**2-Mavzu: Koshi teoremasi, Lopital qoidasi.**

**Reja:**

1. **Koshi teoremasi**
2. **Darbu teoremasi**.
3. **Lopital qoidasi**

**Koshi teoremasi**

**4-teorema** (Koshi teoremasi). Agar [*a,b*] kesmada *f(x)* va *g(x)* berilgan bo‘lib,

1) [*a,b*] da uzluksiz;

2) (*a,b*) intervalda *f’(x)* va *g’(x)* mavjud, hamda *g’(x)≠*0 bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday *c* (*a<c<b*) nuqta topilib,

 (4)

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

**Isboti.** Ravshanki, (4) tenglik ma’noga ega bo‘lishi uchun *g(b)≠g(a)* bo‘lishi kerak. Bu esa teoremadagi *g’(x)≠*0, *x*∈(*a;b*) shartdan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar *g(a)=g(b)* bo‘lsa, u holda *g(x)* funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biror *c∈(a;b)* nuqtada *g’(c)=0* bo‘lar edi. Bu esa ∀*x∈(a;b)* da *g’(x)≠0* shartga ziddir. Demak, *g(b)≠g(a).*

Endi yordamchi

 funksiyani tuzaylik.

Shartga ko‘ra *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [*a,b*] da uzluksiz va (*a,b*) intervalda differensiyalanuvchi bo‘lgani uchun *F(x)* birinchidan [*a,b*] kesmada uzluksiz funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida uzluksiz, ikkinchidan (*a,b*) intervalda



hosilaga ega.

So‘ngra *F(x)* funksiyaning *x=a* va *x=b* nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: *F(a)=F(b)=*0. Demak, *F(x)* funksiya [*a,b*] kesmada Roll teoremasiinng barcha shartlarini qanoailantiradi. Shuning uchun hech bo‘lmaganda bitta shunday *c* (*a<c<b*) nuqta topiladiki, *F’(c)=*0 bo‘ladi.

Shunday qilib,



va bundan (4) tenglikning o‘rinli ekani kelib chiqadi. Isbot tugadi.

Isbotlangan (4) tenglik Koshi formulasi deb ham ataladi.

 Endi Koshi teoremasining geometrik ma’nosini aniqlaymiz. Aytaylik *x=ϕ(t),* *y=f(t), a≤t≤b* tekislikdagi chiziqning parametrik tenglamasi bo‘lsin. Shuningdek chiziqda *t=a* ga mos keluvchi nuqtani *A(ϕ(a),f(a)),* *t=b* ga mos keluvchi nuqtani *B(ϕ(b),f(b))* kabi belgilaylik. (22-rasm).

U holda (4) formulaning chap qismi 22-rasm

*AB* vatarning burchak koeffitsientini, o‘ng tomoni esa egri chiziqqa parametrning *t=c* qiymatiga mos keladigan nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini anglatadi. Demak, Koshi formulasi *AB* yoyning *AB* vatarga parallel bo‘lgan urinmasining mavjudligini ta’kidlaydi ekan.

*Misol.* Ushbu *f(x)=x2* va *ϕ(x)*= funksiyalar uchun [0,4] kesmada Koshi formulasini yozing va *s* ni toping.

*Yechish.* berilgan funksiyalarning kesma uchlaridagi qiymatlari va hosilalarini topamiz: *f*(0)=0, *f*(4)=16, *ϕ*(0)=0, *ϕ*(4)=2; *f’(x)=*2*x*, *ϕ’(x)=.* Bulardan foydalanib Koshi formulasini yozamiz:

, bundan 4*s*=8 yoki *s*=2. Demak *s*=.

**1.5.** **Darbu teoremasi**.

**5-teorema.** Agar *f(x)* funksiya biror oraliqda  hosilaga ega bo‘lib, shu oraliqqa tegishli bo‘lgan *x=a*, *x=b* nuqtalarda  bo‘lsa, u holda bu oraliqda  funksiya *A* va *B* sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi, ya’ni *A* va *B* sonlar orasidan olingan har qanday *C* soni uchun (*a,b*) intervalga tegishli bo‘lgan kamida bitta *c* nuqta topilib,  bo‘ladi.

**Isboti.** Avval teoremaning maxsus holini – *A* va *B* har xil ishorali bo‘lgan - holini isbotlaymiz. Aniqlik uchun *A*>0, *B*<0 bo‘lsin. U holda (*a,b*) intervalga tegishli bo‘lgan kamida bitta *c* nuqta topilib,  bo‘lishini isbotlashimiz lozim.

Teorema shartiga ko‘ra *f(x)* funksiya [*a;b*] kesmada hosilaga ega, demak bu kesmada uzluksiz. U holda Veyershtrass teoremasiga ko‘ra *f(x)* funksiya [a;b] kesmaning kamida bitta *c* nuqtasida eng katta qiymatiga erishadi. Bu nuqta *a* nuqtadan ham, *b* nuqtadan ham farqli. Haqiqatan ham,



bo‘lganligi sababli, argument orttirmasi absolyut qiymat jihatdan yetarlicha kichik bo‘lganda  tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan  bo‘lganda *f*(*a*+Δ*x*)-*f*(*a*)>0 yoki *f*(*a*+Δ*x*)>*f*(*a*) munosabat o‘rinli. Demak, *f*(*a*) qiymat *f(x)* funksiya [*a;b*] kesmadagi eng katta qiymati bo‘la olmaydi. Shunday qilib, *a≠c.*

Huddi shunga o‘xshash,



munosabatdan foydalanib, *c≠b* ekanligi isbotlanadi.

Demak, *a*<*c*<*b*. U holda Ferma teoremasiga ko‘ra  bo‘ladi.

Endi teoremani umumiy holda isbotlaymiz. Aytaylik *A* va *B* biri ikkinchisiga teng bo‘lmagan sonlar bo‘lsin. Aniqlik uchun *A*>*B* deb olamiz. *A*>*C*>*B* shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy *C* sonni tayinlab olamiz va ushbu  yordamchi funksiyani tuzamiz. *F*(*x*) funksiya ham *f*(*x*) funksiya kabi [*a;b*] kesmada hosilaga ega: . Shu hosilaning [*a;b*] kesma uchlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz:

; .

Demak,  hosila [*a;b*] kesma uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qiladi. U holda yuqorida isbotlaganimizga ko‘ra kamida bitta *c* (*a*<*c*<*b*) nuqta topilib, , ya’ni  bo‘ladi. Bundan  kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

**Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari**

Tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo‘lganda , , 0⋅∞, ∞-∞, 1∞, 00, ∞0 ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasi engillashadi. Odatda hosilalardan foydalanib, aniqmasliklarni ochish Lopital qoidalari deb ataladi. Biz quyida Lopital qoidalarining bayoni bilan shug‘ullanamiz.

**2.1.  ko‘rinishdagi aniqmaslik.** Ma’lumki, *x*→0 da *f(x)→*0 va *g(x)→*0 bo‘lsa,  nisbat  ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Ko‘pincha *x→a* da  nisbatning limitini topishga qaraganda  nisbatning limitini topish oson bo‘ladi. Bu nisbatlar limitlarining teng bo‘lish sharti quyidagi teoremada ifodalangan.

**1-teorema**. Agar

1) *f(x)* va *g(x)* funksiyalar *(a-δ;a)∪(a;a+δ),* bu yerda *δ*>0, to‘plamda uzluksiz, differensiallanuvchi va shu to‘plamdan olingan ixtiyoriy *x* uchun *g(x)*≠0, *g’(x)≠0*;

2) ;

3) hosilalar nisbatining limiti (chekli yoki cheksiz)

=*A*

mavjud bo‘lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti  mavjud va

= (1)

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

**Isboti.** Har ikkala funksiyani *x=a* nuqtada *f(a)=0*, *g(a)=0* deb aniqlasak, natijada ikkinchi shartga ko‘ra *f(x)=0=f(a), g(x)=0=g(a)*  tengliklar o‘rinli bo‘lib, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar *x=a* nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Avval *x>a* holni qaraymiz. Berilgan *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [*a;x*], bu yerda *x<a+δ,* kesmada Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun *a* bilan *x* orasida shunday *s* nuqta topiladiki, ushbu  tenglik o‘rinli bo‘ladi. *f(a)=g(a)=0* ekanligini e’tiborga olsak, so‘ngi tenglikdan

 (2)

bo‘lishi kelib chiqadi. Ravshanki, *a<c<x* bo‘lganligi sababli, *x→a* bo‘lganda *c→a* bo‘ladi. Teoremaning 3-sharti va (2) tenglikdan ==*A* kelib chiqadi.

Shunga o‘xshash, *x<a* holni ham qaraladi. Teorema isbot bo‘ldi.

*Misol*. Ushbu  limitni hisoblang.

*Yechish.* Bu holda  bo‘lib, ular uchun 1- teoremaning barcha shartlari bajariladi.

Haqiqatan ham,

1) , ;

2) ;

3)  bo‘ladi.

Demak, 1-teoremaga binoan .

**1-eslatma**. Shuni ta’kidlash kerakki, berilgan funksiyalar nisbatining limiti 3) shart bajarilmasa ham mavjud bo‘lishi mumkin, ya’ni 3) shart yetarli bo‘lib, zaruriy emas.

Masalan,  funksiyalar (0;1] da 1), 2) shartlarni qanoatlantiradi va , lekin

 mavjud emas, chunki  *n*→∞ da



 *n→*∞ da esa

.

**2-teorema**. Agar [*c*;+∞) nurda aniqlangan *f(x)* va *g(x)* funksiyalar berilgan bo‘lib,

1) (*c*;+∞) da chekli *f’(x)* va *g’(x)* hosilalar mavjud va *g’(x)≠*0,

2) ;

3) hosilalar nisbatining limiti  ( chekli yoki cheksiz) mavjud bo‘lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti  mavjud va

= (3)

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

**Isboti**. Umumiylikni saqlagan holda, teoremadagi *c* sonni musbat deb olish mumkin. Quyidagi  formula yordamida *x* o‘zgaruvchini *t* o‘zgaruvchiga almashtiramiz. U holda *x*→+∞ da *t*→0 bo‘ladi. Natijada *f(x)* va *g(x)* funksiyalar *t* o‘zgaruvchising  va  funksiyalari bo‘lib, ular (0,] da aniqlangan. Teoremadagi (2) shartga asosan

 bo‘ladi.

Ushbu,



munosabatlardan  intervalda  hosilalarning mavjudligi kelib chiqadi. So‘ngra teoremaning 3) shartiga ko‘ra



Demak  va  funksiyalarga 1-teoremani qo‘llash mumkin. Bunda = e’tiborga olsak, (3) tenglikning o‘rinliligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

**2.2.  ko‘rinishdagi aniqmaslik**. Agar *x*→*a* da *f(x)→∞,* *g(x)*→∞ bo‘lsa,  nisbat  ko‘rinishidagi aniqmaslikni ifodalaydi. Endi bunday aniqmaslikni ochishda ham *f(x)* va *g(x)* funksiyalarning hosilalaridan foydalanish mumkinligini ko‘rsatadigan teoremani keltiramiz.

**3-teorema**. Agar

1) *f(x)* va *g(x)* funksiyalar (*a*;∞) nurda differensiallanuvchi, hamda *g’(x)≠*0,

2) 

3)  mavjud bo‘lsa,

u holda  mavjud va = bo‘ladi.

**Isboti**. Teorema shartiga ko‘ra  mavjud. Aytaylik =*μ* bo‘lsin. U holda ∀*ε*>0 sonni olsak ham shunday *N*>0 son topilib, *x≥N* bo‘lganda

 (3)

tengsizliklar bajariladi. Umumiylikni cheklamagan holda *N*>*a* deb olishimiz mumkin. U holda *x*≥*N* tengsizlikdan *x∈(a;∞)* kelib chiqadi*.*

Aytaylik *x>N* bo‘lsin. U holda [*N;x*] kesmada *f(x)* va *g(x)* funksiyalarga Koshi teoremasini qo‘llanib quyidagiga ega bo‘lamiz:

, bu yerda *N<c<x*.

Endi *c>N* bo‘lganligi sababli *x=c* da (3) tengsizliklar o‘rinli:

,

bundan esa



tengsizliklarga ega bo‘lamiz.

Teorema shartiga ko‘ra   *f(N)* va *g(N)* lar esa chekli sonlar. Shu sababli *x* ning yetarlicha katta qiymatlarida  kasr  kasrdan istalgancha kam farq qiladi. U holda shunday *M* soni topilib, *x*≥*M* larda

*μ-ε<<μ+ε* (4)

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy *ε>0* son uchun shunday *M* soni mavjudki, barcha *x≥M* larda (4) tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu esa =*μ* ekanligini anglatadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Yuqorida isbotlangan teorema *x→a* (*a*-son) holda ham o‘rinli. Buni isbotlash uchun *t*= almashtirish bajarish yetarli.

*Misol*. Ushbu  limitni hisoblang.

*Yechish*. *f(x)=lnx, g(x)=x* funksiyalar uchun 3-teorema shartlarini tekshiramiz: 1) bu funksiyalar (0,+∞) da differensiallanuvchi; 2) *f’(x)=1/x* *g’(x)*=1; 3) =0, ya’ni mavjud. Demak, izlanayotgan limit ham mavjud va =0 tenglik o‘rinli.

**Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari**

**3.1 ilova**

***O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar***

1. Ferma teoremasini ayting. Uning geometrik ma’nosi nimadan iborat?

2. Roll teoremasini ayting. Uning geometrik ma’nosi nimadan iborat?

3. Roll teoremasining shartlarini ayting. Ularning zaruriy shart ekanligini misollarda tushuntiring.

4. Lagranj teoremasini ayting. Uning geometrik ma’nosi nimadan iborat?

5. Lagranj teoremasi shartlarining har biri zaruriy shart ekanligini misollarda tushuntiring.

6. Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekanligini ko‘rsating.

7. Koshi teoremasini ayting.

8. Koshi teoremasidan Lagranj teoremasini keltirib chiqaring.

9. Darbu teoremasini ayting.

10. Nima uchun Ferma, Roll, Lagranj, Koshi, Darbu teoremalari o‘rta qiymat haqidagi teoremalar deyiladi?

**3.2 ilova**

***Mustaqil yechish uchun misol va masalalar***

1. Ushbu *f(x)=x3+5x2-6x* funksiya [0;1] kesmada berilgan. Bu funksiyaga shu kesmada Roll teoremasini tatbiq qilib bo‘ladimi? Agar tatbiq qilish mumkin bo‘lsa, teoremadagi *c* nimaga teng?

2. Ushbu *f(x)=x2-4x-5* funksiya ildizlari orasida uning hosilasining ildizi mavjudligini isbotlang, uni toping. Bu natijaga geometrik talqin bering.

3. Ushbu *x3+3x+5=0* tenglamaning haqiqiy ildizi yagona ekanligini isbotlang.

4. Ushbu *f(x)=lnx* funksiya [1;*e*] kesmada berilgan. Bu funksiyaga shu kesmada Lagranj teoremasini tatbiq qilib bo‘ladimi? Agar tatbiq qilish mumkin bo‘lsa, Lagranj formulasidagi *c*  nimaga teng?

5. Berilgan *y=4-x2* egri chiziqning qaysi nuqtasida o‘tkazilgan urinmasi *A*(-2;0) va *B*(1;3) nuqtalardan o‘tadigan vatariga parallel bo‘ladi?

6. Nima uchun *y=x+|sinx*| funksiyaga [-1;1] kesmada Lagranj teoremasini tatbiq qilib bo‘lmaydi? Chizmasini chizing.

7. Lagranj formulasidan foydalanib *x2>x1* bo‘lganda *arctgx2-arctgx1≤x2-x1* ekanligini isbotlang.

8. Agar *f(x)=x3, g(x)=x2+1* bo‘lsa, u holda bu funksiyalar uchun [1;2] kesmada Koshi formulasini yozish mumkinmi? Yozish mumkin bo‘lsa, *c* ni toping.

**Javoblar:** 1. ; 4. *c=e*-1; 5. *x*=-0,5; 8. *c*=14/9.

Foydalanilgan adabiyotlar  
1. Toshmetov O’., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -97-99 b.  
2. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.- 96-102p.  
3. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. I T.:«Voris-nashriyot». 2010 y. 85–91 b.