Keys

Barcha natural sonlar to’plamini N va barcha butun sonlar to’plamini Z orqali belgilaymiz.

T a ‘ r i f.  ko’rinishda yozish mumkin bo’lgan sonlarni ratsional son deyiladi, bu yerda p∈Z, q∈N.

Odatda - qisqarmas kasr deb qaraladi. Barcha ratsional sonlar to’plamini Q orqali belgilaymiz.

**Zichlik xossasi**: Ixtiyoriy ikkita teng bo’lmagan r 1 va r 2 ratsional sonlar orasida kamida bitta ratsional r son mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik r1<r2 bo’lsin, u holda r1< <r2 bo’ladi. Bundan  =r∈Q bo’lib, r1 <r<r2 ekanligi kelib chiqadi.

**Tartiblanganlik** **xossasi:** Ixtiyoriy ikkita ratsional r1âà r2 sonlar uchun r1<r2 ,r1 =r2, r1>r2 munosabatlardan faqat bittasi o’rinli va ixtiyoriy r 1,r2,r3 ratsional sonlar uchun r1<r2 va r2<r3 dan r1<r3 kelib chiqadi.

Topshiriq .

Zichlik va tartiblanganlik xossalarini o’rganishda bir xossaning ikkinchisi uchun axamiyati taxlil qiling

Keys 1

Ratsional sonlar to’plami Q dagi kabi haqiqiy sonlar to’plami R da bajarilgan kesim tushunchasini ko’raylik.

Ta’rif. Haqiqiy sonlar to’plami R ni X va U to’plamlarga ajratilgan bo’lib, quyidagi shartlar qanoatlantirilsa, bu ajratish R ning kesimi deyiladi;

1) X , U

2) XU=R

3) Har qanday xX, uU lar uchun x<u.

Kesimni avvalgidek, (X,U) kabi belgilanadi va X kesimning quyi sinfi, U kesimning yuqori sinfi deyiladi.

Teorema (Dedekind teoremasi). Haqiqiy sonlar to’plami R da bajarilgan har qanday (X,U) kesim uchun quyidagi ikki holdan faqat biri o’rinli bo’ladi:

1) Quyi sinf X da eng katta element mavjud, lekin yuqori sinf U da eng kichik element mavjud emas;

2) Quyi sinf X da eng katta element mavjud emas, lekin yuqori sinf U da eng kichik element mavjud. (isbotlang)

Bu teoremaning mazmuni, ya’ni haqiiy sonlar to’plamida 3- xil kesim mavjud emasligi haqiqiy sonlar to’plamining uzluksizlik xossasini ifoda qiladi.

Demak, haqiqiy sonlar to’plamida olinadigan har qanday kesim har doim bitta haqiqiy sonni ifoda qiladi.

Topshiriq Uzliksizlik xossasi xakikiy sonlar to’plami uchun o’rinli lekin ratsional sonlar to’plami uchun o’rinli emas. Ushbu muloxazani algebraik va geometrik asoslang.

**I.** To’g’ri chiziqda noldan o’ng tomonga yo’nalishni musbat yo’nalish, chapga tomonga yo’nalishni manfiy yo’nalish deb, ma’lum bir kesmani o’lchov (masshtab) birligi sifatida qabul qilamiz. ¤lchov birligini 0 dan o’ngga va chapga o’lchab joylashtirilganda

1 2 3 4 5 6 n

to’g’ri chiziqda 1, 2,... n,... sonlarga mos nuqtalarni hosil qilamiz. Bu nuqtalarni “butun” nuqtalar deb ataymiz.

Agar o’lchov birligini m ta teng bo’lakka bo’lib va n tasini olib, O nuqtadan chapga va o’ngga joylashtirsak, natijada sonlarga mos nuqtalarni hosil qilamiz. SHunday qilib, to’g’ri chiziqda barcha ratsional sonlarga mos keladigan nuqtalarni belgilab chiqqan bo’lamiz. Bu nuqtalarni “ratsional” nuqtalar deymiz.

Savollar

1. $\frac{7}{4}$ ratsional sonni sonlar o’qida qanday usullar bilan joylashtirish mumkin?
2. Sonlar o’qidagi har qanday nuqtani m/n ko’rinishda tasvirlash mumkinmi?

**II.** x va u haqiqiy sonlar berilgan bo’lsin.

1) x, u larning ikkalasi ham ratsional sonlar bo’lishsa, u holda ular orasida x=u, x<u, x>u munosabatlardan faqat bittasi o’rinli bo’lishligi ma’lum.

2) x ratsional u irratsional son bo’lsin, u holda u ni aniqlovchi 3-xil (A,V) kesim mavjud, ya’ni u=(A,V), agar x A bo’lsa, x<u; x V bo’lsa x>u deb qaraladi.

3) x va u larning har biri irratsional son bo’lsa, u holda x va u larni aniqlovchi 3- xil x=(A,V), u=(S,D) kesimlar mavjud bo’ladi. A=S bo’lganda x=u deb olinadi. A S va A S bo’lganda x<u deb, A S va A S bo’lganda x>u deb olinadi.

SHunday qilib, har qanday x va u haqiqiy sonlar uchun x=u, x>u, x<u munosabatlardan faqat biri o’rinli bo’ladi va x<u, u<z dan x<z kelib chiqadi. Bu mulohazalar haqiqiy sonlar to’plamining tartiblangan to’plam ekanligini ko’rsatadi.

Savollar

1. Har qanday 3ta har xil ratsional va irratsional sonlarni qanday taqqoslash usullarini bilasiz va ularni o’zaro solishtiring?
2. Aniq misollarda haqiqiy sonlarni taqqoslashning algebraik va geometrik usullarini toping.