**8-Mavzu: Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. Asosiy integrallar jadvali.**

**REJA:**

**1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchasi;**

**2. Integral xossalari;**

**3. Integrallash qoidalari va asosiy integrallar jadval.**

**Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari**

Differensial hisobning asosiy masalalaridan biri berilgan *f*(*x*) funksiyaga ko‘ra uning hosilasi  ni topishdan iborat edi. Bu masalaning teskarisi, yaьni hosilasiga ko‘ra funksiyaning o‘zini tiklash masalasi katta ahamiyatga ega bo‘lib, integral hisobning asosiy masalalaridan hisoblanadi.

*f(x)* funksiya biror (*a,b*) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

**1-ta’rif.** Agar (*a*,*b*) da *f(x)* funksiya biror *F(x)* funksiyaning hosilasiga teng, ya’ni (*a,b*) intervaldan olingan ixtiyoriy *x* uchun *F*’(*x*)= *f*(*x*) bo‘lsa, u holda *F*(*x*) funksiya (*a,b*) intervalda *f*(*x*) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deyiladi. [[1]](#footnote-1)

Masalan,

1) *f(x)=* bo‘lsin. Bu funksiyaning (0;+∞) intervalda boshlang‘ich funksiyasi *F(x)=*2 bo‘ladi, chunki (0;+∞) da ;

2) *f(x)=x2* ning (-∞;+∞) oraliqda boshlang‘ich funksiyasi  bo‘lishi ravshan.

Ravshanki, agar biror oraliqda *F(x)* funksiya *f(x)* ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy o‘zgarmas *C*  son uchun

*F(x)+C* (1)

funksiya ham *f(x)* ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi, chunki

*(F(x)+C)’=F’(x)=f(x)*.

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar *f(x)* funksiya biror boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lsa, u holda uning boshlang‘ich funksiyalari cheksiz ko‘p bo‘ladi.

Quyidagi savol tug‘ilishi tabiiy: biror oraliqda berilgan *f(x)* funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalari (1) formula bilan ifodalanadimi, boshqacha aytganda *f(x)* funksiyaning (1) formula bilan ifodalanmaydigan boshlang‘ich funksiyalari mavjudmi?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

**1-teorema**. Agar biror oraliqda *F(x)* funksiya *f(x)* ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda *f(x)* funksiyaning ixtiyoriy boshlang‘ich funksiyasi *C* o‘zgarmasning biror qiymatida (1) formula yordamida ifodalanadi.

**Isboti.** Faraz qilaylik *G(x)* funksiya qaralayotgan oraliqda *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Ushbu *ϕ(x)=G(x)-F(x)* yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun *ϕ’(x)=G’(x)-F’(x)=f(x)-f(x)=*0 bo‘ladi, ya’ni, qaralayotgan oraliqda *ϕ(x)* funksiya uchun funksiyaning doimiylik sharti bajariladi. Boshqacha aytganda *G(x)-F(x)=C*, ya’ni *G(x)=F(x)+C* bo‘ladi. Demak, *G(x)* funksiya (1) formuladan *S* ning biror qiymatida hosil bo‘ladi. [[2]](#footnote-2)

Shunday qilib, agar oraliqda berilgan *f(x)* funksiyaning bitta *F(x)* boshlang‘ich funksiyasi ma’lum bo‘lsa, u holda uning barcha boshlang‘ich funksiyalari *F(x)+C*, bu yerda *C* ixtiyoriy o‘zgarmas son, ko‘rinishda ifodalanar ekan.

**2-ta’rif.** (*a,b*) intervalda berilgan *f(x)* funksiya boshlang‘ich funksiyalarning umumiy ifodasi *F(x)+C*, bu yerda *C=*const, shu *f(x)* funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi va u  kabi belgilanadi. Bunda  - integral belgisi, *f(x)* integral ostidagi funksiya, *f(x)dx* - integral ostidagi ifoda, *x* – integrallash o‘zgaruvchisi deb ataladi.

Demak, ta’rifga ko‘ra

=*F(x)+C,*  (2)

bu yerda *F(x)* funksiya *f(x)* ning biror boshlang‘ich funksiyasi.

Masalan, (-∞;+∞) da *f(x)=cosx* bo‘lsin. Bu holda (*sinx*)’=*cosx* bo‘lgani uchun =*sinx+C* bo‘ladi.

(2) formuladan ko‘rinadiki, berilgan *f(x)* funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasini va uning aniqmas integralini topish masalalari deyarli bir xil masalalardir. Shu sababli *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini topishni ham, aniqmas integralini topishni ham *f(x)* funksiyani integrallash deb ataymiz. Integrallash differensiallashga nisbatan teskari amaldir.

Integrallash amalining to‘g‘ri bajarilganligini tekshirish uchun olingan natijani differensiallash yetarli: differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo‘lishi lozim.

Masalan,  ekanligini tekshirish uchun tenglikning o‘ng tomonidagi funksiyadan hosila olamiz: (*x*3+*C*)’=3*x*2, demak, integrallash to‘g‘ri bajarilgan.

Geometrik nuqtai nazardan bu teorema *f(x)* funksiyaning aniqmas integrali *y=F(x)+C*  bir parametrli 1-rasm

egri chiziqlar oilasini ifodalaydi (*C-*parametr). Bu egri chiziqlar oilasi quyidagi xossaga ega: egri chiziqlarga abssissasi *x=x0* bo‘lgan nuqtasida o‘tkazilgan urinmalar bir-biriga parallel bo‘ladi (1-rasm).

*F(x)+C*  egri chiziqlar oilasi integral egri chiziqlar deb ataladi. Ular bir-birlari bilan kesishmaydi, biri-biriga urinmaydi. Tekislikning har bir nuqtasidan faqat bitta integral chiziq o‘tadi. Barcha integral chiziqlar biri ikkinchisidan *Oy* o‘qiga parallel ko‘chirish natijasida hosil bo‘ladi.

*Misol*. Abssissasi *x* bo‘lgan nuqtasida o‘tkazilgan, urinmasining burchak koeffitsienti *k=x3* formula bilan ifodalanadigan va (2;5) nuqtadan o‘tuvchi egri chiziqni toping.

*Yechish*. Ma’lumki, *y’=k=x3*, bu shartni qanoatlantiruvchi *y* funksiyaning umumiy ifodasi  bo‘ladi. Bu integralni hisoblab  ifodaga ega bo‘lamiz. Izlanayotgan egri chiziq (2;5) nuqtadan o‘tadi. Shu sababli funksiya ifodasiga berilgan nuqta koordinatalarini qo‘yamiz va S ning kerakli qiymatini topamiz. Natijada  hosil bo‘ladi. Demak, izlanayotgan egri chiziq tenglamasi  ekan.

Endi quyidagi savolga javob izlaymiz: biror oraliqda berilgan har qanday *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi mavjudmi?

Ushbu savolning javobi Darbu teoremasidan kelib chiqadi (VII bob, 1-§, 5-teorema).

Bu teoremaga asosan quyidagi



funksiya [-2;2] da boshlang‘ich funksiyaga ega emas, chunki bu funksiya 0 va 1 qiymatlarni qabul qilib, ular orasidagi qiymatlarini qabul qilmaydi.

Har qanday funksiyaning ham boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘lavermaydi, lekin quyidagi teorema o‘rinli.

**2-teorema**. Agar *f(x)* funksiya biror oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda uning boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘ladi.

Bu teoremaning isboti kelgusida ko‘rsatiladi, shu sababli bu bobda uzluksiz funksiyalarni integrallash haqida gapiriladi. Uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar uchun integrallash masalasi uning u yoki bu uzluksizlik oraliqlari uchun qaraladi.

Masalan,  funksiya *x*=0 nuqtada uzilishga ega. Bu funksiya (0;+∞) va (-∞;0) oraliqlarda uzluksiz. Birinchi oraliqda



formula o‘rinli. Ammo ikkinchi oraliq uchun bu formula ma’noga ega emas. Lekin bu oraliqda quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:

.

 Bu ikki formulani quyidagicha umumlashtirib yozish mumkin:

.

**Aniqmas integralning sodda xossalari**

10. Aniqmas integralning differensiali (hosilasi) integral ostidagi ifodaga (funksiyaga) teng:

*d*=*f(x)dx* ( ()’ =*f(x)*).

**Isboti.** Ta’rif ko‘ra *d*∫*f(x)dx*=*d(F(x)+C)=dF(x)=F’(x)dx*= *f(x)dx*.

20. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o‘zgarmas son yig‘indisiga teng:

∫*dF(x)*=*F(x)+C*.

**Isboti.** ∫*dF(x)*= ∫*F’(x)dx*=*F(x)+C.*

30. Agar *f(x)* ning boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘lsa, u holda ixtiyoriy *k* (*k*≠0) son uchun

∫*kf(x)dx*=*k*∫*f(x)dx* (1)

bo‘ladi, ya’ni o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisi oldiga chiqarish mumkin.

 **Isboti.** ∫*f(x)dx=F(x)+C* bo‘lsin. U holda

*k*∫*f(x)dx=k(F(x)+C)=kF(x)+kC* (2)

bo‘ladi. (*kF(x)*)’=*kF’(x)=kf(x)* va *kC* ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lganligi uchun *kF(x)+kC* ifoda *kf(x)* funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalarini beradi, ya’ni

∫*kf(x)dx*= *kF(x)+kC*  (3)

bo‘ladi. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi.

 **1-izoh**. *k*=0 bo‘lganda (1) tenglik o‘rinli emas. Haqiqatan ham, bu tenglikning chap tomoni ∫*0f(x)dx=*∫0*dx=C, C –*ixtiyoriy o‘zgarmas son,o‘ng tomoni esa *0*∫*f(x)dx=0⋅(F(x)+C)=0*.

**2-izoh.** Integrallarni topishda *kC* yozilmaydi. Uning o‘rniga *C* yoziladi, chunki ixtiyoriy o‘zgarmas sonni yozish usuli muhim emas. Bunda o‘zgarmas qo‘shiluvchining ixtiyoriy qiymat qabul qila olishi muhim hisoblanadi.

Agar *C*-ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda *C*3, 4*C* - ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi. Lekin *C*2, sin*C* - ixtiyoriy o‘zgarmas son emas, chunki *C*2≥0, |sin*C*|≤1.

40. Agar *f(x)* va *g(x)* larning boshlang‘ich funksiyalari mavjud bo‘lsa, u holda

∫(*f(x) ± g(x)*)d*x*=∫*f(x)dx* *±* ∫*g(x)dx*

bo‘ladi, ya’ni ikkita funksiya algebraik yig‘indisining integrali aniqmas integrallar algebraik yig‘indisiga teng.

**Isboti.** Aytaylik *F(x)* va *G(x)* lar mos ravishda *f(x)* va *g(x)* larning boshlang‘ich funksiyalari bo‘lsin. U holda

∫*f(x)dx±*∫*g(x)dx=(F(x)+C1) ± (G(x)+C2) =(F(x) ±G(x))+(C1±C2)*

Ammo, *F(x)±G(x)* funksiya *f(x)±g(x)* ning boshlang‘ich funksiyasi, chunki *(F(x)±G(x))’=F’(x)±G’(x)=f(x)±g(x), C1±C2* esa -ixtiyoriy ikkita o‘zgarmas sonlarning algebraik yig‘indisi- yana ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi.

Shu sababli *(F(x)±G(x))+(C1±C2)* ifoda *f(x)±g(x)* ning barcha boshlang‘ich funksiyalarini beradi, ya’ni ∫(*f(x)±g(x)*)*dx* ga teng bo‘ladi.

Bu xossani chekli sondagi funksiyalar uchun ham isbotlash mumkin. Buning uchun matematik induksiya metodidan foydalanish yetarli.

**3-izoh.** Integrallarni topishda *C1±C2* o‘rniga *C* yoziladi.

Masalan*,* .

50. Agar *F(x)* funksiya *f(x)* ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

 (*a*≠0)

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

 **Isboti.** Tenglikning o‘ng tomonining hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng ekanligini ko‘rsatish yetarli. Haqiqatan ham, .

 60. (integrallash formulasining invariantligi). Agar integrallash formulasida integrallash o‘zgaruvchisini shu o‘zgaruvchining istalgan differensiallanuvchi funksiyasi bilan almashtirsak integrallash formulasining shakli o‘zgarmaydi, ya’ni agar  va *u* funksiya *x* ning differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsa, u holda  bo‘ladi.

 **Isboti.** Birinchi tartibli differensialning invariantlik formasidan foydalanamiz. Bunga ko‘ra, agar *dF(x)=F’(x)dx* va *u=u(x)* differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, u holda *dF(u)=F’(u)du* bo‘ladi.  ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun so‘ngi tenglikning ikkala tomonidan differensial olamiz:



Bu differensiallarning tengligidan 60 xossaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

**Integrallash qoidalari va asosiy integrallar jadvali**

Yuqorida isbotlangan aniqmas integralning sodda xossalari va aniqmas integrallar jadvali birgalikda integrallarni hisoblashning asosiy qoidalarini aniqlaydi. Integrallash amali differensiallash amaliga teskari amal bo‘lganligi sababli, quyida keltiriladigan formulalarning ko‘pchiligini hosilalar jadvalidan hosil qilish mumkin.

Quyida asosiy aniqmas integrallar jadvalini keltiramiz. Bunda har bir formula integral ostidagi funksiyalarning aniqlanish sohasida qaraladi.

1. ; 2. ;

3. ; ;

4. ; , *a*≠0;

5. ; ;

6. ; 7. ;

8. ; 9. ;

10. ; 11. ;

12. ; 13. ;

14. , *a*≠0;

15. .

Foydalanilgan adabiyotlar
1. Toshmetov O’., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -259-270 b.
2. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.- 300-310p.
3. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. I T.:«Voris-nashriyot». 2010 y.177-184 b.

1. C.Canuto, A.Tabacco mathematical analysis I 2008 -300page [↑](#footnote-ref-1)
2. C.Canuto, A.Tabacco mathematical analysis I 2008 -301page [↑](#footnote-ref-2)