**3-Mavzu: Teylor formulasi. Ba’zi-bir elementar funksiyalar uchun Teylor formulasi.**

**REJA**

**1. Teylor formulasi.**

**2.Teylor ko‘phadi. Peano ko‘rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi.**

**3. Teylor formulasining Lagranj ko‘rinishdagi qoldiq hadi.**

**4. Teylor formulasining Koshi ko‘rinishidagi qoldiq hadi tushunchalar.**

Teylor formulasi matematik analizning eng muhim formulalaridan biri bo‘lib, ko‘plab nazariy tatbiqlarga ega. U taqribiy hisobning negizini tashkil qiladi.

**3.1. Teylor ko‘phadi. Peano ko‘rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi.** Ma’lumki, funksiyaning qiymatlarini hisoblash ma’nosida ko‘phadlar eng sodda funksiyalar hisoblanadi. Shu sababli funksiyaning *x0* nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun uni shu nuqta atrofida ko‘phad bilan almashtirish muammosi paydo bo‘ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya ta’rifiga ko‘ra, agar *y=f(x)* funksiya *x0* nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini *Δf(x0)=f’(x0)Δx+o(Δx),* ya’ni

*f(x)=f(x0)+f’(x0)(x-x0)+o(x-x0)*

ko‘rinishda yozish mumkin.

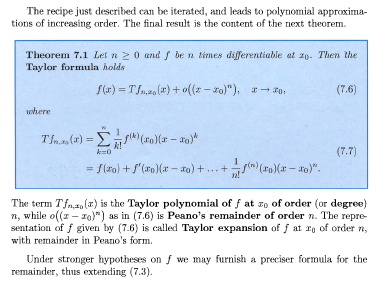
Boshqacha aytganda *x0* nuqtada differensiallanuvchi *y=f(x)* funksiya uchun birinchi darajali

*P1(x)=f(x0)+b1(x-x0)* (1)

ko‘phad mavjud bo‘lib, *x→x0* da *f(x)=P1(x)+o(x-x0)* bo‘ladi. Shuningdek, bu ko‘phad *P1(x0)=f(x0), P1’(x0)=b=f’(x0)* shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi umumiyroq masalani qaraylik. Agar *x=x0* nuqtaning biror atrofida aniqlangan *y=f(x)* funksiya shu nuqtada *f’(x), f’’(x), ..., f(n)(x)* hosilalarga ega bo‘lsa, u holda

*f(x)=Pn(x)+ o((x-x0)n)* (2)



shartni qanoatlantiradigan darajasi *n* dan katta bo‘lmagan *Pn(x)* ko‘phad mavjudmi?[[1]](#footnote-1)

Bunday ko‘phadni

*Pn(x)=b0+b1(x-x0)+b2(x-x0)2+ ... +bn(x-x0)n*, (3)

ko‘rinishda izlaymiz. Noma’lum bo‘lgan *b0, b1, b2, ..., bn* koeffitsientlarni topishda

*Pn(x0)=f(x0), Pn’(x0)=f’(x0), Pn’’(x0)=f’’(x0), ..., Pn(n)(x0)=f(n)(x0)* (4)

shartlardan foydalanamiz. Avval *Pn(x)* ko‘phadning hosilalarini topamiz:

*Pn’(x)=b1+2b2(x-x0)+3b3(x-x0)2+ ... +nbn(x-x0)n-1,*

*Pn’’(x)=2⋅1b2+3⋅2b3(x-x0)+ ... +n⋅(n-1)bn(x-x0)n-2,*

*Pn’’’(x)=3⋅2⋅1b3+ ... +n⋅(n-1)⋅(n-2)bn(x-x0)n-3,*

*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,*

*Pn(n)(x)=n⋅(n-1)⋅(n-2)⋅...⋅2⋅1bn.*

Yuqorida olingan tengliklar va (3) tenglikning har ikkala tomoniga *x* o‘rniga *x0* ni qo‘yib barcha *b0, b1, b2, ..., bn* koeffitsientlar qiymatlarini topamiz:

*Pn(x0)=f(x0)=b0,*

*Pn’(x0)=f’(x0)=b1,*

*Pn’’(x0)=f’’(x0)=2⋅1b2=2!b2,*

*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .*

*Pn(n)(x0)=f(n)(x0)=n⋅(n-1)⋅...⋅2⋅1bn=n!bn*

Bulardan *b0=f(x0), b1=f’(x0), b2=f’’(x0), . . ., bn=f(n)(x0)* hosil qilamiz. Topilgan natijalarni (3) qo‘yamiz va

*Pn(x)= f(x0)+ f’(x0)(x-x0)+ f’’(x0)(x-x0)2+ ... +f(n)(x0)(x-x0)n,* (5)

ko‘rinishda ko‘phadni hosil qilamiz. Bu ko‘phad *Teylor ko‘phadi* deb ataladi.

Teylor ko‘phadi (2) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Funksiya va Teylor ko‘phadi ayirmasini *Rn(x)* orqali belgilaymiz: *Rn(x)=f(x)-Pn(x).* (4) shartlardan *Rn(x0)=Rn’(x0)=...= Rn(n)(x0)=0* bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi *Rn(x)=o((x-x0)n),* ya’ni =0 ekanligini ko‘rsatamiz. Agar *x→x0* bo‘lsa,  ifodaning 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik ekanligini ko‘rish qiyin emas. Unga Lopital qoidasini *n* marta tatbiq qilamiz. U holda

==…==

===0, demak *x→x0* da *Rn(x)=o((x-x0)n)* o‘rinli ekan.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

**Teorema**. Agar *y=f(x)* funksiya *x0* nuqtaning biror atrofida *n* marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda *x→x0* da quyidagi formula

*f(x)= f(x0)+ f’(x0)(x-x0)+ f’’(x0)(x-x0)2+ ... +f(n)(x0)(x-x0)n+o((x-x0)n)* (3.6)

o‘rinli bo‘ladi.

Bu yerda *Rn(x)=o((x-x0)n)* *Peano ko‘rinishidagi qoldiq had* deyiladi.

Agar (6) formulada *x0*=0 deb olsak, Teylor formulasining xususiy holi hosil bo‘ladi:

*f(x)=f(0)+ f’(0)x+ f’’(0)x2+ ... +f(n)(0)xn+o(xn).* (7)

Bu formula *Makloren formulasi* deb ataladi.

**3.2. Teylor formulasining Lagranj ko‘rinishdagi qoldiq hadi.** Teylor formulasi *Rn(x)* qoldiq hadi yozilishining turli ko‘rinishlari mavjud. Biz uning Lagranj ko‘rinishi bilan tanishamiz.

Qaralayotgan *f(x)* funksiya *x0* nuqta atrofida *n+1* –tartibli hosilaga ega bo‘lsin deb talab qilamiz va yangi *g(x)=(x-x0)n+1* funksiyani kiritamiz. Ravshanki,

*g(x0)=g’(x0)=...= g(n)(x0)=0; g(n+1)(x0)=(n+1)!≠0.*

Ushbu *Rn(x)=f(x)-Pn(x)* va *g(x)=(x-x0)n+1* funksiyalarga Koshi teoremasini tatbiq qilamiz. Bunda *Rn(x0)= Rn’(x0)=...= Rn(n)(x0)=0* e’tiborga olib, quyidagini topamiz:



,

bu yerda *c1∈(x0;x); c2∈(x0;c1); ... ; cn∈(x0;cn-1); ξ∈(x0;cn)⊂ (x0;x).*

Shunday qilib, biz  ekanligini ko‘rsatdik, bu yerda ξ∈(*x0;x*). Endi *g(x)=(x-x0)n+1, g(n+1)(ξ)=(n+1)!, Rn(n+1)(ξ)=f(n+1)(ξ)* ekanligini e’tiborga olsak quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

*Rn(x)=,* *ξ∈(x0;x).* (8)

Bu (8) formulani Teylor formulasining *Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadi* deb ataladi.

Lagranj ko‘rinishdagi qoldiq hadni

*Rn(x)=* (9)

ko‘rinishda ham yozish mumkin, bu yerda *θ* birdan kichik bo‘lgan musbat son, ya’ni 0<*θ*<1.

Shunday qilib, *f(x)* funksiyaning Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi kuyidagi shaklda yoziladi:

*f(x)=f(x0) + f’(x0)(x-x0) + f’’(x0)(x-x0)2 + ...*

*+ f(n)(x0)(x-x0)n + ,* bu yerda *ξ∈(x0;x).*

Agar *x0=0* bo‘lsa, u holda *ξ=x0+θ(x-x0)=θx*, bu yerda 0<*θ*<1, bo‘lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

*f(x)=f(0)+ f’(0)x+ f’’(0)x2+ ... +f(n)(0)xn+* (10)

shaklida yoziladi.

**3.3. Teylor formulasining Koshi ko‘rinishidagi qoldiq hadi.** Teylor formulasi qoldiq hadining boshqa ko‘rinishlariga misol tariqasida Koshi ko‘rinishidagi qoldiq hadni keltirish mumkin. Buning uchun



yordamchi funksiyani tuzib olamiz va [*x0;x*] segmentda uzluksiz, (*x0;x*) intervalda esa noldan farqli chekli hosilaga ega bo‘lgan biror *ψ(t)* funksiyani olib, bu funksiyalarga Koshi teoremasini qo‘llasak,

 (11)

ko‘rinishdagi qoldiq hadni chiqarish mumkin.

Agar (11) formulada *ψ(t)* funksiya sifatida *ψ(t)=x-t* funksiya olinsa, natijada *Koshi shaklidagi qoldiq hadni* hosil qilamiz:



**4-§. Ba’zi bir elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi**

**4.1. *ex* funksiya uchun Makloren formulasi.** *f(x)=ex* funksiyaning (-∞;+∞) oraliqda barcha tartibli hosilalari mavjud: *f(k)(x)=ex, k=1, 2, ..., n+1.* Bundan *x*=0 da *f(k)(0)=1, k=1, 2, ..., n*; *f(n+1)(θx)=eθx* va *f(0)=*1 hosil bo‘ladi. Olingan natijalarni 3-§ dagi (10) formulaga qo‘yib

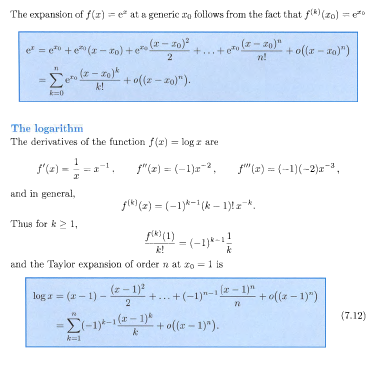
 (1)

bu yerda 0<*θ*<1, formulaga ega bo‘lamiz[[2]](#footnote-2).

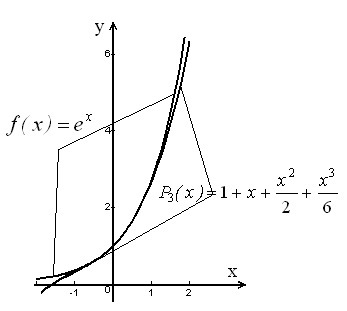
23-rasmda  funksiya va *P3(x)* ko‘phad funksiyaning grafiklari keltirilgan.

Agar *x*=1 bo‘lsa,

 (2)



formulani hosil qilamiz. Bu formula yordamida *e* sonining irratsionalligini isbot qilish mumkin.



23-rasm

Haqiqatan ham, faraz qilaylik,  - ratsional son bo‘lsin. Bunda e>1 bo‘lganligi uchun *p>q* bo‘ladi. (2) da  desak,



Bu tenglikning ikkala tomonini *n!* ga ko‘paytirsak quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

 (3)

Bu yerda *n* sonni *r* dan katta deb olishimiz mumkin. U holda θ<1, *p>q* bo‘lganligi uchun

 (4)

bo‘ladi. Shuningdek, *n>p>q* bo‘lganligi uchun *n!* -butun son, chunki *n!* da *q* ga teng bo‘lgan ko‘paytuvchi uchraydi.

Ravshanki,



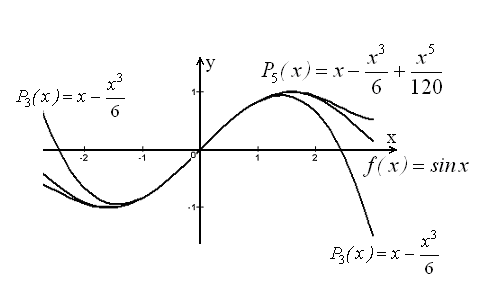
ko‘rinishdagi yig‘indi ham butun son bo‘ladi. Demak, *n>p* uchun (3) tenglikning chap tomoni musbat butun son, o‘ng tomoni esa (4) ga ko‘ra birdan kichik musbat son bo‘ladi. Bu kelib chiqqan ziddiyat *e*  sonining ratsional son deb faraz qilishimizning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi. Shuning uchun *e –* irratsional son bo‘ladi.

**2. Sinus funksiya uchun Makloren formulasi.** *f(x)=sinx* funksiyaning istalgan tartibli hosilasi mavjud va *n*-tartibli hosila uchun quyidagi formula o‘rinli edi (I.8-§): . *x*=0 da *f*(0)=0 va

.

Shuning uchun 3-§ dagi (10) formulaga ko‘ra

 (5) ko‘rinishdagi yoyilmaga ega bo‘lamiz.



24-rasm

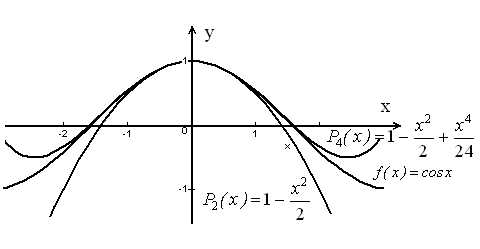
24-rasmda *f(x)=sinx, P3(x), P5(x)* funksiyalarning grafiklari keltirilgan.

**4.3*.* Kosinus funksiya uchun Makloren formulasi.** Ma’lumki, *f(x)=cosx* funksiyaning *n*-tartibli hosilasi uchun  formulaga egamiz (I.8-§). *x*=0 da *f*(0)=1 va 

Demak, *cosx*  funksiya uchun quyidagi formula o‘rinli:

 (6)

25-rasmda *f(x)=cosx, P2(x), P4(x)* funksiyalarning grafiklari keltirilgan.



25-rasm

**4.4. *f(x)=(1+x)μ* (*μ∈*)** **funksiya uchun Makloren formulasi.** Bu funksiya (-1;1) intervalda aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi. Uni Makloren formulasiga yoyish uchun *f(x)=(1+x)μ* funksiyadan ketma-ket hosilalar olamiz:

,

,

. (7)

Ravshanki, *f(0)=1, f(n)(0)=μ(μ-1)...(μ-n+1).* Shuning uchun *f(x)=(1+x)μ* funksiyaning Makloren formulasi quyidagicha yoziladi:



+ (0<*θ*<1). (8)

**4.5. *f(x)=ln(1+x)*** **funksiya uchun Makloren formulasi.** Bu funksiyaning (-1;∞) intervalda aniqlangan va istalgan tartibli hosilasi mavjud. Haqiqatan ham,  funksiyasiga (7) formulani qo‘llab, unda *μ=-*1 deb *n* ni *n-*1 bilan almashtirsak,  formulani hosil qilamiz.

Ravshanki, *f(0)=0, f(n)(0)=(-*1*)n-1(n-*1*)*! Shuni e’tiborga olib, berilgan funksiyaning Makloren formulasini yozamiz:

 (9)

Yuqorida keltirilgan asosiy elementar funksiyalarning Makloren formulalari boshqa funksiyalarni Teylor formulasiga yoyishda foydalaniladi. Shunga doir misollar ko‘ramiz.

*1-misol*. Ushbu *f(x)=e-3x* funksiya uchun Makloren formulasini yozing.

*Yechish*. Bu funksiyaning Makloren formulasini yozish uchun *f(0), f’(0),...,f(n)(0)* larni topib, 3-§ dagi (10) formuladan foydalanish mumkin edi. Lekin *f(x)=ex* funksiyaning yoyilmasidan foydalanish ham mumkin. Buning uchun (1) formuladagi *x* ni -3*x* ga almashtiramiz, natijada

, 0<*θ* <1,

formulaga ega bo‘lamiz.

*2-misol*. Ushbu *f(x)=lnx* funksiyani *x0=*1 nuqta atrofida Teylor formulasini yozing.

*Yechish*. Berilgan funksiyani Teylor formulasiga yoyish uchun *f(x)=ln(1+x)* funksiya uchun olingan (9) asosiy yoyilmadan foydalanamiz. Unda *x* ni *x-*1 ga almashtiramiz, natijada *lnx=ln*((*x-*1)*+*1) va

*lnx=*, 0< *θ* <1

formulaga ega bo‘lamiz. Bu formula *x*-1>-1 bo‘lganda, ya’ni *x*>0 larda o‘rinli.

**4.6. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblash.** Makloren formulasi Lagranj ko‘rinishdagi qoldiq hadini baholash masalasini qaraylik.

Faraz qilaylik, shunday o‘zgarmas *M* son mavjud bo‘lsinki, argument *x* ning *x0*=0 nuqta atrofidagi barcha qiymatlarida hamda *n* ning barcha qiymatlarida *|f(n)(x)|≤M* tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. U holda

*|Rn(x)|=| |≤M⋅*

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Argument *x* ning tayin qiymatida =0 tenglik o‘rinli, demak *n* ning yetarlicha katta qiymatlarida *Rn(x)* yetarlicha kichik bo‘lar ekan.

Shunday qilib, *x0=*0 nuqta atrofida *f(x)* funksiyani

*f(0)+ f’(0)x+ f’’(0)x2+ ... +f(n)(0)xn*

ko‘phad bilan almashtirish mumkin. Natijada funksiyaning *x* nuqtadagi qiymati uchun

*f(x)≈ f(0)+ f’(0)x+ f’’(0)x2+ ... +f(n)(0)xn*

taqribiy formula kelib chiqadi. Bu formula yordamida bajarilgan taqribiy hisoblashdagi xatolik |*Rn(x)|* ga teng bo‘ladi.

*1-misol*. *e0,1* ni 0,001 aniqlikda hisoblang.

*Yechish.* *ex* funksiyaning Makloren formulasidan foydalanamiz. (1) formulada *x=*0,01 deb olsak, u holda

,

masala shartiga ko‘ra xatolik 0,001 dan katta bo‘lmasligi kerak, demak

*Rn(x)=<*0,001 tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan birinchi *n* ni topish yetarli. *e0,1θ <*2 ekanligini e’tiborga olsak, so‘ngi tengsizlikni quyidagicha yozib olish mumkin:

.

Endi *n*=1, 2, 3, ... qiymatlarni so‘ngi tengsizlikka qo‘yib tekshiramiz va bu tengsizlik *n*=3 dan boshlab bajarilishini topamiz. Shunday qilib, 0,001 aniqlikda

.

Xususiy holda, *n*=1 bo‘lganda

*f(x)≈f(x0)+f’(x0)(x-x0)* taqribiy hisoblash formulasi *R2(x)=⋅(x-x0)2, x0<ξ<x* aniqlikda o‘rinli bo‘ladi.

*2-misol*. Differensial yordamida radiusi *r*=1,01 bo‘lgan doira yuzini toping. Hisoblash xatoligini baholang.

*Yechish*. Doira yuzi *S=πr2* ga teng. Bunda *r0*=1, Δr=0,01 deb olamiz va *S=S(r)* funksiya orttirmasini uning differensiali bilan almashtiramiz:

*S(r) ≈ S(r0)+dS(r0)= S(r0)+ S’(r0)Δr.*

Natijada

*S(1,01) ≈ S(1)+dS(1)= S(1)+ S’(1)0,01=π⋅12+2π⋅0,01=1,02π* hosil bo‘ladi.

Bunda hisoblash xatoligi

*R2(r)=⋅(r-r0)2, r0<ξ<r* dan katta emas. *S’’(r)=2π* va *r* ga bog‘liq emas, shu sababli *R2(r)=⋅0,012=0,0001π.* Demak, hisoblash xatoligi 0,000314 dan katta emas.

3*-misol*. Ushbu *f(x)=* funksiyaning *x*=0,03 nuqtadagi qiymatini differensial yordamida hisoblang. Xatolikni baholang.

*Yechish*. Taqribiy hisoblash formulasi *f(x)≈f(x0)+f’(x0)(x-x0)* da *x0*=0, *x*=0,03 qiymatlarni qo‘ysak, *f(0,03)≈f(0)+f’(0)0,03* bo‘lib, xatolik

*R2=⋅x2=⋅0,032, 0<ξ<*0,03 bo‘ladi.

Berilgan funksiya hosilalarini va nuqtadagi qiymatlarini hisoblamiz: *f’(x)=(2x-1),*bundan *f’(0)=-1, f’’(x)=2+(2x-1)2=(4x2-4x+3),* bundan *f’’(ξ)<3*. Olingan natijalardan foydalanib, *f(0,03)≈1+(-1)⋅0,03=0,97* va *R2<⋅0,032=0,0017* ekanligini topamiz.

Teylor formulasi funksiyalarni ekstremumga tekshirishda, qatorlar nazariyasida, integrallarni hisoblashlarda ham keng tatbiqqa ega.

Foydalanilgan adabiyotlar  
1. Toshmetov O’., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -97-99 b.  
2. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.- 96-102p.  
3. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. I T.:«Voris-nashriyot». 2010 y. 85–91 b.

1. **Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008. 225-227p** [↑](#footnote-ref-1)
2. **Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008. 229-232p** [↑](#footnote-ref-2)