

D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarov,
A.R.Qutimurotov, N.Yo'.Toshboeva.

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TALIM VAZIRLIGI
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI**

**D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarov, A.R.Qulimurotov,
N.Yo'.Toshboeva**

-13819/53-

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

O'QUV QO'LLANMA

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIV TALIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
AXBOROT RESURS MARKAZI**

**Toshkent
«Yangi chirchiq book»2022**

D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarov, A.R.Qutlimurotov, N.Yo'. Toshboeva.
Differensial tenglamalar. O'quv qo'llanma.
-T.: "Yangi chirchiq book", 2022, 112 bet.

UO'K: 53;520

KBK: 22.3;22.6

M 32

Ushbu o'quv qo'llanma Fizika va astronomiya o'qitish metodikasi, Fizika, Astronomiya bakalavr ta'lim yo'nalishlarining o'quv rejasidagi matematika va tabiiy-ilmiy fanlar blokiga tegishli fanlarning o'quv dasturlari talablari asosida tayyorlangan bo'lib, unda amaliy mashg'ulotlarni o'z ichiga olgan ma'lumotlar berilgan.

O'quv rejalardagi matematika va tabiiy-ilmiy fanlar blokiga tegishli fanlarning xususiyatlaridan kelib chiqib, qo'llanmada "Oliy matematika" kursining differensial tenglamalar bo'limiga oid asosiy tushuncha va tasdiqlar yoritilgan bo'lib, ularning fizik mazmuni va tabiiqlari ko'rsatilgan. mavzular bo'yicha mustaqil ishi uchun topshiriqlar va ularni yechilish usullari hamda talabalar uchun foydali bir qator tavsiyalar berilgan.

Qo'llanma oliy ta'lim muassasalarining fizika, astronomiya hamda texnika yo'nalishlari talabalar, tayanch doktorantlari va ilmiy izlanuvchilar uchun mo'ljallangan.

Tag'rizchilar: dots. E.I.Quchqorov (O'zMU)

dots. E.M.Maxkamov (ChDPI)

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2021-yil 25-dekabrda 538-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruxsan berilgan.

ISBN: 978-9943-9169-6-8

© D.M.Maxmudova va boshq.,
© "Yangi chirchiq book" nashriyoti, Toshkent, 2022 y.

SO'Z BOSHI

Yosh mutaxassislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda matematika alohida o'rinda ega. Matematikani o'rganish jarayonida inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur qobiliyatlari: ijodiy fikrlash, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, tahliliy mulohaza, abstrakt tafakkur shakllanib boradi.

Tabiatda uchraydigan juda ko'p qonunlarni, jarayonlarni differensial va integral tenglamalar bilan ifodalash mumkin. Differensial tenglamalar fani erki o'zgaruvchi, funktsiya, funktsiyaning hosilalari orasidagi funksional bog'lanishlarni o'rganuvchi fan bo'lib, mazkur faning natijalari fizikaning kinematika, dinamika, to'liqlar nazariyasi va boshqa ko'plab bo'limlarini o'rganishda muhim rol o'ynaydi.

O'zgaruvchan kuch ta'siridagi harakatlar, Nyutonning ikkinchi qonuni, tebrama harakatlar kabi fizik jarayonlarni differensial hisob tili bilan tavsiflash mazkur jarayonlarni o'rganishni juda soddalashtiradi. Mana shularning o'ziyoq differensial tenglamalar fanini fizika va astronomiya yo'nalishlarida o'qitilishining ahamiyati muhim ekanligini ko'rsatadi.

Differensial tenglamalar fizika yo'nalishi bo'yicha bakalavr tayyorlash o'quv rejasidagi asosiy fanlardan biridir. Bu fan oddiy differensial, xususiy hosilali va sodd integral tenglamalarni analitik usul bilan va sifat jihatidan o'rganishni o'z oldiga asosiy maqsad qilib qo'yadi.

Mazkur fan talabalarni oddiy differensial tenglamalarni yechish, echimining xossalari o'rganish bilan bir qatorda shu tenglamalar bilan ifodalanadigan fizik jarayonlar haqida tasavvurga ega bo'lishlariga imkon beradi.

Shu bilan bir qatorda differensial tenglamalar kursi o'zidan keyin yoki parallel qo'yiladigan matematik va ba'zi fizik kurslar uchun asos yoki zaruriy apparat sifatida qo'llaniladi.

O'quv qo'llanma differensial tenglamalarga oid mavzular: mavjudlik teoremlari, birinchi tartibli differensial tenglamalar, yuqori tartibli differensial tenglamalar, differensial tenglamalar sistemalarini to'liq qamrab olgan.

Tavsiya etilayotgan ushbu o'quv qo'llanmada zamonaviy fan yutuqlari, respublikamizning shu sohada tanqil olimlarining ilmiy-tadqiqot ishlari natijalari o'z aksini topgan.

O'quv qo'llanmani pedagogika oliy ta'lim muassasalarining fizika va astronomiya o'qitish metodikasi talabalari, aspirantlar, matematika o'qituvchilari hamda mazkur fan yo'nalishida ilmiy tadqiqot izlanishlarini olib borayotgan ilmiy xodimlar uchun tavsiya etish mumkin.

Mualliflar

I BOB. BIRINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENTIAL TENGLAMALAR



1.1-§. Differensial tenglamalar faniga kirish. Asosiy tushunchalar. Koshi masalasi.

REJA:

- Differensial tenglamalarga keltiriladigan tabiiy fanlar masalalari.
- Yechim, umumiy yechim tushunchalari.
- Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar. Koshi masalasi.
- Koshi masalasining yechimi haqidagi teorema.

Tayanch iboralar

Birinchi tartibli tenglamalar, umumiy yechim, Koshi masalasi, ekvivalentlik lemmasi, Gronuoll lemmasi, Pikar teoremasi, Lipshtist sharti.

Hozirgi kunda fan-texnika rivojlanib borgan sari matematikani roli ortib bormoqda. Shu jumladan matematikadan fizika, mexanika va astronomiya hamda iqtisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni tahlil etishda va boshqa ko'p sohalarida foydalaniladi. Bu sohalaridagi jarayonlarni matematik modeli differensial tenglamalar nomi bilan yuritiladi.

Erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya va uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglamaga **differensial** tenglama deyiladi va umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Agar noma'lum funksiya bir argumentli bo'lsa, u holda tenglama **oddiy differensial tenglama** deb, agar noma'lum funksiya ko'p o'zgaruvchili bo'lsa, u holda tenglama **xususiy hosilali differensial tenglama** deb aytiladi.

1-misol. Faraz qilaylik moddiy nuqta OX o'qi bo'ylab xarakat qilsin. Xarakat funksiyasi $f(t)$ bo'lsin. Bundan tashqari biror $t=t_0$ momentda uning absissasi x_0 qiymatni qabul qilsin. Shu moddiy nuqtani xarakat qonunini toping.

Bu masalaning matematik modeli

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

ko'rinish bilan ifodalanadi.

2-misol. Radiativ modda hisoblangan radiyini parchalanish tezligi uning miqdoriga to'g'ri proporsional. Faraz qilaylik, t momentda R_0 g radiy bor bo'lsin. Ixtiyoriy t momentda R g radiy miqdorini aniqlang.

Agar proporsionallik Koeffitsienti $c(c>0)$ ga teng bo'lsa, u holda masala ushbu differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

$$\frac{dR}{dt} = -cR$$

Bu tenglamani $t=t_0$ da $R=R_0$ ga teng bo'ladigan yechimi

$$R=R_0 e^{-c(t-t_0)}$$

funksiya bilan ifodalanadi. Yuqoridagi masalalardan ko'rinishda bitta differensial tenglamani bir necha funksiyalar qanoatlantirishi mumkin, shuning uchun differensial tenglamalar nazariyasining asosiy maqsadi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va ularning xususiyatlarini o'rganishdan iborat.

Differensial tenglamalarni **tartibi** tenglamada qatnashgan eng yuqori tartibli **hosila tartibi** bilan aniqlanadi.

1-ta'rif. Ushbu

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

tenglama hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

2-ta'rif. Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglama hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

3-ta'rif. Agar

$$y = \phi(x, c) \quad (3)$$

funksiyalar oilasi (1) tenglamani ayniyatga aylantirsa, u holda ushbu (3) funksiyalar oilasi (1) tenglamani **umumiy yechimi** deyiladi.

4-ta'rif. Umumiy yechimdan c -o'zgarmas sonning har bir qiymatlari uchun hosil bo'lgan yechimi **xususiy yechim** deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan 1 va 2 masalalardagi (t_0, x_0) , (t_0, R_0) nuqtalardan o'tuvchi yechimlarni yagonaligi muhim ahamiyatga ega, shuning uchun berilgan (t_0, x_0) nuqtadan bitta yechim o'tsa shu nuqtada yagonalik o'rinni deb yuritiladi.

5-ta'rif. Yagonalik o'rinni bo'lmagan yechim **maxsus yechim** deyiladi.

3-misol: Tenglamani yeching

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (y \geq 0)$$

Bu yerda $y \neq 0$ deb olib $\frac{y'}{y} = 1$ yoki $(\sqrt{y})' = 1$ tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan $\sqrt{y} = x + c$ ($x > -c$) yoki $y = (x + c)^2$ ($x \geq -c$) umumiy yechimga ega bo'lamiz.

Bundan tashqari $y \geq 0$ ham tenglamani yechimi, bu maxsus yechim bo'ladi. $Y=0$ ni, ya'ni OX o'qini ixtiyoriy nuqtasidan

$$y = (x - x_0)^2 \quad (x \geq x_0)$$

yurim parabola o'tadi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalalardan biri Koshi masalasi deb yuritiladi.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

ko'rinishdagi tenglama uchun Koshi masalasi quyidagicha qo'yiladi.

Koshi masalasi: (1) tenglamani

$$y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

shartni qanoatlantiradigan yechimini topish masalasi Koshi masalasi deyiladi yoki boshlang'ich masala deb yuritiladi.

Bunda x_0 va y_0 berilgan sonlar bo'lib $f(x, y)$ funksiya aniqlangan sohaga tegishli bo'ladi. (4) tenglamani yechimi bo'lgan $y = \phi(x)$ yoki oshkormas ko'rinishda $\phi(x, y)$ funksiyani mos egri chizig'i (grafigi) **integral chiziq** deb ataladi. Koshi masalasi, geometrik nuqtaiy-nazardan qaraganda barcha integral chiziqlar ichidan berilgan (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral chiziqni topish masalasidir.

4-misol: Koshi masalasining yechimi mavjudmi?

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y} & (x_0 = 0, y_0 = 0) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Bu differensial tenglamani umumiy ko'rinishi $y' = F(x, y)$ $F(x, y) = -\frac{x}{y}$, bo'lib, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y^2}$ tenglik $y = 0$ da ma'noga ega emas, bu Koshi masalasini yechimi mavjud emasligini bildiradi.

Demak, Koshi masalasi har doim ham yechimga ega emas, agar yechim mavjud bo'lsa u yagona bo'ladimi?, kabi savol berilishi tabiiy.