**9-Mavzu: Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli. Bo‘laklab integrallash.**

**REJA**

**1. Integrallash usullari;**

**2.Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli;**

**3. Aniqmas integralda bo‘laklab integrallash usuli.**

**Integrallash usullari**

**Bevosita integrallash usuli.** Bu usul integral ostidagi ifodani jadvaldagi biror integral ostidagi ifoda ko‘rinishiga keltirish va aniqmas integral xossalaridan foydalanishga asoslangan.

Masalan

1) ;

2) ;

3) 

=;

4) , bunda integrallash formulasining invariantligi xossasidan foydalanildi.

**O‘zgaruvchini almashtirish usuli.** Ushbu *f(x)dx* integralni hisoblash talab qilinsin. Integralda o‘zgaruvchini almashtirish usulining mohiyati shundan iboratki, unda integrallash o‘zgaruvchisi *x* ni biror *x=ϕ(t)* formula yordamida *t* o‘zgaruvchi bilan almashtiriladi. Bunda *ϕ’(t)* uzluksiz va *x=ϕ(t)* ga nisbatan teskari funksiya *t=ϕ-1 (x)* mavjud deb faraz qilinadi. Endi

*x=ϕ (t), dx=ϕ’(t)dt*

ifodalarni *f(x)dx* ga qo‘yamiz:

*f(x)dx=**f(ϕ(t))ϕ’(t)dt* (3)

Bu yerda *ϕ(t)* ni shunday tanlash kerakki, o‘ng tomondagi integral soddaroq bo‘lsin. Agar *f(ϕ(t))ϕ’(t)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri *F(t)* bo‘lsa,

*f(x)dx=* *f(ϕ(t))ϕ’(t)dt=F(t)+C=F(ϕ-1(x))+C*

kelib chiqadi.

(3) formula aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish formulasi deb ataladi.

Ba’zi hollarda yangi o‘zgaruvchini *t=ϕ(x)* formula orqali kiritish foydadan holi emas.

1-*misol*.  ni hisoblang.

*Yechish*. *ex*-1=*t*2 almashtirish kiritamiz. U holda *ex*=*t*2+1, *x*=ln(*t*2+1), *dx*= va  bo‘ladi.

2-*misol*.  ni hisoblang.

*Yechish*. *t=sinx, dt=cosxdx* almashtirishni kiritamiz. Bu holda

 bo‘ladi.

O‘zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib aniqmas integralni hisoblashda almashtirishni qo‘lay tanlab olish muhim hisoblanadi. Ixtiyoriy integralni hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirishning umumiy qoidasi yo‘q. Bunday qoidalarni ba’zi funksiyalar (trigonometrik, irratsional va boshq.) sinflari uchun keltirish mumkin.

Ko‘p hollarda integrallarni hisoblashda integral ostidagi funksiyani differensial belgisi ostiga “kiritish” usulidan foydalanadi. Funksiya differensialining ta’rifiga ko‘ra *ϕ’(x)dx=d(ϕ(x))*. Bu tenglikning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tish (hosil qilish) *ϕ’(x)* ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga “kiritish” deb aytiladi.

Aytaylik ushbu



ko‘rinishdagi integralni hisoblash talab qilinsin. Bu integralda *ϕ’(x)* ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritamiz va so‘ngra *ϕ(x)=u* almashtirish bajaramiz. U holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

=.

3-*misol*. *I*=  integralni hisoblang.

*Yechish*. *xdx*= ekanligidan foydalanamiz, u holda

*I* bo‘ladi.

4-*misol*. *I*= integralni hisoblang.

*Yechish*.  ekanligini ko‘rish qiyin emas. 4+3*cosx=u* deb belgilaymiz. Natijada

*I*=

hosil bo‘ladi.

Agar integral ostidagi funksiya *ϕ’(x)/ϕ(x)* ko‘rinishda bo‘lsa, u holda *ϕ’(x)* ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritish orqali uni jadvaldagi integralga keltirish mumkin:

.

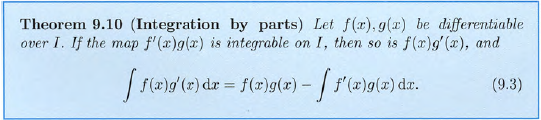
Masalan, .

**Bo‘laklab integrallash usuli.** Bu usul ikki funksiya ko‘paytmasining differensiali formulasidan kelib chiqadi. Ma’lumki, agar *u(x)* va *v(x)* funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda *d(uv)=udv+vdu* yoki *udv=d(uv)-vdu* bo‘ladi. Bu tenglikni ikkala tomonini integrallasak,

*udv=**d(uv)-* *vdu*, yoki

*udv=uv -* *vdu* (4)

formula hosil bo‘ladi. Bu formula bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi. Bu formula yordamida *udv* ni hisoblash boshqa, *vdu* integralni, hisoblashga keltiriladi. Bu formuladan *udv* ga nisbatan *vdu* integralni hisoblash oson bo‘lganda foydalaniladi.

[[1]](#footnote-1)

1-*misol*. ∫*xcosxdx* ni hisoblang.

*Yechish*. *u=x, du=x, v=sinx, dv=cosxdx* belgilashlarni kiritamiz. U holda

 bo‘ladi.

2-*misol*. *lnxdx* ni hisoblang.

*Yechish. u=lnx, du=, v=x, dv=dx* almashtirishni kiritamiz. U holda,

 bo‘ladi.

Endi amaliyotda tez-tez uchrab turadigan va bo‘laklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan integrallar tiplarini keltiramiz.

1.  ko‘rinishdagi integrallar, bu yerda *Pn(x)* - *n* – darajali ko‘phad, *k* – biror son. Bu integrallarni hisoblash uchun *u*=*Pn(x)* deb olish va (4) formulani *n* marta qo‘llash yetarli.

2. 

 ko‘rinishdagi integrallar, bu yerda *Pn(x)* - *n* – darajali ko‘phad. Bu integrallarni bo‘laklab integrallash uchun *Pn(x)* oldidagi ko‘payuvchi funksiyani *u* deb olish lozim.

3. , bu yerda *a* va *b* lar haqiqiy sonlar. Bu integrallar ikki marta bo‘laklab integrallash usuli bilan hisoblanadi.

3-*misol*.  integralni hisoblang.

*Yechish*. Bu integral 2-tipga kiradi, bunda *P0(x)*=1 va *u=arcsinx* deb olamiz. U holda



 bo‘ladi.

4-*misol*.  integralni hisoblang.

*Yechish*. Bu integral 3-tipga mansub. *u* sifatida *dx* ning oldidagi ko‘paytuvchilardan ixtiyoriy birini olamiz va ikki marta bo‘laklab integrallashni bajaramiz. Ikkinchi marta integrallaganimizda avval berilgan integralni o‘z ichida saqlaydigan tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikdan berilgan integralni topamiz:

=

+

-4, ya’ni = - 4, bundan 5=, yoki

=.

Foydalanilgan adabiyotlar  
1. Toshmetov O’., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -267-272b.  
2. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.- 304-310p.  
3. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. I T.:«Voris-nashriyot». 2010 y. 185-190 b.

1. C.Canuto, A.Tabacco mathematical analysis I 2008 -306page [↑](#footnote-ref-1)