**25-MAVZU: O’ZGARUVCHI KUCHNING BAJARGAN ISHI VA UNI ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA HISOBLASH. YASSI YOY VA FIGURANING OG’IRLIK MARKAZLARINING KOORDINATALARINI, INERTSIYA MOMENTINI HISOBLASH FORMULALARI**

**REJA:**

1. **O’zgaruvchan kuch ishini hisoblash.**
2. **Statik momentini, inertsiya momentlarini va og’irlik markazi koordinatalarini hisoblash.**
3. **O’zgaruvchan quvvatli elektrodvigatel ishini hisoblash.**
4. **Tekis yoyning og’irlik markazi.**

**O‘zgaruvchan kuch ishini hisoblash**. Aytaylik, moddiy nuqta biror o‘zgaruvchan  kuch ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakat qilsin. Bu nuqtaning ko‘chishini  vektor orqali belgilaymiz va kuchning yo‘nalishi ko‘chish yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lsin deb faraz qilamiz. || va || orqali  va  vektorlarning uzunligini belgilaymiz.

Agar  o‘zgarmas bo‘lsa, u holda mexanikadan ma’lumki, bajarilgan ish  ga teng bo‘ladi.

Endi  yo‘nalishni saqlagan holda modul bo‘yicha o‘zgaruvchan bo‘lgan holni qaraymiz. Shu kuch bajargan ishni hisoblaymiz. *Ox* o‘qi deb moddiy nuqta harakatlanayotgan to‘g‘ri chiziqni qabul qilamiz. Aytaylik, yo‘nalishning boshlang‘ich va oxirgi nuqtalari abssissalari mos ravishda *a* va *b* (*a<b*) bo‘lsin. [*a,b*] kesmaning har bir nuqtasida kuch moduli ma’lum qiymat qabul qiladi va *x* ning funksiyasi, ya’ni =*F(x)* bo‘ladi.

*F(x)* funksiyani uzluksiz deb hisoblaymiz. O‘zgaruvchan kuch bajargan ishini hisoblash uchun integral yig‘indini tuzish va limitga o‘tishga asoslangan algoritmdan foydalanamiz.

1. [*a,b*] kesmani  nuqtalar yordamida *n* ta bo‘lakka bo‘lamiz: .  belgilash kiritamiz, u *k*-inchi qism kesma uzunligiga teng. Ma’lumki, butun yo‘ldagi ishni *A* bilan,  qism kesmada bajarilgan ishni *Ak* bilan belgilab, quyidagiga ega bo‘lamiz: .

Agar  ni yetarlicha kichik qilib olsak, u holda har bir bunday kesmada  deb qarash mumkin.

2. Har bir  qism kesmadan ixtiyoriy nuqtani tanlab olamiz va *F(x)* funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz.

3. Har bir qism kesmada kuchning moduli o‘zgarmas qiymatga ega va *F(x)* funksiyaning  nuqtadagi qiymatiga teng deb faraz qilamiz: . Bu holda kuchning  kesmadagi ishi  bo‘ladi.

O‘zgaruvchan kuchning butun yo‘ldagi ([*a,b*] da) ishi uchun



munosabat o‘rinli bo‘ladi.

4.  dagi *An* ning limiti mavjud bo‘ladi (chunki *F(x)* farazga ko‘ra uzluksiz) va o‘zgaruvchan kuchning *a* nuqtadan *b* nuqtagacha bo‘lgan to‘g‘ri chiziqli yo‘ldagi ishini ifodalaydi:

 (1)

*Misol*. Agar prujinani 0,05 m ga cho‘zish uchun 2 H kuch sarf qilinsa, u holda bu prujinani 0,1 m ga cho‘zish uchun bajariladigan ishni hisoblang.

*Yechish*: Guk qonuniga ko‘ra prujinani cho‘zuvchi (siquvchi) kuch moduli  shu cho‘zishga (siqishga) proporsional bo‘ladi, ya’ni  bu yerda *x-*cho‘zilish (siqilish) kattaligi. Shartga ko‘ra , bundan . (1) formulaga ko‘ra

.

**O‘zgaruvchan quvvatli elektrodvigatel ishini hisoblash**. Endi ishni topishga doir boshqa masalani qaraymiz. Dvigatelning  vaqt oralig‘ida bajargan ishini hisoblaymiz, bunda uning *t* vaqtdagi quvvati ma’lum va *N(t)* ga teng qaraymiz.

Yuqoridagi algoritmdan foydalanamiz:

1. [*a,b*] kesmani *n* ta bo‘lakka ajratamiz: [*tk-1, tk*], .

2. Har bir [*tk-1, tk*] qism kesmadan ixtiyoriy  nuqtani tanlaymiz.

3. Har bir qism kesmada quvvatni o‘zgarmas va  ga teng deb qaraymiz. U holda

.

*N(t)* funksiyani uzluksiz deb qaraymiz va  da limitga o‘tamiz. Natijada

 (2)

formulaga ega bo‘lamiz.

*Misol*.  vaqt oralig‘ida o‘zgaruvchi tok bajargan ish va o‘rtacha quvvatini hisoblang.

Bunda tok kuchi formula bilan aniqlanadi (*I0*- tokning maksimal qiymati,  -doiraviy chastota, *t*-vaqt, zanjir qarshiligi *R*-ga teng)

*Yechish*. Ma’lumki, o‘zgarmas tok kuchining quvvati *N=I2R* formula bilan aniqlanadi. (2) formulaga ko‘ra

.

O‘zgaruvchan tokning o‘rtacha quvvati esa  ga teng bo‘ladi.

**Statik momentlarni, inersiya momentlarini va og‘irlik markazi koordinatalarini hisoblash**.

Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

**1-ta’rif**. *m* massali *A(x,y)* moddiy nuqtaning *Ox* o‘qqa (*Oy*) nisbatan *statik momenti* deb son jihatdan nuqta massasini nuqtadan *Ox* o‘qiga bo‘lgan masofa ko‘paytmasiga teng bo‘lgan kattalikka aytiladi:



**2-ta’rif**. *m* massali *A(x,y)* moddiy nuqtaning *Ox* (*Oy* o‘q, *O* nuqta) ga nisbatan *inersiya momenti* deb shu nuqta massasini *Ox* (*Oy*, *O* nuqta) gacha bo‘lgan masofa kvadrati ko‘paytmasiga teng bo‘lgan kattalikka aytiladi:



Agar  massali  moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsa, u holda statik momentlar

 (1)

inersiya momentlari



formulalar bilan hisoblanadi.

**3-ta’rif***.* Moddiy nuqtalar sistemasining *og‘irlik markazi* deb quyidagi xossaga ega bo‘lgan nuqtaga aytiladi: agar bu nuqtaga sistema massasi  qo‘yilsa, u holda uning ixtiyoriy o‘qqa nisbatan statik momenti sistemaning shu o‘qqa nisbatan statik momentiga teng bo‘ladi.

Og‘irlik markazi koordinatalarini *S()* deb belgilasak, u holda ta’rifga ko‘ra



hosil qilamiz. Shunday qilib, moddiy nuqtalar sistemasining og‘irlik markazi koordinatalari



formula bilan hisoblanadi.

**Tekis yoyning og‘irlik markazi**. To‘g‘rilanadigan *AB* yoy bo‘ylab  zichlik bilan biror modda joylashgan bo‘lib, bu yoyning parametrik tenglamalari



bo‘lsin (parametr sifatida *l* –yoy uzunligi olingan), bunda *L -* butun yoy uzunligi *x(l), y(l)* lar [*0;L*] da uzluksiz funksiyalar.

[*0*;*L*] ning biror bo‘linishini olamiz:

*0=l0<l1< . . . <ln=L.*

Natijada *AB* yoy *Pk-1Pk* qismlarga bo‘linadi, bunda

*Pk=Pk(xk,yk), xk=x(lk), yk=y(lk)*

*Pk-1Pk* yoyga joylashgan massa . Shu massani *Pk* nuqtaga markazlashtiramiz. U holda sistema og‘irlik markazining koordinatalari taqriban



bo‘ladi. *x(l)* va *y(l)* funksiyalar uzluksiz bo‘lgani uchun yuqoridagi integral yig‘indilarning  dagi limiti mavjud bo‘ladi va ta’rifga ko‘ra og‘irlik markazning kooradinatalari shu limitlarga teng deb qabul qilinadi:

.

*AB* yoy tenglamasi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. U holda  bo‘ladi.

**1-teorema** (Guldinning birinchi teoremasi). *AB* tekis yoyni shu tekislikda yotgan yoy bilan kesishmaydigan biror o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirtning yuzi shu yoyning uzunligi bilan uning og‘irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko‘paytmasiga teng.

**Isboti***.* *AB* yoy tenglamasi  ko‘rinishda bo‘lsa, u holda

.

Bu tengliklarning ikkinchisini  ga ko‘paytirsak,



hosil bo‘ladi. Ushbu tenglikning o‘ng tomoni *AB* yoy *Ox*  o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtning yuzi bo‘lib, chap tomoni yoy uzunligi bilan uning og‘irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko‘paytmasidir.

*Misol*.  yarim aylananing og‘irlik markazi koordinatalarini topish talab qilinsin.

 ,

chunki integral ostidagi funksiya toq. Demak, yarim aylananing og‘irlik markazi  nuqtada joylashgan.

**Tekis figuraning og‘irlik markazi**.    uzluksiz egri chiziqlar va *x=a, x=b, a<b* to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan *G* tekis figura bo‘ylab zichligi o‘zgarmas  bo‘lgan biror modda joylashgan bo‘lsin. [*a;b*] kesmani

*a=x0<x1<… <xn-1<xn=b*

nuqtalar yordamida *n* ta bo‘lakka bo‘lib, *G* figuraga *n* ta to‘g‘ri to‘rtburchak chizamiz. Bu to‘rtburchakning balandligi  ga, asosi esa  ga teng (*k=1,2…,n*). Bu holda har bir to‘rtburchakka joylashgan modda massasi



bo‘ladi (bunda - jismning zichligi). To‘rtburchak diagonalari kesishgan nuqtaning, ya’ni og‘irlik markazining koordinatalari quyidagicha yoziladi:

 U holda *n* ta to‘rtburchakdan iborat bo‘lgan figuraning og‘irlik markazi koordinatalari quyidagicha yoziladi:

,

.

Bulardan  da  bo‘lib, *M* nuqta *G* figuraning og‘irlik markazi bo‘ladi. Shuningdek,

,

bunda *S* berilgan *G* figuraning yuzidir. Endi



 ekanligini e’tiborga olsak,

 bo‘ladi va

 chunki  da



(bunda ). Demak,  da

, .

Agar *G* figura egri chiziqli trapetsiya bo‘lsa , u holda

 

bo‘ladi. Bunda - egri chiziqli trapetsiyaning yuzi. Bu holda

 tenglikdan  yoki  bo‘lib,

quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi:

**2-teorema** (Guldinning ikkinchi teoremasi). Tekis figurani o‘zi bilan kesishmaydigan o‘q atrofida aylantirish natijasida hosil bo‘ladigan figuraning hajmi  shu figuraning yuzi *S* va uning og‘irlik markazi chizgan aylananing uzunligi ko‘paytmasiga teng.