакт Z.

Замечание. Класс всех пространств, допускающих совершенное отображение на метризуемое пространство, был недавно подробно изучен. Обсуждение результатов, полученных в этом направлении, можно найти в работах Архангельского [1966b] и Мориты [1971] (см. задачу 5.5.9(a) и (d)).

Паракомпактность и полные по Чеху пространства

5.5.8. (a) (Пасынков [1967]; для метризуемого X — Майкл [1959]). Докажите, что для произвольного открытого отображения f: $X \to Y$ полного по Чеху пространства X на паракомпакт Y найдется замкнутое G_δ-множество $A \subset X$, такое, что сужение $f|A$: $A \to Y$ является совершенным отображением пространства A на Y.

---

[1]) Такие отображения называются *уплотнениями.* — *Прим. перев.*

Указание. Рассмотрите непрерывное продолжение $F\colon \beta X \to \beta Y$ отображения f и совершенное отображение $g = F_Y\colon Z \to Y$, где $Z = F^{-1}(Y)$. Покажите сначала, что для каждого открытого множества G пространства Z, такого, что $f(X \cap G) = Y$, найдется открытое множество $H \subset Z$, для которого $f(X \cap H) = Y$ и $\overline{H} \subset G$, где черта обозначает замыкание в Z. С этой целью выберите для каждого $y \in Y$ открытое множество $V(y) \subset Z$, такое, что $f^{-1}(y) \cap V(y) \neq \varnothing$ и $\overline{V(y)} \subset G$. Возьмите затем какое-нибудь локально конечное открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства Y, вписанное в покрытие $\{f(X \cap V(y))\}_{y \in Y}$ этого пространства. При каждом $s \in S$ выберите $y(s) \in Y$, такое, что $U_s \subset f[X \cap V(y(s))]$, и положите $H = \bigcup_{s \in S} [V(y(s)) \cap g^{-1}(U_s)]$.

Представьте X в виде $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, где каждое G_i открыто в Z. Определите по индукции последовательность $H_0 = Z, H_1, H_2, \ldots$ открытых подмножеств в Z, такую, что $\overline{H}_i \subset G_i \cap H_{i-1}$ и $f(X \cap H_i) = Y$ при $i = 1, 2, \ldots$. Положите $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{H_i}$.

(b) (Пасынков [1967]). Покажите, что если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение локально полного по Чеху пространства X на паракомпакт Y, то Y полно по Чеху.

Указание. Каждое локально полное по Чеху пространство является образом некоторого полного по Чеху пространства при открытом отображении.

(c) (Архангельский [1961], Фролик [1961]). Выведите из (b), что каждый локально полный по Чеху паракомпакт полон по Чеху.

(d) (Майкл [1959]; для метризуемого Y — Хаусдорф [1934]; для сепарабельных метризуемых X и Y — Серпинский [1930]). Докажите, что если паракомпакт Y является образом полного метризуемого пространства X при открытом отображении, то Y метризуемо полной метрикой.

Замечание. Майклом было доказано в [1959], что если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение метризуемого пространства X на паракомпакт Y, такое, что прообразы $f^{-1}(y)$ всех точек полны относительно некоторой метрики на пространстве X, то пространство Y метризуемо.

5.5.9. (a) (Фролик [1960]). Докажите, что топологическое пространство X паракомпактно и полно по Чеху в том и только том случае, если оно допускает совершенное отображение на некоторое метризуемое полной метрикой пространство.

Указание. Если X — полный по Чеху паракомпакт, то найдется непрерывная функция $f\colon X \times \beta X \to I$, для которой $\Delta \subset$

$\subset f^{-1}(0) \subset X \times X$. Рассмотрите псевдометрику ρ на множестве X, определенную формулой $\rho(x, y) = \sup_{z \in \beta X} |f(x, z) - f(y, z)|$, и пространство $Y = X/\rho$ (см. упр. 4.2.I).

(b) (Фролик [1960]). Выведите из (a) и теоремы 3.7.7, что произведение счетного семейства полных по Чеху паракомпактов является полным по Чеху паракомпактом (см. упр. 3.9.F).

(c) Заметьте, что (a) и задача 5.5.7 (b) дают решение упр. 5.1.1.

(d) (Шостак [1974]). Покажите, что топологическое пространство X веса $\leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ является полным по Чеху паракомпактом в том и только том случае, если X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $[J(\mathfrak{m})]^{\aleph_0} \times I^{\mathfrak{m}}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 5.5.7(e) и упр. 4.4.B.

Паракомпактность и вещественно полные пространства

5.5.10 (Катетов [1951]). (a) Докажите, что паракомпакт X вещественно полон в том и только том случае, если каждое замкнутое дискретное подпространство пространства X вещественно полно (см. задачу 8.5.13(h)).

Указание (Мрувка [1964]). Возьмем какую-нибудь точку $x_0 \in \beta X \setminus X$ и σ-дискретное замкнутое покрытие $\mathscr{F}$ пространства X, такие, что $x_0 \notin \overline{F}$ при всех $F \in \mathscr{F}$, где черта обозначает замыкание в βX. Положим $F_i = \bigcup \mathscr{F}_i$, где $\mathscr{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i$ и семейства $\mathscr{F}_i$ дискретны. Если $x_0 \notin \overline{F}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$, то легко определяется непрерывная функция $h \colon X \to I$, такая, что $h(x_0) = 0$ и $h(x) > 0$ при всех $x \in X$. Значит, можно предположить, что $x_0 \in \overline{F}_{i_0}$. Рассмотрите отношение эквивалентности E на пространстве $Y = F_{i_0} \cup \{x_0\}$, отвечающее разбиению $\mathscr{E} = \mathscr{F}_{i_0} \cup \{x_0\}$, возьмите факторпространство $Z = Y/E$ и естественное факторное отображение $q \colon Y \to Z$. Заметьте, что Z — тихоновское пространство и что выполняется условие $\beta Z = \beta T$, где $T = q(F_{i_0})$; воспользуйтесь теперь вещественной полнотой пространства T.

(b) Заметьте, что если мощность каждого замкнутого дискретного подпространства паракомпакта X является неизмеримым кардиналом, то X вещественно полно (см. задачу 8.5.13(h)).

Указание. Примените упр. 3.11.D(a).

(c) Убедитесь, что если $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение вещественно полного пространства X на паракомпакт Y, то Y вещественно полно.

Компактно накрывающие отображения

5.5.11. Непрерывное отображение $f \colon X \to Y$ называется *компактно накрывающим*, если для каждого компакта $B \subset Y$ найдется компакт $A \subset X$, такой, что $f(A) = B$.

(a) (Архангельский [1964]). Покажите, что каждое компактно накрывающее отображение со значениями в k-пространстве является факторным.

(b) (Майкл [1964a]). Покажите, что если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение пространства X на пространство Y точечно счетного типа, то для каждой непрерывной функции $g\colon X \to R$ и любого $y \in Y$ множество $g(\operatorname{Fr} f^{-1}(y))$ ограничено[1]. Выведите отсюда, что если пространство X нормально, то множества $\operatorname{Fr} f^{-1}(y)$ счетно компактны (см. лемму 4.4.16 и упр. 4.4.I).

Указание. Каждая точка $y \in Y$ имеет такую систему окрестностей $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любой последовательности $y_1, y_2, \ldots$, где $y_i \in V_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$, у множества $\{y_1, y_2, \ldots\}$ есть предельная точка.

(c) (Майкл [1964a]; объявлено для метризуемого X — Архангельский [1964]). Докажите, что каждое замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ паракомпакта X на произвольное[2] пространство Y является компактно накрывающим.

Указание. См. доказательство теоремы 4.4.17.

(d) Покажите, что в (c) нельзя заменить предположение о паракомпактности X предположением о коллективной нормальности X.

(e) (Архангельский [1966a] (объявлено в [1964]); для метризуемого X — Бурбаки [1958]). Докажите, что каждое открытое отображение $f\colon X \to Y$ полного по Чеху пространства X на произвольное пространство Y является компактно накрывающим.

Указание. См. задачу 5.5.8(a).

(f) (Майкл [1959]). Приведите пример открытого отображения сепарабельного метризуемого пространства на (замкнутый) единичный отрезок I, не являющегося компактно накрывающим.

Указание. В квадрате I^2 уберите подходящим образом по точке с каждого вертикального отрезка.

Непроводимые отображения

5.5.12 (Лашнев [1965]). Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение паракомпакта X на пространство Фреше — Урысона Y, то найдется замкнутое подпространство $X_0 \subset$

---

[1] Сейчас принято называть подмножество A топологического пространства X *R-ограниченным в X* (или просто *ограниченным*), если каждая непрерывная вещественная функция на X ограничена на A снизу и сверху. — *Прим. перев.*

[2] Обратим внимание читателя на то, что в определении компактно накрывающего отображения фингурируют не произвольные компактные подпространства, а компакты. — *Прим. перев.*

$\subset X$, для которого $f(X_0)=Y$ и отображение $f|X_0\colon X_0\to Y$ неприводимо (см. упр. 3.1.С).

Указание. Рассмотрите замкнутое множество $B=A\cup \cup f^{-1}(Y^d)\subset X$, где A получено путем выбора по точке из прообраза $f^{-1}(y)$ каждой изолированной точки $y\in Y$, и возьмите семейство $\mathcal{F}$ всех замкнутых подмножеств $F\subset B$, таких, что $f(F)=Y$, упорядоченное отношением $\supset$. Предположите, что для некоторого линейно упорядоченного подсемейства $\{F_s\}_{s\in S}$ семейства $\mathcal{F}$ нашлась точка $y_0\in Y$, такая, что $f^{-1}(y_0)\cap\bigcap_{s\in S}F_s=$ $=\varnothing$. Возьмите произвольную нетривиальную последовательность $y_1, y_2, \ldots$, сходящуюся к y_0, и, воспользовавшись задачей 5.5.11(b), заметьте, что множество $\overline{f^{-1}(y_0)\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(y_i)}$ компактно. Выведите отсюда противоречие. Примените затем лемму Куратовского — Цорна.

Паракомпактность пространств отображений

5.5.13. (a) (О'Мира [1971]). Докажите, что если X — сепарабельное метризуемое пространство и Y — метризуемое пространство, то пространство Y^X с компактно открытой топологией совершенно нормально и наследственно паракомпактно (см. упр. 3.8.D).

Указание. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное в X множество и $\mathcal{B}$ есть σ-дискретная база пространства Y. Зафиксируем метрику ρ на пространстве X и для каждой (конечной) последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_k$ натуральных чисел, произвольной последовательности $B_1, B_2, \ldots, B_k$ элементов базы $\mathcal{B}$ и любого натурального числа m положим

$$U(i_1, i_2, \ldots, i_k; B_1, B_2, \ldots, B_k)=\bigcap_{j=1}^{k}M(\{x_{i_j}\}, B_j) \tag{1}$$

и

$$M_m(i_1, i_2, \ldots, i_k; B_1, B_2, \ldots, B_k)=\bigcap_{j=1}^{k}M(B(x_{i_j}, 1/m), B_j). \tag{2}$$

Проверьте, что множества в (1) составляют σ-дискретное открытое покрытие пространства Y^X, а множества в (2) образуют сеть в Y^X.

(b) Докажите, что если X — сепарабельное метризуемое пространство и Y — метризуемое пространство, то пространство Y^X с топологией поточечной сходимости совершенно нормально и наследственно паракомпактно (см. упр. 3.8.D).

Указание. Проанализируйте доказательство утверждения (a).

Пространство $N^{\aleph_1}$ не является ни счетно паракомпактным, ни слабо паракомпактным

5.5.14. (a) (Нагами [1972]). Покажите, что пространство $N^{\aleph_1}$ не счетно паракомпактно (см. задачу 5.5.6).

Указание. Положим $N^{\aleph_1} = \prod\limits_{s \in S} X_s$, где $X_s = N$ и $|S| = \aleph_1$. Для каждого натурального числа k рассмотрите множество $A_k \subset \prod\limits_{s \in S} X_s$, состоящее из всех $\{x_s\}$, таких, что при всяком $j \neq k$ равенство $x_s = j$ выполняется самое большее для одного $s \in S$. Положите $F_i = \bigcup\limits_{k=i}^{\infty} A_k$ и примените теорему 5.2.1 и задачу 2.7.12(a).

(b) Убедитесь, что пространство $N^{\aleph_1}$ не слабо паракомпактно.

Счетная паракомпактность в нормальных пространствах

5.5.15 (Мансфилд [1957]). Докажите, что для каждого нормального пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X счетно паракомпактно.*

(2) *В каждое счетное открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное замкнутое покрытие.*

(3) *В каждое счетное открытое покрытие пространства X можно вписать σ-локально конечное замкнутое покрытие.*

(4) *В каждое счетное открытое покрытие пространства X можно вписать σ-дискретное замкнутое покрытие.*

(5) *В каждое счетное открытое покрытие пространства X можно сильно звездно вписать счетное открытое покрытие.*

(6) *В каждое счетное открытое покрытие пространства X можно сильно звездно вписать открытое покрытие.*

F_σ-множества в счетно паракомпактных пространствах

5.5.16 (Зенор [1976]). (a) Покажите, что свойство быть счетно паракомпактным нормальным пространством наследуется F_σ-множествами.

(b) Докажите, что если все F_σ-подмножества произведения $X \times Y$ — счетно паракомпактные хаусдорфовы пространства, то либо X нормально, либо все счетные дискретные подпространства пространства Y замкнуты.

Указание. Предположим, что $\{y_1, y_2, \ldots\}$ — счетное дискретное подпространство пространства Y, у которого есть в Y предельная точка y_0. Возьмем замкнутое множество $F \subset X$, открытое множество $W \subset X$, содержащее F, и рассмотрим подпространство $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ пространства $X \times Y$, где $F_0 = F \times \{y_0\}$ и $F_i = X \times \{y_i\}$ при $i \geqslant 1$. В открытое покрытие $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ подпространства A, где $U_0 = (W \times Y) \cap A$ и $U_i = F_i$ при $i \geqslant 1$, можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$, такое, что $V_i \subset U_i$ при $i = 0, 1, \ldots$. Проверьте, что последовательность $W_1, W_2, \ldots$, где $W_i = X \setminus \overline{p(V_i)}$ и $p\colon X \times Y \to X$ — проекция, удовлетворяет условиям леммы 1.5.14.

(c) Выведите из (b), что счетная паракомпактность не наследуется F_σ-множествами.

Продолжение локально конечных семейств множеств

5.5.17 (Мансфилд [1957]). Покажите, что хаусдорфово пространство X счетно паракомпактно в том и только том случае, если для каждого счетного локально конечного семейства $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых множеств в X найдется локально конечное семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых множеств, такое, что $F_i \subset V_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Указание. Пусть $\mathcal{S}$ — семейство всех конечных множеств натуральных чисел. Для каждого $x \in X$ возьмем окрестность $U(x)$ точки x и множество $S(x) \in \mathcal{S}$, такие, что $F_i \cap U(x) = \varnothing$ при $i \notin S(x)$. Пусть $U_S = \bigcup \{U(x)\colon S(x) = S\}$; возьмем локально конечное открытое покрытие $\{W_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ пространства X, такое, что $W_S \subset U_S$ при всех $S \in \mathcal{S}$, и положим $V_i = \bigcup_{i \in S} W_S$.

5.5.18. (a) (Даукер [1956]). Докажите, что нормальное пространство X коллективно нормально и счетно паракомпактно в том и только том случае, если для каждого локально конечного семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых в X множеств найдется локально конечное семейство $\{V_s\}_{s \in S}$ открытых множеств, такое, что $F_s \subset V_s$ при всех $s \in S$.

Указание (Катетов [1958]). Заметьте сначала, что при дополнительном предположении, что никакая точка пространства X не принадлежит более чем i множествам F_s, существование такого семейства $\{V_s\}_{s \in S}$ следует из коллективной нормальности X (примените индукцию по i). Затем, обратившись к общему случаю, положите $F = \bigcup_{s \in S} F_s$ и обозначьте через W_i подмножество множества F, состоящее из всех точек, которые принадлежат самое большее к i множествам F_s. Рассмотрите локально конечное замкнутое покрытие $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства F, вписанное в открытое покрытие $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ этого пространства.

Воспользовавшись задачей 5.5.17, возьмите локально конечное семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых множеств в X, такое, что $E_i \subset V_i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Для каждого i рассмотрите локально конечное семейство $\{V_{s,i}\}_{s \in S}$ открытых множеств в X, такое, что $F_s \cap E_i \subset V_{s,i}$ и положите $V_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} (V_{s,i} \cap V_i)$.

(b) (Смит и Краевский [1971]). Докажите, что для каждого локально конечного семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых множеств в слабо паракомпактном пространстве X существует точечно конечное семейство $\{V_s\}_{s \in S}$ открытых множеств, такое, что $F_s \subset V_s$ при всех $s \in S$.

Указание. См. указание к задаче 5.5.17.

Коллективная нормальность и произведения

5.5.19. (a) (Алас [1971]). Докажите, что если пространство X коллективно нормально и счетно паракомпактно, то при каждом $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ произведение $X \times A(\mathfrak{m})$ нормально.

(b) (Алас [1971]). Покажите, что если произведение $X \times A(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m} = |X|$, нормально, то пространство X коллективно нормально и счетно паракомпактно.

(c) (Алас [1971]). Докажите, что если произведение $X \times A(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m} \geqslant |X|$, нормально, то оно также и коллективно нормально.

(d) (Морита, цитировано в Исии [1966]). Докажите, что если произведение $X \times Y$ нормального пространства X и метризуемого пространства Y счетно паракомпактно, то $X \times Y$ нормально.

Указание (М. Э. Рудин и Старбёрд [1975]). Возьмите какую-нибудь метрику на пространстве Y и рассмотрите последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ локально конечных открытых покрытий пространства Y, где $\delta(U) < 1/i$ при $U \in \mathcal{U}_i$ и $\mathcal{U}_{i+1}$ вписано в $\mathcal{U}_i$. Рассмотрите произвольное замкнутое множество $F \subset X \times Y$ и любое открытое множество $W \subset X \times Y$, содержащее F. Для каждого $U \in \mathcal{U}_i$ возьмите множество

$$A(U) = \overline{p[(X \times \overline{U}) \cap F]} \cap \overline{p[(X \times \overline{U}) \setminus W]},$$

где p обозначает проекцию пространства $X \times Y$ на X. Убедитесь, что множества $A_i = \bigcup\{A(U) \times \overline{U}\colon U \in \mathcal{U}_i\}$ замкнуты, образуют убывающую последовательность и удовлетворяют условию $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. Воспользовавшись теоремой 5.2.1, возьмите убывающую последовательность $V_1, V_2, \ldots$ открытых множеств в $X \times Y$, такую, что $A_i \subset V_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i = \varnothing$. Проверьте, что для каждого $U \in \mathcal{U}_i$ множества $B(U) = \overline{p[(X \times \overline{U}) \cap F]} \setminus p[(X \times U) \cap V_i]$ и $C(U) = p[(X \times \overline{U}) \setminus W]$ замкнуты и не пересекаются. Возьмите открытое множество $W(U) \subset X$, для которого $C(U) \cap \overline{W(U)} = \varnothing$ и $B(U) \subset W(U)$. Убедитесь, что множества $W_i = \bigcup \{W(U) \times U \colon U \in \mathcal{U}_i\}$ удовлетворяют условиям леммы 1.5.14.

Замечание. В [1975] Рудин и Старбёрд доказали также, что если произведение $X \times Y$ счетно паракомпактного пространства X и метризуемого пространства Y нормально, то $X \times Y$ счетно паракомпактно.

(e) Докажите, что произведение $X \times Y$ совершенно нормального коллективно нормального пространства X и метризуемого пространства Y коллективно нормально (см. задачи 4.5.16(b) и 5.5.5(a)).

Указание. Пусть $\mathfrak{m} = |X \times Y| \geqslant \aleph_0$. Воспользовавшись задачей 4.5.16(b), следствием 5.2.5 и упр. 5.2.G(b), заметьте, что $(X \times Y) \times A(\mathfrak{m})$ счетно паракомпактно. Выведите затем из (a), что пространство $X \times A(\mathfrak{m})$ нормально, и примените (d) и (b).

Полунепрерывные функции III (см. задачи 1.7.14—1.7.16, 2.7.4 и 3.12.22(g)).

5.5.20 (Даукер [1951], Катетов [1951a]; для паракомпактных пространств — Дьедонне [1944]). Докажите, что T_1-пространство X нормально и счетно паракомпактно в том и только том случае, если для любых вещественных функций f и g на X, таких, что f полунепрерывна сверху, g полунепрерывна снизу и $f(x) < g(x)$ при всех $x \in X$, найдется непрерывная функция $h \colon X \to R$, для которой $f(x) < h(x) < g(x)$ при всех $x \in X$.

Указание. Определяя h, рассмотрите счетное открытое покрытие пространства X, образованное всеми множествами $U_r = \{x \in X \colon f(x) < r < g(x)\}$, где r — любое рациональное число.

Теорема Борсука о продолжении гомотопии

5.5.21 (Даукер [1951]; для метризуемого X — Борсук [1937]). Пусть X и Y — топологические пространства и f_0, f_1 — непрерывные отображения пространства X в Y. Если существует такое непрерывное отображение $F \colon X \times I \to Y$, что $F(x, i) = f_i(x)$ при $i = 0$ и $i = 1$, то мы говорим, что отображения f_0 и f_1 *гомотопны*; отображение F при этом называется *гомотопией* между f_0 и f_1.

Докажите, что если X — счетно паракомпактное нормальное пространство, M — замкнутое подпространство пространства X

и f_0, f_1 — гомотопные непрерывные отображения пространства M в n-сферу S^n, причем f_0 непрерывно продолжается на все X, то f_1 тоже непрерывно продолжается на X и, более того, для каждого непрерывного продолжения отображения f_0 найдется гомотопное ему продолжение отображения f_1 (это и есть *теорема Борсука о продолжении гомотопии*).

Указание (Даукер; цитировано в книге Гуревича и Волмэна [1941]). Пусть F: $M \times I \to S^n$ — гомотопия между f_0 и f_1, и пусть f_0^*: $X \to S^n$ — непрерывное продолжение отображения f_0. Комбинация отображения F и отображения f_0^* (рассматриваемого как отображение множества $X \times \{0\}$ в S^n) продолжается, в силу теоремы 2.1.8 и упр. 3.2.C, до непрерывного отображения G: $U \to S^n$, где $U \subset X \times I$ — некоторое открытое множество, содержащее $(X \times \{0\}) \cup (M \times I)$. По теореме 3.1.16, существует открытое множество $V \subset X$, для которого $M \times I \subset V \times I \subset U$. Рассмотрите отображение F: $X \times I \to S^n$, определенное так: $F(x, t) = G(x, tg(x))$, где g: $X \to I$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $g(X \setminus V) \subset \{0\}$ и $g(M) \subset \subset \{1\}$.

Замечание. Морита в [1975] и Старбёрд в [1975] независимо доказали, что теорема Борсука о продолжении гомотопии выполняется и для любого нормального пространства X, но доказывается это существенно более сложным рассуждением.

Линейно упорядоченные пространства IV (см. задачи 1.7.4, 2.7.5, 3.12.3, 3.12.4, 3.12.12(f), 6.3.2 и 8.5.13(j)).

5.5.22. (a) (Беннет [1971]). Пусть $\mathscr{A}$ — произвольное связное семейство выпуклых подмножеств множества X, линейно упорядоченного отношением $<$. Покажите, что в $\bigcup \mathscr{A}$ существуют последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, конечные или бесконечные, для которых выполняются условия

(1) $x_1 = y_1$, $x_i < x_{i+1}$ и $y_{i+1} < y_i$ при $i = 1, 2, \ldots$;

(2) $x_{i+1} \notin \mathrm{St}(x_i, \mathscr{A})$ и $y_{i+1} \notin \mathrm{St}(y_i, \mathscr{A})$ при $i = 1, 2, \ldots$;

(3) $\mathrm{St}(x_i, \mathscr{A}) \cap \mathrm{St}(x_{i+1}, \mathscr{A}) \neq \varnothing \neq \mathrm{St}(y_i, \mathscr{A}) \cap \mathrm{St}(y_{i+1}, \mathscr{A})$ при $i = 1, 2, \ldots$;

(4) $$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{St}(x_i, \mathscr{A}) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{St}(y_i, \mathscr{A}) = \bigcup \mathscr{A}.$$

(b) Выведите из (a), что для каждого открытого покрытия $\mathscr{U}$ произвольного линейно упорядоченного пространства следующие условия равносильны:

(1) *В покрытие $\mathscr{U}$ можно вписать звездно конечное открытое покрытие.*

(2) *В покрытие $\mathscr{U}$ можно вписать точечно счетное открытое покрытие.*

(c) (Болл [1954], Гиллман и Хенриксен [1954]). Покажите, что каждое линейно упорядоченное пространство счетно паракомпактно.

(d) (Гиллман и Хенриксен [1954], Федорчук [1966]). Покажите, что для каждого линейно упорядоченного пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X сильно паракомпактно.*

(2) *Пространство X паракомпактно.*

(3) *Пространство X слабо паракомпактно.*

(4) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать точечно счетное открытое покрытие*[1].

(e) (Гиллман и Хенриксен [1954]). В произвольном линейно упорядоченном множестве X кроме щелей, определенных во введении (которые иногда называют *внутренними щелями*), мы будем рассматривать *концевые щели*: если в X нет наибольшего элемента, то пара $(X, \varnothing)$ будет именоваться *правой концевой щелью* множества X, а если в X нет наименьшего элемента, то пара $(\varnothing, X)$ будет называться *левой концевой щелью* множества X. Щель (A, B) в X называется *левой Q-щелью*, если либо $A = \varnothing$, либо найдется возрастающая трансфинитная последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots, \xi < \alpha$, элементов множества A, конфинальная всему A и такая, что, каков бы ни был предельный ординал $\lambda < \alpha$, у множества $\{x_\xi\colon \xi < \lambda\}$ нет наименьшей верхней грани в X; *правая Q-щель* в X определяется аналогично. Под *Q-щелью* в линейно упорядоченном множестве X мы будем понимать такую щель в X, которая является одновременно и левой, и правой Q-щелью.

Докажите, что линейно упорядоченное пространство X паракомпактно в том и только том случае, если каждая щель в X является Q-щелью.

Указание. С помощью (a) покажите, что в связное покрытие $\mathcal{U}$ линейно упорядоченного пространства X, состоящее из интервалов, можно вписать точечно счетное открытое покрытие в том и только том случае, если концевые щели множества X (если таковые существуют) являются Q-щелями.

(f) (Энгелькинг и Латцер [1977]). Для произвольного ординала α пусть $W(\alpha)$ — множество всех ординалов, меньших α, с топологией, порожденной естественным упорядочением $<$. *Стационарным* подмножеством множества $W(\alpha)$ называется такое множество $S \subset W(\alpha)$, что $S \cap C \neq \varnothing$ для каждого замкнутого множества C, конфинального $W(\alpha)$.

Докажите, что линейно упорядоченное пространство X не паракомпактно в том и только том случае, если найдется предельный ординал α, не конфинальный ω_0, такой, что в X есть замк-

[1] Топологические пространства, которые удовлетворяют условию (4), называются *металинделёфовыми*. — *Прим. перев.*

нутое подпространство, гомеоморфное некоторому стационарному множеству в $W(\alpha)$.

Указание. Если X не паракомпактно, то в X есть щель (A, B), которая не является Q-щелью. Можно предположить, что эта щель не является левой Q-щелью. Рассмотрите произвольную возрастающую трансфинитную последовательность x_0, x_1, ..., x_ξ, ..., $\xi < \alpha$, элементов множества A, конфинальную A, и покажите, что X содержит замкнутое подпространство, гомеоморфное подпространству S пространства $W(\alpha)$, состоящему из всех тех предельных ординалов λ, для которых множество $\{x_\xi: \xi < \lambda\}$ обладает наименьшей верхней гранью в X.

Показать, что произвольное стационарное подмножество S пространства $W(\alpha)$ не паракомпактно, можно следующим образом. Предположим, что нашлось локально конечное открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства S, такое, что никакой элемент покрытия $\mathcal{U}$ не конфинален S. Рассмотрите множество $C \subset W(\alpha) \setminus S$, состоящее из всех точек пространства $W(\alpha)$, каждая окрестность которых пересекает бесконечно много элементов семейства $\mathcal{U}$.

(g) (Латцер [1971]). Покажите, что каждое совершенно нормальное линейно упорядоченное пространство паракомпактно. Заметьте, что лексикографически упорядоченный квадрат (см. задачу 3.12.3(d)) является наследственно паракомпактным линейно упорядоченным пространством, которое не совершенно нормально.

Указание (Энгелькинг и Латцер [1977]). Примените (f).

(h) Заметьте с помощью подходящей модификации (b), что каждое линейно упорядоченное пространство наследственно счетно паракомпактно. Убедитесь, что если линейно упорядоченное пространство наследственно удовлетворяет одному из условий в (d), то оно наследственно удовлетворяет и всем остальным условиям в (d).

(i) (Мансфилд [1957a]). Покажите, что каждое линейно упорядоченное пространство коллективно нормально, и выведите отсюда, что условия (2) и (3) в (d) равносильны.

Указание. См. задачу 1.7.4(c).

(j) (Стин [1970]). Покажите, что каждое линейно упорядоченное пространство наследственно коллективно нормально.

Указание. См. указание к задаче 2.7.5(c).

(k) (Латцер [1969]). Докажите, что линейно упорядоченное пространство X метризуемо в том и только том случае, если диагональ Δ является множеством типа G_δ в произведении $X \times X$.

Указание (Латцер [1970]). Определите измельчение в X; примените затем 5.4.1 и (i).

(l) (Латцер [1969]). Выведите из (k), что на прямой Зоргенфрея не существует линейного упорядочения, порождающего ее топологию.

Глава 6

СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Свойство, называемое «связностью», которое мы собираемся изучить в этой главе, имеет совершенно другую природу, чем топологические свойства, исследованные в предыдущих главах. В частности, из связности ни одно из этих свойств не вытекает и сама она не является следствием никакого из них. Говоря не строго, связные пространства состоят из одного куска в отличие от пространств, состоящих из многих удаленных друг от друга кусков, — таких, как дискретные пространства.

В § 6.1 мы определяем связность и изучаем поведение связных пространств при различных операциях. Оказывается, класс связных пространств замкнут относительно произведений, а в случае компактов — относительно перехода к пределу обратного спектра. Затем вводятся понятия компоненты и квазикомпоненты и показывается, что для компактов эти понятия совпадают. Параграф завершается теоремой Серпинского, утверждающей, что никакой связный компакт нельзя представить в виде объединения счетного семейства попарно не пересекающихся замкнутых множеств, отличных от всего компакта, и кратким исследованием монотонных отображений — отображений со связными прообразами точек.

Параграф 6.2 посвящен изучению четырех классов топологических пространств, обладающих высокой степенью несвязности, а именно: наследственно несвязных пространств, нульмерных пространств, сильно нульмерных пространств и экстремально несвязных пространств. Эти четыре класса идут в убывающей последовательности. Понятия нульмерного и сильно нульмерного пространства имеют отношение к концепции размерности пространства. В теории размерности для каждого непустого топологического пространства X определяют его размерность, являющуюся либо неотрицательным целым числом, либо «бесконечным числом» ∞. Сделать это можно несколькими способами, однако во всех случаях размерность пространства выступает как некоторая мера его связности. Названия «нульмерное» и «сильно нульмерное» пространства связаны с тем, что такие пространства имеют размерность нуль по отношению к двум различным определениям размерности. Эти два класса пространств исследуются в § 6.2 без ссылок на теорию размерности. Однако изучение этих классов служит введением в теорию размерности, развиваемую в гл. 7. Обсудив взаимоотношения между первыми тремя классами и исследовав их поведение относительно операций, мы определяем два класса отображений — легкие отображения и нульмерные отображения — и доказываем, что каждое совершенное отображение имеет единственное представление в виде композиции монотонного отображения и нульмерного отображения. Заключительная часть этого параграфа посвящена экстремально несвязным пространствам. Это весьма специальный класс пространств; на первый взгляд он может показаться несколько искусственным. Однако этот класс играет важную роль в теории булевых алгебр и в некоторых задачах функционального анализа.

6.1. СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическое пространство X называется *связным*, если X нельзя представить в виде $X_1 \oplus X_2$, где X_1 и X_2 — непустые подпространства пространства X. Начнем с ряда характеристик связности.

6.1.1. Теорема. *Для произвольного топологического пространства X следующие условия равносильны:*

(i) *Пространство X связно.*

(ii) *Пустое множество и все пространство — единственные открыто-замкнутые в пространстве X множества.*

(iii) *Если $X = X_1 \cup X_2$ и множества X_1 и X_2 отделены, то одно из них пусто.*

(iv) *Каждое непрерывное отображение $f\colon X \to D$ пространства X в двухточечное дискретное пространство $D = \{0, 1\}$ постоянно, т. е. либо $f(X) \subset \{0\}$, либо $f(X) \subset \{1\}$.*

Доказательство. Для доказательства импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) достаточно заметить, что если множество $X_1 \subset X$ открыто-замкнуто в X, $\varnothing \neq X_1 \neq X$ и X_2 — дополнение к X_1 в X, то $X = X_1 \oplus X_2$ в силу предложения 2.2.4 и $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$.

Покажем, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 \cap \overline{X}_2 = \varnothing = \overline{X}_1 \cap X_2$. Тогда $\overline{X}_1 \subset X \setminus X_2 \subset X_1$ и $\overline{X}_1 = X_1$. Аналогично $\overline{X}_2 = X_2$. Так как множества X_1 и X_2 замкнуты и не пересекаются, они также открыты и, в силу (ii), одно из них пусто.

Установим импликацию (iii) $\Rightarrow$ (iv). Достаточно заметить, что если $f\colon X \to D$ — непрерывное отображение, для которого $X_1 = f^{-1}(0) \neq \varnothing$ и $X_2 = f^{-1}(1) \neq \varnothing$, то, в силу очевидных равенств $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap \overline{X}_2 = \varnothing = \overline{X}_1 \cap X_2$, пространство X не удовлетворяет условию (iii).

Импликация (iv) $\Rightarrow$ (i) следует из того, что если не выполняется (i), т. е. $X = X_1 \oplus X_2$, где $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$, то, полагая

$f(x)=0$ при $x\in X_1$ и $f(x)=1$ при $x\in X_2$, мы получаем непрерывную функцию $f\colon X\to D$, такую, что $f(X)=D$. ∎

6.1.2. Следствие. *Пространство X связно в том и только том случае, если его нельзя представить в виде объединения $X_1\cup X_2$ двух непустых замкнутых непересекающихся множеств.* ∎

Легко видеть, что последнее следствие остается верным, если слово «замкнутое» всюду заменить в нем на слово «открытое».

6.1.3. Следствие. *Каждое связное тихоновское пространство, в котором есть по крайней мере две различные точки, имеет мощность, не меньшую $\mathfrak{c}$.*

Доказательство. Пусть X — связное тихоновское пространство и x_1, x_2 — две различные точки пространства X. По определению тихоновских пространств, существует непрерывная функция $f\colon X\to I$, для которой $f(x_1)=0$ и $f(x_2)=1$. Если бы нашлось $r\in I\setminus f(X)$, то мы бы имели $X=\{x\colon f(x)<r\}\oplus\{x\colon f(x)>r\}$ — противоречие. Значит, $f(X)=I$ и, следовательно, $|X|\geqslant\mathfrak{c}$. ∎

Из равносильности условий (i) и (iv) в теореме 6.1.1 вытекает

6.1.4. Теорема. *Связность сохраняется непрерывными отображениями* (в сторону образа). ∎

6.1.5. Примеры. Из 2.2.8 следует, что любое дискретное пространство, содержащее не менее двух точек, равно как и прямая Зоргенфрея, не связны. Кроме того, из 2.2.8 вытекает, что вещественная прямая связна. Значит, в силу теоремы 6.1.4, связны и все интервалы вещественной прямой. Пустое пространство и одноточечное пространство, очевидно, связны. Как легко видеть, двухточечное пространство $F=\{0, 1\}$ с топологией, состоящей из пустого множества, множества $\{0\}$ и всего пространства, тоже связно[1]). ∎

6.1.6. Пример. Опишем бесконечное счетное связное хаусдорфово пространство. Из 6.1.3 следует, что счетного связного тихоновского пространства, содержащего более одной точки, не существует. По теореме 1.5.16, нет и регулярного пространства с указанными свойствами.

Обозначим через X множество всех точек (r_1, r_2) плоскости R^2, таких, что r_1 и r_2 рациональны и $r_2\geqslant 0$; ясно, что $|X|=\aleph_0$. Для каждого $x=(r_1, r_2)\in X$ и $i=1, 2, \ldots$ положим

$$U_i(x)=\{x\}\cup\{(r, 0)\colon |r-(r_1-r_2/\sqrt{3})|<1/i\}\cup$$
$$\cup\{(r, 0)\colon |r-(r_1+r_2/\sqrt{3})|<1/i\}.$$

[1]) Пространство $F=\{0, 1\}$ с указанной топологией называется *связным двоеточием*. Связные двоеточия полезны при изучении T_0-пространств *Прим. перев.*

Для произвольной точки x, лежащей выше первой оси (т. е. оси первой координаты), множество $U_i(x)$ состоит из x и всех рациональных точек первой оси, удаленных менее чем на $1/i$ от одной из вершин равностороннего треугольника с вершиной в точке x, основание которого лежит на первой оси. Если точка x расположена на первой оси, то множество $U_i(x)$ состоит из всех рациональных точек этой оси, лежащих от x на расстоянии, меньшем $1/i$. Легко проверяется, что семейство $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, где $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, обладает свойствами (BP 1)—(BP 4); следовательно, оно порождает на множестве X некоторую топологию хаусдорфова пространства.

Замыкание множества $U_i(x)$ по отношению к этой топологии состоит из всех точек пространства X, расстояние от которых до какой-нибудь из прямых, проходящих через точку x под углом 60° и 120° к первой оси, не превосходит $\sqrt{3}/2i$. Значит, для любых точек $x_1, x_2 \in X$ и любых натуральных чисел i_1, i_2 имеем $\overline{U_{i_1}(x_1)} \cap \overline{U_{i_2}(x_2)} \neq \varnothing$, а это показывает, что пространство X нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открыто-замкнутых множеств. Таким образом, пространство X связно. ∎

Рассмотрим теперь, как действуют операции на связные пространства.

Очевидно, подпространство связного пространства может не быть связным. Обсудим вкратце вопрос о том, когда подпространство произвольного топологического пространства связно. Начнем с простой характеристики.

6.1.7. Теорема. *Подпространство C топологического пространства X связно в том и только том случае, если, каковы бы ни были отделенные подмножества X_1, X_2 пространства X, такие, что $C = X_1 \cup X_2$, всегда либо $X_1 = \varnothing$, либо $X_2 = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что C связно и $C = X_1 \cup X_2$, где $X_1 \cap \overline{X}_2 = \varnothing = \overline{X}_1 \cap X_2$. Ясно, что множества X_1 и X_2 отделены в пространстве C. Значит, по теореме 6.1.1, одно из этих множеств пусто.

С другой стороны, если C не связно, то найдутся непересекающиеся замкнутые в C множества X_1 и X_2, для которых $C = X_1 \cup X_2$. Ясно, что множества X_1 и X_2 отделены в пространстве X; таким образом, условие теоремы не выполняется. ∎

6.1.8. Следствие. *Если подпространство C топологического пространства X связно, то для любых двух отделенных подмножеств X_1, X_2 пространства X, таких, что $C \subset X_1 \cup X_2$, всегда либо $C \subset X_1$, либо $C \subset X_2$.*

Доказательство. Множества $C \cap X_1$ и $C \cap X_2$ отделены в X, и их объединение равно C. В силу последней теоремы, одно из этих множеств пусто и, значит, множество C содержится в другом из них. ∎

6.1.9. Теорема. *Пусть* $\{C_s\}_{s\in S}$ — *некоторое семейство связных подпространств топологического пространства* X. *Тогда если найдется такое* $s_0 \in S$, *что множество* C_{s_0} *не отделено ни от одного из множеств* C_s, *то объединение* $\bigcup_{s\in S} C_s$ *связно.*

Доказательство. Предположим, что $C = \bigcup_{s\in S} C_s = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — отделенные подмножества пространства X. В силу следствия 6.1.8, либо $C_{s_0} \subset X_1$, либо $C_{s_0} \subset X_2$. Пусть $C_{s_0} \subset X_1$. Так как каждое из множеств C_s содержится либо в X_1, либо в X_2 и ни одно из них не отделено от C_{s_0}, имеем $C_s \subset X_1$ при всех $s \in S$. Значит, $C \subset X_1$ и $X_2 = \varnothing$. ∎

6.1.10. Следствие. *Если семейство* $\{C_s\}_{s\in S}$ *связных подпространств топологического пространства имеет непустое пересечение, то его объединение* $\bigcup_{s\in S} C_s$ *связно.* ∎

6.1.11. Следствие. *Если подпространство* C *пространства* X *связно, то и каждое подпространство* A *пространства* X, *для которого* $C \subset A \subset \bar{C}$, *тоже связно.*

Доказательство. Семейство $\{C\} \cup \{\{x\}\}_{x\in A}$ удовлетворяет условию теоремы 6.1.9, где $C_{s_0} = C$. ∎

6.1.12. Следствие. *Если топологическое пространство* X *содержит всюду плотное связное подпространство, то* X *само связно.* ∎

6.1.13. Следствие. *Если каждые две точки топологического пространства* X *можно соединить связным подпространством этого пространства, то пространство* X *связно.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно точку x_0 пространства X и для каждого $x \in X$ через C_x обозначим какое-нибудь связное подпространство пространства X, соединяющее x_0 и x. Семейство $\{C_x\}_{x\in X}$ удовлетворяет посылкам утверждения 6.1.10 и $\bigcup_{x\in X} C_x = X$. ∎

Отметим, что из 6.1.12 и 3.6.5 вытекает

6.1.14. Теорема. *Стоун-чеховская компактификация* βX *тихоновского пространства* X *связна в том и только том случае, если пространство* X *связно.* ∎

Из определения связности немедленно следует, что никакая нетривиальная сумма топологических пространств не является связным пространством.

6.1.15. Теорема. *Произведение* $\prod_{s\in S} X_s$, *где* $X_s \neq \varnothing$ *при всех* $s\in S$, *связно в том и только том случае, если все пространства* X_s *связны.*

Доказательство. Если произведение $X=\prod_{s\in S} X_s$ связно и не пусто, то все пространства X_s связны по теореме 6.1.4, так как проекция $p_s\colon X\to X_s$ является непрерывным отображением пространства X на пространство X_s.

Докажем теперь, что произведение связных пространств связно. Для начала рассмотрим произведение $X\times Y$ двух связных пространств. Любые две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пространства $X\times Y$ можно соединить множеством $(X\times\{y_1\})\cup(\{x_2\}\times Y)$. Это множество связно как объединение двух пересекающихся связных множеств. Значит, пространство $X\times Y$ связно в силу следствия 6.1.13.

Легко показать прямым рассуждением по индукции, что произведение любого конечного множества связных пространств связно.

Рассмотрим теперь произвольное семейство $\{X_s\}_{s\in S}$ непустых связных пространств и зафиксируем при каждом $s\in S$ точку $a_s\in X_s$. Обозначим через $\mathscr{T}$ семейство всех конечных подмножеств множества S и для каждого $T\in\mathscr{T}$ положим

$$C_T=\prod_{s\in S} A_s,\quad \text{где } A_s=\{a_s\},\ \text{если } s\notin T, \text{ и } A_s=X_s \ \text{ при } s\in T.$$

Согласно конечному случаю нашей теоремы, $\{C_T\}_{T\in\mathscr{T}}$ — семейство связных пространств. Так как $a=\{a_s\}\in\bigcap_{T\in\mathscr{T}} C_T\neq\varnothing$, из следствия 6.1.10 вытекает, что объединение $C=\bigcup_{T\in\mathscr{T}} C_T$ связно. Но C — всюду плотное подпространство пространства $\prod_{s\in S} X_s$. Значит, можно завершить доказательство, применив следствие 6.1.12. ∎

6.1.16. Следствие. *Евклидово n-пространство R^n, тихоновский куб $I^{\mathfrak{m}}$ и александровский куб $F^{\mathfrak{m}}$ — связные пространства.* ∎

Очевидно, факторпространства связных пространств всегда связны.

Приведем теперь пример, который показывает, что предел обратной последовательности связных пространств может не быть связным пространством.

6.1.17. Пример. Пусть X — плоскость R^2, из которой выкинут открытый интервал с концами в точках $x_1=(-1,0)$ и $x_2=(1,0)$. При $i=1, 2, \ldots$ обозначим через X_i пересечение множества X

с областью, заключенной внутри прямоугольника с вершинами в точках $(-1-1/i,\ 1/i)$, $(-1-1/i,\ -1/i)$, $(1+1/i,\ -1/i)$ и $(1+1/i,\ 1/i)$. Пространства X_i связны и $X_i \subset X_j$ при $j \leqslant i$. Через π^i_j обозначим вложение пространства X_i в X_j. В соответствии с примером 2.5.4 семейство $\{X_i, \pi^i_j\}$ составляет обратную последовательность связных пространств, причем предел этой последовательности состоит из точек x_1 и x_2, т. е. не связен. ∎

Пространства в примере 6.1.17 не компактны. Из теоремы 6.1.20 следует, что предел обратного спектра связных компактов связен.

Топологическое пространство X называется *континуумом*, если X одновременно связно и является компактом. В силу теорем 3.2.4 и 6.1.15, произведение континуумов является континуумом. Аналогично, из теорем 3.1.10 и 6.1.4 вытекает, что непрерывный образ континуума есть континуум — в предположении, что этот образ является хаусдорфовым пространством.

6.1.18. Теорема. *Пусть $\{C_s\}_{s \in S}$ — некоторое семейство подпространств топологического пространства X, каждое из которых является континуумом. Если для любых $s_1, s_2 \in S$ существует $s_3 \in S$, такое, что $C_{s_3} \subset C_{s_1} \cap C_{s_2}$, т. е. если семейство $\{C_s\}_{s \in S}$ континуумов направлено отношением $\supset$, то пересечение $\bigcap_{s \in S} C_s$ является континуумом.*

Доказательство. Можно предположить, что X — компакт. Действительно, зафиксируем некоторое $t \in S$ и для каждого $s \in S$ выберем $s' \in S$, такое, что $C_{s'} \subset C_t \cap C_s$. Заменяя пространство X на пространство C_t и континуум C_s на континуум $C_{s'}$, мы сводим задачу к случаю, когда X — континуум.

Предположим, что $C = \bigcap_{s \in S} C_s = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — непересекающиеся замкнутые в C множества. Так как множества X_1 и X_2 замкнуты в X, можно найти непересекающиеся открытые множества $U_1, U_2 \subset X$, для которых $X_1 \subset U_1$ и $X_2 \subset U_2$. В силу следствия 3.1.5, существует конечное множество $\{s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_k\} \subset S$, такое, что $\bigcap_{i=1}^{k} C_{s_i} \subset U_1 \cup U_2$. Семейство $\{C_s\}_{s \in S}$ направлено отношением $\supset$, значит, $C_{s_0} \subset \bigcap_{i=1}^{k} C_{s_i}$ для некоторого $s_0 \in S$. Таким образом, $C \subset C_{s_0} \subset U_1 \cup U_2$ и, в силу следствия 6.1.8, либо $C \subset C_{s_0} \subset U_1$, либо $C \subset C_{s_0} \subset U_2$, откуда вытекает, что $X_2 = \varnothing$ или $X_1 = \varnothing$. Следовательно, пространство C связно; оно также является компактом, как замкнутое подпространство компакта X. ∎

6.1.19. Следствие. *Пересечение* $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ *убывающей последовательности* $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ *континуумов является континуумом.* ∎

6.1.20. Теорема. *Предел обратного спектра* $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ *континуумов является континуумом.*

Доказательство. Для каждого $\rho \in \Sigma$ положим

$Z_\rho = \{\{x_\sigma\} \in X\colon \pi^\rho_\sigma(x_\rho) = x_\sigma$ при $\sigma \leqslant \rho\}$ и $\Sigma_\rho = \Sigma \setminus \{\sigma \in \Sigma\colon \sigma \leqslant \rho\}$, где $X = \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$. Пространство Z_ρ — континуум. Действительно, оно является образом континуума $\prod_{\sigma \in \Sigma_\rho} X_\sigma$ при непрерывном отображении, сопоставляющем точке $\{x_\sigma\} \in \prod_{\sigma \in \Sigma_\rho} X_\sigma$ точку $\{z_\sigma\} \in Z_\rho \subset X$, где $z_\sigma = x_\sigma$ при $\sigma \in \Sigma_\rho$ и $z_\sigma = \pi^\rho_\sigma(x_\rho)$ при $\sigma \leqslant \rho$. Так как $Z_{\rho_1} \subset Z_{\rho_2}$, когда $\rho_2 \leqslant \rho_1$, и множество Σ направлено, пересечение $\bigcap_{\rho \in \Sigma} Z_\rho$ является континуумом по теореме 6.1.18. Так как это пересечение совпадает с $\varprojlim \boldsymbol{S}$, доказательство завершено. ∎

Пространство отображений Y^X, как правило, не является связным для связных пространств X и Y. Исследование условий связности пространств отображений приводит к важым результатам. Оно требует, однако, специальных методов, не развиваемых в этой книге. Например, доказывается, что если X — подпространство пространства R^n, то пространство $(S^{n-1})^X$ с компактно-открытой топологией связно в том и только том случае, если связно пространство $S^n \setminus X$ (n-сфера S^n здесь рассматривается как компактификация евклидова n-пространства R^n, полученная присоединением к R^n «точки в бесконечности»; для компактного подпространства X пространства R^n пространство $S^n \setminus X$ связно в том и только том случае, если связно пространство $R^n \setminus X$). Так как для гомеоморфных подпространств X_1, X_2 пространства R^n пространства отображений $(S^{n-1})^{X_1}$ и $(S^{n-1})^{X}$ гомеоморфны, получается, что $S^n \setminus X_1$ связно в том и только том случае, если связно $S^n \setminus X_2$. Это важный и глубокий результат, обобщающий классическую теорему Жордана, которая говорит,[2] что если подпространство X плоскости R^2 гомеоморфно окружности S^1, то дополнение $R^2 \setminus X$ не связно.

Компонентой точки x в топологическом пространстве X называется объединение всех связных подпространств пространства X, содержащих точку x. Из 6.1.10 и 6.1.11 вытекает, что компоненты являются связными замкнутыми в X множествами.

Компоненты двух различных точек топологического пространства X или совпадают, или не пересекаются, так что в совокупности компоненты составляют разбиение пространства X на попарно непересекающиеся связные замкнутые множества, называемые *компонентами пространства* X.

Следующий простой результат будет применен в § 6.2.

6.1.21. Теорема. *Компонента точки* $x=\{x_s\}$ *в произведении* $\prod_{s\in S} X_s$ *совпадает с произведением* $\prod_{s\in S} C_s$, *где* C_s — *компонента точки* x_s *в пространстве* X_s.

Доказательство. Обозначим компоненту точки x в пространстве $\prod_{s\in S} X_s$ через C. Так как при каждом $s\in S$ проекция $p_s(C)$ связна, то $p_s(C)\subset C_s$ при всех $s\in S$. Значит, $C\subset\prod_{s\in S} C_s$; равенство $C=\prod_{s\in S} C_s$ вытекает из теоремы 6.1.15. ∎

Квазикомпонентой точки x в топологическом пространстве X называется пересечение всех открыто-замкнутых множеств в X, содержащих точку x.

Квазикомпоненты являются замкнутыми в X множествами. Квазикомпоненты различных точек пространства X либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, в совокупности квазикомпоненты составляют разбиение пространства X на попарно непересекающиеся замкнутые множества, называемые *квазикомпонентами пространства* X.

6.1.22. Теорема. *Компонента C точки x в топологическом пространстве X содержится в квазикомпоненте Q точки x.*

Доказательство. Пусть F — любое открыто-замкнутое в X множество, содержащее x. Множества F и $X\setminus F$, и тем более множества $C\cap F$ и $C\setminus F$, отделены. Так как $C\cap F\neq\varnothing$, из теоремы 6.1.7 следует, что $C\setminus F=\varnothing$, т. е. что $C\subset F$. Значит, $C\subset Q$. ∎

6.1.23. Теорема. *В произвольном компакте X компонента любой точки $x\in X$ совпадает с квазикомпонентой точки x.*

Доказательство. В силу последней теоремы, достаточно показать, что квазикомпонента Q точки x связна.

Предположим, что непересекающиеся замкнутые подмножества X_1, X_2 пространства Q удовлетворяют условиям $Q=X_1\cup X_2$ и $x\in X_1$. Так как X_1 и X_2 замкнуты в X, то, в силу нормальности компактов, найдутся открытые в X множества U и V, такие, что

$$X_1\subset U,\quad X_2\subset V\quad \text{и}\quad U\cap V=\varnothing. \tag{1}$$

Значит, $Q \subset U \cup V$ и, в силу следствия 3.1.5, существует конечное семейство открыто-замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_k$, для которого $Q \subset F = \bigcap_{i=1}^{k} F_i \subset U \cup V$. Ясно, что множество F открыто-замкнуто. Так как

$$\overline{U \cap F} \subset \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F,$$

то пересечение $U \cap F$ тоже окрыто-замкнуто. Но $x \in U \cap F$, поэтому $Q \subset U \cap F$ и

$$X_2 \subset Q \subset U \cap F \subset U. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что $X_2 = \varnothing$. Следовательно, множество Q связно. ∎

6.1.24. Пример. Опишем теперь пространство, в котором компоненты и квазикомпоненты отличаются друг от друга.

Пусть X — подпространство плоскости, состоящее из отрезков $I_i = [0, 1] \times \{1/i\}$, где $i = 1, 2, \ldots$, и точек $p_0 = (0, 0)$ и $p_1 = (1, 0)$. Отрезки I_i и точки p_0, p_1 являются компонентами пространства X. Покажем, что квазикомпонента Q точки p_0 совпадает с множеством $\{p_0, p_1\}$.

Каждое открыто-замкнутое множество F, содержащее p_0, содержит и почти все члены последовательности $\{(0, 1/i)\}$. Так как отрезки I_i связны, почти все они содержатся в F. Значит, множество F содержит почти все члены последовательности $\{(1, 1/i)\}$, и предел p_1 этой последовательности тоже принадлежит F. Таким образом, $\{p_0, p_1\} \subset Q$, и так как никакая другая точка пространства X не может принадлежать Q, то $Q = \{p_0, p_1\}$.

Заменив точки p_0 и p_1 полуинтервалами $[0, 1/2) \times \{0\}$ и $(1/2, 1] \times \{0\}$, мы получаем локально компактное хаусдорфово пространство с теми же свойствами. ∎

Оказывается, никакой континуум нельзя разложить на счетное число отличных от него попарно не пересекающихся непустых замкнутых множеств (см. упр. 6.1.F). Доказательству этого факта мы предпошлем две леммы.

6.1.25. Лемма. *Пусть A — произвольное замкнутое подпространство континуума X, такое, что $\varnothing \neq A \neq X$. Тогда для каждой компоненты C пространства A выполняется соотношение $C \cap \operatorname{Fr} A \neq \varnothing$.*

Доказательство. Из теоремы 6.1.23 вытекает, что $C = \bigcap \mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — семейство всех открыто-замкнутых подмножеств пространства A, содержащих некоторую точку $x_0 \in C$. Предположим, что $C \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$. Так как семейство $\mathscr{K}$ замкнуто относительно конечных пересечений и множество $\operatorname{Fr} A$ компактно, найдется $K \in \mathscr{K}$, для которого $K \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$. Возьмем открытое множество $U \subset X$, такое, что $U \cap A = K$. Из равенства $K \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$ вытекает, что $K = U \cap \operatorname{Int} A$; таким образом, множество K открыто в X. Но множество K также замкнуто в X и содержит x_0. Значит, $K = X$. Следовательно, $\operatorname{Fr} A = \varnothing$, и мы получили противоречие. ∎

6.1.26. Лемма. *Если континуум X покрыт попарно непересекающимися замкнутыми множествами $X_1, X_2, \ldots$, хотя бы два из которых не пусты, то для каждого i найдется континуум $C \subset X$, такой, что $C \cap X_i = \varnothing$ и по крайней мере два множества в последовательности $C \cap X_1, C \cap X_2, \ldots$ не пусты.*

Доказательство. Если $X_i = \varnothing$, положим $C = X$. Значит, можно предположить, что $X_i \neq \varnothing$. Возьмем $j \neq i$, для которого $X_j \neq \varnothing$, и выберем непересекающиеся открытые множества U, $V \subset X$, такие, что $X_i \subset U$ и $X_j \subset V$. Пусть x — произвольная точка множества X_j и C — компонента точки x в подпространстве $\overline{V}$. Ясно, что C — континуум, $C \cap X_i = \varnothing$ и $C \cap X_j \neq \varnothing$. Так как, по предыдущей лемме, $C \cap \operatorname{Fr} \overline{V} \neq \varnothing$ и так как $X_j \subset \operatorname{Int} \overline{V}$, то найдется $k \neq j$, для которого $C \cap X_k \neq \varnothing$. ∎

6.1.27. Теорема Серпинского. *Если континуум X можно покрыть счетным семейством $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся замкнутых множеств, то самое большее одно из множеств X_i не пусто.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где множества X_i замкнуты и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Предположим, что по крайней мере два из множеств X_i не пусты. Из леммы 6.1.26 следует, что найдется убывающая последовательность $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ континуумов, содержащихся в X, для которой

$$C_i \cap X_i = \varnothing \quad \text{и} \quad C_i \neq \varnothing \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Первое из соотношений (3) показывает, что $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \varnothing$, т. е. что $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \varnothing$, а из второго условия в (3) и компактности X вытекает, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \varnothing$. ∎

Понятие связности приводит к новому классу отображений. Мы называем непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ *монотонным*, если все прообразы $f^{-1}(y)$ точек связны. Название «монотонное отображение» происходит от того, что при непрерывном отображении f вещественной прямой в себя все прообразы точек связны в том и только том случае, если f — не возрастающая или не убывающая функция (см. упр. 6.1.G).

6.1.28. Теорема. *Если $f: X \to Y$ — монотонное факторное отображение, то для каждого связного подмножества C пространства Y, открытого или замкнутого в Y, прообраз $f^{-1}(C)$ связен.*

Доказательство. В силу предложения 2.4.15, достаточно доказать, что если Y связно, то и X связно. Рассмотрим произвольное разбиение $X = X_1 \cup X_2$ пространства X на два непересекающихся открыто-замкнутых множества. Так как прообразы точек при f связны, то $X_i = f^{-1}(Y_i)$ при $i = 1, 2$, где $Y = Y_1 \cup Y_2$ и $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Отображение f факторно, поэтому множества Y_1, Y_2 открыто-замкнуты. Значит, в силу связности Y, одно из множеств Y_i пусто. Отсюда с очевидностью следует пустота одного из множеств X_i. Таким образом, пространство X связно. ∎

6.1.29. Теорема. *Если $f: X \to Y$ — монотонное отображение пространства X на пространство Y, причем f открыто или замкнуто, то прообраз $f^{-1}(C)$ произвольного связного подмножества C пространства Y связен.*

Доказательство. По предложению 2.1.4, достаточно показать, что если Y связно, то и X связно. Но последнее немедленно следует из предшествующей теоремы. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Приведенное определение связности было дано Жорданом в 1893 г. для компактных подмножеств плоскости. Обобщение на абстрактные пространства было осуществлено Риссом [1907], Леннесом [1911] и Хаусдорфом [1914]. Условие в упр. 6.1.С, равносильное связности в классе компактных метрических пространств, было введено Кантором в 1883 г. Систематическое изучение связности было начато Хаусдорфом в [1914] и Кнастером и Куратовским в [1921]. Книга Хаусдорфа [1914] содержит следствия 6.1.10—6.1.13, определения компоненты и квазикомпоненты, теорему 6.1.22 и теорему 6.1.23 для случая компактных метрических пространств (обобщение последней на произвольные компакты было сделано Шурой-Бурой в [1941]). Работа Кнастера и Куратовского [1921] содержит теоремы 6.1.7 и 6.1.9. Первый пример счетного связного хаусдорфова пространства был приведен Урысоном в [1925]; наш пример 6.1.6 взят из статьи Бинга [1953]; он намного проще первоначального примера. Теорема 6.1.15 для конечных произведений была доказана Ван Данцигом в [1930], теорема 6.1.20 фигурирует в качестве задачи в книге Эйленберга и Стинрода [1952]. Как утверждается в статье Зоретти [1905], следствие 6.1.19 (в несколько иной форме) было доказано П. Пэнлеве для континуумов на плоскости. Тот факт, что для подпространства X пространства R^n пространство $(S^{n-1})^X$ связно в том и только том случае, если связно пространство $S^n \setminus X$, был независимо доказан П. С. Александровым в [1932] и Борсуком в [1932] в предположении компактности пространства X (для топологии на $(S^{n-1})^X$, порожденной метрикой, определенной формулой (7) в § 4.2). В полной общности этот факт был доказан Куратовским в [1959]. Теорема 6.1.27 доказана Серпинским в [1918]. Монотонные отображения континуумов первым изучал Р. Л. Мор в [1925] (в терминах полунепрерывных сверху разбиений). Класс монотонных отображений был введен Уайберном в [1934].

УПРАЖНЕНИЯ

6.1.A. Опишите все связные подпространства вещественной прямой.

Указание. Заметьте, что каждое связное подпространство вещественной прямой выпукло.

6.1.B. Проверьте, что для каждой последовательности $C_1, C_2, \ldots$ связных подпространств топологического пространства, такой, что $C_i \cap C_{i+1} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2, \ldots$, объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ связно.

6.1.C. (a) Проверьте, что если пространство X с топологией, порожденной метрикой ρ, связно, то для каждой пары x, y точек из X и любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k$ точек пространства X, такая, что $x_1 = x$, $x_k = y$ и $\rho(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

(b) Покажите, что каждый компакт (X, ρ), удовлетворяющий условию в (a), связен, и что предположение о компактности существенно.

6.1.D. Докажите, что в классе связных пространств сильная паракомпактность равносильна свойству Линделёфа. Выведите отсюда, что ёж $J(\mathfrak{m})$ не сильно паракомпактен при $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

6.1.E. (a) Приведите пример континуума, который непредставим в виде непрерывного образа никакого связного метризуемого пространства.

Указание. С помощью следствия 3.6.15 покажите, что βR не является непрерывным образом никакого связного секвенциального пространства.

(b) Покажите, что при каждом $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ тихоновский куб $I^{\mathfrak{m}}$ можно представить как непрерывный образ некоторого связного метризуемого пространства.

6.1.F. Приведите пример связного подпространства плоскости, которое можно разложить на счетное семейство попарно непересекающихся непустых замкнутых подмножеств.

6.1.G. Докажите, что непрерывное отображение $f: R \to R$ монотонно в том и только том случае, если $f(x) \leqslant f(y)$ при $x \leqslant y$ или $f(x) \geqslant f(y)$ при $x \leqslant y$.

6.1.H. Заметьте, что теорема 6.1.29 выполняется для монотонных наследственно факторных отображений, и заметьте, что она не имеет места для монотонных факторных отображений.

Указание. Видоизмените пример 2.4.17.

6.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ НЕСВЯЗНОСТИ

Топологическое пространство X называется *наследственно несвязным*, если X не содержит никакого связного подпространства, содержащего более одной точки. Следовательно, пространство X наследственно несвязно в том и только том случае, если компонента каждой точки $x \in X$ состоит только из этой точки x. Так как компоненты пространства замкнуты, каждое наследственно несвязное пространство является T_1-пространством. Отметим, что в контексте несвязности термин «наследственно» имеет значение, несколько отличающееся от принятого на протяжении этой книги: стандартное понимание этого термина привело бы к пустому классу пространств.

Топологическое пространство X называется *нульмерным*, если X — непустое T_1-пространство, обладающее базой из открыто-замкнутых множеств. Ясно, что каждое нульмерное пространство является тихоновским пространством.

6.2.1. Теорема. *Каждое нульмерное пространство наследственно несвязно.*

Доказательство. Пусть A — подмножество нульмерного пространства X и $|A| > 1$. Возьмем любые две различные точки x_1, x_2 множества A и такое открыто-замкнутое подмножество U пространства X, что $x_1 \in U \subset X \setminus \{x_2\}$. Так как множества $A \setminus U$ и $A \cap U$ отделены и непусты, множество A не связно. ∎

Покрытие пространства функционально открытыми (функционально замкнутыми) множествами в дальнейшем будет называться *функционально открытым* (*функционально замкнутым*) покрытием.

Топологическое пространство X называется *сильно нульмерным*, если X — непустое тихоновское пространство и в каждое конечное функционально открытое покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ пространства X можно вписать конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{m}$, такое, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Ясно, что покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{m}$ состоит из открыто-замкнутых множеств и, таким образом, является функционально открытым покрытием пространства X.

6.2.2. Лемма. *Для любых вполне отделенных подмножеств A и B сильно нульмерного пространства X найдется открыто-замкнутое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset X \setminus B$.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to I$ — непрерывная функция, для которой

$$f(A) \subset \{0\} \quad \text{и} \quad f(B) \subset \{1\}.$$

Множества $f^{-1}((0, 1])$ и $f^{-1}([0, 1))$ составляют функционально открытое покрытие пространства X. Возьмем какое-нибудь покрытие $\mathscr{V}$, состоящее из попарно непересекающихся открытых множеств, вписанное в это покрытие. Множество $U = \bigcup\{V \in \mathscr{V}\colon A \cap V \neq \varnothing\}$ открыто-замкнуто и, очевидно, $A \subset U \subset X \setminus B$. ∎

6.2.3. Лемма. *Пусть для любых двух вполне отделенных подмножеств A, B топологического (нормального) пространства X существует открыто-замкнутое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset X \setminus B$. Тогда в каждое конечное функционально открытое (открытое) покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ пространства X можно вписать конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{k}$, такое, что $V_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ и $V_i \cap V_j = \varnothing$, когда $i \neq j$.*

Доказательство. Применим индукцию по k. При $k = 1$ лемма верна. Предположим, что она верна при всех $k < m$, и рассмотрим произвольное функционально открытое (открытое) покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ пространства X. По индуктивному предположению, найдется покрытие $\{W_1, W_2, \ldots, W_{m-1}\}$ пространства X, состоящее из попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств, удовлетворяющих условиям

$$W_i \subset U_i \quad \text{при} \quad i < m-1 \quad \text{и} \quad W_{m-1} \subset U_{m-1} \cup U_m.$$

Множества $W_{m-1} \setminus U_{m-1}$ и $W_{m-1} \setminus U_m$ не пересекаются и функционально замкнуты (замкнуты). Значит, по теореме 1.5.13 (по теореме 1.5.10) они вполне отделены. Следовательно, существует открыто-замкнутое множество $U \subset X$, такое, что

$$W_{m-1} \setminus U_{m-1} \subset U \quad \text{и} \quad U \subset X \setminus (W_{m-1} \setminus U_m) = (X \setminus W_{m-1}) \cup U_m.$$

Ясно, что

$$W_{m-1} \setminus U \subset U_{m-1} \quad \text{и} \quad W_{m-1} \cap U \subset U_m.$$

Легко проверяется, что семейство $\{V_i\}_{i=1}^{m}$, где

$$V_i = W_i \quad \text{при} \quad i < m-1, \quad V_{m-1} = W_{m-1} \setminus U \quad \text{и} \quad V_m = W_{m-1} \cap U,$$

является открытым покрытием пространства X, для которого $V_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $V_i \cap V_j = \varnothing$, когда $i \neq j$. ∎

Из лемм 6.2.2 и 6.2.3 вытекает

6.2.4. Теорема. *Непустое тихоновское пространство X сильно нульмерно в том и только том случае, если для любых двух вполне отделенных подмножеств A и B пространства X существует открыто-замкнутое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset X \setminus B$.* ∎

Из последней теоремы и леммы 6.2.3 следует

6.2.5. Теорема. *Непустое нормальное пространство X сильно нульмерно в том и только том случае, если в каждое открытое покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ пространства X можно вписать конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{m}$, такое, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$.* ∎

Заметим, что из леммы 6.2.2 немедленно получается

6.2.6. Теорема. *Каждое сильно нульмерное пространство нульмерно.* ∎

6.2.7. Теорема. *Каждое нульмерное линделёфово пространство сильно нульмерно.*

Доказательство. Достаточно показать, что, каковы бы ни были замкнутые непересекающиеся подмножества A и B нульмерного линделёфова пространства X, найдется открыто-замкнутое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset X \setminus B$.

Для каждого $x \in X$ выберем открыто-замкнутое множество $W_x \subset X$, содержащее x и удовлетворяющее одному из условий:

$$A \cap W_x = \varnothing \quad \text{или} \quad B \cap W_x = \varnothing.$$

Пусть $\{W_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное подпокрытие покрытия $\{W_x\}_{x \in X}$ пространства X. Множества

$$U_i = W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j}, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

открыто-замкнуты, попарно не пересекаются и покрывают пространство X. Множество $U = \bigcup\{U_i\colon A \cap U_i \neq \varnothing\}$ обладает нужными свойствами. ∎

6.2.8. Следствие. *Каждое непустое регулярное пространство X, для которого $|X| \leqslant \aleph_0$, сильно нульмерно.*

Доказательство. Так как X — линделёфово пространство, достаточно показать, что совокупность всех открыто-замкнутых множеств пространства X является его базой. Для этого возьмем любую точку $x \in X$ и произвольную ее окрестность V. Рассмотрим любую непрерывную функцию $f\colon X \to I$, для которой $f(x) = 0$ и $f(X \setminus V) \subset \{1\}$. Так как пространство X счетно, существует $r \in I \setminus f(X)$. Очевидно, прообраз $U = f^{-1}([0, r)) = f^{-1}([0, r])$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим x и содержащимся в V. ∎

6.2.9. Теорема. *Наследственная несвязность, нульмерность и сильная нульмерность равносильны в классе непустых локально компактных паракомпактов.*

Доказательство. В силу теорем 6.2.1 и 6.2.6, достаточно доказать, что каждое непустое наследственно несвязное локально компактное паракомпактное хаусдорфово пространство X сильно нульмерно. Из теорем 5.1.27 и 6.2.7 следует, что достаточно для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности $V \subset X$ найти открыто-замкнутое множество U, такое, что $x \in U \subset V$ (см. теорему 6.2.13 ниже).

Возьмем какую-нибудь окрестность W точки x, для которой $W \subset V$ и замыкание $\overline{W}$ является компактом. Теорема 6.1.23 показывает, что множество $\{x\} \subset \overline{W}$ совпадает с пересечением семейства $\mathscr{K}$ всех открыто-замкнутых в пространстве $\overline{W}$ множеств, содержащих точку x. Значит, по следствию 3.1.5, найдется конечное число множеств $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathscr{K}$, таких, что $x \in U = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \subset W \subset V$. Множество U замкнуто в X, так как оно замкнуто в $\overline{W}$. Оно открыто в X, так как оно открыто в W. ∎

6.2.10. Следствие. *Наследственная несвязность, нульмерность и сильная нульмерность равносильны в классе непустых компактов.* ∎

6.2.11. Теорема. *Наследственная несвязность является наследственным свойством, а нульмерность наследуется непустыми подмножествами.*

Если X — сильно нульмерное пространство и M — непустое подпространство пространства X, обладающее тем свойством, что каждая непрерывная функция $f\colon M \to I$ продолжается до непрерывной функции на X, то и пространство M сильно нульмерно.

В частности, *в нормальных пространствах сильная нульмерность наследуется непустыми замкнутыми подмножествами.*

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Вторая ее часть вытекает из теоремы 6.2.4, так как при сделанном об M предположении любые вполне отделенные подмножества пространства M вполне отделены в X. ∎

Как замечено в последнем абзаце примера 6.2.20, сильная нульмерность не является наследственным свойством (см. задачу 7.4.6).

6.2.12. Теорема. *Стоун-чеховская компактификация βX тихоновского пространства X сильно нульмерна в том и только том случае, если пространство X сильно нульмерно.*

Доказательство. В силу последней теоремы, достаточно показать, что если X сильно нульмерно, то и βX сильно нульмерно.

Пусть A и B — произвольные вполне отделенные подмножества пространства βX и $f\colon X \to I$ — непрерывная функция, для которой $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \{1\}$. Множества $A_1 = X \cap f^{-1}([0, 1/3))$ и $B_1 = X \cap f^{-1}((2/3, 1])$ вполне отделены в X; значит, по теореме 6.2.4, найдется открыто-замкнутое множество $U \subset X$, такое, что $A_1 \subset U$ и $B_1 \subset X \setminus U$. Следствие 3.6.5 показывает, что $\bar{U}$ — открыто-замкнутое множество в βX, а из теоремы 1.3.6 следует, что $A \subset \bar{A}_1$ и $B \subset \bar{B}_1$. Так как $\bar{B}_1 \cap \bar{U} = \varnothing$, имеем $A \subset \bar{A}_1 \subset \subset \bar{U} \subset \beta X \setminus \bar{B}_1 \subset \beta X \setminus B$. Следовательно, βX сильно нульмерно по теореме 6.2.4. ∎

В заключительной части примера 6.2.20 мы покажем, что аналоги теоремы 6.2.12 для наследственно несвязных пространств и для нульмерных пространств не имеют места.

Из теоремы 6.2.11, предложения 2.2.1 и определения топологии суммы пространств вытекает

6.2.13. Теорема. *Сумма* $\bigoplus_{s \in S} X_s$, *где* $S \neq \varnothing$ *и* $X_s \neq \varnothing$ *при* $s \in S$, *наследственно несвязна* (*нульмерна, сильно нульмерна*) *в том и только том случае, если все пространства* X_s *наследственно несвязны* (*нульмерны, сильно нульмерны*). ∎

6.2.14. Теорема. *Произведение* $\prod_{s \in S} X_s$, *где* $S \neq \varnothing$ *и* $X_s \neq \varnothing$ *при* $s \in S$, *наследственно несвязно* (*нульмерно*) *в том и только том случае, если все пространства* X_s *наследственно несвязны* (*нульмерны*).

Доказательство. Каждое из пространств X_s гомеоморфно подпространству пространства $\prod_{s \in S} X_s$; значит, по теореме 6.2.11, достаточно показать, что произведение $\prod_{s \in S} X_s$ наследственно несвязных (нульмерных) пространств наследственно несвязно (нульмерно). В случае наследственной несвязности это следует из теоремы 6.1.21. В случае нульмерности это следует из того факта, что множества вида $\prod_{s \in S} W_s$, где W_s открыто-замкнуто в X_s и множество $\{s \in S\colon W_s \neq X_s\}$ конечно, составляют базу пространства $\prod_{s \in S} X_s$ и открыто-замкнуты. ∎

6.2.15. Следствие. *Предел обратного спектра наследственно несвязных* (*нульмерных*) *пространств является наследственно несвязным* (*нульмерным или пустым*) *пространством.* ∎

Произведение двух сильно нульмерных пространств не обязано быть сильно нульмерным пространством; соответствующий пример слишком сложен, чтобы его здесь обсуждать. Подобным же образом предел обратной последовательности сильно нульмерных пространств может не быть сильно нульмерным пространством (см. задачу 6.3.25).

6.2.16. Теорема. *Канторов куб $D^{\mathfrak{m}}$ универсален для всех нульмерных пространств веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.*

Доказательство. В силу последней теоремы, достаточно доказать, что каждое нульмерное пространство X веса $\mathfrak{m}$ можно вложить в $D^{\mathfrak{m}}$.

Из теоремы 1.1.15 вытекает, что у пространства X есть база $\{U_s\}_{s \in S}$, состоящая из открыто-замкнутых множеств и такая, что $|S| = \mathfrak{m}$. При каждом $s \in S$ определим отображение $f_s \colon X \to D_s = D$, положив

$$f_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in U_s, \\ 0 & \text{при} \quad x \in X \setminus U_s. \end{cases}$$

По теореме о диагональном отображении, отображение $f = \mathop{\triangle}\limits_{s \in S} f_s$ является гомеоморфным вложением пространства X в канторов куб $D^{\mathfrak{m}} = \prod\limits_{s \in S} D_s$. ∎

6.2.17. Следствие. *Каждое нульмерное пространство X веса $\mathfrak{m}$ обладает нульмерной компактификацией веса $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Можно предположить, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$; тогда замыкание подпространства пространства $D^{\mathfrak{m}}$, гомеоморфного X, является требуемой компактификацией. ∎

По теореме 3.2.2 (см. также упр. 3.2.В), существует непрерывное отображение f некоторого замкнутого подпространства X канторова множества $D^{\aleph_0}$ на отрезок I. Из теоремы 3.2.11 вытекает, что факторпространство $X/E(f)$ гомеоморфно отрезку I. Следовательно, факторпространство наследственно несвязного (нульмерного, сильно нульмерного) пространства может не быть наследственно несвязным (нульмерным, сильно нульмерным) пространством.

6.2.18. Примеры. Каждое непустое дискретное пространство сильно нульмерно.

Пространство W всех ординалов $\leqslant \omega_1$ (см. пример 3.1.27) нульмерно; так как это пространство — компакт, оно сильно нульмерно. В силу теоремы 6.2.11 и примера 3.1.27, пространство W_0 всех счетных ординалов тоже сильно нульмерно.

Прямая Зоргенфрея K нульмерна (см. пример 2.2.8); так как это пространство линделёфово (см. пример 3.8.14), оно сильно нульмерно.

Из 6.1.5 вытекает, что любое нульмерное подпространство вещественной прямой не содержит никакого интервала. Как легко проверить, каждое непустое подпространство вещественной прямой, которое не содержит никакого интервала, нульмерно. Значит, непустое подпространство вещественной прямой нульмерно, или, что равносильно (по теоремам 6.2.7 и 3.8.1), сильно нульмерно в том и только том случае, если оно не содержит никакого интервала. В частности, множества рациональных чисел и иррациональных чисел нульмерны. Теоремы 6.2.7 и 6.2.14 показывают, что подпространство евклидова n-пространства R^n (n-куба I^n, гильбертова куба $I^{\aleph_0}$), состоящее из всех точек с рациональными координатами, сильно нульмерно. Аналогично подпространство евклидова n-пространства R^n (n-куба I^n, гильбертова куба $I^{\aleph_0}$), образованное всеми точками с иррациональными координатами, сильно нульмерно.

Из теоремы 6.2.14 следует, что пространство Бэра $B(\mathfrak{m})$ нульмерно при всех $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. В примере 7.3.14 мы покажем, что пространство $B(\mathfrak{m})$ сильно нульмерно. ∎

Опишем теперь наследственно несвязное сепарабельное метрическое пространство, которое не нульмерно.

6.2.19. Пример (Эрдёш). Пусть X — подпространство гильбертова пространства H, определенное в примере 4.1.7, которое состоит из всех бесконечных последовательностей $\{r_i\}$ рациональных чисел.

Пространство X наследственно несвязно. Действительно, для любых двух различных точек $x = \{r'_i\}$ и $y = \{r''_i\}$ пространства X найдется натуральное число i_0, такое, что $r'_{i_0} \neq r''_{i_0}$; очевидно, можно предположить, что $r'_{i_0} < r''_{i_0}$. Возьмем любое иррациональное число t, для которого $r'_{i_0} < t < r''_{i_0}$. Множество

$$W = \{\{r_i\} \in X\colon\ r_{i_0} < t\}$$

открыто-замкнуто, содержит x и не содержит y. Следовательно, каждое связное подпространство пространства X содержит не более одной точки.

Пусть $x_0 = (0, 0, \ldots)$ — точка пространства X, все координаты которой равны нулю; положим $V = B(x_0, 1) = \left\{ \{r\} \in X\colon \sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 < 1 \right\}$. Мы покажем, что для каждой окрестности U точки x_0, содержащейся в окрестности V этой точки, всегда $\operatorname{Fr} U \neq \varnothing$, т. е. что никакое такое множество не является открыто-замкнутым. Последнее означает, что пространство X не нульмерно.

Определим по индукции последовательность $a_1, a_2, \ldots$ рациональных чисел, удовлетворяющую условиям

(1) $x_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots) \in U$ и $\rho(x_k, X \setminus U) \leqslant 1/k$.

Очевидно, если мы положим $a_1 = 0$, то (1) будет выполнено при $k = 1$. Предположим, что рациональные числа $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_{m-1}$ уже определены и условия (1) выполняются при всех $k \leqslant m - 1$. Последовательность

$$x_i^m = (a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, i/m, 0, 0, \ldots)$$

является точкой множества X при $i = 0, 1, \ldots, m$. Так как $x_0^m \in U$ и $x_m^m \notin U$, найдется $i < m$, для которого $x_i^m \in U$ и $x_{i+1}^m \notin U$. Легко видеть, что, положив $a_m = i/m$, мы обеспечиваем выполнение условий (1) при $k = m$. Таким образом, последовательность $a_1, a_2, \ldots$ определена. Из (1) вытекает, что $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 < 1$ при $k = 1, 2, \ldots$; значит, точка $a = \{a_i\}$ является элементом множества X. Из (1) также следует, что $a \in \overline{U} \cap$ $\cap \overline{(X \setminus U)} = \operatorname{Fr} U$. ∎

Построим теперь нульмерное нормальное пространство, которое не сильно нульмерно.

6.2.20. Пример (Даукер). Пусть Q — множество всех рациональных чисел отрезка I. Положив

$$xEy \text{ в том и только том случае, если } |x - y| \in Q,$$

мы определяем отношение эквивалентности на множестве I. Ясно, что каждый класс эквивалентности E счетен и всюду плотен в I. Значит, мощность семейства всех классов эквивалентности равна $\mathfrak{c}$. Выберем из этого семейства подсемейство мощности $\aleph_1$, не содержащее класса эквивалентности Q, и расположим члены этого подсемейства в трансфинитную последовательность $Q_0, Q_1, \ldots, Q_\alpha, \ldots, \alpha < \omega_1$.

В силу 6.2.18, для каждого $\alpha < \omega_1$ множество $S_\alpha = I \setminus \bigcup\limits_{\gamma \geqslant \alpha} Q_\gamma$ нульмерно. Пусть W — пространство всех ординалов $\leqslant \omega_1$ и $W_0 = W \setminus \{\omega_1\}$. При каждом $\alpha < \omega_1$ множество $X_\alpha = \{\gamma \in$ $\in W \colon \gamma \leqslant \alpha\}$ открыто-замкнуто в W. Рассмотрим произведение $W \times I$ и его подпространства

$$Y_\alpha = \bigcup_{\gamma \leqslant \alpha} (\{\gamma\} \times S_\gamma), \quad Y = \bigcup_{\gamma < \omega_1} (\{\gamma\} \times S_\gamma) \quad \text{и} \quad Y^* = Y \cup (\{\omega_1\} \times I).$$

Пространство $Y_\alpha = Y \cap (X_\alpha \times I)$ открыто-замкнуто в Y; так как $Y_\alpha \subset X_\alpha \times S_\alpha$, то пространство Y_α нульмерно в силу теорем

6.2.11 и 6.2.14. Значит, пространство Y тоже нульмерно. Так как произведение $X_\alpha \times I$ является компактом со счетной базой, оно метризуемо по теореме 4.2.8. Подпространство $Y_\alpha \subset X_\alpha \times I$ тоже метризуемо и тем более нормально.

Покажем, что пространства Y и Y^* тоже нормальны. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в Y^*. Множества $A_1 = A \cap (Y^* \setminus Y)$ и $B_1 = B \cap (Y^* \setminus Y)$ являются компактами; поэтому, по теореме 3.1.6, существуют открытые множества U, $V \subset Y^*$, такие, что

$$(2) \qquad A_1 \subset U, \quad B_1 \subset V \quad \text{и} \quad U \cap V = \varnothing.$$

Применив следствие 3.1.5 и воспользовавшись компактностью $W \times I$, мы легко убеждаемся, что при некотором $\alpha < \omega_1$ выполняются включения

$$(3) \qquad A \cap (Y^* \setminus Y_\alpha) \subset U \quad \text{и} \quad B \cap (Y^* \setminus Y_\alpha) \subset V.$$

Из формул (2) и (3) и нормальности пространства Y_α следует, что множества A и B можно отделить в Y^* открытыми множествами, т. е. что пространство Y^* нормально.

Пусть теперь A и B — любые два непересекающихся замкнутых множества в Y. Мы покажем, что замыкания множеств A и B в Y^* не пересекаются; очевидно, отсюда будет следовать, что Y нормально и что, в силу следствия 3.6.4, имеет место равенство $\beta Y^* = \beta Y$.

Предположим, что нашлась точка $(\omega_1, x) \in \bar{A} \cap \bar{B}$, и возьмем $\alpha < \omega_1$, для которого $x \in S_\gamma$ при всех $\gamma \geqslant \alpha$. Без труда определяются по индукции две последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ счетных ординалов, бóльших α, и две последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ точек множества I, такие, что

$$\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}, \qquad |x - x_i| < 1/i, \qquad |x - y_i| < 1/i,$$

$$(\alpha_i, x_i) \in A \quad \text{и} \quad (\beta_i, y_i) \in B$$

при $i = 1, 2, \ldots$. Рассуждая так же, как в примере 3.1.27, мы заключаем, что $A \cap B \neq \varnothing$ — противоречие.

Предположим, что пространство Y сильно нульмерно. По теореме 6.2.4, найдется открыто-замкнутое множество $U \subset Y$, такое, что $W_0 \times \{0\} \subset U$ и $W_0 \times \{1\} \subset Y \setminus U$. Как доказано выше, $\bar{U} \cap (\overline{Y \setminus U}) = \varnothing$. Так как $Y^* = \bar{U} \cup (\overline{Y \setminus U})$, $(\omega_1, 0) \in \bar{U}$ и $(\omega_1, 1) \in \overline{Y \setminus U}$, наше предположение противоречит связности пространства $\{\omega_1\} \times I$. Следовательно, пространство Y не сильно нульмерно.

Из нульмерности пространства Y и следствий 6.2.10 и 6.2.17 вытекает, что сильно нульмерное пространство может содержать непустое нормальное подпространство, которое не сильно нульмерно. На примере пространства Y мы видим также, что из нульмерности пространства не следует, вообще говоря, нульмерность его стоун-чеховской компактификации (см. теорему 6.2.12). Действительно, в силу теорем 6.2.12 и 6.2.7, пространство βY не может быть нульмерным, так как пространство Y не сильно нульмерно. ∎

Введенные в этом параграфе понятия приводят к двум новым классам отображений.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *легким* (*нульмерным*), если все прообразы $f^{-1}(y)$ точек наследственно несвязны (нульмерны или пусты). Ясно, что каждое нульмерное отображение является легким и что среди отображений, при которых все прообразы точек являются компактами, эти два класса совпадают. В отношении строения прообразов точек легкие отображения и нульмерные отображения являются полной противоположностью монотонных отображений. Как показано в теореме 6.2.22 ниже, каждое совершенное отображение можно представить в виде композиции монотонного отображения и нульмерного отображения.

6.2.21. Лемма. *Для каждого совершенного отображения $f\colon X \to Y$ отношение эквивалентности E на пространстве X, определенное разбиением всех прообразов $f^{-1}(y)$ точек на компоненты, замкнуто.*

Доказательство. Достаточно показать, что естественное факторное отображение $g\colon X \to X/E = Z$ замкнуто. Пусть $C \in Z$ — произвольная компонента прообраза $f^{-1}(y)$ и U — любое открытое в X множество, содержащее $g^{-1}(C) = C$. По теореме 6.1.23, найдется открыто-замкнутое множество F в пространстве $f^{-1}(y)$, для которого $C \subset F \subset U$. Множества F и $f^{-1}(y) \setminus F$ являются компактами и не пересекаются; значит, в силу теоремы 3.1.6, существуют открытые непересекающиеся множества W_1, $W_2 \subset X$, такие, что $F \subset W_1 \subset U$ и $f^{-1}(y) \setminus F \subset W_2$. Из замкнутости f вытекает, что найдется открытое множество $W \subset Y$, для которого $C \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W) \subset W_1 \cup W_2$. Множество $V = W_1 \cap f^{-1}(W)$ удовлетворяет равенству $g^{-1}(g(V)) = V$; значит, $g(V)$ является окрестностью точки $C \in Z$. Так как $g^{-1}(g(V)) \subset U$, отображение g замкнуто. ∎

6.2.22. Теорема. *Каждое совершенное отображение $f\colon X \to Y$ можно представить в виде композиции $f = hg$, где $g\colon X \to Z$ — монотонное совершенное отображение и $h\colon Z \to Y$ — нульмерное совершенное отображение.*

Доказательство. Пусть E — отношение эквивалентности, определенное в приведенной выше лемме, и $g\colon X/E \to Z$ — естественное факторное отображение. Для каждого класса эквивалентности $[x] \in Z$ обозначим через $h([x])$ точку $f(x) \in Y$. Так как $hg = f$, отображение h: $Z \to Y$ непрерывно в силу предложения 2.4.2.

Из леммы, приведенной выше, следует, что отображение g совершенно; значит, по теореме 3.7.20, Z — хаусдорфово пространство. В силу предложения 2.1.3, h — совершенное отображение.

Отображение g монотонно по определению. Остается доказать, что h нульмерно. Прообразы точек при h являются компактами, поэтому достаточно проверить, что для каждой точки $y \in Y$ ее прообраз $h^{-1}(y)$ наследственно несвязен. Пусть C — произвольное связное подмножество пространства $h^{-1}(y)$. По теореме 6.1.29, множество $g^{-1}(C) \subset f^{-1}(y)$ связно и, значит, содержится в некоторой компоненте пространства $f^{-1}(y)$. Следовательно, множество $gg^{-1}(C) = C$ содержит самое большее одну точку. ∎

Заметьте, что в последней теореме пространство Z является непрерывным образом пространства X при совершенном отображении, равно как и прообразом пространства Y при совершенном отображении. Поэтому многие топологические свойства пространств X и Y являются также свойствами пространства Z. Например, если X или Y являются компактами, локально компактными хаусдорфовыми пространствами или паракомпактами, то и пространство Z таково же (см. теоремы 3.7.21, 3.7.24, 5.1.33 и 5.1.35), и если X метризуемо, то и Z метризуемо (см. теорему 4.4.15).

Следуя схеме доказательства теоремы 6.2.22, для произвольного непрерывного отображения f: $X \to Y$ в T_1-пространство Y можно определить пространство Z, монотонное факторное отображение g: $X \to Z$ и легкое отображение h: $Z \to Y$, такие, что $f = hg$. Однако если f не совершенно, то даже для «хороших» пространств X и Y пространство Z обычно не будет хаусдорфовым (см. упр. 6.2.E). Следующая теорема показывает, что определенная нами факторизация отображения f единственна.

6.2.23. Теорема. *Если непрерывное отображение f: $X \to Y$ представлено (при $i = 1$ и $i = 2$) в виде композиции $h_i g_i$, где g_i: $X \to Z_i$ — монотонное факторное отображение и h_i: $Z_i \to Y$ — легкое отображение, то существует гомеоморфизм h: $Z_1 \to Z_2$, такой, что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "h_1"] & \\
X \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & & Y \\
& Z_2 \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Для каждого $z \in Z_1$ положим $h(z) = g_2 g_1^{-1}(z)$. Так как $g_1^{-1}(z)$ — связное подмножество пространства $f^{-1}h_1(z) = g_2^{-1}h_2^{-1}h_1(z)$, множество $h(z)$ состоит ровно из одной точки: действительно, оно является связным подмножеством в $h_2^{-1}h_1(z)$. Из равенства $hg_1 = g_2$ следует, что h является непрерывным отображением пространства Z_1 в пространство Z_2. Аналогично, положив $h'(z) = g_1 g_2^{-1}(z)$ для каждого $z \in Z_2$, мы определяем непрерывное отображение h' пространства Z_2 в Z_1. Так как $hh' = \mathrm{id}_{Z_2}$ и $h'h = \mathrm{id}_{Z_1}$, отображение h является гомеоморфизмом. Читатель легко проверит, что $h_2 h = h_1$. ∎

Так как каждое отображение компакта в точку совершенно, лемма 6.2.21, теорема 6.1.29 и следствие 6.2.10 влекут за собой следующую теорему.

6.2.24. Теорема. *Для каждого компакта X разбиение пространства X на компоненты — или, что равносильно, на квазикомпоненты — определяет замкнутое отношение эквивалентности E на пространстве X. Факторпространство X/E является при этом нульмерным компактом.* ∎

Заключительная часть этого параграфа посвящена классу еще более несвязных пространств.

Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если для каждого открытого множества $U \subset X$ замыкание $\overline{U}$ открыто в X. Каждое дискретное пространство экстремально несвязно. Пространство всех рациональных чисел может служить примером сильно нульмерного не экстремально несвязного пространства. Ясно, что каждое экстремально несвязное хаусдорфово пространство наследственно несвязно. Любое непустое экстремально несвязное регулярное пространство нульмерно. Действительно, в силу регулярности, для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности V найдется окрестность W точки x, такая, что $x \in W \subset \overline{W} \subset V$. В силу экстремальной несвязности X множество $U = \overline{W}$ открыто и замкнуто. Значит, семейство всех открыто-замкнутых множеств составляет базу пространства X. Подобным же образом доказывается и следующая теорема.

6.2.25. Теорема. *Каждое непустое экстремально несвязное тихоновское пространство сильно нульмерно.* ∎

6.2.26. Теорема. *Топологическое пространство X экстремально несвязно в том и только том случае, если для каждой пары U, V непересекающихся открытых в X множеств всегда $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть U и V — непересекающиеся открытые множества в экстремально несвязном пространстве X. Так как

$U \cap V = \varnothing$, то $\bar{U} \cap V = \varnothing$; учитывая, что множество $\bar{U}$ открыто, получаем $\bar{U} \cap \bar{V} = \varnothing$.

Предположим теперь, что для каждой пары U, V непересекающихся открытых подмножеств топологического пространства X выполняется условие $\bar{U} \cap \bar{V} = \varnothing$. Пусть U — произвольное открытое в X множество. Открытые множества U и $X \setminus \bar{U}$ не пересекаются, значит, $\bar{U} \cap \overline{X \setminus \bar{U}} = \varnothing$. Следовательно, $\bar{U} \subset X \setminus \overline{X \setminus \bar{U}} = \operatorname{Int} \bar{U}$, т. е. множество $\bar{U}$ открыто и пространство X экстремально несвязно. ∎

6.2.27. Теорема. *Стоун-чеховская компактификация βX тихоновского пространства X экстремально несвязна в том и только том случае, если пространство X экстремально несвязно.*

Доказательство. Пусть X — экстремально несвязное тихоновское пространство и U — открытое множество в βX. Замыкание $X \cap \overline{U \cap X}$ множества $U \cap X$ в пространстве X является открытым и замкнутым множеством. По теореме 1.3.6 имеем

$$\bar{U} = \overline{U \cap X} \subset \overline{X \cap \bar{U}} = \overline{X \cap \overline{U \cap X}} \subset \overline{\overline{U \cap X}} = \bar{U}.$$

Поэтому, в силу следствия 3.6.5, множество $\bar{U} = \overline{X \cap \overline{U \cap X}}$ открыто и замкнуто в βX.

Рассмотрим теперь произвольное тихоновское пространство X, стоун-чеховская компактификация βX которого экстремально несвязна, и пусть $U \subset X$ — любое открытое в X множество. Возьмем какое-нибудь открытое множество $W \subset \beta X$, для которого $W \cap X = U$. По теореме 1.3.6, $\bar{U} = \overline{W \cap X} = \bar{W}$. Значит, замыкание $\bar{U} \cap X = \bar{W} \cap X$ множества U в пространстве X замкнуто и открыто. ∎

6.2.28. Следствие. *При каждом $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ стоун-чеховская компактификация $\beta D(\mathfrak{m})$ дискретного пространства $D(\mathfrak{m})$ является экстремально несвязным пространством.* ∎

6.2.29. Следствие. *Пространство βN экстремально несвязно.* ∎

6.2.30. Теорема. *Сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ экстремально несвязна в том и только том случае, если все пространства X_s экстремально несвязны.* ∎

Как свидетельствует пример канторова множества $D^{\aleph_0}$, произведение экстремально несвязных пространств, как правило, не экстремально несвязно (см. упр. 6.2.G(a) и задачу 6.3.21(a)).

6.2.31. Пример. Покажем, что пространство $\beta N \setminus N$ не экстремально несвязно. Отсюда будет следовать, что экстремальная несвязность не наследуется, вообще говоря, замкнутыми подпространствами.

Пусть X не нормальное тихоновское пространство, определенное в примере 3.6.19. В пространстве X есть непересекающиеся замкнутые множества A и B, которые нельзя отделить непересекающимися открытыми множествами. Конечно, можно предположить, что $A, B \subset X \setminus N$. Положим

$$W_A = \bigcup\{U_t\colon x_t \in A\} \quad \text{и} \quad W_B = \bigcup\{U_t\colon x_t \in B\},$$

где $\{U_t\}_{t \in I}$ — семейство открытых множеств в $\beta N \setminus N$, рассмотренное в примере 3.6.19.

Предположим, что пространство $\beta N \setminus N$ экстремально несвязно. Так как W_A и W_B — непересекающиеся открытые подмножества пространства $\beta N \setminus N$, их замыкания в $\beta N \setminus N$ не пересекаются. Но пространство $\beta N \setminus N$ замкнуто в βN; поэтому $\overline{W}_A \cap \overline{W}_B = \emptyset$, где черта обозначает замыкание в βN. В силу нормальности пространства βN, найдутся открытые множества $U, V \subset \beta N$, такие, что

$$A \subset \overline{W}_A \subset U, \quad B \subset \overline{W}_B \subset V \quad \text{и} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Множества $X \cap U$ и $X \cap V$ открыты в X, не пересекаются и содержат множества A и B соответственно. Полученное противоречие показывает, что пространство $\beta N \setminus N$ не экстремально несвязно. ∎

Из примеров 2.5.4 и 6.2.31 следует, что предел обратной последовательности экстремально несвязных пространств может не быть экстремально несвязным пространством.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Наследственно несвязные пространства были введены Хаусдорфом в [1914]. Иногда такие пространства называют вполне несвязными; однако теперь *вполне несвязным* называют обычно пространство, в котором квазикомпонента каждой точки x состоит только из этой точки x (этот класс пространств был введен Серпинским в [1921]). Легко проверяется, что каждое нульмерное пространство вполне несвязно и что каждое вполне несвязное пространство наследственно несвязно. Имеет отношение к названным классам пространств класс *пунктиформных,* или *разрывных,* пространств. Это такие пространства, которые не содержат никакого континуума, состоящего более чем из одной точки (данный класс пространств был введен Янишевским в [1912]). Ясно, что каждое наследственно несвязное пространство пунктиформно. Пространство в примере 6.2.19 вполне несвязно. Примеры наследственно несвязных, но не вполне несвязных пространств, равно как и примеры связных пунктиформных пространств, можно найти в задачах 6.3.23 и 6.3.24.

Нульмерные пространства были введены Серпинским в [1921] — до того, как возникла теория размерности. С другой стороны, сильно нульмерные пространства изучались только в контексте теории размерности, и наши теоремы об этом классе пространств являются специальными случаями теорем теории размерности (см. замечания к § 7.1). Теоремы 6.2.5, 6.2.7 и 6.2.16, а также следствие 6.2.10 были доказаны Веденисовым в [1939]. Пример сильно нульмерного нормального пространства X, такого, что произведение $X \times X$ нормально, но не сильно нульмерно, был построен Ваге в [1977] (см. также Ваге [1978]). В своем оригинальном построении Ваге применил континуум-гипотезу; Пшимусинский (цитировано Ваге в [1977]) показал, как модифицировать конструкцию Ваге таким образом, что ссылка на континуум-гипотезу будет не нужна (детали можно найти в работе Пшимусинского [1979]). Пример 6.2.19 описан в статье Эрдёша [1940] (первый пример сепарабельного метрического пространства с аналогичными свойствами был определен Серпинским в [1921]; пространство Серпинского еще и метризуемо полной метрикой). Пример 6.2.20 описан в статье Даукера [1955].

Легкие отображения и нульмерные отображения введены Стоиловым в [1928]. Теорема 6.2.22 доказана Эйленбергом в [1934] и Уайберном в [1934] для компактных метрических пространств X и Y. Для любых метрических пространств она была доказана Вайнштейном в [1947a]; в нынешней форме эта теорема была установлена Пономаревым в [1959a]. Теорема 6.2.23 отмечена Уайберном в [1942].

Экстремально несвязные пространства были определены М. Х. Стоуном в [1937a]. Доказательство того, что $\beta N \setminus N$ не экстремально несвязно, приведенное в примере 6.2.31, взято из книги Гиллмана и Джерисона [1960]; сам этот факт был доказан (на другом языке; см. Энгелькинг [1972]) Хаусдорфом в [1936].

УПРАЖНЕНИЯ

6.2.A. (а) (Мазуркевич [1917]). Пусть множество A и его дополнение $X \setminus A$ всюду плотны в сепарабельном нульмерном пространстве X, метризуемом полной метрикой, причем A является множеством типа G_δ в X. Докажите, что A тогда гомеоморфно пространству иррациональных чисел.

Указание. Воспользовавшись указанием к упр. 4.3.G, покажите, что каждое пространство A с перечисленными выше свойствами гомеоморфно пространству $B(\aleph_0)$.

(b) (Александров и Урысон [1928]). Покажите, **что каждое** сепарабельное нульмерное метризуемое полной метрикой пространство, которое не содержит никакого непустого открытого компактного подмножества, гомеоморфно пространству иррациональных чисел.

(c) (Брауэр [1910]). Докажите, что каждый плотный в себе нульмерный метризуемый компакт гомеоморфен канторову совершенному множеству.

Указание. Видоизмените конструкцию, описанную в указании к упр. 4.3.G, таким образом, чтобы множества $F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ были определены при $i_1 \leqslant m_1$, $i_2 \leqslant m_2$, ..., $i_k \leqslant m_k$, где $m_1, m_2, \ldots$ — некоторая последовательность степеней числа 2.

(d) (Серпинский [1920a] (объявлено в [1915])). Докажите, что каждое плотное в себе счетное метризуемое пространство гомеоморфно пространству рациональных чисел.

Указание. В силу упр. 4.3.H(d), достаточно показать, что каждое плотное в себе счетное метризуемое пространство X гомеоморфно некоторому всюду плотному подпространству пространства P иррациональных чисел. Вложите X в P, уберите подходящим образом $\aleph_0$ точек из $\overline{X} \setminus X$ и примените (a).

Можно воспользоваться также упр. 4.3.H(e) и применить (c).

6.2.B. (a) Покажите, что непустой компакт нульмерен в том и только том случае, если он гомеоморфен пределу обратного спектра конечных дискретных пространств.

(b) (Терасава [1972]). Покажите, что непустое тихоновское пространство X сильно нульмерно в том и только том случае, если каждое функционально замкнутое подмножество пространства X можно представить в виде пересечения счетного семейства открыто-замкнутых множеств.

6.2.C (Даукер [1955]). Покажите, что к пространству Y в примере 6.2.20 можно таким образом присоединить одну точку, что получится, по нашему усмотрению, либо нормальное не нульмерное пространство, либо нормальное и сильно нульмерное пространство (см. упр. 6.2.D).

Указание. Присоедините точку $(\omega_1, 0)$; отождествите множество $Y^* \setminus Y \subset Y^*$ в точку.

6.2.D. (a) Докажите, что если пространство, полученное присоединением нульмерного компакта к сильно нульмерному пространству, является тихоновским, то оно также и сильно нульмерно.

Указание. Примените упр. 3.2.J.

(b) Докажите, что если пространство, полученное присоединением к сильно нульмерному пространству другого сильно нульмерного пространства в качестве замкнутого подпространства, нормально, то оно также и сильно нульмерно.

6.2.E. (a) Приведите пример непрерывного отображения $f: X \to Y$, такого, что X и Y — сепарабельные метризуемые пространства, все прообразы $f^{-1}(y)$ точек компактны, но в разложении $f = hg$, где g: $X \to Z$ — монотонное факторное отображение и h: $Z \to Y$ — легкое отображение, пространство Z не является хаусдорфовым.

Указание. Возьмите в качестве X пространство, определенное в примере 6.1.24.

(b) Приведите пример замкнутого отображения f: $X \to Y$, где X и Y — сепарабельные метризуемые пространства, такого, что в разложении $f = hg$, где g: $X \to Z$ — монотонное факторное отображение и h: $Z \to Y$ — легкое отображение, пространство Z не является хаусдорфовым.

(c) (Майкл [1964]). Покажите, что если пространства X и Y в теореме 6.2.22 вполне регулярны, то и пространство Z вполне регулярно.

6.2.F (Куратовский [1928]). Покажите, что любое разбиение компакта на счетное семейство континуумов задает замкнутое отношение эквивалентности.

Указание. Примените теоремы 6.1.27 и 6.2.24.

6.2.G. (a) Убедитесь, что никакое подпространство экстремально несвязного хаусдорфова пространства X не гомеоморфно $A(\aleph_0)$, т. е. что в X нет нетривиальных сходящихся последовательностей.

Выведите отсюда, что каждое экстремально несвязное секвенциальное пространство дискретно.

(b) Покажите, что экстремальная несвязность наследуется каноническими замкнутыми множествами, открытыми множествами и всюду плотными множествами.

(c) Заметьте, что каждое экстремально несвязное наследственно нормальное пространство наследственно экстремально несвязно. Приведите пример недискретного пространства с такими свойствами.

(d) Покажите, что волмэновское расширение ωX T_1-пространства X экстремально несвязно в том и только том случае, если пространство X экстремально несвязно.

6.2.H. (a) Покажите, что нульмерность и сильная нульмерность не сохраняются ни совершенными отображениями, ни открытыми отображениями (даже в классе сепарабельных метризуемых пространств), но они сохраняются открыто-замкнутыми отображениями.

Указание. См. упр. 3.2.B, 4.2.D(a) и 1.5.L(b).

(b) Покажите, что экстремальная несвязность не сохраняется совершенными отображениями, но сохраняется открытыми отображениями (в сторону образа).

(c) Заметьте, что наследственная несвязность не является инвариантом ни совершенных отображений, ни открытых отображений.

Замечание. Э. Поль и Р. Поль привели в [1974] пример совершенно открытого отображения наследственно несвязного сепарабельного пространства на нетривиальное связное пространство. Некоторые результаты о сохранении наследственной несвязности открыто-замкнутыми отображениями при дополнительных ограничениях можно найти в статье Комбарова [1971].

6.3. ЗАДАЧИ

Одна характеристика связности

6.3.1. Покажите, что пространство X связно в том и только том случае, если для каждого открытого покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X и любых двух точек x_1, x_2 из X найдется последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_k$ элементов множества S, такая, что $x_1 \in U_{s_1}$, $x_2 \in U_{s_k}$ и $U_{s_i} \cap U_{s_j} \neq \emptyset$ в том и только том случае, если $|i-j| \leqslant 1$.

Линейно упорядоченные пространства V (см. задачи 1.7.4, 2.7.5, 3.12.3, 3.12.4, 3.12.12(f), 5.5.22 и 8.5.13(j))

6.3.2. (a) Покажите, что пространство X с топологией порожденной линейным упорядочением $<$, связно в том и только том случае, если X непрерывно упорядочено отношением $<$.

(b) Покажите, что каждый сепарабельный линейно упорядоченный континуум X гомеоморфен отрезку I.

Указание. Возьмите счетное множество $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$, всюду плотное в X, в которое не входят ни наименьший, ни наибольший элементы множества X. Упорядочите множество рациональных чисел, заключенных (строго) между 0 и 1, в последовательность $r_1, r_2, \ldots$ таким образом, чтобы $r_i < r_j$ было в том и только том случае, если $s_i < s_j$. Проверьте, что равенством $f(s_i) = r_i$ определено непрерывное отображение $f\colon S \to I$, и примените теорему 3.2.1.

(c) Докажите, что каждое сепарабельное линейно упорядоченное метризуемое пространство X можно вложить в вещественную прямую.

Указание. Заметьте сначала, что можно предположить, что X — компакт (см. указание к задаче 3.12.3(b)). Отметьте, что множество скачков в X счетно, замените каждый скачок отрезком I и примените (b).

(d) Приведите пример неметризуемого сепарабельного линейно упорядоченного пространства.

(e) (Херрлих [1965]). Докажите, что каждое наследственно несвязное линейно упорядоченное пространство сильно нульмерно.

(f) (Херрлих [1965]; для сепарабельных пространств — Линн [1962]). Докажите, что топология каждого сильно нульмерного метризуемого пространства X порождается некоторым линейным упорядочением $<$ на X.

Указание. Покажите сначала, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется покрытие $\mathscr{U}$ пространства X, состоящее из попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств диаметра, меньшего ε (можно или воспользоваться теоремой 7.3.15, или применить теорему 4.4.1 к покрытию пространства X шарами радиуса $\varepsilon/4$ и воспользоваться свойством (4) семейств $\mathscr{V}_i$, определенных в доказательстве этой теоремы). Такое покрытие $\mathscr{U}$, так линейно упорядоченное некоторым отношением $<$, что в $\mathscr{U}$ есть наименьший и наибольший элементы и индуцированная отношением $<$ топология на $\mathscr{U}$ дискретна, будет называться ε-цепью в X.

По индукции определите при $i = 1, 2, \ldots$ $1/2^i$-цепь $\mathscr{U}_i$ в X и два отображения f_i, g_i множества $\mathscr{U}_i$ в X так, чтобы выполнялись следующим условия:

(1) При всех $U \in \mathscr{U}_i$ имеем $f_i(U) \in U$ и $g_i(U) \in U$.

(2) Если $f_i(U) = g_i(U) = x$, то $U = \{x\}$.

(3) Семейство $\mathscr{U}_{i+1}$ является объединением $\bigcup\{\mathscr{U}_{i+1}(U): U \in \mathscr{U}_i\}$ с естественным упорядочением, где $\mathscr{U}_{i+1}(U)$ — некоторая $1/2^{i+1}$-цепь в U, такая, что $f_i(U)$ принадлежит наименьшему элементу семейства $\mathscr{U}_{i+1}(U)$ и $g_i(U)$ принадлежит наибольшему элементу семейства $\mathscr{U}_{i+1}(U)$.

(4) Если $f_i(U) \in V \in \mathscr{U}_{i+1}$, то $f_{i+1}(V) = f_i(U)$.

(5) Если $g_i(U) \in V \in \mathscr{U}_{i+1}$, то $g_{i+1}(V) = g_i(U)$.

Для $x, y \in X$ положим $x < y$, если существует i, такое, что $x \in U \in \mathscr{U}_i$, $y \in U' \in \mathscr{U}_i$ и $U < U'$.

Локальная связность

6.3.3. Топологическое пространство X называется *локально связным*, если для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует связное множество $C \subset U$, такое, что $x \in \operatorname{Int} C$.

(a) Покажите, что пространство X локально связно в том и только том случае, если компоненты всех открытых подпространств пространства X открыты.

Замечание. Не лишне отметить здесь, что необязательно в любое открытое покрытие локально связного паракомпакта можно вписать локально конечное открытое покрытие, состоящее из связных множеств (даже в классе сепарабельных метризуемых пространств); см. Филиппов [1974]. С другой стороны, в любое открытое покрытие произвольного локально связного паракомпакта можно вписать σ-дискретное открытое покрытие, состоящее из связных множеств; см. Пшимусинский [1973].

(b) Убедитесь, что в локально связном пространстве компоненты совпадают с квазикомпонентами.

(c) Заметьте, что локальная связность не сохраняется непрерывными отображениями даже в классе сепарабельных метризуемых пространств.

(d) (Уайберн [1952]). Покажите, что локальная связность сохраняется факторными отображениями.

6.3.4. (a) Заметьте, что локальная связность наследуется открытыми множествами, и приведите пример замкнутого множества на плоскости, которое не локально связно.

(b) Убедитесь, что сумма $\bigoplus_{s \in S} X_s$ локально связна в том и только том случае, если все пространства X_s локально связны.

(c) Покажите, что произведение $\prod_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, локально связно в том и только том случае, если все пространства X_s локально связны и существует конечное множество $S_0 \subset S$, такое, что X_s связно при всех $s \in S \setminus S_0$.

6.3.5. (a) (Уоллес [1951] для нормальных пространств). Докажите, что для тихоновского (нормального) пространства X функционально открытое (открытое) множество $U \subset \beta X$ связно в том и только том случае, если пересечение $X \cap U$ связно.

Указание. Примените лемму 7.1.13 и упр. 2.1.B (c).

(b) (Банашевский [1956]). Покажите, что если стоун-чеховская компактификация βX тихоновского пространства X локально связна, то X псевдокомпактно.

Указание (де Гроот и Макдауэлл [1967]). Заметьте, что компактификация вещественной прямой, описанная в примере 3.5.15, не локально связна, и примените задачу 6.3.3(d).

(c) (Хенриксен и Исбелл [1957]). Покажите, что если псевдокомпактное пространство X локально связно, то каждое регулярное пространство, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства, тоже локально связно.

Указание (де Гроот и Макдауэлл [1967]). Воспользовавшись равносильностью условий (i) и (ii) в теореме 3.10.22, покажите, что если открытые множества U, $V \subset X$ удовлетворяют включению $\overline{V} \subset U$, то лишь конечное число компонент множества U пересекает множество V.

(d) (Банашевский [1956], Хенриксен и Исбелл [1957]). Докажите, что стоун-чеховская компактификация βX тихоновского пространства X локально связна в том и только том случае, если пространство X локально связно и псевдокомпактно.

6.3.6. (a) (Хенриксен и Исбелл [1957]). Покажите, что следующие условия равносильны для произвольного регулярного пространства X:

(1) *В каждое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное покрытие, состоящее из связных множеств.*

(2) *В каждое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие, состоящее из связных множеств.*

(3) *Пространство X локально связно и счетно компактно.*

(b) Заметьте, что если X — нормальное пространство, то условия (1)—(3) в (a) равносильны следующему условию:

(4) *В каждое конечное открытое покрытие пространства βX можно вписать конечное покрытие, состоящее из континуумов.*

(c) Покажите, что компакт X локально связен в том и только том случае, если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать конечное покрытие, состоящее из континуумов.

6.3.7. Покажите, что T_1-пространство X связно и локально связно (одновременно) в том и только том случае, если, каковы бы ни были открытое покрытие $\{U_s\}_{s\in S}$ пространства X и точки x_1, x_2 из X, найдутся последовательность (конечная) $s_1, s_2, \ldots, s_k$ элементов множества S и последовательность $V_1, V_2, \ldots, V_k$ связных открытых подмножеств пространства X, такие, что $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_k$, $V_i \subset U_{s_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ и $V_i \cap V_j \neq \varnothing$ в точности тогда, когда $|i-j| \leqslant 1$.

Топологическая характеристика отрезка

6.3.8. Назовем точку x связного пространства X *разбивающей точкой* пространства X, если $X \setminus \{x\} = U \cup V$, где множества U, V открыты, не пересекаются и не пусты, т. е. если пространство $X \setminus \{x\}$ не связно. Если x не является разбивающей точкой пространства X, назовем ее *неразбивающей* точкой.

(a) Проверьте, что если x — разбивающая точка континуума X и $X \setminus \{x\} = U \cup V$, где U и V — непустые непересекающиеся открытые множества, то множества $U \cup \{x\}$ и $V \cup \{x\}$ являются континуумами.

(b) (Уоллес [1942]; для метризуемых континуумов — Р. Л. Мор [1920]). Покажите, что в каждом континууме X мощности >1 есть по крайней мере две неразбивающие точки.

Указание. Докажите, что для каждого $x \in X$ найдется неразбивающая точка $y \in X \setminus \{x\}$. Для этого упорядочите семейство $\mathscr{C}$ всех собственных подконтинуумов континуума X, содержащих точку x, положив $C_1 \leqslant C_2$ в том и только том случае, если $C_1 \subset \operatorname{Int} C_2$. Возьмите затем любое максимальное линейно упорядоченное подсемейство $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$, содержащее $\{x\}$, и рассмотрите объединение $\bigcup \mathscr{C}_0$.

(c) (Серпинский [1916], Страшевич [1918], Р. Л. Мор [1920]; для континуумов на плоскости — Леннес [1911]). Докажите, что произвольный сепарабельный континуум, ровно две точки которого являются неразбивающими, гомеоморфен отрезку I.

Указание. Пусть a, b — две неразбивающие точки такого континуума X. Воспользовавшись (b), покажите, что для каждого $x \in X \setminus \{a, b\}$ имеет место равенство $X \setminus \{x\} = A(x) \cup B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ — открытые множества, $A(x) \cap B(x) = \varnothing$ и $a \in A(x)$, $b \in B(x)$. Для различных $x, y \in X \setminus \{a, b\}$ положим $x < y$, если $A(x) \subset A(y)$, и пусть $a < x < b$ для всех $x \in X \setminus \{a, b\}$. Убедитесь, что $<$ — линейное упорядочение на X, порождающее исходную топологию пространства X. Примените задачу 6.3.2(b).

Линейная связность и локальная линейная связность

6.3.9. Пространство X *линейно связно*, если для любых двух точек x_1, x_2 пространства X существует непрерывное отображение $f\colon I \to X$ отрезка I в пространство X, такое, что $f(0) = x_1$ и $f(1) = x_2$.

(a) Проверьте, что каждое линейно связное пространство связно, и приведите пример континуума на плоскости, не являющегося линейно связным.

(b) Заметьте, что линейная связность сохраняется (в сторону образа) непрерывными отображениями.

(c) Покажите, что произведение $\prod\limits_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, линейно связно в том и только том случае, если все пространства X_s линейно связны.

6.3.10. Пространство X *локально линейно связно*, если для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдется окрестность V точки x, такая, что, каково бы ни было $y \in V$, существует непрерывное отображение $f\colon I \to U$, удовлетворяющее условиям $f(0) = x$ и $f(1) = y$.

(a) Проверьте, что каждое локально линейно связное пространство локально связно, и приведите пример локально связного подпространства плоскости, которое не является локально линейно связным. Покажите, что каждое связное локально линейно связное пространство линейно связно.

(b) Заметьте, что локальная линейная связность сохраняется факторными отображениями, но не сохраняется непрерывными отображениями — даже если ограничиться сепарабельными метризуемыми пространствами.

(c) Убедитесь, что локальная линейная связность наследуется открытыми множествами.

(d) Покажите, что произведение $\prod\limits_{s \in S} X_s$, где $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, локально линейно связно в том и только том случае, если все пространства X_s локально линейно связны и существует конечное множество $S_0 \subset S$, такое, что X_s линейно связно при всех $s \in S \setminus S_0$.

6.3.11 (Менгер [1929], Р. Л. Мор [1932] (объявлено в [1927]); для компактов — Мазуркевич [1913], [1913a] и [1920], Р. Л. Мор

[1916]). Докажите, что для любых двух различных точек x_1, x_2 произвольного связного открытого подпространства V локально связного пространства X, метризуемого полной метрикой, в V существует подпространство, гомеоморфное отрезку I, которое содержит x_1 и x_2.

Выведите отсюда, что каждый локально связный метризуемый континуум линейно связен и локально линейно связен.

Указание. Определите при $m = 1, 2, \ldots$ конечную последовательность $V_1^m, V_2^m, \ldots, V_{k_m}^m$ связных открытых подмножеств пространства V, такую, что

(1) $x_1 \in V_1^m \setminus (V_2^m \cup \ldots \cup V_{k_m}^m)$, $x_2 \in V_{k_m}^m \setminus (V_2^m \cup \ldots \cup V_{k_m-1}^m)$ и $\delta(V_i^m) \leqslant 1/m$ при $i = 1, 2, \ldots, k_m$.

(2) $V_i^m \cap V_j^m \neq \varnothing$ в точности тогда, когда $|i - j| \leqslant 1$.

(3) При всех $i \leqslant k_m$, где $m > 1$, найдется $j(i) \leqslant k_{m-1}$, такое, что $\overline{V_i^m} \subset V_{j(i)}^{m-1}$, и если $i_1 \leqslant i_2$, то $j(i_1) \leqslant j(i_2)$.

С помощью задачи 6.3.8 (с) покажите, что пересечение $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{k_m} \overline{V_i^m}$ гомеоморфно I.

Можно также определить непосредственно гомеоморфное вложение $h: I \to V$, такое, что $x_1, x_2 \in h(I)$. Для этого разбейте отрезок I на k_m следующих друг за другом замкнутых отрезков $I_1^m, I_2^m, \ldots, I_{k_m}^m$ с попарно непересекающимися внутренностями таким образом, что $I_i^m \subset I_{j(i)}^{m-1}$ при $i = 1, 2, \ldots, k_m$, где $m > 1$, и $\delta(I_i^m) = \delta(I_{i'}^m)$, как только $j(i) = j(i')$. Определите затем h, взяв в качестве $h(t)$ единственную точку пересечения $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup$ $\bigcup \{\overline{V_i^m}: t \in I_i^m\}$.

6.3.12. (a) Покажите, что хаусдорфово пространство X линейно связно в том и только том случае, если для каждой пары x_1, x_2 различных точек пространства X существует гомеоморфное вложение $h: I \to X$ замкнутого отрезка I в пространство X, удовлетворяющее условиям $h(0) = x_1$ и $h(1) = x_2$ (т. е. если X *дугообразно связно*).

Указание. Примените задачу 6.3.11.

(b) Покажите, что хаусдорфово пространство X локально линейно связно в том и только том случае, если для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдется окрестность V точки x, такая, что, какова бы ни была точка $y \in V \setminus \{x\}$, существует гомеоморфное вложение $h: I \to U$, удовлетворяющее условиям $h(0) = x$ и $h(1) = y$ (т. е. если X *локально дугообразно связно*).

6.3.13. Пусть (X, ρ) — локально связное компактное метрическое пространство. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что, каковы бы ни были точки x, y пространства X, удовлетворяющие условию $0 < \rho(x, y) < \delta$, существует гомеоморфное вложение $h\colon I \to X$, такое, что $h(0) = x$, $h(1) = y$ и $\delta(h(I)) < \varepsilon$.

Указание. Примените задачу 6.3.11.

6.3.14 (Хан [1914], Мазуркевич [1913], [1913a] и [1920a], Серпинский [1920b]). Докажите, что для каждого метризуемого континуума X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X является непрерывным образом отрезка I.*

(2) *Для каждой метрики ρ на пространстве*[1] *X и любого $\varepsilon > 0$ существуют связные замкнутые множества $F_1, F_2, \ldots, F_k$, такие, что $X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ и $\delta(F_i) \leqslant \varepsilon$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.*

(3) *Пространство X локально связно.*

Указание. При доказательстве импликации (3) $\Rightarrow$ (1) воспользуйтесь теоремой 3.2.2 и задачами 6.3.11 и 6.3.13.

Квазикомпоненты произведений

6.3.15 (Куратовский [1961]). Докажите, что квазикомпонента точки $x = \{x_s\}$ в произведении $\prod_{s \in S} X_s$ совпадает с прозведением $\prod_{s \in S} Q_s$, где Q_s — квазикомпонента точки x_s в пространстве X_s.

Обратные спектры III (см. задачи 2.7.19 и 3.12.13)

6.3.16. (a) (Джентри [1969], Э. Поль [1973]). Пусть $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ — отображение обратного спектра $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ компактов в обратный спектр $\boldsymbol{S}' = \{Y_{\sigma'}, \pi^{\sigma'}_{\rho'}, \Sigma'\}$ T_1-пространств. Докажите, что если все отображения $f_{\sigma'}$ монотонны, то предельное отображение $f = \varprojlim \{\varphi, f_{\sigma'}\}$ тоже монотонно.

Выведите отсюда, что если в обратном спектре $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ компактов все связующие отображения π^σ_ρ монотонны, то проекции $\pi_\sigma\colon \varprojlim \boldsymbol{S} \to X_\sigma$ тоже являются монотонными отображениями.

(b) (Э. Поль [1973]). Приведите пример обратных последовательностей $\boldsymbol{S} = \{X_i, \pi^i_j\}$ и $\boldsymbol{S}' = \{Y_i, \tilde{\pi}^i_j\}$ подпространств плоскости и отображения $\{\mathrm{id}_N, f_i\}$ из $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{S}'$, где π^i_j, $\tilde{\pi}^i_j$ и f_i — монотонные замкнутые отображения «на», таких, что $\varprojlim \{\mathrm{id}_N, f_i\}$ является замкнутым, но не монотонным отображением «на».

---

[1]) Напомним, что выражение «метрика на пространстве X» следует понимать как «метрика на множестве X, порождающая топологию пространства X». — *Прим. перев.*

Приведите пример обратной последовательности $S=\{X_i, \pi^i_j\}$ связных подпространств плоскости, в которой все связующие отображения π^i_j являются монотонными отображениями «на», такой, что предел $\varprojlim S$ не связен. Выведите отсюда, что существует обратная последовательность $S=\{X_i, \pi^i_j\}$ связных пространств, в которой все связующие отображения π^i_j монотонны и «на», такая, что некоторые проекции π_i: $\varprojlim S \to X_i$ не монотонны.

(c) (Э. Поль [1973]). Докажите, что если все связующие отображения π^i_j обратной последовательности $S=\{X_i, \pi^i_j\}$ связных пространств являются наследственно факторными монотонными отображениями, то $\varprojlim S$ — связное пространство.

Выведите отсюда, что если все связующие отображения π^i_j обратной последовательности $S=\{X_i, \pi^i_j\}$ являются наследственно факторными монотонными отображениями, то проекции π_i: $\varprojlim S \to X_i$ тоже монотонны.

Пространства Урысона и семирегулярные пространства III (см. задачи 1.7.7 — 1.7.9 и 2.7.6)

6.3.17. Покажите, что если применить операцию, описанную в задаче 1.7.8(b), к пространству X в примере 6.1.6, то получится счетное семирегулярное пространство, ни у каких двух различных точек которого нет окрестностей с непересекающимися замыканиями (см. задачу 1.7.8(d)).

Экстремально несвязные пространства и аксиомы отделимости

6.3.18. Убедитесь, что каждое экстремально несвязное хаусдорфово пространство является урысоновым пространством и что каждое экстремально несвязное семирегулярное пространство является тихоновским пространством. Приведите пример экстремально несвязного хаусдорфова пространства, которое не семирегулярно, и пример экстремально несвязного тихоновского пространства, которое не нормально.

Проективные пространства и проективные резольвенты (абсолюты)

6.3.19 (Глисон [1958], Рейнуотер [1959]). Мы называем компакт P *проективным в классе компактов*, если для любых компактов X и Y, каждого непрерывного отображения g компакта X на компакт Y и любого непрерывного отображения h: $P \to Y$ существует непрерывное отображение f: $P \to X$, такое, что $gf = h$.

(a) Покажите, что пространство проективно в классе компактов в том и только том случае, если оно является ретрактом стоун-чеховской компактификации дискретного пространства.

Указание. Каждый компакт является непрерывным образом стоун-чеховской компактификации дискретного пространства.

(b) Докажите, что каждый компакт X является непрерывным образом некоторого проективного в классе компактов пространства $A(X)$ при неприводимом отображении π_X.

Проверьте, что если некоторое пространство P и отображение f обладают указанными выше свойствами пространства $A(X)$ и отображения π_X, то найдется гомеоморфизм h: $A(X)\to P$, такой, что $fh=\pi_X$. Пара $(A(X), \pi_X)$ называется *проективной резольвентой* или *абсолютом* пространства X.

Указание. Проверьте, что если непрерывное отображение j хаусдорфова пространства Y_0 в себя не является тождественным отображением, то найдется собственное замкнутое подмножество $Y_1\subset Y_0$, такое, что $Y_1\cup j^{-1}(Y_1)=Y_0$. Рассмотрите затем непрерывное отображение какого-нибудь проективного пространства Y на X и примените упр. 3.1.C(a).

(c) Покажите, что каждое неприводимое замкнутое отображение хаусдорфова пространства на экстремально несвязное пространство является гомеоморфизмом.

(d) Докажите, что компакт проективен в классе компактов в том и только том случае, если он экстремально несвязен.

Указание. Убедитесь, что экстремальная несвязность сохраняется ретракциями.

6.3.20 (Флаксмайер [1963], Илиадис [1963], Пономарёв [1963]; для паракомпактов — Пономарёв [1962]). Скажем, что регулярное пространство P *проективно в классе регулярных пространств*, если для любых двух регулярных пространств X и Y, каждого совершенного отображения g пространства X на пространство Y и произвольного совершенного отображения h: $P\to Y$ найдется непрерывное отображение f: $P\to X$, такое, что $gf=h$.

(a) Покажите, что каждое экстремально несвязное регулярное пространство X проективно в классе регулярных пространств.

Указание. Рассмотрите множество $S=\{(x,p)\in X\times P$: $g(x)=h(p)\}\subset X\times P$ и заметьте, применив теорему 3.7.7 и предложение 3.7.10, что сужения на S проекций произведения $X\times P$ на X и P являются совершенными отображениями. Примените затем упр. 3.1.C(a) и задачу 6.3.19(c).

(b) Пусть $\mathcal{O}(X)$ — семейство всех открытых множеств регулярного пространства X. Рассмотрите семейство $A(X)$ всех ультрафильтров в $\mathcal{O}(X)$, сходящихся к точкам пространства X, и введите на $A(X)$ топологию, взяв в качестве базы семейство всех множеств $U_* = \{\mathcal{F} \in A(X): U \in \mathcal{F}\}$, где $U \in \mathcal{O}(X)$.

Заметьте, что $A(X) \setminus U_* = (X \setminus \overline{U})_*$, и покажите, что $A(X)$ — экстремально несвязное регулярное пространство и что отображение π_X: $A(X) \to X$, сопоставляющее произвольному ультрафильтру $\mathcal{F} \in A(X)$ его предел в X, является неприводимым совершенным отображением.

Убедитесь, что если некоторое пространство P и отображение f обладают свойствами $A(X)$ и π_X, то найдется гомеоморфизм h: $A(X) \to P$, такой, что $fh = \pi_X$. Пара $(A(X), \pi_X)$ называется *проективной резольвентой* или *абсолютом* пространства X.

(c) Заметьте, что для каждого тихоновского пространства X пара $(\beta A(X), \Pi)$, где Π: $\beta A(X) \to \beta X$ обозначает продолжение отображения π_X: $A(X) \to X$, является проективной резольвентой пространства βX.

(d) Покажите, что каждое пространство P, проективное в классе регулярных пространств, экстремально несвязно.

Указание. Рассмотрите $A(P)$.

Замечание. Дальнейшую информацию об абсолютах можно найти в обзоре Вудса [1978].

Произведение $\beta N \times \beta N$ не является экстремально несвязным

6.3.21 (Гиллман и Джерисон [1960]). (a) Покажите, что произведение $\beta N \times \beta N$ не экстремально несвязно.

Указание. Рассмотрите открытое множество $\{(i, i): i = 1, 2, \ldots\} \subset \beta N \times \beta N$.

(b) Выведите из (a), что стоун-чеховская компактификация пространства $N \times N$ не гомеоморфна произведению $\beta N \times \beta N$ (см. упр. 3.6.D(b) и задачу 3.12.20(c)).

Пространства замкнутых множеств IV (см. задачи 2.7.20, 3.12.26, 4.5.22 и 8.5.16)

6.3.22. (a) (Вьеторис [1923], Майкл [1951]). Докажите, что если X есть T_1-пространство, то экспоненциальное пространство 2^X и пространство $\mathcal{Z}(X)$ всех непустых замкнутых компактных подмножеств пространства X связны в том и только том случае, если X связно. Приведите пример связного сепарабельного ограниченного метрического пространства (X, ρ), для которого пространство $(2^X, \rho_H)$ не связно.

Указание. Примените задачу 2.7.20(b).

(b) (Майкл [1951]). Покажите, что если пространство X нормально, то подпространство пространства 2^X, состоящее из всех непустых замкнутых связных подмножеств пространства X, замкнуто. Отметьте, что предположение о нормальности существенно.

Указание. Воспользуйтесь длинным отрезком.

(c) (Майкл [1951]). Покажите, что если X есть T_1-пространство, то пространство $\mathscr{Z}(X)$ локально связно в том и только том случае, если X локально связно. Убедитесь, что 2^R не локально связно.

(d) (Майкл [1951]). Проверьте, что если X есть T_1-пространство, то пространство $\mathscr{Z}(X)$ нульмерно в том и только том случае, если X нульмерно.

(e) Покажите, что если X — нормальное пространство, то пространство 2^X нульмерно в том и только том случае, если пространство X сильно нульмерно.

(f) (Сигал [1959] для метризуемых континуумов). Пусть $\mathscr{T}(X)$ — подпространство пространства 2^X, состоящее из всех непустых континуумов, содержащихся в X. Покажите, что если $\boldsymbol{S} = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр хаусдорфовых пространств, то $\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}} = \{\mathscr{T}(X_\sigma), \tilde{\tilde{\pi}}^\sigma_\rho, \Sigma\}$, где $\tilde{\tilde{\pi}}^\sigma_\rho\colon \mathscr{T}(X_\sigma) \leftarrow \mathscr{T}(X_\rho)$ определено правилом $\tilde{\tilde{\pi}}^\sigma_\rho(C) = \pi^\sigma_\rho(C)$, является обратным спектром, и что предел $\varprojlim \tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}$ гомеоморфен пространству $\mathscr{T}(\varprojlim \tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}})$.

Указание. См. задачу 3.12.26(f).

Веер Кнастера — Куратовского

6.3.23 (Кнастер и Куратовский [1921]). Пусть C — канторово множество на отрезке $[0, 1] \times \{0\} \subset R^2$. Обозначим через Q множество всех концевых точек интервалов, удаленных из отрезка $[0, 1] \times \{0\}$ в процессе построения канторова множества, описанном в примере 3.1.28, и положим $P = C \setminus Q$. Соединим каждую точку $c \in C$ с точкой $q = (1/2, 1/2) \in R^2$ отрезком L_c и обозначим через F_c множество всех точек $(x, y) \in L_c$, таких, что y рационально, если $c \in Q$, и y иррационально, если $c \in P$. Подпространство $F = \bigcup\limits_{c \in C} F_c$ плоскости называется *веером Кнастера — Куратовского*.

(a) Докажите, что пространство F связно и пунктиформно.

Указание. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0, 1/2]$ и $P_i \subset R^2$ — горизонтальная прямая $y = r_i$. Предположим, что $F = (F \cap A) \cup (F \cap B)$, где множества A и B замкнуты в R^2, $F \cap A \cap B = \varnothing$ и $q \in A$. Рассмотрите множества $K_i = \{c \in C\colon A \cap B \cap L_c \cap P_i \neq \varnothing\}$. Проверьте, что $\overline{K}_i = K_i$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i \subset P$. Покажите, что $F_c \cap B = \varnothing$ для каждой точки $c \in P \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, и, воспользовавшись теоремой Бэра о категории, выведите, что $F \cap B = \varnothing$.

(b) Докажите, что пространство $F \setminus \{q\}$ наследственно несвязно, но не вполне несвязно.

Вокруг примера Эрдёша

6.3.24. (a) Пусть X — пространство, рассмотренное в примере 6.2.19. Заметьте, что, поставив в соответствие произвольной точке $x = \{x_i\} \in X$ ту же точку $x = \{x_i\} \in Q^{\aleph_0}$, мы получаем непрерывное отображение; выведите отсюда, что существует непрерывное инъективное отображение f: $X \to C$ пространства X в канторово множество C, такое, что $f(x_0) = 0$. Определим отображение g: $X \to l^2$, положив

$$g(x) = \left(\frac{f(x)}{\max(1, \|x\|)}, \ \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}\right), \quad \text{где } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$
$$\text{при} \quad x = \{x_i\}.$$

Покажите, что пространство $X_1 = g(X) \cup \{(0, 1/2)\} \subset l^2$ наследственно несвязно, но не вполне несвязно и что пространство $X_2 = g(X) \cup \{(0, 1)\} \subset l^2$ связно и пунктиформно.

Указание. Заметьте, что существует непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $g(X)$ на пространство $f(X) \subset C$ и что если для какого-нибудь открыто-замкнутого множества $A \subset X$ множество $\{\|x\|: x \in A\}$ ограничено, то $A = \varnothing$.

(b) (Робертс [1956]). Докажите, что отображение g в (a) является гомеоморфным вложением.

Указание. Докажите, что последовательность $x^1, x^2, \ldots$ в пространстве X, где $x^k = \{x_i^k\}$, сходится к точке $x = \{x_i\}$ в том и только том случае, если последовательность $\|x^k\|$ сходится к $\|x\|$ и последовательность $x_i^1, x_i^2, \ldots$ сходится к x_i при $i = 1, 2, \ldots$.

(c) Приведите примеры метризуемых полной метрикой пространств Y, Y_1, $Y_2 \subset l^2$ со следующими свойствами: Y вполне несвязно, но не нульмерно, Y_1 наследственно несвязно, но не является вполне несвязным, и Y_2 связно и пунктиформно.

Указание. Рассмотрите подпространство гильбертова пространства H, состоящее из всех последовательностей иррациональных чисел; рассуждайте так же, как в (a) и (b).

Замечание. Первый пример связного и пунктиформного сепарабельного метрического пространства был построен Серпинским в [1920]. Пространство с этими свойствами, которое, сверх того, метризуемо полной метрикой, было описано Мазуркевичем в [1920]. Первый пример сепарабельного метрического пространства, которое наследственно несвязно, но не вполне несвязно, был приведен Серпинским в [1921]; построенное им пространство, кроме того, метризуемо полной метрикой.

Обратная последовательность сильно нульмерных пространств, предел которой не сильно нульмерен

6.3.25. Покажите, что предел обратной последовательности сильно нульмерных пространств может не быть сильно нульмерным пространством.

Указание. Применив задачу 3.12.23(c), определите в $D^{\aleph_1}$ последовательность подпространств $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$, такую, что $\beta X_i = D^{\aleph_1}$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ гомеоморфно пространству Y из примера 6.2.20.

Глава 7

РАЗМЕРНОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе, обобщая понятие размерности евклидовых пространств, мы припишем определенным топологическим пространствам неотрицательное целое число — размерность этого пространства. Кроме того, пустому пространству будет приписано число -1, а «бесконечномерным» пространствам будет сопоставлен символ ∞. Такое соответствие будет установлено тремя различными способами; топологическому пространству X будет сопоставлено три числа: $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$ и $\dim X$, каждое из которых обладает свойствами размерности. Областями, в которых естественно изучать ind, Ind и dim, служат соответственно классы регулярных пространств, нормальных пространств и тихоновских пространств. При рассмотрении в более широких классах пространств у названных размерностных функций развиваются патологические свойства.

Теория размерности не является частью классического курса общей топологии. Главная причина этого в том, что развитая первоначально для метризуемых компактов и распространенная затем на сепарабельные метризуемые пространства теория размерности только частично обобщается на топологические пространства. Более того, фундаментальная теорема теории размерности для сепарабельных метризуемых пространств, которая утверждает, что ind, Ind и dim совпадают, не выполняется ни в классе всех метризуемых пространств, ни в классе всех компактов. Таким образом, для общих пространств мы имеем три теории размерности вместо одной, каждая из которых несколько беднее [1]) и менее гармонична, чем теория размерности сепарабельных метризуемых пространств. Однако все эти теории сейчас развиты достаточно для того, чтобы быть включенными в книгу по общей топологии. Читатель увидит, что они содержат много интересных теорем и проливают свет на классическую теорию размерности.

---

[1]) Не совсем ясно, следует ли согласиться с этой оценкой: теории размерности общих пространств беднее едиными общими теоремами, но богаче контрпримерами и специальными теоремами, представляющими немалый интерес. — *Прим. перев.*

Эта глава тесно связана с § 6.2, в котором, как читатель теперь увидит, мы развили часть теории размерности: теорию размерности нуль. Связи с другими главами слабее. Хотя мы используем многие предшествующие результаты, рассмотренные здесь задачи и развитые методы имеют свой особый характер. Следующая глава не зависит от этой. Данная глава предназначается главным образом тем читателям, которые знакомы с классической теорией размерности сепарабельных метризуемых пространств. Читатели, которые интересуются только основными понятиями и результатами общей топологии, могут ее пропустить.

Параграф 7.1 открывается определениями ind, Ind и dim и некоторыми немедленными следствиями этих определений. Затем мы доказываем две вспомогательные теоремы о раздутиях и ужатиях покрытий, которые играют ключевую роль в теории размерности в смысле покрытий (dim). В частности, из этих теорем мы выводим, что в классе нормальных пространств определение размерности в смысле покрытий можно сформулировать проще. Параграф завершают доказательства того, что $\operatorname{Ind}\beta X = \operatorname{Ind} X$ и $\dim\beta X = \dim X$, но, вообще говоря, $\operatorname{ind}\beta X \neq \operatorname{ind} X$.

В § 7.2 изучается размерность в смысле покрытий (dim). Мы начинаем с двух «теорем о сумме», утверждающих, что если нормальное пространство можно представить в виде объединения счетного или локально конечного семейства замкнутых подпространств размерности $\leqslant n$, то размерность этого пространства тоже $\leqslant n$. Лемма, которая нужна для теоремы о локально конечной сумме, влечет за собой важную характеристику размерности в смысле покрытий в классе нормальных пространств. Эта характеристика применяется в следующем параграфе. В § 7.2 мы доказываем также, что $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ для каждого линделёфова пространства X и $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$ для каждого нормального пространства X. В заключительной части параграфа размерность dim характеризуется в терминах перегородок.

Последний параграф посвящен теории размерности метризуемых пространств. Сначала размерность в смысле покрытий метрических пространств характеризуется в терминах специальных последовательностей покрытий, а затем доказывается фундаментальная теорема Катетова — Мориты, утверждающая, что $\operatorname{Ind} X = \dim X$ для любого метризуемого пространства X. Последняя теорема вместе с результатами § 7.2 показывает, что $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$ для каждого сепарабельного метризуемого пространства X. Затем мы устанавливаем две характеристики размерности Ind метризуемых пространств, одна из которых формулируется в терминах специальных баз, а другая —

в терминах разбиений на подпространства размерности нуль. Эти характеристики приводят к теореме о сумме и теореме о размерности произведений. В доказательствах всех упомянутых выше теорем применяется теорема Катетова — Мориты; в упр. 7.3.C(a) намечено, как можно обойтись без этого довольно трудного результата. Параграф завершается теоремой о размерности евклидовых пространств, которая говорит, что $\operatorname{ind} R^n = \operatorname{Ind} R^n = \dim R^n = n$. Эта теорема, доказательство которой требует более глубокого проникновения в строение евклидовых пространств, выводится здесь из теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Чтобы достичь замкнутости изложения, доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке приведено в приложении к § 7.3.

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РАЗМЕРНОСТЕЙ ind, Ind и dim

Пусть X — регулярное пространство и n — неотрицательное целое число; положим тогда

(MU1) $\operatorname{ind} X = -1$ *в том и только том случае, если* $X = \varnothing$.

(MU2) $\operatorname{ind} X \leqslant n$, *если для каждой точки* $x \in X$ *и каждой ее окрестности* V *существует открытое множество* $U \subset X$, *такое, что*

$$x \in U \subset V \quad и \quad \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n - 1.$$

(MU3) $\operatorname{ind} X = n$, *если* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *и неравенство* $\operatorname{ind} X \leqslant n - 1$ *не выполняется.*

(MU4) $\operatorname{ind} X = \infty$, *если неравенство* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *не выполняется ни для какого* n.

Условия (MU1)—(MU4) сопоставляют каждому регулярному пространству X число $\operatorname{ind} X$, являющееся либо целым числом $\geqslant -1$, либо «бесконечным числом» ∞. Число $\operatorname{ind} X$ называется *размерностью Менгера — Урысона* или *малой индуктивной размерностью* пространства X. Легко проверяется, что если пространства X и Y гомеоморфны, то $\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} Y$.

В силу регулярности X, можно предполагать, что множество U в (MU2) удовлетворяет более сильному условию $\overline{U} \subset V$. Таким образом, неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant n \geqslant 0$ означает, что каждую точку $x \in X$ можно отделить от произвольного не содержащего ее замкнутого множества F посредством некоторого множества размерности $\leqslant n - 1$.

Из определения размерности Менгера — Урысона сразу следует, что $\operatorname{ind} X \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если существует база $\mathscr{B}$ пространства X, такая, что $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n - 1$ для всех $U \in \mathscr{B}$. В частности, $\operatorname{ind} X = 0$ в том и только том случае, если пространство X нульмерно в смысле § 6.2.

Чтобы упростить формулировки некоторых доказываемых дальше результатов, будем предполагать, что соотношения $n \leqslant \infty$ и $n + \infty = \infty + n = \infty$ выполняются при каждом целом n.

Так как регулярность — наследственное свойство, то если размерность ind определена для некоторого пространства X, то она определена и для каждого подпространства $M \subset X$.

7.1.1. Теорема. *Для каждого подпространства M регулярного пространства X выполняется неравенство* $\operatorname{ind} M \leqslant \operatorname{ind} X$.

Доказательство. Ясно, что это неравенство выполняется, если $\operatorname{ind} X = -1$ и если $\operatorname{ind} X = \infty$. Предположим, что наше неравенство доказано для всех пространств X, таких, что $\operatorname{ind} X \leqslant n - 1$. Рассмотрим регулярное пространство X, для которого $\operatorname{ind} X = n$, любое подпространство $M \subset X$, точку $x \in M$ и произвольную окрестность V точки x в M. Пусть V_1 — любое открытое в X множество, такое, что $V = M \cap V_1$. Так как $\operatorname{ind} X \leqslant n$, найдется открытое множество $U_1 \subset X$, для которого

$$(1) \qquad x \in U_1 \subset V_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U_1 \leqslant n - 1.$$

Множество $U = M \cap U_1$ является окрестностью точки x в M, а его граница $\operatorname{Fr} U = M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1}$ в M является подпространством границы множества U_1 в X. Следовательно, в силу (1) и индуктивного предположения, $\operatorname{ind} M \leqslant n$, и доказательство завершено. ∎

Пусть X — нормальное пространство и n — неотрицательное целое число; положим

(BČ1) $\operatorname{Ind} X = -1$ *в том и только том случае, если* $X = \varnothing$.

(BČ2) $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, *если для каждого замкнутого множества $A \subset X$ и произвольного открытого множества $V \subset X$, содержащего A, найдется открытое множество $U \subset X$, такое, что*

$$A \subset U \subset V \quad \textit{и} \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n - 1.$$

(BČ3) $\operatorname{Ind} X = n$, *если* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ *и неравенство* $\operatorname{Ind} X \leqslant n - 1$ *не выполняется.*

(BČ4) $\operatorname{Ind} X = \infty$, *если неравенство* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ *не выполняется ни для какого* n.

Условия (BČ1)—(BČ4) сопоставляют каждому нормальному пространству X число $\operatorname{Ind} X$, являющееся либо целым числом $\geqslant -1$, либо «бесконечным числом» ∞. Число $\operatorname{Ind} X$ называется *размерностью Брауэра — Чеха* или *большой индуктивной размерностью* пространства X. Легко проверяется, что если пространства X и Y гомеоморфны, то $\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y$.

В силу нормальности X, можно предполагать, что множество U в ($\check{B}\check{C}2$) удовлетворяет более сильному условию $\bar{U} \subset V$. Таким образом, неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant n \geqslant 0$ означает, что любые два непересекающихся замкнутых в X множества A и B могут быть отделены множеством размерности $\leqslant n-1$.

Теорема 6.2.4 показывает, что если пространство X нормально, то $\operatorname{Ind} X = 0$ в том и только том случае, если пространство X сильно нульмерно в смысле § 6.2.

Читатель легко докажет по индукции следующую теорему, которой оправдываются названия малая и большая индуктивная размерность.

7.1.2. Теорема. *Если пространство X нормально, то* $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$. ∎

Так как нормальность не является наследственным свойством (см. пример 2.3.36), может случиться, что размерность Ind определена для пространства X, но не определена для некоторого подпространства $M \subset X$. Однако теорема 2.1.6 показывает, что если $\operatorname{Ind} X$ определена, то $\operatorname{Ind} M$ определена для каждого замкнутого подпространства $M \subset X$. Доказательство следующей теоремы, аналогичное доказательству теоремы 7.1.1, предоставляется читателю.

7.1.3. Теорема. *Для каждого замкнутого подпространства M нормального пространства X выполняется неравенство* $\operatorname{Ind} M \leqslant \operatorname{Ind} X$. ∎

Из заключительной части примера 6.2.20 следует, что последняя теорема перестает быть верной, если предположение о замкнутости подпространства M в X заменить более слабым предположением, что пространство M нормально, т. е. что размерность $\operatorname{Ind} M$ определена.

В определение размерности в смысле покрытий входит понятие порядка покрытия. Под *порядком* семейства $\mathscr{A}$ подмножеств множества X мы понимаем наибольшее целое число n, такое, что семейство $\mathscr{A}$ содержит $n+1$ множеств с непустым пересечением, или «бесконечное число» ∞, если такого целого числа не существует. Таким образом, если порядок семейства $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ равен n, то для любых $n+2$ различных индексов $s_1, s_2, \ldots, s_{n+2} \in S$ имеет место соотношение $A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \ldots \cap A_{s_{n+2}} = \varnothing$. В частности, непустое семейство порядка -1 состоит лишь из пустого множества, а семейство порядка 0 состоит из попарно непересекающихся множеств, не все из которых пусты. Порядок семейства $\mathscr{A}$ обозначается через $\operatorname{ord} \mathscr{A}$.

Пусть X — тихоновское пространство и n — целое число $\geqslant -1$. Положим

(ČL1) $\dim X \leqslant n$, *если в каждое конечное функционально открытое покрытие пространства X можно вписать конечное функционально открытое покрытие порядка $\leqslant n$.*

(ČL2) $\dim X = n$, *если* $\dim X \leqslant n$ *и неравенство* $\dim X \leqslant n-1$ *не выполняется.*

(ČL3) $\dim X = \infty$, *если неравенство* $\dim X \leqslant n$ *не выполняется ни при каком n.*

Условия (ČL1)—(ČL3) приписывают каждому тихоновскому пространству X число $\dim X$, являющееся либо целым числом $\geqslant -1$, либо «бесконечным числом» ∞. Число $\dim X$ называется *размерностью Чеха — Лебега* или *размерностью в смысле покрытий* пространства X. Ясно, что если пространства X и Y гомеоморфны, то $\dim X = \dim Y$.

Из определения размерности в смысле покрытий сразу следует, что $\dim X = -1$ в том и только том случае, если $X = \varnothing$, и $\dim X = 0$ в том и только том случае, если пространство X сильно нульмерно.

Свойство быть тихоновским пространством наследственно, поэтому если размерность $\dim$ для некоторого пространства X определена, то она определена и для каждого подпространства $M \subset X$. Чтобы доказать аналоги теорем 7.1.1 и 7.1.3 для размерности в смысле покрытий, потребуются некоторые свойства функционально замкнутых и функционально открытых множеств. Две теоремы о функционально замкнутых и функционально открытых множествах, которые мы сейчас докажем, будут часто применяться в дальнейшем. Аналогичные теоремы для нормальных пространств (формулируемые в скобках) имеют место для всех замкнутых и всех открытых множеств.

Раздутием семейства $\{A_s\}_{s \in S}$ подмножеств пространства X называется любое такое семейство $\{B_s\}_{s \in S}$, подмножеств этого пространства, что $A_s \subset B_s$ при всех $s \in S$ и, каково бы ни было конечное множество индексов $s_1, s_2, \ldots, s_m \in S$, выполняется следующее условие:

$$A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \ldots \cap A_{s_m} = \varnothing \text{ в том и только том случае, если } B_{s_1} \cap B_{s_2} \cap \ldots \cap B_{s_m} = \varnothing$$

7.1.4. Теорема. *Для каждого конечного семейства $\{F_i\}_{i=1}^k$ функционально замкнутых (замкнутых) множеств топологического (нормального) пространства X существует раздутие $\{U_i\}_{i=1}^k$ этого семейства, состоящее из функционально открытых множеств. Если, кроме того, дано некоторое семейство $\{V_i\}_{i=1}^k$ функционально открытых (открытых) множеств в X и $F_i \subset V_i$ при*

$i = 1, 2, \ldots, k$, то раздутие можно выбрать так, чтобы было $\overline{U}_i \subset V_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Объединение S_1 всех пересечений $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_m}$, удовлетворяющих условию $F_1 \cap F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_m} = \varnothing$, является функционально замкнутым (замкнутым) множеством, не пересекающимся с F_1. Следовательно, по теореме 1.5.13 (по лемме Урысона) существует непрерывная функция $f_1\colon X \to I$, такая, что

$$f_1(F_1) \subset \{0\} \quad \text{и} \quad f_1(S_1) \subset \{1\}.$$

Как легко видеть, семейство $\{K_1, F_2, F_3, \ldots, F_k\}$, где $K_1 = f_1^{-1}([0, 1/2])$, является раздутием семейства $\{F_i\}_{i=1}^k$.

Предположим теперь, что при каждом $i = 1, 2, \ldots, j$ определена непрерывная функция $f_i\colon X \to I$ таким образом, что $f_i(F_i) \subset \{0\}$ и семейство $\{K_1, K_2, \ldots, K_j, F_{j+1}, \ldots, F_k\}$, где $K_i = f_i^{-1}([0, 1/2])$, является раздутием семейства $\{F_i\}_{i=1}^k$. Объединение S_{j+1} всех тех пересечений элементов семейства $\{K_1, K_2, \ldots, K_j, F_{j+1} \ldots, F_k\}$, которые не пересекаются с F_{j+1}, является функционально замкнутым (замкнутым) множеством, не пересекающимся с F_{j+1}. Следовательно, существует непрерывная функция $f_{j+1}\colon X \to I$, такая, что

$$f_{j+1}(F_{j+1}) \subset \{0\} \quad \text{и} \quad f_{j+1}(S_{j+1}) \subset \{1\}.$$

Как легко видеть, семейство $\{K_1, K_2, \ldots, K_{j+1}, F_{j+2}, \ldots, F_k\}$, где $K_{j+1} = f_{j+1}^{-1}([0, 1/2])$, является раздутием семейства $\{F_i\}_{i=1}^k$.

Таким образом, можно предположить, что для каждого $i \leqslant k$ определена непрерывная функция $f_i\colon X \to I$ таким образом, что $f_i(F_i) \subset \{0\}$ и семейство $\{K_i\}_{i=1}^k$, где $K_i = f_i^{-1}([0, 1/2])$, является раздутием семейства $\{F_i\}_{i=1}^k$. Легко видеть, что семейство $\{U_i\}_{i=1}^k$, где $U_i = f_i^{-1}([0, 1/2))$, удовлетворяет требованиям первой части теоремы.

Для доказательства второй части надо заменить множества U_i множествами $g_i^{-1}([0, 1/2))$, где $g_i\colon X \to I$ — какая-нибудь непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$g_i(F_i) \subset \{0\} \quad \text{и} \quad g_i(X \setminus (U_i \cap V_i)) \subset \{1\}. \blacksquare$$

Ужатием покрытия $\{A_s\}_{s \in S}$ пространства X называется любое покрытие $\{B_s\}_{s \in S}$ этого пространства, такое, что $B_s \subset A_s$ при всех $s \in S$. Ясно, что порядок произвольного ужатия покрытия $\mathscr{A}$ не превосходит $\operatorname{ord} \mathscr{A}$.

7.1.5. Теорема. *Каждое конечное функционально открытое (открытое) покрытие $\{U_i\}_{i=1}^k$ топологического (нормального) пространства X обладает ужатиями $\{F_i\}_{i=1}^k$ и $\{W_i\}_{i=1}^k$, функционально замкнутым и функционально открытым соответственно и такими, что $F_i \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Доказательство. Семейство $\{X \setminus U_i\}_{i=1}^k$ состоит из функционально замкнутых (замкнутых) множеств, и пересечение всех элементов этого семейства пусто. По теореме 7.1.4, данное семейство обладает раздутием $\{V_i\}_{i=1}^k$, состоящим из функционально открытых множеств. Семейство $\{F_i\}_{i=1}^k$, где $F_i = X \setminus V_i$, является функционально замкнутым ужатием семейства $\{U_i\}_{i=1}^k$. Существование множеств W_i следует из теоремы 1.5.13 (из леммы Урысона). ∎

Заметим, что вариант последней теоремы, относящийся к нормальным пространствам, следует также из теоремы 1.5.18 и леммы Урысона.

Из теорем о раздутиях и ужатиях мы выведем некоторые полезные характеристики размерности в смысле покрытий.

7.1.6. Теорема. *Для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

(i) $\dim X \leqslant n$.

(ii) *Каждое конечное функционально открытое покрытие пространства X обладает функционально открытым ужатием порядка $\leqslant n$.*

(iii) *Каждое конечное функционально открытое покрытие пространства X обладает функционально замкнутым ужатием порядка $\leqslant n$.*

(iv) *В каждое конечное функционально открытое покрытие пространства X можно вписать конечное функционально замкнутое покрытие порядка $\leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^k$ — произвольное функционально открытое покрытие тихоновского пространства X, удовлетворяющего условию $\dim X \leqslant n$. Возьмем вписанное в него конечное функционально открытое покрытие $\{V_j\}_{j=1}^m$ порядка $\leqslant n$ и для каждого $j \leqslant m$ выберем $i(j) \leqslant k$ так, чтобы было $V_j \subset U_{i(j)}$. Семейство $\{W_i\}_{i=1}^k$, где $W_i = \bigcup\{V_j\colon\ i(j) = i\}$, является функционально открытым ужатием покрытия $\{U_i\}_{i=1}^k$ и его порядок $\leqslant n$. Значит, (i)$\Rightarrow$(ii). Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) вытекает из теоремы 7.1.5, импликация (iii)$\Rightarrow$(iv) очевидна, а импликация (iv)$\Rightarrow$(i) является следствием теоремы 7.1.4. ∎

В классе нормальных пространств все условия последней теоремы можно сформулировать проще; из теорем 7.1.4—7.1.6 вытекает

7.1.7. Теорема. *Для каждого нормального пространства X следующие условия равносильны:*

(i) $\dim X \leqslant n$.

(ii) *В каждое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие порядка $\leqslant n$.*

(iii) *Каждое конечное открытое покрытие пространства X обладает открытым ужатием порядка $\leqslant n$.*

(iv) *Каждое конечное открытое покрытие пространства X обладает замкнутым ужатием порядка $\leqslant n$.*

(v) *В каждое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное замкнутое покрытие порядка $\leqslant n$.* ∎

7.1.8. Теорема. *Если подпространство M тихоновского пространства X обладает тем свойством, что каждая непрерывная функция $f\colon M \to I$ продолжается непрерывно на X, то $\dim M \leqslant \dim X$.*

В частности, *для каждого замкнутого подпространства M нормального пространства X имеет место неравенство $\dim M \leqslant \dim X$.*

Доказательство. Пусть X — тихоновское пространство, для которого $\dim X \leqslant n$, и M — подпространство пространства X, удовлетворяющее условию теоремы. Рассмотрим произвольное функционально открытое покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ пространства M. Применив теорему 7.1.5, возьмем функционально замкнутое ужатие $\{F_i\}_{i=1}^{k}$ рассматриваемого покрытия. По теореме 1.5.13, при $i = 1, 2, \ldots, k$ найдутся непрерывные функции $f_i\colon M \to I$, такие, что

$$(2) \qquad f_i(M \setminus U_i) \subset \{0\} \quad \text{и} \quad f_i(F_i) \subset \{1\}.$$

Пусть $\bar{f}_i\colon X \to I$ — продолжение функции f_i на X. Множества $\bar{f}_1^{-1}((1/2, 1])$, $\bar{f}_2^{-1}((1/2, 1])$, $\ldots$, $\bar{f}_k^{-1}((1/2, 1])$, $\bigcap_{i=1}^{k} \bar{f}_i^{-1}([0, 1))$ составляют конечное функционально открытое покрытие $\mathscr{A}$ пространства X. Из (2) следует, что

$$(3) \quad M \cap \bar{f}_i^{-1}((1/2, 1]) \subset U_i \text{ при } i = 1, 2, \ldots, k \text{ и } M \cap \bigcap_{i=1}^{k} \bar{f}_i^{-1}([0, 1)) = \varnothing.$$

Так как $\dim X \leqslant n$, в покрытие $\mathscr{A}$ можно вписать конечное функционально открытое покрытие $\mathscr{B}$, такое, что $\operatorname{ord} \mathscr{B} \leqslant n$. Из (3) вытекает, что пересечения элементов семейства $\mathscr{B}$ с M образуют конечное функционально открытое покрытие пространства M, вписанное в покрытие $\{U_i\}_{i=1}^k$. Ясно, что порядок этого вписанного покрытия $\leqslant n$ и, таким образом, $\dim M \leqslant n$. ∎

Из заключительной части примера 6.2.20 следует, что последняя теорема не распространяется на произвольные подпространства $M \subset X$.

Читатель, несомненно, заметил, что некоторые теоремы этого параграфа обобщают на более высокие размерности ряд теорем, доказанных в § 6.2 для размерности нуль: теоремы 7.1.1, 7.1.3 и 7.1.8 обобщают теорему 6.2.11, теорема 7.1.2 является обобщением теоремы 6.2.6, а теорема 7.1.7 обобщает теорему 6.2.5. Наша следующая теорема является обобщением теоремы 6.2.13; доказательство ее предоставляется читателю.

7.1.9. Теорема. *Сумма* $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ *удовлетворяет условию* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ ($\operatorname{Ind} X \leqslant n$, $\dim X \leqslant n$) *в том и только том случае, если* $\operatorname{ind} X_s \leqslant n$ ($\operatorname{Ind} X_s \leqslant n$, $\dim X_s \leqslant n$) *при всех* $s \in S$. ∎

Воспользовавшись определениями размерностных функций ind, Ind и dim, можно переформулировать теоремы 6.2.5, 6.2.7 и 6.2.9 следующим образом:

7.1.10. Теорема. *Для каждого нормального пространства X условия* $\operatorname{Ind} X = 0$ *и* $\dim X = 0$ *равносильны.* ∎

7.1.11. Теорема. *Для каждого линделёфова пространства X условия* $\operatorname{ind} X = 0$, $\operatorname{Ind} X = 0$ *и* $\dim X = 0$ *равносильны.* ∎

7.1.12. Теорема. *Для каждого непустого локально компактного паракомпакта X условия* $\operatorname{ind} X = 0$, $\operatorname{Ind} X = 0$ *и* $\dim X = 0$ *равносильны наследственной несвязности X.* ∎

Заметим, что теоремы 7.1.10 и 7.1.11 на более высокие размерности не обобщаются. Действительно, существует компакт X, для которого $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = 2$, но $\dim X = 1$ (см. задачу 7.4.5). Существует также компакт X, для которого $\operatorname{ind} X = \dim X = 2$, но $\operatorname{Ind} X = 3$. Однако последнее пространство устроено очень сложно, и в этой книге оно описано не будет (см. теорему 7.2.8).

Мы завершаем этот параграф двумя теоремами, утверждающими, что $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$ и $\dim \beta X = \dim X$, и обобщающими, таким образом, теорему 6.2.12. В доказательствах обеих теорем применяется некоторый оператор продолжения открытых в X множеств до открытых множеств в βX. Основные свойства этого оператора, обозначаемого через Ex, устанавливаются в двух леммах. До конца доказательства теоремы 7.2.17 чертой будет обозначаться замыкание в βX. Замыкание множества A в X записывается как $X \cap \overline{A}$.

Для каждого открытого множества U тихоновского пространства X множество

$$\operatorname{Ex} U = \beta X \setminus \overline{(X \setminus U)}$$

открыто в βX. Так как

$$X \cap \operatorname{Ex} U = X \setminus \overline{(X \setminus U)} = X \setminus [X \cap \overline{(X \setminus U)}] = U$$

и так как для каждого открытого множества $V \subset \beta X$, такого, что $X \cap V = U$, имеют место соотношения

$$\overline{X \setminus U} = \overline{X \setminus (X \cap V)} = \overline{X \setminus V} \subset \overline{\beta X \setminus V} \subset \beta X \setminus V,$$

т. е.

$$V \subset \beta X \setminus \overline{(X \setminus U)} = \operatorname{Ex} U,$$

множество $\operatorname{Ex} U$ является наибольшим открытым множеством пространства βX, пересечение которого с X равно U. Ясно, что $\overline{\operatorname{Ex} U} \subset \overline{U}$.

7.1.13. Лемма. *Для любых двух открытых множеств U, V тихоновского пространства X выполняются условия*

$$\operatorname{Ex}(U \cap V) = \operatorname{Ex} U \cap \operatorname{Ex} V \quad \textit{и} \quad \operatorname{Ex}(U \cup V) \supset \operatorname{Ex} U \cup \operatorname{Ex} V.$$

Если, кроме того, множества U, V функционально открыты или пространство X нормально, то

$$\operatorname{Ex}(U \cup V) = \operatorname{Ex} U \cup \operatorname{Ex} V.$$

Доказательство. Первые две формулы теоремы непосредственно вытекают из определения оператора Ex. Следовательно, достаточно доказать, что если множества U, V функционально открыты или пространство X нормально, то

$$\operatorname{Ex}(U \cup V) \subset \operatorname{Ex} U \cup \operatorname{Ex} V. \tag{4}$$

Полагая $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$, заменяем формулу (4) равносильным включением

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}. \tag{5}$$

Возьмем любую точку $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ и произвольную ее окрестность $G \subset \beta X$. Пусть F — какое-нибудь функционально замкнутое в βX множество, для которого $x \in \operatorname{Int} F \subset F \subset G$. Имеем

$$x \in \overline{A} \cap \operatorname{Int} F \subset \overline{A \cap F} \quad \text{и} \quad x \in \overline{B} \cap \operatorname{Int} F \subset \overline{B \cap F}.$$

Значит, в силу следствия 3.6.2, множества $A \cap F$ и $B \cap F$ не вполне отделены в X. Так как $A \cap F$ и $B \cap F$ — либо функционально замкнутые множества, либо замкнутые подмножества нормального пространства, то

$$\varnothing \neq (A \cap F) \cap (B \cap F) = (A \cap B) \cap F \subset (A \cap B) \cap G.$$

Множество G является произвольной окрестностью точки x; поэтому $x \in \overline{A \cap B}$. Следовательно, включение (5) установлено. ∎

7.1.14. Лемма. *Для каждого открытого множества U нормального пространства X выполняется равенство*

$$\operatorname{Fr} \operatorname{Ex} U = \overline{\operatorname{Fr} U},$$

где $\operatorname{Fr} U$ *— граница множества U в пространстве X, а* $\operatorname{Fr} \operatorname{Ex} U$ *— граница множества* $\operatorname{Ex} U$ *в пространстве βX.*

Доказательство. Отметим сначала, что

$$(6) \qquad \beta X \setminus \operatorname{Ex}(X \setminus \overline{U}) = \overline{X \setminus (X \setminus \overline{U})} = \overline{\overline{U}} = \overline{U}.$$

Применяя (6) и последнюю формулу леммы 7.1.13, получаем

$$\operatorname{Fr} \operatorname{Ex} U = \overline{\operatorname{Ex} U} \setminus \operatorname{Ex} U = \overline{U} \setminus \operatorname{Ex} U = \beta X \setminus [\operatorname{Ex} (X \setminus \overline{U}) \cup \operatorname{Ex} U] =$$
$$= \beta X \setminus \operatorname{Ex} [(X \setminus \overline{U}) \cup U] = \overline{X \setminus [(X \setminus \overline{U}) \cup U]} = \overline{\operatorname{Fr} U}. \ ∎$$

7.1.15. Теорема. *Если пространство X нормально, то* $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} \beta X$. Ясно, что это неравенство выполняется, если $\operatorname{Ind} \beta X = -1$ и если $\operatorname{Ind} \beta X = \infty$. Предположим, что рассматриваемое неравенство уже доказано для всех нормальных пространств, большая индуктивная размерность стоун-чеховских компактификаций которых $\leqslant n-1$. Рассмотрим произвольное нормальное пространство X, такое, что $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant n$, замкнутое множество $A \subset X$ и открытое множество $V \subset X$, содержащее A. В силу следствия 3.6.4, замыкания множеств A и $X \setminus V$ в βX не пересекаются, поэтому существует открытое множество $W \subset \beta X$, для которого

$$(7) \qquad \overline{A} \subset W \subset \beta X \setminus \overline{X \setminus V} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} W \leqslant n-1.$$

Пересечение $U = X \cap W$ открыто в X и

$$A \subset U = X \cap W \subset X \setminus \overline{X \setminus V} = V.$$

Граница $\operatorname{Fr} U$ множества U в пространстве X содержится в $X \cap \operatorname{Fr} W$; значит, $\overline{\operatorname{Fr} U} \subset \operatorname{Fr} W$ и $\operatorname{Ind} \overline{\operatorname{Fr} U} \leqslant n-1$ в силу теоремы 7.1.3 и второй из формул (7). Применяя следствие 3.6.8 и индуктивное предположение, мы заключаем, что $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n-1$. Следовательно, $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, и неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} \beta X$ установлено.

Докажем теперь, что $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant \operatorname{Ind} X$. Ясно, что это неравенство выполняется, если $\operatorname{Ind} X = -1$ и если $\operatorname{Ind} X = \infty$. Предположим, что рассматриваемое неравенство доказано для всех нормальных пространств, большая индуктивная размерность которых $\leqslant n-1$, и рассмотрим произвольное нормальное пространство X, для которого $\operatorname{Ind} X \leqslant n$. Пусть A — любое замкнутое множество в βX и $V \subset \beta X$ — любое открытое множество, содержащее A. Возьмем открытые множества G, $H \subset \beta X$, для которых

(8) $$A \subset G \subset \overline{G} \subset H \subset \overline{H} \subset V.$$

Так как $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, существует открытое множество $U \subset X$, такое, что

(9) $$X \cap \overline{G} \subset U \subset X \cap H \quad \text{и} \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n-1,$$

где $\operatorname{Fr} U$ — граница множества U в пространстве X.

Из формул (8) и (9) вместе с леммой 7.1.13 получаем

$$A \subset G \subset \operatorname{Ex}(X \cap G) \subset \operatorname{Ex} U \subset \operatorname{Ex}(X \cap H) \subset \overline{H} \subset V.$$

Воспользовавшись последней формулой, второй из формул (9), леммой 7.1.14, следствием 3.6.8 и индуктивным предположением, мы заключаем, что

$$A \subset \operatorname{Ex} U \subset V \quad \text{и} \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} \operatorname{Ex} U \leqslant n-1.$$

Следовательно, $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant n$, и неравенство $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant \operatorname{Ind} X$ установлено. ∎

Последняя теорема вместе со следствием 3.6.7 дает

7.1.16. Следствие. *Для каждого нормального пространства X и любого всюду плотного в нем нормального подпространства $M \subset X$, обладающего тем свойством, что каждая непрерывная функция $f\colon M \to I$ непрерывно продолжается на X, имеет место равенство* $\operatorname{Ind} M = \operatorname{Ind} X$.

Иными словами, *для каждого нормального пространства Y и любого нормального подпространства $T \subset \beta Y$, содержащего Y, имеем* $\operatorname{Ind} Y = \operatorname{Ind} T$. ∎

7.1.17. Теорема. *Для каждого тихоновского пространства имеет место равенство* $\dim \beta X = \dim X$.

Доказательство. Из теорем 3.6.1 и 7.1.8 следует, что $\dim X \leqslant \dim \beta X$; таким образом, достаточно доказать, что если $\dim X \leqslant n$, то $\dim \beta X \leqslant n$.

Пусть X — произвольное тихоновское пространство, для которого $\dim X \leqslant n$. Рассмотрим любое конечное открытое покрытие $\{U_i\}_{i=1}^k$ пространства βX. По теореме 7.1.5, найдется функционально открытое ужатие $\{W_i\}_{i=1}^k$ покрытия $\{U_i\}_{i=1}^k$, такое, что

(10) $$\overline{W}_i \subset U_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Для покрытия $\{X \cap W_i\}_{i=1}^k$ пространства X существует функционально открытое ужатие $\{V_i\}_{i=1}^k$ порядка $\leqslant n$. Формула (10) показывает, что

$$\operatorname{Ex} V_i \subset \overline{V}_i \subset \overline{W}_i \subset U_i.$$

Следовательно, по лемме 7.1.13, семейство $\{\operatorname{Ex} V_i\}_{i=1}^k$, является открытым ужатием покрытия $\{U_i\}_{i=1}^k$ пространства βX. Так как порядок этого ужатия $\leqslant n$, имеем $\dim \beta X \leqslant n$. ∎

Последняя теорема вместе со следствием 3.6.7 дает

7.1.18. Следствие. *Если X — тихоновское пространство и подпространство $M \subset X$ всюду плотно в X и обладает тем свойством, что каждая непрерывная функция f: $M \to I$ непрерывно продолжается на X, то* $\dim M = \dim X$.

Иными словами, *для каждого тихоновского пространства Y и любого подпространства $T \subset \beta Y$, содержащего Y, имеем* $\dim Y = \dim T$. ∎

Напомним читателю в связи с теоремами 7.1.15 и 7.1.17, что для пространства Y в примере 6.2.20 выполняются соотношения $\operatorname{ind} Y = 0$ и $\operatorname{ind} \beta Y > 0$.

7.1.19. Примеры. Для каждой точки x вещественной прямой R или окружности S^1 и произвольной окрестности V точки x найдется окрестность U этой точки, такая, что $U \subset V$ и граница $\operatorname{Fr} U$ состоит из двух точек. Значит, $\operatorname{ind} R \leqslant 1$ и $\operatorname{ind} S^1 \leqslant 1$. Так как $\operatorname{Ind} I > 0$ по теореме 6.2.18, из теоремы 7.1.1 следует, что $\operatorname{ind} R = \operatorname{ind} S^1 = \operatorname{ind} I = 1$.

Для каждой точки x евклидова n-пространства R^n или n-сферы S^n и любой окрестности V точки x найдется окрестность U этой точки, такая, что $U \subset V$ и граница $\operatorname{Fr} U$ гомеоморфна S^{n-1}. Следовательно, как легко доказывается по индукции,

$$\operatorname{ind} R^n \leqslant n, \quad \operatorname{ind} S^n \leqslant n \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} I^n \leqslant n$$

для всех натуральных чисел n.

Малая индуктивная размерность пространств R^n, S^n и I^n, так же как большая индуктивная размерность и размерность в смысле покрытий этих пространств, в действительности равна n. Доказательство этого факта гораздо труднее осуществленных выше оценок; оно будет приведено в § 7.3. ∎

7.1.20. Пример. Пусть Y и Y^* — пространства, определенные в примере 6.2.20. Мы уже знаем, что $\operatorname{ind} Y = 0$, $\operatorname{Ind} Y > 0$ и $\dim Y > 0$. Из следствий 7.1.16 и 7.1.18 вытекают равенства $\operatorname{Ind} Y = \operatorname{Ind} Y^*$ и $\dim Y = \dim Y^*$. Покажем теперь, что $\operatorname{Ind} Y^* \leqslant 1$.

Пусть $A \subset Y^*$ — произвольное замкнутое множество и $V \subset Y^*$ — открытое множество, содержащее A. Возьмем на отрезке I какое-нибудь открытое множество G, которое является конечным объединением непересекающихся открытых интервалов и удовлетворяет условию

$$A \cap (\{\omega_1\} \times I) \subset \{\omega_1\} \times G \subset V \cap (\{\omega_1\} \times I).$$

Воспользовавшись тем, что пространства $I \setminus G$ и G обладают счетной базой, мы легко убеждаемся, что при некотором $\alpha < \omega_1$ выполняются включения

$$A \setminus Y_\alpha \subset Y^* \cap [(W \setminus X_\alpha) \times G] \subset V. \tag{11}$$

Так как Y_α — сепарабельное метризуемое пространство и $\operatorname{ind} Y_\alpha = 0$, то, по теоремам 3.8.1 и 7.1.11, существует открыто-замкнутое в Y_α и тем более в Y^* множество H, такое, что

$$A \cap Y_\alpha \subset H \subset V. \tag{12}$$

В силу (11) и (12), множество $U = H \cup \{Y^* \cap [(W \setminus X_\alpha) \times G]\}$ удовлетворяет включениям $A \subset U \subset V$. Так как $\operatorname{Fr} U \subset (W \setminus X_\alpha) \times \operatorname{Fr} G$ и $\operatorname{Fr} G$ — конечное множество, то, по теореме 7.1.9, мы имеем $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant 0$. Следовательно, $\operatorname{Ind} Y^* \leqslant 1$.

Подобным же образом можно доказать, что $\dim Y^* \leqslant 1$, но это неравенство будет также следствием теоремы 7.2.8, приведенной ниже.

Отметим, что из неравенства $\operatorname{Ind} Y^* \leqslant 1$ и теорем 7.1.1 и 7.1.2 вытекает, что $\operatorname{ind} Y^* = 1$. Таким образом, имеем окончательно

$$\operatorname{ind} Y = 0, \quad \operatorname{ind} Y^* = 1, \quad \operatorname{Ind} Y = \operatorname{Ind} Y^* = 1,$$
$$\dim Y = \dim Y^* = 1. \ \blacksquare$$

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Индуктивное определение размерности наметил Пуанкаре в [1912]. Первое точное определение размерностной функции было сформулировано Брауэром в [1913]. Функция Брауэра совпадает с размерностью Ind в классе локально связных пространств, метризуемых полной метрикой. Однако в работе Брауэра размерностная функция выступает лишь как вспомогательное средство при доказательстве того, что пространства R^m и R^n не гомеоморфны, если $m \neq n$ (первое корректное доказательство этого важного факта было дано Брауэром в [1911]).

Теория размерности была основана Менгером и Урысоном. Определение размерности ind было сформулировано Урысоном в [1922] и Менгером в [1923]. Определение размерности Ind было сформулировано Чехом в [1931]. Размерность в смысле покрытий dim была определена (условием (ii) теоремы 7.1.7) в работе Чеха [1933]. Статья Лебега [1911] содержит теорему о том, что $\dim I^n = n$ (в качестве следствия Лебег получает тот факт, что пространства R^m и R^n не гомеоморфны при $m \neq n$), однако данный там набросок доказательства содержит пробел, который был заполнен лишь в работе Лебега [1921]. Определение размерности в смысле покрытий, данное Чехом, оказалось удачным только в классе нормальных пространств. Модификация этого определения, получающаяся, если рассматривать функционально открытые покрытия, принадлежит Катетову [1950a]. Другой класс покрытий, который приводит к той же размерностной функции, был рассмотрен Ю. М. Смирновым в [1956b]. Первое систематическое изложение теории размерности тихоновских пространств было дано в книге Гиллмана и Джерисона [1960].

Теорема 7.1.8 доказана Катетовым в [1950a] (для нормальных пространств — Чехом в [1933]). Первый пример компакта Y, для которого $\operatorname{ind} X \neq \operatorname{Ind} X$, был приведен В. В. Филипповым в [1969] (нормальное пространство с тем же свойством было описано Ю. М. Смирновым в [1951b]). Дальнейшие примеры таких компактов, упрощенные, но все еще очень сложные, были построены В. В. Филипповым в [1970], Пасынковым и Лифановым в [1970] и Пасынковым в [1970]. Оператор Ex был введен Шаниным в [1943]. То включение в лемме 7.1.13, которое нетривиально, было установлено (для нормальных пространств) Ю. М. Смирновым в [1952] и Уоллесом в [1951]. Теорема 7.1.15 была доказана Веденисовым в [1941], а теорема 7.1.17 — Волмэном в [1938] для нормальных пространств (в [1950a] Катетов заметил, что эту теорему можно распространить на тихоновские пространства). В связи с теоремами 7.1.3, 7.1.8 и заключительной частью примера 6.2.20 (см. также задачу 7.4.12) следует отметить, что Э. Поль и Р. Поль определили в [1977] наследственно нормальное пространство X, такое, что $\dim X = 0$, но в X есть подпространство A, для которого $\dim A > 0$. Те же авторы определили в [1979] наследственно нормальное пространство X, такое, что $\dim X = 0$, но при каждом натуральном n в X есть подпространство A_n, для которого $\dim A_n = \operatorname{Ind} A_n = n$. В предположении, что существует пространство Суслина (см. замечание к задаче 2.7.9(f)), такое пространство было определено В. В. Филипповым в [1973].

Читателю, желающему лучше понять происхождение и геометрическое значение теорем этой главы, мы советуем обратиться к книге Гуревича и Волмэна [1941] или к книге Энгелькинга [1978]. Каждая из этих книг содержит полный курс теории размерности сепарабельных метризуемых пространств.

УПРАЖНЕНИЯ

7.1.A (Эрдёш [1940]). Убедитесь, что малая индуктивная размерность пространства X в примере 6.2.19 равна **единице**.

Указание. Достаточно показать, что для каждого натурального числа i у точки x_0 есть окрестность $V_i \subset X$, такая, что $\delta(V_i) \leqslant 1/i$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V_i = 0$. С этой целью заметьте, что при всех r множество $\{x \in X\colon \rho(x_0, x) = r\}$ гомеоморфно подпространству гильбертова куба, образованному всеми точками с рациональными координатами.

7.1.B. Докажите, что каждое локально конечное функционально открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ произвольного топологического пространства X допускает ужатия $\{F_s\}_{s \in S}$ и $\{W_s\}_{s \in S}$, функционально замкнутое и функционально открытое соответственно, такие, что $F_s \subset W_s \subset \overline{W}_s \subset U_s$ при всех $s \in S$.

Указание. Возьмите непрерывные функции $f_s\colon X \to I$, для которых $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$, и рассмотрите функцию $f\colon X \to I$, определенную так: $f(x) = \sup\limits_{s \in S} f_s(x)$. Можно применить также упр. 5.1.J (b).

7.1.C. Пусть X — нормальное пространство, для которого $\operatorname{Ind} X \leqslant n \geqslant 0$, и нормальное пространство Y получено присоединением к X некоторого замкнутого в Y сильно нульмерного пространства. Докажите, что тогда $\operatorname{Ind} Y \leqslant n$.

7.1.D. Докажите, что если X — нормальное пространство, для которого $\dim X \leqslant n \geqslant 0$, и нормальное пространство Y получается присоединением замкнутого в Y сильно нульмерного пространства, то $\dim Y \leqslant n$ (см. теорему 7.2.1).

7.1.E. Покажите, что если пространства X и Y являются компактами и $\dim Y = 0$, то $\dim(X \times Y) = \dim X$ (см. задачу 7.4.10).

7.1.F (В неявном виде — Фрейденталь [1973]). Докажите, что если $S = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ — обратный спектр из компактов и $\dim X_\sigma \leqslant n$ при всех $\sigma \in \Sigma$, то предел $X = \varprojlim S$ удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$.

7.1.G. (a) (Морита [1950a]). Докажите, что если для семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнутых подмножеств нормального пространства X существует локально конечное семейство $\{V_s\}_{s \in S}$ открытых в X множеств, такое, что $F_s \subset V_s$ при всех $s \in S$, то у семейства $\{F_s\}_{s \in S}$ есть состоящее из открытых множеств раздутие $\{U_s\}_{s \in S}$, такое, что $\overline{U}_s \subset V_s$ при всех $s \in S$.

Указание. Примените трансфинитную индукцию.

(b) Покажите прямо, видоизменив доказательство теоремы 5.1.18, что у каждого локально конечного семейства замкнутых множеств в паракомпакте существует раздутие, состоящее из открытых множеств.

(c) Для произвольного локально конечного семейства замкнутых множеств в метризуемом пространстве определите (с помощью некоторой метрики на этом пространстве) раздутие, состоящее из открытых множеств.

Указание. Пусть $\{F_s\}_{s \in S}$ — локально конечное семейство замкнутых подмножеств метризуемого пространства X. Для каждого $x \in X$ возьмите $\varepsilon_x > 0$, такое, что если $F_s \cap B(x, 2\varepsilon_x) \neq \varnothing$, то $x \in F_s$, и положите $U_s = \bigcup_{x \in F_s} B(x, \varepsilon_x)$.

7.2. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА РАЗМЕРНОСТИ dim

Начнем с двух теорем, которые часто будут применяться в этом и следующем параграфах. Эти теоремы называются *теоремами о сумме.*

7.2.1. Теорема о счетной сумме. *Если нормальное пространство X допускает счетное замкнутое покрытие $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$, такое, что* $\dim F_j \leqslant n$ *при* $j = 1, 2, \ldots,$ *то* $\dim X \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ — произвольное конечное открытое покрытие пространства X. Определим по индукции последовательность $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots$ открытых покрытий пространства X, где $\mathcal{U}_j = \{U_{j,i}\}_{i=1}^{k}$, удовлетворяющую условиям:

(1) $$\overline{U_{j,i}} \subset U_{j-1,i} \quad \text{при } j \geqslant 1 \quad \text{и} \quad U_{0,i} \subset U_i;$$

(2) $$\operatorname{ord}\left(\{\overline{U}_{j,i} \cap F_j\}_{i=1}^{k}\right) \leqslant n, \text{ где } F_0 = \varnothing.$$

Положим $U_{0,i} = U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Условия (1) и (2) при $j = 0$ оказываются выполненными. Предположим, что удовлетворяющие условиям (1) и (2) покрытия $\mathcal{U}_j$ определены при всех $j < m \geqslant 1$. По теореме 7.1.7, открытое покрытие $\{F_m \cap U_{m-1,i}\}_{i=1}^{k}$ подпространства $F_m \subset X$ обладает открытым ужатием $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ порядка $\leqslant n$. Как легко заметить, семейство $\{W_i\}_{i=1}^{k}$, где $W_i = (U_{m-1,i} \setminus F_m) \cup V_i \subset U_{m-1,i}$, является открытым покрытием пространства X и $\operatorname{ord}\left(\{W_i \cap F_m\}_{i=1}^{k}\right) \leqslant n$. По теореме 7.1.5, найдется открытое ужатие $\mathcal{U}_m = \{U_{m,i}\}_{i=1}^{k}$ последнего покрытия, такое, что $\overline{U_{m,i}} \subset W_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Ясно, что покрытие $\mathcal{U}_m$ удовлетворяет условиям (1) и (2) при $j = m$; таким образом, построение последовательности $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots$ завершено.

Для каждого $x \in X$ существует $i(x) \leqslant k$, такое, что x принадлежит бесконечному числу множеств $U_{j,i(x)}$; следовательно, в силу (1), имеем $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} U_{j,i(x)}$. Применяя (1) и (2), мы заключаем, что семейство $\left\{\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{U}_{j,\,i}\right\}_{i=1}^{k}$ является замкнутым ужатием покрытия $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ и имеет порядок $\leqslant n$. Следовательно, $\dim X \leqslant n$ в силу теоремы 7.1.7. ∎

Теорема о локально конечной сумме будет выведена из леммы. Лемма эта формулируется более общим образом, что позволяет получить из нее другую теорему, играющую основную роль в теории размерности метризуемых пространств.

7.2.2. Лемма. *Пусть $\mathscr{U}=\{U_s\}_{s\in S}$ — произвольное открытое покрытие нормального пространства X и существует локально конечное замкнутое покрытие $\mathscr{F}$ пространства X со следующими свойствами: размерность в смысле покрытий каждого элемента покрытия $\mathscr{F}$ не превосходит n, и каждый элемент семейства $\mathscr{F}$ пересекается лишь с конечным множеством элементов семейства $\mathscr{U}$. Тогда покрытие $\mathscr{U}$ обладает открытым ужатием порядка $\leqslant n$.*

Доказательство. Присоединим к покрытию $\mathscr{F}$ множество $F_0=\varnothing$ и расположим элементы этого покрытия в трансфинитную последовательность $F_0, F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots, \alpha \leqslant \xi$, типа $\xi+1$. Мы определим по трансфинитной индукции трансфинитную последовательность $\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_\alpha, \ldots, \alpha \leqslant \xi$, открытых покрытий пространства X, где $\mathscr{U}_\alpha=\{U_{\alpha,s}\}_{s\in S}$, удовлетворяющую условиям

(3) $$U_{\alpha,s}\subset U_{\beta,s}, \quad \text{если} \quad \beta<\alpha \quad \text{и} \quad U_{0,s}\subset U_s;$$

(4) $$\operatorname{ord}\left(\{U_{\alpha,s}\cap F_\alpha\}_{s\in S}\right)\leqslant n;$$

(5) $$U_{\beta,s}\setminus U_{\alpha,s}\subset \bigcup_{\beta\leqslant\gamma\leqslant\alpha} F_\gamma, \quad \text{если} \quad \beta<\alpha.$$

Полагая $U_{0,s}=U_s$ для всех $s\in S$, мы добьемся выполнения условий (3)—(5) при $\alpha=0$. Предположим, что покрытия $\mathscr{U}_\alpha$, удовлетворяющие условиям (3)—(5), определены для всех $\alpha<\alpha_0\geqslant 1$.

Покажем сначала, что семейство всех множеств

$$U'_{\alpha_0,s}=\bigcap_{\alpha<\alpha_0} U_{\alpha,s},$$

где $s\in S$, является открытым покрытием пространства X. Это ясно, если $\alpha_0=\alpha_1+1$, так как тогда $U'_{\alpha_0,s}=U_{\alpha_1,s}$; следовательно, можно предположить, что α_0 — предельный ординал.

У каждой точки $x\in X$ есть окрестность U, пересекающая лишь конечное число элементов семейства $\mathscr{F}$; очевидно, найдется $\beta<\alpha_0$, такое, что $U\cap F_\gamma=\varnothing$ при любом γ, удовлетворяющем условию $\beta\leqslant\gamma<\alpha_0$. Так как $\mathscr{U}_\beta$ — покрытие пространства X, то существует $s\in S$, для которого $x\in U_{\beta,s}$. Из (5) следует, что $U \cap U_{\beta, s} \subset U_{\alpha, s}$, когда $\beta \leqslant \alpha < \alpha_0$; таким образом, $x \in U \cap U_{\beta, s} \subset U'_{\alpha_0, s}$. Следовательно, множества $U'_{\alpha_0, s}$ открыты и покрывают пространство X.

Открытое покрытие $\{F_{\alpha_0} \cap U'_{\alpha_0, s}\}_{s \in S}$ подпространства $F_{\alpha_0} \subset X$ обладает открытым ужатием $\{V_s\}_{s \in S}$ порядка $\leqslant n$, так как — в силу (3) и посылок леммы — число непустых элементов этого покрытия конечно. Семейство $\mathcal{U}_{\alpha_0} = \{U_{\alpha_0, s}\}_{s \in S}$, где $U_{\alpha_0, s} = (U'_{\alpha_0, s} \setminus F_{\alpha_0}) \cup V_s$, является открытым покрытием пространства X, удовлетворяющим условиям (3)—(5) при $\alpha = \alpha_0$. Построение последовательности $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha, \ldots, \alpha \leqslant \xi$, таким образом, завершено. Из (4) теперь следует, что $\operatorname{ord} \mathcal{U}_\xi \leqslant n$. Так как покрытие $\mathcal{U}_\xi$, в силу (3), является ужатием покрытия $\mathcal{U}$, лемма доказана. ∎

Из леммы 7.2.2 и теоремы 7.1.7 вытекает

7.2.3. Теорема о локально конечной сумме. *Если пространство X нормально и существует локально конечное замкнутое покрытие $\{F_s\}_{s \in S}$ этого пространства, такое, что $\dim F_s \leqslant n$ при всех $s \in S$, то $\dim X \leqslant n$.* ∎

Заметим, что из теорем 7.2.1 и 7.2.3 вытекает теорема о σ-локально конечной сумме: каждое нормальное пространство X, допускающее σ-локально конечное замкнутое покрытие $\{F_s\}_{s \in S}$, такое, что $\dim F_s \leqslant n$ при всех $s \in S$, удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$.

7.2.4. Теорема Даукера. *Для каждого нормального пространства X следующие условия равносильны:*

(i) $\dim X \leqslant n$.

(ii) *Каждое локально конечное открытое покрытие пространства X обладает открытым ужатием порядка $\leqslant n$.*

(iii) *В каждое локально конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие порядка $\leqslant n$.*

Доказательство. Покажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть X — нормальное пространство, удовлетворяющее условию $\dim X \leqslant n$, и $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ — произвольное локально конечное открытое покрытие пространства X. Через $\mathcal{T}$ обозначим семейство всех непустых конечных подмножеств множества S и для каждого $T \in \mathcal{T}$ рассмотрим замкнутое множество

$$F_T = \bigcap_{s \in T} \overline{U}_s \cap \bigcap_{s \notin T} (X \setminus U_s).$$

По теореме 7.1.8, имеем $\dim F_T \leqslant n$. Семейство $\mathcal{F} = \{F_T\}_{T \in \mathcal{T}}$ — замкнутое покрытие пространства X, причем каждый элемент этого покрытия пересекает лишь конечное число множеств U_s. Покрытие $\mathcal{F}$ локально конечно. Действительно, для каждой точки $x \in X$ найдутся окрестность $U(x)$ этой точки и конечное множество $S(x) \subset S$, такие, что $U(x) \cap U_s = \varnothing$, если $s \notin S(x)$. Очевидно, $U(x) \cap \overline{U}_s = \varnothing$ при $s \notin S(x)$; значит, если $U(x) \cap F_T \neq \varnothing$, то $T \subset S(x)$. Это показывает, что семейство $\mathcal{F}$ локально конечно. Из леммы 7.2.2 вытекает, что у покрытия $\mathcal{U}$ есть открытое ужатие порядка $\leqslant n$.

Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидна. Доказательство импликации (iii)$\Rightarrow$(i) предоставляется читателю (см. доказательство теоремы 7.1.6). ∎

Легко проверяется, что если пространство X — паракомпакт, то в последней теореме можно заменить слова «локально конечное открытое покрытие» словами «открытое покрытие». В случае паракомпактов можно также брать вместо открытых ужатий (вписанных открытых покрытий) замкнутые ужатия (локально конечные замкнутые вписанные покрытия) порядка $\leqslant n$; это легко следует из замечания 5.1.19 и упр. 7.1.G.

Изучим теперь соотношения между размерностью dim и индуктивными размерностями ind и Ind. Будут доказаны две теоремы, устанавливающие неравенства между различными размерностями пространства (см. теорему 7.1.2). Начнем с леммы, обобщающей теорему 6.2.7.

7.2.5. Лемма. *Пусть X — линделёфово пространство и $\mathcal{B}$ — база пространства X. Для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B пространства X найдутся тогда открытое множество $W \subset X$ и счетное семейство $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов базы $\mathcal{B}$, такие, что*

$$A \subset W \subset \overline{W} \subset X \setminus B \quad \text{и} \quad \operatorname{Fr} W \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} W_i.$$

Доказательство. Для каждого $x \in X$ возьмем окрестность $W_x \in \mathcal{B}$ точки x, такую, что либо $A \cap \overline{W}_x = \varnothing$, либо $B \cap \overline{W}_x = \varnothing$, и рассмотрим счетное подпокрытие $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытого покрытия $\{W_x\}_{x \in X}$ пространства X. Обозначим через $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ семейство всех элементов покрытия $\mathcal{W}$, замыкания которых пересекают множество A, а через $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ обозначим семейство всех остальных элементов покрытия $\mathcal{W}$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \quad \text{и} \quad \overline{U}_i \cap B = \varnothing = \overline{V}_i \cap A \tag{6}$$

при $i = 1, 2, \ldots$.

Положим

$$G_i = U_i \setminus \bigcup_{j<i} \overline{V}_j \quad \text{и} \quad H_i = V_i \setminus \bigcup_{j \leqslant i} \overline{U}_j \tag{7}$$

при $i = 1, 2, \ldots$. Из формул (6) и (7) следует, что для открытых множеств $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ и $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ выполняются условия

$$A \subset W, \quad B \subset V \quad \text{и} \quad W \cap V = \varnothing.$$

Поэтому $\overline{W} \cap V = \varnothing$ и $\overline{W} \subset X \setminus V \subset X \setminus B$. Так как $\operatorname{Fr} W \subset \subset X \setminus (W \cup V)$, для завершения доказательства достаточно проверить, что

$$X \setminus (W \cup V) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} U_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} V_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} W_i.$$

Возьмем любую точку $x \in X \setminus (W \cup V)$ и обозначим через F первый элемент последовательности $\overline{U}_1, \overline{V}_1, \overline{U}_2, \overline{V}_2, \ldots$, который содержит x. Если $F = \overline{U}_i$, то $x \in \operatorname{Fr} U_i = \overline{U}_i \setminus U_i$, так как $x \notin G_i$ и $x \notin \overline{V}_j$ при $j < i$. Если, с другой стороны, $F = \overline{V}_i$, то $x \in \in \operatorname{Fr} V_i = \overline{V}_i \setminus V_i$, так как $x \notin H_i$ и $x \notin \overline{U}_j$ при $j \leqslant i$. Значит, в обоих случаях $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} U_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} V_i$. ∎

7.2.6. Лемма. *Если для каждой пары A, B замкнутых непересекающихся подмножеств нормального пространства X найдется открытое множество $W \subset X$, такое, что*

$$A \subset W \subset \overline{W} \subset X \setminus B \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Fr} W \leqslant n - 1,$$

то $\dim X \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ — произвольное конечное открытое покрытие пространства X и $\{A_i\}_{i=1}^{k}$—некоторое замкнутое ужатие покрытия $\{U_i\}_{i=1}^{k}$. При $i = 1, 2, \ldots, k$ возьмем какое-нибудь открытое множество $W_i \subset X$, такое, что $A_i \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i$ и $\dim \operatorname{Fr} W_i \leqslant n - 1$. Так как пространство $F = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Fr} W_i$ нормально, то $\dim F \leqslant n - 1$ по теореме 7.2.1. Из теорем 7.1.7 и 7.1.4 следует, что существует семейство $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ открытых множеств пространства X, такое, что $\overline{V}_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$(8) \qquad F \subset V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i \quad \text{и} \quad \operatorname{ord}\left(\{\overline{V}_i\}_{i=1}^{k}\right) \leqslant n - 1.$$

Множества $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_k, F_1, F_2, \ldots, F_k$, где

$$F_i = \overline{W}_i \setminus \Big(V \cup \bigcup_{j<i} W_j\Big),$$

составляют замкнутое покрытие, вписанное в $\{U_i\}_{i=1}^{k}$. Значит, в силу теоремы 7.1.7, для завершения доказательства достаточно показать, что порядок этого вписанного покрытия $\leqslant n$. Последнее неравенство сразу следует из второй формулы в (8) и того факта, что при $j < i \leqslant k$ выполняются соотношения

$$F_i \cap F_j \subset \overline{W}_j \cap [\overline{W}_i \setminus (V \cup W_j)] \subset (X \setminus V) \cap \operatorname{Fr} W_j = \varnothing. \blacksquare$$

Из 7.2.5, 7.2.6 и 7.2.1, рассуждая по индукции относительно $\operatorname{ind} X$, получаем следующий результат (см. упр. 7.2.F):

7.2.7. Теорема. *Для каждого линделёфова пространства X имеет место неравенство* $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$. $\blacksquare$

Применяя индукцию относительно $\operatorname{Ind} X$, получаем из леммы 7.2.6 следующий вывод:

7.2.8. Теорема. *Для каждого нормального пространства X имеет место неравенство* $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$. $\blacksquare$

Из леммы 7.2.5 и теорем 7.1.11, 7.2.1 и 7.1.2 вытекает также

7.2.9. Теорема. *Для каждого линделёфова пространства X условия* $\operatorname{ind} X = 1$ *и* $\operatorname{Ind} X = 1$ *равносильны.* $\blacksquare$

7.2.10. Пример. Из 7.1.19, 7.2.7, 7.2.8 и 7.1.11 вытекает, что $\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} S^1 = \operatorname{Ind} I = 1$ и $\dim R = \dim S^1 = \dim I = 1$. Аналогично, из 7.1.19 и 7.2.7 следует, что $\dim R^n \leqslant n$, $\dim S^n \leqslant n$ и $\dim I^n \leqslant n$ для каждого натурального числа n. $\blacksquare$

7.2.11. Пример. Для каждой пары n, m целых чисел, такой, что $0 \leqslant m \leqslant n$, обозначим через Q^n_m подпространство пространства R^n, состоящее из всех точек, ровно m координат которых рациональны. Пусть $n \geqslant 1$.

Как бы ни были выбраны m различных натуральных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_m$, не превосходящих n, и m рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m$, пространство $\prod\limits_{i=1}^{n} R_i$, где $R_{i_k} = \{r_k\}$ при $k = 1, 2, \ldots, m$ и $R_i = R$ при $i \neq i_k$, является замкнутым подпространством пространства R^n. Следовательно, пространство $Q^n_m \cap \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ замкнуто в Q^n_m. Так как пространство $Q^n_m \cap \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ гомеоморфно подпространству пространства R^{n-m}, образованному всеми точками, все координаты которых иррациональны, из 6.2.18 и 7.1.11 следует, что $\dim \left(Q^n_m \cap \prod\limits_{i=1}^{n} R_i\right) = 0$. Из теоремы о счетной сумме теперь вытекает, что $\dim Q^n_m = 0$, так как семейство всех множеств вида $Q^n_m \cap \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ является счетным замкнутым покрытием пространства Q^n_m. $\blacksquare$

Мы завершаем этот параграф характеристикой размерности в смысле покрытий в терминах перегородок. Начнем с определения и двух лемм.

Пусть X — произвольное топологическое пространство и A, B — любая пара непересекающихся множеств в X. Замкнутое множество $L \subset X$ называется *перегородкой* между A и B, если существуют открытые множества U, $V \subset X$, такие, что

$$(9) \qquad A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \varnothing \quad \text{и} \quad X \setminus L = U \cup V.$$

7.2.12. Лемма. *Если перегородка L между подмножествами A и B топологического пространства X функционально замкнута, то множества U и V в (9) функционально открыты.*

Доказательство. Пусть f: $X \to R$ — непрерывная функция, для которой $f^{-1}(0) = L$. По теореме 2.1.13, формула

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in U \cup L, \\ 0, & \text{если} \quad x \in V \cup L, \end{cases}$$

определяет непрерывную функцию g: $X \to R$. Так как $g^{-1}(R \setminus \{0\}) = U$, множество U функционально открыто. В силу симметрии наших посылок, множество V тоже функционально открыто. ∎

7.2.13. Лемма. *Если каждое $(n+2)$-элементное функционально открытое (открытое) покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ тихоновского (нормального) пространства X обладает функционально открытым (открытым) ужатием $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$, таким, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} W_i = \varnothing$, то* $\dim X \leqslant$ $\leqslant n$.

Доказательство. Покажем, что каждое тихоновское (нормальное) пространство X, для которого $\dim X > n$, обладает $(n+2)$-элементным функционально открытым (открытым) покрытием $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$, каждое функционально открытое (открытое) ужатие $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ которого удовлетворяет неравенству $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} W_i \neq \varnothing$. Так как $\dim X > n$, найдется конечное функционально открытое (открытое) покрытие $\mathscr{V}$ пространства X, которое не допускает функционально открытого (открытого) ужатия порядка $\leqslant n$. Кроме того, можно предположить — заменив, если нужно, покрытие $\mathscr{V}$ подходящим его ужатием, — что $\mathscr{V}$ является раздутием любого функционально открытого (открытого) своего ужатия. Действительно, если элементы $V_1, V_2, \ldots, V_k$ покрытия $\mathscr{V}$ имеют непустое пересечение и у $\mathscr{V}$ есть функционально открытое (открытое) ужатие, пересечение соответствующих элементов которого пусто, то мы заменим $\mathscr{V}$ этим ужатием. Ясно, что после конечного числа шагов будет получено покрытие с нужным свойством. Так как $\operatorname{ord}\mathscr{V} > n$, можно предположить, что $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$, где $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} V_i \neq \varnothing$.

Рассмотрим теперь $(n+2)$-элементное функционально открытое (открытое) покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ пространства X, где $U_i = V_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n+1$ и $U_{n+2} = \bigcup\limits_{i=n+2}^{m} V_i$. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ — любое функционально открытое (открытое) ужатие покрытия $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$. Покрытие $\{W_1, \ldots, W_{n+1}, W_{n+2} \cap V_{n+2}, \ldots, W_{n+2} \cap V_m\}$ является функционально открытым (открытым) ужатием покрытия $\mathscr{V}$. Значит, $\mathscr{V}$ является раздутием этого покрытия и

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i \supset \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i \cap (W_{n+2} \cap V_{n+2}) \neq \varnothing. \blacksquare$$

Из теорем 7.1.6 и 7.1.7 следует, что условие приведенной выше леммы является и необходимым для неравенства $\dim X \leqslant n$. Следовательно, мы, между прочим, получаем некоторую характеристику размерности. Эта характеристика и характеристика, двойственная к ней, которая легко получается применением законов де Моргана, формулируется в следующем утверждении.

7.2.14. Следствие. *Тихоновское (нормальное) пространство X удовлетворяет условию $\dim X \leqslant n$ в том и только том случае, если каждое $(n+2)$-элементное функционально открытое (открытое) покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ пространства X обладает функционально открытым (открытым) ужатием $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$, таким, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} W_i = \varnothing$, или — что эквивалентно — в том и только том случае, если для каждого $(n+2)$-элементного семейства $\{B_i\}_{i=1}^{n+2}$ функционально замкнутых (замкнутых) подмножеств пространства X, удовлетворяющего условию $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} B_i = \varnothing$, найдется функционально замкнутое (замкнутое) покрытие $\{F_i\}_{i=1}^{n+2}$ пространства X, такое, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} F_i = \varnothing$ и $B_i \subset F_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n+2$.* $\blacksquare$

7.2.15. Теорема о перегородках. *Тихоновское (нормальное) пространство X удовлетворяет условию $\dim X \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если для каждой последовательности*

$$(A_1, B_1),\ (A_2, B_2),\ \ldots,\ (A_{n+1}, B_{n+1})$$

$n+1$ пар непересекающихся функционально замкнутых (замкнутых) подмножеств пространства X существуют функционально замкнутые (замкнутые) множества $L_1, L_2, \ldots, L_{n+1}$, такие, что L_i является перегородкой между A_i и B_i и $L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{n+1} = \varnothing$.

Доказательство. Докажем сначала, что условие теоремы необходимо для неравенства $\dim X \leqslant n$. Пусть X — тихоновское (нормальное) пространство, такое, что $\dim X \leqslant n \geqslant 0$, и (A_1, B_1), (A_2, B_2), $\ldots$, (A_{n+1}, B_{n+1}) — последовательность $n+1$ пар непересекающихся функционально замкнутых (замкнутых) подмножеств пространства X. Семейство $\{B_i\}_{i=1}^{n+2}$, где $B_{n+2} = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$, состоит из функционально замкнутых (замкнутых) в X множеств, и выполняется условие $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \varnothing$. Значит, по следствию 7.2.14 и теореме 7.1.4, найдется функционально открытое (открытое) покрытие $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ пространства X, такое, что $\bigcap_{i=1}^{n+2} U_i = \varnothing$ и $B_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n+2$.

Семейство $\{V_i\}_{i=1}^{n+2}$, где $V_i = U_i \setminus A_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n+1$ и $V_{n+2} = U_{n+2}$, является функционально открытым (открытым) покрытием пространства X. Пусть $\{F_i\}_{i=1}^{n+2}$ — какое-нибудь функционально замкнутое (замкнутое) ужатие последнего покрытия. Положим при $i = 1, 2, \ldots, n+1$

$$(10) \qquad E_i = F_{n+2} \setminus U_i, \quad C_i = A_i \cup E_i \quad \text{и} \quad D_i = B_i \cup F_i.$$

Так как

$$C_i \cap D_i = (A_i \cup E_i) \cap (B_i \cup F_i) = (A_i \cap B_i) \cup \\ \cup (A_i \cap F_i) \cup (E_i \cap B_i) \cup (E_i \cap F_i) = \varnothing,$$

найдется, по теореме 1.5.13, непрерывная функция $f_i\colon X \to I$ для $i = 1, 2, \ldots, n+1$, такая, что $f_i(C_i) \subset \{0\}$ и $f_i(D_i) \subset \{1\}$. Множество

$$(11) \qquad L_i = f_i^{-1}(1/2) \subset X \setminus (C_i \cup D_i)$$

является функционально замкнутой (замкнутой) перегородкой между множествами A_i и B_i при $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Из (10), равенства $\bigcap_{i=1}^{n+2} U_i = \varnothing$ и включения $F_{n+2} \subset U_{n+2}$ получаем

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = F_{n+2} \setminus \bigcap_{i=1}^{n+1} U_i = F_{n+2}.$$

Следовательно, в силу (10) и (11),

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} (C_i \cup D_i) \subset X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i\right) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = \varnothing,$$

а это показывает, что условие теоремы необходимо для неравенства $\dim X \leqslant n$.

Рассмотрим теперь произвольное тихоновское (нормальное) пространство X, удовлетворяющее условию теоремы. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ — любое $(n+2)$-элементное функционально открытое (открытое) покрытие пространства X. Возьмем какое-нибудь функционально замкнутое (замкнутое) ужатие $\{B_i\}_{i=1}^{n+2}$ покрытия $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ и положим

$$A_i = X \setminus U_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Последовательность (A_1, B_1), (A_2, B_2), ..., (A_{n+1}, B_{n+1}) состоит из $n+1$ пар непересекающихся функционально замкнутых (замкнутых) подмножеств пространства X. Значит, при $i = 1, 2, \ldots, n+1$ существуют множества V_i, W_i, функционально открытые по лемме 7.2.12 (открытые), удовлетворяющие условиям

$$(12) \qquad A_i \subset V_i, \quad B_i \subset W_i, \quad V_i \cap W_i = \varnothing \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

и такие, что $\bigcap_{i=1}^{n+1} [X \setminus (V_i \cup W_i)] = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} (V_i \cup W_i) = \varnothing$, т. е.

$$(13) \qquad \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i = X.$$

Из (13), (12) и включения $B_{n+2} \subset U_{n+2}$ вытекает, что

$$\left[U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i\right] \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i = \left[U_{n+2} \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i\right] \cap$$
$$\cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i\right] \supset \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = X.$$

Следовательно, семейство $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$, где

$$W_{n+2} = U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i,$$

является функционально открытым (открытым) ужатием покрытия $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$. Кроме того, из (12) следует, что

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i \cap \left[U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i\right] \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i = \varnothing;$$

таким образом, $\dim X \leqslant n$ в силу леммы 7.2.13. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теорема 7.2.1 доказана Чехом в [1933]; приведенное выше доказательство принадлежит Хаберу (цитировано Энгелькингом в [1973]). Теорема о счетной сумме для размерности ind была доказана Менгером в [1924] и Урысоном в [1926] (объявлено в [1922]) для метризуемых компактов; она была обобщена на случай сепарабельных метризуемых пространств Тумаркиным в [1926] (объявлено в [1925]) и Гуревичем в [1927]. Лемма 7.2.2 доказана Катетовым в [1952]; теорема 7.2.3 получена независимо Моритой в [1950a] и Катетовым в [1952]. Теорема 7.2.4 была доказана Даукером в [1947]. Теорема 7.2.7 доказана Менгером в [1924] и Урысоном в [1926] (объявлено в [1922]) для метризуемых компактов; она была распространена на сепарабельные метризуемые пространства Гуревичем в [1927b]. Для компактов неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ было установлено П. С. Александровым в [1941], а его обобщение на линделёфовы пространства принадлежит Морите [1950] и Ю. М. Смирнову [1951b]. Теоремы 7.2.8 и 7.2.9 обе принадлежат Веденисову; первая из них была доказана в [1939], вторая — в [1941]. Теорема 7.2.15 была установлена Эйленбергом и Отто в [1938] для сепарабельных метризуемых пространств; обобщение ее на нормальные пространства появилось в работе Хеммингсена [1946] (которая содержит также следствие 7.2.14). Приведенное нами доказательство этой теоремы взято из работы Голштынского [1966]. Важность теоремы 7.2.15 — в том, что через теорему о продолжении отображений в S^n (см. задачу 7.4.13) она ведет к гомологической характеристике размерности.

Теорема о счетной сумме для размерности Ind выполняется в совершенно нормальных пространствах (Чех [1932] (объявлено в [1931])) и в наследственно паракомпактных хаусдорфовых пространствах (Даукер [1955]). Теорема о локально конечной сумме для Ind тоже выполняется в названных двух классах пространств (Кимура [1963]). Доказательства этих утверждений можно найти в книге Энгелькинга [1978]. В классе всех компактов не выполняется даже теорема о конечной сумме для размерности Ind (см. задачу 7.4.5).

Размерность ind не удовлетворяет теореме о конечной сумме ни в классе компактов (см. задачу 7.4.5; более простой пример нормального пространства, не удовлетворяющего этой теореме, приведен в упр. 7.2.C), ни в классе метризуемых пространств. Последнее — как замечено Ван Дауэном в [1973] и Пшимусинским в [1974] — является простым следствием того, что существует метризуемое пространство X, для которого $\operatorname{ind} X \neq \operatorname{Ind} X$ (см. замечания к § 7.3).

Малая индуктивная размерность ind — с которой теория размерности началась — оказалась впоследствии не столь важной, как размерности dim и Ind.

УПРАЖНЕНИЯ

7.2.A. Пусть X — тихоновское пространство и M — его подпространство, удовлетворяющее условиям: $\dim M \leqslant n$ и каждая непрерывная функция $f\colon M \to I$ непрерывно продолжается на X. Покажите, что для каждого функционально открытого покрытия $\{U_i\}_{i=1}^k$ пространства X существуют семейство $\{V_i\}_{i=1}^k$ функционально открытых множеств и функционально замкнутое множество F, такие, что

$$V_i \subset U_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad M \subset F \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i \quad \text{и}$$

$$\operatorname{ord}\left(\{V_i\}_{i=1}^k\right) \leqslant n.$$

7.2.B (Катетов [1950a]). Покажите, что если тихоновское пространство X обладает счетным замкнутым покрытием $\{M_j\}_{j=1}^\infty$, таким, что $\dim M_j \leqslant n$ и каждая непрерывная функция $f\colon M_j \to I$ непрерывно продолжается на X при $j = 1, 2, \ldots$, то $\dim X \leqslant n$.

Указание. Видоизмените доказательство теоремы 7.2.1 и примените упр. 7.2.A.

Можно также применить теорему 7.1.17 и воспользоваться тем фактом, что каждое σ-компактное регулярное пространство нормально.

7.2.C (Пшимусинский [1974]). Пусть Y и Y^* — пространства, определенные в примере 6.2.20. Обозначим через X пространство, которое получается при отождествлении в точки замкнутых подмножеств $W \times \{0\}$ и $W \times \{1\}$ подпространства $Y \cup (\{\omega_1\} \times \{0, 1\})$ пространства Y^*. Покажите, что пространство X нормально, $\operatorname{ind} X = 1$, но тем не менее X можно представить в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 замкнуты в X и $\operatorname{ind} X_1 = 0 = \operatorname{ind} X_2$ (см. задачу 7.4.5).

7.2.D. (a) (Даукер [1947]). Заметьте, что нормальное пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$ в том и только том случае, если в каждое звездно конечное открытое покрытие пространства X можно вписать звездно конечное открытое покрытие порядка $\leqslant n$.

(b) (Пасынков [1965]). Покажите, что тихоновское пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$ в том и только том случае, если в каждое локально конечное функционально открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное функционально открытое покрытие порядка $\leqslant n$.

Указание (Р. Поль — цитировано Энгелькингом в [1973]). Возьмите произвольное локально конечное функционально открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ пространства X; рассмотрите функционально замкнутое ужатие $\{F_s\}_{s \in S}$ покрытия $\{U_s\}_{s \in S}$ (см. упр. 7.1.B) и непрерывные функции f_s: $X \to I$, такие, что $f_s(F_s) \subset \{1\}$ и $f_s(X \setminus U_s) \subset \{0\}$. Определите псевдометрику ρ на множестве X правилом $\rho(x, y) = \sum_{s \in S} |f_s(x) - f_s(y)|$ и рассмотрите отображение f: $X \to Y = X/\rho$ (см. упр. 4.2.I). Возьмите непрерывное продолжение F: $\beta X \to \beta Y$ отображения f и примените теоремы 5.1.3, 5.1.35, 7.1.17 и 7.2.4.

Для определения f можно воспользоваться также упр. 5.1.J(b).

7.2.E. Заметьте, что каждый сильно нульмерный паракомпакт сильно паракомпактен.

7.2.F (Морита [1950a]). Усильте теорему 7.2.7, показав, что неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ выполняется для каждого сильно паракомпактного хаусдорфова пространства X.

Указание. Видоизмените лемму 7.2.5, примените леммы 5.3.8, 5.3.9 и теорему 7.1.9.

7.2.G (А. Х. Стоун [1962a]). Докажите, что каждое сильно нульмерное пространство X веса $\mathfrak{m} > \aleph_0$, метризуемое полной метрикой и обладающее тем свойством, что $w(U) = \mathfrak{m}$ для каждого непустого открытого множества $U \subset X$, гомеоморфно пространству Бэра $B(\mathfrak{m})$ (см. упр. 6.2.A(b) и 4.3.G).

Указание. Видоизмените конструкцию из указания к упр. 4.3.G; примените упр. 4.1.H и теорему 7.2.4.

7.3. РАЗМЕРНОСТЬ МЕТРИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ

Начнем с теоремы, характеризующей размерность dim метризуемых пространств в терминах специальных последовательностей покрытий. Приведенные в этой теореме характеристики будут применены при доказательстве теоремы Катетова — Мориты, утверждающей, что $\operatorname{Ind} X = \dim X$ для каждого метризуемого пространства X; эта теорема является одной из важнейших теорем теории размерности. Отметим, что условия (ii) и (iii) в теореме 7.3.1 сформулированы в терминах метрик; чисто топологические характеристики этого типа формулируются ниже в упр. 7.3.A.

7.3.1. Теорема. *Для каждого метризуемого пространства X следующие условия равносильны:*

(i) $\dim X \leqslant n$.

(ii) *Для каждой метрики* ρ *на пространстве* X *существует последовательность* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ *локально конечных открытых покрытий пространства* X, *такая, что* $\operatorname{ord}\mathcal{U}_i \leqslant n$, $\delta(U) < 1/i$ *для всех* $U \in \mathcal{U}_i$ *и для каждого* $U \in \mathcal{U}_{i+1}$ *найдется* $V \in \mathcal{U}_i$, *содержащее* $\bar{U}$.

(iii) *Существуют метрика* ρ *на пространстве* X *и последовательность* $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots$ *открытых покрытий пространства* X, *такие, что* $\operatorname{ord}\mathcal{W}_i \leqslant n$, $\delta(W) < 1/i$ *для всех* $W \in \mathcal{W}_i$ *и* $\mathcal{W}_{i+1}$ *вписано в* $\mathcal{W}_i$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что (i)$\Rightarrow$(ii). Последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ будет определена по индукции. Предположим, что $k = 1$ или что $k > 1$ и покрытия $\mathcal{U}_i$ уже определены при $i < k$. Для каждой точки $x \in X$ возьмем ее окрестность U_x, такую, что $\delta(U_x) < 1/k$ и $\bar{U}_x$ содержится в некотором члене семейства $\mathcal{U}_{k-1}$, если $k > 1$. Из теорем 5.1.3 и 7.2.4 вытекает, что в покрытие $\{U_x\}_{x \in X}$ пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие $\mathcal{U}_k$ порядка $\leqslant n$. Полученная таким образом последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ удовлетворяет условию (ii).

Так как импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидна, остается показать, что (iii)$\Rightarrow$(i).

При каждом i возьмем отображение f_i^{i+1} множества $\mathcal{W}_{i+1}$ в множество $\mathcal{W}_i$, такое, что $W \subset f_i^{i+1}(W)$ при всех $W \in \mathcal{W}_{i+1}$. Положим $f_i^k = f_i^{i+1} f_{i+1}^{i+2} \ldots f_{k-1}^k$ при $i < k$ и $f_i^i(W) = W$ при $W \in \mathcal{W}_i$. Очевидно,

$$W \subset f_i^k(W) \quad \text{для всех} \quad W \in \mathcal{W}_k \quad \text{и} \quad i \leqslant k. \tag{1}$$

Пусть $\{H_j\}_{j=1}^l$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Множества $X_1, X_2, \ldots$, где

$$X_k = \bigcup \{W \in \mathcal{W}_k\colon \text{существует } j \leqslant l, \text{ такое, что } \operatorname{St}(W, \mathcal{W}_k) \subset H_j\}, \tag{2}$$

составляют открытое покрытие пространства X. Рассмотрим подсемейства

$$\mathcal{U}_k = \{U \in \mathcal{W}_k\colon U \cap X_k \neq \varnothing\} \quad \text{и}$$

$$\mathcal{V}_k = \Big\{V \in \mathcal{U}_k\colon V \cap \Big(\bigcup_{j<k} X_j\Big) = \varnothing\Big\},$$

где $k = 1, 2, \ldots$. Для каждого $U \in \mathcal{U}_k$ имеем $f_1^k(U) \cap \Big(\bigcup_{j<1} X_j\Big) = \varnothing$; обозначим через $i(U)$ наибольшее целое число $i \leqslant k$, такое, что $f_i^k(U) \cap \Big(\bigcup_{j<i} X_j\Big) = \varnothing$. Оказывается, $f_{i(U)}^k(U) \cap X_{i(U)} \neq \varnothing$. Действительно, если $i(U) < k$, то равенство $f_{i(U)}^k(U) \cap X_{i(U)} = \varnothing$

противоречит максимальности $i(U)$, и если $i(U)=k$, то $f^k_{i(U)}(U)\cap X_{i(U)}=f^k_k(U)\cap X_k=U\cap X_k\neq\varnothing$. Таким образом,

$$f^k_{i(U)}(U)\in\mathscr{V}_{i(U)}. \tag{3}$$

Для каждого $V\in\mathscr{V}_i$ возьмем открытое множество

$$V^*=\bigcup_{k=i}^{\infty}\left[\bigcup\{U\cap X_k\colon U\in\mathscr{U}_k,\ f^k_i(U)=V \text{ и } i(U)=i\}\right]. \tag{4}$$

Так как $V\cap X_i\neq\varnothing$, то, в силу (2), найдутся $W\in\mathscr{W}_i$ и $j(V)\leqslant l$, для которых $V\cap W\neq\varnothing$ и $V\subset \mathrm{St}(W,\mathscr{W}_i)\subset H_{j(V)}$. В силу (1), имеем $V^*\subset V$; значит, $V^*\subset H_{j(V)}$. Так как $\mathscr{V}_i\cap\mathscr{V}_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то множество V^* и целое число $j(V)$ корректно определены для каждого $V\in\mathscr{V}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{V}_i$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что семейство $\{V_j\}_{j=1}^{l}$, где $V_j=\bigcup\{V^*\colon V\in\mathscr{V} \text{ и } j(V)=j\}\subset H_j$, покрывает X и имеет порядок $\leqslant n$, или — равносильное условие — что $\mathscr{V}^*=\{V^*\colon V\in\mathscr{V}\}$ — покрытие пространства X, порядок которого $\leqslant n$.

Для произвольного $x\in X$ возьмем целое число k, такое, что

$$x\in X_k\setminus\bigcup_{j<k}X_j, \tag{5}$$

и множество $U\in\mathscr{W}_k$, содержащее точку x. Так как $U\cap X_k\neq\varnothing$, то $U\in\mathscr{U}_k$. Из (3) и (4) следует, что $x\in U\cap X_k\subset\left(f^k_{i(U)}(U)\right)^*\in\mathscr{V}^*$; таким образом, $\mathscr{V}^*$ покрывает пространство X.

Рассмотрим любое непустое пересечение $V_1^*\cap V_2^*\cap\ldots\cap V_h^*$, где $V_i\in\mathscr{V}_{m_i}$ и $V_i\neq V_j$ при $i\neq j$, и возьмем точку x в этом пересечении. Из определения семейства $\mathscr{V}_{m_i}$ следует, что целое число k в формуле (5) удовлетворяет неравенствам $m_i\leqslant k$ при $i=1, 2, \ldots, h$. В силу (4), существуют множества $U_i\in\mathscr{U}_{k_i}$, такие, что $f^{k_i}_{m_i}(U_i)=V_i$, $i(U_i)=m_i$ и $x\in U_i\cap X_{k_i}$. Так как $x\in X_{k_i}$, из (5) вытекает, что $k\leqslant k_i$. Все множества $W_1, W_2, \ldots, W_h$, где $W_i=f^{k_i}_k(U_i)\in\mathscr{W}_k$, содержат точку x; значит, учитывая, что $\operatorname{ord}\mathscr{W}_k\leqslant n$, достаточно показать, что $W_i\neq W_j$ при $i\neq j$. Заметим, что множества W_i принадлежат семейству $\mathscr{U}_k$ и что $i(W_i)=i(U_i)=m_i$ по определению $i(U_i)$. Следовательно, $W_i\neq W_j$, если $m_i\neq m_j$. При $m_i=m_j$ мы тоже имеем $W_i\neq W_j$, так как тогда

$$f^k_{m_i}(W_i)=f^{k_i}_{m_i}(U_i)=V_i\neq V_j=f^{k_j}_{m_j}(U_j)=f^k_{m_j}(W_j). \ \blacksquare$$

7.3.2. Теорема Катетова — Мориты. *Для каждого метризуемого пространства X имеет место равенство* $\operatorname{Ind} X = \dim X$.

Доказательство. По теореме 7.2.8, достаточно показать, что $\operatorname{Ind} X \leqslant \dim X$. Очевидно, можно предположить, что $\dim X < \infty$. Применим индукцию по отношению к $\dim X$. Если $\dim X = -1$, то $X = \varnothing$ и $\operatorname{Ind} X \leqslant \dim X$. Предположим, что наше неравенство выполняется для всех метризуемых пространств, для которых размерность в смысле покрытий $\leqslant n-1$. Рассмотрим произвольное метризуемое пространство X, такое, что $\dim X = n$, замкнутое множество $A \subset X$ и открытое множество $V \subset X$, содержащее A.

Пусть σ — произвольная метрика на пространстве X и $f\colon X \to I$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \{1\}$, где $B = X \setminus V$. Формула $\rho(x, y) = \sigma(x, y) + |f(x) - f(y)|$ определяет метрику на пространстве X, и, по теореме 7.3.1, существует последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ локально конечных открытых покрытий пространства X, такая, что $\operatorname{ord} \mathcal{U}_i \leqslant n$, $\delta(U) < 1/i$ при всех $U \in \mathcal{U}_i$, где δ обозначает диаметр по отношению к метрике ρ, и для каждого $U \in \mathcal{U}_{i+1}$ найдется $V \in \mathcal{U}_i$, содержащее $\overline{U}$.

Положим $K_0 = A$, $M_0 = B$ и при $i \geqslant 1$ положим $K_i = X \setminus H_i$ и $M_i = X \setminus G_i$, где

$$G_i = \bigcup \{U \in \mathcal{U}_i\colon \overline{U} \cap M_{i-1} = \varnothing\} \quad \text{и}$$

$$H_i = \bigcup \{U \in \mathcal{U}_i\colon \overline{U} \cap M_{i-1} \neq \varnothing\}.$$

Таким образом, определены две последовательности $K_0, K_1, \ldots$ и $M_0, M_1, \ldots$. Заметим, что

(6) если $U \in \mathcal{U}_i$ и $\overline{U} \cap M_{i-1} \neq \varnothing$, то $\overline{U} \cap K_{i-1} = \varnothing$.

Утверждение (6) при $i = 1$ вытекает из определения метрики ρ, так как никакое множество диаметра, меньшего 1, не пересекает множества A и B одновременно. Если $U \in \mathcal{U}_i$, причем $i > 1$ и $\overline{U} \cap M_{i-1} \neq \varnothing$, то для любого $V \in \mathcal{U}_{i-1}$, содержащего $\overline{U}$, имеем $V \cap M_{i-1} \neq \varnothing$, так что V не содержится в G_{i-1}. Отсюда следует, что $V \subset H_{i-1}$, а это дает равенство $\overline{U} \cap K_{i-1} = \varnothing$.

Из локальной конечности семейств $\mathcal{U}_i$, определений множеств G_i и H_i и утверждения (6) вытекает, что $\overline{G}_i \cap M_{i-1} = \varnothing = \overline{H}_i \cap K_{i-1}$ при $i = 1, 2, \ldots$, а это влечет за собой соотношения $K_{i-1} \subset X \setminus \overline{H}_i = \operatorname{Int} K_i$ и $M_{i-1} \subset X \setminus \overline{G}_i = \operatorname{Int} M_i$. Кроме того, так как $G_i \cup H_i = X$, то $K_i \cap M_i = \varnothing$. Следовательно, множества $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ и $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ открыты, не пересекаются и содержат множества A и B соответственно. Имеем, таким образом, $A \subset K \subset V$ и $\operatorname{Fr} K \subset L = X \setminus (K \cup M)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что $\dim L \leqslant n-1$, так как, по теореме 7.1.3 и индуктивному предположению, отсюда будет следовать, что $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} K \leqslant \operatorname{Ind} L \leqslant \dim L \leqslant n-1$.

Так как $K \cup M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (K_i \cup M_i)$, имеем $L = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$, где $L_i = X \setminus (K_i \cup M_i) = G_i \cap H_i$. При $i = 1, 2, \ldots$ семейство

$$\mathscr{W}_i = \{U \cap L\colon U \in \mathscr{U}_i \text{ и } \overline{U} \cap M_{i-1} \neq \varnothing\}$$

является открытым покрытием пространства $L \subset H_i$ и $\operatorname{ord}\mathscr{W}_i \leqslant n-1$, так как любая точка $x \in L \subset L_i \subset G_i$ принадлежит по крайней мере к одному $U \in \mathscr{U}_i$, такому, что $\overline{U} \cap M_{i-1} = \varnothing$. Если $U \in \mathscr{U}_{i+1}$ и $\overline{U} \cap M_i \neq \varnothing$, то для каждого $V \in \mathscr{U}_i$, содержащего $\overline{U}$, имеем $V \cap M_i \neq \varnothing$; значит, V не содержится в G_i, откуда следует, что $\overline{V} \cap M_{i-1} \neq \varnothing$, т. е. что $V \cap L \in \mathscr{W}_i$. Значит, покрытие $\mathscr{W}_{i+1}$ вписано в $\mathscr{W}_i$, и, так как, очевидно, $\delta(W) < 1/i$ при $W \in \mathscr{W}_i$, то $\dim L \leqslant n-1$ по теореме 7.3.1. ∎

Из теорем 7.1.2, 7.2.7, 7.3.2 и следствия 4.1.16 вытекает

7.3.3. Теорема. *Для каждого сепарабельного метризуемого пространства X имеют место равенства* $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$. ∎

В связи с теоремами 7.3.2 и 7.3.3 возникает вопрос, может ли малая индуктивная размерность метризуемого пространства отличаться от большой индуктивной размерности и размерности в смысле покрытий этого пространства. Оказывается, существует метризуемое полной метрикой пространство X, такое, что $\operatorname{ind} X = 0$, но $\operatorname{Ind} X = \dim X = 1$. Однако определение этого пространства и вычисление его размерностей ind и Ind связаны с большими трудностями и в этой книге обсуждаться не будут.

Так как каждое подпространство пространства X, удовлетворяющего условию (iii) теоремы 7.3.1, тоже удовлетворяет этому условию, из теорем 7.3.1 и 7.3.2 вытекает

7.3.4. Теорема. *Для каждого подпространства M произвольного метризуемого пространства X выполняется неравенство* $\operatorname{Ind} M \leqslant \operatorname{Ind} X$. ∎

Заметим также, что из теорем 7.2.1, 7.2.3 и 7.3.2 получается

7.3.5. Теорема о σ-локально конечной сумме. *Если метризуемое пространство X допускает σ-локально конечное замкнутое покрытие $\{F_s\}_{s \in S}$, такое, что* $\operatorname{Ind} F_s \leqslant n$ *при всех* $s \in S$, *то* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$. ∎

Докажем теперь теорему, характеризующую размерность Ind метризуемых пространств в терминах специальных баз и в терминах разбиений на множества меньшей размерности.

7.3.6. Лемма. *Если метризуемое пространство X обладает σ-локально конечной базой $\mathscr{B}$, состоящей из открыто-замкнутых множеств, то* $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$, где семейства $\mathscr{B}_i$ локально конечны. Рассмотрим любое замкнутое множество $A \subset X$ и открытое множество $V \subset X$, содержащее A. При $i = 1, 2, \ldots$ положим

$$(7)\qquad \begin{aligned} V_{2i} &= \bigcup \{U \in \mathscr{B}_i\colon\ U \subset V\} \quad \text{и} \\ V_{2i+1} &= \bigcup \{U \in \mathscr{B}_i\colon\ U \cap A = \varnothing\}. \end{aligned}$$

Множества V_{2i} и V_{2i+1} открыто-замкнуты и удовлетворяют условиям

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{2i} = V \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{2i+1} = X \setminus A,$$

так что $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ является покрытием пространства X. Семейство $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $U_i = V_i \setminus \bigcup_{j<i} V_j$, образует покрытие пространства X попарно непересекающимися открыто-замкнутыми множествами. Из (7) следует, что множество $U = \bigcup\{U_i\colon\ U_i \subset V\}$ открыто-замкнуто и удовлетворяет включениям $A \subset U \subset V$. ∎

7.3.7. Лемма. *Пусть X — метризуемое пространство и Z — подпространство пространства X. Если* $\operatorname{Ind} Z \leqslant 0$, *то для каждого замкнутого множества $A \subset X$ и произвольного открытого множества $V \subset X$, содержащего A, найдется открытое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ и $Z \cap \operatorname{Fr} U = \varnothing$.*

Доказательство. Возьмем открытые множества $W_1, W_2 \subset X$, удовлетворяющие включениям

$$A \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W_2 \subset \overline{W}_2 \subset V.$$

Так как $\operatorname{Ind} Z = 0$, найдется открыто-замкнутое в Z множество U_0, такое, что $Z \cap \overline{W}_1 \subset U_0 \subset Z \cap W_2$. Очевидно,

$$Z \setminus U_0 \subset Z \setminus (Z \cap W_1) = Z \setminus W_1 \subset X \setminus W_1 \quad \text{и} \quad \overline{U}_0 \subset \overline{W}_2.$$

Легко проверяется, что множества $A \cup U_0$ и $[(X \setminus V) \cup (Z \setminus U_0)]$ отделены. В силу следствия 4.1.13 и теоремы 2.1.7, найдется открытое множество $U \subset X$, такое, что $A \cup U_0 \subset U$ и $\overline{U} \cap [(X \setminus V) \cup \cup (Z \setminus U_0)] = \varnothing$. Ясно, что множество U обладает требуемыми свойствами. ∎

7.3.8. Теорема. *Для каждого метризуемого пространства X и произвольного целого числа $n \geqslant 0$ следующие условия равносильны:*

(i) $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

(ii) *Пространство X обладает σ-локально конечной базой $\mathscr{B}$, такой, что* $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n - 1$ *при всех* $U \in \mathscr{B}$.

(iii) $X = Y \cup Z$, *где* $\operatorname{Ind} Y \leqslant n-1$ и $\operatorname{Ind} Z \leqslant 0$.

Доказательство. Покажем, что (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть X — метризуемое пространство, для которого $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, и ρ — произвольная метрика на пространстве[1]) X. Из теоремы 5.1.3 следует, что при каждом $i = 1, 2, \ldots$ пространство X обладает локально конечным открытым покрытием $\mathscr{V}_i = \{V_s\}_{s \in S_i}$, состоящим из множеств диаметра, меньшего $1/i$. По теореме 1.5.18, при каждом i найдется замкнутое ужатие $\{F_s\}_{s \in S_i}$ покрытия $\mathscr{V}_i$. Так как $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, то при каждом $s \in S_i$ существует открытое множество $U_s \subset X$, такое, что

$$F_s \subset U_s \subset V_s \quad \text{и} \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U_s \leqslant n-1.$$

Семейство $\mathscr{B}_i = \{U_s\}_{s \in S_i}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, состоящее из множеств диаметра, меньшего $1/i$. Значит, $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ есть σ-локально конечная база пространства X.

Для доказательства импликации (ii)$\Rightarrow$(iii) заметим, что по теореме 7.3.5 подпространство $Y = \bigcup \{\operatorname{Fr} U\colon U \in \mathscr{B}\} \subset X$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Ind} Y \leqslant n-1$ и что подпространство $Z = X \setminus Y$ обладает σ-локально конечной базой $\{Z \cap U\colon U \in \mathscr{B}\}$, состоящей из открыто-замкнутых множеств. Значит, $\operatorname{Ind} Z \leqslant 0$ по лемме 7.3.6.

Импликация (iii)$\Rightarrow$(i) прямо следует из леммы 7.3.7 и теоремы 7.1.3. ∎

Последняя теорема влечет за собой такой результат:

7.3.9. Теорема о разложении. *Метризуемое пространство X удовлетворяет неравенству $\operatorname{Ind} X \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если $X = Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_{n+1}$, где $\operatorname{Ind} Z_i \leqslant 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n+1$.* ∎

Из теоремы о разложении вытекает в свою очередь

7.3.10. Теорема о сложении. *Для каждой пары X, Y подпространств метризуемого пространства имеет место неравенство*

$$\operatorname{Ind}(X \cup Y) \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y + 1. \ ∎$$

Следующая наша теорема обобщает лемму 7.3.7.

7.3.11. Теорема об отделении. *Пусть X — метризуемое пространство и M — подпространство пространства X. Тогда если $\operatorname{Ind} M \leqslant n \geqslant 0$, то для каждого замкнутого множества $A \subset X$ и произвольного открытого множества $V \subset X$, содержащего A, най-*

---

[1]) Предполагается, что ρ порождает топологию пространства X. — *Прим. перев.*

дется открытое множество $U \subset X$, *такое, что* $A \subset U \subset \bar{U} \subset V$ *и* $\operatorname{Ind}(M \cap \operatorname{Fr} U) \leqslant n-1$.

Доказательство. По теореме 7.3.8, имеем $M = Y \cup Z$, где $\operatorname{Ind} Y \leqslant n-1$ и $\operatorname{Ind} Z \leqslant 0$. Открытое множество U, такое, как в лемме 7.3.7, удовлетворяет также и требованиям нашей теоремы, так как $M \cap \operatorname{Fr} U \subset M \setminus Z \subset Y$ и $\operatorname{Ind}(M \cap \operatorname{Fr} U) \leqslant n-1$ по теореме 7.1.3. ∎

Из теоремы об отделении мы получаем следующий вывод, являющийся, по теореме Катетова — Мориты, частным случаем теоремы 7.2.15.

7.3.12. Следствие. *Для каждого набора*

$$(A_1, B_1),\ (A_2, B_2),\ \ldots,\ (A_{n+1}, B_{n+1})$$

$n+1$ *пар непересекающихся замкнутых подмножеств метризуемого пространства* X, *где* $\operatorname{Ind} X \leqslant n \geqslant 0$, *найдутся открытые множества* $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$, *такие, что*

$$A_i \subset U_i \subset \bar{U}_i \subset X \setminus B_i \quad \textit{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

и $\operatorname{Fr} U_1 \cap \operatorname{Fr} U_2 \cap \ldots \cap \operatorname{Fr} U_{n+1} = \varnothing$. ∎

7.3.13. Пример. Из 7.3.3 и 7.1.19 или из 7.3.3 и 7.2.10 следует, что $\operatorname{Ind} R^n \leqslant n$, $\operatorname{Ind} S^n \leqslant n$ и $\operatorname{Ind} I^n \leqslant n$ для каждого натурального числа n.

Разложение пространства R^n на $n+1$ нульмерных множеств (см. теорему 7.3.9) дается, согласно примеру 7.2.11, формулой

$$R^n = Q_0^n \cup Q_1^n \cup \ldots \cup Q_n^n.$$

Последняя формула дает также другое доказательство неравенства $\operatorname{Ind} R^n \leqslant n$. ∎

7.3.14. Пример. Покажем, что пространство Бэра $B(\mathfrak{m})$, определенное в примере 4.2.12, удовлетворяет равенству $\operatorname{Ind} B(\mathfrak{m}) = 0$ при всех $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Рассмотрим произвольные две точки $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ пространства $B(\mathfrak{m})$ и вещественное число r, для которого $0 < r \leqslant 1$. Если пересечение $B(x, r) \cap B(y, r)$ непусто, то найдется точка $z = \{z_i\} \in B(\mathfrak{m})$, такая, что $x_1 = z_1 = y_1$, $x_2 = z_2 = y_2$, $\ldots$, $x_k = z_k = y_k$, где k — целое число, для которого $\frac{1}{k+1} < r \leqslant \frac{1}{k}$; тогда $B(x, r) = B(y, r)$. Следовательно, в $B(\mathfrak{m})$ любые два r-шара либо не пересекаются, либо совпадают. В частности, при каждом натуральном i семейство всех $1/i$-шаров является покрытием пространства $B(\mathfrak{m})$ попарно непересекающимися открыто-замкнутыми множествами. Следовательно, по лемме 7.3.6, $\operatorname{Ind} B(\mathfrak{m}) = 0$. ∎

7.3.15. Теорема. *Пространство Бэра* $B(\mathfrak{m})$ *универсально для всех метризуемых пространств* X, *таких, что* $\operatorname{Ind} X = 0$ *и* $w(X) = \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Доказательство. Ввиду последнего примера достаточно показать, что каждое метризуемое пространство X, для которого $\operatorname{Ind} X = 0$ и $w(X) = \mathfrak{m}$, вкладывается в $B(\mathfrak{m})$.

Пусть ρ — произвольная метрика на пространстве X. Из теоремы 7.1.10 и импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в теореме 7.3.1 следует, что при $i = 1, 2, \ldots$ существуют покрытия $\mathscr{V}_i$ пространства X попарно непересекающимися открыто-замкнутыми множествами диаметра, меньшего $1/i$. Такие покрытия можно также определить прямо: в соответствии с теоремой 7.3.8 существует σ-локально конечная база $\mathscr{B}$ пространства X, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Семейство $\mathscr{B}_i = \{U \in \mathscr{B}\colon \delta(U)\, 1/i\}$ можно представить как объединение локально конечных семейств $\mathscr{B}_{i,1}$, $\mathscr{B}_{i,2}, \ldots$. Расположим члены семейства $\mathscr{B}_i$ в трансфинитную последовательность $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha, \ldots, \alpha < \xi$, взяв сначала все члены семейства $\mathscr{B}_{i,1}$, затем все члены семейства $\mathscr{B}_{i,2}$ и т. д. Ясно, что при каждом $\alpha < \xi$ семейство $\{U_\beta\}_{\beta<\alpha}$ локально конечно; поэтому семейство $\mathscr{V}_i = \{V_\alpha\}_{\alpha<\xi}$, где $V_\alpha = U_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} U_\beta$, есть покрытие пространства X попарно непересекающимися открыто-замкнутыми множествами диаметра, меньшего $1/i$. По теореме 1.1.14, покрытие $\mathscr{V}_i$ содержит такое подпокрытие $\{V_s\}_{s\in S_i}$, что $|S_i| \leqslant \mathfrak{m}$.

Не теряя общности, можно предположить, что множество S_i является подмножеством дискретного пространства X_i мощности $\mathfrak{m}$, фигурирующего в определении пространства $B(\mathfrak{m})$ как произведения $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Ставя в соответствие каждой точке $x \in X$ индекс $s \in S_i$, такой, что $x \in V_s$, мы получаем непрерывное отображение $f_i\colon X \to X_i$. Легко видеть, что семейство $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ отделяет точки от замкнутых множеств; значит, по теореме 2.3.20, диагональное отображение $F = \mathop{\triangle}\limits_{i=1}^{\infty} f_i\colon X \to B(\mathfrak{m})$ является гомеоморфным вложением. ∎

Так как произведение $\aleph_0$ копий пространства $B(\mathfrak{m})$ гомеоморфно $B(\mathfrak{m})$, из теорем 7.3.4 и 7.3.15 вытекает

7.3.16. Теорема. *Произведение* $X = \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ *метризуемых пространств удовлетворяет условию* $\operatorname{Ind} X = 0$ *в том и только том случае, если* $\operatorname{Ind} X_i = 0$ *при* $i = 1, 2, \ldots$. ∎

Докажем еще одну теорему о размерности произведения метризуемых пространств.

7.3.17. Теорема. *Для любых двух метризуемых пространств X, Y, хотя бы одно из которых непусто, имеем*

$$\operatorname{Ind}(X \times Y) \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y.$$

Доказательство. Это неравенство очевидно, если $\operatorname{Ind} X = \infty$ или $\operatorname{Ind} Y = \infty$; поэтому можно предположить, что $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{Ind} Y$ конечны. Применим индукцию по числу $\operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$. Если $\operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y = -1$, то либо $X = \varnothing$, либо $Y = \varnothing$ и наше неравенство выполняется.

Предположим, что неравенство доказано для каждой пары метризуемых пространств, сумма больших индуктивных размерностей которых не больше $k - 1 \geqslant -1$, и рассмотрим метризуемые пространства X и Y, такие, что $\operatorname{Ind} X = m \geqslant 0$, $\operatorname{Ind} Y = n \geqslant 0$ и $m + n = k$. По теореме 7.3.8, у пространства X есть база $\mathscr{C} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}_i$, где семейства $\mathscr{C}_i$ локально конечны и $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant m - 1$ для каждого $U \in \mathscr{C}$. Аналогично, у пространства Y есть база $\mathscr{D} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{D}_j$, где все семейства $\mathscr{D}_j$ локально конечны и $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V \leqslant n - 1$ для каждого $V \in \mathscr{D}$. Семейство

$$\mathscr{B}_{i,j} = \{U \times V \colon U \in \mathscr{C}_i \text{ и } V \in \mathscr{D}_j\}$$

состоит из открытых в $X \times Y$ множеств и локально конечно. Так как

$$\operatorname{Fr}(U \times V) \subset (X \times \operatorname{Fr} V) \cup (\operatorname{Fr} U \times Y),$$

то для каждого $(U \times V) \in \mathscr{B}_{i,j}$, по теореме 7.3.5 и индуктивному предположению, имеем $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr}(U \times V) \leqslant k - 1$. Семейство $\mathscr{B} = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} \mathscr{B}_{i,j}$ является базой пространства $X \times Y$; значит, $\operatorname{Ind}(X \times Y) \leqslant k = m + n$ по теореме 7.3.8. ∎

Отметим, что неравенство в последней теореме нельзя заменить на равенство: существуют сепарабельные метризуемые пространства X и Y, такие, что $\operatorname{Ind}(X \times Y) < \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$ (см. упр. 7.3.G). Существуют даже метризуемые компакты с этим свойством, но они устроены гораздо сложнее.

Заметим также, что, по теореме Катетова — Мориты, все теоремы этого параграфа, начиная с теоремы 7.3.4, выполняются также и для размерности в смысле покрытий dim.

В завершение этого параграфа мы показываем, что размерности ind, Ind и dim евклидова n-пространства R^n (а также n-сферы S^n и n-куба I^n) все равны n. Этот факт оправдывает определения наших трех размерностных функций — действительно, размерностная функция, приписывающая R^n число, отличное от n, противоречила бы интуитивному представлению о размерности и была бы, следовательно, неприемлема. Пространства R^n, S^n и I^n — первые наши примеры пространств размерности, большей единицы; до сих пор мы не показали, что такие пространства существуют.

Доказательство того, что топологическая размерность пространства R^n равна n, требует более глубокого проникновения в строение этого пространства; при этом непременно потребуются некоторые комбинаторные рассуждения. Чтобы сохранить единообразие рассуждений, проводимых в этой книге, — а все они имеют теоретико-множественный характер, — мы выведем равенство $\operatorname{ind} R^n = \operatorname{Ind} R^n = \dim R^n = n$ (довольно легко) из теоремы Брауэра о неподвижной точке. Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке тоже требует некоторых комбинаторных или алгебраических рассуждений, но сам результат, вероятно, известен большинству читателей. Для полноты книги мы приводим элементарное комбинаторное доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке в приложении к этому параграфу.

7.3.18. Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Для каждого натурального числа n и каждого непрерывного отображения $f\colon I^n \to I^n$ найдется точка $x \in I^n$, такая, что $f(x) = x$.*

7.3.19. Теорема. *При каждом натуральном n имеют место равенства* $\operatorname{ind} R^n = \operatorname{Ind} R^n = \dim R^n = n$.

Доказательство. В силу теорем 7.3.3 и 7.1.3 и примера 7.3.13, достаточно показать, что $\operatorname{Ind} I^n > n-1$. Предположим, что $\operatorname{Ind} I^n \leqslant n-1$. При $i = 1, 2, \ldots, n$ положим

$$A_i = \{\{x_j\} \in I^n\colon\ x_i = 0\} \quad \text{и} \quad B_i = \{\{x_j\} \in I^n\colon\ x_i = 1\}.$$

По следствию 7.3.12, существуют открытые множества $U_1, U_2, \ldots$ $\ldots, U_n$, такие, что

$$A_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset I^n \setminus B_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и

$$\operatorname{Fr} U_1 \cap \operatorname{Fr} U_2 \cap \ldots \cap \operatorname{Fr} U_n = \varnothing. \tag{8}$$

Из предложения 2.1.13 следует, что при $i = 1, 2, \ldots, n$ формулы

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(x, \operatorname{Fr} U_i)}{\rho(x, \operatorname{Fr} U_i) + \rho(x, A_i)} + \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x \in \overline{U}_i, \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(x, \operatorname{Fr} U_i)}{\rho(x, \operatorname{Fr} U_i) + \rho(x, B_i)} + \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x \in I^n \setminus U_i, \end{cases}$$

где ρ — естественная (обычная) метрика на I^n, определяют непрерывные функции $f_i\colon I^n \to I$. Ясно, что

$$(9)\qquad f_i^{-1}(1/2) = \operatorname{Fr} U_i, \quad f_i(A_i) = \{1\} \quad \text{и} \quad f_i(B_i) = \{0\}.$$

Из формул (8) и (9) следует, что диагональное отображение $f = f_1 \triangle f_2 \triangle \ldots \triangle f_n\colon I^n \to I^n$ не принимает значения $a = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2) \in I^n$. Композиция $g\colon I^n \to I^n$ отображения f и проекции множества $I^n \setminus \{a\}$ из точки a на границу множества I^n — т. е. на множество $B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i)$ — удовлетворяет условию $g(I^n) \subset B$. В силу второй и третьей формул в (9), имеем $g(A_i) \subset B_i$ и $g(B_i) \subset A_i$. Последние три включения показывают, что $g(x) \neq x$ при всех $x \in I^n$, что противоречит теореме Брауэра о неподвижной точке. Следовательно, $\operatorname{Ind} I^n = n$. ∎

7.3.20. Следствие. *При каждом натуральном n выполняются равенства* $\operatorname{ind} S^n = \operatorname{Ind} S^n = \dim S^n = n$ *и* $\operatorname{ind} I^n = \operatorname{Ind} I^n = \dim I^n = n$. ∎

7.3.21. Следствие. *Для гильбертова куба $I^{\aleph_0}$ имеем* $\operatorname{ind} I^{\aleph_0} = \operatorname{Ind} I^{\aleph_0} = \dim I^{\aleph_0} = \infty$. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Равносильность условий (i) и (ii) теоремы 7.3.1 была установлена Даукером и Гуревичем в [1956], равносильность условий (i) и (iii) — Вопенкой в [1959]; приведенное нами доказательство получено путем небольшой адаптации рассуждения из работы Нагами и Робертса [1967]. Заметим, что предположение в (ii) и (iii) о том, что каждое покрытие вписано в предыдущее, существенно: Ситников в [1953] определил сепарабельное метрическое пространство размерности 2, которое при каждом натуральном i имеет открытое покрытие порядка 1, состоящее из множеств диаметра, меньшего $1/i$ (см. упр. 7.3.A(c)).

Теорема 7.3.2 доказана Катетовым в [1952] и Моритой в [1954]; наше доказательство, полученное комбинацией теоремы 7.3.1 и упрощенного рассуждения из статьи Даукера и Гуревича [1956], было опубликовано Энгелькингом в [1973] (эскиз другого доказательства, в котором удается обойтись без ссылки на теорему 7.3.1, дан в упр. 7.3.C(b)). Равенство размерностей ind и Ind для метризуемых компактов было объявлено Брауэром в [1924] (с указанием, что этот факт известен также Урысону). Приведенное здесь доказательство было дано Менгером в [1924] (неявно) и Урысоном в [1926]. Для сепарабельных метризуемых пространств равенство ind и Ind было установлено Тумаркиным в [1926] (объявлено в [1925]) и Гуревичем в [1927]. Равенство ind и dim для метризуемых компактов было доказано Урысоном в [1926] (в [1922] он объявил неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$); оно было обобщено на сепарабельные метризуемые пространства Гуревичем в [1927b]. Пример пространства X, метризуемого полной метрикой, для которого $\operatorname{ind} X = 0$ и $\operatorname{Ind} X = 1$, кратко описан Роем в [1962]; подробно он обсуждается в статье Роя [1968].

Теорема 7.3.4 установлена Чехом в [1932] (объявлено в 1931]). История теорем о сумме обсуждается в замечаниях к предыдущему параграфу. Для метризуемых компактов и размерности ind равносильность условий (i) и (iii) теоремы 7.3.8, а также теоремы 7.3.9 и 7.3.10, были установлены Урысоном в [1926] (объявлено в [1922]). Обобщение на сепарабельные метризуемые пространства принадлежит Тумаркину [1926] (объявлено в [1925]) и Гуревичу [1927]. Теорема 7.3.11 для метризуемых компактов и размерности ind была доказана Менгером в [1924] и обобщена на сепарабельные метризуемые пространства Гуревичем в [1927]. Для произвольных метризуемых пространств теоремы 7.3.9—7.3.11 и 7.3.15—7.3.17 установлены Катетовым в [1952] и Моритой в [1954]; теорема 7.3.8 доказана Моритой в [1954]. Для сепарабельных метризуемых пространств и размерности ind теорема 7.3.15 была доказана Серпинским в [1921], теорема 7.3.16 — Куратовским в [1933] и теорема 7.3.17 — Менгером в [1928]. Пример двумерных метризуемых компактов X и Y, таких, что произведение $X \times Y$ трехмерно, был приведен Понтрягиным в [1930]. Работа Брауэра [1913] содержит доказательство равенства $\operatorname{Ind} R^n = \dim R^n = n$ (см. замечания к § 7.1). Равенство $\operatorname{ind} R^n = n$ было доказано (без помощи результата Брауэра, из которого оно легко следует) Менгером в [1924] и Урысоном в [1925b] (объявлено в [1922]).

Теорема Брауэра о неподвижной точке установлена Брауэром в [1912]. Ее доказательство, данное в приложении, а также теорема 4 приложения принадлежат Кнастеру, Куратовскому и Мазуркевичу [1929]; лемма Шпернера была доказана Шпернером в [1928].

УПРАЖНЕНИЯ

7.3.A. (a) (Нагами и Робертс [1967]). Докажите, что метризуемое пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$ в том и только том случае, если X обладает сильным измельчением $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, таким, что $\operatorname{ord} \mathscr{W}_i \leqslant n$ и $\mathscr{W}_{i+1}$ вписано в $\mathscr{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Указание. Видоизмените доказательство теоремы 7.3.1.

(b) (Нагата [1956]). Докажите, что метризуемое пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$ в том и только том случае, если X обладает измельчением $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots$, таким, что $\operatorname{ord} \mathscr{W}_i \leqslant n$ и $\mathscr{W}_{i+1}$ звездно вписано (сильно звездно вписано) в $\mathscr{W}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Указание. См. доказательство теоремы 5.4.9.

(c) Заметьте, что метризуемый компакт X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$ в том и только том случае, если для каждой метрики ρ на пространстве X и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется открытое покрытие пространства X, порядок которого $\leqslant n$ и все члены имеют диаметр, меньший ε, или, что равносильно, в том и только том случае, если существует метрика ρ на пространстве X, обладающая указанным свойством.

(d) Убедитесь, что в (a) нельзя опустить предположение, что $\mathscr{W}_{i+1}$ вписано в $\mathscr{W}_i$.

7.3.B (Морита [1950a]). Докажите, что для каждого метризуемого пространства X, представимого в виде объединения σ-локально конечного семейства сильно паракомпактных замкнутых подпространств, имеют место равенства $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$.

Указание. Примените упр. 7.2.F.

7.3.C. (a) Докажите теоремы 7.3.4, 7.3.5, 7.3.8—7.3.11, 7.3.15—7.3.17 и 7.3.19, не используя теорему Катетова — Мориты, а применяя только теорему 7.1.10 и теорему 7.2.1 при $n = 0$.

Указание (Морита [1954]; для сепарабельных метризуемых пространств — Гуревич [1927]). Заметьте прежде всего, воспользовавшись теоремой 4.4.1, что в метризуемых пространствах из теоремы о счетной сумме следует теорема о σ-локально конечной сумме. Затем, обозначив через $\Sigma(n)$ теорему о счетной сумме для размерности n и через $\Delta(n)$ теорему 7.3.8 для размерности n, убедитесь, что в приведенном доказательстве теоремы $\Delta(n)$ применяется только $\Sigma(n-1)$, и покажите, что из $\Sigma(0)$ и $\Delta(n)$ следует $\Sigma(n)$. Доказывая последнюю импликацию, заметьте, что множества $X_j = F_j \setminus \bigcup_{i<j} F_i$, где $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ — замкнутое покрытие пространства X, являются F_σ-множествами и покрывают пространство X.

(b) Докажите теорему Катетова — Мориты, не пользуясь теоремой 7.3.1.

Указание (Пшимусинский [1974]). Пусть запись $\operatorname{ds}(X, \rho) \leqslant n$ обозначает, что пространство X обладает последовательностью покрытий $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots$, удовлетворяющей условию (ii) теоремы 7.3.1. Заметим сначала, видоизменив доказательство теоремы 7.3.2, что если $\operatorname{ds}(X, \rho) \leqslant n \geqslant 0$, то для каждого замкнутого множества $A \subset X$ и любого открытого множества $V \subset X$, удовлетворяющего условию $\rho(A, X \setminus V) > 0$, найдется открытое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset V$ и $\operatorname{ds}(\operatorname{Fr} U, \rho_{\operatorname{Fr} U}) \leqslant n - 1$. Покажите затем с помощью сделанного выше наблюдения, что из неравенства $\operatorname{ds}(X, \rho) \leqslant n \geqslant 0$ следует условие (ii) теоремы 7.3.8.

7.3.D (Нагами [1957]). Покажите, что если метризуемое пространство X можно представить в виде объединения трансфинитной последовательности $K_1, K_2, \ldots, K_\alpha, \ldots, \alpha < \xi$, подпространств пространства X, таких, что $\operatorname{Ind} K_\alpha \leqslant n$ и множество $F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ замкнуто при каждом $\alpha < \xi$, то $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Указание. Возьмите метрику на пространстве X и проверьте, что при $i = 1, 2, \ldots$ семейство $\{F_{i,\alpha}\}_{\alpha<\xi}$, где $F_{i,\alpha} = K_\alpha \setminus B(F_\alpha, 1/i)$, дискретно и что $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha<\xi} F_{i,\alpha}$.

7.3.E. Убедитесь, что в теореме 7.3.8 можно заменить σ-локальную конечность базы $\mathcal{B}$ на σ-дискретность.

7.3.F (Хаусдорф [1934], де Гроот [1956]). Метрика ρ на множестве X называется *неархимедовой* (или *ультраметрикой*), если

$$\rho(x, z) \leqslant \max[\rho(x, y), \rho(y, z)]$$

при всех $x, y, z \in X$.

Покажите, что непустое метризуемое пространство X удовлетворяет условию $\operatorname{Ind} X = 0$ в том и только том случае, если существует неархимедова метрика на пространстве X.

Указание. Метрика пространства $B(\mathfrak{m})$ является неархимедовой.

7.3.G. Покажите, что неравенство в теореме 7.3.17 нельзя заменить на равенство.

Указание. Примените упр. 7.1.A.

7.3.H. Докажите, что каждое метризуемое полной метрикой пространство X, для которого $\operatorname{Ind} X = 0$ и $w(X) = \mathfrak{m}$, гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству пространства Бэра $B(\mathfrak{m})$. Выведите отсюда, что каждое G_δ-подпространство пространства $B(\mathfrak{m})$ гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству пространства $B(\mathfrak{m})$.

7.3.I (Нагами [1959]). Докажите, что если $\mathbf{S} = \{X_i, \pi_j^i\}$ — обратная последовательность метризуемых пространств, для которых $\dim X_i \leqslant n$ при $i = 1, 2, \ldots$, то предел $X = \varprojlim \mathbf{S}$ тоже удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$.

Указание. Примените условие (iii) теоремы 7.3.1.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Пусть $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ — точки евклидова n-пространства R^n. Сумма $x + y$ точек x и y и произведение λx точки x на вещественное число λ определяются формулами

$$x+y=z=\{z_i\}, \text{ где } z_i=x_i+y_i, \text{ и}$$
$$\lambda x=t=\{t_i\}, \text{ где } t_i=\lambda x_i.$$

Точка пространства R^n, все координаты которой равны 0, будет обозначаться символом 0; расстояние $\rho(0, x)$ будет обозначаться через $|x|$. Легко проверяется, что

$$|x-y|=\rho(x, y), \quad |\lambda x|=|\lambda||x| \quad \text{и} \quad |x+y|\leqslant|x|+|y|;$$

последнее неравенство является переформулировкой неравенства треугольника для R^n.

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_k \in R^n$ называются *линейно независимыми*, если для каждой системы $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ вещественных чисел условия $\lambda_0 x_0+\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_k x_k=0$ и $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k=0$ вместе влекут за собой $\lambda_j=0$ при всех $j=0, 1, \ldots, k$ (заметьте, что это не то же самое, что понятие линейной независимости векторов в линейном пространстве)[1]).

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — произвольная система из $m+1$ линейно независимых точек пространства R^n. Подмножество пространства R^n, состоящее из всех точек вида

(1) $$x=\lambda_0 a_0+\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_m a_m,$$

где

(2) $$\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_m=1 \text{ и } \lambda_j\geqslant 0 \text{ при } j=0, 1, \ldots, m,$$

называется *m-мерным симплексом*, натянутым на точки $a_0, a_1, \ldots, a_m$, и обозначается через $a_0 a_1 \ldots a_m$. Ясно, что симплекс $a_0 a_1 \ldots a_m \subset R^n$ не зависит от упорядочения точек $a_0, a_1, \ldots, a_m$, а зависит только от множества $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$.

Рассмотрим произвольный симплекс $a_0 a_1 \ldots a_m \subset R^n$; для любых $k+1$ различных неотрицательных целых чисел $j_0, j_1, \ldots, j_k$, не больших m, точки $a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ линейно независимы и, значит, определен k-мерный симплекс $a_{j_0} a_{j_1} \ldots a_{j_k}$. Каждый симплекс такого вида называется *k-мерной гранью* симплекса $a_0 a_1 \ldots a_m$; 0-мерные грани $a_0, a_1, \ldots, a_m$ называются также *вершинами* симплекса $a_0 a_1 \ldots a_m$. Сам симплекс $a_0 a_1 \ldots a_m$ тоже считается своей гранью. Легко проверяется, что k-мерная грань $a_{j_0} a_{j_1} \ldots a_{j_k}$ состоит из всех точек вида (1), удовлетворяющих условиям (2) и, кроме того, условию

$$\lambda_j=0, \text{ если } j\neq j_i \text{ при } i=0, 1, \ldots, k.$$

[1]) Однако имеется тривиальный канонический переход от одного понятия к другому — *Прим. перев.*

Из линейной независимости вершин следует, что каждая точка $x \in a_0 a_1 \ldots a_m \subset R^n$ представляется в виде (1) при соблюдении условий (2) единственным образом. Коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, входящие в (1), называются *барицентрическими координатами* точки x; барицентрические координаты точки x будут обозначаться также через $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$.

Теорема 1. *Для любых $m+1$ линейно независимых точек $a_0, a_1, \ldots, a_m$ в R^n симплекс $S = a_0 a_1 \ldots a_m$ является компактным подпространством пространства R^n, и барицентрические координаты $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются непрерывными отображениями пространства S в I.*

Доказательство. Положим $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_i^i = 1$. Точки $d_0, d_1, \ldots, d_m$ в R^{m+1}, где $d_j = \{\delta_i^{j+1}\}$, линейно независимы, так что симплекс $T = d_0 d_1 \ldots d_m \subset R^{m+1}$ определен корректно. Барицентрические координаты точек симплекса T совпадают с их координатами в R^{m+1}, и, следовательно, в силу (2), T является замкнутым и ограниченным подмножеством пространства R^{m+1}. Теорема 3.2.8 показывает, что T — компакт.

Из предложения 2.3.6 вытекает, что формула

$$f(x) = x_1 a_0 + x_2 a_1 + \ldots + x_{m+1} a_m, \quad \text{где} \quad x = \{x_i\} \in T \subset R^{m+1},$$

определяет некоторое непрерывное отображение $f\colon T \to R^n$. В силу линейной независимости точек $a_0, a_1, \ldots, a_m$, отображение f инъективно. Так как $f(d_j) = a_j$ при $j = 0, 1, \ldots, m$, имеем $f(T) = S$, и, по теореме 3.1.13, $f|T$ является гомеоморфизмом пространства T на S. Значит, S — компактное подпространство пространства R^n, и барицентрические координаты λ_j непрерывны при $j = 0, 1, \ldots, m$, потому что $\lambda_j(x) = p_{j+1}(f|T)^{-1}(x)$, где p_i обозначает проекцию произведения R^{m+1} на i-ю ось. ∎

Тот факт, что $f|T$ является гомеоморфизмом, можно также вывести из элементарных теорем линейной алгебры. Эти теоремы показывают, кроме того, что у f есть обратное отображение, определенное формулами, аналогичными тем, которыми было определено f; разница заключается лишь в том, что вместо точек $a_0, a_1, \ldots, a_m$ в формуле для обратного отображения к f участвуют некоторые точки $a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1} \in R^{m+1}$ в качестве коэффициентов.

Из непрерывности барицентрических координат немедленно вытекает

Следствие. *Любые два m-мерных симплекса гомеоморфны.* ∎

Симплициальным подразделением симплекса $S \subset R^n$ называется любое семейство $\mathscr{P} = \{S_i\}_{i=1}^k$ симплексов в R^n, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(3) $$S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i.$$

(4) При любых $i, j \leqslant k$ пересечение $S_i \cap S_j$ либо пусто, либо является общей гранью симплексов S_i и S_j.

(5) При $i = 1, 2, \ldots, k$ все грани симплекса S_i принадлежат $\mathcal{P}$.

Мелкость симплициального подразделения $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ симплекса S определяется как наибольшее из чисел $\delta(S_1)$, $\delta(S_2)$, ..., $\delta(S_k)$.

Для каждого симплекса $S = a_0 a_1 \ldots a_m \subset R^n$ точка

$$b(S) = \frac{1}{m+1} a_0 + \frac{1}{m+1} a_1 + \ldots + \frac{1}{m+1} a_m$$

называется *барицентром* (или центром тяжести) симплекса S; ясно, что $b(S) \in S$ и $b(S)$ не принадлежит никакой $(m-1)$-мерной грани симплекса S.

Теорема 2. *Пусть $S = a_0 a_1 \ldots a_m$ — произвольный симплекс. Тогда для каждой убывающей последовательности $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \ldots \supset S_k$ различных граней симплекса S точки $b(S_0)$, $b(S_1)$, ..., $b(S_k)$ линейно независимы. Семейство $\mathcal{P}$ всех симплексов вида $b(S_0)\ b(S_1)\ \ldots\ b(S_k)$ является симплициальным подразделением симплекса S; каждый $(m-1)$-мерный симплекс $T \in \mathcal{P}$ является гранью одного или двух m-мерных симплексов семейства $\mathcal{P}$ — в зависимости от того, содержится или нет симплекс T в какой-нибудь $(m-1)$-мерной грани симплекса S.*

Доказательство. Каждая убывающая последовательность различных граней симплекса S может быть дополнена до последовательности $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_m$, состоящей из $m+1$ граней симплекса S и такой, что

(6) $$S_0 = a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_m}, \quad S_1 = a_{i_1} a_{i_2} \ldots N_{i_m}, \quad \ldots, \quad S_m = a_{i_m},$$

где $i_0, i_1, \ldots, i_m$ — некоторая перестановка элементов $0, 1, \ldots \ldots, m$. Для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что точки $b(S_0)$, $b(S_1)$, ..., $b(S_m)$ линейно независимы.

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию

(7) $$\mu_0 b(S_0) + \mu_1 b(S_1) + \ldots + \mu_m b(S_m).$$

Воспользовавшись определением барицентра, мы можем представить (7) как линейную комбинацию точек a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_m}; а именно, она равна

(8) $$\lambda_{i_0} a_{i_0} + \lambda_{i_1} a_i + \ldots + \lambda_{i_m} a_{i_m},$$

где

$$(9)\qquad \lambda_{i_j}=\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(m+1)-k}\mu_k \quad \text{при} \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Кроме того, имеем

$$(10)\qquad \sum_{j=0}^{m}\lambda_{i_j}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(m+1)-k}\mu_k=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}\frac{1}{(m+1)-i}\mu_i=\sum_{i=0}^{m}\mu_i.$$

Если линейная комбинация (7) равна 0 и $\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_m=0$, то, так как точки $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ линейно независимы, из (10) следует, что $\lambda_{i_j}=0$ при $j=0, 1, \ldots, m$. Применив (9), мы видим, что $\mu_0=0$, $\mu_1=0$, $\ldots$, $\mu_m=0$. Следовательно, точки $b(S_0)$, $b(S_1)$, $\ldots$, $b(S_m)$ линейно независимы и симплекс $b(S_0)\,b(S_1)\ldots b(S_m)$ корректно определен.

Каждый симплекс из $\mathscr{P}$ является гранью некоторого m-мерного симплекса вида $b(S_0)b(S_1)\ \ldots\ b(S_m)$. Из формул (7)—(10) следует, что симплекс $b(S_0)b(S_1)\ \ldots\ b(S_m)$ является подмножеством симплекса S; покажем, что это подмножество совпадает с множеством

$$(11)\qquad \{x\in S\colon\ \lambda_{i_0}(x)\leqslant\lambda_{i_1}(x)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{i_m}(x)\}.$$

В силу (9), достаточно показать, что каждая точка x множества (11) может быть представлена в виде (7) таким образом, что $\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_m=1$ и $\mu_j\geqslant 0$ при $j=0, 1, \ldots, m$. Читатель легко проверит, что получается такое представление, если определить коэффициенты μ_j формулами

$$(12)\qquad \mu_0=(m+1)\lambda_{i_0}(x) \quad \text{и} \quad \mu_j=[(m+1)-j]\,(\lambda_{i_j}(x)-\lambda_{i_{j-1}}(x))$$

при $j=1, 2, \ldots, m$.

Из (12) следует, что грани симплекса $b(S_0)b(S_1)\ \ldots\ b(S_m)$ описываются путем присоединения к условиям, определяющим множество (11), некоторого числа условий вида $\lambda_{i_j}(x)=\lambda_{i_{j-1}}(x)$, где $1\leqslant j\leqslant m$, а также, возможно, условия $\lambda_{i_0}(x)=0$. Так как пересечение грани, определенной таким множеством условий, с гранью другого симплекса $b(S'_0)\,b(S'_1)\ldots b(S'_m)$, отвечающего другой перестановке $i'_0, i'_1, \ldots, i'_m$ элементов 0, 1, $\ldots$, m, само определяется множеством условий подобного типа или пусто, семейство $\mathscr{P}$ удовлетворяет условию (4). Условие (3) также выполнено, так как каждая точка множества S принадлежит некоторому множеству вида (11). Условие (5) вытекает из определения семейства $\mathscr{P}$. Следовательно, семейство $\mathscr{P}$ является симплициальным подразделением симплекса S.

Рассмотрим теперь произвольный $(m-1)$-мерный симплекс $T = b(S_0)b(S_1) \ldots b(S_{m-1}) \in \mathcal{P}$. Если симплекс T содержится в некоторой $(m-1)$-мерной грани симплекса S, т. е. если $S_0 \neq S$, то T является гранью в точности одного m-мерного симплекса семейства $\mathcal{P}$, а именно симплекса $b(S)b(S_0) \ldots b(S_{m-1})$. С другой стороны, если T не лежит ни в какой $(m-1)$-мерной грани симплекса S, т. е. если $S_0 = S$, то либо найдется $j \leqslant m-1$, такое, что симплекс S_j получается из симплекса S_{j-1} опусканием двух вершин, либо S_{m-1} — одномерный симплекс. Легко проверяется, что и в том и в другом случае T является гранью в точности двух m-мерных симплексов семейства $\mathcal{P}$. ∎

Симплициальное подразделение симплекса S, определенное в теореме 2, называется *барицентрическим подразделением* симплекса S. Для каждого натурального числа l мы определим теперь *l-е барицентрическое подразделение* симплекса S. Барицентрическое подразделение симплекса S является первым барицентрическим подразделением этого симплекса; если j-е барицентрическое подразделение $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ симплекса S уже известно, то его $(j+1)$-е барицентрическое подразделение определяется как объединение $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$, где $\mathcal{P}_i$ — барицентрическое подразделение симплекса S_i. Для каждой грани S' симплекса S_i и каждого члена S'' семейства $\mathcal{P}_i$ пересечение $S' \cap S''$ либо пусто, либо является гранью симплекса S'' и членом барицентрического подразделения симплекса S'. Пользуясь этим фактом, читатель легко проверит, что объединение $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$ является симплициальным подразделением симплекса S.

Рассмотрим произвольный симплекс $S = a_0a_1 \ldots a_m \subset R^n$, точку $x = \lambda_0a_0 + \lambda_1a_1 + \ldots + \lambda_ma_m$, где $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ и $\lambda_j \geqslant 0$ при $j = 0, 1, \ldots, m$, т. е. любую точку $x \in S$, и произвольную точку $y \in R^n$. Покажем, что

$$\rho(x, y) \leqslant \max_{j \leqslant m} \rho(a_j, y). \tag{13}$$

Действительно, имеем

$$\rho(x, y) = |x-y| = \left|\sum_{j=0}^{m} \lambda_j a_j - \sum_{j=0}^{m} \lambda_j y\right| = \left|\sum_{j=0}^{m} \lambda_j (a_j - y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{m} \lambda_j |a_j - y| \leqslant \max_{j \leqslant m} |a_j - y| \sum_{j=0}^{m} \lambda_j = \max_{j \leqslant m} \rho(a_j, y).$$

Лемма 1. *Диаметр любого симплекса $a_0a_1 \ldots a_m \subset R^n$ равен диаметру множества $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ всех его вершин.*

Доказательство. Пусть $x, y \in a_0a_1 \ldots a_m$. В силу (13), $\rho(x, y) \leqslant \max\limits_{j \leqslant m} \rho(a_j, y)$. Применив (13) снова, заключаем, что $\rho(a_j, y) \leqslant \max\limits_{i \leqslant m}(a_j, a_i)$; таким образом, $\rho(x, y) \leqslant \max\limits_{j,\, i \leqslant m} \rho(a_j, a_i)$, т. е. $\delta(a_0a_1 \ldots a_m) = \delta(\{a_0, a_1, \ldots, a_m\})$. ∎

Лемма 2. *Мелкость барицентрического подразделения m-мерного симплекса $S = a_0a_1 \ldots a_m$ не превосходит* $\frac{m}{m+1}\delta(S)$

Доказательство. По лемме 1, достаточно показать, что расстояние между любыми двумя точками вида

$$b(S_j) = \frac{1}{j+1}\left(a_{i_0} + a_{i_1} + \ldots + a_{i_j}\right) \quad \text{и}$$

$$b(S_k) = \frac{1}{k+1}\left(a_{i_0} + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}\right),$$

где $k < j \leqslant m$ и $i_0, i_1, \ldots, i_m$ — перестановка из $0, 1, \ldots, m$, не превосходит $\frac{m}{m+1}\delta(S)$. Из (13) следует, что $\rho(b(S_k), b(S_j)) \leqslant$ $\leqslant \rho\left(a_{i_l}, b(S_j)\right)$ при $l \leqslant k < j$. Следовательно,

$$\rho(b(S_k), b(S_j)) \leqslant \rho\left(a_{i_l}, b(S_j)\right) =$$

$$= \left|b(S_j) - a_{i_l}\right| = \left|\frac{1}{j+1}\left(a_{i_0} + a_{i_1} + \ldots + a_{i_j}\right) - a_{i_l}\right| =$$

$$= \frac{1}{j+1}\left|\sum_{h=0}^{j}\left(a_{i_h} - a_{i_l}\right)\right| \leqslant \frac{1}{j+1}\sum_{h=0}^{j}\left|a_{i_h} - a_{i_l}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{j}{j+1}\delta(S) \leqslant \frac{m}{m+1}\delta(S). \ ∎$$

Из последней леммы вытекает

Теорема 3. *Для каждого симплекса S и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число l, такое, что мелкость l-го барицентрического подразделения симплекса S меньше ε.* ∎

Лемма Шпернера. *Пусть $\mathcal{P}$ есть l-е барицентрическое подразделение m-мерного симплекса $a_0a_1 \ldots a_m$ и V — множество всех вершин всех симплексов из $\mathcal{P}$. Тогда если функция h, определенная на V и принимающая значения в множестве $\{0, 1, \ldots, m\}$, удовлетворяет условию*

$$h(v) \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}, \quad \textit{как только } v \in a_{i_0}a_{i_1} \ldots a_{i_k},$$

то число симплексов семейства $\mathcal{P}$, на вершинах которых функция h принимает все значения от 0 до m, нечетно.

Доказательство. Применим индукцию относительно m. Если $m = 0$, то лемма выполняется, так как $\mathcal{P} = \{a_0\}$ и $h(a_0) = 0$.

Предположим, что лемма установлена при $m < n$. Рассмотрим произвольный n-мерный симплекс $S = a_0 a_1 \ldots a_n$, l-е барицентрическое подразделение $\mathscr{P}$ симплекса S и любую функцию h, удовлетворяющую посылкам леммы. Обозначим через $\mathscr{P}'$ семейство всех $(n-1)$-мерных симплексов семейства $\mathscr{P}$, на вершинах которых h принимает все значения от 0 до $n-1$. Ясно, что единственной $(n-1)$-мерной гранью симплекса S, содержащей симплексы семейства $\mathscr{P}'$, является грань $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$. По индуктивному предположению, число симплексов семейства $\mathscr{P}'$, лежащих в $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$, нечетно; обозначим это число через a.

Расположим все n-мерные симплексы семейства $\mathscr{P}$ в последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_t$. Для каждого $j \leqslant t$ обозначим через b_j число граней симплекса S_j, принадлежащих $\mathscr{P}'$, и через N_j обозначим множество значений функции h на вершинах симплекса S_j.

Читатель легко проверит, что:

(14) Если $N_j = \{0, 1, \ldots, n\}$, то $b_j = 1$.

(15) Если $N_j = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, то $b_j = 2$.

(16) Если включение $\{0, 1, \ldots, n-1\} \subset N_j$ не выполняется, то $b_j = 0$.

Через c обозначим число симплексов в $\mathscr{P}$, на вершинах которых h принимает все значения от 0 до n. В силу (14)—(16), существует целое число d_1, такое, что

$$c - (b_1 + b_2 + \ldots + b_t) = 2d_1. \tag{17}$$

Если мы сопоставим каждому симплексу S_j его b_j граней, принадлежащих $\mathscr{P}'$, то каждый симплекс T из $\mathscr{P}'$ будет поставлен в соответствие, как это легко следует из последней части теоремы 2, одному или двум симплексам S_j — в зависимости от того, содержится или нет симплекс T в какой-нибудь $(n-1)$-мерной грани симплекса S. Следовательно, существует целое число d_2, такое, что

$$a - (b_1 + b_2 + \ldots + b_t) = 2d_2. \tag{18}$$

Формулы (17) и (18) показывают, что $c - a = 2(d_1 - d_2)$; таким образом, c — нечетное число. ∎

Теорема 4. *Пусть $\{F_i\}_{i=0}^m$ — семейство замкнутых подмножеств симплекса $S = a_0 a_1 \ldots a_m$. Тогда если для каждой грани $a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_k}$ симплекса S выполняется соотношение*

$$a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_k} \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \ldots \cup F_{i_k},$$

то $F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_m \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_m = \varnothing$. Семейство $\{U_i\}_{i=0}^m$, где $U_i = S \setminus F_i$, является открытым покрытием симплекса S; значит, в силу компактности S и теоремы 4.3.31, существует $\varepsilon > 0$, такое, что каждое подмножество симплекса S, диаметр которого меньше ε, содержится в некотором U_i, т. е. не пересекается с F_i.

По теореме 3, найдется натуральное число l, такое, что мелкость l-го барицентрического подразделения $\mathcal{P}$ симплекса S меньше ε. Обозначим через V множество всех вершин всех симплексов из $\mathcal{P}$. Для каждого $v \in V$ пересечение всех граней симплекса S, содержащих v, является некоторой гранью симплекса S, т. е. имеет вид $a_{i_0}a_{i_1} \ldots a_{i_k}$. Так как $v \in a_{i_0}a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, то по предположению теоремы найдется $j \leqslant k$, такое, что $v \in F_{i_j}$.

Полагая $h(v) = i_j$, мы определяем на V функцию h, которая удовлетворяет посылкам леммы Шпернера; значит, найдется хотя бы один симплекс $T = v_0v_1 \ldots v_m \in \mathcal{P}$, такой, что $h(v_i) = i$ при $i = 0, 1, \ldots, m$. Значит, $v_i \in F_i$ и тем более $T \cap F_i \neq \varnothing$ при $i = 0, 1, \ldots, m$. Получили противоречие, так как $\delta(T) < \varepsilon$. ∎

Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке. Куб I^n (n-мерный) содержится в n-мерном симплексе $T = a_0a_1 \ldots \ldots a_n \subset R^n$, где $a_0 = 0$, $a_j = \{n\delta_i^j\}$ при $j=1, 2, \ldots, n$, $\delta_i^j=0$, когда $i \neq j$, и $\delta_i^i = 1$. Если бы существовало непрерывное отображение $f\colon I^n \to I^n$, такое, что $f(x) \neq x$ при всех $x \in I^n$, то для непрерывного продолжения $\bar{f}\colon T \to I^n$ отображения f, существующего в силу 2.1.8 и 2.3.6, было бы $\bar{f}(x) \neq x$ при всех $x \in T$. Значит, достаточно доказать, что для каждого непрерывного отображения $\bar{f}\colon T \to T$ найдется точка $x \in T$, такая, что $\bar{f}(x) = x$. Заметим, что возможность замены n-куба I^n симплексом T также вытекает из того, что I^n и T гомеоморфны (см. упр. 3.2.С).

Для каждой точки $x \in T$ имеем

$$x = \lambda_0(x)a_0 + \lambda_1(x)a_1 + \ldots + \lambda_n(x)a_n, \tag{19}$$

где

$$\lambda_0(x) + \lambda_1(x) + \ldots + \lambda_n(x) = 1 \tag{20}$$

и $\lambda_j(x) \geqslant 0$ при $j = 0, 1, \ldots, n$.

Образ каждой точки $x \in T$ при отображении $\bar{f}$ можно записать так:

$$\bar{f}(x) = \lambda_0(\bar{f}(x))a_0 + \lambda_1(\bar{f}(x))a_1 + \ldots + \lambda_n(\bar{f}(x))a_n, \tag{21}$$

где

$$\lambda_0(\bar{f}(x)) + \lambda_1(\bar{f}(x)) + \ldots + \lambda_n(\bar{f}(x)) = 1 \tag{22}$$

и $\lambda_j(\bar{f}(x)) \geqslant 0$ при $j = 0, 1, \ldots, n$.

При $i = 0, 1, \ldots, n$ множество

$$F_i = \{x \in T\colon \lambda_i(\bar{f}(x)) \leqslant \lambda_i(x)\} \tag{23}$$

замкнуто, так как λ_i и $\bar{f}$ непрерывны. Покажем, что семейство $\{F_i\}_{i=0}^n$ удовлетворяет посылкам теоремы 4. Пусть $a_{i_0}a_{i_1}\ldots a_{i_k}$ — произвольная грань симплекса T. Рассмотрим любую точку $x \in a_{i_0}a_{i_1}\ldots a_{i_k}$. Имеем

$$\lambda_{i_0}(x) + \lambda_{i_1}(x) + \ldots + \lambda_{i_k}(x) = 1,$$

так что, в силу (22),

$$\lambda_{i_0}(\bar{f}(x)) + \lambda_{i_1}(\bar{f}(x)) + \ldots + \lambda_{i_k}(\bar{f}(x)) \leqslant \lambda_{i_0}(x) + \lambda_{i_1}(x) + \ldots + \lambda_{i_k}(x).$$

Значит, $\lambda_{i_j}(\bar{f}(x)) \leqslant \lambda_{i_j}(x)$ по крайней мере для одного $j \leqslant k$, и тогда $x \in F_{i_j}$. Мы установили, таким образом, что

$$a_{i_0}a_{i_1}\ldots a_{i_k} \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \ldots \cup F_{i_k}.$$

В силу теоремы 4, существует точка $x \in F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_n$; из (23) следует, что

$$\lambda_0(\bar{f}(x)) \leqslant \lambda_0(x), \quad \lambda_1(\bar{f}(x)) \leqslant \lambda_1(x), \ \ldots, \ \lambda_n(\bar{f}(x)) \leqslant \lambda_n(x).$$

Однако, в силу (20) и (22), строгое неравенство $\lambda_j(\bar{f}(x)) < \lambda_j(x)$ не может выполняться ни для какого j; значит,

$$\lambda_0(\bar{f}(x)) = \lambda_0(x), \quad \lambda_1(\bar{f}(x)) = \lambda_1(x), \ \ldots, \ \lambda_n(\bar{f}(x)) = \lambda_n(x),$$

и, в силу (19) и (21), имеем $\bar{f}(x) = x$. ∎

7.4. ЗАДАЧИ

Теоремы сложения

7.4.1 (Урысон [1925b]). Пусть X — наследственно нормальное пространство и M — любое его подпространство. Покажите, что $\operatorname{ind} M \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если для каждой точки $x \in M$ и произвольной окрестности V точки x в пространстве X найдется открытое множество $U \subset X$, такое, что $x \in U \subset V$ и $\operatorname{ind}(M \cap \operatorname{Fr} U) \leqslant n - 1$.

Выведите отсюда, что для любых двух подпространств X, Y произвольного наследственно нормального пространства выполняется неравенство

$$\operatorname{ind}(X \cup Y) \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y + 1.$$

Указание. Примените индукцию относительно $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y$.

7.4.2 (Ю. М. Смирнов [1951b]). Пусть X — наследственно нормальное пространство и M — подпространство пространства X. Покажите, что $\operatorname{Ind} M \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если для каждого замкнутого множества $A \subset X$ и произвольного открытого множества $V \subset X$, содержащего A, найдется открытое множество $U \subset X$, такое, что $A \subset U \subset V$ и $\operatorname{Ind}(M \cap \operatorname{Fr} U) \leqslant n-1$.

Выведите отсюда, что для каждой пары X, Y подпространств любого наследственно нормального пространства имеет место неравенство

$$\operatorname{Ind}(X \cup Y) \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y + 1.$$

7.4.3 (Чех [1932a]). Пусть X — наследственно нормальное пространство и M — подпространство пространства X. Покажите, что у каждого открытого покрытия пространства M есть раздутие, состоящее из открытых в X множеств.

Указание. Применяя индукцию относительно k, покажите, что для каждого конечного семейства $\{V_i\}_{i=1}^k$ открытых множеств в M, удовлетворяющего условию $\bigcap_{i=1}^k V_i = \varnothing$, найдется семейство $\{U_i\}_{i=1}^k$ открытых множеств в X, такое, что $V_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ и $\bigcap_{i=1}^k U_i = \varnothing$.

7.4.4 (Ю. М. Смирнов [1951b]). Пусть X — наследственно нормальное пространство и M — подпространство пространства X. Покажите, что $\dim M \leqslant n$ в том и только том случае, если для каждого конечного семейства $\{U_i\}_{i=1}^k$ открытых множеств в X, удовлетворяющего условию $M \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$, найдется семейство $\{V_i\}_{i=1}^k$ открытых множеств в X, такое, что $V_i \subset U_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, $M \subset \bigcup_{i=1}^k V_i$ и $\operatorname{ord}(\{V_i\}_{i=1}^k) \leqslant n$.

Выведите отсюда, что для любых двух подпространств X, Y произвольного наследственно нормального пространства имеет место неравенство

$$\dim(X \cup Y) \leqslant \dim X + \dim Y + 1.$$

Указание. При доказательстве первой части утверждения примените задачу 7.4.3.

Компакт X, для которого $\operatorname{ind} X \neq \dim X$

7.4.5 (Локуциевский [1949]). Пусть V — длинный отрезок (см. задачу 3.12.18) и $f\colon D^{\aleph_0} \to I$ — функция, определенная в упр. 3.2.B. На произведении $V \times D^{\aleph_0}$ рассмотрим отношение эквивалентности E, определенное правилом: $(x_1, c_1) E (x_2, c_2)$ в том и только том случае, если $(x_1, c_1) = (x_2, c_2)$ или $x_1 = x_2 = \omega_1$ и $f(c_1) = f(c_2)$. Докажите, что для факторпространства $X_1 = (V \times D^{\aleph_0})/E$ выполняются равенства $\operatorname{ind} X_1 = \operatorname{Ind} X_1 = \dim X_1 = 1$.

Пусть A_1 — подпространство пространства X_1, состоящее из всех точек, прообразы которых при естественном факторном отображении $q\colon V \times D^{\aleph_0} \to X_1$ двухточечны. Пусть X_2 — копия пространства X_1, не пересекающаяся с X_1, и A_2 — подмножество множества X_2, соответствующее множеству $A_1 \subset X_1$. Применив упр. 4.3.H(a), соедините X_1 с X_2 вдоль отрезка $q(\{\omega_1\} \times D^{\aleph_0})$ таким образом, чтобы никакая точка множества A_1 не соединилась ни с какой точкой множества A_2. Проверьте, что для полученного таким образом компакта X выполняются равенства $\operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} X = 2$ и $\dim X = 1$.

Заметьте, что теорема о счетной сумме и даже теорема о конечной сумме не выполняются для размерностей ind и Ind в классе всех компактов.

Замечание. Первый пример компакта X, такого, что $\operatorname{ind} X \neq \dim X$, был построен Лунцем в [1949].

Тихоновское престранство Z и замкнутое подпространство M пространства Z, для которых $\dim Z < \dim M$

7.4.6 (Ю. М. Смирнов [1956b]). С помощью пространства Y из примера 6.2.20 определите тихоновское пространство Z, такое, что $\dim Z = 0$, но $\dim M > 0$ для некоторого замкнутого подпространства $M \subset Z$.

Указание. Пусть cY — какая-нибудь нульмерная компактификация пространства Y, и пусть W обозначает пространство всех ординалов $\leqslant \omega_1$. Покажите, применив задачу 3.12.19(c), что для пространства $Z = (W \times cY) \setminus [\{\omega_1\} \times (cY \setminus c(Y))]$ имеет место равенство $\beta Z = W \times cY$.

Нормальное пространство Z, для которого $\operatorname{ind} Z = 0$ и $\dim Z = \infty$

7.4.7 (Ю. М. Смирнов [1958]). Видоизменив построение пространства Y в примере 6.2.20, определите нормальное пространство Z, такое, что $\operatorname{ind} Z = 0$ и $\dim Z = \infty$.

Указание. Замените отрезок гильбертовым кубом и множества S_α произведениями $S_\alpha^{\aleph_0}$. Примените следствие 7.1.18.

Полиэдры

7.4.8. Пространство P называется *полиэдром*, если существуют симплекс S и семейство $\mathcal{P}$ граней симплекса S, такие, что $P=\bigcup\mathscr{P}$. Вершины симплекса S, принадлежащие P, называются *вершинами полиэдра P*. *Размерность полиэдра P* есть максимум размерностей симплексов из $\mathscr{P}$.

Заметьте, что определения вершины и размерности полиэдра не зависят от выбора симплекса S и семейства $\mathscr{P}$. Убедитесь, что каждый полиэдр является компактом.

Пусть P — полиэдр и $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — все его вершины. Покажите, что каждая точка $x\in P$ единственным образом представляется в виде

$$x=\lambda_0(x)a_0+\lambda_1(x)a_1+\ldots+\lambda_m(x)a_m,$$

где $\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda_i(x)=1$ и $\lambda_j(x)\geqslant 0$ при $j=0, 1, \ldots, m$. Проверьте, что $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — непрерывные функции на P со значениями в I. Подмножество

$$G_j=\{x\in P\colon \lambda_j(x)>0\}$$

полиэдра P называется *звездой вершины a_j*. Покажите, что для последовательности $a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ вершин полиэдра P пересечение $G_{j_0}\cap G_{j_1}\cap\ldots\cap G_{j_k}$ непусто в том и только том случае, если $a_{j_0}a_{j_1}\ldots a_{j_k}\subset P$.

Докажите, что для каждого полиэдра P размерности $\operatorname{ind}P$, $\operatorname{Ind}P$ и $\dim P$ совпадают с размерностью полиэдра P.

Характеристика размерности dim в терминах $\mathscr{A}$-отображений

7.4.9 (неявно — Куратовский [1933a]; для метризуемых компактов — П. С. Александров [1928]). Пусть X и Y — топологические пространства и $\mathscr{A}$ — произвольное покрытие пространства X. Непрерывное отображение $f\colon X\to Y$ называется *$\mathscr{A}$-отображением*, если существует открытое покрытие $\{U_s\}_{s\in S}$ пространства Y, такое, что $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in S}$ вписано в $\mathscr{A}$.

(a) Докажите, что тихоновское (нормальное) пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X\leqslant n$ в том и только том случае, если для каждого конечного функционально открытого (открытого) покрытия $\mathscr{A}$ пространства X существует $\mathscr{A}$-отображение пространства X в полиэдр размерности $\leqslant n$.

Указание. Пусть $\mathscr{V}=\{V_i\}_{i=0}^{m}$ — какое-нибудь функционально открытое покрытие, вписанное в $\mathscr{A}$, для которого $\operatorname{ord}\mathscr{V}\leqslant n$, и $\{F_i\}_{i=0}^{m}$ — функционально замкнутое ужатие покрытия $\mathscr{V}$. Возьмите любой m-мерный симплекс $S=a_0a_1\ldots a_m$ и семейство $\{f_i\}_{i=0}^{m}$ непрерывных функций $f_i\colon X\to I$, удовлетворяющих условиям $f_i(X\setminus V_i)\subset\{0\}$ и $f_i(F_i)\subset\{1\}$, и положите

$$\lambda_i(x)=\frac{f_i(x)}{f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_m(x)}.$$

Рассмотрите отображение $f\colon X\to S$, определенное формулой $f(x)=\lambda_0(x)a_0+\lambda_1(x)a_1+\ldots+\lambda_m(x)a_m$.

(b) Покажите, что в данной в пункте (a) характеристике размерности dim слова «в полиэдр» можно заменить словами «на полиэдр».

Указание. Покажите, что для каждого подмножества A полиэдра $P=\bigcup\mathscr{P}$ найдутся подсемейство $\mathscr{P}_0$ семейства $\mathscr{P}$ и непрерывное отображение $g\colon A\to P$, такие, что $g(A)=P_0=\bigcup\mathscr{P}_0$ и $g(A\cap T)\subset T$ при всех $T\in\mathscr{P}$.

Размерность в смысле покрытий произведений

7.4.10 (Хеммингсен [1946]). Докажите, что для любых двух компактов X, Y, хотя бы один из которых не пуст, имеет место неравенство

$$\dim(X\times Y)\leqslant\dim X+\dim Y$$

(см. задачу 7.4.12(b)).

Указание. Покажите, что для каждого конечного открытого покрытия пространства $X\times Y$ найдется вписанное в него покрытие вида $\{U\times V\colon U\in\mathscr{A},\ V\in\mathscr{B}\}$, где $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — конечные открытые покрытия пространств X и Y соответственно. Примените задачу 7.4.9(a).

Размерность подпространств

7.4.11 (Даукер [1955]). Пусть X — нормальное пространство и M — замкнутое подпространство пространства X, такое, что $\dim M\leqslant n$. Покажите, что $\dim X\leqslant n$ в том и только том случае, если каждое замкнутое подпространство $F\subset X$, не пересекающееся с M, удовлетворяет условию $\dim F\leqslant n$.

7.4.12 (Чех [1933], Ю. М. Смирнов [1951c]). (a) Пусть X — нормальное пространство, удовлетворяющее неравенству $\dim X\leqslant n$. Докажите, что для каждого подпространства $M\subset X$, являющегося F_σ-множеством или (более слабое требование) нормально расположенного в X, выполняется неравенство $\dim M\leqslant n$.

Выведите отсюда, что для каждого подпространства M произвольного совершенно нормального пространства X имеем $\dim M\leqslant\dim X$.

Замечание. Чех доказал в [1932] (объявлено в [1931]), что $\operatorname{Ind}M\leqslant\operatorname{Ind}X$ для каждого подпространства M совершенно нормального пространства X; доказательство см. в работе Нагами [1970] или Энгелькинга [1978].

(b) Покажите, что неравенство в задаче 7.4.10 остается верным для любых тихоновских пространств X, Y, таких, что произведение $X \times Y$ является линделёфовым пространством.

Характеристика размерности dim в терминах отображений в сферы

7.4.13. (a) (Хеммингсен [1946], Александров [1947], Даукер [1947]; для компактов — Александров [1940], Морита [1940]; для метризуемых компактов — Александров [1932] и Гуревич [1935]). Докажите, что нормальное пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если каждое непрерывное отображение $f\colon A \to S^n$, определенное на каком-нибудь замкнутом подпространстве A пространства X, можно непрерывно продолжить на все X.

Указание. Рассмотрите сначала случай компакта X. Воспользуйтесь характеристикой размерности dim, установленной в теореме 7.2.15. Вместо S^n возьмите границу S_I^n $(n+1)$-куба I^{n+1} в R^{n+1}; примените задачу 5.5.21 и тот факт, что для каждой точки $x_0 \in I^{n+1} \setminus S_I^n$ граница S_I^n является ретрактом пространства $I^{n+1} \setminus \{x_0\}$. Чтобы распространить эту характеристику на нормальные пространства, примените теорему 7.1.17.

(b) (Ю. М. Смирнов [1955b]) Докажите, что тихоновское пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если каждое непрерывное отображение $f\colon A \to S^n$, определенное на замкнутом подпространстве A пространства X, для которого существует непрерывное отображение $F\colon X \to B^{n+1}$, такое, что $F(x) = f(x)$ при всех $x \in A$, непрерывно продолжается на X.

(c) Покажите, что если A — замкнутое подпространство нормального пространства X и каждое замкнутое подпространство F пространства X, не пересекающееся с A, удовлетворяет неравенству $\dim F \leqslant n \geqslant 0$, то каждое непрерывное отображение $f\colon A \to S^n$ непрерывно продолжается на X.

(d) Пусть X_1 и X_2 — замкнутые подпространства метризуемого пространства X, такие, что $X_1 \cup X_2 = X$, и $f_1\colon X_1 \to S^n$ и $f_2\colon X_2 \to S^n$ — некоторые непрерывные отображения. Покажите, что если множество $D = \{x \in X_1 \cap X_2\colon f_1(x) \neq f_2(x)\}$ удовлетворяет неравенству $\dim D \leqslant n-1$, то оба отображения f_1 и f_2 непрерывно продолжаются на X.

Указание. Примените задачу 5.5.21.

Факторизационная теорема Мардешича

7.4.14 (Мардешич [1960]). Докажите, что для каждого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ любого компакта X, удовлетворяющего условию $\dim X \leqslant n$, в произвольный компакт Y, такой, что $w(Y) \leqslant \mathfrak{m}$, найдутся компакт Z и непрерывные отображения $g\colon X \to Z$ и $h\colon Z \to Y$, для которых выполняются условия $\dim Z \leqslant n$, $w(Z) \leqslant \mathfrak{m}$, $g(X) = Z$ и $f = hg$ (это и есть *факторизационная теорема Мардешича*).

Указание (Архангельский [1967]). Возьмите любую базу $\mathscr{B}$ пространства Y, для которой $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, и рассмотрите семейство $\{\mathscr{U}_s\}_{s \in S}$ всех конечных покрытий пространства Y, состоящих из элементов семейства $\mathscr{B}$. Положим $\boldsymbol{V}_0 = \{\mathscr{V}_s\}_{s \in S}$, где $\mathscr{V}_s = \{f^{-1}(U)\colon U \in \mathscr{U}_s\}$, и определим последовательность $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots$ семейств открытых покрытий пространства X, где $\boldsymbol{V}_{i+1}$ получается путем выбора для каждой пары $\mathscr{V}, \mathscr{V}' \in \boldsymbol{V}_i$ некоторого конечного открытого покрытия порядка $\leqslant n$, сильно звездно вписанного и в $\mathscr{V}$, и в $\mathscr{V}'$. Убедитесь, что, полагая xEy в том и только том случае, если $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcap\limits_{\mathscr{V} \in \boldsymbol{V}_i} \mathrm{St}(x, \mathscr{V})$, мы определяем замкнутое отношение эквивалентности E на пространстве X. Проверьте, что факторпространство $Z = X/E$, естественное факторное отображение g и отображение h, определенное равенством $h([x]) = f(x)$, удовлетворяют требуемым условиям.

Компактификации, сохраняющие размерность и вес

7.4.15 (Скляренко [1958]; для сепарабельных метризуемых пространств — Гуревич [1927b] и [1930]). Докажите, что для каждого тихоновского пространства X, удовлетворяющего условиям $\dim X \leqslant n$ и $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$, найдется компактификация cX, такая, что $\dim cX \leqslant n$ и $w(cX) \leqslant \mathfrak{m}$.

Указание (Мардешич [1960]). Продолжите гомеоморфное вложение $i\colon X \to I^{\mathfrak{m}}$ на βX и примените задачу 7.4.14.

Универсальные пространства размерности n и веса $\mathfrak{m}$

7.4.16 (Зарелуа [1964], Пасынков [1964]). Докажите, что для каждого натурального числа n и любого кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ найдется компакт, являющийся универсальным пространством для всех тихоновских пространств X, таких, что $\dim X \leqslant n$ и $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$.

Указание (Пасынков [1964]). Пусть $\mathscr{X}$ — семейство всех подпространств X пространства $I^{\mathfrak{m}}$, для которых $\dim X \leqslant n$. Положим $Y = \bigoplus\limits_{X \in \mathscr{X}} X$ и $i = \mathop{\triangledown}\limits_{X \in \mathscr{X}} i_X\colon Y \to I^{\mathfrak{m}}$, где $i_X\colon X \to I^{\mathfrak{m}}$ — тождественное вложение пространства X в $I^{\mathfrak{m}}$. Рассмотрите непрерывное продолжение $f\colon \beta Y \to I^{\mathfrak{m}}$ отображения i и примените задачу 7.4.14.

Замечание. Нёбелинг показал в [1931], что при каждом $n \geqslant 0$ пространство $N_n^{2n+1} = \bigcup_{m=0}^{n} Q_m^{2n+1}$, т. е. подпространство пространства R^{2n+1}, состоящее из всех точек, не более чем n координат которых рациональны, является универсальным пространством для всех сепарабельных метризуемых пространств размерности $\leqslant n$. Отсюда следует, в частности, что любое сепарабельное метризуемое пространство размерности $\leqslant n$ можно вложить в R^{2n+1}. Последний факт был доказан также Лефшецем в [1931], равно как Понтрягиным и Толстовой в [1931]. Доказательства можно найти в книге Гуревича и Волмэна [1941] и в книге Энгелькинга [1978].

Расширение n-мерных множеств до n-мерных G_δ-множеств

7.4.17 (Катетов [1952], Морита [1954]; для сепарабельных метризуемых пространств — Тумаркин [1926] (объявлено в [1925])). Покажите, что для каждого подпространства M произвольного метризуемого пространства X найдется G_δ-множество $M^* \subset X$, такое, что $M \subset M^*$ и $\operatorname{Ind} M^* = \operatorname{Ind} M$.

Выведите отсюда, что каждое метризуемое пространство X гомеоморфно всюду плотному подпространству некоторого метризуемого полной метрикой пространства X^*, такого, что $\operatorname{Ind} X^* = \operatorname{Ind} X$ и $w(X^*) = w(X)$.

Указание. Рассмотрите сначала случай, когда подпространство M удовлетворяет условию $\operatorname{Ind} M = 0$. Видоизмените первую часть доказательства теоремы 7.3.8 и примените лемму 7.3.7; можно также воспользоваться теоремами 7.3.15 и 4.3.21.

Для доказательства в общем случае примените теорему 7.3.9. При доказательстве второго утверждения примените теоремы 4.3.19 и 4.3.23.

n-мерные подпространства пространства R^n

7.4.18 (Менгер [1924], Урысон [1925b] (объявлено в [1922])). Докажите, что подпространство M евклидова n-пространства R^n имеет размерность n в том и только том случае, если $\operatorname{Int} M \neq \varnothing$.

Выведите отсюда, что для каждого непустого открытого множества $U \subset R^n$, такого, что $\overline{U} \neq R^n$, размерность границы $\operatorname{Fr} U$ равна $n-1$.

Указание. Примените задачу 4.5.2.

Отображения, повышающие размерность, и отображения, понижающие размерность

7.4.19. (a) (Энгелькинг [1973]). Заметьте, что метризуемое пространство X удовлетворяет неравенству $\operatorname{Ind} X \leqslant n \geqslant 0$ в том и только том случае, если X обладает σ-локально конечной сетью $\mathcal{N}$, такой, что $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} M \leqslant n-1$ при всех $M \in \mathcal{N}$.

(b) (Морита [1955]; для сепарабельных метризуемых пространств — Гуревич [1927a]). Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение метризуемого пространства X на метризуемое пространство Y и $|f^{-1}(y)| \leqslant k+1 \geqslant 1$ при всех $y \in Y$, то $\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X + k$.

Указание (Энгелькинг [1973]). Примените индукцию относительно $\operatorname{Ind} Y + k$. Возьмите σ-локально конечную базу $\mathcal{B}$ пространства X, для которой $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} U \leqslant \operatorname{Ind} X - 1$ при всех $U \in \mathcal{B}$, рассмотрите семейство $\{f(U)\colon U \in \mathcal{B}\}$, воспользуйтесь леммой 3.10.11 и утверждением (a).

7.4.20. (a) (Гуревич и Волмэн [1941] для сепарабельных метризуемых пространств). Пусть метризуемое пространство X обладает замкнутым покрытием $\mathcal{K}$, таким, что $\operatorname{Ind} K \leqslant n \geqslant 0$ при всех $K \in \mathcal{K}$, и открытым σ-локально конечным покрытием $\mathcal{U}$, таким, что для каждого $K \in \mathcal{K}$ и произвольного открытого $V \subset X$, содержащего K, найдется $U \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условиям $K \subset U \subset V$ и $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} U \leqslant n-1$. Докажите, что тогда $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Указание. Докажите, что каждое непрерывное отображение $f\colon A \to S^n$, определенное на каком-нибудь замкнутом подпространстве A пространства X, имеет непрерывное продолжение $F\colon X \to S^n$ (см. задачу 7.4.13(a)). Сначала, применив задачу 7.4.13(c), для каждого $K \in \mathcal{K}$ определите $U_K \in \mathcal{U}$, такое, что $K \subset U_K$, $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} U_K \leqslant n-1$ и f допускает непрерывное продолжение на $A \cup \overline{U}_K$. Расположите все члены семейства $\{U_K\colon K \in \mathcal{K}\}$ в трансфинитную последовательность $U_0, U_1, \ldots, U_\alpha, \ldots, \alpha < \xi$ таким образом, чтобы семейство $\{U_\beta\}_{\beta<\alpha}$ было локально конечно при каждом $\alpha < \xi$. Положите $A_0 = A \cup \overline{U}_0$ и $A_\alpha = \overline{U}_\alpha$ при $\alpha > 0$. Применяя задачу 7.4.13(d), определите по трансфинитной индукции трансфинитную последовательность отображений $F_0, F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots, \alpha < \xi$, где $F_\alpha\colon \left(\bigcup_{\beta \leqslant \alpha} A_\beta\right) \to S^n$, такую, что $F_\alpha = \Big| \left(\bigcup_{\beta \leqslant \gamma} A_\beta\right) = F_\gamma$ при $\gamma \leqslant \alpha$ и $F_0 | A = f$. Положите $F = \mathop{\nabla}_{\alpha<\xi} (F_\alpha | U_\alpha)$.

(b) (Морита [1956], Нагами [1957]; для сепарабельных метризуемых пространств — Гуревич и Волмэн [1941]; для метризуемых компактов — Гуревич [1927a]). Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение метризуемого пространства X в метризуемое пространство Y и $\operatorname{Ind} f^{-1}(y) \leqslant k \geqslant 0$ при всех $y \in Y$, то $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} Y + k$.

Указание. Зафиксируйте k и примените индукцию относительно $\operatorname{Ind} Y$. Возьмите σ-локально конечную базу $\mathcal{B}$ пространства Y, такую, что $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant \operatorname{Ind} Y - 1$ для всех $U \in \mathscr{B}$, рассмотрите семейство $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{B}\}$ и воспользуйтесь (a).

Замечание. Обзор результатов об отображениях, повышающих размерность, и об отображениях, понижающих размерность, можно найти в работе Лелека [1971] (см. также статьи Нагами [1970] и Энгелькинга [1978]). В работе В. В. Филиппова [1972] описан общий метод, который упрощает многие доказательства в этой области.

Вокруг теоремы Брауэра о неподвижной точке

7.4.21. (a) Покажите, что теорема Брауэра о неподвижной точке влечет за собой лемму Шпернера и следующие два факта:

(1) *Сфера S^n не является ретрактом шара B^{n+1}.*

(2) *Тождественное отображение $\mathrm{id}_{S^n}: S^n \to S^n$ не гомотопно постоянному отображению сферы S^n в точку $x \in S^n$.*

Покажите, что каждый из приведенных выше двух фактов, равно как и теорема о том, что $\dim I^n = n$, влечет за собой теорему Брауэра о неподвижной точке.

(b) Докажите, что для каждого непрерывного отображения $f: I^{\aleph_0} \to I^{\aleph_0}$ существует точка $x \in I^{\aleph_0}$, такая, что $f(x) = x$.

Борелевские множества III (см. задачи 1.7.5, 4.5.7 и 4.5.8)

7.4.22 (Лебег [1905]). Докажите, что для каждого счетного ординала α найдется в гильбертовом кубе $I^{\aleph_0}$ множество M_α мультипликативного класса α, которое не входит в аддитивный класс α, а также найдется множество A_α аддитивного класса α, которое не принадлежит мультипликативному классу α.

Указание (Энгелькинг, Голштынский и Сикорский [1966]). Определите по индукции множества M_α и $A_\alpha = I^{\aleph_0} \setminus M_\alpha$, взяв в качестве M_0 произвольное одноточечное подмножество пространства $I^{\aleph_0}$ и при $\alpha > 0$ положив

$$M_\alpha = \begin{cases} A_\beta^{\aleph_0} \subset (I^{\aleph_0})^{\aleph_0} = I^{\aleph_0}, & \text{если } \alpha = \beta + 1, \\ \prod\limits_{\beta < \alpha} A_\beta \subset (I^{\aleph_0})^{\aleph_0} = I^{\aleph_0}, & \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал.} \end{cases}$$

Покажите, что для каждого метризуемого пространства X и любого множества $B \subset X$ мультипликативного (аддитивного) класса α существует непрерывное отображение $f: X \to I^{\aleph_0}$, такое, что $f^{-1}(M_\alpha) = B$ (такое, что $f^{-1}(A_\alpha) = B$). Примените задачу 7.4.21(b).

Глава 8

РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА БЛИЗОСТИ

Понятия равномерного пространства и пространства близости можно рассматривать с двух позиций — либо как аксиоматизации некоторых геометрических объектов, близкие к понятию топологического пространства, хотя и совершенно независимые от него, либо как удобные средства изучения топологических пространств. Когда А. Вейль впервые ввел равномерности, они рассматривались именно как такое средство, пригодное в отличие от метрик для изучения топологических пространств без каких-либо предположений о счетности. Близости также могут быть использованы для изучения топологий; они особенно эффективны при исследовании компактификаций. Бурбаки, весьма подробно излагающий в своей книге теорию равномерных пространств, подчеркивает ее независимый характер, хотя она и очень тесно связана с теорией топологических пространств. Связь между этими двумя теориями основана на том, что равномерным пространствам и равномерно непрерывным функциям ставятся в соответствие (неким стандартным образом) топологические пространства и непрерывные отображения. Этот переход от равномерных пространств к топологическим разбивается на два этапа; промежуточное положение занимают пространства близости.

Теория равномерных пространств обладает разительным сходством с теорией метрических пространств, но область ее применения значительно шире. В частности, каждая топологическая группа обладает тремя естественными равномерностями, которые применяются в теории топологических групп.

В § 8.1 мы вводим понятия равномерности и равномерного пространства и показываем, как равномерность порождает топологию. Затем определяются два понятия, широко используемые в теории равномерных пространств: равномерные покрытия и равномерные псевдометрики. Из важного результата о том, что для каждой равномерности $\mathcal{U}$ существует много псевдометрик, равномерных относительно $\mathcal{U}$, мы выводим, что всякое пространство с топологией, индуцированной некоторой равномерностью, есть тихоновское пространство. Затем мы показываем, что топология любого тихоновского пространства порождена некоторой равномерностью. Далее мы рассматриваем три упомянутые равномерности на топологических группах и устанавливаем необходимое и достаточное условие, чтобы равномерность порождалась метрикой. Параграф заканчивается обсуждением равномерно непрерывных отображений и равномерных изоморфизмов.

В § 8.2 изучаются три операции на равномерных пространствах: рассматриваются подпространства, декартовы произведения и пространства отображений. В отличие от метрических пространств произведение любого семейства равномерных пространств является равномерным пространством, поэтому нет нужды вводить ограничения на мощность семейства. Равномерности в пространствах отображений позволяют определить понятие равностепенно непрерывного семейства отображений и доказать аналоги классической теоремы Асколи.

Параграф 8.3 посвящен вполне ограниченным и полным равномерным пространствам. Здесь отчетливо видна аналогия между равномерными и метрическими пространствами. Многие теоремы этого параграфа являются обобщениями теорем § 4.3, причем их формулировки и доказательства почти дословно совпадают с исходными. В заключительной части этого параграфа мы определяем пополнение равномерного пространства и обсуждаем свойства компактных равномерных пространств.

В § 8.4 изучаются близости и пространства близости. Мы показываем, что каждая близость порождает некоторую топологию, и изучаем взаимосвязи между равномерностями и близостями. Наиболее важным результатом этого параграфа является теорема Смирнова, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между близостями на тихоновском пространстве X и его компактификациями.

8.1. РАВНОМЕРНОСТИ И РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Сначала введем некоторые обозначения. Пусть X — некоторое множество и A, B — подмножества произведения $X \times X$, т. е. отношения на множестве X. Обратное к A отношение будет обозначаться через $-A$, а композиция отношений A и B — через $A+B$; так,

$$-A = \{(x, y)\colon\ (y, x) \in A\}$$

и

$$A + B = \{(x, z)\colon \text{ существует такой } y \in X, \text{ что } (x, y) \in A \text{ и } (y, z) \in B\}.$$

Легко видеть, что композиция отношений ассоциативна, т. е. $(A+B)+C = A+(B+C)$. С другой стороны, как показывают простые примеры, композиция отношений не коммутативна, т. е., вообще говоря, $A+B \neq B+A$. Для произвольного отношения $A \subset X \times X$ и натурального числа n отношение $nA \subset X \times X$ определяется индуктивно формулами

$$1A = A \quad \text{и} \quad nA = (n-1)A + A.$$

Из ассоциативности композиции следует, что $mA + nA = nA + mA = (m+n)A$.

В § 2.3 мы определили диагональ произведения $X \times X$ как множество

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Каждое множество $V \subset X \times X$, которое содержит Δ и удовлетворяет условию $V = -V$, называется *окружением диагонали*; множество всех окружений диагонали $\Delta \subset X \times X$ будет обозначаться $\mathcal{D}_X$. Если для пары x, y точек X и некоторого $V \in \mathcal{D}_X$ мы имеем $(x, y) \in V$, то будем говорить, что *расстояние между x и y меньше V*, и писать $|x-y| < V$; в противном случае будем писать $|x-y| \geqslant V$. Если для любой пары x, y точек множества $A \subset X$ и некоторых $V \in \mathcal{D}_X$ мы имеем $|x-y| < V$, т. е. если $A \times A \subset V$, то будем говорить, что *диаметр A меньше V*, и писать $\delta(A) < V$. Легко проверить, что для любых x, y, $z \in X$ и любых V, V_1, $V_2 \in \mathcal{D}_X$ выполнены следующие условия:

(1) $$|x-x| < V;$$

(2) $|x-y| < V$ тогда и только тогда, когда $|y-x| < V$;

(3) если $|x-y| < V_1$ и $|y-z| < V_2$, то $|x-z| < V_1 + V_2$.

Пусть x_0 — точка X, и пусть $V \in \mathcal{D}_X$; множество $B(x_0, V) = \{x \in X : |x_0 - x| < V\}$ называется *шаром с центром x_0 радиуса V* или просто *V-шаром с центром x_0*. Из (3) сразу следует, что диаметр V-шара меньше $2V$. Для множества $A \subset X$ и некоторого $V \in \mathcal{D}_X$ под *V-шаром вокруг A* мы подразумеваем множество $B(A, V) = \bigcup\limits_{x \in A} B(x, V)$.

Равномерность на множестве X есть подсемейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_X$, которое удовлетворяет следующим условиям:

(U1) *Если $V \in \mathcal{U}$ и $V \subset W \in \mathcal{D}_X$, то $W \in \mathcal{U}$.*
(U2) *Если V_1, $V_2 \in \mathcal{U}$, то $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$.*
(U3) *Для любого $V \in \mathcal{U}$ существует такое $W \in \mathcal{U}$, что $2W \subset V$.*
(U4) $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$.

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ называется *базой равномерности* $\mathcal{U}$, если для любого $V \in \mathcal{U}$ существует такое $W \in \mathcal{B}$, что $W \subset V$. Очевидно, что равномерность $\mathcal{U}$ может иметь много баз; наименьший кардинал вида $|\mathscr{B}|$, где $\mathscr{B}$ — база для $\mathscr{U}$, называется *весом равномерности* $\mathscr{U}$ и обозначается $w(\mathscr{U})$.

Любая база $\mathscr{B}$ равномерности на множестве X обладает следующими свойствами:

(BU1) *Для всех* V_1, $V_2 \in \mathscr{B}$ *существует такое* $V \in \mathscr{B}$, *что* $V \subset V_1 \cap U_2$.

(BU2) *Для всякого* $V \in \mathscr{B}$ *существует такое* $W \in \mathscr{B}$, *что* $2W \subset V$.

(BU3) $\bigcap \mathscr{B} = \Delta$.

Отметим, что каждое окружение диагонали $V \in \mathscr{D}_X$ порождает покрытие $\mathscr{C}(V) = \{B(x, V)\}_{x \in X}$ множества X. Пусть $\mathscr{U}$ — какая-нибудь равномерность на множестве X; всякое покрытие множества X, в которое можно вписать покрытие вида $\mathscr{C}(V)$, где $V \in \mathscr{U}$, называется *равномерным относительно* $\mathscr{U}$. Совокупность $\boldsymbol{C}$ всех покрытий множества X, равномерных относительно некоторой равномерности $\mathscr{U}$ на X, обладает следующими свойствами:

(UC1) *Если* $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}$ *и* $\mathscr{A}$ *вписано в некоторое покрытие* $\mathscr{B}$ *множества* X, *то* $\mathscr{B} \in \boldsymbol{C}$.

(UC2) *Для любых* $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2 \in \boldsymbol{C}$ *существует* $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}$, *которое вписано и в* $\mathscr{A}_1$, *и в* $\mathscr{A}_2$.

(UC3) *Для любого* $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}$ *существует* $\mathscr{B} \in \boldsymbol{C}$, *сильно звездно вписанное в* $\mathscr{A}$.

(UC4) *Для любой пары* x, y *различных точек* X *существует такое* $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}$, *что ни один член* $\mathscr{A}$ *не содержит одновременно* x *и* y.

Свойство (UC1) очевидно, свойство (UC2) есть следствие (U2) и равенства $B(x, V_1 \cap V_2) = B(x, V_1) \cap B(x, V_2)$, а свойство (UC4) следует из (U4) и (U3). Остается установить (UC3); для этого достаточно показать, что для любого $\mathscr{A} = \mathscr{C}(V) \in \boldsymbol{C}$ покрытие $\mathscr{B} = \mathscr{C}(W)$, где $W \in \mathscr{U}$ удовлетворяет включению $4W \subset V$, сильно звездно вписано в $\mathscr{A}$. Рассмотрим элемент $B(x, W)$ покрытия $\mathscr{B}$ и такую точку $y \in X$, что $B(x, W) \cap B(y, W) \neq \varnothing$. Из последнего неравенства получаем $|x - y| < 2W$, так что для любого $z \in B(y, W)$ имеем $|x - z| < 3W \subset 4W \subset V$, т. е. $z \in B(x, V)$. Следовательно, $\mathrm{St}(B(x, W), \mathscr{B}) \subset B(x, V) \in \mathscr{A}$, откуда видно, что $\mathscr{B}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{A}$.

Равномерное пространство — это пара $(X, \mathscr{U})$, состоящая из некоторого множества X и равномерности $\mathscr{U}$ на нем. *Вес равномерного пространства* $(X, \mathscr{U})$ определяется как вес равномерности $\mathscr{U}$.

Каждая равномерность $\mathscr{U}$ на множестве X порождает некоторую топологию $\mathscr{O}$ на X; значит, каждое равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ определяет топологическое пространство $(X, \mathscr{O})$. Точнее, имеет место

8.1.1. Теорема. *Для любой равномерности $\mathcal{U}$ на множестве X семейство*

$$\mathcal{O} = \{G \subset X\colon \text{для каждого } x \in G \text{ существует такое } V \in \mathcal{U}, \text{ что } B(x, V) \subset G\}$$

есть топология на множестве X, и топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$ есть T_1-пространство.

Топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, порожденной* (или *индуцированной*) *равномерностью $\mathcal{U}$*.

Доказательство. Из определения семейства $\mathcal{O}$ следует, что оно удовлетворяет условиям (O1) и (O3). Покажем, что выполнено и условие (O2). Рассмотрим два множества $G_1, G_2 \in \mathcal{O}$ и точку $x \in G_1 \cap G_2$. По определению $\mathcal{O}$ существуют такие $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, что $B(x, V_1) \subset G_1$ и $B(x, V_2) \subset G_2$. Из (U2) следует, что $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$, и так как $B(x, V) = B(x, V_1) \cap B(x, V_2) \subset G_1 \cap G_2$, то $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{O}$.

Остается проверить, что $(X, \mathcal{O})$ есть T_1-пространство. Для этого достаточно показать, что при каждом $x \in X$ множество $G = X \setminus \{x\}$ открыто. Для любого $y \in G$ имеем $x \neq y$, так что, согласно (U4), существует $V \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее неравенству $|x - y| \geqslant V$. Так как $B(y, V) \subset G$, то множество G открыто. ∎

Мы покажем в следствии 8.1.13, что топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$, полученное из равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$, всегда является тихоновским пространством. Так же как в случае метрик, можно спросить, когда для топологического пространства $(X, \mathcal{O})$ существует такая равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X, что порожденная ею топология совпадает с исходной топологией $\mathcal{O}$. В теореме 8.1.20 мы докажем, что такая равномерность существует тогда и только тогда, когда $(X, \mathcal{O})$ — тихоновское пространство. Поэтому некоторые авторы называют тихоновские пространства *униформизуемыми пространствами*.

Если X — топологическое пространство и равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X индуцирует исходную топологию X, то мы будем говорить, что $\mathcal{U}$ есть *равномерность на пространстве X*; вообще говоря, существует много равномерностей на данном тихоновском пространстве (см. пример 8.1.7 и упр. 8.1.B и 8.1.C).

8.1.2. Предложение. *Внутренность множества $A \subset X$ относительно топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$ на множестве X, совпадает с множеством*

$$B = \{x \in X\colon \text{существует такое } V \in \mathcal{U}, \text{ что } B(x, V) \subset A\}.$$

Доказательство. Так как каждое открытое множество $G \subset A$ содержится в B, достаточно показать, что B — открытое множество. Для любой точки $x \in B$ существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $B(x, V) \subset A$; возьмем $W \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условию $2W \subset V$. Из (3) следует, что для каждого $y \in B(x, W)$ имеем $B(y, W) \subset \subset B(x, V) \subset A$; следовательно, $B(x, W) \subset B$, откуда видно, что B — открытое множество. ∎

8.1.3. Следствие. *Если топология пространства X индуцирована равномерностью $\mathcal{U}$, то для каждой точки $x \in X$ и каждого $V \in \mathcal{U}$ множество* $\operatorname{Int} B(x, V)$ *— окрестность точки x.*

Доказательство. Так как $B(x, V) \subset B(x, V)$, точка x принадлежит внутренности шара $B(x, V)$. ∎

8.1.4. Следствие. *Если топология пространства X индуцирована равномерностью $\mathcal{U}$, то для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ имеем*

$$x \in \bar{A} \text{ тогда и только тогда, когда } A \cap B(x, V) \neq \varnothing \text{ для каждого } V \in \mathcal{U}. \quad ∎$$

8.1.5. Следствие. *Если топология пространства X индуцирована равномерностью $\mathcal{U}$, то для каждого $A \subset X$ и каждого $V \in \mathcal{U}$ имеем*

$$\delta(\bar{A}) < 3V, \text{ как только } \delta(A) < V.$$

Доказательство. Согласно последнему следствию, для любых $x, y \in \bar{A}$ существуют такие $x', y' \in A$, что $x' \in B(x, V)$ и $y' \in B(y, V)$. Поэтому $|x - y| < V + V + V = 3V$. ∎

Заметим, что, как вытекает из приведенных выше следствий, пространство X с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$ на множестве X, есть регулярное пространство (ср. со следствием 8.1.13). В самом деле, в силу теоремы 8.1.1, X есть T_1-пространство. Поэтому для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, такого, что $x \notin F$, окрестность $\operatorname{Int} B(x, W)$ точки x, где $W \in \mathcal{U}$ удовлетворяет условию $6W \subset V$ с некоторым $V \in \mathcal{U}$, таким, что $F \cap B(x, V) = \varnothing$, обладает свойством $\overline{\operatorname{Int} B(x, W)} \cap F = \varnothing$.

8.1.6. Пример. Для любого множества X семейство $\mathcal{U} = \mathcal{D}_X$ есть равномерность на X; она называется *дискретной равномерностью* на X, а пространство $(X, \mathcal{U})$ называется *дискретным равномерным пространством*. Одноэлементное семейство $\mathcal{B} = \{\Delta\}$ есть база для $\mathcal{U}$, так что $w(\mathcal{U}) = 1$. Так как $B(x, \Delta) = \{x\}$, то всякое покрытие множества X равномерно относительно $\mathcal{U}$. Ясно, что каждое подмножество $A \subset X$ открыто относительно топологии, индуцированной $\mathcal{U}$, т. е. дискретная равномерность порождает дискретную топологию. ∎

Этот пример показывает, что вес топологического пространства $(X, \mathcal{O})$, где топология $\mathcal{O}$ индуцирована равномерностью $\mathcal{U}$, может оказаться больше веса $\mathcal{U}$. С другой стороны, легко проверить, что характер $(X, \mathcal{O})$ не больше веса $\mathcal{U}$.

8.1.7. Пример. Пусть X — произвольное множество; для каждой конечной последовательности $x_1, \ldots, x_k$ элементов множества X положим по определению

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_k) = X \times X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \{[(X \times \{x_i\}) \cup (\{x_i\} \times X)] \setminus \Delta\}.$$

Множества $V(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ являются окружениями диагонали. Рассмотрим семейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_X$, состоящее из всех окружений диагонали, которые содержат множество $V(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Семейство $\mathcal{U}$ составлено теми элементами $\mathcal{D}_X$, которые получаются из $X \times X$ удалением некоторого множества, покрываемого конечным объединением множеств $(X \times \{x\}) \cup (\{x\} \times X)$. Мы покажем, что $\mathcal{U}$ — равномерность на X.

Тот факт, что $\mathcal{U}$ удовлетворяет условиям (U1) и (U2), следует из определения. Легко проверить, что $2V(x_1, x_2, \ldots, x_k) = V(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, поэтому условие (U3) также выполнено. Наконец, условие (U4) выполнено потому, что $(x, y) \notin V(x)$, когда $x \neq y$.

Так как $B(x, V(x)) = \{x\}$, равномерность $\mathcal{U}$ индуцирует дискретную топологию на X. Если множество X бесконечно, то $\mathcal{U} \neq \mathcal{D}_X$, поэтому, согласно примеру 8.1.6, разные равномерности могут индуцировать одну и ту же топологию. Легко проверить, что если $|X| \geqslant \aleph_0$, то $w(\mathcal{U}) = |X|$. ∎

8.1.8. Пример. Пусть $I = [0, 1]$ — единичный отрезок. Читатель легко проверит, что семейство $\mathcal{U}$ всех окружений диагонали $\Delta \subset I \times I$, которые содержат какое-нибудь открытое подмножество в $I \times I$, содержащее Δ, есть равномерность на I; очевидно, $\mathcal{U}$ индуцирует естественную топологию отрезка I и $w(\mathcal{U}) = \aleph_0$. ∎

Пусть $\mathcal{U}$ — равномерность на множестве X; тихоновская топология на произведении $X \times X$, где X взято с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$, называется *топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$ на множестве $X \times X$*. Пространство $X \times X$ с этой топологией играет важную роль в теории равномерных пространств.

Рассмотрим равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ и некоторую псевдометрику ρ на множестве X; будем говорить, что псевдометрика ρ *равномерна относительно $\mathcal{U}$*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $V \in \mathcal{U}$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, как только $|x - y| < V$.

8.1.9. Предложение. *Если псевдометрика ρ на множестве X равномерна относительно равномерности $\mathcal{U}$ на X, то ρ — непрерыв-*

ное отображение множества $X \times X$ с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$, в вещественную прямую.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — точка $X \times X$; выберем $\varepsilon > 0$ и $V \in \mathcal{U}$ так, что

$$\rho(x, y) < \varepsilon/2, \text{ когда } |x - y| < V.$$

Согласно следствию 8.1.3, множество $\operatorname{Int} B(x_0, V) \times \operatorname{Int} B(y_0, V)$ есть окрестность точки (x_0, y_0), поэтому достаточно показать, что $|\rho(x_0, y_0) - \rho(x, y)| < \varepsilon$ при всех $(x, y) \in B(x_0, V) \times B(y_0, V)$. Если $(x, y) \in B(x_0, V) \times B(y_0, V)$, то $|x_0 - x| < V$ и $|y_0 - y| < V$, и, согласно неравенству треугольника, получаем

$$|\rho(x_0, y_0) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \blacksquare$$

Наша следующая теорема представляет собой один из наиболее важных результатов теории равномерных пространств; она утверждает, грубо говоря, что для всякой равномерности $\mathcal{U}$ существует много псевдометрик, равномерных относительно $\mathcal{U}$. Этот факт будет широко применяться в последующем. В частности, мы выведем из него, что всякое пространство с топологией, индуцированной равномерностью, есть тихоновское пространство.

8.1.10. Теорема. *Для каждой последовательности $V_0, V_1, \ldots$ элементов равномерности $\mathcal{U}$ на множестве X, где*

(4) $\qquad V_0 = X \times X$ *и* $3V_{i+1} \subset V_i$ при $i = 1, 2, \ldots,$

существует такая псевдометрика ρ на множестве X, что при всяком $i \geqslant 1$

$$V_i \subset \{(x, y): \rho(x, y) \leqslant 1/2^i\} \subset V_{i-1}.$$

Доказательство. Определим отображение f из $X \times X$ в R, положив

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} V_i, \\ 1/2^i, \text{ где } (x, y) \in V_i \setminus V_{i+1}, & \text{если } (x, y) \notin \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} V_i. \end{cases}$$

Из определения f следует, что для любых $x, y \in X$ имеем

(5) $\qquad f(x, x) = 0$ и $f(x, y) = f(y, x)$.

Далее, для любой пары x, y точек X определим $\rho(x, y)$ как наибольшую нижнюю грань всех чисел $\sum\limits_{i=1}^{k} f(x_{i-1}, x_i)$, где $x_0, x_1, \ldots, x_k$ — последовательность точек X, такая, что $x_0 = x$ и $x_k = y$. Из (5) следует что $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$; так как, по определению, ρ удовлетворяет неравенству треугольника, ρ есть псевдометрика на X.

Доказательство остальной части теоремы будет выведено из двойного неравенства

$$(6) \qquad \frac{1}{2} f(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant f(x, y).$$

Для доказательства (6) достаточно показать, что при любых $x, y \in X$ и каждой последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_k$, такой, что $x_0 = x$ и $x_k = y$, имеет место неравенство

$$(7) \qquad \frac{1}{2} f(x, y) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1}, x_i).$$

Мы докажем (7) индукцией по k. При $k = 1$ неравенство (7) очевидно. Предположим, что $m > 1$ и что (7) верно для всех $k < m$. Рассмотрим последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_m$, такую, что $x_0 = x$ и $x_m = y$, и пусть $a = \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i)$. Если $a \geqslant 1/2$, то (7) справедливо для $k = m$, так как $f(x, y) \leqslant 1$; поэтому мы можем считать, что $a < 1/2$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a > 0$. Очевидно, что выполнено одно из неравенств $f(x_0, x_1) \leqslant a/2$ или $f(x_{m-1}, x_m) \leqslant a/2$. В силу симметрии наших предположений, можно считать, что $f(x_0, x_1) \leqslant a/2$. Пусть j — наибольший индекс, такой, что

$$\sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant a/2.$$

Тогда $\sum_{i=1}^{j+1} f(x_{i-1}, x_i) > a/2$, откуда $\sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant a/2$.

По индуктивному предположению, $f(x_0, x_j) \leqslant a$ и $f(x_{j+1}, x_m) \leqslant a$. Из определения a следует, что и $f(x_j, x_{j+1}) \leqslant a$. Обозначим через l наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $1/2^l \leqslant a$; так как $a < 1/2$, то $l \geqslant 2$. Очевидно, что $(x_0, x_j) \in V_l$, $(x_j, x_{j+1}) \in V_l$ и $(x_{j+1}, x_m) \in V_l$; из (4) следует, что $(x_0, x_m) = (x, y) \in V_{l-1}$. Итак, $f(x, y) \leqslant 1/2^{l-1} \leqslant 2a$, т. е. $\frac{1}{2} f(x, y) \leqslant a$ и (7) выполнено для $k = m$, если $a > 0$.

Далее, в случае, когда $a = 0$, для $i = 1, 2, \ldots, m$ мы имеем $f(x_{i-1}, x_i) = 0$ и, по определению f, $(x_i, x_{i-1}) \in V_j$ при $j = 0, 1, \ldots$. Отсюда видно, что $(x, y) \in mV_j$ при $j = 0, 1, \ldots$; поэтому, согласно (4), $(x, y) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} V_i$, т. е. $f(x, y) = 0$. Итак, (7) выполнено для $k = m$ в случае $a = 0$. Поэтому (7) имеет место для всех k и (6) доказано. Из (6) и определения f следует, что

$$V_i \subset \{(x, y) : \rho(x, y) \leqslant 1/2^i\} \subset V_{i-1} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots;$$

тем самым доказательство закончено. ∎

8.1.11. Следствие. *Для каждой равномерности $\mathcal{U}$ на множестве X и любого $V \in \mathcal{U}$ существует псевдометрика ρ на множестве X, которая равномерна относительно $\mathcal{U}$ и удовлетворяет условию*

$$\{(x, y) : \rho(x, y) < 1\} \subset V.$$

Доказательство. Из (U3) вытекает, что существует последовательность $V_0, V_1, \ldots$ членов $\mathcal{U}$, для которой $V_1 = V$ и (4) выполнено. Легко проверить, что псевдометрика $\rho = 4\rho_0$, где ρ_0 — псевдометрика, удовлетворяющая теореме 8.1.10, обладает требуемым свойством. ∎

8.1.12. Следствие. *Для каждой равномерности $\mathcal{U}$ на множестве X семейство всех элементов $\mathcal{U}$, открытых относительно топологии, индуцированной $\mathcal{U}$ на $X \times X$, а также семейство всех элементов $\mathcal{U}$, замкнутых относительно этой топологии, являются базами для $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть V — элемент $\mathcal{U}$ и ρ — псевдометрика, определенная в доказательстве следствия 8.1.11. Согласно (U1), множества

$$W = \{(x, y) : \rho(x, y) < 1\} \subset V \quad \text{и} \quad U = \{(x, y) : \rho(x, y) \leqslant 1/2\} \subset V$$

являются элементами $\mathcal{U}$. Из предложения 8.1.9 следует, что первое множество открыто, а второе замкнуто. ∎

8.1.13. Следствие. *Для каждой равномерности $\mathcal{U}$ на множестве X множество X с топологией, индуцированной $\mathcal{U}$, есть тихоновское пространство.*

Доказательство. Для любой точки $x \in X$ и замкнутого множества $F \subset X$, таких, что $x \notin F$, существует $V \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условию $F \cap B(x, V) = \varnothing$. Функция $f: X \to I$, определенная равенством $f(y) = \min(1, \rho(x, y))$, где ρ — псевдометрика из следствия 8.1.11, непрерывна, равна 0 в x и равна 1 на F. ∎

Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство; мы покажем, что семейство P всех псевдометрик на множестве X, равномерных относительно $\mathcal{U}$, обладает следующими свойствами:

(UP1) *Если $\rho_1, \rho_2 \in P$, то $\max(\rho_1, \rho_2) \in P$.*

(UP2) *Для каждой пары x, y различных точек X существует такая $\rho \in P$, что $\rho(x, y) > 0$.*

Для проверки свойства (UP1) рассмотрим $\rho_1, \rho_2 \in P$, $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$, и произвольное $\varepsilon > 0$. По определению псевдометрики, равномерной относительно $\mathcal{U}$, найдутся такие $V_1, V_2 \in$

$\in \mathscr{U}$, что $\rho_1(x, y) < \varepsilon$, как только $|x-y| < V_1$, и $\rho_2(x, y) < \varepsilon$, как только $|x-y| < V_2$. Так как $V = V_1 \cap V_2 \in \mathscr{U}$ и $\rho(x, y) < \varepsilon$, когда $|x-y| < V$, мы имеем $\rho \in P$.

Свойство (UP2) следует из (U4) и следствия 8.1.11.

При определении равномерности на множестве часто более удобно не описывать непосредственно семейство $\mathscr{U}$ окружений диагонали. Мы приведем три способа задания равномерностей: определение базы, семейства равномерных покрытий или семейства равномерных псевдометрик.

8.1.14. Предложение. *Пусть даны множество X и семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{D}_X$ окружений диагонали, обладающее свойствами* (BU1)—(BU3). *Семейство $\mathscr{U}$, состоящее из всех элементов $\mathscr{D}_X$, содержащих некоторый элемент семейства $\mathscr{B}$, есть равномерность на множестве X и $\mathscr{B}$ — ее база.*

Если при этом X — топологическое пространство и семейство $\mathscr{B}$ состоит из открытых подмножеств произведения $X \times X$ и если для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности G существует такое $V \in \mathscr{B}$, что $B(x, V) \subset G$, то $\mathscr{U}$ — равномерность на пространстве X.

Такая равномерность $\mathscr{U}$ называется *равномерностью, порожденной базой $\mathscr{B}$.* ∎

8.1.15. Пример. Читатель может легко проверить, что способ задания равномерности определением базы был применен в примерах 8.1.7 и 8.1.8. ∎

8.1.16. Предложение. *Пусть заданы множество X и совокупность $\boldsymbol{C}$ его покрытий, обладающая свойствами* (UC1)—(UC4). *Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{D}_X$ всех окружений диагонали вида $\bigcup\{H \times H: H \in \mathscr{A}\}$, где $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}$, есть база равномерности $\mathscr{U}$ на множестве X. При этом $\boldsymbol{C}$ есть совокупность всех покрытий X, равномерных относительно $\mathscr{U}$.*

Если к тому же X — топологическое пространство и $\boldsymbol{C}$ состоит из открытых покрытий X и если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности G найдется такое $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}$ что $\mathrm{St}(x, \mathscr{A}) \subset G$, *то $\mathscr{U}$ — равномерность на пространстве X.*

Такая равномерность $\mathscr{U}$ называется *равномерностью, порожденной совокупностью $\boldsymbol{C}$ равномерных покрытий.*

Доказательство. Для каждого покрытия $\mathscr{A}$ множества X положим

$$V(\mathscr{A}) = \bigcup\{H \times H: H \in \mathscr{A}\}.$$

Так как $V(\mathscr{A}) \in \mathscr{D}_X$, достаточно проверить, что семейство $\mathscr{B} = \{V(\mathscr{A}): \mathscr{A} \in \boldsymbol{C}\}$ обладает свойствами (BU1)—(BU3). Но эти свойства следуют непосредственно из свойств (UC2)—(UC4), если заметить, что $V(\mathscr{A}) \subset V(\mathscr{B})$ для покрытия $\mathscr{A}$, вписанного в покрытие $\mathscr{B}$, и что $2V(\mathscr{A}) \subset V(\mathscr{B})$, если $\mathscr{A}$ сильно звездно вписано в $\mathscr{B}$. Тот факт, что $\boldsymbol{C}$ — совокупность всех покрытий X, равномерных относительно $\mathscr{U}$, следует из (UC1) и легко устанавливаемого равенства $B(x, V(\mathscr{A})) = \mathrm{St}(x, \mathscr{A})$.

Из последнего равенства мы получаем также вторую часть теоремы. ∎

8.1.17. Пример. *Группа* — это такое множество G, что для любой пары x, y его элементов определен элемент $xy \in G$ — произведение x и y и выполнены следующие три условия:

(G1) *$(xy)z = x(yz)$ для всех $x, y, z \in G$.*

(G2) *Существует такой элемент $e \in G$, что $xe = ex = x$ для каждого $x \in G$.*

(G3) *Для каждого $x \in G$ существует такой элемент $x^{-1} \in G$, что $xx^{-1} = e$.*

Элемент e называется *единицей* в G, а x^{-1} называется *обратным элементом* для x. Легко проверить, что существует только одна единица в G и что для каждого $x \in G$ существует ровно один обратный элемент. Если в группе G кроме условий (G1)—(G3) выполнено условие

(G4) *$xy = yx$ для всех $x, y \in G$,*

то G называется *абелевой* или *коммутативной группой.*

Топологическая группа — это группа G, которая одновременно является T_1-пространством, причем выполнены следующие два условия:

(TG1) *Формула $f(x, y) = xy$ определяет непрерывное отображение $f: G \times G \to G$.*

(TG2) *Формула $f(x) = x^{-1}$ определяет непрерывное отображение $f: G \to G$.*

Пусть G — группа и A, B — ее подмножества; положим

$$A^{-1} = \{x^{-1}: x \in A\} \quad \text{и} \quad AB = \{xy: x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Для подмножества $A \subset G$ и элемента $x \in G$ вместо $\{x\}A$ и $A\{x\}$ мы пишем просто xA и Ax. Легко проверить, что если A — открытое подмножество топологической группы G, то множество A^{-1} также открыто. Аналогично множество AB открыто, если хотя бы одно из множеств A и B открыто. В частности, для каждого открытого множества $H \subset G$ множества xH и Hx открыты.

Пусть G — топологическая группа и $\mathscr{B} = \mathscr{B}(e)$ — ее база в точке e. Каждый элемент H семейства $\mathscr{B}$ определяет три покрытия G:

$$\mathscr{C}_l(H) = \{xH\}_{x \in G}, \quad \mathscr{C}_r(H) = \{Hx\}_{x \in G} \quad \text{и} \quad \mathscr{C}(H) = \{xHy\}_{x, y \in G}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{C}_l$, $\boldsymbol{C}_r$ и $\boldsymbol{C}$ соответственно совокупности всех покрытий G, в которые вписаны покрытия вида $\mathscr{C}_l(H)$, $\mathscr{C}_r(H)$

или $\mathscr{C}(H)$, где $H \in \mathscr{B}$. Каждая из совокупностей $\boldsymbol{C}_l$, $\boldsymbol{C}_r$ и $\boldsymbol{C}$ обладает свойствами (UC1)—(UC4) и поэтому порождает равномерность на множестве G. Более того, топология, индуцированная каждой из этих равномерностей, совпадает с исходной топологией G. Во всех трех случаях доказательства одинаковы, поэтому мы обсудим только случай $\boldsymbol{C}_l$. Отметим, что если G — абелева группа, то $\boldsymbol{C}_l$, $\boldsymbol{C}_r$ и $\boldsymbol{C}$ совпадают и поэтому порождают одну и ту же равномерность на множестве G.

Рассмотрим топологическую группу G и определенную выше совокупность $\boldsymbol{C}_l$ ее покрытий. Из определения $\boldsymbol{C}_l$ немедленно вытекает, что $\boldsymbol{C}_l$ обладает свойством (UC1). Так как для любых $H_1, H_2 \in \mathscr{B}$ существует такое $H \in \mathscr{B}$, что $H \subset H_1 \cap H_2$, то $\boldsymbol{C}_l$ обладает свойством (UC2).

Для доказательства того, что $\boldsymbol{C}_l$ обладает свойством (CU3), достаточно показать, что

(8) *Для каждого $H \in \mathscr{B}$ существует такое $H_1 \in \mathscr{B}$, что $\operatorname{St}(xH_1, \mathscr{C}_l(H_1)) \subset xH$ при всех $x \in G$.*

Так как формула $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^{-1} x_3$ определяет непрерывное отображение $f\colon G \times G \times G \to G$ и $f(e, e, e) = e$, для каждого $H \in \mathscr{B}$ найдется такое $H_1 \in \mathscr{B}$, что $f(H_1 \times H_1 \times H_1) = H_1 H_1^{-1} H_1 \subset H$; мы покажем, что H_1 удовлетворяет (8). Ясно, что если $xH_1 \cap x_1 H_1 \neq \varnothing$ при некотором фиксированном $x \in G$, то $xh_0 = x_1 h_1$, т. е. $x_1 = xh_0 h_1^{-1}$ для некоторых $h_0, h_1 \in H_1$; поэтому для каждого элемента $x_1 h$ из $x_1 H_1$ имеем

$$x_1 h = x h_0 h_1^{-1} h \in x H_1 H_1^{-1} H_1 \subset xH,$$

что доказывает утверждение (8).

Для каждой пары x, y различных точек G имеем $x^{-1}y \neq e$. Так как G есть T_1-пространство, существует такое $H \in \mathscr{B}$, что $x^{-1}y \notin H$. Мы покажем, что ни один элемент покрытия $\mathscr{C}_l(H_1)$, где $H_1 \in \mathscr{B}$ удовлетворяет включению $H_1^{-1} H_1 \subset H$, не содержит одновременно x и y. В самом деле, из равенств $x = x_0 h_1$ и $y = x_0 h_2$, где $h_1, h_2 \in H_1$, следует, что $x^{-1}y = h_1^{-1} h_2 \in H_1^{-1} H_1 \subset H$, что противоречит выбору окрестности H_1. Поэтому $\boldsymbol{C}_l$ обладает и свойством (CU4).

Проверим, что топология, индуцированная равномерностью, порожденной $\boldsymbol{C}_l$, совпадает с исходной топологией G. Так как $\boldsymbol{C}_l$ состоит из открытых покрытий G, достаточно заметить, что для каждой точки $x \in G$ и любой ее окрестности U найдется такое $H \in \mathscr{B}$, что $xH \subset U$, и применить (8). В частности, мы получим важное следствие о том, что каждая топологическая группа есть тихоновское пространство. ∎

8.1.18. Предложение. *Пусть дано множество X и семейство P псевдометрик на нем, обладающее свойствами* (UP1)—(UP2). *Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{D}_X$ всех окружений диагонали вида $\{(x, y)$: $\rho(x, y) < 1/2^i\}$, где $\rho \in P$ и $i = 1, 2, \ldots$, образует базу равномерности $\mathscr{U}$ на множестве X. Каждая псевдометрика $\rho \in P$ равномерна относительно $\mathscr{U}$.*

Если к тому же X — топологическое пространство и все псевдометрики семейства P — непрерывные функции из $X \times X$ в вещественную прямую и если для каждого $x \in X$ и каждого непустого замкнутого множества $A \subset X$, такого, что $x \notin A$, найдется такое $\rho \in P$, что $\inf\limits_{a \in A} \rho(x, a) > 0$, то $\mathscr{U}$ — равномерность на пространстве X.

Равномерность $\mathscr{U}$ называется *равномерностью, порожденной семейством P равномерных псевдометрик.* ∎

8.1.19. Пример. Пусть X — тихоновское пространство; обозначим через $C(X)$ семейство всех непрерывных вещественных функций, определенных на X, и через $C^*(X)$ — подсемейство в $C(X)$, состоящее из всех ограниченных функций. Для каждой конечной последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_k$ элементов $C(X)$ формула

$$\rho_{f_1, f_2, \ldots, f_k}(x, y) = \max\{|f_1(x) - f_1(y)|, |f_2(x) - f_2(y)|, \ldots \\ \ldots, |f_k(x) - f_k(y)|\} \tag{9}$$

определяет псевдометрику на множестве X. Пусть P — семейство всех псевдометрик $\rho_{f_1, f_2, \ldots, f_k}$, где $f_1, f_2, \ldots, f_k \in C(X)$, и пусть P^* — подсемейство в P, состоящее из всех псевдометрик $\rho_{f_1, f_2, \ldots, f_k}$, где $f_1, f_2, \ldots, f_k \in C^*(X)$.

Оба семейства P и P^* обладают свойствами (UP1)—(UP2), так что они порождают равномерности $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}^*$ на множестве X. Мы покажем, что топологии, индуцированные $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}^*$, совпадают с исходной топологией X.

Из (9) следует, что все псевдометрики в семействе P — непрерывные функции из $X \times X$ в вещественную прямую. Рассмотрим $x \in X$ и непустое замкнутое множество $A \subset X$, такое, что $x \notin A$. Так как X — тихоновское пространство, существует функция $f \in C^*(X) \subset C(X)$, удовлетворяющая условиям $f(x) = 0$ и $f(A) \subset \{1\}$. Псевдометрика $\rho_f \in P^* \subset P$ с очевидностью удовлетворяет равенству $\inf\limits_{a \in A} \rho_f(x, a) = 1$, так что, согласно второй части предложения 8.1.18, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}^*$ — равномерности на пространстве X. ∎

В связи с описанными выше способами задания равномерностей мы обращаем внимание читателя на следующий простой факт: если $\mathscr{U}_0$ — равномерность на множестве X, то для базы $\mathscr{B}$

равномерности $\mathcal{U}_0$ (совокупности $\boldsymbol{C}$ всех покрытий X, равномерных относительно $\mathcal{U}_0$; семейства P всех псевдометрик на X, равномерных относительно $\mathcal{U}_0$) равномерность $\mathcal{U}$, порожденная на X базой $\mathcal{B}$ (совокупностью $\boldsymbol{C}$, семейством P) в соответствии с предложением 8.1.14 (предложением 8.1.16, предложением 8.1.18), совпадает с исходной равномерностью $\mathcal{U}_0$.

Пример 8.1.19 и следствие 8.1.13 приводят к следующему утверждению:

8.1.20. Теорема. *Топология пространства X индуцирована некоторой равномерностью на множестве X тогда и только тогда, когда X — тихоновское пространство.* ∎

Пусть X — некоторое множество и ρ — метрика на нем. Так как семейство $\{\rho\}$, состоящее из единственной псевдометрики ρ, обладает свойствами (UP1)—(UP2), оно порождает равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X. Более того, согласно следствиям 4.2.6 и 4.1.11, топологии, индуцированные на X метрикой ρ и равномерностью $\mathcal{U}$, совпадают. Равномерность $\mathcal{U}$ называется *равномерностью, индуцированной* (или *порожденной*) *метрикой* ρ. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ *метризуемо*, если на множестве X существует такая метрика ρ, что индуцированная ею равномерность совпадает с исходной равномерностью $\mathcal{U}$. Возникает естественный вопрос: существуют ли внутренние характеристики метризуемых равномерных пространств. Наша следующая теорема содержит такую характеристику.

8.1.21. Теорема. *Равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X порождена некоторой метрикой на X тогда и только тогда, когда $w(\mathcal{U}) \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. Очевидно, что каждая равномерность, индуцированная метрикой, имеет вес $\leqslant \aleph_0$.

Рассмотрим равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X, которая имеет счетную базу $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$. Существует такая последовательность $V_0, V_1, \ldots$ элементов $\mathcal{U}$, что

$$V_0 = X \times X, \quad 3V_{i+1} \subset V_i \quad \text{и} \quad V_i \subset U_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Последнее включение влечет за собой равенство $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i = \Delta$, так что псевдометрика ρ из теоремы 8.1.10, соответствующая нашей последовательности $V_0, V_1, \ldots$ элементов $\mathcal{U}$, есть метрика. Из второго включения в теореме 8.1.10 немедленно получаем, что ρ индуцирует исходную равномерность $\mathcal{U}$. ∎

Заметим в связи с последней теоремой, что, как показывает пример 8.1.7, может случиться, что метризуемая топология на множестве X индуцируется такой равномерностью $\mathcal{U}$ на X, которая не порождается никакой метрикой на X.

Отметим также, что из 8.1.21 и 8.1.18 вытекает лемма 4.4.6, а из 8.1.21 и 8.1.16 — следствие 5.4.10.

Мы закончим этот параграф кратким обсуждением равномерно непрерывных отображений. Пусть $(X, \mathcal{U})$ и $(Y, \mathcal{V})$ — два равномерных пространства; отображение f множества X в множество Y называется *равномерно непрерывным относительно равномерностей* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$, если для каждого $V \in \mathcal{V}$ существует такое $U \in \mathcal{U}$, что при всех x, $x' \in X$ мы имеем $|f(x) - f(x')| < V$, когда $|x - x'| < U$. Из этого определения сразу вытекает, что f — непрерывное отображение пространства X с топологией, индуцированной $\mathcal{U}$, в пространство Y с топологией, индуцированной $\mathcal{V}$. Тот факт, что f — равномерно непрерывное отображение относительно равномерностей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на X и Y соответственно, будет записываться в виде $f\colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$.

Читатель может легко проверить, что если $f\colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ и $g\colon (Y, \mathcal{V}) \to (Z, \mathcal{W})$, то $gf\colon (X, \mathcal{U}) \to (Z, \mathcal{W})$ т. е., композиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.

Так же как и в случае топологических пространств, можно сформулировать признаки равномерной непрерывности отображения в соответствии с разными способами задания равномерностей.

8.1.22. Предложение. *Пусть* $(X, \mathcal{U})$ *и* $(Y, \mathcal{V})$ — *равномерные пространства и* f — *отображение* X *в* Y. *Следующие условия равносильны*:

(i) *Отображение* f *равномерно непрерывно относительно* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$.

(ii) *Существуют базы* $\mathcal{B}$ *и* $\mathcal{C}$ *для* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ *соответственно, такие, что для каждого* $V \in \mathcal{C}$ *найдется* $U \in \mathcal{B}$, *удовлетворяющее условию* $U \subset (f \times f)^{-1}(V)$.

(iii) *Для каждого покрытия* $\mathcal{A}$ *множества* Y, *равномерного относительно* $\mathcal{V}$, *покрытие* $\{f^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{A}\}$ *множества* X *равномерно относительно* $\mathcal{U}$.

(iv) *Для каждой псевдометрики* ρ *на множестве* Y, *равномерной относительно* $\mathcal{V}$, *псевдометрика* σ *на множестве* X, *определенная равенством* $\sigma(x, y) = \rho(f(x), f(y))$, *равномерна относительно* $\mathcal{U}$. ∎

Взаимно однозначное отображение f множества X на множество Y есть *равномерный изоморфизм относительно равномерностей* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ на множествах X и Y соответственно, если f равномерно непрерывно относительно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ и обратное отображение f^{-1} равномерно непрерывно относительно $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$. Равномерный изоморфизм есть гомеоморфизм индуцированных топологических пространств.

Два равномерных пространства $(X, \mathcal{U})$ и $(Y, \mathcal{V})$ называются *равномерно изоморфными*, если существует равномерный изоморфизм $(X, \mathcal{U})$ на $(Y, \mathcal{V})$. Изучение *равномерных свойств* или *равномерных инвариантов*, т. е. инвариантов равномерных изоморфизмов, и есть предмет теории равномерных пространств. Очевидно, что каждый топологический инвариант есть равномерный инвариант.

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие равномерного пространства введено Вейлем в [1938]. Первое систематическое изложение теории равномерных пространств дано в книге Бурбаки [1940]. Наше определение равномерности слегка отличается от первоначального определения Вейля: под окружением диагонали Вейль понимал любое множество $V \subset X \times X$, содержащее Δ (т. е. не предполагалось выполнение условия симметрии $V = -V$), а под равномерностью — семейство $\mathcal{U}$ окружений диагонали, удовлетворяющее условиям (U1)—(U4) и содержащее вместе с каждым V также и множество $-V$. То, что мы рассматриваем лишь симметричные окружения, немного упрощает наше изложение.

Работа Вейля содержит теоремы 8.1.1, 8.1.20, 8.1.21, пример 8.1.17 и определения равномерно непрерывного отображения и равномерного изоморфизма. В своем доказательстве теоремы 8.1.20 Вейль обобщил одно неопубликованное рассуждение Л. С. Понтрягина, доказавшего, что каждая топологическая группа является тихоновским пространством. Аналог теоремы 8.1.21 для топологических групп (см. упр. 8.1.G) также был известен ранее: он был получен Биркгофом в [1936] и Какутани в [1936]. Теорему 8.1.21 можно рассматривать как аналог метризационной теоремы Александрова — Урысона для равномерных пространств, доказанную этими авторами в [1923] (ср. с замечаниями по поводу теоремы 5.4.9).

Другое, но эквивалентное предыдущему понятие равномерного пространства, определенное в терминах совокупности покрытий (ср. с теоремой 8.1.16), было введено и изучено Тьюки в [1940], где он доказал теорему 8.1.10, сформулированную в терминах покрытий (см. упр. 5.4.H(a)). В настоящее время язык покрытий получил более широкое распространение, чем язык окружений диагонали. Книга Исбелла [1964], в которой теория равномерных пространств получила важное развитие, написана в терминах покрытий.

Из теоремы 8.1.10 вытекает, что равномерные пространства могут быть также описаны в терминах псевдометрик (см. задачу 8.5.5); такое описание дано Бурбаки в [1948]. Язык псевдометрик использовали Гиллман и Джерисон в книге [1960]. Мы следовали этой книге, когда описывали равномерности $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^*$ в примерах 8.1.19, 8.3.4, 8.3.18 и 8.3.19.

УПРАЖНЕНИЯ

8.1.A. (a) Пусть (X, ρ) и (Y, σ) — метрические пространства, и пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — равномерности, индуцированные метриками ρ и σ на X и Y соответственно. Покажите, что отображение $f\colon X \to Y$ равномерно непрерывно относительно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в том и только том случае, если f равномерно непрерывно относительно ρ и σ (ср. с задачей 8.5.19(a)).

(b) Заметьте, что две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X равномерно эквивалентны (см. упр. 4.1.B(b)) тогда и только тогда, когда они индуцируют одну и ту же равномерность.

8.1.B. Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — две равномерности на множестве X и $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$; мы говорим, что равномерность $\mathcal{U}_1$ *сильнее* (*тоньше*) равномерности $\mathcal{U}_2$ или что $\mathcal{U}_2$ *слабее* (*грубее*), чем $\mathcal{U}_1$.

(a) Проверьте, что если равномерность $\mathcal{U}_1$ на множестве X сильнее равномерности $\mathcal{U}_2$, то топология, индуцированная равномерностью $\mathcal{U}_1$, сильнее топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}_2$.

(b) Покажите, что каждое семейство $\{\mathcal{U}_s\}_{s \in S}$ равномерностей на множестве X имеет наименьшую верхнюю грань, т. е. существует равномерность $\mathcal{U}$ на X, которая слабее любой равномерности на X, более сильной, чем все равномерности $\mathcal{U}_s$. Проверьте, что если равномерность $\mathcal{U}_s$ индуцирует топологию $\mathcal{O}_s$, то топология, индуцированная наименьшей верхней гранью семейства $\{\mathcal{U}_s\}_{s \in S}$, есть наименьшая верхняя грань семейства $\{\mathcal{O}_s\}_{s \in S}$ топологий на множестве X. Заметьте, что если каждая из равномерностей $\mathcal{U}_s$ индуцирует одну и ту же топологию $\mathcal{O}$ на X, то наименьшая верхняя грань семейства $\{\mathcal{U}_s\}_{s \in S}$ также индуцирует топологию $\mathcal{O}$.

(c) Приведите пример двух равномерностей $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ на счетном множестве X, таких, что не существует равномерности на X, которая была бы слабее их обеих одновременно.

8.1.C. Наименьшая верхняя грань всех равномерностей на тихоновском пространстве X, т. е. сильнейшая из всех равномерностей на пространстве X, называется *универсальной равномерностью* на пространстве X (см. упр. 8.1.B(b); ср. с задачей 8.5.8). Мы называем равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ *сильным* (*тонким*), если $\mathcal{U}$ — универсальная равномерность на пространстве X с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$.

(a) Покажите, что каждое непрерывное отображение тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y равномерно непрерывно относительно универсальной равномерности на пространстве X и любой равномерности на пространстве Y. Заметьте, что сформулированное выше свойство характеризует универсальную равномерность на X.

(b) Покажите, что для каждого тихоновского пространства X совокупность всех нормальных покрытий пространства X обладает свойствами (UC1)—(UC4); убедитесь, что равномерность, порожденная этой совокупностью, является универсальной равномерностью на X.

(c) Покажите, что для каждого тихоновского пространства X семейство всех псевдометрик на множестве X, которые являются непрерывными вещественными функциями на произведении $X \times X$, обладает свойствами (UP1)—(UP2). Заметьте, что равномерность, порожденная этим семейством, есть универсальная равномерность на X.

8.1.D. Проверьте, что для любого тихоновского пространства X равномерность $\mathscr{C}$ (равномерность $\mathscr{C}^*$) есть слабейшая равномерность в семействе всех равномерностей $\mathscr{U}$ на пространстве X, таких, что каждая непрерывная функция $f\colon X \to R$ (каждая непрерывная функция $f\colon X \to I$) равномерно непрерывна относительно $\mathscr{U}$ и равномерности, индуцированной на вещественной прямой (замкнутом единичном интервале) естественной метрикой.

8.1.E. Пусть X — топологическое пространство, x — точка пространства X и F — замкнутое подмножество X, такое, что $x \notin F$. Покажите, что для каждой равномерности $\mathscr{U}$ на пространстве X существует отображение $f\colon X \to I$, равномерно непрерывное относительно $\mathscr{U}$ и равномерности на I, индуцированной естественной метрикой, и такое, что $f(x) = 0$ и $f(F) \subset \{1\}$.

8.1.F. Пусть X — некоторое множество, $\{(Y_s, \mathscr{U}_s)\}_{s \in S}$ — семейство равномерных пространств и $\{f_s\}_{s \in S}$ — семейство отображений $f_s\colon X \to Y_s$. Покажите, что в классе всех равномерностей на множестве X, относительно которых все f_s равномерно непрерывны, существует слабейшая равномерность $\mathscr{U}$. Определите базу равномерности $\mathscr{U}$ и докажите, что топология, индуцированная $\mathscr{U}$, совпадает с топологией, порожденной семейством отображений $\{f_s\}_{s \in S}$, где Y_s имеет топологию, индуцированную $\mathscr{U}_s$. Такая равномерность $\mathscr{U}$ называется *равномерностью, порожденной семейством отображений* $\{f_s\}_{s \in S}$.

8.1.G. (a) (Биркгоф [1936], Какутани [1936]). Покажите, что топологическая группа метризуема тогда и только тогда, когда она удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(b) Выведите (a) из метризационного критерия Бинга.

8.1.H (Тьюки [1940]). Покажите, что для тихоновского пространства X совокупность всех его покрытий, в которые можно вписать конечные нормальные покрытия, обладает свойствами (UC1)—(UC4); убедитесь, что равномерность, порожденная этой совокупностью, есть равномерность $\mathscr{C}^*$.

Указание (Исбелл [1964]). Устанавливая свойство (UC3), проверьте, что если покрытие $\mathscr{B}$ сильно звездно вписано в конечное покрытие $\mathscr{A}$ и для любой пары $\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_1$ подсемейств семейства $\mathscr{A}$ определено $\mathscr{B}(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1)$ как семейство всех $B \in \mathscr{B}$, таких, что $\mathscr{A}_0 = \{A \in \mathscr{A}: B \subset A\}$ и $\mathscr{A}_1 = \{A \in \mathscr{A}: \operatorname{St}(B, \mathscr{B}) \subset A\}$, то множества $\bigcup \mathscr{B}(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1)$ образуют сильно звездно вписанное в $\mathscr{A}$ конечное покрытие. В доказательстве заключительной части воспользуйтесь следствием 8.1.11.

8.1.I. (a) (Широта [1952]). Покажите, что для каждого тихоновского пространства X семейство всех его покрытий, имеющих счетное нормальное вписанное покрытие, обладает свойствами (UC1)—(UC4).

Указание (Куцья [1973]). Устанавливая свойство (UC3), проверьте, что если покрытие $\mathscr{B}$ сильно звездно вписано в счетное покрытие $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ и для любого натурального числа k и каждого подсемейства $\mathscr{A}_0$ семейства $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ определяется $\mathscr{B}_k(\mathscr{A}_0)$ как семейство всех $B \in \mathscr{B}$, таких, что $\mathscr{A}_0 = \{A_i: B \subset A_i, i \leqslant k\}$ и $\operatorname{St}(B, \mathscr{B}) \subset A_k$, то множества $\mathscr{B}_k(\mathscr{A}_0)$ образуют счетное покрытие, звездно вписанное в $\mathscr{A}$.

(b) Покажите, что равномерность, порожденная совокупностью всех покрытий тихоновского пространства X, имеющих счетные нормальные вписанные покрытия, сильнее равномерности $\mathscr{C}$ и, вообще говоря, отличается от $\mathscr{C}$ (ср. с примером 8.3.19 и упр. 8.3.F).

Указание. Каждое покрытие, равномерное относительно $\mathscr{C}$, имеет вписанное покрытие конечного порядка.

8.2. ОПЕРАЦИИ НА РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть даны равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ и множество $M \subset X$. Легко видеть, что семейство $\mathscr{U}_M = \{(M \times M) \cap V: V \in \mathscr{U}\} \subset \mathscr{D}_M$ удовлетворяет условиям (U1)—(U4), т. е. $(M, \mathscr{U}_M)$ — равномерное пространство. Равномерное пространство $(M, \mathscr{U}_M)$ называется *подпространством равномерного пространства* $(X, \mathscr{U})$. Легко проверить, что топология, индуцированная на M равномерностью $\mathscr{U}_M$, совпадает с топологией на M как подпространстве пространства X, где X имеет топологию, индуцированную $\mathscr{U}$.

Если равномерность $\mathscr{U}$ индуцирована метрикой ρ на множестве X, то равномерность $\mathscr{U}_M$ совпадает с равномерностью, индуцированной ρ_M на множестве M.

Для каждого равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ и любого множества $M \subset X$ формула $i_M(x) = x$ определяет равномерно непрерывное отображение i_M: $(M, \mathscr{U}_M) \to (X, \mathscr{U})$; отображение i_M

называется *вложением подпространства* $(M, \mathcal{U}_M)$ *в пространство* $(X, \mathcal{U})$.

Перейдем к (декартовым) произведениям равномерных пространств. Пусть $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$ — семейство равномерных пространств. Семейство $\mathcal{B}$ всех окружений диагонали $\Delta \subset \left(\prod_{s \in S} X_s\right) \times \times \left(\prod_{s \in S} X_s\right)$ вида

$$\{(\{x_s\}, \{y_s\}) \colon |x_{s_i} - y_{s_i}| < V_{s_i} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ и $V_{s_i} \in \mathcal{U}_{s_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, обладает свойствами (BU1)—(BU3), так что, согласно предложению 8.1.14, семейство $\mathcal{B}$ порождает равномерность на множестве $\prod_{s \in S} X_s$; эта равномерность называется (*декартовым*) *произведением равномерностей* $\{\mathcal{U}_s\}_{s \in S}$ и обозначается $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$. Произведение конечного семейства равномерностей $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^k$ обозначается $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \ldots \times \mathcal{U}_k$. Если все равномерности $\mathcal{U}_s$ равны друг другу, т. е. если $X_s = X$ и $\mathcal{U}_s = \mathcal{U}$ при всех $s \in S$, то произведение $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$ обозначается также $\mathcal{U}^{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m} = |S|$. Равномерное пространство $\left(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{U}_s\right)$ называется (*декартовым*) *произведением равномерных пространств* $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$. Читатель может легко проверить, что топология, индуцированная на $\prod_{s \in S} X_s$ равномерностью $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$, совпадает с тихоновской топологией на произведении $\prod_{s \in S} X_s$, где X_s имеют топологию, индуцированную $\mathcal{U}_s$.

Если для $i = 1, 2, \ldots$ равномерность $\mathcal{U}_i$ на множестве X_i индуцирована метрикой ρ_i на пространстве X_i, ограниченной числом 1, то равномерность $\prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ на множестве $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ совпадает с равномерностью, индуцированной метрикой ρ, определенной формулой (2) в § 4.2.

Легко видеть, что если $\left(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{U}_s\right)$ — произведение равномерных пространств $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$, то для любого $s \in S$ проекция p_s произведения $\prod_{s \in S} X_s$ на s-ю ось X_s, определенная формулой $p_s(\{x_s\}) = x_s$, равномерно непрерывна относительно $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$ и $\mathcal{U}_s$.

Имеет место следующий равномерный аналог предложения 2.3.6.

8.2.1. Предложение. *Пусть* $(X, \mathcal{U})$ — *равномерное пространство,* $\{(Y_s, \mathcal{V}_s)\}_{s \in S}$ — *семейство равномерных пространств и* f — *отображение множества* X *в произведение* $\prod_{s \in S} Y_s$. *Отображение* f *равномерно непрерывно относительно* $\mathcal{U}$ *и* $\prod_{s \in S} \mathcal{V}_s$ *тогда и только тогда, когда композиция* $p_s f$ *равномерно непрерывна относительно* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}_s$ *при всех* $s \in S$. ∎

8.2.2. Пример. Возьмем интервал I с равномерностью $\mathcal{U}$, индуцированной естественной метрикой на I. На произведении $I^{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, рассмотрим равномерность $\mathcal{U}^{\mathfrak{m}}$ — произведение $\mathfrak{m}$ копий равномерности $\mathcal{U}$. Очевидно, что $\mathcal{U}^{\mathfrak{m}}$ индуцирует на $I^{\mathfrak{m}}$ топологию тихоновского куба веса $\mathfrak{m}$. Легко видеть, что $w(\mathcal{U}^{\mathfrak{m}}) \leqslant \mathfrak{m}$ и из следствия 2.3.25 следует, что $w(\mathcal{U}^{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$.

Каждое тихоновское пространство X веса $\leqslant \mathfrak{m}$ можно рассматривать как подпространство $I^{\mathfrak{m}}$. Так как равномерность $\mathcal{U}^{\mathfrak{m}}$ индуцирует на $I^{\mathfrak{m}}$ топологию тихоновского куба, равномерность $(\mathcal{U}^{\mathfrak{m}})_X$ индуцирует исходную топологию на X. Поэтому опология всякого тихоновского пространства веса $\leqslant \mathfrak{m}$ индуцирована некоторой равномерностью веса $\leqslant \mathfrak{m}$. ∎

8.2.3. Теорема. *Каждое равномерное пространство равномерно изоморфно подпространству произведения некоторого семейства метризуемых равномерных пространств.*

Доказательство. Рассмотрим равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$. Согласно (U3), для каждого $V \in \mathcal{U}$ существует последовательность $V_0, V_1, \ldots$ элементов $\mathcal{U}$, такая, что

(1) $\quad V_0 = X \times X, \quad V_1 = V \quad$ и $\quad 3V_{i+1} \subset V_i \quad$ для $\quad i = 1, 2, \ldots$.

Воспользуемся теоремой 8.1.10. Для этого возьмем такую псевдометрику ρ_V на множестве X, что для любого $i \geqslant 1$

(2) $$V_i \subset \{(x, y) \colon \rho_V(x, y) \leqslant 1/2^i\} \subset V_{i-1}.$$

Полагая $x E_V y$ тогда и только тогда, если $\rho_V(x, y) = 0$, мы определим отношение эквивалентности E_V на множестве X (ср. с упр. 4.2.I); пусть X_V — множество всех классов эквивалентности для E_V. Из неравенства треугольника следует, что для всех $x, x', y, y' \in X$, таких, что $x E_V x'$ и $y E_V y'$, мы имеем

$$\rho_V(x, y) = \rho_V(x', y').$$

Таким образом, полагая $\bar{\rho}_V([x], [y]) = \rho_V(x, y)$ для всех $[x], [y] \in X_V$, мы определим метрику $\bar{\rho}_V$ на множестве X_V. Пусть

$\mathcal{U}_V$ — равномерность на множестве X_V, индуцированная метрикой $\bar{\rho}_V$. Из (2) следует, что, полагая $f_V(x) = [x]$, мы определим равномерно непрерывное отображение f_V пространства $(X, \mathcal{U})$ в пространство $(X_V, \mathcal{U}_V)$.

Из предложения 8.2.1 следует, что диагональ $\underset{V \in \mathcal{U}}{\Delta} f_V$ есть равномерно непрерывное отображение $(X, \mathcal{U})$ в произведение $\left(\prod_{V \in \mathcal{U}} X_V, \prod_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_V\right)$. Мы покажем, что сужение $f = \left(\underset{V \in \mathcal{U}}{\Delta} f_V\right)\Big| X$ есть равномерный изоморфизм.

Из (U4), (1) и (2) следует, что для каждой пары x, y различных точек пространства X существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $\rho_V(x, y) > 0$; поэтому $f(x) \neq f(y)$, откуда видно, что f — взаимно однозначное отображение.

Осталось доказать, что f^{-1} равномерно непрерывно относительно $\left(\prod_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_V\right)_{f(X)}$ и $\mathcal{U}$, т. е. показать, что для любого $V_0 \in \mathcal{U}$ существует такое $W \in \prod_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_V$, что $|x - y| < V_0$, когда $|f(x) - f(y)| < W$. Но из (1) и (2) следует, что

$$W = \{(\{x_V\}, \{y_V\}) \colon \rho_{V_0}(x_{V_0}, y_{V_0}) < 1/4\}$$

обладает требуемыми свойствами. ∎

8.2.4. Замечание. Отметим, что если в доказательстве предыдущей теоремы мы рассмотрим только такие V, которые принадлежат некоторой базе равномерности $\mathcal{U}$, то отображение f — также равномерный изоморфизм. Поэтому каждое равномерное пространство веса $\mathfrak{m}$ равномерно изоморфно подпространству произведения $\mathfrak{m}$ метризуемых равномерных пространств.

Отметим также, что не существует универсального пространства для всех равномерных пространств веса $\leqslant \mathfrak{m}$, т. е. не существует равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ веса $\leqslant \mathfrak{m}$, такого, что для любого равномерного пространства $(Y, \mathcal{V})$ веса $\leqslant \mathfrak{m}$ оно содержит равномерное подпространство, равномерно изоморфное $(Y, \mathcal{V})$. В самом деле, из примера 8.1.6 следует, что вес дискретного равномерного пространства равен 1, и так как мощность множества X может быть произвольно большой, не существует равномерного пространства, содержащего подпространства, равномерно изоморфные — или даже подмножества, равномощные — всем дискретным равномерным пространствам.

В оставшейся части этого параграфа мы обсудим пространства отображений.

Пусть X — топологическое, а $(Y, \mathcal{U})$ — равномерное пространства. Через Y^X обозначается множество всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, где Y снабжено топологией, индуцированной $\mathcal{U}$. Для каждого $V \in \mathcal{U}$ обозначим через $\hat{V}$ окружение диагонали $\Delta \subset Y^X \times Y^X$, определенное формулой

$$\hat{V} = \{(f, g): \ |f(x) - g(x)| < V \ \text{для любого} \ x \in X\}.$$

Из легко устанавливаемых формул

$$\hat{U} \cap \hat{V} = \widehat{U \cap V} \quad \text{и} \quad \hat{U} + \hat{V} \subset \widehat{U + V}$$

следует, что семейство $\{\hat{V}: V \in \mathcal{U}\}$ обладает свойствами (BU1)—(BU3). Равномерность на множестве Y^X, порожденная этим семейством, будет называться *равномерностью равномерной сходимости*, индуцированной $\mathcal{U}$, и обозначаться $\hat{\mathcal{U}}$.

Если равномерность $\mathcal{U}$ индуцирована ограниченной метрикой ρ на Y, то $w(\hat{\mathcal{U}}) \leqslant \aleph_0$, так что (по теореме 8.1.21) равномерность $\hat{\mathcal{U}}$ индуцирована некоторой метрикой на Y^X. Легко проверить, что метрика $\hat{\rho}$, определенная формулой (7) в § 4.2, индуцирует равномерность $\hat{\mathcal{U}}$. Поэтому из примера 4.2.14 следует, что для двух равномерностей $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ на Y, которые индуцируют одну и ту же топологию, топологии на Y^X, индуцированные $\hat{\mathcal{U}}_1$ и $\hat{\mathcal{U}}_2$, могут различаться. Оказывается, для компакта X — как и в случае метрических пространств — топология на Y^X не зависит от выбора равномерности $\mathcal{U}$ на пространстве Y, поскольку топология, индуцированная $\hat{\mathcal{U}}$, совпадает с компактно-открытой топологией на Y^X. Этот факт есть следствие доказываемой ниже теоремы 8.2.6. Чтобы сформулировать ее, нужно ввести другую равномерность на Y^X.

Для хаусдорфова пространства X и равномерного пространства $(Y, \mathcal{U})$ обозначим через $\hat{\mathcal{U}}|\mathcal{Z}(X)$ равномерность на Y^X, порожденную базой, состоящей из всех конечных пересечений множеств вида

$$\hat{V}|Z = \{(f, g): \ |f(x) - g(x)| < V \ \text{для всех} \ x \in Z\},$$

где $V \in \mathcal{U}$, $Z \in \mathcal{Z}(X)$ и $\mathcal{Z}(X)$ — семейство всех компактных подмножеств пространства X (читатель легко может проверить, что семейство всех конечных пересечений множеств в (3) обладает свойствами (BU1)—(BU3)). Равномерность $\hat{\mathcal{U}}|\mathcal{Z}(X)$ будет называться *равномерностью равномерной сходимости на компактах, индуцированной равномерностью* $\mathcal{U}$.

8.2.5. Лемма. *Если топология пространства X индуцирована некоторой равномерностью $\mathcal{U}$, то для каждого компактного множества $Z \subset X$ и всякого открытого множества G, содержащего Z, найдется такое $V \in \mathcal{U}$, что $B(Z, V) \subset G$.*

Доказательство. Для каждого $x \in Z$ выберем $V_x \in \mathcal{U}$ так, чтобы $B(x, 2V_x) \subset G$. Из следствия 8.1.3 вытекает, что семейство $\{Z \cap \operatorname{Int} B(x, V_x)\}_{x \in Z}$ есть открытое покрытие множества Z; поэтому существует конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset Z$, для которого

(4) $\quad Z \subset \operatorname{Int} B(x_1, V_{x_1}) \cup \operatorname{Int} B(x_2, V_{x_2}) \cup \ldots \cup \operatorname{Int} B(x_k, V_{x_k});$

положим $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_k} \in \mathcal{U}$. Из (4) следует, что для любого $x \in Z$ существует такое $i \leqslant k$, что $|x - x_i| < V_{x_i}$. Для любой точки $x' \in B(x, V) \subset B(x, V_{x_i})$ мы имеем $x' \in B(x_i, 2V_{x_i}) \subset G$, так что $B(Z, V) \subset G$. ∎

8.2.6. Теорема. *Для всякого хаусдорфова пространства X и каждого равномерного пространства $(Y, \mathcal{U})$ топология на Y^X, индуцированная равномерностью $\widehat{\mathcal{U}}|\mathcal{Z}(X)$ равномерной сходимости на компактах, совпадает с компактно-открытой топологией на Y^X, где Y снабжено топологией, индуцированной $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{O}_1$ топологию на Y^X, индуцированную равномерностью $\widehat{\mathcal{U}}|\mathcal{Z}(X)$, а через $\mathcal{O}_2$ компактно-открытую топологию. Вначале мы докажем, что $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$. Очевидно, достаточно показать, что все множества $M(Z, G)$, где $Z \in \mathcal{Z}(X)$ и G — открытое подмножество в Y, принадлежат $\mathcal{O}_1$. Рассмотрим $Z \in \mathcal{Z}(X)$, открытое множество $G \subset Y$ и некоторое $f \in M(Z, G)$. Так как Y — тихоновское пространство, $f(Z)$ — компакт в G. Применяя лемму 8.2.5, возьмем такое $V \in \mathcal{U}$, что $B(f(Z), V) \subset G$. Очевидно, $B(f, \widehat{V}|Z) \subset M(Z, G)$, и так как f — произвольный элемент $M(Z, G)$, то $M(Z, G) \in \mathcal{O}_1$.

Докажем теперь, что $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$. Очевидно, достаточно показать, что для любых $Z \in \mathcal{Z}(X)$, $V \in \mathcal{U}$ и $f \in Y^X$ существуют компактные подмножества $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ пространства X и открытые подмножества $G_1, G_2, \ldots, G_k$ пространства Y, такие, что

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} M(Z_i, G_i) \subset B(f, \widehat{V}|Z).$$

В силу следствия 8.1.12, найдется окружение $W \in \mathcal{U}$ диагонали $\Delta \subset Y \times Y$, которое замкнуто относительно топологии, индуцированной $\mathcal{U}$ на $Y \times Y$, и удовлетворяет включению $3W \subset V$. Так как $f(Z)$ — компакт, то существует конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset Z$, такое, что $f(Z) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(f(x_i), W)$. Мы покажем, что множества

$$Z_i = Z \cap f^{-1}(B(f(x_i), W)) \quad \text{и} \quad G_i = \operatorname{Int} B(f(x_i), 2W)$$

обладают необходимыми свойствами.

Заметим, что из замкнутости W в $Y \times Y$ следует замкнутость шаров $B(f(x_i), W)$ в Y и компактность множеств Z_i. Более того,

$f \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} M(Z_i, G_i)$. Рассмотрим отображение $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} M(Z_i, G_i)$. Для каждого $x \in Z$ существует такое $i \leqslant k$, что $x \in Z_i$; очевидно,

$$g(x) \in B(f(x_i), 2W) \quad \text{и} \quad f(x) \in B(f(x_i), W).$$

Поэтому $|f(x) - g(x)| < 3W \subset V$ для каждого $x \in Z$, а это показывает, что $g \in B(f, \hat{V}|Z)$. ∎

8.2.7. Следствие. *Пусть X — компакт и $(Y, \mathcal{U})$ — равномерное пространство. Топология на Y^X, индуцированная равномерностью $\hat{\mathcal{U}}$ равномерной сходимости, совпадает с компактно-открытой топологией на Y^X и зависит только от топологии, индуцированной на Y равномерностью $\mathcal{U}$.* ∎

Отметим, что из теоремы 8.2.6 следует теорема 3.4.15 в случае хаусдорфова пространства X. На самом деле для каждого тихоновского пространства Y существует равномерность $\mathcal{U}$ на Y, которая индуцирует первоначальную топологию пространства Y. По теореме 8.2.6, компактно-открытая топология на Y^X индуцирована равномерностью на Y^X, так что пространство Y^X с компактно-открытой топологией есть тихоновское пространство.

Для отображений топологического пространства X в тихоновское пространство Y можно определить понятие равностепенной непрерывности относительно равномерности $\mathcal{U}$ на пространстве Y: семейство F отображений X в Y называется *равностепенно непрерывным относительно равномерности* $\mathcal{U}$ на пространстве Y, если для каждой точки $x \in X$ и всякого $V \in \mathcal{U}$ существует такая окрестность G точки x, что $|f(x) - f(x')| < V$, когда $f \in F$ и $x' \in G$. Для такой равностепенной непрерывности справедливы аналоги классической теоремы Асколи. Прежде чем сформулировать аналоги, докажем две леммы, которые показывают, как равностепенная непрерывность связана с понятием однообразной непрерывности, введенной в § 3.4.

Напомним читателю, что семейство отображений $F \subset Y^X$ однообразно непрерывно, если для каждой точки $x \in X$, каждой точки $y \in Y$ и всякой окрестности H точки y существуют окрестность G точки x и окрестность H' точки y, такие, что из условий $f \in F$ и $f(x) \in H'$ следует включение $f(G) \subset H$.

8.2.8. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, Y — тихоновское пространство и $\mathcal{U}$ — равномерность на пространстве Y. Если семейство $F \subset Y^X$ отображений X в Y равностепенно непрерывно относительно $\mathcal{U}$, то семейство F однообразно непрерывно.*

Доказательство. Предположим, что $F \subset Y^X$ равностепенно непрерывно относительно $\mathcal{U}$; рассмотрим $x \in X$, $y \in Y$ и окрестность H точки y. Выберем $V \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее включению $B(y, 2V) \subset H$, и такую окрестность G точки x, что $|f(x) - f(x')| < V$, как только $f \in F$ и $x' \in G$. Положим $H' = B(y, V)$ и рассмотрим такое $f \in F$, что $f(x) \in H'$. Тогда $|y - f(x)| < V$, так что для каждой точки $x' \in G$ мы имеем $|y - f(x')| < 2V$, т. е. $f(x') \in B(y, 2V) \subset H$. Отсюда $f(G) \subset H$, и тем самым однообразная непрерывность семейства F доказана. ∎

8.2.9. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, Y — тихоновское пространство и $\mathcal{U}$ — равномерность на пространстве Y. Если семейство $F \subset Y^X$ отображений X в Y однообразно непрерывно и для каждой точки $x \in X$ множество $\{f(x): f \in F\}$ имеет компактное замыкание, то семейство F равностепенно непрерывно относительно $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Предположим, что $F \subset Y^X$ однообразно непрерывно и множества $A(x) = \overline{\{f(x): f \in F\}}$ — компакты; рассмотрим точку $x \in X$ и $V \in \mathcal{U}$. Выберем элемент $W \in \mathcal{U}$, такой, что $2W \subset V$, и для каждой точки $y \in A(x)$ и ее окрестности $H(y) = \operatorname{Int}(B(y, W))$ выберем окрестность $G(y)$ точки x и окрестность $H'(y)$ точки y таким образом, чтобы из условий $f \in F$ и $f(x) \in H'(y)$ следовало включение $f(G(y)) \subset H(y)$. Так как множество $A(x)$ компактно, существует конечное множество $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subset A(x)$, такое, что $A(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} H'(y_i)$.

Пусть f — функция в F и x' — точка в окрестности $G = \bigcap_{i=1}^{k} G(y_i)$ точки x. Найдется такое $i \leqslant k$, что $f(x) \in H'(y_i)$, так что $f(G(y_i)) \subset H(y_i)$. Так как x и x' принадлежат $G(y_i)$, имеем $f(x), f(x') \in H(y_i)$, т. е. $|f(x) - f(x')| < V$; это показывает, что семейство F равностепенно непрерывно относительно $\mathcal{U}$. ∎

Эти леммы и теоремы 3.4.20 приводят к следующей теореме.

8.2.10. Теорема Асколи. *Пусть X есть k-пространство, Y — тихоновское пространство и $\mathcal{U}$ — равномерность на пространстве Y. Замкнутое подмножество F пространства Y^X с компактно-открытой топологией компактно тогда и только тогда, когда F равностепенно непрерывно относительно $\mathcal{U}$ и множество $\{f(x): f \in F\} \subset Y$ имеет компактное замыкание для каждого $x \in X$.* ∎

Следующий вариант теоремы Асколи представляет собой аналог теоремы 3.4.21; он вытекает из лемм 8.2.8, 8.2.9 и теоремы 3.4.21. В формулировке теоремы мы используем символ $F|Z$, где $F \subset Y^X$ и $Z \subset X$, для обозначения семейства сужений $\{f|Z: f \in F\} \subset Y^Z$.

8.2.11. Теорема. *Пусть X есть k-пространство, Y — тихоновское пространство и $\mathcal{U}$ — равномерность на пространстве Y. Замкну-*

тое подмножество F пространства Y^X с компактно-открытой топологией компактно тогда и только тогда, когда для каждого компакта $Z \subset X$ семейство $F|Z$ равностепенно непрерывно относительно $\mathcal{U}$ и множество $\{f(x)\colon f \in F\} \subset Y$ имеет компактное замыкание для каждого $x \in X$. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятия подпространства и декартова произведения равномерных пространств введены А. Вейлем в [1938]; там же доказана теорема 8.2.3. Равномерность равномерной сходимости на компактах введена в работе Аренса [1946], и там же доказана теорема 8.2.6. Равномерность равномерной сходимости для локально компактных X была введена в книге Бурбаки [1949] и там же доказана теорема 8.2.10. Обобщение теоремы 8.2.10 на k-пространства получено Бэгли и Янгом в [1966]. Теорема 8.2.11 доказана Келли в [1955]; неявно она сформулирована как задача в книге Бурбаки [1949].

УПРАЖНЕНИЯ

8.2.A. (a) Пусть $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$ — семейство равномерных пространств. Покажите, что равномерность $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$ на множестве $\prod_{s \in S} X_s$ совпадает с равномерностью, порожденной семейством отображений $\{p_s\}_{s \in S}$, где p_s — проекция множества $\prod_{s \in S} X_s$ на X_s (см. упр. 8.1.F).

(b) Покажите, что равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ равномерно изоморфно произведению $\left(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{U}_s\right)$ в том и только том случае, если существует семейство $\{p_s\}_{s \in S}$ равномерно непрерывных отображений $p_s\colon (X, \mathcal{U}) \to (X_s, \mathcal{U}_s)$, удовлетворяющее равномерным аналогам условий (1) и (2) упр. 2.3.H.

8.2.B. (a) Пусть $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$ — семейство равномерных пространств, такое, что $X_s \cap X_{s'} = \varnothing$ при $s \neq s'$. Покажите, что семейство $\mathcal{U} = \left\{\bigcup_{s \in S} V_s\colon V_s \in \mathcal{U}_s\right\}$ есть равномерность на множестве $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ и что для каждого $s \in S$ формула $i_s(x) = x$ определяет равномерный изоморфизм $(X_s, \mathcal{U}_s)$ на подпространство $(X_s, \mathcal{U}_{X_s})$ пространства $(X, \mathcal{U})$. Покажите, что топология, индуцированная равномерностью $\mathcal{U}$ на X, совпадает с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}_s$. Равномерное пространство $\left(\bigcup_{s\in S} X_s, \mathcal{U}\right)$ называется *суммой равномерных пространств* $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s\in S}$. Определите сумму произвольного семейства $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s\in S}$ равномерных пространств таким образом, чтобы выполнялся равномерный аналог упр. 2.2.F.

(b) Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство и E — отношение эквивалентности на множестве X. Заметьте, что сильнейшая равномерность $\mathcal{V}$ на множестве X/E, при которой естественное отображение X в X/E равномерно непрерывно относительно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, индуцирует на множестве X/E топологию, отличную, вообще говоря, от фактортопологии на X/E, где на X рассматривается топология, индуцированная равномерностью $\mathcal{U}$. Покажите, что для равномерности $\mathcal{V}$ справедлив равномерный аналог предложения 2.4.2.

(c) *Обратный спектр равномерных пространств есть семейство* $\boldsymbol{S} = \{(X_\sigma, \mathcal{U}_\sigma), \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$, где $\boldsymbol{S}' = \{X_\sigma, \pi^\sigma_\rho, \Sigma\}$ — обратный спектр топологических пространств и для любых $\sigma, \rho \in \Sigma$, $\rho \leqslant \sigma$, отображение π^σ_ρ равномерно непрерывно относительно $\mathcal{U}_\sigma$ и $\mathcal{U}_\rho$. Подпространство $(X, \mathcal{U})$ произведения $\left(\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma, \prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{U}_\sigma\right)$, где $X = \varprojlim \boldsymbol{S}'$ и $\mathcal{U} = \left(\prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{U}_\sigma\right)_X$, называется *пределом обратного спектра* $\boldsymbol{S}$. Проверьте, что для $(X, \mathcal{U})$ и отображений $\pi_\sigma\colon (X, \mathcal{U}) \to (X_\sigma, \mathcal{U}_\sigma)$ имеет место равномерный аналог упр. 2.5.F.

8.2.C. Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство. Проверьте, что топология, индуцированная равномерностью $\mathcal{U}$ на множестве $X \times X$, совпадает с топологией, индуцированной произведением $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Покажите, что псевдометрика ρ на множестве X равномерна относительно равномерности $\mathcal{U}$ на множестве X в том и только том случае, если ρ — равномерно непрерывное отображение пространства $(X \times X, \mathcal{U} \times \mathcal{U})$ в вещественную прямую с равномерностью, порожденной естественной метрикой.

8.2.D. Пусть X — топологическое пространство и $(Y, \mathcal{V})$ — равномерное пространство. Применяя предложения 2.6.11, 3.4.1 и 2.6.12, покажите, что топология на пространстве Y^X, индуцированная равномерностью равномерной сходимости, сильнее, чем компактно-открытая топология.

8.2.E. Заметьте, что из леммы 8.2.5 вытекает теорема 3.2.10, если сделать дополнительные предположения о том, что все пространства X_s являются тихоновскими пространствами.

8.3. ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПОЛНЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. КОМПАКТНОСТЬ В РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство, V — произвольный элемент равномерности $\mathcal{U}$ и $A \subset X$. Будем говорить, что множество A *V-плотно* в $(X, \mathcal{U})$, если для каждого $x \in X$ найдется такое $x' \in A$, что $|x - x'| < V$.

Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ *вполне ограничено*, если для каждого $V \in \mathcal{U}$ существует конечное множество $A \subset X$, V-плотное в пространстве $(X, \mathcal{U})$. Равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X *вполне ограничена*, если пространство $(X, \mathcal{U})$ вполне ограничено.

Легко установить, что если существует равномерно непрерывное отображение f вполне ограниченного равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathcal{V})$, такое, что $f(X) = Y$, то пространство $(Y, \mathcal{V})$ также вполне ограничено. В частности, вполне ограниченность есть равномерный инвариант.

8.3.1. Предложение. *Пусть равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X индуцируется метрикой ρ; тогда равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ вполне ограничено в том и только том случае, если метрическое пространство (X, ρ) вполне ограничено.* ∎

Приведенное выше определение описывает некоторый класс равномерных пространств. Возникает вопрос, существует ли внутренняя характеристика топологических пространств, топология которых индуцирована вполне ограниченной равномерностью. Подобная характеристика существует, но не представляет интереса: мы покажем в примере 8.3.4, что топология любого тихоновского пространства индуцирована вполне ограниченной равномерностью.

Теперь сформулируем две теоремы относительно операций на классе вполне ограниченных равномерных пространств. Доказательство первой из них можно получить из доказательства теоремы 4.3.2, если взять $V \in \mathcal{U}$ вместо $\varepsilon > 0$ и заменить $\varepsilon/2$ таким $W \in \mathcal{U}$, что $2W \subset V$. Для доказательства второй теоремы следует рассмотреть базу равномерности $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$, описанную в предыдущем параграфе, и заметить, что каждое пространство $(X_s, \mathcal{U}_s)$ равномерно изоморфно некоторому подпространству произведения $\left(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{U}_s\right)$, а затем следовать рассуждениям доказательства теоремы 4.3.3.

8.3.2. Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{U})$ — *вполне ограниченное равномерное пространство; тогда для каждого подмножества* $M \subset X$ *пространство* $(M, \mathcal{U}_M)$ *вполне ограничено.*

Пусть $(X, \mathcal{U})$ — *произвольное равномерное пространство, и пусть для* $M \subset X$ *пространство* $(M, \mathcal{U}_M)$ *вполне ограничено; тогда пространство* $(\overline{M}, \mathcal{U}_{\overline{M}})$ *также вполне ограничено.* ∎

8.3.3. Теорема. *Пусть* $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$ — *семейство непустых равномерных пространств. Произведение* $\left(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{U}_s\right)$ *вполне ограничено в том и только том случае, когда все пространства* $(X_s, \mathcal{U}_s)$ *вполне ограничены.* ∎

8.3.4. Пример. Пусть X — тихоновское пространство и $\mathscr{C}^*$ — равномерность на пространстве X, определенная в примере 8.1.19. Мы покажем, что равномерное пространство $(X, \mathscr{C}^*)$ вполне ограничено.

Достаточно доказать, что для любой конечной последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_k$ элементов $C^*(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно определить конечное множество $A \subset X$, такое, что для каждого $x \in X$ существует $x' \in A$, удовлетворяющее условию

$$\rho_{f_1, f_2, \ldots, f_k}(x, x') = \max \{ |f_1(x) - f_1(x')|, \ |f_2(x) - f_2(x')|, \ldots \\ \ldots, |f_k(x) - f_k(x')| \} < \varepsilon.$$

Выберем ограниченный замкнутый интервал $J \subset R$, который содержит все множества $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)$, и рассмотрим некоторое покрытие $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ интервала J множествами, диаметр которых меньше ε. Множества вида

$$f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2}) \cap \ldots \cap f_k^{-1}(A_{i_k}), \tag{1}$$

где $1 \leqslant i_j \leqslant m$ при $j \leqslant k$, образуют покрытие пространства X, и диаметр каждого из них относительно псевдометрики $\rho_{f_1, f_2, \ldots, f_k}$ меньше ε. Выбирая по точке из каждого непустого множества вида (1), мы получим конечное множество A, обладающее требуемым свойством.

Читатель может легко установить, что вещественная прямая R с равномерностью $\mathscr{C}$, определенной в примере 8.1.19, не является вполне ограниченной. ∎

Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство и $\mathscr{F}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Говорят, что $\mathscr{F}$ *содержит произвольно малые множества*, если для каждого $V \in \mathcal{U}$ найдется такое $F \in \mathscr{F}$, что $\delta(F) < V$. Из (U4) вытекает, что если семейство $\mathscr{F}$ содержит произвольно малые множества, то пересечение $\bigcap \mathscr{F}$ состоит не более чем из одной точки.

Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется *полным*, если каждое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X, замкнутых в топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$, центрированное и содержащее произвольно малые множества, имеет непустое пересечение. Равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X называется *полной*, если пространство $(X, \mathcal{U})$ полное.

Легко установить, что полнота есть равномерный инвариант, но не является инвариантом равномерно непрерывных отображений (ср. с упр. 4.3.B(a) и 8.1.A(a)).

Из теоремы 4.3.10 вытекает

8.3.5. Предложение. *Пусть равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X индуцирована метрикой ρ; тогда равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ полно в том и только том случае, когда полно метрическое пространство (X, ρ).* ∎

8.3.6. Теорема. *Пусть $(X, \mathcal{U})$ — полное равномерное пространство; тогда для подмножества $M \subset X$ равномерное пространство $(M, \mathcal{U}_M)$ полно в том и только том случае, когда M замкнуто в X относительно топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Предположим, что пространство $(M, \mathcal{U}_M)$ полное, и рассмотрим точку $x \in \overline{M}$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех множеств вида $B(x, V) \cap M$, где V — элемент из $\mathcal{U}$, замкнутый в топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$ на $X \times X$. Из следствий 8.1.4 и 8.1.12 вытекает, что семейство $\mathcal{F}$ центрировано. Легко видеть, что $\mathcal{F}$ состоит из подмножеств пространства M, замкнутых в топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}_M$, и что $\mathcal{F}$ содержит произвольно малые множества. Так как $\bigcap \mathcal{F} \subset \{x\}$, то из полноты пространства $(M, \mathcal{U}_M)$ вытекает, что $x \in M$.

Из определения полноты непосредственно вытекает полнота пространства $(M, \mathcal{U}_M)$, при условии что пространство $(X, \mathcal{U})$ полное, а M замкнуто в топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$. ∎

Теорема 4.3.14, предложение 8.3.5 и очевидный факт, что «изометрия на» есть равномерный изоморфизм индуцированных равномерных пространств, приводят к следующему предложению.

8.3.7. Лемма. *Для любого метризуемого равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ существует полное метризуемое равномерное пространство $(Y, \mathcal{V})$, такое, что для некоторого $M \subset Y$ пространство $(X, \mathcal{U})$ равномерно изоморфно пространству $(M, \mathcal{V}_M)$.* ∎

Из теорем 8.2.3, 8.3.6 и предыдущей леммы легко получается

8.3.8. Теорема. *Каждое полное равномерное пространство равномерно изоморфно замкнутому подпространству произведения семейства полных метризуемых равномерных пространств.* ∎

8.3.9. Теорема. *Пусть* $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s\in S}$ — *семейство непустых равномерных пространств. Произведение* $\left(\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{U}_s\right)$ *полно в том и только том случае, если полно каждое пространство* $(X_s, \mathcal{U}_s)$.

Доказательство. Если произведение $\left(\prod_{s\in S} X_s, \prod_{s\in S} \mathcal{U}_s\right)$ полно, то каждое пространство $(X_s, \mathcal{U}_s)$ полно, ибо оно равномерно изоморфно замкнутому подпространству произведения.

Доказательство полноты произведения полных равномерных пространств аналогично доказательству теоремы Тихонова. Нужно только заметить, что если семейство $\mathcal{F}_0$, рассмотренное в этом доказательстве, содержит произвольно малые множества, то определенные там семейства $\mathcal{F}_s$ также содержат произвольно малые множества. ∎

Из теорем 8.3.9, 8.3.6 и 3.11.3 следует, что топология любого вещественно полного пространства X порождается некоторой полной равномерностью на X. Можно показать (см. задачу 8.5.13(h)), что если топология пространства X порождается некоторой полной равномерностью и кардинал $|X|$ неизмерим, то X — вещественно полное пространство. Можно также доказать (см. задачу 8.5.13(a)), что класс топологических пространств, топология которых порождается полной равномерностью, совпадает с классом замкнутых подпространств произведений метризуемых пространств. Заметим, что из последнего утверждения следует, что топология любого метризуемого пространства порождается некоторой полной равномерностью. Оказывается, все паракомпакты обладают тем же свойством (см. задачи 8.5.13(b) и (d)). Следовательно, каждый паракомпакт (и, в частности, каждое метризуемое пространство) неизмеримой мощности является вещественно полным (ср. с задачей 5.5.10(b)).

8.3.10. Теорема. *Если* $(X, \mathcal{U})$ — *равномерное пространство и* $(Y, \mathcal{V})$ — *полное равномерное пространство, то каждое равномерно непрерывное отображение* $f\colon (A, \mathcal{U}_A) \to (Y, \mathcal{V})$, *где* A — *всюду плотное подмножество в* X *относительно топологии, индуцированной равномерностью* $\mathcal{U}$, *продолжается до равномерно непрерывного отображения* $F\colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$.

Доказательство. Для каждого $x \in X$ семейство $\{\overline{f(B(x, U) \cap A)}\}_{U\in\mathcal{U}}$ центрировано и содержит произвольно малые множества. Следовательно, в силу полноты пространства $(Y, \mathcal{V})$, формула

$$F(x) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{f(B(x, U) \cap A)} \tag{2}$$

определяет отображение $X \to Y$. Легко видеть, что для каждого $x \in A$ мы имеем $F(x) = f(x)$.

Мы покажем, что отображение F равномерно непрерывно. Для любого $W \in \mathscr{V}$ выберем такое $V \in \mathscr{V}$, что $6V \subset W$, и такое $U \in \mathscr{U}$, открытое в топологии, индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$ на $X \times X$, что для любых $a, a' \in A$ если $|a - a'| < 2U$, то $|f(a) - f(a')| < V$. Из следствия 8.1.5 вытекает, что для любого $M \subset X$

$$\delta(\overline{f(M \cap A)}) < 3V, \text{ когда } \delta(M) < 2U. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь такую пару точек $x, y \in X$, что $|x - y| < U$, и положим $B_1 = B(x, U)$ и $B_2 = B(y, U)$. Пересечение $B_1 \cap B_2$ непусто и открыто в X, следовательно, существует точка $a \in A \cap B_1 \cap B_2$. Тогда $f(a) \in \overline{f(B_1 \cap A)} \cap \overline{f(B_2 \cap A)}$ и, согласно (3), $\delta(\overline{f(B_1 \cap A)} \cup \overline{f(B_2 \cap A)}) < 6V$. Поэтому, в силу (2), $|F(x) - F(y)| < 6V \subset W$. ∎

Последняя теорема вместе с теоремой 1.5.4 дает

8.3.11. Следствие. *Если $(X, \mathscr{U})$ и $(Y, \mathscr{V})$ — полные равномерные пространства, то каждый равномерный изоморфизм $(A, \mathscr{U}_A)$ на $(B, \mathscr{V}_B)$, где A и B — всюду плотные подмножества X и Y соответственно, продолжается до равномерного изоморфизма $(X, \mathscr{U})$ на $(Y, \mathscr{V})$.* ∎

8.3.12. Теорема. *Для каждого равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ существует ровно одно (с точностью до равномерного изоморфизма) полное равномерное пространство $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}})$, такое, что для некоторого плотного подмножества $A \subset \tilde{X}$ пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно изоморфно пространству $(A, \tilde{\mathscr{U}}_A)$. Более того, имеет место равенство $w(\tilde{\mathscr{U}}) = w(\mathscr{U})$, и если $(X, \mathscr{U})$ вполне ограничено, то $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}})$ также вполне ограничено.*

Доказательство. Существование пространства $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}})$ вытекает из 8.2.3, 8.3.7, 8.3.9 и 8.3.6, а его единственность — из следствия 8.3.11.

Равенство $w(\tilde{\mathscr{U}}) = w(\mathscr{U})$ вытекает из замечания 8.2.4 и следующего факта: если $w(\mathscr{U}) < \aleph_0$, то $\mathscr{U}$ — дискретная равномерность. Наконец, в силу второй части теоремы 8.3.2, если $(X, \mathscr{U})$ вполне ограничено, то $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}})$ также вполне ограничено. ∎

Пространство $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}})$, удовлетворяющее условиям теоремы 8.3.12, называется *пополнением равномерного пространства* $(X, \mathscr{U})$.

Мы закончим этот параграф исследованием равномерностей на компактах.

8.3.13. Теорема. *Для каждого компакта X существует точно одна равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X, индуцирующая исходную топологию пространства X. Все окружения диагонали $\Delta \subset X \times X$, открытые в произведении $X \times X$, образуют базу равномерности $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Существование равномерности $\mathcal{U}$ на пространстве X вытекает из теоремы 8.1.20. Мы покажем, что все окружения диагонали $\Delta \subset X \times X$, открытые в $X \times X$, образуют базу $\mathcal{U}$. Очевидно, что из этого факта вытекает единственность $\mathcal{U}$.

Согласно следствию 8.1.12, каждое $V \in \mathcal{U}$ содержит некоторое окружение диагонали, открытое в $X \times X$. Рассмотрим какое-нибудь открытое окружение W диагонали $\Delta \subset X \times X$. В силу (U4) и следствия 8.1.12, $\Delta = \bigcap\{\overline{V}\colon V \in \mathcal{U}\} \subset W$. Пользуясь компактностью пространства $X \times X$ и следствием 3.1.5, мы заключаем, что существует конечное семейство $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\} \subset \mathcal{U}$, для которого $\Delta \subset V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k \subset \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \cap \ldots \cap \overline{V}_k \subset W$. Следовательно, в силу (U1) и (U2), $W \in \mathcal{U}$. ∎

Доказательство следующей теоремы, аналогичное доказательству теоремы 4.3.27, предоставляется читателю.

8.3.14. Теорема. *Каждая равномерность на компакте вполне ограничена.* ∎

Из определения полноты непосредственно следует (ср. с задачей 8.5.12)

8.3.15. Теорема. *Каждая равномерность на компакте полна.* ∎

Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется *компактом*, если множество X с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$, есть компакт.

8.3.16. Теорема. *Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ есть компакт в том и только том случае, когда оно одновременно вполне ограниченное и полное.*

Доказательство. В силу теорем 8.3.14 и 8.3.15, достаточно доказать, что каждое равномерное пространство, которое одновременно вполне ограничено и полно, есть компакт. Из теоремы 8.3.8 следует, что $(X, \mathcal{U})$ равномерно изоморфно замкнутому подпространству произведения $\left(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{U}_s\right)$, где пространства $(X_s, \mathcal{U}_s)$ полны и метризуемы. Без ограничения общности можно считать, что $X = \overline{X} \subset \prod_{s \in S} X_s$, $\mathcal{U} = \left(\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s\right)_X$ и $\overline{p_s(X)} = X_s$ для каждого $s \in S$. Так как вполне ограниченность сохраняется при равномерно непрерывных отображениях, пространства $(p_s(X), (\mathcal{U}_s)_{p_s(X)})$ вполне ограничены, и из второй части теоремы 8.3.2 вытекает, что пространства $(X_s, \mathcal{U}_s)$ также вполне ограничены. Следовательно, в силу 8.3.1, 8.3.5, 4.3.29, пространства $(X_s, \mathcal{U}_s)$ — компакты. Применяя теорему Тихонова, мы заключаем, что и пространство $(X, \mathcal{U})$ — компакт. ∎

8.3.17. Следствие. *Пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ является компактом в том и только том случае, когда $(X, \mathcal{U})$ вполне ограничено.* ∎

8.3.18. Пример. Пусть X — тихоновское пространство. Как показано в примере 8.3.4, равномерность $\mathscr{C}^*$ на пространстве X вполне ограничена. Следовательно, пополнение $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{C}}^*)$ — компакт, а пространство $\tilde{X}$ есть компактификация пространства X. Мы докажем, что $\tilde{X}$ — стоун-чеховская компактификация пространства X.

Для этого достаточно показать, что каждая непрерывная функция $f\colon X \to I$ непрерывно продолжается на $\tilde{X}$. Так как единственная равномерность $\mathscr{V}$ на отрезке I, индуцирующая его естественную топологию, полна, то по теореме 8.3.10 достаточно показать, что f — равномерно непрерывное отображение пространства $(X, \mathscr{C}^*)$ в $(I, \mathscr{V})$ (ср. с упр. 8.1.D).

Семейство всех окружений диагонали $\Delta \subset I \times I$, которые имеют вид $V_i = \{(t, z) \in I \times I\colon \rho(t, z) < 1/2^i\}$, где $i = 1, 2, \ldots$ и $\rho(t, z) = |t - z|$, образует базу равномерности $\mathscr{V}$ на I. Так как $f \in C^*(X)$, множество

$$W_i = \{(x, y) \in X \times X\colon \rho_f(x, y) < 1/2^i\}$$

принадлежит $\mathscr{C}^*$ при $i = 1, 2, \ldots$. Далее, $|f(x) - f(y)| < V_i$, как только $|x - y| < W_i$ и, значит, отображение f равномерно непрерывно. ∎

8.3.19. Пример. Пусть X — тихоновское пространство и $\mathscr{C}$ — равномерность на нем, определенная в примере 8.1.19. Мы докажем, что пространство $\tilde{X}$, где $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{C}})$ — пополнение пространства $(X, \mathscr{C})$, является вещественной компактификацией по Хьюитту пространства X.

Пусть для любого $f \in C = C(X)$ пространство $(R_f, \mathcal{U}_f)$ — вещественная прямая с равномерностью, индуцированной естественной метрикой на R. В силу 8.3.5 и 8.3.9, произведение $\left(\prod_{f \in C} R_f, \prod_{f \in C} \mathcal{U}_f\right)$ полно. Легко проверить, что сужение $F = \left(\mathop{\Delta}_{f \in C} f\right)\Big| X$ есть равномерный изоморфизм пространства $(X, \mathscr{C})$ на подпространство произведения $\left(\prod_{f \in C} R_f, \prod_{f \in C} \mathcal{U}_f\right)$. Из единственности пополнения и из теоремы 8.3.6 следует, что $\tilde{X} = \overline{F(X)} \subset \prod_{f \in C} R_f$. Таким образом, $\tilde{X}$ — вещественно полное пространство по теореме 3.11.3. Далее, каждая функция $f \in$

$\in C(X)$ непрерывно продолжается на $\prod_{f \in C} R_f$ и тем более на $\tilde{X}$, поэтому пространство $\tilde{X}$ есть вещественная компактификация по Хьюитту пространства X. ∎

Полноту равномерных пространств можно охарактеризовать в терминах направленностей и фильтров. Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство и $\{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ — направленность в X. Будем называть $\{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ *направленностью Коши* в $(X, \mathcal{U})$, если для каждого $V \in \mathcal{U}$ найдется такое $\sigma_0 \in \Sigma$, что $|x_\sigma - x_{\sigma_0}| < V$, как только $\sigma \geqslant \sigma_0$. Подобным же образом фильтр $\mathcal{F}$ в семействе всех подмножеств пространства X называется *фильтром Коши* в $(X, \mathcal{U})$, если для каждого $V \in \mathcal{U}$ существует такое $F \in \mathcal{F}$, что $\delta(F) < V$. Читатель может легко установить, что направленности и фильтры Коши отвечают друг другу при взаимно однозначном соответствии, установленном между направленностями и фильтрами в § 1.6.

8.3.20. Теорема. *Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ полно в том и только том случае, если каждая направленность Коши в $(X, \mathcal{U})$ сходится к точке пространства X.*

Доказательство. Ход рассуждений тот же, что в доказательстве теоремы 3.1.23; следует только заметить, что установленное там соответствие между направленностями и центрированными семействами замкнутых множеств переводит направленности Коши в семейства, содержащие произвольно малые множества, и наоборот. ∎

Доказательство аналога теоремы 8.3.20 для фильтров предоставляется читателю.

8.3.21. Теорема. *Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ полно в том и только том случае, если каждый фильтр Коши в $(X, \mathcal{U})$ сходится к точке пространства X.* ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие вполне ограниченного равномерного пространства введено Бурбаки в [1940]; там же доказаны теоремы 8.3.3 и 8.3.9. Понятие полного равномерного пространства введено А. Вейлем в [1938], где доказаны теоремы 8.3.6, 8.3.8, 8.3.10, 8.3.12, 8.3.13 и 8.3.16 (в последней неявно использовано понятие вполне ограниченности).

УПРАЖНЕНИЯ

8.3.A. (a) Заметьте, что каждая равномерность $\mathcal{U}_1$ на множестве X, которая слабее какой-нибудь вполне ограниченной равномерности $\mathcal{U}_2$ на X, сама вполне ограничена.

(b) Убедитесь, что каждая равномерность $\mathcal{U}_1$ на пространстве X, которая сильнее какой-нибудь полной равномерности, сама полна. Заметьте, что, вообще говоря, это неверно для равномерностей на множестве.

8.3.B. Пусть $\mathcal{U}$ — равномерность на множестве X и A — подмножество в X, всюду плотное в топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$. Покажите, что если для каждого центрированного семейства $\mathcal{F}$ подмножеств множества A, содержащего произвольно малые множества, пересечение $\bigcap\{\overline{F}: F \in \mathcal{F}\}$ непусто (здесь $\overline{F}$ — замыкание множества F в пространстве X), то пространство $(X, \mathcal{U})$ полное.

8.3.C. (a) Покажите, что для каждого топологического пространства X и любого равномерного пространства $(Y, \mathcal{U})$ равномерность равномерной сходимости, индуцированная равномерностью $\mathcal{U}$ на Y^X, полна.

(b) Покажите, что для каждого k-пространства X и любого полного равномерного пространства $(Y, \mathcal{U})$ равномерность равномерной сходимости на компактах, индуцированная равномерностью $\mathcal{U}$ на Y^X, полна. Заметьте, что предположение о том, что X является k-пространством, существенно.

Указание. См. упр. 4.3.F(b).

8.3.D. (a) Проверьте, что равномерность $\mathcal{U}$, порожденная совокупностью $\boldsymbol{C}$ равномерных покрытий множества X, вполне ограничена тогда и только тогда, когда для каждого покрытия $\mathcal{A} \in \boldsymbol{C}$ существует вписанное в него конечное покрытие $\mathcal{B} \in \boldsymbol{C}$.

(b) Проверьте, что равномерность $\mathcal{U}$, порожденная совокупностью $\boldsymbol{C}$ равномерных покрытий множества X, полна в том и только том случае, если каждое центрированное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств X, замкнутых в топологии, порожденной равномерностью $\mathcal{U}$, которое для любого покрытия $\mathcal{A} \in \boldsymbol{C}$ включает в себя множество F, содержащееся в некотором элементе $\mathcal{A}$, имеет непустое пересечение.

(c) Установите, что равномерность $\mathcal{U}$, порожденная семейством P равномерных псевдометрик на множестве X, вполне ограничена в том и только том случае, если для каждого $\rho \in P$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется конечное множество $A \subset X$, такое, что для каждой точки $x \in X$ существует $x' \in A$, удовлетворяющее неравенству $\rho(x, x') < \varepsilon$.

(d) Установите, что равномерность $\mathcal{U}$, порожденная семейством P равномерных псевдометрик на множестве X, является полной в том и только том случае, если всякое центрированное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств пространства X, замкнутых в топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$, которое для каждой псевдометрики $\rho \in P$ и каждого $\varepsilon > 0$ содержит множество F, диаметр которого относительно ρ меньше ε, имеет непустое пересечение.

8.3.E. (a) Докажите, что полное равномерное пространство $(Y, \mathscr{V})$ является пополнением равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ в том и только том случае, если существует равномерно непрерывное отображение f: $(X, \mathscr{U}) \to (Y, \mathscr{V})$, такое, что $\overline{f(X)} = Y$, и для каждой псевдометрики ρ на множестве X, равномерно непрерывной относительно $\mathscr{U}$, существует псевдометрика $\bar{\rho}$ на множестве Y, равномерно непрерывная относительно $\mathscr{V}$ и такая, что $\bar{\rho}(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ при $x, y \in X$.

(b) Пусть $\{(X_s, \mathscr{U}_s)\}_{s \in S}$ — семейство равномерных пространств и $(\tilde{X}_s, \tilde{\mathscr{U}}_s)$ — пополнение пространства $(X_s, \mathscr{U}_s)$. Покажите, что произведение $\left(\prod_{s \in S} \tilde{X}_s, \prod_{s \in S} \tilde{\mathscr{U}}_s\right)$ есть пополнение произведения $\left(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathscr{U}_s\right)$.

8.3.F (Широта [1952]). Пусть X — тихоновское пространство и $\mathscr{U}$ — равномерность, порожденная семейством всех покрытий пространства X, в которые можно вписать счетное нормальное покрытие (см. упр. 8.1.I(a)). Докажите, что пространство $\tilde{X}$, где $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}})$ — пополнение пространства $(X, \mathscr{U})$, является вещественной компактификацией по Хьюитту пространства X (ср. с примером 8.3.19 и упр. 8.1.I(b)).

Указание. Заметьте, что семейство P всех псевдометрик ρ на множестве X, таких, что отображение ρ: $X \times X \to R$ непрерывно и пространство X/ρ, определенное в упр. 4.2.I, сепарабельно, обладает свойствами (UP1)—(UP2). Покажите, что равномерность, порожденная семейством P равномерных псевдометрик, совпадает с $\mathscr{U}$, и воспользуйтесь упр. 8.3.E(b), 8.1.I(b) и теоремой 8.2.3.

8.3.G. Покажите, что если $(X, \mathscr{U})$ — равномерный компакт, то каждое открытое покрытие пространства X с топологией, индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$, равномерно относительно $\mathscr{U}$.

Указание. Примените упр. 5.1.A(b), предложение 8.1.16 и теорему 8.3.13. Прямое доказательство можно получить модификацией доказательства леммы 8.2.5.

8.3.H. Заметьте, что упр. 4.2.B можно решить с использованием теорем 8.1.21 и 8.3.13.

8.3.I. (a) Проверьте, что если пространство X с топологией, индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$, связно, то для всякой пары $x, y \in X$ и всякого $V \in \mathscr{U}$ существует такая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k$ точек пространства X, что $x_1 = x$, $x_k = y$ и $|x_i - x_{i+1}| < V$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

(b) Покажите, что каждый равномерный компакт $(X, \mathscr{U})$, удовлетворяющий условию (a), связен и что предположение о компактности существенно.

8.4. БЛИЗОСТИ И ПРОСТРАНСТВА БЛИЗОСТИ

Пусть X — произвольное множество и δ — некоторое отношение на семействе всех подмножеств X. Мы будем писать $A\delta B$, если множества $A, B \subset X$ находятся в δ-отношении; в противном случае мы будем писать $A\bar{\delta}B$. Отношение δ на семействе всех подмножеств множества X называется *близостью* на множестве X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(P1) *$A\delta B$ тогда и только тогда, когда $B\delta A$.*

(P2) *$A\delta(B\cup C)$ тогда и только тогда, когда либо $A\delta B$, либо $A\delta C$.*

(P3) *$\{x\}\delta\{y\}$ тогда и только тогда, когда $x=y$.*

(P4) $\varnothing\bar{\delta}X$.

(P5) *Если $A\bar{\delta}B$, то существуют такие $C, D \subset X$, что $A\bar{\delta}C$, $B\bar{\delta}D$ и $C\cup D = X$.*

Пара (X,δ), состоящая из множества X и близости δ на нем, называется *пространством близости*. Два подмножества A и B множества X *близки* относительно δ, если $A\delta B$; в противном случае они *далеки* относительно δ.

Из условий (P1)—(P5) вытекают следующие свойства близостей:

(1) $$\text{Если } A\delta B \text{ и } B\subset C, \text{ то } A\delta C.$$

(2) $$\text{Если } A\cap B\neq\varnothing, \text{ то } A\delta B.$$

(3) $$\varnothing\bar{\delta}A \text{ для каждого } A\subset X.$$

Чтобы установить соотношение (1), достаточно заметить, что если $B\subset C$, то $B\cup C = C$, т. е. из $A\delta B$ следует, что $A\delta C$ в силу (P2). Свойство (2) вытекает из (P3), (P1) и (1). В самом деле, если $x\in A\cap B$, то $\{x\}\delta\{x\}$, $\{x\}\delta A$, $A\delta(x)$ и $A\delta B$. Наконец (3) следует из (P4) и (1).

Каждая близость δ на множестве X индуцирует топологию $\mathcal{O}$ на X. Следовательно, каждое пространство близости (X,δ) определяет топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$. Точнее, как мы увидим, формула

(4) $$\bar{A} = \{x\in X\colon\ \{x\}\delta A\}$$

определяет оператор замыкания на множестве X. Начнем с леммы.

8.4.1. Лемма. *Для каждой близости δ на множестве X и любых множеств $A, B\subset X$*

(5) $$\text{если } B\bar{\delta}A, \text{ то } B\bar{\delta}\bar{A}.$$

Доказательство. Если $B\bar{\delta}A$, то в силу (P5), существуют такие $C, D \subset X$, что

$$B\bar{\delta}C, \quad A\bar{\delta}D \tag{6}$$

и

$$C \cup D = X, \quad \text{т. е.} \quad X \setminus D \subset C. \tag{7}$$

Из (1) и второй части (6) вытекает, что $\bar{A} \subset X \setminus D$; поэтому $\bar{A} \subset C$ в силу (7) и $B\bar{\delta}\bar{A}$ в силу первой части (6). ∎

8.4.2. Теорема. *Для каждой близости δ на множестве X формула* (4) *определяет оператор замыкания, удовлетворяющий условиям* (CO1)—(CO4). *Пространство X с топологией $\mathcal{O}$, порожденной этим оператором замыкания, является T_1-пространством.*

Такая топология $\mathcal{O}$ называется *топологией, индуцированной* (или *порожденной*) *близостью* δ.

Доказательство. Условия (CO1), (CO2) и (CO3) вытекают непосредственно из (3), (2) и (P2) соответственно. Для доказательства условия (CO4) достаточно показать, что для каждого $A \subset X$ выполнено включение $\overline{(\bar{A})} \subset \bar{A}$, или, что эквивалентно,

$$\text{если } x \notin \bar{A}, \text{ то } x \notin \overline{(\bar{A})}. \tag{8}$$

Но (8) следует из леммы, примененной к одноточечному множеству $B = \{x\}$.

То, что $(X, \mathcal{O})$ есть T_1-пространство, вытекает непосредственно из (P3). ∎

Ниже мы покажем (см. теорему 8.4.9), что, как и в случае равномерностей, топология пространства X индуцируется некоторой близостью на множестве X в том и только том случае, когда X — тихоновское пространство.

Отметим, что из леммы 8.4.1, свойства (1) и условия (P1) вытекает, что для каждой близости δ на множестве X оператор замыкания, определенный соотношением (4), обладает следующим свойством:

$$AzB \text{ тогда и только тогда, когда } \bar{A}\delta\bar{B}. \tag{9}$$

8.4.3. Пример. Пусть X — произвольное множество. Проверим, что, полагая $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $A \cap B \neq \varnothing$, мы определим близость на множестве X. В самом деле, легко видеть, что δ удовлетворяет условиям (P1)—(P4). Для того чтобы доказать условие (P5), достаточно заметить, что для каждой пары A, B далеких, т. е. непересекающихся подмножеств множества X множества $C = X \setminus A$ и $D = X \setminus B$ обладают требуемыми свойствами. Очевидно, что топология, индуцированная отношением δ, — это дискретная топология на X. Близость δ называется *дискретной близостью* на X, а пространство (X, δ) — *дискретным пространством близости.* ∎

8.4.4. Пример. Пусть X — тихоновское пространство. Для любых двух множеств A, $B \subset X$ положим $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $A \neq \varnothing \neq B$ и не существует непрерывной функции $f\colon X \to I$, такой, что $f(x) = 0$ для $x \in A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$, т. е. множества A и B не вполне отделены. Покажем, что δ — близость на множестве X.

Непосредственно из определения следует, что δ удовлетворяет условиям (P1), (P3) и (P4).

Чтобы проверить условие (P2), достаточно показать, что, если $A\bar{\delta}B$ и $A\bar{\delta}C$, то $A\bar{\delta}(B \cup C)$. Выберем непрерывные функции $f, g\colon X \to I$, такие, что

$$f(x) = g(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A, \quad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B,$$
$$g(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in C.$$

Функция $h = \max(f, g)$ примет значение 0 на множестве A и значение 1 на множестве $B \cup C$, так что $A\bar{\delta}(B \cup C)$.

Наконец, δ удовлетворяет условию (P5), ибо если $A\bar{\delta}B$ т. е. если существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что $f(x) = 0$ для $x \in A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$, то

$$\text{множества} \quad C = f^{-1}([1/2, 1]) \quad \text{и} \quad D = f^{-1}([0, 1/2])$$

обладают требуемыми свойствами.

Из определения тихоновского пространства вытекает, что близость δ на X индуцирует исходную топологию пространства X. ∎

Теперь мы вкратце обсудим отображения пространств близости. Пусть (X, δ) и (Y, δ') — два пространства близости. Отображение f множества X в множество Y называется *близостно непрерывным относительно близостей* δ и δ', если для любых множеств A, $B \subset X$, близких относительно δ, образы $f(A)$, $f(B) \subset Y$ близки относительно δ'. Из формулы (4) и равносильности условий (i) и (v) предложения 1.4.1 следует, что f — непрерывное отображение пространства X с топологией, индуцированной отношением δ, в пространство Y с топологией, индуцированной отношением δ'. Очевидно, что композиция близостно непрерывных отображений близостно непрерывна.

Взаимно однозначное отображение f множества X на множество Y называется *близостным изоморфизмом относительно близостей* δ *и* δ' на множествах X и Y соответственно, если f близостно непрерывно относительно δ и δ' и обратное отображение f^{-1} близостно непрерывно относительно δ' и δ. Близостный изоморфизм есть гомеоморфизм индуцированных топологических пространств.

Говорят, что два пространства близости (X, δ) и (Y, δ') *близостно изоморфны*, если существует близостный изоморфизм (X, δ) на (Y, δ'). Изучение *близостных инвариантов*, т. е. инвариантов близостных изоморфизмов, является содержанием теории пространства близости. Очевидно, что каждый топологический инвариант является близостным инвариантом.

Теперь мы перейдем к изучению связей между близостями и равномерностями на множестве.

8.4.5. Теорема. *Пусть $\mathcal{U}$ — равномерность на множестве X. Положив для $A, B \subset X$*

$$A\delta B \text{ тогда и только тогда, когда } V \cap (A \times B) \neq \varnothing$$
$$\text{для каждого } V \in \mathcal{U},$$

мы определим близость на множестве X. Топология, индуцированная отношением δ, совпадает с топологией, индуцированной $\mathcal{U}$.

Такая близость δ называется *близостью, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$*.

Доказательство. Сначала заметим, что $A\delta B$ тогда и только тогда, когда для каждого $V \in \mathcal{U}$ найдутся такие $x \in A$ и $y \in B$, что $|x - y| < V$. Очевидно, отношение δ удовлетворяет условиям (P1) и (P4), а из (U4) вытекает, что δ удовлетворяет также (P3).

Для проверки условия (P2) достаточно показать, что если $A\bar{\delta}B$ и $A\bar{\delta}C$, то $A\bar{\delta}(B \cup C)$. Выберем такие V_1, $V_2 \in \mathcal{U}$, что

$$|x - y| \geqslant V_1 \text{ и } |x - z| \geqslant V_2 \text{ для всех } x \in A, \ y \in B \text{ и } z \in C.$$

Ясно, что $|x - t| \geqslant V = V_1 \cap V_2$, как только $x \in A$ и $t \in B \cup C$; так как $V \in \mathcal{U}$, то, в силу (U2), $A\bar{\delta}(B \cup C)$.

Наконец, δ удовлетворяет условию (P5), так как если $A\bar{\delta}B$, т. е. если существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $|x - y| \geqslant V$ при $x \in A$, $y \in B$, то множества

$$C = X \setminus B(A, W) \quad \text{и} \quad D = X \setminus B(B, W),$$

где $W \in \mathcal{U}$ удовлетворяет включению $2W \subset V$, обладают требуемыми свойствами.

Из следствия 8.1.4 вытекает, что топология на X, индуцированная близостью δ, которая в свою очередь индуцирована равномерностью $\mathcal{U}$ на множестве X, совпадает с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$. ∎

Легко проверить, что если отображение f множества X в множество Y равномерно непрерывно относительно равномерностей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на множествах X и Y соответственно, то f близостно непрерывно относительно близостей δ и δ', индуцированных равномерностями $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

8.4.6. Пример. В § 8.1 мы установили, что каждая метрика ρ порождает некоторую равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X. В силу последней теоремы, равномерность $\mathcal{U}$ в свою очередь порождает близость δ на множестве X. Легко установить, что два множества A, $B \subset X$ близки относительно δ в том и только том случае, если $\rho(A, B) = 0$. Следовательно, если ρ — произвольная метрика на множестве X и мы положим

$$A\delta B \text{ тогда и только тогда, когда } \rho(A, B) = 0,$$

то тем самым мы определим близость δ на множестве X. Близость δ называется *близостью, индуцированной метрикой* ρ. ∎

Для обсуждения перехода от близости к равномерностям удобно рассмотреть отношения строгого включения. Пусть δ — некоторое отношение на множестве X. Будем говорить, что множество A *строго содержится* в множестве B относительно δ, и писать $A \Subset B$, если $A\bar{\delta}(X\setminus B)$. Заметим, что, используя отношение строгого включения, мы можем переписать (P5) в следующем виде:

(P5′) *Если $A\bar{\delta}B$, то существуют A_1, $B_1 \subset X$, такие, что $A \Subset A_1$, $B \Subset B_1$ и $A_1 \cap B_1 = \varnothing$.*

Покажем теперь, что отношение $\Subset$ обладает следующими свойствами (в (SI5) и (SI7) рассматривается топология, индуцированная отношением δ):

(SI1) *Если $A \Subset B$, то $X\setminus B \Subset X\setminus A$.*

(SI2) *Если $A \Subset B$, то $A \subset B$.*

(SI3) *Если $A_1 \subset A \Subset B \subset B_1$, то $A_1 \Subset B_1$.*

(SI4) *Если $A_1 \Subset B_1$ и $A_2 \Subset B_2$, то $A_1 \cup A_2 \Subset B_1 \cup B_2$.*

(SI5) *Если $A \Subset B$, то существует открытое множество C, такое, что $A \Subset C \subset \bar{C} \Subset B$.*

(SI6) $\varnothing \Subset \varnothing$.

(SI7) *Для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности A имеем $\{x\} \Subset A$.*

Свойство (SI1) вытекает из определения строгого включения и из тождества $A = X\setminus(X\setminus A)$. Свойства (SI2) и (SI3) следуют из (2) и (1) соответственно.

Чтобы установить (SI4), достаточно заметить, что если $A_1 \Subset B_1$ и $A_2 \Subset B_2$, то, в силу (1), при $i = 1, 2$ имеем $A_i\bar{\delta}[(X\setminus B_1)\cap(X\setminus B_2)]$, так что $(A_1 \cup A_2)\bar{\delta}[X\setminus(B_1 \cup B_2)]$, т. е. $A_1 \cup A_2 \Subset B_1 \cup B_2$ в силу (P1) и (P2).

Несколько сложнее доказать (SI5). Если $A \Subset B$, то, в силу (P5′), существуют такие A_1, $B_1 \subset X$, что

$$A \Subset A_1, \quad X\setminus B \Subset B_1 \quad \text{и} \quad A_1 \cap B_1 = \varnothing.$$

В силу (SI1), имеем $A_1 \subset X \setminus B_1 \Subset B$, так что $A_1 \bar{\delta} (X \setminus B)$. Так как $A \bar{\delta} (X \setminus A_1)$, то из (5) вытекает, что $A \bar{\delta} (\overline{X \setminus A_1})$, т. е. $A \bar{\delta} (X \setminus \operatorname{Int} A_1)$. Полагая $C = \operatorname{Int} A_1$, получаем $A \Subset C \subset A_1$. Так как $A_1 \bar{\delta} (X \setminus B)$, то $C \bar{\delta} (X \setminus B)$, откуда в свою очередь следует, что $\overline{C} \bar{\delta} (X \setminus B)$, т. е. $\overline{C} \Subset B$.

Свойства (SI6) и (SI7) следуют из (P4) и (4) соответственно. Заметим, что из (SI1) и законов де Моргана следует, что свойство (SI4) можно переписать в следующем виде:

(SI4′) *Если* $A_1 \Subset B_1$ *и* $A_2 \Subset B_2$, *то* $A_1 \cap A_2 \Subset B_1 \cap B_2$.

Более общо, если при $i = 1, 2, \ldots, k$ мы имеем $A_i \Subset B_i$, то (как читатель легко может установить) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \Subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \Subset \bigcap_{i=1}^{k} B_i$.

Заметим также, что из (SI5) следует, что пространство X с топологией, индуцированной близостью на множестве X, является регулярным пространством (ср. с теоремой 8.4.9).

Пусть δ — близость на множестве X. Конечное покрытие $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ множества X называется *δ-равномерным*, если существует такое покрытие $\{B_i\}_{i=1}^{k}$ множества X, что

(10) $$B_i \Subset A_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

8.4.7. Лемма. *Пусть δ — близость на множестве X. Для $A, B \subset X$ мы имеем $A\delta B$ в том и только том случае, если каждое δ-равномерное покрытие $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ множества X содержит такое множество A_j, что $A \cap A_j \neq \varnothing \neq B \cap A_j$.*

Доказательство. Рассмотрим такие $A, B \subset X$, что $A\delta B$. Пусть $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i=1}^{k}$ есть δ-равномерное покрытие множества X, и пусть $\mathscr{B} = \{B_i\}_{i=1}^{k}$ — покрытие пространства X, удовлетворяющее (10). Из упомянутого выше обобщения (SI4) следует, что множества

(11) $$C = \operatorname{St}(A, \mathscr{B}) \quad \text{и} \quad D = \operatorname{St}(A, \mathscr{A})$$

удовлетворяют включению $C \Subset D$. Так как $A \subset C$, то $A \bar{\delta} (X \setminus D)$, откуда следует, что

(12) $$B \cap D \neq \varnothing.$$

В самом деле, в противном случае было бы $B \subset X \setminus D$ и $A \bar{\delta} B$, что невозможно. Из второй части (11) и (12) вытекает существование такого $j \leqslant k$, что $A \cap A_j \neq \varnothing \neq B \cap A_j$.

Рассмотрим теперь такие $A, B \subset X$, что $A \bar{\delta} B$. В силу (P5′) существуют $B_1, B_2 \subset X$, удовлетворяющие соотношениям $A \Subset$

$\Subset X \setminus B_1$, $B \Subset X \setminus B_2$ и $(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2) = \varnothing$. Множества $A_1 = X \setminus A$ и $A_2 = X \setminus B$ образуют покрытие $\mathscr{A}$ множества X. Поэтому, в силу (SI1), $B_1 \Subset A_1$ и $B_2 \Subset A_2$. Так как $B_1 \cup B_2 = X$, то $\mathscr{A}$ есть δ-равномерное покрытие пространства X, никакой элемент которого не пересекает одновременно A и B. ∎

8.4.8. Теорема. *Для каждой близости δ на множестве X совокупность $\boldsymbol{C}$ всех покрытий пространства X, в которые можно вписать δ-равномерные покрытия, обладает свойствами* (UC1)—(UC4). *Равномерность $\mathscr{U}$ на множестве X, порожденная совокупностью $\boldsymbol{C}$, вполне ограничена и индуцирует близость δ. Топология, порожденная равномерностью $\mathscr{U}$, совпадает с топологией, порожденной близостью δ.*

Такая равномерность $\mathscr{U}$ называется *равномерностью, порожденной* (или *индуцированной*) *близостью* δ.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{C}_0$ — совокупность всех δ-равномерных покрытий множества X. Так как совокупность $\boldsymbol{C}$ обладает свойством (UC1), то для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что $\boldsymbol{C}_0$ обладает свойствами (UC2)—(UC4).

Сначала покажем, что $\boldsymbol{C}_0$ обладает свойством (UC2). Рассмотрим $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in \boldsymbol{C}_0$ и положим $\mathscr{A}_1 = \{A_{1,i}\}_{i=1}^{k}$, $\mathscr{A}_2 = \{A_{2,j}\}_{j=1}^{m}$. Возьмем такие покрытия $\mathscr{B}_1 = \{B_{1,i}\}_{i=1}^{k}$ и $\mathscr{B}_2 = \{B_{2,j}\}_{j=1}^{m}$ множества X, что

$$B_{1,i} \Subset A_{1,i} \text{ при } i = 1, 2, \ldots, k \text{ и } B_{2,j} \Subset A_{2,j} \text{ при } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{13}$$

Из свойства (SI4′) вместе с (13) следует, что семейство $\mathscr{A}$ всех пересечений $A_{1,i} \cap A_{2,j}$, где $i \leqslant k$ и $j \leqslant m$, есть δ-равномерное покрытие множества X. Так как $\mathscr{A}$ вписано и в $\mathscr{A}_1$, и в $\mathscr{A}_2$, то семейство $\boldsymbol{C}_0$ обладает свойством (UC2).

Доказательство того, что $\boldsymbol{C}_0$ обладает свойством (UC3), несколько длиннее. Прежде всего заметим, что, в силу леммы 5.1.15, достаточно показать, что для каждого $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}_0$ существует покрытие $\mathscr{B} \in \boldsymbol{C}_0$, звездно вписанное в $\mathscr{A}$.

Рассмотрим сначала двухэлементное покрытие $\mathscr{A} = \{A_1, A_2\} \in \boldsymbol{C}_0$, и пусть $B_1, B_2 \subset X$ удовлетворяют условиям

$$B_1 \Subset A_1, \quad B_2 \Subset A_2 \quad \text{и} \quad B_1 \cup B_2 = X. \tag{14}$$

Из (14) следует, что семейство $\mathscr{B} = \{A_1 \setminus B_2, A_2 \setminus B_1, A_1 \cap A_2\}$ есть покрытие множества X. Так как $(A_1 \setminus B_2) \cap (A_2 \setminus B_1) = \varnothing$, то покрытие $\mathscr{B}$ звездно вписано в покрытие $\mathscr{A}$. В силу (SI5), найдутся такие $C_1, C_2 \subset X$, что

$$B_1 \Subset C_1 \Subset A_1 \quad \text{и} \quad B_2 \Subset C_2 \Subset A_2. \tag{15}$$

Из свойств (SI1) и (SI4′) с помощью формул (14) и (15) получаем, что

$$C_1 \setminus C_2 \Subset A_1 \setminus B_2, \quad C_2 \setminus C_1 \Subset A_2 \setminus B_1, \quad C_1 \cap C_2 \Subset A_1 \cap A_2$$

и

$$(C_1 \setminus C_2) \cup (C_2 \setminus C_1) \cup (C_1 \cap C_2) = X,$$

т. е. что $\mathscr{B} \in \boldsymbol{C}_0$. Следовательно, в каждое двухэлементное покрытие $\mathscr{A} \in \boldsymbol{C}_0$ можно звездно вписать покрытие $\mathscr{B} \in \boldsymbol{C}_0$.

Рассмотрим теперь произвольное покрытие $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i=1}^k \in \boldsymbol{C}_0$, и пусть $B_1, B_2, \ldots, B_k \subset X$ удовлетворяют условиям

(16) $\quad B_i \Subset A_i \quad$ при $\quad i = 1, 2, \ldots, k \quad$ и $\quad B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = X.$

Из свойств (SI5) и (SI1) вытекает, что $\mathscr{A}_i = \{A_i, X \setminus B_i\} \in \boldsymbol{C}_0$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. В силу уже доказанной части теоремы, при $i = 1, 2, \ldots, k$ для каждого $\mathscr{A}_i$ существует звездно вписанное в него покрытие $\mathscr{B}_i \in \boldsymbol{C}_0$ и, кроме того, существует покрытие $\mathscr{B} \in \boldsymbol{C}_0$, вписанное во все $\mathscr{B}_i$. Для каждого $x \in X$ и любого $i \leqslant k$ имеем $\mathrm{St}(x, \mathscr{B}) \subset \mathrm{St}(x, \mathscr{B}_i)$, так что

$$\mathrm{St}(x, \mathscr{B}) \subset A_i \text{ или } \mathrm{St}(x, \mathscr{B}) \subset X \setminus B_i.$$

Так как, в силу (16), вторая часть альтернативы не может иметь место для всех i, то существует такое $i \leqslant k$, что $\mathrm{St}(x, \mathscr{B}) \subset A_i$, т. е. $\mathscr{B}$ звездно вписано в $\mathscr{A}$. Таким образом, доказательство свойства (UC3) завершено.

Тот факт, что семейство $\boldsymbol{C}_0$ обладает свойством (UC4), так же как и то, что равномерность $\mathscr{U}$, порожденная совокупностью $\boldsymbol{C}$, индуцирует близость δ, следует непосредственно из леммы 8.4.7. Так как равномерность $\mathscr{U}$ индуцирует близость δ, то по теореме 8.4.5 топология, индуцированная равномерностью $\mathscr{U}$, совпадает с топологией, индуцированной близостью δ.

В силу предложения 8.1.16, множества

$$V(\mathscr{A}) = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \times A_i),$$

где $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i=1}^k \in \boldsymbol{C}_0$, образуют базу равномерности $\mathscr{U}$. Выбирая по точке в каждом непустом элементе $\mathscr{A}$, мы получаем конечное множество, которое $V(\mathscr{A})$-плотно в $(X, \mathscr{U})$. Следовательно, равномерность $\mathscr{U}$ вполне ограничена. ∎

Оказывается, если близость δ индуцирована вполне ограниченной равномерностью $\mathscr{U}$, то равномерность, индуцированная близостью δ, совпадает с $\mathscr{U}$ (см. упр. 8.4.D). Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между близостями и вполне ограниченными равномерностями на множестве.

Из теорем 8.4.8, 8.1.20 и примера 8.4.4 следует

8.4.9. Теорема. *Топология пространства X индуцирована некоторой близостью на множестве X в том и только том случае, если X — тихоновское пространство.* ■

Если X — топологическое пространство и близость δ на множестве X индуцирует исходную топологию на X, то будем говорить, что δ — *близость на пространстве* X. Вообще говоря, существует много близостей на данном тихоновском пространстве. Этот параграф мы закончим теоремой, устанавливающей взаимно однозначное соответствие между близостями на тихоновском пространстве X и компактификациями пространства X. Сначала мы покажем, что на компакте существует только одна близость.

8.4.10. Теорема. *Для каждого компакта X существует в точности одна близость δ на множестве X, которая индуцирует исходную топологию пространства X, а именно близость δ, определенная следующим образом:*

(17) $\quad A\delta B$ *в том и только том случае, если* $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\varnothing$.

Доказательство. Из примера 8.4.4 вытекает, что (17) определяет близость на пространстве X.

Пусть δ' — некоторая близость на пространстве X. Из (2) и (9) следует, что если $A\delta B$, то $A\delta' B$. Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что если A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X, то $A\bar{\delta}' B$. Для каждого $x\in A$ имеем $\{x\}\bar{\delta}' B$, так что, в силу (SI5), существует открытое множество V_x, удовлетворяющее условию

$$x\in V_x \quad \text{и} \quad V_x\bar{\delta}' B. \tag{18}$$

По теореме 3.1.3, существует конечное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}\subset A$, такое, что

$$A\subset V_{x_1}\cup V_{x_2}\cup\ldots\cup V_{x_k} \tag{19}$$

Теперь из (P2), (1), (18) и (19) следует, что $A\bar{\delta}' B$. ■

8.4.11. Лемма. *Пусть X — тихоновское пространство и cX — его компактификация. Для $A, B\subset X$ положим*

$$A\delta(c)B \text{ в том и только том случае, когда } \overline{c(A)}\cap\overline{c(B)}\neq\varnothing,$$

где замыкание взято в cX. Тем самым мы определили близость $\delta(c)$ на пространстве X.

Для компактификаций c_1X и c_2X пространства X имеем $\delta(c_1)=\delta(c_2)$ в том и только том случае, если компактификации c_1X и c_2X эквивалентны.

Доказательство. Проверка того, что $\delta(c)$ — близость на пространстве X, предоставляется читателю. Вторая часть леммы следует непосредственно из теоремы 3.5.5. ∎

8.4.12. Лемма. *Для каждой близости δ на тихоновском пространстве X существует компактификация cX пространства X, такая, что $\delta = \delta(c)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — равномерность, индуцированная близостью δ, и $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ — пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$. Так как равномерность $\mathcal{U}$ вполне ограничена, то пространство $\tilde{X}$, в силу следствия 8.3.17, есть компакт. Рассмотрим отображение $c\colon X \to \tilde{X}$, равномерно непрерывное относительно $\mathcal{U}$ и $\tilde{\mathcal{U}}$ и такое, что $c|X$ — равномерный изоморфизм $(X, \mathcal{U})$ на $(A, \tilde{\mathcal{U}}_A)$, где $A = c(X)$ — некоторое всюду плотное подпространство пространства $\tilde{X}$. Очевидно, что $\tilde{X} = cX$ — компактификация пространства X.

Пусть δ' — близость, индуцированная на множестве $\tilde{X}$ равномерностью $\tilde{\mathcal{U}}$. По теореме 8.4.8 равномерность $\mathcal{U}$ индуцирует близость δ, и так как $c|X$ — равномерный изоморфизм, то для $A, B \subset X$

(20) $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $c(A)\delta' c(B)$.

С другой стороны, из компактности $\tilde{X}$ и теоремы 8.4.10 получаем

(21) $c(A)\delta' c(B)$ тогда и только тогда, когда $\overline{c(A)} \cap \overline{c(B)} \neq \varnothing$;

таким образом, $\delta = \delta(c)$. ∎

Леммы 8.4.11 и 8.4.12 приводят к следующей теореме.

8.4.13. Теорема Смирнова. *Сопоставив каждой компактификации cX тихоновского пространства X близость $\delta(c)$ на пространстве X, мы установим взаимно однозначное соответствие между всеми компактификациями пространства X и всеми близостями на X.* ∎

8.4.14. Пример. Читатель может легко проверить, что близость, определенная в примере 8.4.4 на тихоновском пространстве X, соответствует стоун-чеховской компактификации пространства X. ∎

ИСТОРИЧЕСКИЕ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рисс в [1908] сформулировал аксиомы, описывающие понятие близости пары множеств; хотя введенное им понятие не эквивалентно рассмотренному здесь отношению близости, оно ему аналогично. Однако ни сам Рисс, ни кто-либо из математиков — его современников не проявил интереса к подробной разработке этой идеи. Понятие близости (в нашем смысле) введено Ефремовичем в [1951]. Там же доказана теорема 8.4.2. Теорема 8.4.10 доказана в работе Ефремовича [1952]. Анализ пространств близости проведен Смирновым в [1952]. В этой же работе доказаны теоремы 8.4.5, 8.4.8, 8.4.9 и 8.4.13. Наиболее полное изложение теории пространств близости приводится в книге Наимпалли и Воррэка [1970].

УПРАЖНЕНИЯ

8.4.A. (a) Покажите, что каждое непрерывное отображение компакта X в тихоновское пространство Y близостно непрерывно относительно любых близостей δ, δ' на пространствах X и Y соответственно.

(b) (Ефремович [1952]). Пусть (X, δ) — пространство близости, и пусть A, B — два далеких относительно δ подмножества X. Покажите, что существует близостно непрерывное отображение $f\colon X \to I$ (где близость на отрезке I индуцирована естественной метрикой на нем), такое, что $f(A) \subset \{0\}$ и $f(B) \subset \subset \{1\}$.

8.4.B. (a) Пусть δ и δ' — близости на X и Y соответственно, и пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — равномерности, индуцированные δ и δ'. Покажите, что каждое отображение X в Y, близостно непрерывное относительно δ и δ', равномерно непрерывно относительно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$.

Указание. Покажите, что f близостно непрерывно относительно δ и δ' в том и только том случае, если для каждого δ'-равномерного покрытия $\{A_i\}_{i=1}^k$ множества Y покрытие $\{f^{-1}(A_i)\}_{i=1}^k$ множества X δ-равномерно.

(b) Выведите из (a), что каждое отображение $f\colon X \to Y$, близостно непрерывное относительно близостей δ и δ' на пространствах X и Y соответственно, продолжается до непрерывных отображений $F\colon cX \to c'Y$, где cX и $c'Y$ — компактификации пространств X и Y, удовлетворяющие условиям $\delta(c) = \delta$ и $\delta(c') = \delta'$.

8.4.C. Если δ_1 и δ_2 — две близости на множестве X и для всех A, $B \subset X$ из $A\delta_1 B$ следует $A\delta_2 B$, то говорят, что близость δ_1 *сильнее* (*тоньше*) близости δ_2, а δ_2 *слабее* (*грубее*) δ_1, и пишут $\delta_2 \leqslant \delta_1$.

(a) Проверьте, что отношение $\leqslant$ задает некоторое упорядочение семейства всех близостей на X.

(b) Убедитесь, что для компактификаций c_1X и c_2X тихоновского пространства X неравенство $c_1X \leqslant c_2X$ имеет место в том и только том случае, если $\delta(c_1) \leqslant \delta(c_2)$.

8.4.D (Смирнов [1952]). (a) Покажите, что в семействе всех равномерностей на множестве X, которые индуцируют фиксированную близость δ, существует слабейшая равномерность.

Указание. Это равномерность, индуцированная близостью δ.

(b) Проверьте, что в семействе всех равномерностей на множестве X, индуцирующих некоторую фиксированную близость δ, существует ровно одна вполне ограниченная равномерность — слабейшая. Установите, что для любого тихоновского пространства X существует взаимно однозначное соответствие между близостями и вполне ограниченными равномерностями на пространстве X.

8.4.E. Дайте прямое описание близости на локально компактном пространстве X, соответствующей компактификации Александрова пространства X.

8.5. ЗАДАЧИ

Характеристика паракомпактности в терминах окружений диагонали

8.5.1. (Келли [1955]). Покажите, что если в открытое покрытие $\{U_s\}_{s \in S}$ топологического пространства X можно вписать замкнутое локальное конечное покрытие $\{F_t\}_{t \in T}$, то существует окружение V диагонали $\Delta \subset X \times X$, открытое в произведении $X \times X$ и такое, что покрытие $\{B(x, V)\}_{x \in X}$ вписано в $\{U_s\}_{s \in S}$.

Указание. Для любого $t \in T$ выберите такое $s(t) \in S$, что $F_t \subset U_{s(t)}$, и положите $V_t = (U_{s(t)} \times U_{s(t)}) \cup [(X \setminus F_t) \times (X \setminus F_t)]$. Проверьте, что $V = \bigcap_{t \in T} V_t$ обладает требуемыми свойствами.

8.5.2 (Келли [1955]). Докажите, что регулярное пространство X есть паракомпакт тогда и только тогда, когда в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать покрытие вида $\{B(x, V)\}_{x \in X}$, где V — некоторое окружение диагонали $\Delta \subset X \times X$, открытое в произведении $X \times X$.

Указание. При доказательстве паракомпактности пространства X воспользуйтесь условием (ii) теоремы 5.1.12. Выберите вписанное покрытие вида $\{B(x, V)\}_{x \in X}$, для каждой точки $x \in X$ возьмите окрестность W_x, такую, что $W_x \times W_x \subset V$, и рассмотрите покрытие $\{W_x\}_{x \in X}$.

p-адические равномерности

8.5.3. (a) Пусть Z — множество всех целых чисел и p — простое число. Покажите, что семейство $\mathscr{B} = \{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ окружений диагонали $\Delta \subset Z \times Z$, где $W_i = \{(x, y) \in Z \times Z\colon\ x - y$ делится на $p^i\}$, обладает свойствами (BU1)—(BU3). Равномерность, порожденная такой базой $\mathscr{B}$, называется *p-адической равномерностью на Z* и обозначается $\mathscr{W}_p$.

Покажите, что если p_1 и p_2 — различные простые числа, то равномерности $\mathscr{W}_{p_1}$ и $\mathscr{W}_{p_2}$, а также топологии на Z, индуцированные этими равномерностями, несравнимы, т. е. ни одна из них не сильнее другой.

(b) Пусть p — простое число; рассмотрим произведение $X_p = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$, где $X_i = \{-p+1, -p+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots \ldots, p-1\}$ — дискретное пространство, и единственную равномерность $\mathscr{U}_p$ на пространстве X_p. Обозначим через Y подмножество пространства X_p, состоящее из всех последовательностей $\{x_i\}$, в которых не более чем конечное число x_i отлично от нуля, и положим $f(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p^i$, где $\{x_i\} \in Y$. Проверьте, что f — равномерный изоморфизм $(Y, (\mathscr{U}_p)_Y)$ на $(Z, \mathscr{W}_p)$, и убедитесь, что $(X_p, \mathscr{U}_p)$ — пополнение равномерного пространства $(Z, \mathscr{W}_p)$. Используя упр. 6.2.A(c), заметьте, что X_p гомеоморфно канторову совершенному множеству.

(c) Пусть Q — множество всех рациональных чисел и p — простое число. Покажите, что семейство $\mathscr{B} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ окружений диагонали $\Delta \subset Q \times Q$, где $V_i = \{(x, y) \in Q \times Q$: существуют такие k, $m \in Z$, что $x - y = \frac{k}{m} p^i$, и m не делится на $p\}$, обладает свойствами (BU1)—(BU3). Равномерность, порожденная такой базой $\mathscr{B}$, называется *p-адической равномерностью на* Q и обозначается $\mathscr{V}_p$. Проверьте, что $(\mathscr{V}_p)_Z = \mathscr{W}_p$, где $\mathscr{W}_p$ есть p-адическая равномерность на Z. Пространство Q_p с топологией, индуцированной равномерностью $\tilde{\mathscr{V}}_p$, где $(Q_p, \tilde{\mathscr{V}}_p)$ — пополнение равномерного пространства $(Q, \mathscr{V}_p)$, называется *пространством p-адических чисел.* Докажите, что Q_p гомеоморфно сумме $\aleph_0$ экземпляров канторова множества.

(d) Пусть p — простое число; положим $v_p(0) = 0$ и для каждого рационального числа $x \neq 0$ обозначим через $v_p(x)$ натуральное i, такое, что $x = \frac{k}{m} p^i$, где k и m не делятся на p. Покажите, что формула $\rho_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$ определяет некоторую метрику на множестве Q рациональных чисел и что эта метрика индуцирует p-адическую равномерность на Q.

Топологические группы

8.5.4. (a) Пусть $\{G_s\}_{s \in S}$ — семейство групп. Проверьте, что произведение $\prod_{s \in S} G_s$ — группа относительно покоординатного умножения. Эта группа называется *декартовым произведением групп* $\{G_s\}_{s \in S}$.

Покажите, что декартово произведение топологических групп $\{G_s\}_{s \in S}$ есть топологическая группа относительно тихоновской топологии и что равномерность на $\prod_{s \in S} G_s$, порожденная одним из трех семейств равномерных покрытий, определенных в примере 8.1.17, есть декартово произведение соответствующих равномерностей на группах G_s.

(b) Подмножество G_0 группы G называется *подгруппой*, если $x^{-1} \in G_0$ и $xy \in G_0$ для $x, y \in G_0$. Покажите, что подгруппа G_0 топологической группы G есть топологическая группа относительно топологии подпространства и что если $\mathcal{U}$ — равномерность на G, порожденная одной из трех совокупностей равномерных покрытий, определенных в примере 8.1.17, то $\mathcal{U}_{G_0}$ совпадает с соответствующей равномерностью на группе G_0.

(c) (А. Стоун [1948]). Заметьте, что $Z^{\aleph_1}$, где Z — множество всех целых чисел, не является нормальной топологической группой.

Указание. См. задачу 2.7.16(a).

(d) (Тьюки [1940]). Докажите, что $D^{\aleph_1} \times \Sigma$, где $\Sigma \subset D^{\aleph_1}$ состоит из всех точек с не более чем счетным множеством отличных от нуля координат, является счетно компактной не нормальной топологической группой.

Указание. См. пример 3.10.17, задачу 3.12.23(c) и теорему 5.1.38.

Равномерности в терминах псевдометрик

8.5.5. Пусть даны множество X и семейство P псевдометрик на нем, обладающее свойствами (UP1)—(UP2) и следующим свойством:

(UP3) *Если σ — псевдометрика на множестве X и для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\rho \in P$ и $\delta > 0$, что $\sigma(x, y) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$, то $\sigma \in P$.*

Проверьте, что P — семейство всех псевдометрик на X, равномерных относительно равномерности $\mathcal{U}$, порожденной семейством P.

Заметьте, что существует взаимно однозначное соответствие между равномерностями на X и семействами псевдометрик на X, обладающими свойствами (UP1)—(UP3).

Продолжения равномерных псевдометрик и равномерно непрерывных функций

8.5.6. (a) (Исбелл [1959]). Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство и $M \subset X$. Докажите, что каждая ограниченная псевдометрика ρ на множестве X, равномерная относительно $\mathcal{U}_M$, продолжается до ограниченной псевдометрики σ на множестве X, равномерной относительно $\mathcal{U}$.

Указание. Можно считать, что ρ ограничена числом $1/2$. Для $i=1, 2, \ldots$ выберем $V_i \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условию $V_i \cap (M \times M) \subset \{(x, y) \in M \times M\colon \ \rho(x, y) < 1/2^i\}$, и псевдометрику σ_i на множестве X, ограниченную числом 1 и такую, что $\{(x, y) \in X \times X\colon \ \sigma_i(x, y) < 1/4\} \subset V_i$. Установите, что формула $\sigma'(x, y) = 8 \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sigma_i(x, y)$ определяет псевдометрику σ' на X, равномерную относительно $\mathcal{U}$ и удовлетворяющую неравенству $\rho(x, y) \leqslant \sigma'(x, y)$ для всех пар $x, y \in M$. Пусть $\sigma(x, y) = \min(\sigma'(x, y), \sigma''(x, y))$, где $\sigma''(x, y) = \inf\limits_{a, b \in M} (\sigma'(x, a) + \rho(a, b) + \sigma'(b, y))$.

(b) (Катетов [1951a]). Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство и $M \subset X$. Докажите, что каждая ограниченная вещественная функция f на M, равномерно непрерывная относительно $\mathcal{U}_M$ и равномерности $\mathcal{V}$ на R, индуцированной естественной метрикой, продолжается до ограниченной вещественной функции F на X, равномерно непрерывной относительно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

Указание (Гантнер [1969]). Рассмотрите функцию f, принимающую только неотрицательные значения и удовлетворяющую условию $f^{-1}(0) \neq \varnothing$. Примените (a), продолжите псевдометрику ρ на M, определенную формулой $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$, до псевдометрики σ на X и положите $F(x) = \sigma(x, f^{-1}(0))$.

(c) Убедитесь, что предположение об ограниченности ρ в (a) и предположение об ограниченности f в (b) оба существенны.

Слабейшие вполне ограниченные равномерности и компактификации Самюэля

8.5.7. (a) (Самюэль [1948]). Покажите, что для каждой равномерности $\mathcal{U}$ на тихоновском пространстве X равномерность $\mathcal{U}_0$, порожденная семейством всех отображений X в I, равномерно непрерывных относительно $\mathcal{U}$ и единственной равномерности на I, есть вполне ограниченная равномерность на пространстве X, которая слабее равномерности $\mathcal{U}$. Проверьте, что $\mathcal{U}_0$ — сильнейшая равномерность на пространстве X, вполне ограниченная и более слабая, чем $\mathcal{U}$. Пространство sX, где $(sX, \tilde{\mathcal{U}}_0)$ — пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U}_0)$, называется *компактификацией Самюэля пространства X относительно равномерности $\mathcal{U}$*.

Докажите, что компактификация Самюэля пространства X относительно $\mathcal{U}$ содержит $\tilde{X}$, где $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ — пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ (ср. с задачей 8.5.20).

(b) Докажите, что для каждой равномерности $\mathcal{U}$ на тихоновском пространстве X совокупность $\boldsymbol{C}$ всех покрытий пространства X, в которые можно вписать конечные покрытия, равномерные относительно $\mathcal{U}$, обладает свойствами (UC1)—(UC4). Покажите, что равномерность, порожденная совокупностью $\boldsymbol{C}$ равномерных покрытий, совпадает с равномерностью $\mathcal{U}_0$, определенной в (a).

Указание. См. указание к упр. 8.1.H.

Замечание. Естественный вопрос — для каждого ли кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ совокупность $\boldsymbol{C}_{\mathfrak{m}}$ всех покрытий пространства X, имеющих вписанные покрытия мощности $<\mathfrak{m}$, равномерные относительно $\mathcal{U}$, обладает свойством (UC3). Исбелл в [1964] заметил, что ответ положителен для $\mathfrak{m} = \aleph_1$; Куцья в [1973] обнаружил, что в предположении обобщенной гипотезы континуума (т. е. в предположении, что для каждых кардиналов $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$, таких, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, выполняется неравенство $2^{\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{m}$) ответ всегда положителен. Пелант в [1975] доказал, что этот вопрос независим от аксиом теории множеств.

Универсальные равномерности

8.5.8. (a) Пусть $\mathcal{U}$ — универсальная равномерность на тихоновском пространстве X. Покажите, что сильнейшая (тончайшая) равномерность $\mathcal{U}_0$ на пространстве X, вполне ограниченная и более слабая, чем $\mathcal{U}$ (см. задачу 8.5.7), совпадает с равномерностью $\mathcal{C}^*$, определенной в примере 8.1.19. Установите, что компактификация Самюэля тихоновского пространства X относительно универсальной равномерности на X совпадает со стоун-чеховской компактификацией пространства X.

(b) Пусть $\mathcal{U}$ — универсальная равномерность на тихоновском пространстве X и $(\mu X, \tilde{\mathcal{U}})$ — пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$. Докажите, что μX — подпространство вещественной компактификации по Хьюитту υX пространства X, так что $X \subset \mu X \subset \upsilon X \subset \beta X$.

(c) Пусть $\mathcal{U}$ — универсальная равномерность на тихоновском пространстве X и $(\mu X, \tilde{\mathcal{U}})$ — пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$. Заметьте, что каждая псевдометрика ρ на множестве X, являющаяся непрерывным отображением $X \times X$ в R, может быть продолжена до псевдометрики $\bar{\rho}$ на множестве μX, являющейся непрерывным отображением $\mu X \times \mu X \to R$.

Указание. Примените упр. 8.3.E(a).

Пространства со слабейшей равномерностью

8.5.9 (Самюэль [1948]). Покажите, что слабейшая равномерность на тихоновском пространстве X существует в том и только том случае, если пространство X локально компактно.

Указание. Примените задачу 8.5.7 и теоремы 3.5.12, 8.3.10 и 8.3.16.

Характеристика псевдокомпактности в терминах равномерностей

8.5.10 (Досс [1947]). Докажите, что для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X псевдокомпактно.*

(2) *Каждая равномерность на пространстве X вполне ограничена.*

(3) *Равномерности $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}^*$ на пространстве X совпадают.*

Указание. Чтобы доказать, что из (1) вытекает (2), покажите, что если (2) не выполнено, то существует бесконечное дискретное семейство непустых открытых подмножеств пространства X. Импликация (3)$\Rightarrow$(1) следует из упр. 3.11.C.

Пространства с единственной равномерностью

8.5.11 (Досс [1949]). Докажите, что для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны (ср. с задачей 3.12.16(a)):

(1) *Пространство X обладает единственной (с точностью до эквивалентности) компактификацией.*

(2) *Существует только одна равномерность на пространстве X.*

(3) *Существует только одна вполне ограниченная равномерность на пространстве X.*

Указание. При доказательстве импликации (1)$\Rightarrow$(2) воспользуйтесь задачами 3.12.16(a) и 8.5.10.

Пространства без полных равномерностей

8.5.12 (Дьедонне [1939a]). Заметьте, что если некомпактное тихоновское пространство X имеет единственную компактификацию, то не существует полной равномерности на X (ср. с задачей 3.12.16(a)).

Полные по Дьедонне пространства

8.5.13. Топологическое пространство X называется *полным по Дьедонне*, если на нем существует полная равномерность. Легко видеть, что топологическое пространство X полно по Дьедонне в том и только том случае, если X — тихоновское пространство и универсальная равномерность на X полна.

(a) (Дьедонне [1939]). Проверьте, что полнота по Дьедонне наследуется замкнутыми множествами и мультипликативна.

Докажите, что для каждого топологического пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X полно по Дьедонне.*

(2) *Пространство X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения пространств, метризуемых полной метрикой.*

(3) *Пространство X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения метризуемых пространств.*

(4) *Пространство X гомеоморфно пределу обратного спектра пространств, метризуемых полной метрикой.*

(5) *Пространство X гомеоморфно пределу обратного спектра метризуемых пространств.*

Установите, что вещественно полные пространства полны по Дьедонне (это можно также вывести из примера 8.3.19 или задачи 8.5.8(b)). Заметьте, что из упр. 5.1.J(f) следует, что каждый паракомпакт является полным по Дьедонне пространством (ср. с (b) и (d) ниже).

Указание. Для доказательства импликации (3)$\Rightarrow$(2) достаточно показать, что каждое метризуемое пространство X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения пространств, метризуемых полной метрикой. Для этого рассмотрите метризуемое полной метрикой пространство Y, содержащее X, и произведение $\prod\limits_{x \in Y \setminus X} (Y \setminus \{x\})$.

(b) (Кац [1954], Фролик [1961b], Тамано [1962]). Докажите, что для каждого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

(1) *Пространство X полно по Дьедонне.*

(2) *Для каждой точки $x_0 \in \beta X \setminus X$ существует такой паракомпакт $T \subset \beta X$, что $X \subset T \subset \beta X \setminus \{x_0\}$.*

(3) *Для каждой точки $x_0 \in \beta X \setminus X$ существует локально конечное функционально открытое покрытие $\mathcal{A}$ пространства X, такое, что точка x_0 не принадлежит замыканию в βX никакого элемента покрытия $\mathcal{A}$.*

(4) *Для каждой точки $x_0 \in \beta X \setminus X$ существует локально конечное разбиение единицы $\{f_s\}_{s \in S}$ на пространстве X, такое, что точка x_0 не принадлежит замыканию в βX никакого множества $f_s^{-1}((0, 1])$.*

Установите, что каждый паракомпакт является полным по Дьедонне пространством.

Указание. При доказательстве того, что (1)$\Rightarrow$(2), заметьте, что существует псевдометрика ρ: $X \times X \to R$, которую нельзя непрерывно продолжить на пространство $(X \cup \{x_0\}) \times (X \cup \{x_0\})$. Рассмотрите отображение f: $X \to Y = X/\rho$ (см. упр. 4.2.I), его продолжение F: $\beta X \to \beta \tilde{Y}$, где $\tilde{Y}$ — пополнение пространства Y, и сужение $F_{\tilde{Y}}$: $F^{-1}(\tilde{Y}) \to \tilde{Y}$. Покажите, что пространство $T = F^{-1}(\tilde{Y})$ обладает требуемыми свойствами (примените теорему 5.1.35). При доказательстве импликации (3)$\Rightarrow$(4) воспользуйтесь упр. 7.1.B. При доказательстве того, что (4)$\Rightarrow$(1), рассмотрите пополнение $\mu X \subset \beta X$ пространства X относительно универсальной равномерности на X. Допуская, что существует точка $x_0 \in \mu X \setminus X \subset \beta X \setminus X$, используйте разбиение единицы в (4) для определения псевдометрики ρ: $X \times X \to R$, которую нельзя непрерывно продолжить на $\mu X \times \mu X$.

(c) Заметьте, что на множестве полных по Дьедонне пространств компактность, счетная компактность и псевдокомпактность эквивалентны.

(d) (Нагата [1950a]). Приведите прямое доказательство того факта, что на каждом паракомпакте существует полная равномерность (ср. с (a) и (b) выше).

Указание. Проверьте, что семейство всех открытых покрытий пространства X обладает свойствами (UC1)—(UC4). Предположите, что существует центрированное семейство $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств пространства X, которое содержит произвольно малые множества и удовлетворяет условию $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$. Для каждой точки $x \in X$ выберите ее окрестность U_x, не пересекающуюся с каким-нибудь элементом семейства $\mathcal{F}$, и рассмотрите покрытие $\{U_x\}_{x \in X}$ пространства X.

(e) (Кац [1954]). Докажите, что если X — подпространство полного по Дьедонне пространства Y и для каждой точки $x_0 \in Y \setminus X$ существует локально конечное функционально открытое покрытие $\mathcal{A}$ пространства X, такое, что точка x_0 не принадлежит замыканию в Y никакого элемента покрытия $\mathcal{A}$, то пространство X полно по Дьедонне.

Указание. Предположите, что X всюду плотно в Y, рассмотрите продолжение f: $\beta X \to \beta Y$ вложения пространства X в пространство Y и заметьте, что $\beta X \setminus X = [f^{-1}(Y) \setminus X] \cup [f^{-1}(\beta Y) \setminus f^{-1}(Y)]$.

(f) (Дьедонне [1939]). Докажите, что если X — подпространство полного по Дьедонне пространства Y и для каждой точки $x_0 \in Y \setminus X$ существует счетное семейство $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых подмножеств пространства Y, такое, что $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \subset Y \setminus X$, то пространство X полно по Дьедонне.

Установите, что полнота по Дьедонне наследуется F_σ-множествами.

(g) (Дьедонне [1939b], Кац [1954]). Пусть X — полное по Дьедонне пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Пусть топология $\mathcal{O}_2$ на множестве X сильнее исходной топологии $\mathcal{O}_1$, и пусть $(X, \mathcal{O}_2)$ — тихоновское пространство. Докажите, что $(X, \mathcal{O}_2)$ полно по Дьедонне.

Указание. Рассмотрите продолжение тождественного отображения $(X, \mathcal{O}_2)$ в $(X, \mathcal{O}_1)$ на стоун-чеховскую компактификацию.

(h) (Широта [1952]). Докажите, что полное по Дьедонне пространство X является вещественно полным тогда и только тогда, когда каждое дискретное замкнутое подпространство пространства X вещественно полно. Пусть мощность каждого замкнутого дискретного подпространства полного по Дьедонне пространства X — неизмеримый кардинал. Докажите, что тогда X вещественно полно. Пусть, наконец, мощность каждого семейства попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств полного по Дьедонне пространства — неизмеримый кардинал. Докажите, что тогда X вещественно полно.

Указание. Примените (a) и задачу 5.5.10(a).

(i) (Зенор [1970]). Докажите, что пространство $\mathcal{Z}(X)$ всех непустых компактов в X полно по Дьедонне в том и только том случае, когда X полно по Дьедонне.

Указание. Примените задачу 3.12.26(f).

(j) (Исии [1959]). Докажите, что линейно упорядоченное пространство X полно по Дьедонне в том и только том случае, когда X — паракомпакт.

Указание (Энгелькинг и Латцер [1977]). В силу 5.5.22(f), достаточно доказать, что не существует полного по Дьедонне стационарного подмножества S пространства $W(\alpha)$, где α — предельный ординал, такой, что ω_0 не конфинально α. Так как семейство $\mathcal{F} = \{S \cap (x, \rightarrow)\}_{x \in S}$ центрировано и $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$, то достаточно показать, что для любой открытой окрестности U диагонали $\Delta \subset S \times S$ существует такой элемент $x(U) \in S$, что $(x, y) \in U$, как только x, $y \in S \cap (x(U), \rightarrow)$. Допуская противное, определите две трансфинитные последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots, \xi < \gamma$, и $y_0, y_1, \ldots, y_\xi, \ldots, \xi < \gamma$, конфинальные в S и такие, что $(x_\xi, y_\xi) \notin U$ и $x_\xi < y_\xi < x_{\xi'}$ для всех $\xi < \xi' < \gamma$. Рассмотрите множество $\overline{\{x_\xi \colon \xi < \gamma\}}$.

Прямое построение пополнения

8.5.14 (Самюэль [1948]). (a) Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство. Мы называем фильтр Коши $\mathcal{F}$ в $(X, \mathcal{U})$ *минимальным*, если для каждого фильтра Коши $\mathcal{F}'$ в $(X, \mathcal{U})$, содержащегося в $\mathcal{F}$, имеем $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Покажите, что любой фильтр Коши в $(X, \mathcal{U})$ содержит ровно один минимальный фильтр Коши. Установите, что для любой точки $x \in X$ семейство всех подмножеств пространства X, содержащих какую-нибудь окрестность точки x, если минимальный фильтр Коши в $(X, \mathcal{U})$.

(b) Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство. Обозначим через $\tilde{X}$ семейство всех минимальных фильтров Коши в $(X, \mathcal{U})$ и для каждого $V \in \mathcal{U}$ положим

$\tilde{V} = \{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \tilde{X} \times \tilde{X}: \delta(F) < V$ для некоторого $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$.

Установите, что семейство $\{\tilde{V}: V \in \mathcal{U}\}$ окружений диагонали $\Delta \subset \tilde{X} \times \tilde{X}$ обладает свойствами (BU1)—(BU3) и потому порождает равномерность $\tilde{\mathcal{U}}$ на множестве $\tilde{X}$. Покажите, что равномерное пространство $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ есть пополнение пространства $(X, \mathcal{U})$.

Указание. Воспользуйтесь упр. 8.3.В.

Пополнение абелевой группы есть абелева группа.

8.5.15. Пусть G — абелева топологическая группа. Рассмотрите равномерное пространство $(G, \mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — равномерность на G, определенная в примере 8.1.17, и его пополнение $(\tilde{G}, \tilde{\mathcal{U}})$. Покажите, что на $\tilde{G}$ можно определить операцию умножения, относительно которой $\tilde{G}$ — абелева топологическая группа, таким образом, что G станет подгруппой группы $\tilde{G}$.

Пространства замкнутых подмножеств V (см. задачи 2.7.20, 3.12.26, 4.5.22 и 6.3.22)

8.5.16. Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство и 2^X — семейство всех непустых подмножеств пространства X, замкнутых в топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$.

(a) Покажите, что семейство $\mathcal{B}$ всех множеств

$$2^V = \{(A, A') \subset 2^X \times 2^X: A \subset B(A', V) \quad \text{и} \quad A' \subset B(A, V)\},$$

где $V \in \mathcal{U}$, обладает свойствами (BU1)—(BU3). Равномерность на множестве 2^X, порожденная базой $\mathcal{B}$, обозначается $2^{\mathcal{U}}$. Проверьте, что $(X, \mathcal{U})$ равномерно изоморфно подпространству полученного таким образом равномерного пространства, которое замкнуто в топологии, индуцированной на 2^X равномерностью $2^{\mathcal{U}}$.

(b) Проверьте, что если равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X индуцирована метрикой ρ на множестве X, то равномерность $2^{\mathcal{U}}_{\mathcal{M}}$ на семействе $\mathcal{M}$ всех ограниченных непустых замкнутых подмножеств пространства (X, ρ) совпадает с равномерностью, индуцированной метрикой Хаусдорфа.

(c) (Майкл [1951]). Покажите, что для любой равномерности $\mathcal{U}$ на топологическом пространстве X топология на $\mathcal{Z}(X)$, индуцированная равномерностью $2^{\mathcal{U}}_{\mathcal{Z}(X)}$, совпадает с топологией Вьеториса.

(d) Пусть $(X, \mathcal{U})$ — вполне ограниченное равномерное пространство. Проверьте, что в этом случае пространство $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ также вполне ограничено.

(e) Приведите пример полного равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$, такого, что пространство $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ не полно.

Указание. Рассмотрите равномерность на вещественной прямой, порожденную базой, состоящей из всех множеств вида $\bigcup\{A \times A: A \in \mathcal{A}\}$, где $\mathcal{A}$ — счетное покрытие вещественной прямой попарно непересекающимися множествами.

(f) Покажите, что если равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ — компакт, то пространство $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ также компакт.

Кардинальные функции IV (см. задачи 1.7.12, 1.7.13, 2.7.9—2.7.11, 3.12.4, 3.12.7—3.12.11 и 3.12.12(j))

8.5.17. Наименьший кардинал $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, такой, что на тихоновском пространстве X существует равномерность веса $\leqslant \mathfrak{m}$, называется *равномерным весом* пространства X и обозначается $u(X)$.

(a) (Шерф [1968]). Покажите, что для каждого тихоновского пространства X мы имеем $w(X) = c(X)u(X)$.

Указание (Юхас [1971a]). Примените замечание 8.2.4.

(b) Установите, что для каждого тихоновского пространства X имеет место равенство $w(X) = e(X)u(X)$, и выведите из него, что $w(X) = f(X)u(X)$ для каждой кардинальной функции f из диаграммы задачи 3.12.7(e), кроме $f = |\ \ |$.

(c) Приведите пример топологического пространства X веса $\mathfrak{m}$ и равномерностей $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ на пространстве X, таких, что $w(\mathcal{U}_1) > \mathfrak{m} > w(\mathcal{U}_2)$.

Строгие включения

8.5.18 (Александров и Пономарев [1959]). Пусть X есть T_1-пространство, и пусть $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$ — семейства всех открытых и всех замкнутых подмножеств пространства X соответственно. Отношение $\Subset$ между элементами семейств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{O}$ называется *строгим включением на пространстве* X, если оно обладает свойствами (SI1)—(SI7), сформулированными в § 8.4.

Покажите, что для каждого T_1-пространства X существует взаимно однозначное соответствие между близостями и строгими включениями на пространстве X.

Близостно непрерывные отображения метрических пространств

8.5.19 (Ефремович [1952]) (a) Пусть (X, ρ) и (Y, σ) — метрические пространства и δ, δ' — близости, индуцированные метриками ρ, σ на X и Y соответственно. Покажите, что отображение $f: X \to Y$ близостно непрерывно относительно δ и δ' в том и только том случае, если f равномерно непрерывно относительно ρ и σ (ср. с упр. 8.1.A(b)).

Указание. (Исбелл [1964]). Если отображение f не является равномерно непрерывным, то найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $x'_1, x'_2, \ldots$ точек пространства X, что $\lim \rho(x_i, x'_i) = 0$ и $\sigma(f(x_i), f(x'_i)) \geqslant \varepsilon$ при $i = 1, 2, \ldots$. Определите конечное множество M натуральных чисел, такое, что $\sigma(f(x_i), f(x'_j)) \geqslant \varepsilon/4$ при всех $i, j \in M$.

(b) Заметьте, что две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X равномерно эквивалентны (см. упр. 4.1.B(b)) в том и только том случае, если они индуцируют одну и ту же близость.

Равномерности и близости

8.5.20 (Смирнов [1952]). Покажите, что если равномерность $\mathcal{U}$ на пространстве X индуцирует близость δ на X, то определенная в задаче 8.5.7 равномерность $\mathcal{U}_0$ — сильнейшая равноменость на пространстве X, вполне ограниченная и более слабая, чем $\mathcal{U}$, также индуцирует близость δ, т. е. равномерность $\mathcal{U}_0$ совпадает с равномерностью, индуцированной близостью δ, которая индуцирована равномерностью $\mathcal{U}$. Проверьте, что компактификация Самюэля тихоновского пространства X относительно равномерности $\mathcal{U}$ — это та компактификация, которая соответствует близости δ, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$ (ср. с теоремой 8.4.13).

8.5.21 (Смирнов [1952]). Пусть δ — близость на множестве X. **Покрытие** $\mathcal{A}$ множества X называется *слабо δ-равномерным*, если существует последовательность $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}, \mathcal{A}_2, \ldots$ покрытий пространства X, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(1) *$\mathcal{A}_{i+1}$ сильно звездно вписано в $\mathcal{A}_i$ при $i = 1, 2, \ldots$.*

(2) *Для каждой пары A, B подмножеств пространства X, удовлетворяющих условию $A\delta B$, и для каждого i существует множество $A_i \in \mathcal{A}_i$, такое, что $A \cap A_i \neq \varnothing \neq B \cap A_i$.*

(a) Покажите, что каждое δ-равномерное покрытие пространства X является слабо δ-равномерным.

(b) Докажите, что для каждого слабо δ-равномерного покрытия $\mathcal{A}$ пространства X существует равномерность $\mathcal{U}$ на множестве X, которая индуцирует близость δ и содержит множество $\bigcup\{A \times A: A \in \mathcal{A}\}$.

8.5.22 (Катетов [1959], Даукер [1961]). Проверьте, что совокупность $\boldsymbol{C}$ всех покрытий множества $X = N \times N$, где N — множество натуральных чисел, в которые можно вписать покрытие вида $\{\{x\} \times A: x \in N, A \in \mathcal{A}\}$, где $\mathcal{A}$ — конечное покрытие множества N попарно непересекающимися множествами, обладает свойствами (UC1)—(UC4). Пусть $\mathcal{U}$ — равномерность, порожденная $\boldsymbol{C}$, и δ — близость на X, индуцированная равномерностью $\mathcal{U}$. Установите, что $\Delta\delta[(N \times N) \setminus \Delta]$. Покажите, что покрытия $\{\{x\} \times N\}_{x \in N}$ и $\{N \times \{y\}\}_{y \in N}$ оба слабо

δ-равномерны и что единственное покрытие, вписанное одновременно в эти оба покрытия, состоит из всех одноточечных подмножеств пространства X. Установите, что в семействе всех равномерностей на множестве X, индуцирующих близость δ, не существует сильнейшей равномерности.

8.5.23 (Смирнов [1952]). Пусть δ — близость на множестве X, индуцированная метрикой на X. Докажите, что в семействе всех равномерностей на множестве X, которые индуцируют данную близость δ, существует сильнейшая равномерность.

Указание. Покажите, что если для окружения V диагонали $\Delta \subset X \times X$ существуют две последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и x', $x'_2, \ldots$ точек пространства X, такие, что $|x_i - x'_i| \geqslant V$ при $i = 1, 2, \ldots$, то для любого окружения W диагонали $\Delta \subset X \times X$, удовлетворяющего включению $4W \subset V$, существует бесконечное множество M натуральных чисел, такое, что $|x_i - x'_j| \geqslant W$ для всех $i, j \in M$.

ЛИТЕРАТУРА

Акуаро (Aquaro G.)

[1965] Ricovrimenti puntualmente numerabili di uno spazio numerabilmente compatto. — Atti Acad. Naz. Lincei 39 (1965), 19—21.

Алас (Alas O. T.)

[1971] On a characterization of collectionwise normality. — Canad. Math. Bull. 14 (1971), 13—15.

Александер (Alexander J. W.)

[1939] Ordered sets, complexes and the problem of compactifications. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA 25 (1939), 296—298.

Александров П. С.

[1923] Sur les propriétés locales des ensembles et la notion de compaciteé. — Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. A (1923), 9—12.

[1924] Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits. — C. R. Acad. Paris 178 (1924), 185—187.

[1924a] Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume. — Math. Ann. 92 (1924), 267—274.

[1924b] Über die Metrisation der in kleinen kompakten topologischen Räume. — Math. Ann. 92 (1924), 294—301.

[1925] Über stetige Abbildungen kompakter Räume. — Proc. Akad. Amsterdam 28 (1925), 997—999.

[1927] Über stetige Abbildungen kompakter Räume. — Math. Ann. 96 (1927), 555—571.

[1928] Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elmentaren geometrischen Anschauung. — Math. Ann. 98 (1928), 617—636.

[1929] Untersuchugen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. — Ann. of Math. 30 (1929), 101—187.

[1932] Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen. — Math. Ann. 106 (1932), 161—238.

[1936] К теории топологических пространств. — ДАН СССР 2 (1936), 51—54.

[1939] О бикомпактных расширениях топологических пространств. — Матем. сб. 5 (1939), 403—423.

[1940] О размерности бикомпактных пространств. — ДАН СССР 26 (1940), 619—622.

[1941] Теорема сложения в теории размерности бикомпактных пространств. — Сообщ. АН Груз. ССР 2 (1941), 1—6.

[1947] On the dimension of normal spaces. — Proc. Roy. Soc. London 189 (1947), 11—39.

[1960] О метризации топологических пространств. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 8 (1960), 135—140.

---

[1]) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. перев.*

Александров П. С., Немыцкий В. В.

[1938] Условие метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии. — Матем. сб. 3 (1938), 663—672.

Александров П. С., Пасынков Б. А.

[1975*] Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1975.

Александров П. С., Пономарев В. И.

[1959] О бикомпактных расширениях топологических пространств. — Вест. Моск. унив., сер. матем. (1959), № 5, 93—108.

Александров П. С., Урысон П. С.

[1923] Sur les espaces topologiques compacts. — Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. A (1923), 5—8.

[1923a] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D). — C. R. Acad. Sci. Paris 177 (1923), 1274—1276.

[1924] Zur Theorie der topologischen Räume. — Math. Ann. 92 (1924), 258—266.

[1928] Über nulldimensionale Punktmengen. — Math. Ann. 98 (1928), 89—106.

[1929] Mémoire sur les espaces topologiques compacts. — Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam 14 (1929).

Александров П. С., Федорчук В. В.

[1978] Основные моменты в развитии теоретико-множественной топологии. — УМН, т. 33, вып. 3 (1978), с. 3—48.

Александров П. С., Хопф Х. (Alexandroff P., Hopf H.)

[1935] Topologie I. — Berlin, 1935.

Альстер, Поль (Alster K., Pol R.)

[1980*] On function spaces on compact subspaces of Σ-products of the real line. — Fund. Math. 107 (1980), 135—143.

Амирджанов Г. П.

[1977*] О всюду плотных подпространствах счетного псевдохарактера и других обобщениях сепарабельности.—ДАН СССР 234 (1977), 993—996.

Амирджанов Г. П., Шапировский Б. Э.

[1974*] О всюду плотных подмножествах топологических пространств. — ДАН СССР 214 (1974), 249—252.

Андерсон (Anderson R. D.)

[1966] Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines. — Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 515—519.

Антоновский М. Я.

[1961*] К аксиоматике топологических полуполей. — ДАН УзССР 10 (1961), 3—6.

[1961*] Метрические пространства над полуполями. — Proceedings of the Symposium on General Topology, Prague, 1961, pp. 64—68.

[1970*] Гомоморфизмы тихоновских полуполей и обобщенные полуметрики. — Fund. Math. 69 (1970), 109—123.

[1972*] Some algebraic and topological characteristics of Ulam's measurable cardinals. In: Topology and its applications (Budva, 1972). — Beograd, 1973, pp. 25—30.

[1982*] Обобщенные метрики и меры и некоторые их приложения. — Math. Vesnik 6 (19) (34) (1982), 9—21.

Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А.

[1961*] Метрические пространства над полуполями. — Тр. Таш. ун-та, 191 (1961).

[1962*] Конечномерные модули над полуполями. — Тр. Таш. ун-та, 208 (1962), 3—29.

[1963*] Топологические алгебры Буля. — Ташкент: Издат. АН УзССР, 1963, с. 1—124.

[1966*] Очерки теории топологических полуполей. — УМН 21 (1966), 185—218.
[1970*] Тихоновские полуполя и некоторые проблемы общей топологии. — УМН 25 (1970), 3—48.
[1977*] Topological Semifields and Their Application to General Topology. — Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, 106 (1977), vi — 142.

Антоновский М. Я., Кошевникова И. Г.
[1970*] К вопросу о полуметризации полуравномерных структур. — Тр. Таш. ПИ (матем.) 56, (1970), 12—28.
[1972*] Пространства сходимости типа Фреше — Урысона и обобщенная метризация. — Матем. вестник 9 (24) (1972), 373—378.

Антоновский М. Я., Миронов А. В.
[1967*] К теории топологических l-групп. — ДАН УзССР 6 (1967), 6—8.

Антоновский М. Я., Поляков В. З.
[1971*] О некоторых решетках топологического типа и их гомоморфизмах.— ДАН СССР 198 (1971), № 3.
[1972*] Несимметричные близости и метрики. — ДАН СССР 206 (1972), 13—16.

Антоновский М. Я., Хьюитт Э.
[1977*] Структура гипервещественных полей. Proc. of the 3d Int. Symp. on Topology and its Appl. — Beograd, 1977, pp. 25—30.

Антоновский М. Я., Чобан М. М.
[1981*] Инвариантные обобщенные метрики на топологических алгебрах.— Math. Vesnik 5 (18), (1981), 1—18.
[1981a*] Радиальные метрики и их применение к топологическим группам. — Math. Vesnik, 5 (18) (1981), 129—138.

Антоновский М. Я., Чудновский Д. В.
[1976*] Некоторые вопросы общей топологии и тихоновские полуполя, II. — УМН 31 (1976), 71—128.

Аренс (Arens R.)
[1946] A topology for spaces of transformations. — Ann. of Math. 47 (1946), 480—495.
[1950] Note on convergence in topology. — Math. Mag. 23 (1950), 229—234.
[1952] Extension of functions on fully normal spaces. — Pacific J. of Math. 2 (1952), 11—22.
[1958] Dense inverse limit rings. — Michigan Math. J. 5 (1958), 169—182.

Аренс, Дугунджи (Arens R., Dugundji J.)
[1950] Remark on the concept of compactness. — Portugaliae Math. 9 (1950), 141—143.
[1951] Topologies for function spaces. — Pacific J. of Math. 1 (1951), 5—31.

Арнаутов В. И.
[1970*] Недискретная топологизуемость бесконечных коммутативных колец. — ДАН СССР 194 (1970), 991—994.
[1970a*] Недискретная топологизуемость счетных колец. — ДАН СССР 191 (1970), 747—750.

Арнаутов В. И., Марин Е. И., Михалев А. В.
[1984*] Необходимые условия продолжения топологий группы и поля на их групповую алгебру. — Вестник МГУ, сер. матем. (1984), № 6, 58—61.

Ароншайн (Aronszajn N.)
[1931] Über ein Urbildproblem. — Fund. Math. 17 (1931), 92—121.

Архангельский А. В.
[1959] Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах. — ДАН СССР 126 (1959), 239—241.
[1960] О метризации топологических пространств. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 8 (1960), 589—595.

[1960a] О внешних базах множеств, лежащих в бикомпактах. — ДАН СССР 132 (1960), 495—496.

[1961] О топологических пространствах, полных в смысле Чеха. — Вест. Моск. унив., сер. матем. (1961), № 2, 37—40.

[1961a] Новые критерии паракомпактности и метризуемости произвольного T_1-пространства. — ДАН СССР 141 (1961), 13—15.

[1963] Бикомпактные множества и топология пространств. — ДАН СССР 150 (1963), 9—12.

[1963a] Некоторые типы факторных отображений и связи между классами топологических пространств. — ДАН СССР 53 (1963), 743—746.

[1964] О факторотображениях метрических пространств. — ДАН СССР 155 (1964), 247—250.

[1965] Бикомпактные множества и топология пространств. — Тр. Моск. матем. об-ва 13 (1965), 3—55.

[1965*] Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. — Матем. сб. 67 (109), (1965), № 1, с. 55—85.

[1966] Признак существования бикомпактного элемента в непрерывном разбиении. Теорема об инвариантности веса при открыто-замкнутых конечнократных отображениях. — ДАН СССР 196 (1966), 1263—1266.

[1966a] Отображения открытые и близкие к открытым. Связи между пространствами. — Тр. Моск. матем. об-ва 15 (1966), 181—223.

[1966b] Отображения и пространства. — УМН 21 (1966), вып. 4, 133—184.

[1966c*] О замкнутых отображениях, бикомпактных множествах и одной задаче П. С. Александрова. — Матем. сб. 69 (111), (1966), № 1, с. 13—34.

[1967] О факторизации отображений по весу и размерности. — ДАН СССР 174 (1967), 1243—1246.

[1967a] О совершенных отображениях и уплотнениях. — ДАН СССР 176 (1967), 983—986.

[1968] A characterization of very k-spaces. — Czech. Math. J. 18 (1968), 392—395.

[1968a*] Об отображениях, связанных с топологическими группами. — ДАН СССР 181 (1968), 1303—1306.

[1969] Аппроксимация теории диадических бикомпактов. — ДАН СССР 184 (1969), 767—770.

[1969a] О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности. — ДАН СССР 187 (1969), 967—970.

[1970] Число Суслина и мощность, характеры точек в секвенциальных бикомпактах. — ДАН СССР 192 (1970), 255—258.

[1971] О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности. — ДАН СССР 199 (1971), 1227—1230.

[1971a*] Об отображениях всюду плотных подпространств топологических произведеиий. — ДАН СССР 197 (1971), 750—753.

[1972] Спектр частот топологического пространства и классификация пространств. — ДАН СССР 206 (1972), 265—268.

[1976*] О некоторых топологических пространствах, встречающихся в функциональном анализе. — УМН, 31 (1976) № 5, с. 17—32.

[1976a*] Теоремы о мощности семейств множеств в бикомпактах. — ДАН СССР 226 (1976), № 5.

[1976b*] Аксиома Мартина и строение однородных бикомпактов счетной тесноты. — ДАН СССР 226 (1976), 1249—1252.

[1977*] О пространствах, растянутых влево. — Вестник МГУ, сер. матем., 5 (1977), 30—36.

[1978*] О топологиях, допускающих слабую связь с упорядочениями. — ДАН СССР, 238 (1978), 773—776.
[1978a*] О пространствах непрерывных функций в топологии поточечной сходимости. — ДАН СССР, 240 (1978), 505—508.
[1978b*] Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты. — УМН 35 (1978) № 6, с. 29—84.
[1979*] Об инвариантах типа характера и веса. — Тр. Моск. матем. об-ва, 38 (1979), 3—23.
[1979a*] Спектр частот топологического пространства и операция произведения. — Тр. Моск. матем. об-ва 39 (1979), 171—206.
[1980*] О некоторых свойствах радиальных пространств. — Матем. заметки 27 (1980), № 1, с. 95—104.
[1980a*] Метод звезд, новые классы пространств и счетная компактность. — ДАН СССР 251 (1980), 1033—1037.
[1980b*] О соотношениях между инвариантами топологических групп и их пространств. — УМН 35 (1980), № 3, с. 3—22.
[1981*] Классы топологических групп. — УМН 36 (1981), № 3, с. 127—146
[1982*] Факторизационные теоремы о пространствах функций: устойчивость и монолитность. — ДАН СССР 265 (1982), 1039—1043.
[1982a*] О линейных гомеоморфизмах пространств функций. — ДАН СССР 264 (1982), 1289—1292.
[1982b*] Теорема о τ-аппроксимации и функциональная двойственность. — Матем. заметки 31 (1982), № 3, с. 421—432.
[1983*] Топологические свойства пространств функций: теоремы двойственности. — ДАН СССР 269 (1983), № 6, с. 1289—1292.
[1983a*] Пространства функций и условия типа полноты. — Вестн. МГУ, сер. матем., № 6 (1983), 3—9.
[1983b] Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings. — Comment. Math. Univ. Carol. 24 (1983), 105—120.
[1984*] Непрерывные отображения, факторизационные теоремы и пространства функций. — Тр. Моск. матем. об-ва 47 (1984), 3—21.
[1984a*] Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты. — УМН 39 (1984), № 5, с. 11—50.
[1985*] Клеточные структуры и однородность. — Матем. заметки, 37 (1985), № 4, с. 580—586.

Архангельский А. В., Голштынский В.
[1963] Sur les réseaux dans les espaces topologiques. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 11 (1963), 493—497.

Архангельский А. В., Пономарев В. И.
[1968] О диадических бикомпактах. — ДАН СССР 182 (1968), 993—996. 996.
[1974*] Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974.

Архангельский А. В., Ранчин Д. В.
[1982*] О всюду плотных подпространствах топологических произведений и о свойствах, связанных с финальной компактностью. — Вести. МГУ, сер. матем., (1982), № 6, с. 21—28.

Архангельский А. В., Чинчура Ю.
[1984*] On continuous images of almost Tychonoff cubes. — Comment. Math. Univ. Carol. 25 (1984), 287—295.

Асанов М. О., Величко Н. В.
[1981*] Компактные множества в $Cp(X)$. — Comment. Math. Univ. Carol. 22 (1981), 255—266.

Балачандран (Balachandran V. K.)
[1955] A mapping theorem for metric spaces. — Duke Math. J. 22 (1955), 461—464.

Балог З.
[1979*] Об относительной счетной компактности. — УМН, 34 (1979), № 6, с. 139—143.
Банах (Banach S.)
[1922] Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales — Fund. Math. 3 (1922), 133—181.
[1931] Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen. Studia Math. 3 (1931), 174—179.
[1932] Théorie des opérations linéaires — Warszawa 1932. [Украинский перевод: Банах С. Курс функціонального анализу. — Київ, 1948.]
Банашевский (Banaschewski B.)
[1956] Local connectedness of extension spaces. — Canad. J. of Math. 8 (1956). 395—398.
Бандлов И.
[1978*] Гиперабсолют отображения. — ДАН СССР 240 (1978), 760—763.
Бандлов И., Пономарев В. И.
[1980*] Кардинальнозначные инварианты типа тесноты. Абсолюты пространств и непрерывных отображений. — УМН 35 (1980), № 3, с. 23—30.
Бартл (Bartle R. G.)
[1955] Nets and filters in topology. — Amer. Math. Monthly 62 (1955), 551—557.
Бегль (Begle E. G.)
[1949] Anote on S-spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 557—579.
Бельнов В. К.
[1976*] О нульмерных топологических группах. — ДАН СССР 226 (1976), 749—753.
Беннет (Bennett H. R.)
[1971] A note on point-countability in linearly ordered spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 598—606.
Бернштейн (Bernstein F.)
[1908] Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. — Berichte Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. Leipzig Math. — Phys. Klasse 60 (1908), 325—338.
Берри, Портер, Стефенсон (Berri M. P., Porter J. R., Stephenson R. M. jr.)
[1968] A survey of minimal topological spaces. In: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proceedings of the Kanpur Topological Conference 1968). — Prague 1971, 93—114.
Бёме (Boehme T. K.)
[1965] Linear s-spaces. — Preprint of a talk presented at the Symposium on Convergence Structures, Univ. of Oklahoma, 1965.
Бинг (Bing R. H.)
[1951] Metrization of topological spaces. — Canad. J. of Math. 3 (1951), 175—186.
[1953] A connected countable Hausdorff space. — Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 474.
Биркгоф (Birkhoff G.)
[1936] A note on topological groups. — Comp. Math. 3 (1936), 427—430.
[1937] Moore-Smith convergence in general topology. — Ann. of Math. 38 (1937), 39—56.
[1940] Lattice cheory. — New York, 1940. [Русский перевод: Биркгоф Г. 22 (1974), 821—825.
Теория структур. — М.: ИЛ, 1952.]
Богатый С. А.
[1974*] Об n-подвижности в смысле К. Борсука. — Bull. Acad. Polon. Sci.,

Богатый С. А., Смирнов Ю. М.

[1974а*] Аппроксимация полиэдрами и факторизационные теоремы для ANR-бикомпактов. — Fund. Math. 87 (1974), 195—205.

Бокштейн М. Ф.

[1948] Un théorème de séparabilité pour les produits topologiques.— Fund. Math. 35 (1948), 242—246.

Болл (Ball B. J.)

[1954] Countable paracompactness in linearly ordered spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 190—192.

Болтянский В. Г.

[1961*] Аксиомы отделимости и метрика. — ДАН СССР 197 (1971), 1239—1242.

Бонан (Bonan E.)

[1970] Sur un lemme adapté au théorème de Tietsze-Urysohn. — C. R. Acad. Sci. Paris 270 (1970), Sér. A, 1226—1228.

Борджес (Borges C. J.)

[1966] On stratifiable spaces. — Pacific J. Math. 17 (1966), 1—16.

Борель (Borel E.)

[1903] Sur l'approximation des nombres par es nombres rationnels. — C. R. Acad. Sci. Paris 136 (1903), 1054—1055.

Борсук (Borsuk K.)

[1932] Uber Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Raume. — Math. Ann. 106 (1932), 239—248.

[1933] Uber Isomorphie der Funktionalraume. — Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. A (1933), 1—10.

[1935] Quelques rétracts singuliers. — Fund. Math. 24 (1935), 249—258.

[1937] Sur les prolongements des transformations continues. — Fund. Math. 28 (1937), 99—110.

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

[1910] On the structure of perfect sets of points. — Proc. Akad. Amsterdam 12 (1910), 785—794.

[1911] Beweis des Invarianz der Dimensionenzahl. — Math. Ann. 70 (1911), 161—165.

[1912] Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. — Math. Ann. 71 (1912), 91—115.

[1913] Über den natürlichen Dimensionsbegriff. — J. für die reine und angew. Math. 142 (1913), 146—152.

[1913а] Some remarks on the coherence type η. — Proc. Akad. Amsterdam 15 (1913), 1256—1263.

[1924] Bemerkungen zum natürlichen Dimensionsbegriff. — Proc. Akad. Amsterdam 27 (1924), 635—638.

Брунс, Шмидт (Bruns G., Schmidt J.)

[1955] Zur Äquivalenz von Moore — Smith-Folgen und Filtern. — Math. Nachr. 13 (1955), 169—186.

Бурбаки (Bourbaki N.)

[1940] Topologie générale ch. I et II. — Paris, 1940.

[1948] Topologie générale ch. IX. — Paris, 1948.

[1949] Topologie générale ch. X. — Paris, 1949. [Русский перевод 3-го франц. изд. в книге: Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.— М.: Наука, 1975, с. 173—261.]

[1951] Topologie générale ch. I et II. (2-me éd.). — Paris, 1951. [Русский перевод: Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Физматгиз, 1958.]

[1958] Topologie générale ch. IX (2-me éd.). — Paris, 1958. [Русский перевод 3-го франц. изд. в книге: Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1975, с. 11—172.]

[1961] Topologie générale ch. I et II (3-me ed.). — Paris, 1961. [Русский пе-

ревод: Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.]
Бурбаки, Дьедонне (Bourbaki N., Dieudonne J.)
[1939] Note de tératopologie II. — Revue Scientifique 77 (1939), 180—181.
Бурке (Burke D. K.)
[1969] On subparacompact spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 655—663.
Бут (Booth D.)
[1974] A Boolean view of sequential compactness. — Fund. Math. 85 (1974), 99—102.
Бэгли, Коннелл, Макнайт (Bagley R. W., Connell E. H., McKnight J. D.)
[1958] On properties characterizing pseudo-compact spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 500—506.
Бэгли, Янг (Bagley R. W., Yang J. S.)
[1966] On k-spaces and function spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 703—705.
Бэкон (Bacon P.)
[1968] Extending a complete metric. — Amer. Math. Monthly 75 (1968), 642—643.
Бэр (Baire R.)
[1904] Sur les séries à termes continus et tous de même signe. — Bull. Soc. Math. France 32 (1904), 125—128.
[1909] Sur la representation des fonctions discontinus (deuxieme partie), Acta Math. 32 (1909), 97—176.
Бэр, Леви (Baer R. W., Levi F.)
[1932] Stetige Funktionen in topologischen Räumen. — Math. Zeitschr. 34, (1932), 110—130.
Baге (Wage M. L.)
[1977] The dimension of product spaces. — Preprint 1977.
[1978] The dimension of product spaces. — Proc. Mat. Acad. Sci. USA 75 (1978), 4671—4672.
Вайнштейн И. А.
[1947] О замкнутых отображениях метрических пространств. — ДАН СССР 57 (1947), 319—321.
[1947a] Об одной проблеме П. С. Александрова. — ДАН СССР 57 (1947), 431—434.
[1952] О замкнутых отображениях. — Учен. зап. Моск. унив. 155 (1952), 3—53.
Ван Данциг (Van Dantzig D.)
[1930] Über topologisch homogene Kontinua. — Fund. Math. 15 (1930), 102—125.
Ван Дауэн (van Douwen E. K.)
[1973] The small inductive dimension can be raised by the adjunction of a single point. — Indag. Math. 35 (1973), 434—442.
[1977] Density of compactifications. In: Set-theoretic Topology (G. M. Reed, ed.). — New York, 1977, pp. 97—110.
[1978] If K is a compact space then $\beta(\omega_1 \times K) = (\omega_1 + 1) \times K$. — Preprint 1978.
Ван Дауэн, Толл, Вейс (van Douwen E. K., Tall F. D., Weiss W. A. R.)
[1977] Non-metrizable hereditarily Lindelöf spaces with point-countable bases from CH. — Proc. Amer. Math. Soc. 64 (1977), 139—145.
Ван дер Слот (van der Slot J.)
[1966] Universal topological properties. — Afd. Zuiv. Wisk. Z. W. 1966—011, Amsterdam, 1966.
[1972] A survey of realcompactness. — Theory of sets and topology (in honour of Felix Hausdorff). — Berlin, 1972, 473—494.

Веденисов Н. Б.
[1936] Sur les fonctions continues dans les espaces topologiques. — Fund. Math. 27 (1936), 234—238.
[1939] Замечания о размерности топологических пространств. — Учен. зап. Моск. унив. 30 (1939), 131—140.
[1940] Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension. — Comp. Math. 7 (1940), 194—200.
[1941] О размерности в смысле E. Čech'a. — Изв. АН СССР, Сер. матем. 5 (1941), 211—216.
Вейль А. (Weil A.)
[1938] Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. — Paris, 1938.
Вейль Г. (Weyl H.)
[1913] Die Idee der Riemannschen Fläche. — Leipzig, 1913.
Вейр (Weir M. D.)
[1975] Hewitt — Nachbin spaces. — Amsterdam. 1975.
Величко Н. В.
[1967*] Пример открытого компактного монотонного отображения неметризуемого бикомпакта на компакт. — ДАН СССР 177 (1967), 995—996.
[1972*] О непрерывных отображениях топологических пространств. — Сиб. матем. ж. 13 (1972), № 3, с. 541—557.
[1973*] О перистых пространствах и их непрерывных отображениях. — Матем. сб. 90 (1973), № 1, с. 34—47.
[1975] О пространстве замкнутых множеств. — Сиб. матем. ж. 16 (1975), 627—629.
[1975a*] Заметка о перистых пространствах. — Čechoslov. Math. J. 25 (1975), 8—19.
[1976*] К теории разложимых пространств. — Матем. заметки 19 (1976), 109—114.
[1976a*] Упорядоченные p-пространства. — Изв. ВУЗов, матем., 9 (1976), 25—36.
[1981*] О слабой топологии пространств непрерывных функций. — Матем. заметки 30 (1981), № 5. с. 703—712.
[1982*] К теории пространств непрерывных функций. — УМН 37 (1982), № 4, 149—150.
Видосич (Vidossich G.)
[1972] Function spaces which are pseudo-$\aleph$-compact spaces. — Preprint 1972.
Вислисени Ю., Флаксмайер Ю.
]1965[Мощность и строение структуры бикомпактных расширений вполне регулярного пространства. — ДАН СССР 165 (1965), 258—260.
Волмэн (Wallman H.)
[1938] Lattices and topologocal spaces. — Ann. of Math. 39 (1938). 112—126.
Вон (Vaughan H.)
[1937] On locally compact metrisable spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 532—535.
Вопенка (Vopěnka P.)
[1959] Замечание о размерности метрических пространств. — Czech. Math. J. 9 (1959), 519—522.
Вудс (Woods R. G.)
[1978] A survey of absolutes of topological spaces. In: Topological Structures II. Math. Centre Tracts 116 (Proceedings of the Symposium in Amsterdam 1978). — Amsterdam, 1979, pp. 323—362.
Вулберт (Wulbert D. E.)
[1968] Subsets of first countable spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 1273—1277.

Вулих Б. З.
[1952] О распространении непрерывных функций в топологических пространствах. — Матем. сб. 30 (1952), 167—170.
Вьеторис (Vietoris L.)
[1921] Stetige Mengen. — Monatsh. für Math. und Phys. 31 (1921), 173—204.
[1922] Bereiche zweiter Ordnung — Monatsh, für Math. und Phys. 32 (1922), 258—280.
[1923] Kontinua zweiter Ordnung. — Monatsh, für Math. und Phys. 33 (1923), 49—62.
Гантнер (Gantner T. E.)
[1969] Some corollaries to the metrization lemma. — Amer. Math. Monthly 76 (1969), 45—47.
Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н.
[1939] О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах. — ДАН СССР 22 (1939), 11—15.
Гемба, Семадени (Gęba K., Semadeni Z.)
[1960] Spaces of continuous functions V. — Studia Math. 19 (1960), 303—320.
Герлич (Gerlits J.)
[1983*] Some properties of $C(X)$, II. — Topology and Appl. 15 (1983), 255—262.
Герлич, Надь Ж. (Gerlits J., Nagy Zs.)
[1980*] Об α-левых и α-растянутых пространствах. — УМН 35 (1980) № 3, с. 162—168.
Гиллман, Джерисон (Gillman L., Jerison M.)
[1960] Rings of continuous functions. — New York, 1960.
Гиллман, Хенриксен (Gillman L., Henriksen M.)
[1954] Concerning rings of continuous functions. — Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 340—362.
Гильберт (Hilbert D.)
[1902] Über die Grundlagen der Geometrie. — Math. Ann. 56 (1902), 381—422. [Русский перевод: Гильберт Д. Основания геометрии. — М. — Л.: ОГИЗ, 1948.]
Гинзбург, Вудс (Ginsburg J., Woods R. G.)
[1977*] A cardinal inequality for topological spaces, involving closed discrete sets. — Proc. Amer. Math. Soc. 64 (1977), 357—360.
Гликсберг (Glicksberg I.)
[1952] The representation of functionals by integrals. — Duke Math., J. 19 (1952), 253—261.
[1959] Stone-Čech compactifications of products. — Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 369—382.
Глисон (Gleason A. M.)
[1958] Projective topological spaces. — Ill, J. of Math. 2 (1958), 482—489.
Годел (Hodel R. E.)
[1969] Separability and the point countable property. — Notices Amer. Math. Soc. 16 (1969), 96.
[1969a] Sum theorems for topological spaces. — Pacific. J. of Math. 30 (1969), 59—65.
[1976] New proof of a theorem of Hajnal and Juhász on the cardinality of topological spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Math. 24 (1976), 999—1000.
Голштынский (Holsztyński W.)
[1966] Topological dimension of lattices. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 14 (1966), 63—69.
[1966a] Хаусдорфовы пространства минимального веса. — ДАН СССР 168 (1966), 508—509.

Готшелк, Хедлунд (Gottshalk W. H., Hedlund G. A.)
[1955] Topological dynamics. — Providence, 1955.
Граев М. И.
[1948*] Свободные топологические группы. — Изв. АН СССР, сер. матем., 12 (1948), 279—324.
[1950*] Теория топологических групп. — УМН 5 (1950), № 2, с. 3—56.
де Гроот (de Groot J.)
[1956] Non-archimedean metrics in topology. — Proc. Amer. Soc. 7 (1956), 948—953.
[1965] Discrete subspaces of Hausdorff spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 13 (1965), 537—544.
де Гроот, Макдауэлл (de Groot J., McDowell R. H.)
[1967] Locally connected spaces and their compactifications. — Ill. J. of Math. 11 (1967), 353—364.
Гросс (Gross W.)
[1914] Zur Theorie der Mengen, in denen ein Distanzbegriff definiert ist. — Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien Abt. IIa 123 (1914), 801—819.
[1977] О свойствах множеств, лежащих в Σ-произведениях. — ДАН СССР 237 (1977), 505—508.
Гротендик (Grothendieck A.)
[1952*] Critères de compacité dans les espaces fonctionnels generaux. — Amer. J. Math. 74 (1952), 168—186.
Грызлов А. А.
[1979*] О фильтрующихся покрытиях и определяемых ими точках βN. В кн.: Современная топология и теория множеств, вып. 2. — Ижевск, 1979, с. 25—36.
[1980*] Две теоремы о мощности топологических пространств. — ДАН СССР 251 (1980), 708—713.
Грюнхаге Г.
[1980*] Паракомпактность и субпаракомпактность в совершенно нормальных пространствах. — УМН, 35 (1980), № 3, с. 44—50.
Грюнхаге, Майкл и Танака (Gruenhage G., Michael E. and Tanaka Y.)
[1984*] Spaces determined by point-countable covers. — Pacif. J. Math. 113 (1984), 303—332.
Гулько С. П.
[1977] О свойствах множеств, лежащих в Σ-произведениях. — ДАН СССР 237 (1977), 505—508.
[1978*] О свойствах функциональных пространств. — ДАН СССР 243 (1978), 339—342.
[1979*] О структуре пространств непрерывных функций и их наследственной паракомпактности. — УМН 34 (1979), № 6, с. 33—40.
[1981*] О свойствах функциональных пространств. — В кн.: Семинар по общей топологии. — М.: Изд. МГУ, 1981.
Гуран И. И.
[1981*] О топологических группах, близких к финально компактным. — ДАН СССР, 256, (1981), № 6.
Гуревич (Hurewicz W.)
[1926] Über stetige Bilder von Punktmengen. — Proc. Akad. Amsterdam 29 (1926), 1014—1017.
[1927] Normalbereiche und Dimensionstheorie. — Math. Ann. 96 (1927), 736—764.
[1927a] Über stetige Bilder von Punktmengen (Zweite Mitteilung). — Proc. Akad. Amsterdam 30 (1927), 159—165.
[1927b] Über des Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen. — Proc. Akad. Amsterdam 30 (1927), 425—430.
[1930] Einbettung separabler Räume in gleich dimensional kompakte Räume. — Monatsh. für Math. und Phys. 37 (1930), 199—208.

[1935] Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre. — Fund. Math. 24 (1935), 144—150.
Гуревич, Волмэн (Hurewicz W., Wallman H.)
[1941] Dimension theory. — Princeton, 1941. [Русский перевод: Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. — М.: ИЛ, 1948.]
Гэйл (Gale D.)
[1950] Compact sets of functions and function rings. — Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 303—308.
Даукер (Dowker C. H.)
[1947] Mapping theorems for non-compact spaces. — Amer. J. of Math. 69 (1947), 200—242.
[1947a] An imbedding theorem for paracompact metric spaces. — Duke Math. J. 14 (1947), 639—645.
[1911] On countably paracompact spaces. — Canad. J. of Math. 3 (1951), 219—224.
[1952] Topology of metric complexes. — Amer. J. of Math. 74 (1952), 555—577.
[1952a] On a theorem of Hanner. — Ark. för Math. 2 (1952), 307—313.
[1955] Local diménsion of normal spaces. — Quart. J. of Math. Oxford 6 (1955), 101—120.
[1956] Homotopy extensions theorems. — Proc. London Math. Soc. 6 (1956), 100—116.
[1961] Mappings of proximity structures. In: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proceedings of the Symposium held in Prague in September 1961). — Prague 1962, pp. 139—141.
Даукер, Гуревич (Dowker C. H., Hurewicz W.)
[1956] Dimension of metric spaces. — Fund. Math. 43 (1956), 83—88.
Дектярев И. М.
[1964*] О φ-полных пространствах, метризуемых над полуполями. — ДАН СССР 154 (1964), с. 23—25.
Джексон (Jackson J. R.)
[1952] Comparison of topologies on function spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 156—158.
[1952a] Spaces of mappings on topological products with applications to homotopy theory. — Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 327—333.
Джентри (Gentry K. R.)
[1969] Some properties of the induced maps, Fund Math. 66 (1969), 55—59.
Джоунс (Jones F. B.)
[1937] Concerning normal and completely normal spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 671—677.
[1958] R. L. Moore's axiom 1′ and metrization. — Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 487.
[1966] Metrization. — Amer. Math. Month. 73 (1966), 571—576.
Динь Ньё Тонг
[1963] Предзамкнутые отображения и теорема А. Д. Тайманова. — ДАН СССР 152 (1963), 525—528.
Досс (Doss R.)
[1947] On continuous functions in uniform spaces. — Ann. of Math. 48 (1947), 843—844.
[1949] On uniform spaces with a unique structure. — Amer. J. of Math. 71 (1949), 19—23.
Дранишников А. Н.
[1981*] О счетнозначных ретрактах тихоновского куба. — УМН 36 (1981), № 3.
[1984*] Абсолютные экстензоры в размерности n и n-мягкие отображения, повышающие размерность. — УМН 39 (1984), № 5, с. 55—95.

Дугунджи (Dugundji J.)

[1951] An extension of Tietze's theorem. — Pacific J. of Math. 1 (1951), 353—367.

[1966] Topology. — Boston, 1966.

Дьедонне (Dieudonne J.)

[1939] Sur les espaces uniformes complets. — Ann. Sci. École Normale Sup. 56 (1939), 277—291.

[1939a] Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure d'espace complet. — C. R. Acad. Sci. Paris, 209 (1939), 145—147.

[1939b] Sur les espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet. — C. R. Acad. Paris 209 (1939), 666—668.

[1944] Une généralisation des espaces compacts. — J. de Math. Pures et Appl. 23 (1944), 65—76.

[1958] Un critère de normalité pour les espaces produits. — Coll. Math. 6 (1958), 29—32.

Дэвис, Рид, Ваге (Davis S. W., Reed G. M. and Wage M. L.)

[1976*] Further results on weakly uniform bases. — Houston J. of Math., 2 (1980), 57—63.

Елькин А. Г.

[1969*] О разложимости пространств. — ДАН СССР 186 (1969), 9—12.

[1980*] О регулярных максимальных пространствах. — Мат. заметки, 27 (1980), № 2, с. 301—305.

Есенин-Вольпин А. С.

[1949] О зависимости между локальным и интегральным весом в диадических бикомпактах. — ДАН СССР 68 (1949), 441—444.

Ефимов Б. А.

[1963] О диадических бикомпактах. — ДАН СССР 149 (1963), 1011—1014.

[1963a] О диадических пространствах. — ДАН СССР 51 (1963), 1021—1024.

[1963b] Метризуемость и Σ-произведение бикомпактов. — ДАН СССР 152 (1963), 794—797.

[1965] О мощности хаусдорфовых пространств. — ДАН СССР 164 (1965), 967—970.

[1965a] Диадические бикомпакты. — Тр. Моск. матем. об-ва 14 (1965), 211—247.

[1975*] О мощности расширений диадических пространств. — Матем. сб. 96 (1975), № 4, с. 614—632.

[1977*] Отображения и вложения диадических пространств. — Матем. сб. 103 (1977), № 1.

Ефремович В. А.

[1951] Инфинитезимальные пространства. — ДАН СССР 76 (1951), 341—343.

[1952] Геометрия близости I. Матем. сб. 31 (1952), 189—200.

Зайцев В. И.

[1967] К теории тихоновских пространств. — Вестн. Моск. унив., сер. матем. (1967), № 3, с. 48—57.

Замбахидзе Л. Г.

[1977*] О функциях размерностного типа. — Тр. Тбил. матем. ин-та 56 (1977), 52—98.

[1979*] О взаимоотношениях между периферическими свойствами тихоновских пространств, их степеней, экспонент, свободных групп и подгрупп. — УМН 33 (1979) № 6, с. 154—157.

[1980*] О соотношениях между размерностями свободных базисов свободных топологических групп. — Сообщ. АН ГССР 97 (1980), № 3, с. 569—572.

Зарелуа А. В.

[1963*] О равенстве размерностей. — Матем. сб. 62 (1963), № 3, с. 295—319.

[1964] Универсальный бикомпакт данного веса и данной размерности. ДАН СССР 154 (1964), 1015—1018.
[1964a*] О продолжении отображений на расширения, обладающие некоторыми специальными свойствами. — Сиб. матем. ж. 5 (1964), № 3, с. 532—548.
[1974*] Построение сильно бесконечномерных компактов с помощью колец непрерывных функций. — ДАН СССР 214 (1974), № 2, с. 264—267.
Зенор (Zenor P.)
[1969] On countable paracompactness and normality. — Prace Mat. 13 (1969), 23—32.
[1970] On the completeness of the space of compact subsets. — Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 190—192.
[1976] Countable paracompactness of F_σ-sets. — Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 201—202.
[1980] Hereditary $\mathfrak{m}$-teparability and the hereditary $\mathfrak{m}$-Lindelöf property in product spaces and function spaces. — Fund. Math. 106 (1980), 175—180.
Золотарев В. П.
[1975*] О размерности подпространств. — Вестник МГУ, матем. (1975), № 5, с. 10—12.
Зоргенфрей (Sorgenfrey R. H.)
[1947] On the topological product of paracompact spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 631—632.
Зоретти (Zoretti L.)
[1905] Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers. — J. de Math. Pures et Appl. 1 (1905), 1—51.
Иванов А. В.
[1978*] О наследственной сепарабельности и размерности произведений бикомпактов. — ДАН СССР 239 (1978), 1037—1040.
[1978*] О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны. — ДАН СССР 243 (1978), 1109—1112.
[1980*] О нульмерных прообразах бикомпактов с 1-й аксиомой счетности.— УМН 35 (1980), № 6, с. 161—162.
[1981*] Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов. — ДАН СССР 259 (1981), 275—278.
Иванова В. М.
[1955] К теории пространства подмножеств. — ДАН СССР 101 (1955), 601—603.
Илиадис С. Д.
[1963] Абсолюты хаусдорфовых пространств. — ДАН СССР 149 (1963), 22—25.
Исаридзе Х. Н.
[1966*] О расширениях и наростах конечного порядка вполне регулярного пространства. — ДАН СССР 166 (1966), 1043—1045.
[1966a*] Об одном обобщении совершенных отображений. — ДАН СССР 168 (1966), 266—268.
Исбелл (Isbell J. R.)
[1959] On finite-dimensional uniform spaces. — Pacific J. of Math. 9 (1959), 107—121.
[1962] Review A 3547. — Math. Rev. 23 (1962), 675.
[1962a] Review A 4122. — Math. Rev. 23 (1962), 787.
[1964] Uniform spaces. — Providence, 1964.
[1964a] Remarks on spaces of large cardinal number. — Czech. Math. J. 14 (1964), 383—385.
[1969] A note on complete closure algebras. — Math. Systems. Theory 3 (1969), 310—312.

Исивата (Isiwata T.)
[1963] Normality and perfect mappings. — Proc. Japan Acad. 39 (1963), 95—97.
[1967] Mappings and spaces. — Pacific J. of Math. 20 (1967), 455—480.
[1969] Z-mappings and C^*-embeddings. — Proc. Japan Acad. 45 (1969), 889—893.
Исии (Ishii T.)
[1959] A new characterization of paracompactness. — Proc. Japan Acad. 35 (1959), 435—436.
[1966] On product spaces and product mappings. — J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 166—181.
Исикава (Ishikawa F.)
[1955] On countably paracompact spaces. — Proc. Japan Acad. 31 (1955), 686—687.
Исэки (Iséki K.)
[1954] A note on countably paracompact spaces. — Proc. Japan. Acad 30 (1954), 350—351.
Исэки, Касахара (Iséki K., Kasahara S.)
[1957] On pseudo-compact and countably compact spaces. — Proc. Japan Acad. 33 (1957), 100—102.
Какутани (Kakutani S.)
[1936] Über die Metrisation der topologischen Gruppen. — Proc. Imp. Acad. Tokyo 12 (1936), 82—84.
Каплан (Kaplan S.)
[1947] Homology properties of arbitrary subsets of Euclidean spaces. — Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947), 248—271.
Каратеодори (Carathéodory C.)
[1913] Über die Begrenzung einfach zusammehängender Gebiete. — Math. Ann. 73 (1913), 323—370.
Картан (Cartan H.)
[1937] Théorie des filtres. — C. A. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 595—598.
[1937a] Filtres et ultrafiltres. — C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 777—779.
Катетов (Katětov M.)
[1940] Über H-abgeschlossene und bikompakte Raüme. — Časopis Pěst. Mat. Fys. 69 (1940), 36—49.
[1947] On H-closed extensions of topological spaces. — Časopis Pěst. Mat. Fys. 72 (1947), 17—32.
[1948] Complete normality of Cartesian products. — Fund. Math. 36 (1948), 271—274.
[1950] On nearly discrete spaces. — Časopis Pěst. Mat. Fys. 75 (1950), 69—78.
[1950a] A theorem on the Lebesgue dimension. — Časopis Pěst. Mat. Fys. 75 (1950), 79—87.
[1951] Measures in fully normal spaces. — Fund. Math. 38 (1951), 73—84.
[1951a] On real-valued functions in topological spaces. — Fund. Math. 38 (1951), 85—91.
[1952] О размерности несепарабельных пространств. I. — Czech. Math. J. 2 (1952), 333—368. (On the dimension of non-separable spaces. I.).
[1953] Correction to «On real-valued functions in topological spaces». — Fund. Math. 40 (1953), 203—205.
[1958] О продолжении локально конечных покрытий. — Coll. Math. 6 (1958), 145—151.
[1959] Plně normální prostory (Fully normal spaces). Appendix to: Cech E. Topologické prostory (Topological spaces). — Praha, 1959.
Катута (Katuta Y.)
[1971] On the normality of the product of a normal space with a paracompact space. — General Topology and Appl. 1 (1971), 295—319.

Кауфман (Kaufman R.)
[1967] Ordered sets and compact spaces. — Coll. Math. 17 (1967), 35—39.
Кац Г. И.
[1954] Топологические пространства, в которых можно ввести полную равномерную структуру. — ДАН СССР 99 (1954), 897—900.
Кашуба Р. П.
[1980*] К теории пространств очановского типа. — УМН 35 (1980), № 3, с. 192—193.
Кейслер, Тарский (Keisler H. J., Tarski A.)
[1964] From accessible to inaccessible cardinals. — Fund. Math. 53 (1964), 225—308.
Келдыш Л. В.
[1959*] Нульмерные открытые отображения. — Изв. АН СССР, сер. матем. 23 (1959), № 2, с. 165—184.
Келлерер (Kellerer H. G.)
[1968] Stetige Funktionen auf Produkträumen. — Arch. der Math. 19 (1968), 79—82.
Келли (Kelley J. L.)
[1950] Convergence in topology. — Duke Math. J. 17 (1950), 277—283.
[1955] General topology. — New York, 1955. [Русский перевод: Келли Дж. Общая топология. 2-е изд. — М.: Наука, 1980.]
Кендеров П.
[1967] О Q-пространствах. — ДАН СССР 175 (1967), 288—291.
[1968] Об одном вопросе А. Стоуна. — Вест. Моск. унив., сер. матем. (1968), № 2, с. 5—7.
[1980*] Многозначные отображения и их свойства подобные непрерывности. — УМН 35 (1980), № 3, с. 194—196.
Керстан (Kerstan J.)
[1957] Zur Charakterisierung der pseudokompakten Räume. — Math. Nachr. 16 (1957), 289—293.
Кимура (Kimura N.)
[1963] On the inductive dimension of product spaces. — Proc. Japan Acad. 39 (1963), 641—646.
Кислинг (Keesling J.)
[1970] Normality and properties related to compactness in hyperspaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 760—766.
[1970a] On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces. — Pacific J. of Math. 33 (1970), 657—667.
Кисынский (Kisyński J.)
[1960] Convergence du type L. — Coll. Math. 7 (1960), 205—221.
Клебанов Б. С.
[1978*] О замкнутых образах произведений метрических пространств. — ДАН СССР 240 (1978), 1285—1288.
[1982*] О факторизации отображений произведений топологических пространств. — ДАН СССР 262 (1982), 1059—1064.
Клюшин В. Л.
[1964*] О совершенных отображениях паракомпактных пространств. — ДАН СССР 109 (1964), 734—737.
Кнастер, Куратовский (Knaster B., Kuratowski K.)
[1921] Sur les ensembles connexes. — Fund. Math. 2 (1921), 206—255.
Кнастер, Куратовский, Мазуркевич (Knaster B., Kuratowski K., Mazurkiewicz S.)
[1929] Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe. — Fund. Math. 14 (1929), 132—137.
Ковальский (Kowalsky H. J.)
[1957] Einbettung metrischer Räume. — Arch. der Math, 8 (1957), 336—339.

Кол (Kaul S. K.)
[1969] Compact subsets in function spaces. — Canad. Math. Bull. 12 (1969), 461—466.
Колмес (Colmex J.)
[1951] Sur les espaces précompacts. — C. R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), 1552—1553.
[1952] Sur les espaces précompacts. — C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 1019—1021.
Колмогоров А. Н.
[1941*] Точки локальной топологичности счетнократных открытых отображений компактов. — ДАН СССР 30 (1941), 477—478.
Комбаров А. П.
[1971] О наследственно несвязных пространствах. — Вест. Моск. унив., сер. матем. (1971), № 4, с. 21—25.
[1971а] О Σ-произведениях топологических пространств. — ДАН СССР 199 (1971), 526—528.
[1978*] О тесноте и нормальности Σ-произведений. — ДАН СССР, 239 (1978), 775—778.
[1981*] О пространствах с точечно-счетной полубазой. — Вестник МГУ, сер. матем. (1981), № 3, с. 28—31.
[1983*] Об одной теореме А. Х. Стоуна. — ДАН СССР 270 (1983), 37—40.
Комбаров А. П., Малыхин В. И.
[1973] О Σ-произведениях. — ДАН СССР 213 (1973), 774—776.
Комфорт (Comfort W. W.)
[1967] A nonpseudocompact porduct space whose finite subproducts are pseudocompact. — Math. Ann. 170 (1967), 41—44.
[1971] A Survey of cardinal invariants. — General Topology and Appl. 1 (1971), 163—199.
Комфорт, Росс (Comfort W. W., Ross K. A.)
[1966*] Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups. — Pacif. J. Math. 16 (1966), 483—496.
Комфорт, Сакс (Comfort W. W., Saks V.)
[1973*] Countably compact groups and finest totally bounded topologies. — Pacif. J. Math. 49 (1973), 33—44.
Комфорт, Хейджер (Comfort W. W., Hager A. W.)
[1971] The projection mapping and other continuous functions on a product space. — Math. Scand. 28 (1971), 77—90.
Корсон (Corson H. H.)
[1959] Normality in subsets of product spaces. — Amer. J. of Math. 81 (1959), 785—796.
[1961] The weak topology of a Banach space. — Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 1—15.
[1962] Review A 2186. — Math. Rev. 23 (1962), 407.
Корсон, Исбелл (Corson H. H., Isbell J. R.)
[1960] Some properties of strong uniformities. — Quart. J. of Math. Oxford 11 (1960), 17—33.
Корсон, Майкл (Corson N. H., Michael E.)
[1964] Metrizability of certain countable unions. — Illinois Journ. of Math. 8 (1964), 351—360.
Коэн (Cohen D. E.)
[1954] Spaces with weak topology. — Quart. J. of Math. Oxford 5 (1954), 77—80.
Кристенсен (Christensen J. P. R.)
[1981*] Joint continuity of separately continuous functions. — Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 455—461.

Кузьминов В. И.
[1959*] О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп. — ДАН СССР, 125 (1959), 727—729.
[1961*] Пример размерно иеполноценного компакта. — ДАН СССР 141 (1961), 312—315.
Кук, Фицпатрик Б. (Cook H., Fitzpatrick B. jr.)
[1968] Inverse limits of perfectly normal spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 189—192.
Кунен (Kunen K.)
[1977*] Strong S and L spaces under MA. In: Set-theoretic Topology. — New York: Academic Press, 1977.
Куратовский (Kuratowski K.)
[1921] Solution d'un problème concernant les images continues d'ensembles de points. — Fund. Math. 2 (1921), 158—160.
[1922] Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques. — Fund. Math. 3 (1922), 76—108.
[1922a] Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs.—Fund. Math. 3 (1922), 182—199.
[1928] Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts.— Fund. Math. 11 (1928), 169—185.
[1930] Sur les espaces complets. — Fund. Math. 15 (1930), 301—309.
[1931] Evaluation de la classe borélienne d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques. — Fund. Math. 17 (1931), 249—272.
[1932] Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés. — Fund. Math. 18 (1932), 148—159.
[1933] Topologie I. — Warszawa, 1933.
[1933a] Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles. — Fund. Math. 20 (1933), 191—196.
[1935] Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes, Fund. Math. 24 (1935), 259—268.
[1935] Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables.— Fund. Math. 25 (1935), 534—545.
[1938] Remarques sur les transformations continues des espaces métriques.— Fund. Math. 30 (1938), 48—49.
[1947] Sur la topologie des espaces fonctionnels. — Ann. Soc. Pol. Math. 20 (1947), 314—322.
[1948] Topologie I (second ed.). — Warszawa, 1948.
[1948a] Une méthode de prolongement des ensembles relativement fermés ou ouverts. — Coll. Math. 1 (1948), 273—278.
[1956] Sur une methode de métrisation complète de certains espaces d'ensembles compacts. — Fund. Math. 42 (1956), 114—138.
[1959] Un critère de coupure de l'espace euclidien par un sous-ensemble arbitraire. — Math. Zeitschr. 72 (1959), 88—94.
[1961] Topologie II (third ed.).— Warszawa, 1961.
[1963] Operations on semi-continuous set-valued mappings. Ist. di Alta Mat. Roma, Seminari 1962—1963, vol. II. Roma, 1965, pp. 449—461.
[1966] Topology, vol. I. — New York, 1966. [Русский перевод: Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.]
[1968] Topology, vol. II. — New York, 1968. [Русский перевод: Куратовский К. Топология. Т. 2. — М.: Мир, 1969.]
Куратовский, Мостовский (Kuratowski K., Mostowski A.)
[1968] Set theory. — Amstredam, 1968. [Русский перевод: Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.]
Куратовский, Серпинский (Kuratowski K., Sierpiński W.)
[1921] Le théorème de Borel — Lebesgue dans la théorie des ensembles abstraits. — Fund. Math. 2 (1921), 172—178.
[1921a] Sur les différences de deux ensembles fermés. — Tôhoku Math. J. 20 (1921), 22—25.

[1926] Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires. — Fund. Math. 8 (1926), 193—200.

Курепа (Kurepa D.)

[1950] La condition de Souslin et une propiété caracteristique des nombres réels. — C. R. Acad. Sci. Paris 231 (1950), 1113—1114.

[1962] The cartesian multiplication and the cellularity number. — Publ. Inst. Math. Beograd 2 (1962), 121—139.

[1966*] On numerical and non-numerical ecart. — Proceedings of the Second Prague Topological Symposium, 1966, pp. 236—237.

[1968] Around the general Suslin porblem. In: Proceedings of the International Symposium on Topology Herceg-Novi 1968. — Beograd, 1969, 239—245.

Куцья (Kucia A.)

[1973] On coverings of a uniformity. — Coll. Math. 27 (1973), 73—74.

Лаврентьев М. А.

[1924] Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes. — Fund. Math. 6 (1924), 149—160.

Латцер (Lutzer D. J.)

[1969] A metrization theorem for linearly ordered spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), 557—558.

[1970] Autorreferat — Zentralblatt für Math. 177 (1970), 507.

[1971] On generalized ordered spaces. — Dissertationes Math. 89 (1971).

Латцер, Беннет (Lutzer D. J., Bennett H. R.)

[1969] Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property in linearly orderable spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 664—667.

Лашнев Н. С.

[1965] О непрерывных разбиениях и замкнутых отображениях метрических пространств. — ДАН СССР 165 (1965), 756—758.

Лебег (Lebesgue H.)

[1905] Sur les fonctions représentables analytiquement. — J. de Math. Pures et Appl. 1 (1905), 139—216.

[1907] Sur le problème de Dirichlet. — Rend. del Circ. Mat. di Palermo 24 (1907), 371—402.

[1911] Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces, de n et $n+p$ dimensions. — Math. Ann. 70 (1911), 166—168.

[1921] Sur les correspondences entre les points de deux espaces. — Fund. Math. 2 (1921), 256—285.

Леви, Макдауэлл (Levy R., McDowell R. H.)

[1975] Dense subsets of βX. — Proc. Amer. Math. Soc. 50 (1975), 426—430.

Левшенко Б. Т.

[1917] О понятии компактности и точечно-конечных покрытиях. — Матем. сб. 42 (1957), 479—484.

[1961*] О бесконечномерных пространствах. — ДАН СССР 139 (1961), 286—289.

[1965*] Пространства трансфинитной размерности. — Матем. сб. 67 (1965), № 2, с. 255—266.

Лейбо И. М.

[1975*] О замкнутых образах метрических пространств. — ДАН СССР 224 (1975), 756—759.

[1976*] О факторизации равномерных отображений. — Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., 24 (1976), 75—79.

Лелек (Lelek A.)

[1971] Dimension inequalities for unions and mappings of separable metric spaces. — Coll. Math. 23 (1971), 66—91.

Леннес (Lennes N. J.)
[1911] Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations. — Amer. J. of Math. 33 (1911), 287—326.
Лере (Leray J.)
[1950] L'anneau spectral el l'anneau filtre d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. — J. de Math. Pures et Appl. 29 (1950), 1—80.
Лефшец (Lefschetz S.)
[1931] On compact spaces. — Ann. of Math. 32 (1931), 521—538.
[1942] Algebraic topology. — New York, 1942. [Русский перевод: Лефшец С. Алгебраическая топология. — М.: ИЛ, 1949.]
Лин (Lin Y. F.)
[1960] A note on the Wallace theorem. — Portugaliae Math. 19 (1960), 199—201.
Линделёф (Lindelöf E.)
[1903] Sur quelques points de la théorie des ensembles. — C. R. Acad. Sci. Paris 137 (1903), 697—700.
Линденбаум (Lindenbaum A.)
[1926] Contributions à l'étude de l'espace métrique I. — Fund. Math. 8 (1926), 209—222.
Линн (Lynn I. L.)
[1962] Linearly orderable spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 454—456.
Лисица Ю. Т.
[1973*] Продолжение непрерывных отображений и факторизационная теорема. — Сиб. матем. ж., 14 (1973), № 1, с. 128—139.
Лифанов И. К.
[1968*] О размерности произведений бикомпактов. — ДАН СССР 182 (1968), 1274—1277.
[1969*] О большой индуктивной размерности. — ДАН СССР 184 (1969), 1288—1291.
[1973*] О размерности нормальных пространств. — ДАН СССР 209 (1973), 291—294.
Локуциевский О. В.
[1949] О размерности бикомпактов. — ДАН СССР 67 (1949), 217—219.
[1954] Пример открытого отображения одномерного компакта на гильбертов параллелепипед. — Уч. записки Моск. унив. 165 (1954), 118—130.
[1973*] Аксиоматическое определение размерности бикомпактов. — ДАН СССР 212 (1973), 813—815.
Лунц А. Л.
[1949] Бикомпакт, индуктивная размерность которого больше, чем размерность, определенная при помощи покрытий. — ДАН СССР 66 (1949), 801—803.
Люббен (Lubben R. G.)
[1941] Concerning the decomposition and amalgamation of points, upper semicontinuous collections, and topological extensions. — Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), 410—466.
Магилл (Magill K. D. jr.)
[1966] A note on compactifications. — Math. Zeitschr. 94 (1966), 322—325.
Мазер (Mather M. R.)
[1964] Paracompactness and partitions of unity. — Preprint, 1964.
Мазур (Mazur S.)
[1952] On continuous mappings on Cartesian products. — Fund. Math. 39 (1952), 229—238.
Мазуркевич (Mazurkiewicz S.)
[1913] O arythmetyzacji continuów. — C. R. Varsovie 6 (1913), 305—311.

[1913a] O arytmetyzacji continuów II. — C. R. Varsovie 6 (1913), 941—945.
[1916] Über Borel'sche Mengen. — Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. A. (1916), 490—494.
[1917] Teoria zbiorów G_δ. — Wektor 6 (1917—18), 129—185.
[1920] Sur un ensemble G_δ punctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire. — Fund. Math. 1 (1920), 61—81.
[1920a] Sur les lignes de Jordan. — Fund. Math. 1 (1920), 166—209.
[1932] Sur les transformations interieurs. — Fund. Math. 19 (1932), 189—204.

Майкл (Michael E.)
[1951] Topologies on spaces of subsets. — Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152—182.
[1953] A note on paracompact spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 831—838.
[1954] Local properties of topological spaces. — Duke Math. J. 21 (1954), 163—172.
[1955] Point-finite and locally finite coverings. — Canad. J. of Math. 7 (1955), 275—279.
[1957] Another note on paracompact spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 822—828.
[1959] A theorem on semi-continuous set-valued functions. — Duke Math. J. 26 (1959), 647—651.
[1961] On a theorem of Rudin and Klee. — Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 921.
[1963] The product of a normal space and a metric space need not be normal. — Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 375—376.
[1963a] Review 4480. — Math. Rev. 25 (1963), 873—874.
[1964] Cuts. — Acta Math. 111 (1964), 1—36.
[1964a] A note on closed maps and compact sets. — Israel J. of Math. 2 (1964), 173—176.
[1968] Local compactness and Cartesian products of quotient maps and k-spaces. — Ann. Inst. Fourier 18 (1968), 281—286.
[1968a] Bi-quotient maps and Cartesian products of quotient maps. — Ann. Inst. Fourier 18 (1968), 187—302.
[1971] Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products. — Comp. Math. 23 (1971), 199—214.
[1971a] On representing spaces as images of metrizable and related spaces. — General Topology and Appl. 1 (1971), 329—343.
[1971b] A theorem on perfect maps. — Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 633—634.
[1972*] A quintuple quotient quest. — General Topology and Appl. 2 (1972), 91—138.
[1973*] On k-spaces, k_R-spaces and $k(X)$. — Pacif. J. Math. 47 (1973), 487—498.
[1976*] Quotients of countable complete and metric spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 371—372.
[1981*] Inductively perfect maps and tri-quotient maps. — Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 115—119.

Макдугл (McDougle P.)
[1958] A theorem on quasi-compact mappings. — Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 474—477.
[1959] Mappings and spaces relations. — Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 320—323.

Макки (Mackey G. W.)
[1944] Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices. — Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 719—722.

Маколей (McAuley L. F.)
[1956] A relation between perfect separability, completeness and normality in semi-metric spaces. — Pacific J. of Math. 6 (1956), 315—326.
[1956a] Paracompactness and an example due to F. B. Jones. — Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 1155—1156.
[1958] A note of complete collectionwise normality and paracompactness. — Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 796—799.
Малыхин В. И.
[1972] О тесноте и числе Суслина в $\exp X$ и в произведении пространств. — ДАН СССР 203 (1972), 1001—1003.
[1975*] Экстремально несвязные и близкие к иим группы. — ДАН СССР 220 (1975), 27—30.
[1978*] О разреженных пространствах, не имеющих разреженных бикомпактных расширений. — Матем. заметки 23 (1978), с. 127—136.
[1979*] Об экстремально несвязных топологических группах. — УМН 34 (1979), № 6, с. 59—66.
[1980*] О лузинских пространствах. — Матем. сб. 111 (1980), № 3, с. 453—464.
[1982*] О мощности бикомпактов со слабой первой аксиомой счетности. — Матем. заметки, 32 (1982), № 2, с. 261—268.
[1983*] Топология и форсинг. — УМН 38 (1983), № 1, с. 69—118.
Малыхин В. И., Пономарев В. И.
[1975*] Общая топология. — В кн.: Итоги науки и техники, т. 13 (1975), с. 149—231.
Малыхин В. И., Шапировский Б. Э.
[1973*] Аксиома Мартина и свойства топологических пространств. — ДАН СССР 213 (1973), 532—535.
Мангейм (Manheim J. H.)
[1964] The genesis of point set topology. — Oxford, 1964.
Мансфилд (Mansfield M. J.)
[1957] On countably paracompact normal spaces. — Canad. J. of Math. 9 (1957), 443—449.
[1957a] Some generalizations of full normality. — Trans. Amer. Math. Soc. 86 (1957), 489—505.
Мардешич (Mardešić S.)
[1960] On covering dimension and inverse limits of compact spaces. — Ill. J. of Math. 4 (1960), 278—291.
[1971] On the shape of the quotient space S^n/A. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 19 (1971), 623—629.
Мардешич, Папич (Mardešić S., Papić P.)
[1962] Continuous images of ordered compacta, the Suslin property and diadic compacta. — Glasnik Mat. 17 (1962). 3—25.
Мардешич С., Шостак А.
[1980*] О совершенных прообразах кружевных пространств. — УМН 35 (1980), № 3, 84—93.
Марчевский (Шпильрайн) (Marczewski E. (Szpilrajn E.))
[1941] Remarque sur les produits cartésiens d'espaces topologiques. — ДАН СССР 31 (1941), 525—527.
[1947] Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques. — Fund Math. 34 (1947), 127—143.
Марьянович (Marjanović M.)
[1966] Topologies on collections of closed subsets. — Publ. Inst. Math. Beograd 6 (1966), 125—130.
Матвеев М. В.
[1984*] Замкнутые вложения в псевдокомпактные пространства. — В сб. Кардинальные инварианты и отображения топологических пространств. — Ижевск, 1984.

Медников Л. Э.
[1984*] Гомеоморфизмы Z-множеств в тихоновском кубе. — УМН 39 (1984), № 3, с. 239—240.
Мейер (Meyer P. R.)
[1969] Sequential properties of ordered topological spaces. — Comp. Math. 21 (1969), 102—106.
Менгер (Menger K.)
[1923] Über die Dimensionalität von Punktmengen I. — Monatsh. für Math. und Phys. 33 (1923), 148—160.
[1924] Über die Dimension von Punktmengen II. — Monatsh. für Math. und Phys. 34 (1926), 137—161.
[1928] Dimensionstheorie. — Leipzig — Berlin, 1928.
[1929] Über die Dimension von Punktmengen III. Zur Bergründung einer axiomatischen Theorie der Dimension. — Monatsh. für Math. und Phys. 36 (1929), 193—218.
Мибу (Mibu Y.)
[1944] On Baire functions on infinite product spaces.— Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), 661—663.
Мищенко А. С.
[1962] О пространствах с точечно счетной базой. — ДАН СССР 144 (1962), 985—988.
[1962a] О финально компактных пространствах. — ДАН СССР 145 (1962), 1224—1227.
Монтгомери (Montgomery D.)
[1935] Nonseparable metric spaces. — Fund Math. 25 (1935), 527—533.
Мор Р. К., Мрувка (Moore R. C., Mrówka S.)
[1964] Topologies determined by countable objects.— Notices Amer. Math. Soc. 11 (1964), 554.
Мор Р. Л. (Moore R. L.)
[1916] On the foundations of plane analysis situs. — Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), 131—164.
[1920] Concerning simple continuous curves. — Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), 333—347.
[1925] Concerning upper semi-continuous collections of continua. — Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 416—428.
[1927] Abstract sets and the foundation of analysis situs. — Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), 141.
[1932] Foundations of point set theory. — New York, 1932.
[1935] A set of axioms for plane analysis situs. — Fund. Math. 25 (1935), 13—28.
[1962] Foundations of point set theory (second ed.). — Providence, 1962.
Мор Э. (Moore E. H.)
[1939] General analysis I. Pt. II. — Philadelphia, 1939.
Мор Э., Смит (Moore E. H., Smith H. L.)
[1922] A general theory of limits. — Amer. J. of Math. 44 (1922), 102—121.
Морита (Morita K.)
[1940] On uniform spaces and the dimension of compact spaces. — Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 22 (1940), 969—977.
[1948] Star-finite coverings and star-finite property. — Math. Japonicae 1 (1948), 60—68.
[1950] On the dimension of normal spaces. I. — Jap. J. of Math. 20 (1950), 5—36.
[1950a] On the dimension of normal spaces II. — J. of Math. Soc. Japan 2 (1950), 16—33.
[1951] On the simple extension of a space with respect to a uniformity. IV. — Proc. Japan. Acad. 27 (1951), 632—636.

[1953] On the dimension of product spaces. — Amer. J. of Math. 75 (1953), 205—223.
[1954] Normal families and dimension theory for metric spaces. — Math. Ann. 128 (1954), 350—362.
[1955] A condition for the metrizability of topological spaces and for n-dimensionality. — Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sec. A 5 (1955), 33—36.
[1956] On closed mappings and dimension. — Proc. Japan Acad. 32 (1956), 161—165.
[1956a] Note on mapping spaces. — Proc. Japan Acad. 32 (1956), 671—675.
[1962] Paracompactness and product spaces. — Fund. Math. 50 (1962), 223—236.
[1963] On the product of a normal space with a metric space. — Proc. Japan Acad. 39 (1963), 148—150.
[1964] Products of normal spaces with metric spaces. — Math. Ann. 154 (1964), 365—382.
[1971] A survey of the theory of M-spaces. — General Topology and Appl. 1 (1971), 49—55.
[1975] On generalizations of Borsuk's homotopy extension theorem. — Fund. Math. 88 (1975), 1—6.

Морита, Ханаи (Morita K., Hanai S.)
[1956] Closed mappings and metric space. — Proc. Japan Acad. 32 (1956), 10—14.

Моторов Д. Б.
[1984*] Бикомпакты счетного характера являются (в CH) непрерывными образами однородных бикомпактов. — В сб. Кардинальные инварианты и отображения топологических пространств. — Ижевск, 1984.

Мрувка (Mrówka S.)
[1954] On completely regular spaces. — Fund. Math. 41 (1954), 105—106.
[1956] On universal spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 4 (1956), 479—481.
[1956a] Замечание к работе П. Александрова «О двух теоремах Ю. Смирнова». — Fund. Math. 43 (1956), 399—400.
[1957] Some properties of Q-spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 5 (1957), 947—950.
[1958] On the unions of Q-spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 6 (1958), 365—368.
[1959] Compactness and product spaces. — Coll. Math. 7 (1959—60), 19—22.
[1959a] On the potency of βN. — Coll. Math. 7 (1959—60), 23—25.
[1964] An elementary proof of Katětov's theorem concerning Q-spaces. — Michigan Math. J. 11 (1964), 61—63.
[1970] Some comments on the author's example of a non-$\mathscr{R}$-compact space. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 18 (1970), 443—448.

Мысьор (Mysior A.)
[1981] A union of real compact spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 29 (1981), 169—172.
[1981a] A regular space which is not completely regular. — Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 852—853.

Нагами (Nagami K.)
[1955] Paracompactness and screenability. — Nagoya Math. J. 8 (1955), 83—88.
[1957] Some theorems in dimension theory for non-separable spaces. — J. Math. Soc. Japan 9 (1957), 80—92.
[1959] Finite-to-one closed mappings and dimension. II. — Proc. Japan Acad. 35 (1959), 437—439.
[1969*] Σ-spaces. — Fund. Math. 61 (1969), 169—192.
[1970] Dimension theory. — New York, 1970.

[1972] Countable paracompactness of inverse limits and products. — Fund. Math. 73 (1972), 261—270.

Нагами, Робертс (Nagami K., Roberts J. H.)

[1967] A study of metric-dependent dimension functions. — Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 414—435.

Нагата (Nagata J.)

[1950] On a necessary and sufficient condition of metrizability. — J. Inst. Polyt. Osaka City Univ. 1 (1950), 93—100.

[1950a] On topological completeness.— J. of Math. Soc. Japan 2 (1950), 44—47.

[1956] Note on dimension theory.— Proc. Japan Acad. 32 (1956), 568—569.

[1957] On imbedding theorem for non-separable metric spaces.— J. Inst. Polyt. Osaka City Univ. 8 (1957), 9—14

[1957a] A theorem for metrizability of a topological space.— Proc. Japan Acad. 33 (1957), 128—130.

[1968] Modern general topology. — Amsterdam, 1968.

[1969] A note on M-space and topologically complete space. — Proc. Japan Acad. 45 (1969), 541—543.

[1983*] Обзор теории размерности III. — Тр. матем. инст. АН СССР, 1983, т. 154, с. 186—199.

Наимпалли, Воррэк (Naimpally S. A., Warrack B. D.)

[1970] Proximity spaces. — Cambridge, 1970.

Накамура, Какутани (Nakamura M., Kakutani S.)

[1943] Banach limits and the Čech compactification of a countable discrete set. — Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943), 224—229.

Намиока (Namioka I.)

[1974*] Separate continuity and joint continuity. — Pacif. J. Math. 51 (1974), 515—531.

Нахбин (Nachbin L.)

[1950] On the continuity of positive linear transformations. In: Proccedings of the Internation Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. 1950, vol. I. — Providence, 1952, pp. 464—465.

Недев С. Й.

[1971*] O-метризуемые пространства. — Тр. Моск матем. об-ва 24 (1971), 201—236.

Недев С. Й., Чобан М. М.

[1970*] О Δ-метризуемых p-пространствах. — Вестник МГУ (1970), № 6, с. 3—9.

[1974*] Факторизационные теоремы для многозначных отображений, многозначные сечения и топологическая размерность. — Math. Balcanica 4 (1974), 457—460.

Немыцкий В. В., Тихонов А. Н.

[1928] Beweis des Satzes dass ein metrisierbarer Raum dann und nur dann kompakt ist, wenn er in jeder Metrik vollständig ist.— Fund. Math. 12 (1928), 118—120.

Непомнящий Г. М.

[1981*] О спектральном разложении многозначных абсолютных ретрактов. — УМН 36 (1981), № 3, с. 221—222.

Нёбелинг (Nöbeling G.)

[1931] Über eine n-dimensionale Universalmenge im R^{2n+1}. — Math. Ann. 104 (1931), 71—80.

Никош (Nyikos P.)

[1977] A compact nonmetrisable space P such that P^2 is completely normal.— Topology Proc. 2(1977), 359—363.

[1980] A provisional solution to the normal Moore space problem. — Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), 429—453.

[1983*] Топологическое пробное пространство для многих аксиом теории множеств. — УМН 38 (1983), № 6, с. 97—103.

Нобл (Noble N.)
[1969] Countably compact and pseudocompact products. — Czech. Math. J. 19 (1969), 390—397.
[1969a] A note on z-closed projections.— Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 73—76.
[1969b] Products with closed projections. — Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), 381—391.
[1970] The continuity of functions on Cartesian products. — Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 187—198.
Нобл, Ульмер (Noble N., Ulmer M.)
[1972] Factoring functions on Cartesian products. — Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972), 329—339.
Новак (Novák J.)
[1937] Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti. — Časopis Pěst. Mat. Fys. 67 (1937—38), 97—99.
[1948] Regulánrí prostor, na němž je každa spojitá funkce konstantni. — Časopis Pest. Mat. Fys. 73 (1948), 58—68.
[1953] О некоторых проблемах Лузина, касающихся частей натурального ряда. — Czech. Math. J. 3 (1953), 385—395.
[1953a] On the Cartesian product of two compact spaces. — Fund. Math. 40 (1953), 106—112.
Окромешко Н. Г.
[1983*] О ретракциях однородных пространств. — ДАН СССР 268 (1983), 548—551.
[1984*] Ретракции бикомпактов, близких к однородным. — Вестник МГУ, сер. матем. (1984), № 6, с. 7—10.
[1984a*] Факторные отображения и вложения топологических пространств.— В кн.: Отображения и функторы. — М.: Изд. МГУ, 1984.
Окстоби (Oxtoby J. C.)
[1961] Cartesian products of Baire spaces. — Fund. Math. 49 (1961), 157—166.
Окунев О. Г.
[1984*] Хьюиттовские расширения и пространства функций. — В сб.: Кардинальные инварианты и отображения топологических пространств.— Ижевск, 1984.
Окуяма (Okuyama A.)
[1964] On metrizability of M-spaces.—Proc. Japan Acad. 40 (1964), 176—179.
Олл (Aull C. E.)
[1964] A note on countably paracompact spaces and metrization. — Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1316—1317.
[1975] Quasi-developments and $\delta\theta$-bases. — J. London Math. Soc. 9 (1975), 197—204.
О'Мира (O'Meara P.)
[1971] On paracompactness in function spaces with the compact-open topology. — Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 183—189.
Осташевский (Ostaszewski A. J.)
[1976] On countably compact, perfectly normal spaces. — J. London Math. Soc. 14 (1976), 501—516.
Островский А. В.
[1976*] Об открытых отображениях нульмерных пространств. — ДАН СССР 228 (1976), 34—37.
Очан Ю. С.
[1943*] Пространство подмножеств топологического пространства. — Матем. сб. 12 (1943), № 3, с. 340—352.
Павловский Д. С.
[1980*] О пространствах непрерывных функций. — ДАН СССР 253 (1980), 38—41.

Паровиченко И. И.
[1963] Об одном универсальном бикомпакте веса ℵ — ДАН СССР 150 (1963), 36—39.
Пархоменко А. С.
[1939] О взаимно однозначных и непрерывных отображениях. — Матем. сб. 5 (1939), 197—210.
[1941] Об уплотнениях в компактные пространства. — Изв. АН СССР, сер. матем. 5 (1941), 225—232.
Пасынков Б. А.
[1964] Об универсальных бикомпактах данного веса и данной размерности. — ДАН СССР 154 (1964), 1042—1043.
[1965] О спектральной разложимости топологических пространств. — Матем. сб. 66 (1965), 35—79.
[1965a*] Частичные произведения. — Тр. Моск. матем. об-ва 13 (1965), 136—245.
[1965b*] О почти метризуемых группах. — ДАН СССР 161 (1965), 281—284.
[1967] Об открытых отображениях. — ДАН СССР 175 (1967), 292—295.
[1970] О бикомпактах с несовпадающими размерностями. — ДАН СССР 192 (1970), 503—506.
[1975*] О размерности прямоугольных произведений. — ДАН СССР 221 (1975), 291—294.
[1976*] Размерность пространств с бикомпактной группой преобразований. — УМН 31 (1976), № 5, с. 112—120.
[1976a*] О пространствах с бикомпактной группой преобразований. — ДАН СССР 231 (1976), 39—42.
[1981*] Факторизационные теоремы в теории размерности. — УМН 36 (1981), № 3, с. 147—176.
[1981a*] Об открытых счетнократных отображениях. — В кн.: Семинар по общей топологии. — М.: Изд. МГУ, 1981.
[1984*] О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств. — В кн.: Отображения и функторы. — М.: Изд. МГУ, 1984.
Пасынков Б. А., Лифанов И. К.
[1970] Примеры бикомпактов с несовпадающими индуктивными размерностями. — ДАН СССР 192 (1970), 276—278.
Пасынков Б. А., Федорчук В. В., Филиппов В. В.
[1979*] Теория размерности. — В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 17. — М.: ВИНИТИ, 1979.
Пелант (Pelant J.)
[1975] Cardinal reflections and point-character of uniformities — counterexamples. — Seminar Uniform Spaces 1973—1974 dicrected by Z. Frolík, Matematický ústav ČSAV v Praze, Prague, 1975, pp. 149—158.
Перегудов С. А.
[1975*] О некоторых свойствах топологических пространств, лежащих между паракомпактностью и слабой паракомпактностью. — Вестник МГУ, сер. матем., (1975), № 1, с. 71—77.
[1976*] О π-равномерных базах и π-базах. — ДАН СССР 229 (1976), 542—545.
Пестов В. Г.
[1982*] Совпадение размерностей dim l-эквивалентных топологических пространств. — ДАН СССР 266 (1982), 553—556.
[1982a*] О вложениях и уплотнениях топологических групп. — Матем. заметки, 31 (1982), № 3, с. 443—446.
[1982b*] Некоторые свойства свободных топологических групп. — Вестн. МГУ, сер. матем. (1982), № 1, с. 35—37.
Плыкин Р. В.
[1963*] Хаусдорфова метрика над полуполями. — ДАН УзССР 9 (1963).

Поль Р. (Pol R.)
[1974] Short proofs of two theorems on cardinality of topological spaces.— Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. 22 (1974), 1245—1249.
[1979*] A function space $C(X)$ which is weakly Lindelöf but not weakly compactly generated. — Studia Math. 64 (1979), 279—285.
[1981] On category-raising and dimension-raising open mappings with discrete fibers. — Coll. Math. 44 (1981), 65—76.
Поль Э. (Пузё) (Pol E. (Puzio E.))
[1973] Limit mappings and projections of inverse systems. — Fund. Math. 80 (1973), 81—97.
Поль Э. (Пузё, Пузё-Поль), Поль Р. (Pol E., Pol R.)
[1974] An open-perfect mapping of a hereditarily disconnected space onto a connected space. — Fund. Math. 86 (1974), 271—278.
[1976] Remarks on Cartesian products. — Fund. Math. 93 (1976), 57—69.
[1977] A hereditarily normal strongly zero-dimensional space with a subspace of positive dimension and an N-compact space of positive dimension. — Fund. Math. 97 (1977), 45—52.
[1979] A hereditarily normal strongly zero-dimensional space containing subspaces of arbitrarily large dimension. — Fund. Math. 102 (1979), 137—142.
Помпейю (Pompeiu D.)
[1905] Sur la continuité des functions de variatables complexes. — Ann. Fac. Sci. Toulouse 7 (1905), 265—315.
Пондицери (Pondiczery E. S.)
[1944] Power problems in abstract spaces. — Duke Math. J. 11 (1944), 835—837.
Пономарев В. И.
[1959] Об открытых отображениях нормальных пространств. — ДАН СССР 126 (1959), 716—718.
[1959a] О замкнутых отображениях. — УМН 14 (1959), № 4, с. 203—206.
[1960] Аксиомы счетности и непрерывные отображения. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 8 (1960), 127—133.
[1960a] О свойствах топологических пространств, сохраняющихся при многозначных непрерывных отображениях. — Матем. сб. 51 (1960), 515—536.
[1962] О паракомпактных пространствах и их непрерывных отображениях. — ДАН СССР 143 (1962), 46—49.
[1962a] О сохранении сильной паракомпактности при открытых совершенных отображениях. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 10 (1962), 425—428.
[1963] Об абсолюте топологического пространства. — ДАН СССР 149 (1963), 26—29.
[1966] О пространствах, соабсолютных с метрическими. — УМН 21 (1966), № 4, с. 101—132.
[1971] О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности. — ДАН СССР 196 (1971), 296—298.
Пономарев В. И., Шапиро Л. Б.
[1976*] Абсолюты топологических пространств и их непрерывных отображений. — УМН 31 (1976), № 5, с. 120—136.
Понтрягин Л. С.
[1930] Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension. — C. R. Acad. Paris 190 (1930), 1105—1107.
[1954] Непрерывные группы. — М.: Физматгиз, 1954.
Понтрягин Л. С., Толстова Г. В.
[1931] Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes. — Math. Ann. 105 1931, 734—747.

Попов В. В.
[1980*] Метризуемость и пространство замкнутых множеств. — УМН 35 (1980), № 3, с. 209—213.
Поспишил (Pospíšil B.)
[1937] Remark on bicompact spaces. — Ann. of Math. 38 (1937), 845—846.
[1937a] Trois notes sur les espaces abstraits. — Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Brno 249 (1937), 3—9.
Прохоров Ю. В.
[1956*] Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятности. — Теор. вер. и прилож. 1 (1956), № 2, с. 177—238.
Паункаре (Poincare H.)
[1912] Pourquoi l'espace a trois dimensions. — Revue de Mataph. et de Morale 20 (1912), 483—504.
Пшимусинский (Przymusiński T.)
[1973] On σ-discrete coverings consisting of connected sets. — Coll. Math. 27 (1973), 237—239.
[1974] A note on dimension theory of metric spaces. — Fund. Math. 85 (1974), 277—284.
[1979] On the dimension of product spaces and an example of M. Wage. — Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), 315—321.
[1980] Normality and paracompactness in finite and countable Cartesian products. — Fund. Math. 105 (1980), 87—104.
Пыткеев Е. Г.
[1977*] К теории уплотнений на компакты. — ДАН СССР 223 (1977), 1046—1048.
[1977a*] К теории взаимно однозначных непрерывных отображений. — Матем. зап. Уральск. ун-та 10 (1977), № 2, с. 121—132.
[1980*] О наследственно перистых пространствах. — Матем. заметки 28 (1980), 603—618.
[1982*] О тесноте пространств непрерывных функций. — УМН 37 (1982), № 1, с. 157—158.
[1982a*] О секвенциальности пространств непрерывных функций. — УМН 37 (1982), № 5, с. 197—198.
[1983*] О максимально разложимых пространствах. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. CLIV. — М., 1983.
Пыткеев Е. Г., Яковлев Н. Н.
[1980*] On bicompacta which are unions of spaces defined by means of coverings. — Comment. Math. Univ. Carol. 21 (1980), 247—261.
Рамер (Ramer A.)
[1965] Some problems on universal spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 13 (1965), 291—294.
Ранчин Д. В.
[1977*] Теснота, секвенциальность и замкнутые покрытия. — ДАН СССР 232 (1977), 1015—1018.
[1980*] О наследственно бесконечномерных пространствах. — УМН 35 (1980), № 3, с. 213—217.
Рейнуотер (Rainwater J.)
[1959] A note on projective resolutions.— Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959). 734—735.
Рисс (Riesz F.)
[1907] Die Genesis des Raumbegriffes. — Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn 24 (1907), 309—353.
[1908] Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. In: Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 1908, vol. II. — Roma, 1909, pp. 18—24.

Робертс (Roberts J. H.)
[1956] The rational points in Hilbert space.— Duke Math. J. 23 (1956). 489—492.
Розенталь, Зоретти (Rosenthal A., Zoretti L.)
[1924] Die Punktmengen. — Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II C 9a, Leipzig, 1924.
Рой (Roy P.)
[1962] Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces. — Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 609—613.
[1968] Nonequality of dimensions for metric spaces.— Trans. Amer. Math Soc. 134 (1968), 117—132.
Ройтман (Roitman J.)
[1984] Basic S and L. In: Handbook of set-theoretic topology (K. Kunen and J. E Vaughan, eds.). — Amsterdam, 1984, pp. 295—326.
Росс, Стоун (Ross K. A., Stone A. H.)
[1964] Products of separable spaces. — Amer. Math. Monthly 71 (1964), 398—403.
Рудин (Rudin M. E.)
[1956] A separable normal nonparacompact space.— Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 940—941.
[1965] A technique for constructing examples.— Proc. Amer. Math. Soc 16 (1965), 1320—1323.
[1969] Souslin's conjecture.— Amer. Math. Monthly 76 (1969). 1113—1119.
[1969a] A new proof that metric spaces are paracompact,— Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 603.
[1971] A normal space X for which $X \times I$ is not normal.— Fund. Math. 73 (1971), 179—186.
[1972] A normal hereditarily separable non-Lindelöf space. — Ill. J. of Math. 16 (1972), 621—626.
[1977] Σ-products of metric spaces are normal.— Preprint, 1977.
Рудин М., Кли (Rudin M. E., Klee V. L. jr.)
[1956] A note on certain function spaces.—Arch. der Math. 7 (1956), 469—470.
Рудин М., Старбёрд (Rudin M. E., Starbird M.)
[1975] Products with a metric factor. — General Topology and Appl. 5 (1975), 235—248.
Рудин У. (Rudin W.)
[1956] Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications. — Duke Math. J. 23 (1956), 409—419.
Рыль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.)
[1954] A remark on the Cartesian product of two compact spaces, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 2 (1954), 265—266.
Савинов Н. В.
[1976*] Пример совершенно нормального бикомпакта без промежуточных размерностей. — Вестник МГУ, сер. матем. (1976), № 3, с. 52—56.
[1977*[Два примера к теории размерности бикомпактов. — ДАН СССР 233 (1977), 41—44.
Сакс (Saks S.)
[1921] Sur l'équivalence de deux théorèmes de la théorie des ensembles. — Fund. Math. 2 (1921), 1—3.
Самюэль (Samuel P.)
[1948] Ultrafilters and compactifications of uniform spaces. — Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 100—132.
Свордсон (Swardson M. A.)
[1979] A short proof of Kowalsky's hedgehog theorem. — Proc. Amer. Math. Soc. 75 (1979), 188.
Сентмиклоси (Szentmiklószy Z.)
[1978] S-spaces and L-spaces under Martin's axiom. In: Colloquia Math. Soc.

J. Bolyai 23 (Proceedings of Colloquium on Topology, Budapest 1978). — Amsterdam, 1980, pp. 1139—1145.

Серпинский (Sierpiński W.)

[1915] Homeomorfizm przestrzeni wymiernych.— Wektor 4 (1914—15). 215—221.

[1916] Kontynuum liniowe jako wnogość abstrakcyjna. — Prace Mat. — Fix. 27 (1916), 203—227.

[1918] Un théorème sur les continus.— Tôhoku Math. J. 13 (1918), 300—303.

[1920] Sur un ensemble ponctiforme connexe. — Fund. Math. 1 (1920), 7—10.

[1920a] Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi. — Fund. Math. 1 (1920), 11—16.

[1920b] Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne. — Fund. Math. 1 (1920), 44—60.

[1921] Sur les ensembles connexes et non connexes. — Fund. Math. 2 (1921), 81—95.

[1921a] Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits — Fund. Math. 2 (1921), 179—188.

[1928] Sur les projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A). — Fund. Math. 11 (1928), 117—122.

[1928a] Sur une decomposition d'ensembles. — Monatsh. für Math. und Phys. 35 (1928), 239—242.

[1930] Sur une propriété des ensembles G_δ. — Fund. Math. 16 (1930), 173—180.

Сигал (Segal J.)

[1959] Hyperspaces of the inverse limit spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 706—709.

Симон П.

[1978*[Расходящиеся последовательности в бикомпактах. — ДАН СССР 243 (1978), 1398—1401.

[1980*] О двух теоремах М. Г. Ткаченко. — УМН 35 (1980), 220—221.

Сирота С.

[1968] О спектральном представлении пространства замкнутых подмножеств бикомпактов. — ДАН СССР 181 (1968), 1069—1072.

[1969*] Произведение топологических групп и экстремальная несвязность.— Матем. сб. 79 (1969), № 2, с. 179—192.

Ситников К. А.

[1953] Пример двумерного множества в трехмерном евклидовом пространстве, допускающего сколь угодно малые деформации в одномерный полиэдр, и некоторая новая характеристика размерности множеств в евклидовых пространствах. — ДАН СССР 88 (1953), 21—24.

Скарборо, Стоун (Scarborough C. T., Stone A. H.)

[1966] Products of nearly compact spaces. — Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), 131—147.

Скляренко Е. Г.

[1958] О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности. — ДАН СССР 123 (1958), 36—39.

Скула (Skula L.)

[1965] Dědičná m-separabilita uspořádaného prstoru. — Časopis Pěst. Mat. Fys. 90 (1965), 451—454.

Смирнов Ю. М.

[1948] К теории вполне регулярных пространств. — ДАН СССР 62 (1948), 749—752.

[1950] О топологических пространствах, компактных в данном отрезке мощностей. — Изв. АН СССР, сер. матем. 14 (1950), 155—178.

[1951] О покрытиях топологических пространств. — Уч. записки Моск. унив. 148 (1951), 204—215.

[1951a] О метризации топологических пространств. — УМН 6 (1951), № 6, с. 100—111.
[1951b] Некоторые соотношения в теории размерности. — Матем. сб. 29 (1951), 151—172.
[1951c] О нормально расположенных множествах нормальных пространств.— Матем. сб. 29 (1951), 173—176.
[1951a] К теории финально компактных пространств. — Укр. матем. ж. 3 (1951), 52—60.
[1952] О пространствах близости — Матем. сб. 31 (1952), 543—574.
[1954] О полноте пространств близости. — Тр. Моск. матем. общ-ва 3 (1954), 271—306.
[1956] О сильно-паракомпактных пространствах. — Изв. АН СССР, сер. матем. 20 (1956), 253—274.
[1956a] О метризуемости бикомпактов, разлагаемых в сумму множеств со счетной базой. — Fund. Math. 43 (1956), 387—393.
[1956b] О размерности пространств близости. — Матем. сб. 38 (1956), 283—302.
[1958] Пример нульмерного пространства, имеющего бесконечную размерность в смысле покрытий. — ДАН СССР 123 (1958), 40—42.

Смит, Краевский (Smith J. C., Krajewski L. L.)
[1971] Expandability and collectionwise normality. — Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 437—451.

Старбёрд (Starbird M.)
[1975] The Borsuk homotopy extension theorem without the binormality condition. — Fund. Math. 87 (1975), 207—211.

Степанек, Вопенка (Štěpánek P., Vopěnka P.)
[1967] Decomposition of metric spaces into nowhere dense sets. — Comm. Math. Univ. Carolinae 8 (1967), 387—404.

Стефенсон (Stephenson R. M. jr.)
[1968] Pseudocompact spaces. — Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), 437—448.
[1971*] Minimal topological groups. — Math. Ann. 192 (1971), 198.

Стин (Steen L. A.)
[1970] A direct proof that a linearly ordered space is hereditarily collectionwise normal. — Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 727—728.

Стинрод (Steenrod N.)
[1936] Universal homology groups. — Amer. J. of Math. 58 (1936), 661—701.

Стоилов (Stoïlow S.)
[1928] Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques. — Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 45 (1928), 347—382.

Стоун А. (Stone A. H.)
[1948] Paracompactness and product spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977—982.
[1956] Metrizability of decomposition spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 690—700.
[1960] Sequences of coverings. — Pacific J. of Math. 10 (1960), 689—691.
[1962] Absolute F_σ-spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 495—499
[1962a] Non-separable Borel sets. — Rozprawy Mat. 28 (1962).
[1963] A note on paracompactness and normality of mapping spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 81—83.

Стоун М. (Stone M. H.)
[1936] Applications of Boolean algebras to topology. — Матем. сб. 1 (1936), 765—772.
[1937] Applications of the theory of Boolean rings to general topology. — Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375—481.

[1937a] Algebraic characterizations of special Boolean rings. — Fund. Math. 29 (1937), 223—302.
[1947] The generalized Weierstrass approximation theorem. — Math. Mag. 21 (1947—48), 167—183 and 237—254.
[1948] On the compactification fo topological spaces. — Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1948), 153—160.

Страшевич (Straszewics S.)
[1918] Über den Begriff des einfachen Kurvenbogens. — Math. Ann. 78 (1918), 369—377.

Тайманов А. Д.
[1952] О распространении непрерывных отображений топологических пространств. — Матем. сб. 31 (1952), 459—463.
[1955] О замкнутых отображениях. I. — Матем. сб. 36 (1955), 349—352.

Тамано (Tamano H.)
[1960] A note on the pseudo-compactness of the product of two spaces. — Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A 33 (1960), 225—230.
[1960a] On paracompactness. — Pacific J. of Math. 10 (1960), 1043—1047.
[1962] On compactifications. — J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962), 161—193.

Тейхмюллер (Teichmüller O.)
[1939] Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom? — Deutsche Math. 4 (1939), 567—577.

Тельгарский (Telgársky R.)
[1971] C-scattered and paracompact spaces. — Fund. Math. 73 (1971), 59—74.

Тенненбаум (Tennenbaum S.)
[1968] Souslin's problem. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA 59 (1968),

Терасава (Terasawa J.)
[1972] On the zero-dimensionality of some non-normal product spaces.— Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sec. A 11 (1972), 95—102.

Терасака (Terasaka H.)
[1952] On Cartesian product of compact spaces. — Osaka Math. J. 4 (1952), 11—15.

Терпе Ф., Флаксмайер Ю.
[1977*] О некоторых приложениях теории расширений топологических пространств и теории меры. — УМН 32 (1977), № 5, с. 125—162.

Титце (Tietze H.)
[1915] Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind. J. für die reine und angew. Math. 145 (1915), 9—14.
[1923] Beiträge sur allgemeinen Topologie I. — Math. Ann. 88 (1923), 290—312.

Титце, Вьеторис (Tietze H., Vietoris L.)
[1930] Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. — Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. III AB 13, Leipzig, 1930.

Тихонов А. Н.
[1925] Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn. — Math. Ann 95 (1925), 139—142.
[1930] Über die topologische Erweiterung von Räumen.— Math. Ann. 102 (1930), 544—561.
[1935] Über einen Funktionenraum.— Math. Ann. 111 (1935), 762—766.
[1935a] Ein Fixpunktsatz. — Math. Ann. 111 (1936), 767—776.

Ткаченко М. Г.
[1979*] О непрерывных образах всюду плотных подпространств топологических произведений. — УМН 34 (1979), № 6, с. 199—202.
[1983*] О бикомпактности счетно-компактных пространств, обладающих дополнительной структурой.— Тр. Моск. матем. об-ва 46 (1983), 145—163.

[1983a*] О полноте свободных абелевых топологических групп. — ДАН СССР 269 (1983), 299—303.
[1984*] О топологии свободных групп над бикомпактами. — В кн.: Отображения и функторы. — М.: Изд. МГУ, 1984.

Ткачук В. В.
[1983*] О кардинальных инвариантах типа числа Суслина. — ДАН СССР 270 (1983), 795—798.
[1984*] О мультипликативности некоторых свойств пространств отображений в топологии поточечной сходимости. — Вестник МГУ, сер. матем. (1984), № 6, с. 36—39.

Тодорчевич (Todorčević S.)
[1981] A model for no S-spaces. — Preprint, 1981.
[1984] Generalized S and L. — Preprint, 1984.

Толл (Tall F. D.)
[1969] Set-theoretic consistency results and topological theorems concerning the normal Moore space conjecture and related problems. Thesis, Univ. of Wisconsin 1969. — Dissertationes Math. 148 (1977).

Тонг (Tong H.)
[1948] Some characterizations of normal and perfectly normal spaces.— Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 65.
[1949] On some problems of Čech. — Ann. of Math. 50 (1949), 154—157.
[1952] Some characterizations of normal and perfectly normal spaces. — Duke Math. J. 19 (1952), 289—292.

Трейлор (Traylor D. R.)
[1964] Concerning metrizability of pointwise paracompact Moore spaces. — Canad. J. of Math. 16 (1964), 407—411.

Трнкова В. (Шедива В.)
[1979*] Гомеоморфизмы произведений пространств. — УМН 34 (1979), № 6, с. 124—139.

Тумаркин Л. А.
[1925] Zur allgemeinen Dimensionstheorie. — Proc. Akad. Amsterdam 28 (1925), 994—996.
[1926] Beitrag zur allgemeinen Dimensionstheorie. — Матем. сб. 33 (1926), 57—86.

Тьюки (Tukey J. W.)
[1940] Convergence and uniformity in topology. — Ann. of Math. Studies 2, Princeton, 1940.
[1941] Review. — Math. Rev. 2 (1941), 178.

Уайберн (Whyburn G. T.)
[1934] Non-alternating transformations. — Amer. J. of Math. 56 (1934), 294—302.
[1942] Analytic topology. — New York, 1942.
[1950] Open and closed mappings. — Duke Math. J. 17 (1950), 69—74.
[1952] On quasi-compact mappings. — Duke Math. J. 19 (1952), 445—446.

Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
[1948] A note on a theorem due to Borsuk. — Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 1125—1132.

Уиллард (Willard S.)
[1971] Paracompactness in small products. — Canad. Math. Bull. 14 (1971), 127.

Улам (Ulam S.)
[1930] Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre. — Fund. Math. 16 (1930), 140—150.

Ульянов В. М.
[1975*] О бикомпактных расширениях счетного характера и абсолютах. — Матем. сб. 98 (1975), № 2, с. 223—254.

[1975a*] О вполне замкнутых и близких к ним отображениях. — УМН 30 (1975), № 3, с. 177—178.
[1977*] Решение основной задачи о бикомпактных расширениях волмэновского типа. — ДАН СССР 233 (1977), № 6, с. 1056—1059.

Уокер (Walker R. C.)
[1974] The Stone — Cech compactification.— Berlin, 1974.

Уоллес (Wallace A. D.)
[1942] Monotone transformations. — Duke Math. J. 9 (1942), 487—506.
[1951] Extensional invariance. — Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), 97—102.

Уорнер (Warner S.)
[1958] The topology of compact convergence on continuous function spaces. — Duke Math. J. 25 (1958), 265—282.

Уоррел (Worrell J. M. jr.)
[1966] The closed continuous images of metacompact topological spaces. — Portugaliae Math. 25 (1966), 175—179.

Уотерхаус (Waterhouse W. C.)
[1972] An empty inverse limit. — Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 618.

Успенский В. В.
[1978*] О вложениях в функциональные пространства. — ДАН СССР 242 (1978), 544—546.
[1982*] О спектре частот функциональных пространств. — Вестник МГУ, сер. 1, матем. (1982), № 1, с. 35—37.
[1982a*] Топологическая группа, порожденная линделёфовым Σ-пространством, обладает свойством Суслина. — ДАН СССР 265 (1982), 823—826.
[1983*] К теореме Бальцара — Франека об отображении экстремальных несвязных бикомпактов на канторов дисконтиуум. — Comment. Math. Univ. Carol. 24 (1983), 155—165.
[1983a*] A characterization of realcompactness in terms of the topology of pointwise convergence on the function space. — Comment. Math. Univ. Carol. 24 (1983), 121—126.

Урысон П. С.
[1922] Les multiplicités Cantoriennes. — C. R. Acad. Paris, 175 (1922), 440—442.
[1923] Sur la métrisation des espaces topologiques. — Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. A (1923), 13—16.
[1924] Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume. — Math. Ann. 92 (1924), 275—293.
[1925] Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. — Math. Ann. 94 (1925), 262—295.
[1925a] Zum Metrisationsproblem. — Math. Ann. 94 (1925), 309—315.
[1925b] Mémoire sur les Multiplicatés Cantoriennes. — Fund. Math. 7 (1925), 30—137.
[1926] Mémoire sur les multiclicités Cantoriennes (suite), — Fund. Math. 8 (1926), 225—359.
[1926a] Sur les classes (*L*) de M. Fréchet.— Enseign. Math. 25 (1926), 77—83.
[1927] Sur un espace métrique universel. — Bull Sci. Math. 51 (1927), 43—64, 74—90.
[1927a] Beispiel eines nirgends separablen metrischen Räumes. — Fund. Math. 9 (1927), 119—121.

Федорчук В. В.
[1966] Упорядоченные множества и произведение топологических пространств. — Вестн. Моск. уни-та, сер. матем. (1966), № 4, 66—71.
[1966a] Об упорядоченных пространствах. — ДАН СССР 169 (1966), 777—780.

[1968*] О бикомпактах с несовпадающими размерностями. — ДАН СССР 182 (1968), 275—277.
[1969] Некоторые вопросы теории упорядоченных пространств. — Сибирский матем. ж. 10 (1969), 172—187.
[1971*] Пример однородного бикомпакта с несовпадающими размерностями.— ДАН СССР 198 (1971), 1283—1286.
[1975*] Бикомпакт, все конечные замкнутые подмножества которого n-мерны. — Матем. сб., 96 (1975), № 1, с. 41—62.
[1975a*] О мощности наследственно сепарабельных бикомпактов. — ДАН СССР 222 (1975), 302—305.
[1976*] Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств. — Матем. сб. 99 (1976), № 1, с. 3—33.
[1977*] A compact space having the cardinality of the continuum with no convergent sequences. — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 81 (1977), 177—181.
[1978*] Бесконечномерные бикомпакты. — Изв. АН СССР, сер. матем. 42 (1978), 1162—1178.
[1972a*] Об упорядоченных множествах. — ДАН СССР 240 (1978), 280—282.
[1980*] Метод развертываемых спектров и вполне замкнутых отображений в общей топологии. — УМН 35 (1980), № 3, с. 112—121.
[1981*] Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия. — УМН 36 (1981), № 3, с. 177—198.
[1984*] О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов. — УМН 39 (1984), № 5, с. 169—208.

Филиппов В. В.
[1967*] О совершенном образе паракомпактного перистого пространства. — ДАН СССР 176 (1967), 533—536.
[1968*] О перистых паракомпактах. — ДАН СССР 178 (1968), 553—558.
[1969] Бикомпакт с несовпадающими индуктивными размерностями. — ДАН СССР 184 (1969), 1050—1053.
[1969a] Факторпространства и кратность базы. — Матем. сб. 80 (1969), 521—532.
[1969b*] О совершенно нормальных бикомпактах. — ДАН СССР 189 (1969), 36—39.
[1969c*] Бикомпакт с первой аксиомой счетности с несовпадающими размерностями ind и Ind. — ДАН СССР 186 (1969), 1020—1022.
[1970] О бикомпактах с несовпадающими индуктивными размерностями.— ДАН СССР 192 (1970), 289—292.
[1970a*] Решение одной задачи П. С. Александрова (Бикомпакт с несовпадающими индуктивными размерностями). — Матем. сб. 83 (1970), № 1, с. 42—60.
[1972] О размерности замкнутых отображений. — ДАН СССР 205 (1972), 40—43.
[1973] О размерности нормальных пространств. — ДАН СССР 209 (1973), 805—807.
[1974] О локально-связных пространствах. — ДАН СССР 215 (1974), 1061—1062.
[1978*] О поведении размерности при замкнутых отображениях. — Тр. семинара имени И. Г. Петровского, МГУ (1978), № 3, с. 177—196.
[1979*] О весовых характеристиках пространства с действием бикомпактной группы. — Матем. заметки 25 (1979), № 6, с. 939—947.
[1980*] On the existence of solutions of differential equations. — Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 23, North-Holland, Topology, v. I. pp. 397—412.
[1983*] О нормально расположенных пространствах. — Тр. Матем. ин-та АН СССР 154 (1983), 239—251.

Фихтенгольц Г. М., Канторович Л. В.
[1934] Sur les operations linéaires dans l'espace des fonctions bornées. — Studia. Math. 5 (1934), 69—98.
Флаксмайер (Flachsmeyer J.)
[1963] Topologische Projektivräume. — Math. Nachr. 26 (1963). 57—66.
[1983*] Топологические полуполя и соответствующие им булевы алгебры. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 154 (1983), 252—263.
Флейснер (Fleissner W. G.)
[1982] If all normal Moore spaces are metrisable, then there is an inner model with a measurable cardinal. — Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 365—373.
[1984] The normal Moore space conjecture and large cardinals. In: Handbook of set-theoretic topology (X. Kunen and J. E. Vaughan, eds.). — Amsterdam, 1984, pp. 733—760.
Флейшер, Франклин (Fleischer I., Franklin S. P.)
[1967] On compactness and projections. In: Contributions to Extension Theory of Topological Structures (Proceedings of the Symposium held in Berlin August 14—19, 1967). — Berlin, 1969, pp. 77—79.
Флейшман (Fleischman W. M.)
[1970] A new extension of countable compactness. — Fund. Math. 67 (1970), 1—9.
Фокс (Fox R. H.)
[1945] On topologies for function spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 429—432.
Форт (Fort M. K. jr.)
[1951] A note on pointwise convergence. — Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 34—35.
[1955] Category theorems. — Fund. Math. 42 (1955), 276—288.
Франклин (Franklin S. P.)
[1965] Spaces in which sequences suffice. — Fund. Math. 57 (1965), 107—115.
[1967] Spaces in which sequences suffice II. — Fund. Math. 61 (1967), 51—56.
[1969] On two guestions of Moore and Mrówka. — Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 597—599.
Франклин, Раджагопалан (Franklin S. P., Rajagopalan M.)
[1971] Some examples in topology. — Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971), 305—314.
Фрейденталь (Freudenthal H.)
[1937] Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen. — Comp. Math. 4 (1937), 145—234.
Фрейденталь, Гуревич (Freundenthal H., Hurewicz W.)
[1936] Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien. — Fund. Math. 26 (1936), 120—122.
Фреше (Frechet M.)
[1906] Sur quelques points du calcul fonctionnel. — Rend. del Circ. Mat. di Palermo 22 (1906) 1—74.
[1910] Les dimensions d'un ensemble abstrait. — Math. Ann. 68 (1910), 145—168.
[1910a] Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel. — Ren. del Circ. Math. di Palermo 30 (1910), 1—26.
[1918] Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits. — Bull. Sci. Math. 42 (1918), 138—156.
[1926] Les espaces abstraits. — Paris, 1926.
Фринк А. (Frink A. H.)
[1937] Distance functions and the metrization problem. — Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 133—142.

Фринк О. (Frink O.)
[1964] Compactifications and semi-normal spaces. — Amer. J. of Math. 86 (1964), 602—607.
Фролик (Frolík Z.)
[1959] Обобщения компактности и свойства Линделёфа. — Czech. Math. J. 9 (1959), 172—217.
[1960] On the topological product of paracompact spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 8 (1960), 747—750.
[1960a] An example concerning countably compact spaces. — Czech. Math. J. 10 (1960), 255—257.
[1960b] Generalization of the G_δ-property of complete metric spaces. — Czech. Math. J. 10 (1960), 359—379.
[1961] Applications of complete families of continuous functions to the theory of Q-spaces. — Czech. Math. J. 11 (1961), 115—133.
[1961a] Локально топологически полные пространства. — ДАН СССР 137 (1961), 790—792.
[1961b] On approximation and uniform approximation of spaces. — Proc. Japan Acad. 37 (1961), 530—532.
[1967] Sums of ultrafilters. — Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 87—91.
[1967a] On two problems of W. W. Comfort. — Comm. Math. Univ. Carolinae 8 (1967), 139—144.
Фурдзик (Furdzik Z.)
[1968] On absolute G_δ in perfectly normal topological spaces. — Zeszyty Nauk. U. J. 167, Prace Mat. 12 (1968), 17—18.
Хаар, Кёниг (Haar A., König D.)
[1910] Über einfach geordnete Mengen. — J. für die reine und engew. Math. 139 (1910), 16—28.
Хабер (Chaber J.)
[1972] Remarks on open-closed mappings. — Fund. Math. 74 (1972), 197—208.
[1976] Conditions which imply compactness in countably compact spaces.— Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 24 (1976), 993—998.
Хайнал, Юхас (Hajnal A., Juhász I.)
[1967] Discrete subspaces of topological spacel. — Indag. Math. 29 (1967), 343—356.
[1969] Some remarks on a property of topological cardinal functions. — Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), 25—37.
[1974] On hereditarity α-Lindelöf and α-separable spaces, II. — Fund. Math. 81 (1974), 147—158.
Халмош (Halmos P. R.)
[1963] Lectures on Boolean algebras. — Princeton, 1963.
Хан (Hahn H.)
[1914] Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve. — Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien Abt. IIa 123 (1914), 2433—2489.
[1917] Über halbstetige und unstetige Funktionen. — Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien Abt. IIa 126 (1917), 91—110.
[1921] Theorie der reellen Funktionen. — Berlin, 1921.
[1932] Reelle Funktionen I. — Leipzig, 1932.
Ханаи (Hanai S.)
[1956] On closed mappings. II. — Proc. Japan Acad. 32 (1956), 388—391.
[1961] Inverse images of closed mappings. I. — Proc. Japan Acad. (1961), 298—301.
Ханаи, Окуяма (Hanai S., Okuyama A.)
[1962] On pseudocompactness and continuous mappings. — Proc. Japan Acad. 38 (1962), 444—447.
Ханнер (Hanner O.)
[1951] Solid spaces and absolute retracts. — Ark. för Mat. 1 (1951), 375—382.

Харатоми (Haratomi K.)
[1931] Über höherstufige Separabilität und Kompaktheit I. — Jap. J. of Math. 8 (1931), 113—141.
Хаусдорф (Hausdorff F.)
[1914] Grundzüge der Mengenlehre, — Leipzig, 1914.
[1919] Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung. — Math. Zeitschr. 5 (1919), 292—309.
[1924] Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen. — Fund. Math. 6 (1924), 146—148.
[1927] Mengenlehre. — Berlin, 1927. [Русский перевод: Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М. — Л.: ГТТИ, 1937.]
[1930] Erweiterung einer Homöomorphie. — Fund. Math. 16 (1930), 353—360.
[1934] Über innere Abbildungen. — Fund. Math. 23 (1934), 279—291.
[1935] Gestufte Räume. — Fund. Math. 25 (1935), 486—502.
[1936] Summen von $\aleph_1$ Mengen. — Fund. Math. 26 (1936), 241—255.
[1936a] Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch. — Studia Math. 6 (1936), 18—19.
[1938] Erweiterung einer stetigen Abbildung. — Fund. Math. 30 (1938), 40—47.
Хейджер (Hager A. W.)
[1969] Approximation of real continuous functions on Lindelöf spaces. — Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), 156—163.
Хеммингсен (Hemmingsen E.)
[1946] Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces. — Duke Math. J. 13 (1946), 495—504.
Хенкин (Henkin L.)
[1950] A problem on inverse mapping systems. — Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 224—225.
Хенриксен, Исбелл (Henriksen M., Jsbell J. R.)
[1957] Local connectedness in the Stone-Čech compactification. — Ill. J. of Math. 4 (1957), 574—582.
[1958] Some properties of compactificatins. — Duke Math. №. 25 (1958), 83—106.
Хенриксен, Исбелл, Джонсон (Henriksen M., Isbell J. R., Johnson D. G.)
[1961] Residue class fields of lattice-ordered algebras. — Fund. Math. 50 (1961), 107—1117.
Херрлих (Herrlich H.)
[1965] Ordhugsfähigkeit total-diskontinuierlicher Räume. — Math. Ann. 159 (1965), 77—80.
[1965a] Wenn sind alle stetigen Abbildungen in Y konstant. — Math. Zeitschr. 90 (1965), 152—154.
Хигман, Стоун (Higman G., Stone A. H.)
[1954] On inverse systems with trivial limits. — J. London Math. Soc. 29 (1954), 233—236.
Хит (Heath R. W.)
[1964] Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces. — Canad. J. of Math. 16 (1964), 763—770.
Хьюитт (Hewitt E.)
[1946] On two problems of Urysohn. — Ann. of Math. 47 (1946), 503—509.
[1946a] A remark on density characters. — Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 641—643.
[1947] Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem. — Duke Math. J. 14 (1947), 419—427.
[1948] Rings of real-valued continuous functions, I. — Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 45—99.
[1950] Linear functionals on spaces of continuous functions. — Fund. Math. 37 (1950), 161—189

Цорн (Zorn M.)
[1935] A remark on method in transfinite algebra. — Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), 667—670.
Чарльзуорт (Charlesworth A.)
[1976] A note on Urysohn metrisation theorem. — Amer. Math. Monthly 83 (1976), 718—720.
Чертанов Г. И.
[1975*] Произведение линейно упорядоченных пространств и непрерывные отображения. — ДАН СССР 223 (1975), 1322—1325.
[1984*] Псевдорадиальность произведения конечного числа линейно упорядоченных бикомпактов. — В сб.: Управление, надежность, навигация. — Саранск, 1984.
Чех (Čech E.)
[1931] Sur la théorie de la dimension. — C. R. Acad. Paris. 193 (1931), 976—977.
[1932] Sur la dimension des espaces parfaitement normaux. — Bull. Intern. Acad. Tchéque Sci. 33 (1932), 38—55.
[1932a] Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. — Fund. Math. 19 (1932), 149—183.
[1933] Příspěvek k theorii dimense. — Časopis Pěst. Mat. Fys. 62 (1933), 277—291.
[1937] On bicompact spaces. — Ann. of Math. 38 (1937), 823—844.
[1959] Topologické prostory. — Praha. 1959.
Чех, Поспишил (Čech E., Pospíšil B.)
[1938] Sur les espaces compacts. — Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Brno 258 (1938), 3—7.
Чигогидзе А. Ч.
[1977*] О неравенстве Урысона — Менгера. — Труды Тбил. гос. ун-та, 185 (1977), 51—57.
[1980*] On some questions in dimension theory. — Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 23, Topology, v. I, North-Holland, 1980, pp. 273—286.
[1980a*] О совершенно $\varkappa$-нормальных пространствах. — ДАН СССР 250 (1980), 308—311.
[1982*] О бесконечных бикомпактах. — Сиб. матем. ж. 23 (1982), № 2, с. 157—164.
Читтенден (Chittenden E. W.)
[1917] On the equivalence of écart and voisinage. — Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), 161—166.
Читтенден, Питчер (Chittenden E. W., Pitcher A. D.)
[1919] On a theory of developments of an abstract class in relation to the calcul fonctionel. — Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), 213—233.
Чобан М. М.
[1966] О поведении метризуемости при факторных s-отображениях. — ДАН СССР, 166 (1966), 562—565.
[1967] Совершенные отображения пространств счетного типа. — Вестник МГУ, сер. матем. (1967), № 6, с. 87—93.
[1967a*] Некоторые метризационные теоремы для перистых пространств. — ДАН СССР 173 (1967), 1270—1272.
[1969] Об экспоненциальной топологии. — ДАН СССР 186 (1969), 272—274.
[1969a*] О σ-паракомпактных пространствах. — Вестник МГУ, сер. матем. (1969), № 1, с. 20—27.
[1970] К теории p-пространств. — ДАН СССР 194 (1970), 528—531.
[1971] Note sur la topologie exponentielle. — Fund. Math. 71 (1971), 27—41.
[1971a*] Многозначные отображения и борелевские множества, I. — Тр. Моск. матем. об-ва, 22 (1971), 229—250.
[1972*] Многозначные отображения и борелевские множества, II. — Тр. Моск. матем. об-ва, 23 (1972), 277—301.

[1973*] Редукционные теоремы о существовании непрерывных сечений. — Матем. исслед. 8 (1973), № 4, с. 111—156.
[1974*] Непрерывные образы полных пространств. — Тр. Моск. матем. об-ва, 30 (1974), 23—59.
[1975*] Об операциях над множествами. — Сиб. матем. ж. 16 (1975), № 6, с. 1322—1351.
[1975a*] Модификации топологий и непустота классов. — Сердика, Българско матем. списание, 1 (1975), 133—143.
[1976*] Топологическое строение подмножеств топологических групп и их факторпространств. — ДАН СССР 228 (1976), 52—55.
[1977*] Топологическое строение подмножеств топологических групп и их факторпространств. — В сб.: Матем. исслед. — Кишинев: Штиинца, 1977, вып. 44, с. 117—163.
[1978*] Общие теоремы о сечениях и приложения — Българска матем. списание, 4 (1978), с. 74—90.
[1979*] Открытые отображения и классы пространств. В кн.: Топологические пространства и алгебраические системы. — Кишинев: Штиинца, 1979, с. 148—173.
[1983*] Отображение и размерностные свойства пространств. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 154 (1983), 296—305.

Чобан М. М., Додон М. К.
[1979*] Теория $\mathscr{P}$-разреженных пространств. — Кишинев: Штиинца, 1979.

Чогошвили Г. С.
[1941*] О пространствах сходимости. — Матем. сб. 9 (51), (1941), № 2, с. 377—381.
[1966*] Обобщенные произведения, пределы и их применения. — УМН 21 (1966), № 4.

Шанин Н. А.
[1943] О специальных расширениях топологических пространств. — ДАН СССР 38 (1943), 7—11.
[1943a] К теории бикомпактных расширений топологических пространств. — ДАН СССР 38 (1943), 166—169.
[1944] О погружениях в степень топологического пространства. — Изв. АН СССР, сер. матем. 8 (1944), 233—242.
[1946] Одна теорема из общей теории множеств. — ДАН СССР 53 (1946), 403—404.
[1946a] О взаимном пересечении открытых подмножеств произведения топологических пространств. — ДАН 53 (1946), 503—506.
[1946b] О диадических бикомпактах. — ДАН СССР 53 (1946), 785—788.
[1948] О произведении топологических пространств. — Тр. матем. ин-та АН СССР 24 (1948), 1—112.

Шапиро Л. Б.
[1976] Пространство замкнутых подмножеств $D^{\aleph_2}$ не является диадическим бикомпактом. — ДАН СССР 228 (1976), 1302—1305.
[1976*] Об абсолютах топологических пространств и непрерывных отображений. — ДАН СССР 226 (1976), 523—526.
[1976a*] О пространствах замкнутых подмножеств бикомпактов. — ДАН СССР, 231 (1976), 295—298.

Шапировский Б. Э.
[1972] О дискретных подпространствах топологических пространств. Вес, теснота и число Суслина. — ДАН СССР 202 (1972), 779—782.
[1974] Канонические множества и характер. Плотность и вес в бикомпактах. — ДАН СССР 218 (1974), 58—61.
[1975*] О π-характере и π-весе в бикомпактах.— ДАН СССР 223 (1975), 799—802.
[1975a*] О мощности наследственно нормальных пространств. — ДАН СССР, 225 (1975), 767—770.

[1976*] О тесноте, π-весе и близких к ним понятиях. — Уч. зап. Рижск. ун-та 3 (1976), 88—99.
[1980*] Об отображениях на тихоновские кубы. — УМН 35 (1980), № 3, с. 122—130.
[1981*] Кардинальные инварианты в бикомпактах. — В кн.: Семинар по общей топологии. — М.: Изд. МГУ, 1981.

Шахматов Д. Б.
[1983*] Кардинальные инварианты топологических полей. — ДАН СССР 271 (1983), 1332—1336.
[1984*] О псевдокомпактных пространствах с точечно счетной базой. — ДАН СССР 279 (1984), 825—829.

Шевалле, Фринк (Chevalley C., Frink O. jr.)
[1941] Bicompactness of Cartesian products. — Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 612—614.

Шедива (Трнкова) (Šediva V.)
[1959] О коллективно нормальных и сильно паракомпактных пространствах. — Czech. Math. J. 9 (1959), 50—62.

Шерф (Schaerf H. M.)
[1968] Topological cardinality theorems. In: Proceedings of the International Symposium on Topology, Herceg Novi 1968. — Beograd, 1969, pp. 292.

Шимрат (Shimrat M.)
[1956] Decomposition spaces and separation properties. — Quart. J. of Math. Oxford 7 (1956), 128—129.

Широков Л. В.
[1982*] Внешняя характеристика пространств Дугунджи и каппа-метризуемых бикомпактов. — ДАН СССР 263 (1982), 1073—1077.

Широта (Shirota T.)
[1952] A class of topological spaces. — Osaka Math. J. 4 (1952), 23—40.

Шнейдер В. Е.
[1945] Непрерывные образы суслинских и борелевских множеств. Метризационные теоремы. — ДАН СССР 50 (1945), 77—79.

Шостак А. П.
[1974] Характеристика класса полных по Чеху паракомпактов как класса $\mathscr{E}$-компактности. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 22 (1974), 839—844.

Шпернер (Sperner E.)
[1928] Neuer Bewies für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. — Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), 365—272.

Штейниц (Steinitz E.)
[1908] Beiträge zur Analysis situs. — Arch. der Math. und Phys. 13 (1908), Sitzungsberichte Berl. Math. Ges. 7 (1908), 29—49.

Шура-Бура М. Р.
[1941] К теории бикомпактных пространств. — Матем. сб. 9 (1941), 385—388.

Щепин Е. В.
[1973*] Аксиоматика размерности метрических пространств. — Матем. сб. 92 (1973), № 1, с. 135—141.
[1976*] Топология предельных пространств несчетных обратных спектров. — УМН 31 (1976), № 5, с. 191—226.
[1976a*] Вещественные функции и канонические множества в тихоновских произведениях и топологических группах. — УМН 31 (1976), № 6, с. 17—27.
[1977*] Конечномерный бикомпактный абсолютный окрестностный ретракт метризуем. — ДАН СССР 233 (1977), 304—307.
[1979*] О тихоновских многообразиях. — ДАН СССР 246 (1979), № 3.
[1979a*] О ϰ-метризуемых пространствах. — Изв. АН СССР 43 (1979), № 2.

[1981*] Функторы и несчетные степени компактов. — УМН 36 (1981), № 3, с. 3—62.

[1984*] Мягкие отображения многообразий. — УМН 39 (1984), № 5, с. 209—224.

Эйленберг (Eilenberg S.)

[1934] Sur les transformations continues d'espaces métriques compacts. — Fund. Math. 22 (1934), 292—296.

Эйленберг, Отто (Eilenberg S., Otto E.)

[1938] Quelques propriétés caractéristiques de la théorie de dimension. — Fund. Math. 31 (1938), 149—153.

Эйленберг, Стинрод (Eilenberg S., Steenrod N.)

[1952] Foundations of algebraic topology. — Princeton. 1952. [Русский перевод: Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М.: Физматгиз, 1958.]

Энгелькинг (Engelking R.)

[1963] Quelques remargues concernant les opérations sur les fonctions semi-continues dans les espaces topologiqes. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 11 (1963), 719—726.

[1964] Remarks on real-compact spaces. — Fund. Math. 55 (1964), 303—308.

[1965] Cartesian products and dyadic spaces. — Fund. Math. 57 (1965), 287—304.

[1966] On functions defined on Cartesian products. — Fund. Math. 59 (1966), 221—231.

[1967] On Borel sets and B-measurable functions in metric spaces. — Prace Mat. 10 (1967), 145—149.

[1968] On the double circumference of Alexandroff. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 16 (1968), 629—634.

[1971] Closed mappings on complete metric spaces. — Fund. Math. 70 (1971), 103—107.

[1972] Hausdorff's gaps and limits and compactifications. In: Theory of sets and topology (in honour of Felix Hausdorff). — Berlin, 1972, pp. 89—94.

[1973] Some new proofs in dimension theory. In: Proceedings of the Symposium on General Topology, Rome 1973. — Ist. di Alta Mat. Symposia Math. 16 (1975), 83—91.

[1978] Dimenison theory. — Amsterdam, 1978.

Энгелькинг, Голштынский, Сикорский (Engelking R., Holsztyński W., Sikorski R.)

[1966] Some examples of Borel sets. — Coll. Math. 15 (1966), 271—274.

Энгелькинг, Латцер (Engelking R., Lutzer D. J.)

[1977] Paracompactness in ordered spaces. — Fund. Math. 94 (1977), 49—58.

Энгелькинг, Мрувка (Engelking R,, Mrówka S.)

[1958] On E-compact spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 6 (1958), 429—436.

Энгелькинг, Пелчинский (Engelking R., Pełczyński A.)

[1963] Remarks on dyadic spaces. — Coll. Math. 11 (1963), 55—63.

Эрдёш (Erdös P.)

[1940] The dimension of the rational points in Hilbert space. — Ann. of Math. 41 (1940), 734—736.

Эрдёш, Тарский (Erdös P., Tarski A.)

[1943] On families of mutually exclusive sets. — Ann. of Math. 44 (1943), 315—329.

Юннила (Junnila H. J. K.)

[1978] Stratifiable pre-images of topological spaces. In: Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 23 (Proceedings of Colloquium on Topology, Budapest 1978). — Amsterdam, 1980, pp. 689—703.

Юхас (Juhász I.)
[1969] On closed discrete subspaces of product spaces. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 17 (1969), 219—223.
[1970] Martin's axiom solves Ponomarev's problem. — Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 18 (1970), 71—74.
[1971] Cardinal functions in topology. — Math. Centre Tracts 34, Amsterdam, 1971.
[1971a] Proof of a theorem of H. M. Schaerf. — Math. Balk. 1 (1971), 129—133.
[1980] Cardinal functions in topology — ten years later. — Math. Centre Tracts 123, Amsterdam, 1980.

Юхас, Кунен, Рудин (Juhász I., Kunen K., Rudin M. E.)
[1976] Two more hereditarily separable non-Lindelöf spaces. — Canad. J. of Math. 28 (1976), 998—1005.

Яковлев Н. Н.
[1976*] К теории o-метризуемых пространств. — ДАН СССР 229 (1976), 1330—1332.
[1980*] On bicompacta in Σ-products and related spaces. — Comment. Math. Univ Carol. 21 (1980), 263—283.

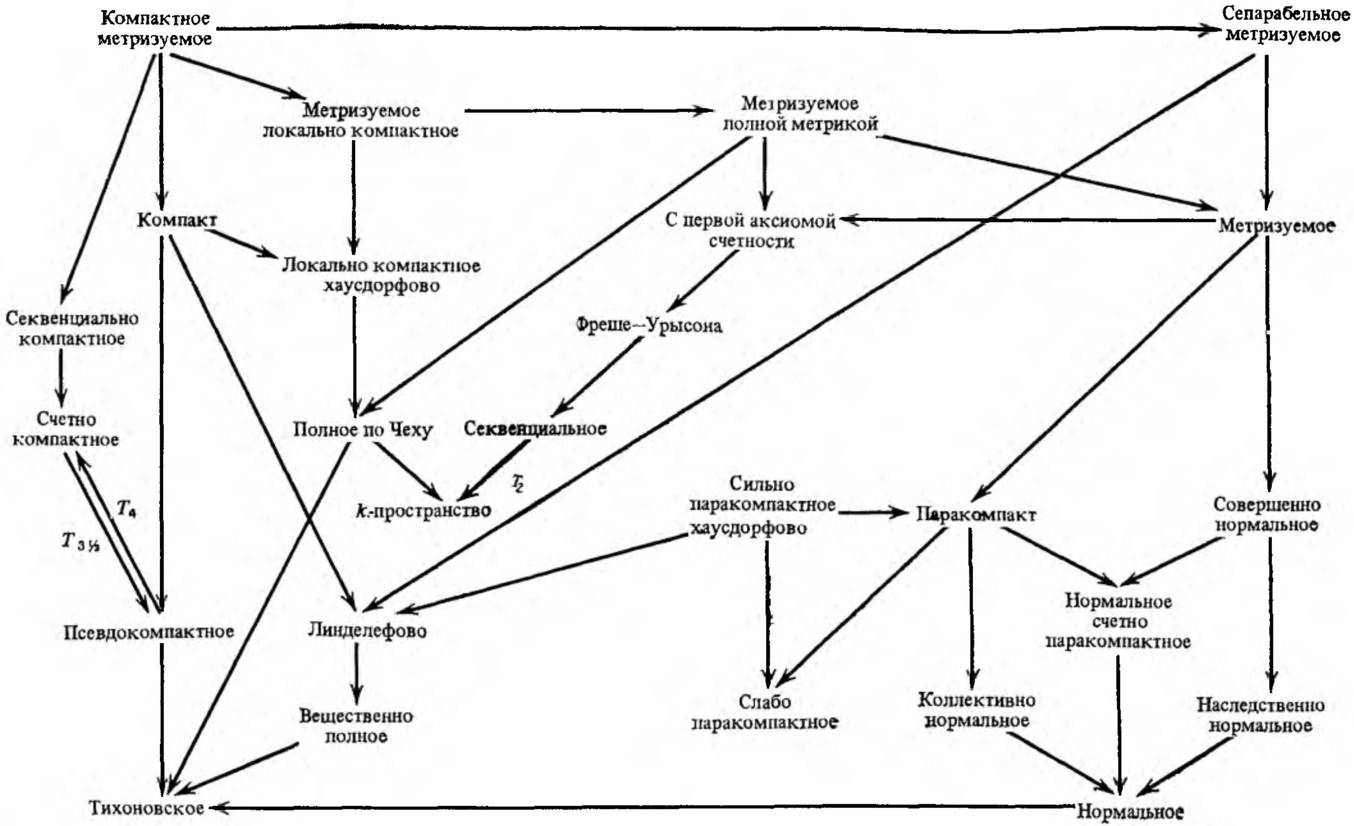
Янишевский (Janiszewski Z.)
[1912] Sur les continus irréductibles entre deux points. — J. École polyt. 16 (1912), 79—170.

Ясуи (Yasui Y.)
[1967] Unions of strongly paracompact spaces. — Proc. Japan Acad. 43 (1967), 263—267.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ



Соотношения между основными классами топологических пространств

	T_0-пространство	T_1-пространство	Хаусдорфово	Регулярное	Тихоновское	Нормальное	Наследственно нормальное	Совершенно нормальное	Характер $\leqslant \lvert m \rvert \geqslant \aleph_0$	Вес $\leqslant \lvert m \rvert \geqslant \aleph_0$	Плотность $\leqslant m \geqslant \aleph_0$	Фреше–Урысона	Секвенциальное
Подпространство	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	–	+	–
Замкнутое подпространство	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+
Открытое подпространство	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+
Конечная сумма	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Сумма	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+
Конечное произведение	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	–
Счетное произведение	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	–
Произведение	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–
Предел обратной последовательности	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	–	–	–
Предел обратного спектра	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–

Инварианты

операций

−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	*k*-пространство
+	+	+	+	+	−	+	−	+	−	Компакт
−	−	−	−	+	+	+	+	+	−	Локально компактное хаусдорфово
−	−	−	−	−	−	+	−	+	−	Счетно компактное
−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	Псевдокомпактное
−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	Секвенциально компактное
−	+	−	+	+	+	+	+	+	−	Полное по Чеху
−	−	−	−	−	−	+	−	+	−	Линделефово
+	+	+	+	+	?	+	−	+	−	Вещественно полное
−	+	−	+	+	+	+	+	+	+	Метризуемое
−	−	−	−	−	+	+	−	+	−	Паракомпакт
−	−	−	−	−	+	+	−	+	−	Коллективно нормальное
−	−	−	−	−	+	+	−	+	−	Счетно паракомпактное
−	−	−	−	−	+	+	−	+	−	Слабо паракомпактное
−	−	−	−	−	+	+	−	+	−	Сильно паракомпактное
−	−	+	+	+	−	−	−	−	−	Связное
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Наследственно несвязное
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Нульмерное
−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	Сильно нульмерное
−	−	−	−	−	+	+	+	−	−	Экстремально несвязное

		T_0-пространство	T_1-пространство	Хаусдорфово	Регулярное	Тихоновское	Нормальное	Наследственно нормальное	Совершенно нормальное	Характер $\leqslant m$	Вес $\leqslant m$	Плотность $\leqslant m$	Фреше–Урысона	Секвенциальное
Сохраняются в сторону образа	Непрерывные	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−
	Факторные	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	+
	Открытые	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+
	Замкнутые	−	+	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+	+
	Открыто-замкнутые	−	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	Совершенные			+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	+
	Открытые совершенные			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Сохраняются в сторону прообраза	Совершенные			+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
	Открытые совершенные			+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Свойства, сохраняемые отображениями

в сторону образа и в сторону прообраза

+	+	+	+	$+_2$	$+_2$	$+_2$	$+_2$	−	k-пространство
+	+	+	+	+	+	$+_2$	$+_2$	$+_2$	Компакт
+	+	+	+	+	−	$+_2$	−	−	Локально компактное хаусдорфово
+	+	+	+	$+_2$	$+_2$	$+_2$	$+_2$	$+_2$	Счетно компактное хаусдорфово
+	−	+	+	+	$+_{3,4}$	$+_{3,4}$	$+_{3,4}$	$+_{3,4}$	Псевдокомпактное
−	−	+	+	$+_2$	$+_2$	$+_2$	$+_2$	$+_2$	Секвенциально компактное хаусдорфово
$+_{3,4}$	$+_{3,4}$	+	$+_{3,4}$	?	−	−	−	−	Полное по Чеху
+	+	+	+	+	+	$+_3$	$+_3$	$+_3$	Линделефово
$+_{3,4}$	$+_{3,4}$	+	−	?	−	−	−	−	Вещественно полное
−	−	+	+	+	−	−	−	−	Метризуемое
+	+	+	+	+	+	−	−	−	Паракомпактное
−	−	+	+	+	+	−	−	−	Коллективно нормальное
+	+	+	+	$+_2$	−	−	−	−	Счетно паракомпактное хаусдорфово
+	+	+	+	$+_2$	$+_2$	−	−	−	Хаусдорфово слабо паракомпактное
+	+	+	−	?	−	−	−	−	Хаусдорфово сильно паракомпактное
+	−	+	+	+	+	+	+	+	Связное
−	−	−	−	−	−	−	−	−	Наследственно несвязное
−	−	+	−	+	−	−	−	−	Нульмерное
−	−	+	−	+	−	−	−	−	Сильно нульмерное
−	−	+	−	+	−	+	−	−	Экстремально несвязное

ОГЛАВЛЕНИЕ