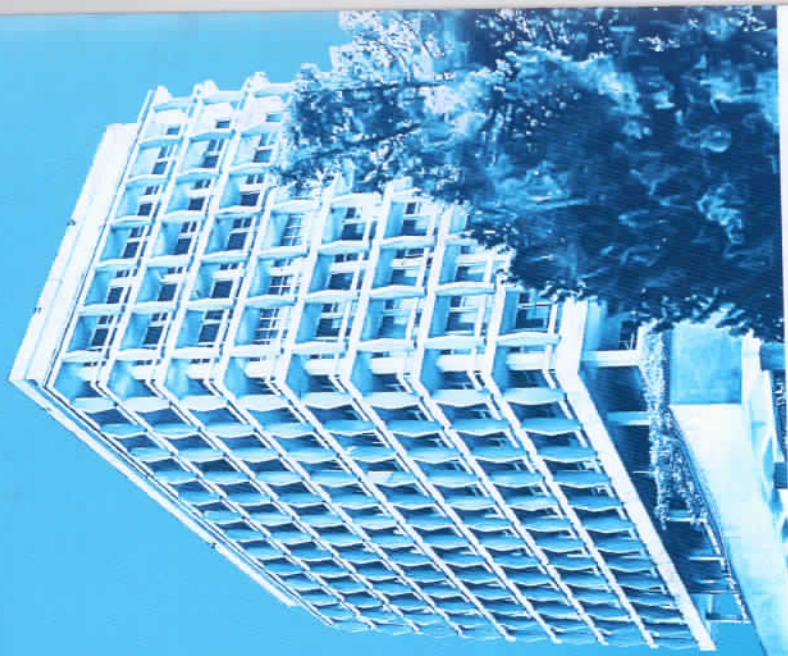




НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА  
МЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА



100 YIL

М.Ш. Маматов, А.М. Байтураев

## СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

Книга должна быть  
возвращена не позже  
указанного здесь срока

| Количество предыдущих<br>выдач |  |
|--------------------------------|--|
|                                |  |

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА  
ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

М.Ш.Маматов  
А.М.Байтураев

**Сборник задач  
по основам геометрии**  
(учебное пособие)



Ташкент  
«Университет»  
2018

М.Ш.Маматов, А.М.Байтураев

Сборник задач по основаниям геометрии. Учебное пособие.  
—Т.: «Университет», 2018. — 120с.

Сборник содержит материалы для практических занятий по курсу «Основания геометрии» для математических направлений университетов. Многие задачи снабжены подробными решениями.

Сборник предназначен для студентов бакалавриатуры, магистратуры и преподавателей.

Тўшам университетларнинг математика йўналишларида “Геометрия асослари” фанидан амалиёт дарслари учун материаллари ўз ичига олган. Кўп ҳолларда масалалар тўлиқ ечимлари билан берилган.

Тўшам бакалавриатура, магистратура талабалари ва ўқитувчиларга мўлжалланган.

The collection contains materials for practical training at the rate of the foundations geometry for mathematical undergraduate, graduate studies at universities. Many tasks are provided with detailed solutions.

The volume is intended for students of undergraduate, graduate and teachers.

#### Рецензенты:

доктор физико-математических наук, проф. А.Я.Нарманов  
кандидат физико-математических наук, доц. Д.Э.Давлатов

ISBN: 978-9943-5280-2-4

© Издательство “Университет”, Ташкент, 2018г.

#### Содержание

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие.....                                                    | 4   |
| 1. «Начала» Евклида и геометрия Лобачевского.....                   | 5   |
| 1.1. Методический очерк обоснования геометрии.....                  | 5   |
| 1.2. Построение линейкой.....                                       | 15  |
| 1.3. Построение с помощью циркуля.....                              | 16  |
| 1.4. Построение циркулем и линейкой.....                            | 19  |
| 1.5. Задачи.....                                                    | 38  |
| 2. Современное аксиоматическое построение евклидовой геометрии..... | 47  |
| 2.1. Аксиомы связи.....                                             | 47  |
| 2.2. Аксиомы порядка.....                                           | 55  |
| 2.3. Аксиомы движения.....                                          | 66  |
| 2.4. Аксиома непрерывности.....                                     | 89  |
| 2.5. Аксиома параллельности.....                                    | 99  |
| 2.6. Разные задачи.....                                             | 109 |
| Литература.....                                                     | 119 |

## Предисловие

Сборник содержит задачи по курсу «Основания геометрии» в соответствии с программой, принятой для математических направлений университетов.

В начале каждого параграфа изложены основные лекционные материалы, методы, необходимые для решения задач этого параграфа, даны ссылки на соответствующие учебники. В ряде случаев приведены подробные решения типовых задач.

В учебном пособии, в частности, были использованы книги: [1] А.В.Погорелов, Основания геометрии, М., Наука, 1968.; [2] А.В.Погорелов, Геометрия, учебник для 7-11 классов М., Просвещение, 2002.; [3] В.В.Прасолов, Задачи по планиметрии, ч. I, II, М., Наука, 1986.; [4] В.В.Прасолов, И.Ф.Шарыгин, Задачи по стереометрии, М., Наука, 1989.

## 1. «Начала» Евклида и геометрия Лобачевского

### 1.1. Методический очерк обоснования геометрии

А. Геометрия как эмпирическая наука в ранний период достигла особенно высокого уровня развития в Египте в связи с землемерными и строительными работами.

В первом тысячелетии до н.э. геометрические сведения от египтян перешли к грекам, в Греции начался новый этап в развитии геометрии. За период с VII по III век до н.э. греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми фактами, но предприняли также серьезные шаги к строгому ее логическому обоснованию.

Многовековая работа греческих геометров за этот период была подготовлена и систематизирована Евклидом (330-275 гг. до н.э.) в его знаменитом труде «Начала». Это сочинение дает первое дошедшее до нас строгое логическое построение геометрии. В нем изложение было настолько безупречно для своего времени, что в течение двух тысяч лет в моменты появления «Начал» оно было единственным руководством для изучающих геометрию.

«Начала» включают тринадцать книг, из коих собственно геометрии посвящены книги I-IV и VI, где излагается планиметрия, а также XI-XIII, охватывающие стереометрию. Остальные книги «Начал» посвящены арифметике в геометрическом изложении.

Каждая книга «Начал» начинается определением понятий, которые встречаются впервые. Так, например, в первой книге даны 23 определения. В частности,

Определение 1. Точка есть то, что не имеет частей.

Определение 2. Линия есть длина без ширины.

Определение 4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.

В первой книге «Начал» за определениями следуют постулаты и аксиомы. Например:

Постулат I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.

Постулат V. Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые

пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиома I. Равные порознь третьему равны между собой.

Аксиома II. Если к равным прибавим равные, то получим равные.

Евклид не сумел последовательно провести аксиоматическую точку зрения. Его список аксиом был неполным. Многие поколения математиков стремились улучшить евклидову аксиоматику геометрии. Большую роль сыграли работы современника Евклида, древнегреческого *Архимеда*, который сформулировал аксиомы, относящиеся к измерению геометрических величин.

Наиболее сложной из аксиом Евклида была аксиома параллельности. Многие теоремы (например, в равнобедренном треугольнике углы при основании равны) выражают более простые факты. Неудивительно, что многие математики пытались доказать, что эта аксиома является лишней, т.е. может быть доказана как теорема на основании остальных аксиом. То, что такого доказательства не существует, было установлено лишь через два тысячелетия после Евклида. Это открытие принадлежит профессору Казанского университета Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792-1856).

Лобачевский сделал допущение, что через точку  $A$ , не принадлежащую прямой  $a$ , можно провести в плоскости более одной прямой, не пересекающейся с  $a$  (рис.1.1.1).

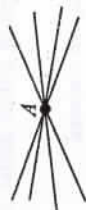


Рис.1.1.1

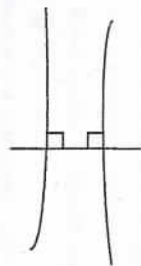


Рис.1.1.2

Он начал выводить различные следствия из этого допущения, надеясь, что рано или поздно он придет к противоречию, чем и завершится доказательство. Однако он доказал много десятков теорем, не обнаружив логических противоречий. И тогда Лобачевскому пришла в голову гениальная догадка: заменив аксиому параллельности

ее отрицанием и сохранив все остальные аксиомы, мы получаем новую геометрию. Лобачевский назвал ее «воображаемой».

Все теоремы, доказываемые в евклидовой геометрии без использования аксиомы параллельности, сохраняются и в геометрии Лобачевского. Например, углы при основании равнобедренного треугольника равны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр. Теоремы же, при доказательстве которых применяется аксиома параллельности, в геометрии Лобачевского видоизменяются. Например, в геометрии Лобачевского сумма углов *любого* треугольника *меньше*  $180^\circ$ . В этой геометрии не существует подобных треугольников (не равных между собой): если углы двух треугольников соответственно равны, то в геометрии Лобачевского эти треугольники равны. Две прямые, имеющие общий перпендикуляр, неограниченно отходят друг от друга (как неограниченные линии на рис.1.1.2). Имеется в геометрии Лобачевского и много других удивительных теорем.

Математический мир не воспринял идей Лобачевского. Ученые не были подготовлены к мысли о том, что может существовать геометрия, отличная от евклидовой. Мужественно отстаивая правоту своих идей, Лобачевский опубликовал ряд книг и статей об открытой им геометрии. Он умер в 1856 г., так и не добившись признания своих идей.

Были, однако, два человека, которые придерживались такой же точки зрения, и более того, поделили с Лобачевским заслугу открытия неевклидовой геометрии. Это были венгерский математик Я.Бойяи (1802-1860) и «король математики» К.Ф.Гаусс (1777-1855). Работа Я.Бойяи, в которой он излагал идеи новой геометрии, несколько иначе и не столь полно, вышла на несколько лет позже первой книги Лобачевского. Когда Бойяи узнал о трудах Лобачевского, он изучил русский язык, чтобы их прочитать. Непризнание и мысль, что Лобачевский опередил его в этом открытии, сломили душевные силы Бойяи, жизнь его была недолгой.

То, что Гаусс владел идеями неевклидовой геометрии, было обнаружено лишь после смерти ученого, при изучении его архива. Гениальный Гаусс, к мнениям которого прислушивались все, не рискнул опубликовать свои работы или выступить в поддержку