**28-Mavzu: TO’G’RILANUVCHI YOY UZUNLIGI. YOY UZUNLIGINI HISOBLASH. YOY UZUNLIGINI DEFERENSIALI**

**REJA:**

1. **Yoy uzunligi tushunchasi.**
2. **Parametrik ko`rinishda berilgan egri chiziq uzunligini hisoblash.**
3. **Qutb koordinatalar sistemasida berilgan egri chiziqning uzunligini hisoblash.**
4. **Yoy differensiali**

**To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida yassi yoy uzunligini hisoblash.** Aytaylik, *y=f(x)* funksiya [*a,b*] kesmada aniqlangan, uzluksiz va *l* shu funksiya grafigi bo‘lsin. (20-rasm). Yassi *l* egri chiziqninguzunligini topish talab qilinsin. Yassi *l* egri chiziqninguzunligini *s* bilan belgilaymiz.

Avval *AB* yoyini uzunligi deganda nimani tushunishni aniqlab olamiz. Buning uchun [*a,b*] kesmani ixtiyoriy ravishda *a=x0<x1<…<xn=b* nuqtalar yordamida *n*-ta bo‘lakka bo‘lamiz.  belgilash kiritamiz. Har bir  20-rasm

nuqtadan *Oy* o‘qqa *l* chiziq bilan kesishganga qadar parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Bu holda *AB* yoy *n* ta bo‘lakka bo‘linadi. *l* chiziqning qo‘shni bo‘linish nuqtalarini kesma (vatar) bilan tutashtiramiz va *AN1N2…Nn-1B* siniq chiziq hosil qilamiz. Shu siniq chiziqning uzunligini *ln* bilan belgilaymiz.

Demak,

 ,

bu yerda  yoyga tiralgan vatar uzunligi.

Siniq chiziqning uzunligi *AB* yoy uzunligining taqribiy qiymati bo‘ladi . Ravshanki, agar [*a,b*] kesmaning bo‘linish nuqtalari soni *n* ni (qism kesma uzunliklari eng kattasining uzunligi nolga intiladigan qilsak) ortirsak, u holda siniq chiziqning uzunligi *AB* yoy uzunligiga intiladi deb qabul qilish tabbiiydir.

 Agar  da *ln* chekli limitga ega bo‘lsa, u holda bu limit *l* *yoyning uzunligi* deyiladi, egri chiziq bu holda *to‘g‘rilanuvchi* deb ataladi:

  (1)

 Agar chekli limit mavjud bo‘lmasa, yoy uzunligi mavjud emas, chiziq esa *to‘g‘rilanmaydigan* deyiladi.

 Endi, agar *f(x)* funksiya[*a,b*] kesmada uzluksiz hosilaga ega bo‘lsa, u holda *l –* to‘g‘rilanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz va uning uzunligini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

  vatar uzunligini hisoblaymiz. *Nk-1(xk-1,yk-1), Nk(xk,yk)* bo‘lganligi sababli

  bo‘ladi.

Lagranj teoremasiga ko‘ra

 .

Demak,

 .

Olingan natijani (1) ga qo‘yamiz.

  (2)

(2) formulaning o‘ng tomonida  funksiyaning [*a,b*] dagi integral yig‘indisi yozilgan. Bu funksiya uzluksiz bo‘lganligi sababli integral yig‘indining limiti mavjud va shu limit  funksiyaning [*a,b*] dagi aniq integraliga teng bo‘ladi.

 .

Shunday qilib, agar *f(x)* funksiya [*a,b*] kesmada uzluksiz hosilaga ega bo‘lsa, u holda *AB* yoy to‘g‘irlanuvchi va uning uzunligi *s* quyidagi formula bilan hisoblanadi:

  (3)

*Misol*.  aylana uzunligini hisoblang.

*Yechish*. Avval aylananing I chorakdagi qismi uzunligini topamiz. Aylananing bu yoyi tenglamasi  bo‘ladi.

 Bundan . Demak (3) formulaga ko‘ra

 .

Shunday qilib, aylana uzunligi  ga teng.

**Parametrik ko‘rinishda berilgan yoy uzunligini hisoblash**.

Egri chiziq tenglamasi parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

 bu yerda *x(t), y(t)* – uzluksiz hosilaga ega va  da .

(3) formuladan foydalanish uchun avval o‘zgaruvchini almashtiramiz. . U holda

 

yoki

 . (4)

 *Misol*.  sikloida arkasi uzunligini hisoblang.

*Yechish*. 



 **Qutb koordinatalar sistemasida yoy uzunligi**. Egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida ,  tenglama bilan berilgan bo‘lsin.  va  larni  da uzluksiz deb faraz qilamiz. Bu chiziqni parametrik ko‘rinishda yozamiz:

 

*x* va *y* dan  bo‘yicha hosilalarni hisoblaymiz:

 

Demak,

 (5)

*Misol*.  kardioida uzunligini hisoblang.

*Yechish*. Burchak 0 dan π gacha o‘zgarganda izlanayotgan yoyning yarimini hosil qilamiz. (5) dan foydalanamiz:

.

U holda

 .

**Yoy differensiali**. Yoy uzunligi  formula bilan aniqlanar edi, bu yerda *y=f(x)* funksiya [*a;b*] da aniqlangan va uzluksiz hosilaga ega. Ushbu formulada integrallashning quyi chegarasi o‘zgarmas, yuqori chegarasi esa o‘zgaruvchi deb faraz qilaylik. Yuqori chegarani *x* bilan integrallash o‘zgaruvchisini *t* bilan belgilaylik. Bu holda yoy uzunligi yuqori chegaraning funksiyasi bo‘ladi:

 

Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integralning hosilasi haqidagi teoremaga ko‘ra *s(x)* funksiya differensiallanuvchi, uning hosilasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

 .

Bundan yoy differensiali uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

 .

Demak, yoy differensiali yordamida yoy uzunligini hisoblash uchun ushbu  formulani hosil qilishimiz mumkin.

Agar  ekanligini e’tiborga olsak,

 ,

ya’ni

 

(Pifagor teoremasining analogi) hosil bo‘ladi.