**11-Mavzu: Kasr ratsional funksiyalarni integrallash.**

**REJA**

1. **Ratsional funksiyalarni integrallash.**

**Ratsional funksiyalarni integrallash**. Integralni hisoblash uchun umumiy usullar bo‘lmagani uchun ayrim funksiyalar sinflarini integrallash yo‘llari o‘rganilgan. Hozir biz ana shunday funksiyalar sinflaridan biri bilan tanishib chiqamiz.

Ma’lumki, *Rn(x)=a0xn+a1xn-1+...+an-1x+an* ko‘phad butun ratsional funksiya,

esa kasr ratsional funksiyalar deb ataladi. Butun va kasr ratsional funksiyalar umuman ratsional funksiyalar deb aytiladi. Butun ratsional funksiyani integrallash quyidagicha bajariladi:

*Rn (x)dx=a0xndx+a1xn-1dx+...+an-1xdx+andx*=

=.

Endi kasr ratsional funksiyalarni integrallash masalasiga o‘tamiz.

Ushbu *f(x)=*  kasr ratsional funksiya berilgan bo‘lsin.

Agar *n<m* bo‘lsa, u holda *f(x)* - to‘g‘ri, *n≥m* bo‘lsa, *f(x)* - noto‘g‘ri kasr ratsional funksiya deyiladi.

*Misollar*.  - to‘g‘ri kasr ratsional funksiyalar;

 - noto‘g‘ri kasr ratsional funksiyalar bo‘ladi.

To‘g‘ri ratsional kasrni integrallashni o‘rganamiz.

 (*n<m*) to‘g‘ri ratsional kasr berilgan bo‘lsin. Uni chekli sondagi sodda ratsional kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishda ifodalash mumkin. Shu maqsadda  kasrning mahrajini chiziqli va kvadrat ko‘paytuvchilarga ajratish lozim, buning uchun *Qm(x)=*0, ya’ni

*b0xm+b1xm-1+…+bm*=0 (7)

tenglamani yechish kerak. Algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra *Qm(x)=*0 tenglama karrali ildizlarini hisobga olganda *m* ta ildizga ega bo‘ladi. Bu ildizlar haqiqiy (sodda yoki karrali) va kompleks (sodda va karrali) bo‘lishi mumkin.

Ma’lumki, agar *x=α* qaralayotgan *Qm(x)* ko‘phadning sodda (*k* karrali) ildizi bo‘lsa, u holda *Qm(x)* ko‘phad *x-α* *((x-α)k)* ga qoldiqsiz bo‘linadi va

*Qm(x)=(x-α)Qm-1(x) (Qm(x)=(x-α)kQm-k(x))*

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Agar *z=u+iv* kompleks son *Qm(x)* ko‘phadning sodda ildizi bo‘lsa, u holda unga qo‘shma bo‘lgan =*u-iv* kompleks son ham *Qm(x)* ko‘phadning ildizi bo‘ladi. Bu holda ko‘phad *(x-z)(x-**)=x2+px+q* ga qoldiqsiz bo‘linadi, bu yerda *p=-(z+**)=-2u, q=z**=u2+v2, p2/4-q<0* va uni *Qm(x)=(x2+px+q)Qm-2(x)* ko‘rinishda ifodalash mumkin. Shunga o‘xshash, agar *z* kompleks son *s* karrali ildizi bo‘lsa, u holda *Qm(x)=( x2+px+q)sQm-2s(x)* tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Faraz qilaylik, (7) tenglamaning barcha haqiqiy va kompleks ildizlari topilgan bo‘lsin. U holda *Qm(x)* ko‘phadni chiziqli va kvadrat ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin:

*Qm(x)=* ,

bu yerda *k1+k2+...+kt+2s1+2s2+...2sr=m*.

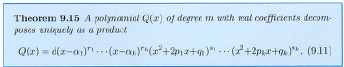
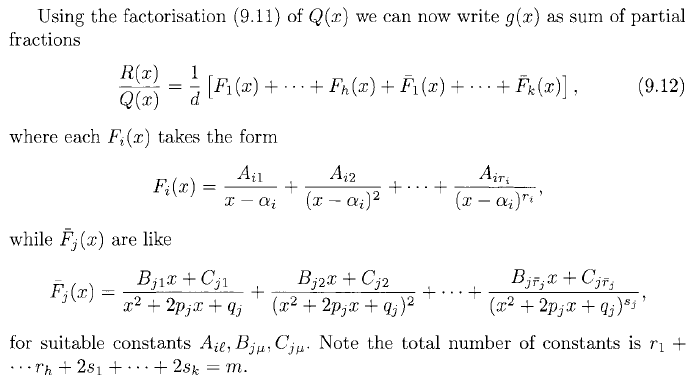
Algebra kursida  to‘g‘ri ratsional kasr elementar (sodda) kasrlar yig‘indisi shaklida yozilishi ko‘rsatiladi:



+ 

+ , (8)

bunda *A1, A2, ... ,, V1, ... ,, L1,...,  , M1, ,... , N1,..., , U1,...,, V1,…,*- noma’lum koeffitsientlar.

 [[1]](#footnote-1)

Yuqoridagi formulani koeffitsientlarni topmagan holda bir necha misollarda ko‘rsatamiz:

1) ;

2) ;

3) .

(8) yoyilmadagi koeffitsientlarni topish uchun *noma’lum koeffitsientlar metodi* yoki *xususiy qiymatlar metodi*dan foydalaniladi.

Noma’lum koeffitsientlar metodining mohiyati quyidagidan iborat. Aytaylik  to‘g‘ri ratsional kasrning (8) ko‘rinishdagi noma’lum koeffitsientli sodda kasrlar yig‘indisi shaklidagi yoyilmasi berilgan bo‘lsin. Sodda kasrlarni *Qm*(*x*) umumiy mahrajga keltiramiz va suratda hosil bo‘lgan ko‘phadni *Pn(x)* ga tenglashtiramiz.

Ma’lumki, ikkita ko‘phad aynan teng bo‘lishi uchun bu ko‘phadlardagi *x* ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarning teng bo‘lishi zarur va yetarli. Shuni hisobga olgan holda hosil bo‘lgan ayniyatning o‘ng va chap tomonidagi *x* ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz va yuqoridagi noma’lum koeffitsientlarga nisbatan *m* ta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Shu sistemani yechib, noma’lum koeffitsientlarni topamiz.

1-*misol*. Ushbu  ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

*Yechish.* *x*3-8=(*x*-2)(*x*2+2*x*+4) bo‘lganligi sababli (8) formulaga ko‘ra

=,

bu yerda *A*, *B* va *C* lar noma’lum koeffitsientlar. Bu tenglikning o‘ng tomonini umumiy mahrajga keltiramiz, u holda

= bo‘ladi. Bundan

*x*2=(*A+B*)*x*2+(2*A*+*C*-2*B*)*x* +4*A*-2*C.*

Endi *x* ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, *A, B, C* larni topish uchun ushbu tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

.

Shunday qilib,

=.

2-*misol*. Ushbu  ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

*Yechish*. Kasrning mahrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

*x*4+4*x*3+4*x*2-9=(*x*2+2*x*)2-9=(*x*2+2*x*-3)(*x*2+2*x*+3)=(*x*-1)(*x*+3)(*x*2+2*x*+3).

(8) formuladan foydalanib yoyilmani yozamiz:

.

Tenglamaning o‘ng tomonini umumiy mahrajga keltiramiz. U holda

=

= bo‘ladi. Bu kasrlarning suratlarini tenglashtiramiz so‘ngra *x* oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagiga ega bo‘lamiz:



Demak,

.

Noma’lum koeffitsientlarni topishda *x* ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni solishtirish o‘rniga *x* o‘zgaruvchiga bir nechta (noma’lum koeffitsientlar soniga teng) qiymatlar berib, noma’lum koeffitsientlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin. Bu metod *xususiy qiymatlar metodi* deb yuritiladi. Bu metod ayniqsa  ratsional kasr mahraji ildizlari sodda va haqiqiy bo‘lganda qo‘l keladi. Bunda *x* ga shu ildizlarga teng qiymatlar berish qo‘lay bo‘ladi.

3-*misol*.  ni sodda kasrlarga ajrating.

*Yechish.* (8) formulaga ko‘ra

=.

Ushbu tenglikning o‘ng tomonini umumiy mahrajga keltiramiz va suratlarini tenglashtiramiz:

4*x*2+16*x*-8=*A*(*x*+2)(*x*-2)+*Bx*(*x*-2)+*Cx*(*x*+2).

*x* ga ketma-ket *x*=0, *x*=-2 va *x*=2 qiymatlar berib quyidagini hosil qilamiz:



Shunday qilib, .

Ba’zi hollarda yuqorida ko‘rgan ikkala metoddan birgalikda foydalanish ham mumkin, ya’ni noma’lum koeffitsientlar uchun tenglamalar sistemasini hosil qilish uchun *x* ga bir qator xususiy qiymatlar berish va *x* ning oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish mumkin.

Endi ratsional kasr funksiyalarni integrallash qoidasini keltiramiz. Ratsional kasrni integrallash uchun quyidagi ishlarni bajarish lozim:

1) agar qaralayotgan  ratsional kasr noto‘g‘ri (*n≥m*) bo‘lsa, u holda uni ko‘phad va to‘g‘ri ratsional kasr yig‘indisi ko‘rinishda ifodalab olamiz:

, *k*<*m*;

2) agar qaralayotgan  ratsional kasr to‘g‘ri (*n <m*) bo‘lsa, u holda uni (8) formula yordamida sodda kasrlarga yoyyamiz;

3) ratsional kasr integralini uning butun qismi va sodda ratsional kasrlar integrallari yig‘indisi ko‘rinishida yozib olamiz va har bir integralni hisoblaymiz.

Noma’lum koeffitsientlarni topganimizdan keyin  ratsional kasrni integrallash masalasi yuqoridagi ayniyatda qatnashgan sodda kasrlarni integrallash masalasiga keltiriladi.

*4-misol*.  hisoblang.

*Yechish*. Integral ostidagi funksiya to‘g‘ri kasrdan iborat. Uni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

.

Bundan *x3+1=A(x-1)3+Bx(x-1)2+Cx(x-1)+Dx* kelib chiqadi. Endi *x* o‘zgaruvchiga 0, 1, 2 va -1 qiymatlar berib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:



Bundan *A*=-1, *B*=2, *C*=1, *D*=2 ni topamiz.

Demak, 

.

5-*misol*. *I*= integralni hisoblang.

*Yechish*. Integral ostidagi kasr-noto‘g‘ri kasr. Uning butun va to‘g‘ri qismlarini ajratib olamiz:

=.

To‘g‘ri qismi  ni sodda kasrlarga ajratamiz (qarang 3-misol), natijada = tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan

*I*=

=+

+.

6-*misol*.  integralni hisoblang.

*Yechish*. Integral ostidagi funksiya to‘g‘ri kasrdan iborat. Uni sodda kasrlarga ajratishni 1-misolda ko‘rgan edik. Shu yoyilmadan foydalanib integralni hisoblaymiz:

=

==

.

**Izoh.** Integrallarni hisoblashda har doim ham tayyor sxemalardan foydalanishga harakat qilavermaslik kerak. Xususan, yuqoridagi misolda  ekanligidan foydalanish mumkin edi. U holda =.

Foydalanilgan adabiyotlar  
1. Toshmetov O’., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -272-283b.  
2. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.- 304-310p.  
3. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. I T.:«Voris-nashriyot». 2010 y. 190-200b.

1. C.Canuto, A.Tabacco mathematical analysis I 2008 -314page [↑](#footnote-ref-1)