ХУРРАМОВ АНВАР
КОМОЛОВ ЭШМУРОД

МАТЕМАТИК ВА КОМПЬЮТЕРЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

ЎЗБЕКСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ТАЪЛИМ, ФАН ВА ИННОВАЦИЯЛАР ВАЗИРЛИГИ

ЧИРЧИҚ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ

ХУРРАМОВ АНВАР
КОМОЛОВ ЭШМУРОД

-141160/42-

МАТЕМАТИК ВА КОМПЬЮТЕРЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
AXBOROT RESURS MARKAZI

ЧИРЧИҚ - 2023

УДК 51;004.7
ББК 22.1;32.97
Х-91

Хуррамов А., Комолов Э. / Математик ва компьютерли моделлаштириш/ Дарслик – Чирчик «City of book», 2023. - 228 бет.

Тақризчилар:

Якубов М.С. – Тошкент ахборот технологиялари университети, Ахборот технологиялари кафедраси профессори, техника фанлари доктори.

Ражабов Б. – ЧДПУ Алгебра ва математик анализ кафедраси профессори, техника фанлари доктори.

Ушбу дарслик амалий масалаларни ечишда кенг фойдаланиб келинаётган математик ва компьютерли моделлаштириш усулларига бағишланган. Дарсликда математик ва компьютерли моделлаштиришнинг асосий тушунчалари, моделлаштириш жараёнининг асосий босқичлари келтирилган бўлиб, айрим амалий масалаларнинг моделларини қуриш кўрсатиб берилган. Шунингдек математик моделларни ечишда кўп фойдаланиладиган сонли ечиш усуллари ҳамда уларнинг айримлари учун дастурий таъминотлар берилган.

Мазкур дарслик олий ўқув юртларининг 60110600 – математика ва информатика бакалавр йўналиши ҳамда 70110601, 70110602 ва 70110701 магистратура мутахассисликлари бўйича таълим олаётган магистрантларга мўлжалланган.

ИСБН 978-9910-751-50-9

© Хуррамов А. ва б., 2023 й.
© «City of book», 2023 й.

КИРИШ

Ҳар қандай тадқиқотчи ўз соҳасига тегишли муаммоларни ҳал қилиш йўлида изланишлар олиб боради ва бу муаммони ҳал қилишда турли хил усуллардан фойдаланади.

Жараёнларни таҳлил қилиш соҳаси XVIII-XIX асрларда пайдо бўлиб у ишни ташкил қилиш ва ишлаб чиқаришда қўлланила бошланди. Саноат корхоналаридаги кўпгина аниқ масалаларни ечимини топишда А.Смит, Чарлз Беббирт, Ф.Тейлор, Г.Гентлар ижобий натижаларга эришган бўлса, 1840 йил Буюк Британияда почта орқали маълумотларни узатиш ва қабул қилиш масаласининг модели (Беббирт усули)дан фойдалана бошлади.

Кейинчалик ўйинлар назарияси учун Д.Нейман, чизиқли дастурлаш масалалари учун Д.Дансик ва Л.В.Канторовичлар моделлаштириш усулларини қўллаб ижобий ютуқларга эришди.

Қўйилган масалаларни чуқур ва ҳар томонлама ўрганиш мақсадида унинг моделлари яратилади. Моделлаштириш усулларини ишлаб чиқиш бевосита кибернетика фанининг пайдо бўлиши билан боғлиқ бўлиб, тезкор компьютерлар бу усулни турли соҳаларга тадбиқ қилиш имкониятларига кенг йўл очиб берди.

Математик моделнинг аниқлиги у орқали олган натижаларни ҳақиқий объектга қанчалик мос келиши билан баҳоланади. Математик моделда объектнинг барча хосса ва хусусиятларини эътиборга олиш мураккаб бўлганлиги учун, унда объектнинг энг характерли ва муҳим хусусиятлари акс эттирилади. Бинобарин, моделнинг адекватлиги тўпланган маълумотлар ҳажмига, уларнинг аниқлик даражасига, тадқиқотчининг малакасига ва моделлаштириш жараёнида аниқланадиган ўзгарувчилар кўламига боғлиқ бўлади.

Бугунги кунда барча соҳаларда эришилаётган юксак ютуқ ва муваффақиятлар сабаби бевосита шу соҳада замонавий компьютер технологияларидан кенг ва самарали фойдаланганлик натижасидир. Кейинги пайтларда кўпгина соҳа масалаларини ечишда ахборот технологиялари ҳамда математик ва компьтерли моделлаштириш усулларидан кенг фойдаланиб келинмоқда. Бу эса масалаларини янада тез ва сифатли ечиш, натижаларни турли хил кўринишда тасвирлаб бериш имкониятларини яратиб берди.

Дарсликдан, аниқ фан йўналишларида таълим олаётган талабалар, шунингдек ахборот технологиялари ва жараёнларни моделлаштириш соҳаси билан шуғулланувчи магистрлар ҳамда «Сонли усуллар», «Математик моделлаштириш» ва «Олий математика» фанларидан билим бераётган ўқитувчилар фойдаланиши мумкин.

I БОБ. МАТЕМАТИК ВА КОМПЬЮТЕРЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ АСОСЛАРИ

1.1. Асосий тушунчалар. Моделлаштиришнинг асосий босқичлари

Амалий масалаларнинг математик ва компьютерли моделлари одатда ҳар хил математик муносабатлар ва дастурий таъминотлардан ташкил топган бўлиб, улар қаралаётган масаланинг энг мухим бўлган хосса ва хусусиятларини ўз ичида қамраб олади.

Моделлаштириш усулларини ишлаб чиқиш бевосита кибернетика фанининг ривожланиши билан боғлиқ бўлиб, кўпгина ҳолларда тезкор компьютер имкониятларидан фойдаланилади. Бу эса масалаларни тез ва сифатли ечиш, натижаларни турли хил кўринишларда ифодалаш билан бирга сарф харажатларни камайтириш имконини беради.

Математик ва компьютерли моделлаштириш усули турли амалий масалаларни ечишда кенг қўлланиб келинмоқда. Математик моделлаштириш ва компьютерли моделлаштириш усули масалани тасвирлайдиган у ёки бу катталикларни миқдор жиҳатдан ифодалаш, сўнгра эса уларнинг боғлиқлигини ўрганиш имкониятини беради. Бу усулларда бир қатор (объект, жараён, модель, моделлаштириш) асосий тушунчалардан фойдаланилади.

Объект деганда турли хил хосса ва хусусиятларга эга бўлган ҳамда бирор соҳа жараёнини ифода этувчи, табиатнинг бирор элементи тушунилади. Масалан пахта териш машинасининг бирор қурилмаси, электр токи ўтказувчиси, қурилиш материаллари, ер, сув ёки сув оқаётган труба, одам ва унинг организмлари ва ҳ.к. лар объектга мисол бўла олади.

Жараён деганда махсус ташкил этилган ёки этиладиган, тизимли ҳаракат фаолиятлар тушунилади. Жараёнга мисол сифатида климатнинг ўзгариши; иқтисодни пасайиши; инфляция; каналдан сув оқиши; автомобил ҳаракати; маятникнинг тебраниши ва бошқаларни келтириш мумкин.

Ҳар бир мутахассиснинг асосий вазифаси ўз соҳаси объектларининг хосса ва хусусиятларини ўрганиш ва шу асосда янги натижаларга эришишдан иборат. Объектни ўрганиш ва у ҳақида хулосалар қилиш ўта мураккаб жараён ҳисобланиб, у бир неча хил усуллар ёрдамида амалга оширилади ва бу жараён тадқиқотчидан етарлича чуқур билим ҳамда кўникмаларга эга бўлишликни талаб этади. Умуман олганда хар қандай жараённи моделлаштириш асосан икки хил, яъни *аналитик* ва *тажриба(эксперимент)* усуллари ёрдамида олиб борилади. Аналитик усуллардан бири математик моделлаштириш усули ҳисобланади.

«Модель» сўзи лотинча «modulus» сўзидан олинган бўлиб, «намуна» сўзига мос келади ва бу тушунча инсон фаолиятининг ҳар хил сохаларида турлича маъноларда фойдаланилади.

«Модель» сўзидан қадим замонлардан фойдаланиб келинсада, XX асрда компьютерларнинг пайдо бўлиши билан бу атамадан янада кўп фойдаланила бошланди. Модель ёрдамида одамлар орасидаги мулоқат тиллари, уларнинг ёзишишлари, графикалар ривожланди.

Қадимги одамларнинг тош тасвирлари, хайкалчалар, хариталар, расмлар, китобларнинг барчаси атроф-мухит ҳақидаги билимларни кейинги авлодларга тақдим этиш ва етказишнинг модел шаклларидир.

Бирор объектнинг моделидан шу объект ҳақида етарлича аниқ ва сифатли маълумотлар олишни тезлаштириш ва маблағларни тежашда фойдаланилади. Шундай қилиб, ҳақиқий объект хусусиятлари, хатти-ҳаракатлари ёки фаолияти ҳақида маълумотлар олиш учун унинг модели зарур бўлади.

Кўпгина ҳолатларда, муайян объект ёки жараён унинг ўрнини босадиган бошқа объект билан таққосланади:

- Ҳақиқий кўприк – картон қоғоздан ясалган макети билан;
- Қон айланиш тизими – плакатдаги схема билан;
- Ер шари – глобус билан;
- Жисм ҳаракати жараёни – тенглама билан.

Масалан бошланғич v_0 тезлик ва a тезланиш билан ҳаракатланаётган жисмнинг t вақтда босиб ўтган йўлини аниқлашда

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

формуладан фойдаланилади. Бу тенглама ўзгармас тезланишли жисм ҳаракатининг модели бўлади.

Масаланинг қуйилишига боғлиқ равишда ҳар бир объект учун бир неча моделлар тузиш мумкин. Масалан объект сифатида ташқи куч таъсиридаги тўсин(балка) ни олсак, у ҳолда 1) тўсин эгилиши; 2) тўсин тебраниши; 3) тўсин тургунлигини аниқлаш каби масалаларнинг моделларини тузишимиз мумкин.

Математик модель деб, ўрганилаётган объект ёки жараённинг математик формула ёки алгоритм кўринишида ифодаланган характеристикалари орасидаги функционал боғланишга айтилади. Умуман олганда ўрганилаётган объект ёки жараённинг хосса ва хусусиятларини математик муносабатлар орқали ифодалашга шу жараённинг ***математик модели*** деб аталади. Математик модель қуриш ва уни ечиш жараёни эса ***математик моделлаштириш*** дейилади.

Объект табиатига, ечилаётган масала ва қўлланиладиган ечиш усулларига боғлиқ равишда математик моделларни қуйидаги содда синфларга ажратиш мумкин:

- чизиқли ёки чизиқсиз;
- стационар ва ностационар;
- узлуксиз ёки дискрет;
- детерминирланган ёки стохастик;
- аниқ ёки ноаниқ.

Компьютерли модель деб ҳақиқий объект ёки жараённи компьютер ёрдамида олинган моделига айтилади.

Компьютерли модель – моделлаштирилаётган тизим ҳақида компьютер воситаси ёрдамида расм, график, диаграмма, электрон жадвал, маълумотлар базаси, билимлар базаси, анимацион тасвирлар, видеороликлар ва бошқа кўринишларда ифодаланган маълумотлардир.

Фақат компьютер хотирасида мавжуд ва физик қонунларга бўйсинмайдиган виртуал объект (хотирадан ташқарида виртуал объектлар мавжуд эмас) компьютерли модель ҳисобланади.

Ҳозирги пайтда компьютерли моделлаштиришнинг икки (*функционал тузилишли* ва *имитацион*) туридан фойдаланиб келинмоқда.

Компьютер воситалари ёрдамида ифодаланган компьютерли модель (объект ҳаракати траекторияси, атомнинг учўлчовли модели, фоторобот) ***функционал тузилишли модель*** деб аталади.

Объектнинг ҳар хил шароитдаги ҳолати (маятникнинг тебраниш формаси, сувдаги тузнинг коцентрацияси, тик отилган жисм ҳаракати) ни ифодаловчи дастур ёки дастурлар комплексига ***имитацион модель*** деб аталади.

Компьютерли моделларни Excel, Word, Access, MathCad, 3DMAX каби амалий дастурлар ва ихтиёрий дастурлаш тизимлари ёрдамида шакллантириш мумкин.

Асоси математик моделдан ташкил топган компьютерли модель, ***компьютерли математик модель*** деб аталади.

Ҳар қандай жараённи математик моделлаштириш ўта мураккаб жараён бўлиб у бир неча босқич асосида амалга оширилади. Бу босқичлар билан танишиб чиқамиз.

Биринчи босқичда – жараён сифат жиҳатдан таҳлил қилиниб, масала мақсади ўрганилади, унга мос маълумотлар тўпланади. Жараённинг барча (геометрик, механик, биологик, экологик ва бошқалар) хоссалари батафсил ўрганилади, унинг асосий кўрсаткичлари аниқланади. Бу ўрганишлар шу соҳанинг етук мутахассислари томонидан амалга оширилади. Бу босқич объект ёки жараённи ўрганиш босқичи деб аталади.

Иккинчи босқич – жараённинг асосий кўрсаткичларини ифодаловчи ўзгарувчилар орасида мавжуд бўлган асосий боғланишлар аниқланади ва улар математик мунособатлар (тенглама, тенгсизлик, интеграл ва бошқалар ёки уларнинг системалари) орқали ифодаланади. Бу босқич математик модел қуриш босқичи деб аталади.

Учинчи босқичда – математик моделни ечиш усули мавжуд бўлса улар орасидан танланади, акс ҳолда моделни ечиш усули ишлаб чиқилади. Ечиш усули танланаётганда ёки ишлаб чиқилаётганда, унинг аниқлигига, тежамкорлигига,

соддалигига, оммавийлигига эътибор берилади. Бу босқич математик моделни ечиш босқичи деб аталади.

Тўртинчи босқичда – танланган ёки ишлаб чиқилган ечиш усули асосида алгоритм шакллантирилади ва у бирор алгоритм тил орқали ифодаланади, яъни дастурий таъминот яратилади. Бу босқич дастурий таъминот яратиш босқичи деб аталади.

Бешинчи босқичда – яратилган дастур тестдан ўказилади. Дастурдаги хатолар бартараф этилади. Бу ерда икки хил, яъни синтаксис (алгоритмик тилдаги) ва алгоритмик хатолар бўлиши мумкин. Синтаксис хатони компьютер орқали тез аниқлаш ва уни бартараф этиш мумкин. Алгоритмик хатоларни аниқлашда эса бироз қийинчиликлар бўлиши мумкин. Бунинг учун масалани ечиш алгоритми билан дастурга киритилган операторларнинг мослиги текшириб чиқилади. Хатолар бартараф этилгандан сўнг ечими аниқ бўлган бирор масала дастур ёрдамида ечилади ва ечимлар мослиги текширилади. Бу босқич дастурни текшириш босқичи деб аталади.

Олтинчи босқичда – ечилаётган масаланинг бирламчи бирламчи хосса ва хусусиятларини ифодалаб берувчи сонли бошланғич қийматлардан фойдаланиб ҳар хил параметрлар (моделдаги ўзгарувчилар) учун натижалар олинади. Олинган натижалар атрофлича таҳлил қилиниб, турли хил хулосалар қилинади ва керакли тавсиялар берилади. Баъзи ҳолларда математик моделни аниқлаштиришга ҳам тўғри келади.

Моделлаштириш босқичларини схематик равишда қуйидаги кўринишда ифодалашимиз мумкин.

1.2. Модель адекватлиги

Модель адекватлиги - моделлаштириш жараёни ёрдамида олинган натижаларнинг ҳақиқий натижаларга шу билан бирга кейинги амалларни бажаришда номаълумларнинг олдинги аниқлаштирилган қийматидан фойдаланилса.

Сонли-аналитик усул – бу юқорида айтилган икки усулнинг комбинациясидан ташкил топган усулдир. Бу усулда масала ечими асосан хосмас интеграл, чексиз қатор, махсус функциялар ёки уларнинг комбинациялари кўринишида ифодаланади, лекин натижалар олинаётганда айрим тақрибий ҳисоблашлардан фойдаланилади.

1.4. Моделлаштиришда хатоликлар ва уларни баҳолаш

Маълумки, математик моделда жараённинг асосий хосса ва хусусиятлар ўз аксини топади. Моделни ечишда фойдаланиладиган бирламчи бошланғич маълумотлар қийматлари ҳар доим аниқ бўлавермайди. Моделларни ечишда тақрибий ечиш усулларидан фойдаланилади. Буларнинг барчаси моделлаштириш жараёнида хатоликлар келиб чиқишига сабаб бўлади. Савол туғилади: бу хатоликлар қандай турланади ва баҳоланади? Бу саволларга жавоб бериш ҳар бир мутахассис учун жуда муҳим аҳамиятга эга.

Моделлаштиришда хатоликлар ва уларнинг турлари. Маълумки, моделлаштириш жараёнининг кўпгина босқичларида тақрибий алмаштириш ёки тақрибий ҳисоблашлардан фойдаланилади. Бу эса масаланинг ечими қандайдир хатоликлар билан, яъни масаланинг тақрибий ечими ҳосил бўлишига олиб келади. Моделлаштиришда ҳосил бўлган хатоликларни қандай баҳолаш мумкин, деган савол барча мутахассисларни қизиқтириб келади. Бу саволга жавоб бериш мақсадида *абсолют* ва *нисбий хато* тушунчалари киритилади.

Агар бирор миқдорнинг аниқ қийматини x ва унинг тақрибий ҳисоблаш натижасида олинган қийматини $\bar{x}$ деб олсак, у ҳолда *абсолют хато* деб

$$\Delta x = |x - \bar{x}|$$

га, *нисбий хато* деб эса,

$$\delta x = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} \cdot 100\% = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%$$

га айтилади.

Моделлаштиришда ҳосил бўладиган хатоликларнинг келиб чиқиш манбаларини, асосан тўрт гуруҳга ажратиш мумкин.

Биринчи гуруҳ хатолар ечилаётган масаланинг математик моделини қуриш билан боғлиқ хатолардир. Маълумки, моделда масаланинг асосий хосса ва хусусиятлари эътиборга олинади, агар моделда масаланинг барча хусусиятларини ҳисобга олиш имкони бўлса, у ҳолда бу модель ўта мураккаб кўриниш олади, натижада эса уни ечиш имкони бўлмай қолади. Математик модель қуришда фойдаланилган гипотезалар ҳисобига баъзи хатоликлар пайдо бўлади. Бу хатоликлар *математик модель хатоси* деб аталади.

Иккинчи гуруҳ хатолар масаланинг ечиш учун бериладиган бошланғич қийматларидаги хатоликлардир. Ўлчаш ва ҳисоблаш натижасида ёки тажриба(эксперимент) усули ёрдамида олинган бирламчи бошланғич қийматлар ҳар доим ҳам аниқ бўлавермайди. Чунки бу қийматлар ўлчаш асбобларининг аниқлигига, ҳисоблаш усулларига, тажриба ўтказиш шароитларига боғлиқ бўлади. Бу гуруҳ хатоликлар одатда *кутилиб бўлмайдиган хатолар* деб аталади.

Учинчи гуруҳ хатолар масалани ечиш усулидаги мавжуд хатолардир. Маълумки, аксарият ҳолларда моделларни ечишда аналитик, яъни аниқ усуллардан фойдаланиш имконияти бўлавермайди, натижада тақрибий сонли ечиш усулларидан фойдаланилади ва масаланиг тақрибий ечими ҳосил бўлади. Бу ерда йўл қўйилган хатолар *ечиш усулининг хатоси* деб аталади.

Тўртинчи гуруҳ хатолар бевосита ШКларда ҳисоблашни ташкил этиш билан боғлиқ бўлган хатоликлардир. ШКлардаги ҳисоблашларда сонларни яхлитлаш унинг разрядига боғлиқ равишда амалга оширилади. Бу хатолар одатда *ҳисоблаш хатоликлари* деб аталади.

Айрим ҳолларда баъзи хатоликлардан қутулиш учун қуйидаги таклифларни эътиборга олиш мақсадга мувофиқ бўлади:

- қиймати ҳисобланадиган ифодаларни имкони борича соддалаштириш ва унда бажариладиган амаллар сонини энг кам миқдорга келтириш;

- агар бир қатор сонлар устида қўшиш-айириш амалларини бажариш лозим бўлса, дастлаб кичик сонлар устида амалларни бажариш;

- оралиқ ҳисоблашларда қийматлари деярли тенг бўлган миқдорлар устида айириш амалини бажармаслик.

1.5. Баъзи бир масалаларнинг математик модели.

Масаланинг математик моделини қуриш ўта мураккаб жараён ҳисобланади. Чунки бунинг учун тадқиқотчи масалани шу соҳа мутахассиси сифатида ҳар тарафлама чуқур ўрганган бўлишлиги талаб этилади. Жараёнда қатнашадиган параметрлар орасидаги геометрик, механик, биологик, экологик ва бошқа боғланишларни тўғри ифодалай олиши керак.

Қуйида баъзи бир амалий масалаларнинг математик моделини қуришга мисоллар келтириб ўтамиз.

1-масала. Концентрацияси 0,1 ва 0,7 бўлган икки хил шўрланган сув аралаштириб юборилди ва концентрацияси 0,25 бўлган хажми 400 граммга тенг аралашма ҳосил қилинди. Ҳар бир шўрланган сувдан қанчадан олинганлигини аниқлаш масаласининг математик моделини тузинг.

Ечиш.

1) x ва y деб мос равишда биринчи ва иккинчи шўр сув массаларини белгилайлик:

$$x + y = 400.$$

2) Биринчи шўрланган сувдаги туз миқдори: $0,1 \cdot x$;

3) Иккинчи шўрланган сувдаги туз миқдори: $0,7 \cdot y$;

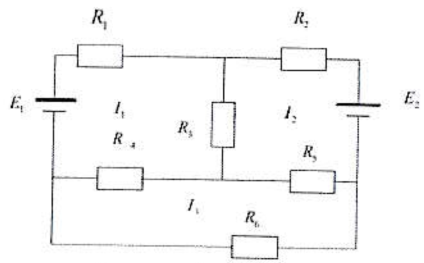
4) Аралашмадаги туз миқдори: $0,1 \cdot x + 0,7 \cdot y = 0,25 \cdot 400 = 100.$

У ҳолда қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 0,1 \cdot x + 0,7 \cdot y = 100 \end{cases}$$

Охирги система қарааётган масаланинг математик модели бўлади.

2-масала. Қуйидаги чизмада келтирилган электр тармоғидаги ток кучларини аниқлаш масаласининг математик моделини тузинг.



Ечиш. Маълумки, Кирхгофнинг иккинчи қонунига асосан, ҳар қандай ёпиқ циклдаги барча кучланишларнинг алгебраик йиғиндиси 0 га тенг.

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_4)I_1 + R_3I_2 + R_4I_3 = E_1, \\ R_3I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 - R_5I_3 = E_2, \\ R_4I_1 - R_5I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 = 0. \end{cases}$$

Ушбу чизиқли алгебраик тенгламалар системаси қаралаётган масаланинг математик модели бўлади. Агар ушбу математик моделда қатнашган параметрларга $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $R_3 = 2$, $R_4 = 1$, $R_5 = 2$, $R_6 = 4$, $E_1 = 23$, $E_2 = 29$ аниқ қийматлар берсак у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} 4I_1 + 2I_2 + I_3 = 23, \\ 2I_1 + 5I_2 - 2I_3 = 29, \\ I_1 - 2I_2 + 7I_3 = 0. \end{cases}$$

3-масала. Уч хилдаги t_1, t_2, t_3 қишлоқ хўжалиги маҳсулотларини етиштириш учун тўрт хил y_1, y_2, y_3, y_4 хом ашё талаб қилинади. Хом ашё захиралари, бирлик маҳсулотни ишлаб чиқиш учун зарур бўлган хом ашё миқдори, бирлик маҳсулотдан олинадиган фойда қуйидаги жадвалда келтирилган:

Хом ашё турлари	Хом ашё захираси	Бирлик маҳсулот ишлаб чиқазиш учун зарур бўлган хом ашё

		миқдори		
		t_1	t_2	t_3
y_1	30	2	4	3
y_2	40	3	3	5
y_3	50	5	5	2
y_4	20	4	2	3
Бирлик маҳсулотдан олинадиган фойда		30	20	40

Маҳсулот ишлаб чиқариш учун шундай режа тузиш керакки, хом ашё сарфи унинг захирасидан ошиб кетмаслиги ва ишлаб чиқилган маҳсулотдан максимал фойда олиниши керак.

Ечиш: x_1, x_2, x_3 билан мос равишда ишлаб чиқиладиган биринчи, иккинчи ва учинчи маҳсулот миқдорларини белгилайлик. y_1 сатридаги 2, 4, 3 сонлари мос равишда t_1, t_2, t_3 бирлик қишлоқ хўжалиги маҳсулотларини етиштириш учун зарур бўлган хом ашё миқдори бўлганлиги учун, уларни мос равишда хом ашё миқдорлари x_1, x_2, x_3 ларга кўпайтириб қўшсак, биринчи турдаги маҳсулот тайёрлаш учун керакли хом ашёнинг умумий сарфини ҳосил қиламиз:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Хом ашёнинг умумий сарфи унинг захирасидан ошиб кетмаслиги керак, яъни

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 30$$

Худди шу каби муносабатларни қолган маҳсулотлар учун ҳам ҳосил қиламиз:

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 40$$
$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 50$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20$$

Маҳсулотлардан олинадиган умумий фойда эса қуйидаги функция ёрдамида ифодаланади:

$$z = 30x_1 + 20x_2 + 40x_3$$

Маҳсулотдан энг кўп фойда олиш учун x_1, x_2, x_3 ларни шундай қийматларини аниқлашимиз керакки, юқоридаги функция ўзининг максимум қийматига эга бўлиши керак:

$$z = 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$

Маълумки, етиштириладиган маҳсулот миқдори номанфий қийматларни қабул қилиши керак, яъни $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Юқоридаги муносабатларни умумлаштириб, берилган масаланинг қуйидаги математик моделини ҳосил қиламиз:

$$z = 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 30$$
$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 40$$
$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 50$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Эслатиб ўтамиз, кўпгина иқтисодий масалаларнинг математик модели мана шу кўринишда ифодаланади.

4-масала. Фирма янги махсулот ишлаб чиқарди ва уни сотиш учун реклама эълон қилди. Мумкин бўлган барча N та харидордан N_0 таси бу рекламадан хабардор бўлди. Қолган харидорларга янги махсулот ҳақидаги реклама ўзаро бир-бири билан мулоқат орқали тарқатилди. Рекламани тарқалиш жараёнининг математик моделини тузинг.

Ечиш. $x(t)$ – маълум t вақтда реклама билан танишган харидорлар сони бўлсин. У холда реклама билан танишмаган харидорлар $(N - x)$ га тенг бўлади. Реклама тарқалиш тезлиги $\frac{dx}{dt}$ реклама билан таниш ва таниш бўлмаган харидорлар сонига пропорционал бўлади, яъни

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x), \qquad (1.5.1)$$

бу ерда k – пропорционаллик коэффициенти (бу коэффициентни коммуникабеллик коэффициенти ҳам деб аташади).

Дастлаб рекламадан хабардор бўлган харидорлар сони N_0 та эди. Шунинг учун

$$t = 0 \text{ да } x(0) = N_0 \qquad (1.5.2)$$

(1.5.1) дифференциал тенглама ва (1.5.2) бошланғич шарт биргаликда масаланинг математик модели бўлади.

5-масала. m массали жисм v_0 бошланғич тезлик билан α бурчак остида тепага отилди. Ҳаво қаршилигини ҳисобга олмаган ҳолда жисм ҳаракатини аниқлаш масаласининг

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
AXBOROT RESURS MARKAZI
—1480/42—

математик моделини тузинг ва уни ечиб, олинган натижани таҳлил қилинг.

Ечиш. $x(t)$ ва $y(t)$ орқали жисмнинг t вақтдаги ҳолатини кўрсатувчи координаталарини белгилайлик. У ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонуни $F = ma$ га асосан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -mg' \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = C_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + C_2 \end{cases}.$$

Бошланғич шарт қуйидагича берилган бўлсин. $t = 0$ да $x(0) = 0;$ $y(0) = 0;$ $\dot{x}(0) = v_0 cos\alpha;$ $\dot{y}(0) = v_0 sin\alpha$. У ҳолда $C_1 = v_0 cos\alpha;$ $C_2 = v_0 sin\alpha$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha)t \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 sin\alpha)t \end{cases}.$$

Олинган ечимни таҳлил қиламиз:

1. Жисмни ерга қайтиб тушгунча кетган вақти:

$$y = 0 \Rightarrow -g\frac{t^2}{2} + (v_0 sin\alpha)t = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}.$$

Жисмнинг ерга тушиш вақти: $t_n = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}$.

2. Жисмни горизонтал йўналиш бўйича босиб ўтган масофаси (учиш узоқлиги):

$$x(t) = (v_0 cos\alpha)t_n = \frac{v_0 cos\alpha \cdot 2v_0 sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}.$$

3. Жисмнинг ердан максимал узоқлашуви (баландлиги):

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow v_0 sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 sin\alpha}{g} \Rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2 sin\alpha}{2g}.$$

4. Жисмнинг ҳаракат траекторияси: $x(t)$ ва $y(t)$ ларни билган ҳолда t ни

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha)t \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 sin\alpha)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0 cos\alpha} \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + \frac{v_0 sin\alpha \cdot x}{v_0 cos\alpha} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = xtg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x^2.$$

Демак, жисм ҳаракатининг траекторияси параболадан иборат экан.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1-масала. Қандолатчилик фабрикаси 3 хил (A,B,C) турдаги конфет тайёрлаш учун 3 хил хом ашёдан, яъни шакар, шинни ва мева пюрисидан фойдаланади. Жадвалда 1 тонна конфет тайёрлаш учун керакли хом ашё миқдори, хом ашёлар захираси ва 1 тонна хар хил турдаги конфетдан олинадиган фойда миқдори келтирилган. Конфет тайёрлашдан максимал фойда келадиган режани тузинг.

Хом ашё турлари	1 т. конфет тайёрлаш учун хом ашё нормаси			хом ашё захираси
	A	B	C	
Шакар	0,8	0,5	0,6	800
Шинни	0,2	0,4	0,3	600
Мева пюриси	0	0,1	0,1	120
1 т. махсулотдан олинадиган фойда	108	112	126	

2-масала. Маятник тебраниш формасини аниқлаш масаласининг математик моделини қуринг.

3-масала. Концентрацияси 0,2 ва 0,5 бўлган икки хил суюқ модда аралаштириб юборилди ва концентрацияси 0,4 бўлган хажми 260 граммга тенг аралашма ҳосил қилинди. Ҳар бир суюқ моддадан қанчадан олинганлигини аниқлаш масаласининг математик моделини тузинг.

Таянч сўз ва иборалар

Объект, модель, моделлаштириш, алгоритм, алгоритмик тил, блок-схема, абсолют хато, нисбий хато, сонли усул, аналитик усул, сонли-аналитик усул, тажриба(эксперимент) усули, итерация, модель адекватлиги, трансцендент тенглама.

Саволлар

1. Объект ва унинг хоссалари.
2. Модель деб нимага айтилади?
3. Моделлаштириш жараёни деб нимага айтилади?
4. Математик муносабат деганда нимани тушунасиз?
5. Математик моделларни қандай содда синфларга ажратиш мумкин?
6. Моделлаштириш жараёни қандай асосий босқичларни ўз ичига олади?
7. Алгоритм ва унинг турлари.
8. Алгоритмнинг берилиш усуллари.
9. Итерация усули қандай усул?
10. Дастур ва дастурлаш нима?
11. Дастурлашда алгоритмик тил қандай танланади?
11. Модель адекватлиги деганда нимани тушунасиз?
12. Модель адекватлиги қандай текширилади?
13. Абсолют ва нисбий хато нима?
14. Моделлаштиришда хатоликлар турлари ва уларнинг келиб чиқиш манбалари.
15. Математик моделни ечиш усуллари.
16. Аналитик усул нима?
17. Сонли усул нима?
18. Сонли-аналитик усул нима?
19. Математик моделлаштиришда хатоликларни камайтириш учун нималарга эътибор бериш керак?

II-БОБ. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШ.

2.1. Масаланинг қўйилиши.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси(ЧАТС)ни ечиш, моделлаштиришда кўп учрайдиган масалалардан биридир. ЧАТСни қандайдир физик жараённинг математик модели деб қараш мумкин. Берилган маълумотлар асосида кўпҳадлар ёки махсус эгри чизиқлар қуриш, дифференциал ва интеграл тенгламаларни дискрет алгебраик система кўринишда ифодалаш ЧАТС ни ечишга келтирилади.

Тушинарли ва қулай бўлиши учун 3 та номаълумли 3 та чизиқли алгебраик тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

ни кўриб чиқамиз. Бу ерда a_{ij}, b_i лар берилган сонлар, x_i лар номаълумлар $(i, j = 1,2,3)$. Агар (2.1.1) системага мос келувчи асосий детерменант Δ нолдан фарқли, яъни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлса, бу система ягона ечимга эга бўлади.

ЧАТСни ечишда аниқ (Гаусс, Крамер, тескари матрица) ва тақрибий (кетма-кет яқинлашиш, оддий итерация, Зейдел) усулларидан фойдаланиш мумкин.

2.2. Крамер усули

Крамер усули одатда детерменантлар усули ҳам деб аталади. Бу усулни (2.1.1) ЧАТС учун кўриб чиқайлик. Бу усулга кўра қуйидаги 4 та 3 - тартибли

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

детерминантларнинг қийматлари ҳисобланади ва номаълумлар

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Мисол. Қуйидаги

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 14 \\ 5x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

ЧАТСни Крамер усули ёрдамида ечинг.

Ечиш.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot(-2) + 1\cdot 7\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot(-1) - 0\cdot(-4)\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot(-2) -$$

$$2\cdot 5\cdot 7 = 16 + 0 - 5 - 0 + 2 - 70 = -57$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot(-2) + 1\cdot 7\cdot 4 + (-1)\cdot 14\cdot 5 - (-1)\cdot(-4)\cdot 4 -$$

$$1\cdot 14\cdot(-2) - 1\cdot 7\cdot 5 = 8 + 28 - 70 - 16 + 28 - 35 = -57;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 14 & 7 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 14\cdot(-2) + 1\cdot 7\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 4 - (-1)\cdot 14\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot(-2) -$$

$$2\cdot 7\cdot 4 = -56 + 0 - 4 - 0 + 2 - 56 = -114;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 14 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot 4 + 1\cdot 14\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 5 - 1\cdot(-4)\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 4 -$$

$$2\cdot 14\cdot 5 = -32 + 0 + 5 - 0 - 4 - 140 = -171;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-57}{-57} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-114}{-57} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-171}{-57} = 3$$

Жавоб: $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$

2.3. Гаусс усули

Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

тенгламалар системасини ***Гаусс усули*** – ёрдамида ечиш алгоритмини кўриб чиқайлик. Бу усул номаълумларни кетма-кет йўқотишга асосланган усул бўлиб, унинг алгоритми қуйидаги ҳисоблашлар кетма-кетлигидан иборат. Системада $a_{11} \neq 0$ бўлсин (агар $a_{11} = 0$ бўлса, системадаги тенгламалар ўринларини алмаштириб $a_{11} \neq 0$ га эга бўлиш мумкин). Системадаги биринчи тенгламанинг барча ҳадларини a_{11} га бўлиб

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad (2.3.2)$$

ни ҳосил қиламиз.

(2.3.2) тенгламани a_{21} га кўпайтириб, (2.3.1) системанинг иккинчи тенгламасини, (2.3.2) тенгламани a_{21} га кўпайтириб (2.3.1) системанинг учинчи тенгламасини ҳадлаб айирсак, фақат x_2 ва x_3 ларга нисбатан

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \qquad (2.3.3)$$

системага эга бўламиз. Бу ерда

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot a_{1j}; \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot b_1, \quad i = 2.3; \; j = 2.3.$$

(2.3.3) системада $a_{22}^{(1)} \neq 0$ бўлсин. Агар $a_{22}^{(1)} = 0$ бўлса, тенгламалар ўрнини алмаштириб оламиз. (2.3.3) системанинг биринчи тенгламасини $a_{22}^{(1)}$ га бўламиз ва уни $a_{22}^{(1)}$ га кўпайтириб, иккинчи тенгламани айирамиз. Натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \end{cases} \cdot \qquad (2.3.4)$$

Бу ерда $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\cdot a_{2j}^{(1)}; \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\cdot b_2^{(1)}, \; i = 3, \; j = 3.$

(2.3.4) даги тенгламаларни қуйидан юқорига ечиб бориш натижасида x_3, x_2, x_1 ларга эга бўламиз.

Мисол. Қуйидаги

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=13 \\ -3x_1+x_2-2x_3=-6 \end{cases}$$

тенгламалар ситемасини Гаусс усулида ечинг.

Ечиш.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=13 \\ -3x_1+x_2-2x_3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 7x_2-6x_3=-15 \\ 7x_2-5x_3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 7x_2-6x_3=-15 \\ -x_3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 7x_2-6x_3=-15 \\ x_3=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-6=-1 \\ 7x_2-36=-15 \\ x_3=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-6=-1 \\ 7x_2=21 \\ x_3=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1+6-6=-1 \\ x_2=3 \\ x_3=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \\ x_3=6 \end{cases}$$

Жавоб: $x_1=-1,\quad x_2=3,\quad x_3=6.$

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс усулида ечиш учун тузилган дастур матни:

```
const n=4;     { системадаги тенгламалар сони }
type
    stroka=array[1..n+1] of real;
    matrisa=array[1..n] of stroka;
    vektor=array[1..n] of real;
var
   a:matrisa; x:vektor; max,c:real;
   i,j,k,m:integer;
procedure gauss_1(b:matrisa; var y:vektor);
          begin
             for i:=1 to n do
                begin
                   max:=abs(b[i,i]); j:=i;
                   for k:=i+1 to n do if abs(b[k,i])>max then begin
                   max:=abs(b[k,i]);
                         j:=k;
                   end;
```



```
                   if j<>i then for k:=i to n+1 do
                                       begin c:=b[i,k]; b[i,k]:=b[j,k];
                                                b[j,k]:=c;
                                       end;
                   c:=b[i,i];
                   for k:=i to n+1 do b[i,k]:=b[i,k]/c;
                   for m:=i+1 to n do
                           begin
                               c:=b[m,i];
                               for k:=i+1 to n+1 do
                           b[m,k]:=b[m,k]-b[i,k]*c;
                           end;
                end;
                   y[n]:=b[n,n+1];
                   for i:=n-1 downto 1 do
                   begin
                        y[i]:=b[i,n+1];
                        for k:=i+1 to n do y[i]:=y[i]-b[i,k]*y[k]
                   end;
          end;
begin clrscr;
     for i:=1 to n do  for j:=1 to n+1 do
     begin
         write('a[',i:1,',',j:1,']=');  read(a[i,j]);
{ Система коэффициентларини киритиш}
     end;
     gauss_1(a,x);
     writeln('Sistemaning yechimi=:');
     for i:=1 to n do writeln('x[',i:1,']=',x[i]:10:4);
{ Система ечимини чоп этиш }
      end.
```

Мисол: Қуйидаги

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+8x_3+x_4=13 \\ 3x_1+x_2-10x_3-6x_4=-11 \\ 9x_2-2x_3+x_4=8 \\ x_1+3x_2-12x_3+x_4=20 \end{cases}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс усулига тузилган дастурдан фойдаланиб ечинг.

Жавоб: $x_1 = 6{,}2167$, $x_2 = 0{,}0825$, $x_3 = -0{,}6278$, $x_4 = 6{,}0018$.

2.4. Тескари матрица усули

(2.1.1) ни ечишда тескари матрица усули алгоритмини кўриб чиқамиз. Дастлаб (2.1.1) системадаги номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган уч ўлчовли

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad (2.4.1)$$

квадрат матрицани қарайлик.

Таъриф. A матрицага ***тескари матрица*** деб шундай A^{-1} матрицага айтиладики, унинг учун қуйидаги тенглик

$$A^{-1} \cdot A = E$$

ўринли бўлади. Бу ерда E ***бирлик матрица***, яъни

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Теорема. Агар A матрица элементларидан тузилган детерменант қиймати нолдан фарқли, яъни $det\,A \neq 0$ бўлса, A матрицага тескари матрица мавжуд.

Агар A матрицага тескари матрица мавжуд бўлса, у қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

бу ерда $\Delta = det\,A$, A_{ij} - a_{ij} (i,j=1,2,3) элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари, яъни (2.4.1) да i-сатр ва j-устун элементларини ўчиришдан ҳосил бўлган детерменантнинг $(-1)^{i+j}$ ишора билан олинган қиймати.

Мисол. Берилган ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

матрицага тескари матрицани аниқланг.

Ечиш.

$$\Delta = det\,A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 10 = 10$$

A матрица элементлари тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз: $A_{11} = -2$; $A_{12} = -4$; $A_{13} = 8$; $A_{21} = 3$; $A_{22} = 6$; $A_{23} = -7$; $A_{31} = 10$; $A_{32} = -10$; $A_{33} = 20$.

У ҳолда берилган A матрицага тескари матрица

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{7}{10} & 2 \end{Vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади.

(2.1.1) ЧАТСни тескари матрица усулида ечиш учун, уни

$$AX = B \qquad (2.4.2)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ерда

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

(2.4.2) тенгламанинг ҳар иккала томонини A^{-1} га кўпайтириб, ва

$$A^{-1}A = E, \qquad EX = X$$

эканликларини эътиборга олсак, (2.1.1) система ечими учун

$$X = A^{-1}B$$

формулага эга бўламиз.

ЧАТСни тескари матрица усулида ечишга тузилган дастур матни:

```
  const n=3;                {тенгламалар сони}
  type vector=array[1..n] of real;
  type matr=array[1..n,1..n+1] of real;
var
  a,c: matr; b,x: vector;
  i,j,m,k: integer;
procedure umv(l1:matr; l2:vector; var l3:vector);
var i,k:integer;
begin
```

```
        for i:=1 to n do l3[i]:=0.0;
        for i:=1 to n do for k:=1 to n do
        l3[i]:=l3[i]+l1[i,k]*l2[k];
    end;
    procedure obrmat(ao: matr; it: integer; var a1o: matr);
      label 1;
      var lo: matr; xo,bo: vector; so: real;
    begin
        m:=0; bo[1]:=1; for k:=2 to it do bo[k]:=0;
        for k:=1 to it-1 do for i:=k+1 to it do
                    begin
                      lo[i,k]:=ao[i,k]/ao[k,k];
                      for j:=k+1 to it do ao[i,j]:=ao[i,j]-lo[i,k]*ao[k,j];
                      bo[i]:=bo[i]-lo[i,k]*bo[k]
                  end;
      1:  xo[it]:=bo[it]/ao[it,it]; m:=m+1;
        for k:=it-1 downto 1 do
                          begin
                              so:=0;
                              for j:=k+1 to it do so:=so+ao[k,j]*xo[j];
                                xo[k]:=(bo[k]-so)/ao[k,k]
                          end;
      for k:=1 to it do
      if m+1=k then bo[k]:=1 else bo[k]:=0;
      for k:=1 to it-1 do for i:=k+1 to it do
      bo[i]:=bo[i]-lo[i,k]*bo[k];
      for j:=1 to it do a1o[j,m]:=xo[j];
      if m<it then goto 1
    end;
    begin  clrscr;
        for i:=1 to n do for j:=1 to n do
        begin
              write('A[',i:1,',',j:1,']=');
              read(A[i,j])
        end;
        for i:=1 to n do
        begin
```



```
              write('B[',i:1,']=');
              read(B[i])
          end;
      obrmat(A,n,c);  umv(c,b,x);
        for i:=1 to n do begin
                              writeln('x[',i:1,']=',x[i]:8:4);
                          end;
    end.
```

2.5. Жордан усули

Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n = a_n \end{cases}$$

Юқоридаги масала учун дастлабки Жордан жадвалини тузиб оламиз:

	x_1	x_2	...	x_n
$a_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$a_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
$a_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Ушбу жадвал асосида Жордан алмаштиришлари қуйидаги тартибда бажарилиб навбатдаги жадвал тўлдирилади:

1) Жордан алмаштиришлари ҳал қилувчи элементга нисбатан ечилади. Жадвалнинг юқори ўнг бурчагидаги элемент ҳал қилувчи элемент сифатида танлаб олинади. Ҳал қилувчи элемент жойлашган сатр ва устун мос равишда ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи устун дейилади;

2) ҳал қилувчи сатрдаги сон ва ҳал қилувчи устундаги ўзгарувчи ўрни алмаштирилади;

3) ҳал қилувчи элемент ўрнига унга тескари сонни ёзамиз;

4) ҳал қилувчи устун элементларини ҳал қилувчи элементга бўлиб, натижани шу элементларга мос катакларга ёзамиз;

5) ҳал қилувчи сатр элементларини ҳал қилувчи элементга бўлиб, ишорасини ўзгартирамиз ва натижани шу элементларга мос катакларга ёзамиз;

6) қолган катаклар тўртбурчак қоидаси бўйича тўлдирилади.

Масалан, (2.2) катакни тўлдириш учун қуйидаги ҳисоблаш бажарилади:

$$a_{22}^{1}=\frac{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}}{a_{11}}.$$

7) ҳал қилувчи элементлар диагонал бўйича танланади ва бу жараён нав-батдаги танланиши керак бўлган элементдан бошлаб қуйи ўнг бурчакдаги барча элементлар нол бўлгунча давом эттирилади. Акс ҳолда жараён ҳал қилувчи элемент сифатида диагоналнинг охирги элементи танлангунча давом эттирилади. Агар диагоналда ҳал қилувчи элемент сифатида олиниши керак бўлган сон, масалан $a_{pp}=0$ бўлиб, ундан қуйи ва ўнг томонда нолдан фарқли элементлар мавжуд бўлса, бу сонлардан бири сатр ва устунлар ўрнини алмаштириш орқали (p,p) катакка олиб келинади ва у ҳал қилувчи элемент сифатида танлаб олинади. Агар ҳособлаш диагонал бўйлаб охирги (m,n) элементгача олиб борилса, охирги жадвал қуйидаги кўринишга келади:

	a_1	a_2	...	a_n
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}
$x_2=$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...
$x_m=$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mn}

Юқоридаги жадвал асосида тенгламалар системасининг ечимини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} x_1=b_{11}a_1+b_{12}a_2\ldots+b_{1n}a_n \\ x_2=b_{21}a_1+b_{22}a_2\ldots+b_{2n}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=b_{n1}a_1+b_{n2}a_2\ldots+b_{nn}a_n \end{cases}$$

Агар ҳисоблаш жараёнида жадвалнинг қуйи ўнг тўртбурчак қисмида барча элементлар ноль бўлса, охирги жадвал қуйидаги кўринишга келади:

	a_1	a_2	...	a_k	x_{k+1}	...	x_n
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1k}	b_{1k+1}	...	b_{1n}
$x_2=$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2k}	b_{2k+1}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
$x_k=$	b_{k1}	b_{k2}	...	b_{kk}	b_{kk+1}	...	b_{kn}
$a_{k+1}=$	b_{k+11}	b_{k+12}	...	b_{k+1k}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
$a_n=$	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nk}	0	...	0

Ушбу жадвалда $k+1,\ k+2,\ldots n$ - сатрлар учун қуйидаги

$$\begin{cases} a_{k+1}=b_{k+1,1}a_1+b_{k+1,2}a_2\ldots+b_{k+1,n}a_n \\ a_{k+2}=b_{k+2,1}a_1+b_{k+2,2}a_2\ldots+b_{k+2,n}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n=b_{n1}a_1+b_{n2}a_2\ldots+b_{nn}a_n \end{cases}$$

тенгликлар тўғри бўлса, тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлади:

$$\begin{cases} x_1=b_{11}a_1+b_{12}a_2+\ldots+b_{1k}a_k+b_{1,k+1}x_{k+1}+\ldots+b_{1n}x_n \\ x_2=b_{21}a_1+b_{22}a_2+\ldots+b_{2k}a_k+b_{2,k+1}x_{k+1}+\ldots+b_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k=b_{k1}a_1+b_{k2}a_2..b_{kk}a_k+b_{k,k+1}x_{k+1}+\ldots+b_{kn}x_n \end{cases}$$

Юқоридан кўринадики, $x_1,\ x_2,\ldots,x_k$ ўзгарувчилар $x_{k+1},\ldots,x_n$ ўзгарувчиларнинг қийматларига боғлиқ бўлади. $x_{k+1},\ldots,x_n$ ўзгарувчилар эса ихтиёрий қийматларни қабул қилади. Бу ҳолда тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Агар

$$\begin{cases} a_{k+1}=b_{k+1,1}a_1+b_{k+1,2}a_2\ldots+b_{k+1,n}a_n \\ a_{k+2}=b_{k+2,1}a_1+b_{k+2,2}a_2\ldots+b_{k+2,n}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n=b_{n1}a_1+b_{n2}a_2\ldots+b_{nn}a_n \end{cases}$$

тенгликлардан бирортаси бажарилмай қолса, тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди.

Мисол: Қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Жордан усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Ечиш: Юқоридаги масала учун дастлабки Жордан жадвалини тузиб оламиз:

	x_1	x_2	x_3
4=	2	1	2
1=	1	-1	2
3=	3	1	-2

Жордан алмаштиришларидан кейин навбатдаги жадваллар қуйидаги кўринишга келади:

	4	x_2	x_3
x_1	1/2	-1/2	-1
1=	1/2	-3/2	1
3=	3/2	-1/2	-5

Ҳал қилувчи элемент сифатида $a_{22}^1 = -3/2$ ни олиб, унга нисбатан Жордан алмаштиришларини бажариб, навбатдаги жадвални тўлдирамиз:

	4	1	x_3
x_1	1/3	1/3	-4/3
x_2	1/3	-2/3	2/3
3=	4/3	1/3	-16/3

Ҳал қилувчи элемент сифатида $a_{33}^2 = -16/3$ ни олиб, унга нисбатан Жордан алмаштиришларини бажариб, навбатдаги жадвални тўлдирамиз:

	4	1	3
x_1	0	1/4	1/4
x_2	1/2	-5/8	-1/8
x_3	1/4	1/16	-3/16

Охирги жадвалдан тенгламаларнинг илдизларини топамиз:

$$x_1 = 4\cdot 0 + 1\cdot 1/4 + 3\cdot 1/4 = 1/4 + 3/4 = 1$$

$$x_2 = 4\cdot 1/2 - 1\cdot 5/8 - 3\cdot 1/8 = 2 - 5/8 - 3/8 = 1$$

$$x_3 = 4\cdot 1/4 + 1\cdot 1/16 - 3\cdot 3/16 = 1 - 8/16 = 1/2$$

Топилган илдизларни системага қўйиб, ечимнинг тўғрилигини текшириб кўриш мумкин.

2.6. Кетма-кет яқинлашиш усули

Соддалик учун кетма-кет яқинлашиш усули алгоритмини қуйидаги уч номаълумли ЧАТСда кўриб чиқамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

Бу системани матрица кўринишида ифодалаймиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ёки

$$Ax=B,$$

бу ерда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(2.6.1) системани унга тенг кучли система билан алмаштирамиз

$$\begin{cases} x_1 = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_1, \\ x_2 = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + b_2, \\ x_3 = x_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + b_3 \end{cases} \qquad (2.6.2)$$

ёки

$$x = (E-A)x + B.$$

(2.6.2) системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ва итерация жараёнини қурамиз:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (2.6.3)$$

ёки

$$x^{(k)} = (E-A)x^{(k-1)} + B.$$

Бу усулда, итерация жараёнининг яқинлашиши учун етарли шарт қуйидагича ифодаланади:

$$\max_j \left\{ |1-a_{jj}| + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \right\} < 1 \quad \text{ёки} \quad \max_i \left\{ |1-a_{ii}| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\} < 1.$$

Агар ЧАТСда тенгламалар сони n та бўлса, кетма-кет яқинлашиш усулининг умумий формуласи

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

ёки

$$x_i^{(k)} = (1-a_{ii})x_i^{(k-1)} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

кўринишга эга бўлади.

Мисол. Қуйидаги

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}2x_3 = 3, \\ 0{,}2x_1 - 0{,}1x_2 + 1{,}2x_3 = 2 \end{cases}$$

ЧАТСни кетма-кет яқинлашиш усули ёрдамида ечинг. Бу системани матрица кўринишида:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.2 \\ 0.2 & -0.1 & 1.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ёзиб оламиз.

(2.6.3) формулага асосан итерацион жараённи қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (2.6.4)$$

Дастлабки яқинлашиш сифатида ноль векторни оламиз ва (2.6.4) формула ёрдамида биринчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Яна бир марта итерация жараёнини бажарамиз:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.8 \\ 1.7 \end{pmatrix}.$$

Иккита кетма-кет яқинлашиш бир-биридан етарлича кам фарқ қилгунча итерция жараёнини давом эттирамиз. Ҳосил қилинган

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.8 \\ 1.7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.96 \\ 2.85 \\ 1.76 \end{pmatrix} \to \cdots$$

векторлар кетма-кетлиги системанинг аниқ ечимига интилади.

Умумий ҳолда итерация жараёни $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < \varepsilon$ шарт бажарилганда тугалланади. Бу ерда ε берилган аниқлик.

2.7. Оддий итерация усули

ЧАТСда номаълумлар сони кўп бўлганда, Крамер, Гаусс, тескари матрица усулларининг аниқ ечимлар берувчи чизиқли схема жуда мураккаб бўлиб қолади. Бундай ҳолларда система илдизларини топиш учун тақрибий сонли ечиш усулларидан фойдаланиш қулай бўлади. Шундай усуллардан бири оддий итерация усулидир. Бу усулни (2.1.1) система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.7.1)$$

учун кўриб ўтамиз.

Бу системани матрица кўринишида ёзиб оламиз:

$$AX = B,$$

бу ерда

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}; \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

(2.7.1) да $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1,2,3)$ деб фараз қиламиз. (2.7.1) даги биринчи тенгламани x_1 га нисбатан, иккинчи тенгламани x_2 га нисбатан ва учинчи тенгламани x_3 га нисбатан ечиб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + 0 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + 0 + \alpha_{23}x_3 \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + 0 \end{cases} \qquad (2.7.2)$$

(2.7.2) ни ушбу

$$\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{Vmatrix}; \quad , \quad \beta = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

матрицалар ёрдамида қуйидагича ёзишимиз мумкин

$$X = \beta + \alpha X \qquad (2.7.3)$$

(2.7.3) системани кетма-кет яқинлашишлар усули билан ечамиз:

$$X^{(0)} = \beta, \quad X^{(1)} = \beta + \alpha X^{(0)}, \quad X^{(2)} = \beta + \alpha X^{(1)}, \dots$$

Ушбу жараённи умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$X^{(k)} = \beta + \alpha X^{(k-1)}, \ X^{(0)} = \beta, \ k = 1,2,3, \dots \qquad (2.7.4)$$

Агар бу $\{X^{(k)}\}$ кетма-кетликнинг $k \to \infty$ даги лимити мавжуд бўлса, бу лимит (2.7.1) системанинг ечими бўлади.

Қуйидаги

$$X^{(k)} = \begin{Vmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{Vmatrix}$$

белгилашни киритамиз.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$ тенгсизлик барча i =1,2,3 лар учун бажарилса, $X^{(k+1)} = \left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}\right)$ вектор (2.7.1) системанинг ε аниқликдаги ечими деб аталади.

Теорема. Агар (2.7.2) система учун $\sum_{j=1}^{3}|\alpha_{ij}| < 1$ ёки $\sum_{i=1}^{3}|\alpha_{ij}| < 1$

шартлардан бирортаси бажарилса, у ҳолда (2.7.4) итерация жараёни бошланғич яқинлашишни танлашга боғлиқ бўлмаган ҳолда ягона ечимга яқинлашади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

системани ε=0,001 аниқликда итерация усули билан ечинг.

Ечиш: Система коэффициентлари учун

$$\left.\begin{aligned} 0{,}24 + |-0{,}08| = 0{,}32 < |a_{11}| = 4 \\ 0{,}09 + |-0{,}15| = 0{,}24 < |a_{22}| = 3 \\ 0{,}04 + |0{,}08| = 0{,}12 < |a_{33}| = 4 \end{aligned}\right\}$$

шарт бажарилади. Демак, юқорида келтирилган теоремага асосан итерация жараёни яқинлашади. Юқоридаги системадан

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 \\ x_2 = 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 \\ x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 \end{cases}.$$

га эга бўлиб, нолинчи яқинлашиш сифатида

$$X^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ x_1^{(0)} = 2, x_2^{(0)} = 3, x_3^{(0)} = 5,$$

ни оламиз. У ҳолда α матрица

$$\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади.

(2.7.4) формула ёрдамида ҳисоблашларни бажарамиз:

$$X^{(1)} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 - 3 \cdot 0{,}06 + 5 \cdot 0{,}02 \\ 3 - 2 \cdot 0{,}03 + 5 \cdot 0{,}05 \\ 5 - 2 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 0{,}02 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{Vmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = 1{,}92; \quad x_2^{(1)} = 3{,}19; \quad x_3^{(1)} = 5{,}04.$$

$$X^{(2)} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2-1{,}92\cdot 0{,}06+5{,}04\cdot 0{,}02 \\ 3-1{,}92\cdot 0{,}03+5{,}04\cdot 0{,}05 \\ 5-1{,}92\cdot 0{,}01+3{,}19\cdot 0{,}02 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{Vmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = 1{,}9094; \qquad x_2^{(2)} = 3{,}1944; \qquad x_3^{(2)} = 5{,}0446.$$

$$X^{(3)} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2-1{,}9094\cdot 0{,}06+5{,}0446\cdot 0{,}02 \\ 3-1{,}9094\cdot 0{,}03+5{,}0446\cdot 0{,}05 \\ 5-1{,}9094\cdot 0{,}01+3{,}1944\cdot 0{,}02 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}90923 \\ 3{,}19495 \\ 5{,}04485 \end{Vmatrix}$$

$$x_1^{(3)} = 1{,}90923; \qquad x_2^{(3)} = 3{,}19495; \qquad x_3^{(3)} = 5{,}04485.$$

Натижада ушбу жадвални ҳосил қиламиз:

Яқинлашишлар(k)	x_1	x_2	x_3	$x_1^{(k)}-x_1^{(k-1)}$	$x_2^{(k)}-x_2^{(k-1)}$	$x_3^{(k)}-x_3^{(k-1)}$
0	2	3	5	-	-	-
1	1,92	3,19	5,04	0,08	0,19	0,04
2	1,9094	3,1944	5,0446	0,0106	0,0044	0,0046
3	1,90923	3,19495	5,04485	0,00017	0,00055	0,00025

Бу ерда

$$\left|x_1^{(3)}-x_1^{(2)}\right| = 0{,}00017 < \varepsilon, \quad \left|x_2^{(3)}-x_2^{(2)}\right| = 0{,}00055 < \varepsilon, \quad \left|x_3^{(3)}-x_3^{(2)}\right| = 0{,}00025 < \varepsilon$$

шартлар бажарилади. Демак, $X = X^{(3)}$ берилган чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ε=0,001 аниқликдаги тақрибий ечими бўлади.

Тенгламалар системасини итерация усулида ечиш учун тузилган дастур матни:

```
label 1,2;
const n=3; { тенгламалар сони }
  type
    matrisa=array[1..n,1..n] of real;
    vektor=array[1..n] of real;
  var
    a,a1:matrisa; x,x0,b,b1:vektor; eps,s:real;
    i,j,k:integer;
begin  clrscr;
  for i:=1 to n do begin
  for j:=1 to n do begin
```



```
        write('a[',i:1,',',j:1,']='); read(a[i,j]) end;
        {Система коэффициентларини киритиш}
        write('b[',i:1,']='); read(b[i]);
      end;
eps:=0.0001;  { Ечиш аниқлигини бериш}
for i:=1 to n do begin
      b1[i]:=b[i]/a[i,i];
      for j:=1 to n do a1[i,j]:=-a[i,j]/a[i,i]
   end;
      for i:=1 to n do begin
          x0[i]:=b1[i];  a1[i,i]:=0;
            end;
  2: for i:=1 to n do
        begin
          s:=0.0;
          for j:=1 to n do s:=s+a1[i,j]*x0[j];
          x[i]:=b1[i]+s;
        end;
   k:=0;
   for i:=1 to n do if abs(x[i]-x0[i])<eps
       then begin k:=k+1; if k=n then goto 1 end
       else begin for j:=1 to n do x0[j]:=x[j]; goto 2 end;
 1:  writeln('Sistemaning taqribiy yechimi:');
  for i:=1 to n do writeln('x[',i:1,']=',x[i]:8:6);
end.
```

2.6. Зейдел усули

Бу усул алгоритмини қуйидаги тенгламалар системасини ечишда кўриб чиқамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Бу системани

$$\begin{cases} x_1 = x_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + b_1, \\ x_2 = x_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) + b_2, \\ x_3 = x_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\right) + b_3. \end{cases}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Номаълумларга ихтиёрий равишда дастлабки: $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$ қийматларини берамиз. Бу қийматларни биринчи тенгламанинг ўнг тамонига қўйиб x_1 учун биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \left(a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)}\right) + b_1.$$

$x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$ ларни иккинчи тенгламага олиб бориб x_2 учун биринчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - \left(a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)}\right) + b_2.$$

$x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(1)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$ ларни учинчи тенгламага олиб бориб x_3 учун биринчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$x_3^{(1)} = x_3^{(0)} - \left(a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_{33}x_3^{(0)}\right) + b_3$$

Шу билан биринчи итерация жараёни тугалланади. Кейинги итерация жараёнлари худди шу каби давом эттирилади. k-яқинлашишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - \left(a_{11}x_1^{(k-1)} + a_{12}x_2^{(k-1)} + a_{13}x_3^{(k-1)}\right) + b_1,$$
$$x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k-1)} + a_{23}x_3^{(k-1)}\right) + b_2,$$
$$x_3^{(k)} = x_3^{(k-1)} - \left(a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{33}x_3^{(k-1)}\right) + b_3.$$

$x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ ларнинг қийматлари $x_1^{(k-1)}$, $x_2^{(k-1)}$, $x_3^{(k-1)}$ ларнинг қиймат-ларига берилган аниқликка эришгунча итерация жараёни давом эттирилади.

Умумий ҳолда, яъни тенгламалар сои n та бўлганда, бу усул ҳисоблаш формуласи қуйидаги

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i.$$

кўринишга эга бўлиб, унинг яқинлашиш шарти, кетма-кет яқинлашиш усули яқинлашиш шарти билан бир хил бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Берилган

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -9 \end{cases}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Крамер усули билан ечинг.

2. Берилган

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Крамер усули билан ечинг.

3. Берилган

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 5x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -4 \end{cases}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

4. Берилган

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

5. Берилган

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

матрицага тескари матрицани аниқланг.

6. Ушбу

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

системани тескари матрица усули ёрдамида ечинг.

7. Ушбу

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини итерация усули ёрдамида 10^{-2} аниқликда ечинг.

8. Ушбу

$$\begin{cases} 100x_1 + 30x_2 - 70x_3 = 1 \\ 15x_1 - 50x_2 - 5x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 20x_3 = 1 \end{cases}$$

система учун итерация жараёни яқинлашувчи эканлгини кўрсатинг ва ечимни 10^{-2} аниқликда топиш учун нечта итерация жараёнини бажариш керак?

9. Берилган

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Зейдел усули билан ечинг.

Таянч сўз ва иборалар

Матрица, бирлик матрица, алгебраик тўлдирувчи, аналитик усул, сонли-аналитик усул, итерация усули, тескара матрица усули, Гаусс усули, Крамер усули, Зейдел усули.

Саволлар

1. ЧАТСни ягона ечимга эга бўлиш шарти.
2. ЧАТСни ечишда фойдаланиладиган қандай аниқ усулларни биласиз?
3. ЧАТСни ечишда фойдаланиладиган қандай тақрибий усулларни биласиз?
4. ЧАТСни ечишда Крамер усули алгоритмини келтиринг.
5. ЧАТСни ечишда Гаусс усули алгоритмини келтиринг.
6. Бирлик матрицага таъриф беринг.
8. Тескари матрицага таъриф беринг.
9. Тескари матрицанинг мавжудлик шарти нимадан иборат?

10. Матрица элементи учун алгебраик тўлдирувчи қандай аниқланади?
11. ЧАТСни ечишда тескари матрица усули алгоритмини келтиринг.
12. Қандай ҳолларда ЧАТСни ечишда тақрибий ечиш усулларидан фойдаланилади?
13. ЧАТСни ечишда итерация усули алгоритмини келтиринг.
14. Итерация жараёнининг яқинлашиш шартини айтиб беринг .
15. ЧАТСни ечишда Зейдел усули ва унинг алгоритми.
16. ЧАТСни ечишда кетма-кет яқинлашиш усули ва унинг алгоритми.
17. Жордан алмаштириши қандай алмаштириш?
18. Жордан алмаштиришида ҳал қилувчи элемент қандай аниқланади?
19. Ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи устун қандай аниқланади?
20. Тўртбурчак қоидасини айтиб беринг.
21. ЧАТСни ечишда Зейдел усули алгоритмини келтиринг.

III-БОБ. ЧИЗИҚСИЗ ВА ТРАНСЦЕНДЕНТ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

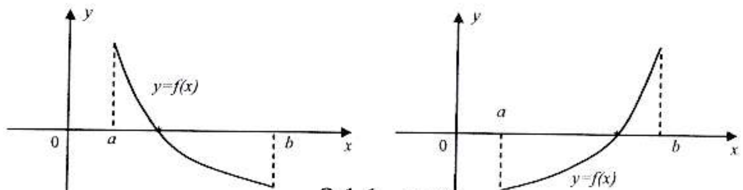
3.1. Масаланинг қўйилиши

$f(x)$ функция - $[a,b]$ чекли оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари шу оралиқда мавжуд бўлсин. Қуйидаги

$$f(x)=0 \qquad (3.1.1)$$

тенгламани кўриб чиқамиз. Бу тенглама берилган $[a,b]$ чекли оралиқда қачон ечимга эга ва бу ечим ягона бўлади?

Теорема. Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқнинг четки нуқталарида ҳар хил ишораларга эга $(f(a)\cdot f(b)<0)$ ва унинг биринчи тартибли ҳосиласи бутун оралиқда бир хил ишорага эга бўлса, (3.1.1) тенглама $[a,b]$ оралиқда ягона ечимга эга бўлади (3.1.1-расм).



3.1.1 - расм

Агар $y=f(x)$ функция чизиқсиз кўринишда бўлса, (3.1.1) тенглама чизиқсиз тенглама деб аталади.

Агар (3.1.1) тенгламани алгебраик алмаштиришлар ёрдамида алгебраик тенглама кўринишига келтириш мумкин бўлмаса, бу тенглама трансцендент тенглама деб аталади.

Алгебраик алмаштиришлар деганда қуйидаги алмаштиришлар тушинилади:

- *берилган тенгламанинг иккала тамонига бир хил алгебраик ифодаларни қўшиш;*
- *берилган тенгламанинг иккала тамонини нолдан фарқли бир хил алгебраик ифодаларга кўпайтириш;*
- *тенгламанинг иккала тамонини бир хил рационал кўрсаткичли даражага ошириш.*

(3.1.1) трансцендент тенгламанинг тақрибий ечимини берилган $\varepsilon>0$ аниқликда топиш талаб қилинсин. Бу ечимни

аниқлашда тақрибий сонли ечиш усуллар (оралиқни тенг иккига бўлиш; ватарлар; урунмалар ва оддий итерация усули) дан фойдаланиш мумкин.

3.2. Трансцендент тенглама илдизларини ажратиш

Ушбу

$$f(x) = 0$$

трансцендент тенглама берилган бўлсин.

Бу тенгламани ечишдан олдин тенглама илдизлари жойлашган оралиқларни ажратиш керак бўлади. Тенгламанинг фақат битта x_i илдизи жойлашган (a_i, b_i) оралиқни топиш, тенглама илдизини ажратиш жараёни дейилади. Бу жараённи амалга оширишда жадвал ёки график усулларидан фойдаланилади. Бу усулларни қуйидаги мисолда кўриб чиқамиз.

Мисол. $1{,}2^x + 6\sin\frac{\pi x}{2} + 1 = 0$ тенгламанинг $[0;8]$ оралиқдаги илдизларини ажратинг.

Ечиш.

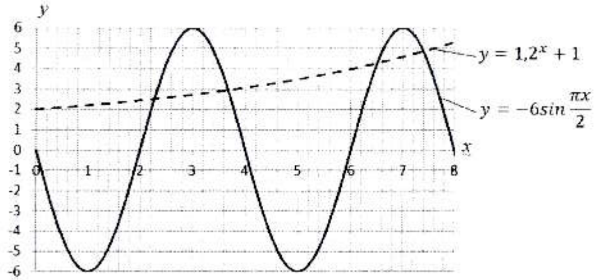
Жадвал усули. $[0;8]$ оралиқни 0,4 қадам билан оралиқчаларга ажратиб ҳар бир оралиқнинг чегара нуқталарида $y = 1{,}2^x + 6\sin\frac{\pi x}{2} + 1$ функция қийматларини ҳисоблаб

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y	2	5,6	7,86	7,95	5,86	2,44	-0,98	-3,04	-2,91	-0,6	3,07

x	4,4	4,8	5,2	5,6	6	6,4	6,8	7,2	7,6	8
y	6,76	9,11	9,29	7,3	3,99	0,69	-1,25	-0,99	1,47	5,30

жадвални ҳосил қиламиз. Бу ердан функция ишоралари алмашган оралиқлар учун $x_1 \in [2; 2{,}4]$; $x_2 \in [3{,}6; 4]$; $x_3 \in [6{,}4; 6{,}8]$; $x_4 \in [7{,}2; 7{,}6]$ га эга бўламиз.

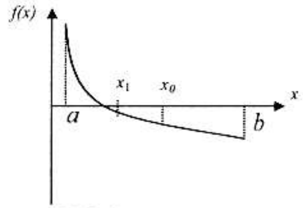
График усули. Тенгламани $1{,}2^x + 1 = -6\sin\frac{\pi x}{2}$ кўринишда ёзиб олиб, $y = 1{,}2^x + 1$ ва $y = -6\sin\frac{\pi x}{2}$ функцияларнинг графикларини чизамиз.



Графикдан бу икки функция графикларининг кесишиш нуқталарининг абциссалари учун $x_1 \in [2; 2,4]$; $x_2 \in [3,6; 4]$; $x_3 \in [6,4; 6,8]$; $x_4 \in [7,2; 7,6]$ эканлиги эга бўламиз.

3.3. Оралиқни тенг иккига бўлиш усули

Бу усул алгоритми қуйидаги амаллар кетма-кетлигидан иборат: $[a,b]$ оралиқни $x_0 = (a+b)/2$ нуқта орқали иккита тенг $[a,x_0]$ ва $[x_0,b]$ оралиқларга ажратамиз (3.3.1-расм).



3.3.1- расм

Агар $|a-x_0| \le \varepsilon$ бўлса, $x = x_0$ (3.1.1) тенгламанинг ε аниқликдаги тақрибий ечими бўлади. Бу шарт бажарилмаса, $[a,x_0]$ ва $[x_0,b]$ оралиқлардан (3.1.1) тенглама илдизи жойлашганини танлаб оламиз ва уни $[a_1,b_1]$ деб белгилаймиз. $x_1 = (a_1+b_1)/2$ нуқта ёрдамида $[a_1,b_1]$ оралиқни иккита тенг $[a_1,x_1]$ ва $[x_1,b_1]$ оралиқларга ажратамиз. $|a_1-x_1| \le \varepsilon$ бўлса, $x = x_1$ (3.1.1) тенгламанинг ε аниқликдаги тақрибий ечими бўлади, акс ҳолда $[a_1,x_1]$ ва $[x_1,b_1]$ оралиқлардан (3.1.1) тенглама илдизи жойлашганини танлаб оламиз ва уни $[a_2,b_2]$ деб белгилаймиз. Бу ҳисоблашлар кетма-кетлигини $|a_i - x_i| \le \varepsilon$ $(i = 2,3,4,...)$ шарт бажарилгунча давом эттирамиз. Натижада (3.1.1)

тенгламанинг ε аниқликдаги $x = x_i$ тақрибий ечимини ҳосил қиламиз.

Мисол: Ушбу $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 0$ тенгламанинг $[0,2; 4]$ оралиқдаги илдизини $\varepsilon = 0,001$ аниқликда оралиқни тенг иккига бўлиш усули ёрдамида аникланг.

Ечиш.

A	b	c	fa	fb	fc
0.200	4.000	2.100	14.9760	-25.0000	-10.7880
0.200	2.100	1.150	14.9760	-10.7880	5.7943
1.150	2.100	1.625	5.7943	-10.7880	-2.2148
1.150	1.625	1.388	5.7943	-2.2148	1.9406
1.388	1.625	1.506	1.9406	-2.2148	-0.1095
1.388	1.506	1.447	1.9406	-0.1095	0.9237
1.447	1.506	1.477	0.9237	-0.1095	0.4090
1.477	1.506	1.491	0.4090	-0.1095	0.1502
1.491	1.506	1.499	0.1502	-0.1095	0.0205
1.499	1.506	1.503	0.0205	-0.1095	-0.0444
1.499	1.503	1.501	0.0205	-0.0444	-0.0120
1.499	1.501	1.500	0.0205	-0.0120	0.0043

Жавоб: x = 1.500

Оралиқни тенг иккига бўлиш усулига тузилган дастур матни:

```
var a,b,eps,x,fa,fc,c:real;
  function f(x:real):real;
  begin
     f:=x*x-sin(x)-0.5      { f(x) функция кўриниши }
  end;
begin clrscr;
  write('a='); read(a);
  write('b='); read(b);
  write('eps='); read(eps);
  fa:=f(a);
```

```
    while abs(b-a)>eps do
    begin
        c:=(a+b)/2; fc:=f(c);
        if fa*fc<=0 then b:=c else begin a:=c; fa:=fc end;
    end;
  writeln('x=',c:10:4);
end.
```

3.4. Ватарлар усули

Бизга (3.1.1) тенгламанинг $[a,b]$ оралиқдаги ечимини топиш талаб этилсин. Аниқлик учун $f(a)>0$ $(f(a)<0)$ бўлсин. $A=A(a;f(a))$, $B=B(b;f(b))$ нўқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} \quad \text{ёки} \quad y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

Бу тўғри чизиқни Ox ўқи билан кесишиш нўқтаси абциссасини x_1 деб олсак, у ҳолда

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x_1-a)=0$$

тенгликга эга бўламиз. Бу ердан эса

$$x_1=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $b=x_0$ деб олсак,

$$x_1=a-\frac{x_0-a}{f(x_0)-f(a)}\cdot f(a).$$

Агар $|a-x_1|\le\varepsilon$ бўлса, $x=x_1$ (3.1.1) тенгламанинг ε аниқликдаги тақрибий ечими бўлади. Бу шарт бажарилмаса, $b=x_1$ $(a=x_1)$ деб оламиз. A,B нўқталардан тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг Ох ўқи билан кесишиш нўқтасини аниқлаймиз.

$A=A(a;f(a))$, $B=B(x_1;f(x_1))$ нўқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y-f(a)}{f(x_1)-f(a)} \quad \text{ёки} \quad y=f(a)+\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\cdot(x-a).$$

Бу тўғри чизиқни Ox ўқи билан кесишиш нўқтаси абциссасини x_2 деб олсак, у ҳолда

$$f(a)+\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\cdot(x_2-a)=0$$

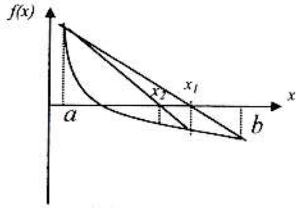
ёки

$$x_2=a-\frac{x_1-a}{f(x_1)-f(a)}\cdot f(a).$$

Агар $|a-x_2|\le\varepsilon$ шарт бажарилса, $x=x_2$ (3.1.1) тенгламанинг ε аниқликдаги тақрибий ечими бўлади, акс ҳолда $b=x_2$ $(a=x_2)$ деб олиб, юқоридаги амаллар кетма-кетлигини давом эттирамиз, ва қуйидаги

$$x_n=a-\frac{x_{n-1}-a}{f(x_{n-1})-f(a)}\cdot f(a)$$

тенгликга эга бўламиз. Ҳар сафар $|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon$ шартни текшириб борамиз, агар бу шарт бажарилса x_n (3.1.1) тенгламанинг ε аниқликдаги ечими бўлади.



3.4.1-расм

Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда ўсувчи бўлса, x_n ларни кетма-кет ҳисоблаш формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_n=b-\frac{x_{n-1}-b}{f(x_{n-1})-f(b)}\cdot f(b).$$

Мисол. Ушбу $11x^2+2x-26=0$ тенгламанинг [0; 4] оралиқдаги илдизини $\varepsilon=0{,}001$ аниқликда ватарлар усули ёрдамида аникланг.

Ечиш. $x_n=a-\frac{x_{n-1}-a}{f(x_{n-1})-f(a)}\cdot f(a)$ $\left(x_n=b-\frac{x_{n-1}-b}{f(x_{n-1})-f(b)}\cdot f(b)\right).$

x_n	$f(x_{n-1})$
0.0000	-26,0000
0,5652	-21,3554
0,9742	-13,6122
1,2142	-7,3547
1,3381	-3,6281
1.3979	-1,7103

1.4257	-0,7891
1.4385	-0,3605
1.4443	-0,1639
1.4470	-0,0744
1.4482	-0,0337
1.4487	-0,0153
1,4490	-0,0069

Жавоб:* *x =   1.4491

Ватарлар усулига тузилган дастур матни:

```
var a,b,eps,x:real;
    function f(x:real):real;
        begin
            f:=x*x-exp(-3*x)-1      { f(x) функция кўриниши }
        end;
begin clrscr;
        write('a='); read(a);   write('b='); read(b);
        write('eps='); read(eps);
    2: x:=b;
      x:=b-f(b)*(b-a)/(f(b)-f(a));
      if abs(x-b)<eps then goto 1 else begin b:=x; goto 2 end;
    1: writeln('x=',x:8:4);
end.
```

3.5. Уринмалар усули

Бизга (3.1.1) тенгламанинг $[a,b]$ оралиқдаги ечимини топиш талаб этилсин. Фараз қилайлик $[a,b]$ оралиқда $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилаларнинг ишоралари ўзгармасдан қолсин. $f(x)$ функция графигининг $B = B(b_0, f(b_0))$ нўқтасидан уринма ўтказамиз

$$f(x) - f(b_0) = f'(b_0)\cdot(x - b_0).$$

Бу уринманинг Ox ўқи билан кесишган нўқтасини b_1 деб белгилаймиз. У ҳолда қуйидаги

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)}$$

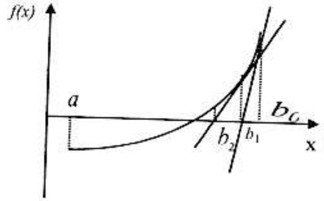
тенгликка эга бўламиз. $f(x)$ функция графигининг $B_1 = B_1(b_1, f(b_1))$ нўқтасидан яна уринма ўтказамиз

$$f(x) - f(b_1) = f'(b_1)\cdot(x - b_1)$$

ва бу уринманинг Ox ўқи билан кесишган нўқтасини b_2 деб белгилаймиз ва

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу жараённи бир неча марта такрорлаб, $b_1, b_2, \ldots b_n$ ларни ҳосил қиламиз ва ҳар сафар $|b_n - b_{n-1}| < \varepsilon$ шартни бажарилишини текшириб борамиз. Қачон бу шарт бажарилса, ҳисоблаш тўхтатилади ва b_n (3.1.1) тенгламанинг ε аниқликдаги ечими бўлади.



3.5.1- расм

Мисол. Ушбу $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 0$ тенгламани урунмалар усулида тақрибий ечинг ($x_0 = 3;\quad \varepsilon = 0{,}001$).

Ечиш. $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f(x_i)/f'(x_i)$	$x_i - f(x_i)/f'(x_i)$
3.000000	-24.000000	-10.000000	2.400000	0.600000
0.600000	12.672000	-9.040000	-1.401770	2.001770
2.001770	-9.031855	-17.996441	0.501869	1.499901
1.499901	0.001733	-17.499604	-0.000099	1.500000

Жавоб: *x=   1.500*

Паскал тилида уринмалар усулига тузилган дастур матни:

```
var x0,eps,x1,a:real;
        function f(x:real):real;
            begin
                f:= x-exp(-x)+2;      { f(x) функция кўриниши }
            end;
```

```
        function fx(x:real):real;
              begin  fx:=1+exp(-x)      { f'(x) функция кўриниши}
              end;
begin     clrscr;
          write('x0='); read(x0);
          write('eps='); read(eps);
          x1:=x0;
    repeat
          a:=f(x1)/fx(x1);   x1:=x1-a;
    until abs(a)<eps;
         writeln('x=',x1:10:4);
      end.
```

3.6. Оддий итерация усули

Бизга (3.1.1) тенгламанинг $[a,b]$ оралиқдаги ечимини топиш талаб этилсин. Бу тенгламани

$$x = \varphi(x)$$

кўринишдаги тенг кучли тенгламага алмаштирамиз.

Дастлаб $x_0 \in [a,b]$ яқинлашиш танлаб оламиз ва

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1,2,\ldots$$

формула ёрдамида $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кетма-кетликнинг қийматлари ҳосил қилинади. $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ шарт бажарилса, $\bar{x} = x_n$ қиймат тенгламанинг ε аниқликдаги тақрибий илдизи бўлади.

Итерация жараёнининг яқинлашиши. $\varphi(x)$ - функция $[a;b]$ да аниқланган ва дифференциалланувчи, ҳамда $\varphi(x) \in [a;b]$ бўлсин. Агар $|\varphi'(x)| < 1$ шарт бажарилса, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ кетма-кетлик ихтиёрий $x_0 \in [a;b]$ да яқинлашувчидир ва $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ берилган тенгламанинг ягона илдизи бўлади.

Оддий итерация усулига тузилган дастур матни:

```
  label 1,2;
  var f0,eps,x,x0:real;
  function f(z:real):real;
  begin
     f:=exp(z)-2     { φ(x) функциясининг кўриниши}
  end;
begin  clrscr;
```



```
      write('x0='); read(x0);
      write('eps='); read(eps);
      x:=x0;
   2: f0:=f(x);
      if abs(x-f0)<=eps then goto 1 else begin x:=f0; goto 2 end;
  1: writeln('x=',x:10:6);
end.
```

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Оралиқни тенг иккига бўлиш усули ёрдамида $x^3 + 2x - 5 = 0$ тенгламанинг $[0;2]$ оралиқдаги ечимини $\varepsilon = 0{,}1$ аниқликда топинг.
2. $5x^3 + 11x^2 - 24x - 36 = 0$ тенгламани $[-2;1]$ оралиқдаги ечимини оралиқни тенг иккига бўлиш усули ёрдамида $\varepsilon = 0{,}1$ аниқликда топинг.
3. Агар $x_0 = 0{,}5$ бўлса, уринмалар усули ёрдамида $x + 2^x - 2 = 0$ тенглама илдизини $\varepsilon = 0{,}1$ аниқликда топинг.
4. Агар $(x_0 = 5)$ бўлса, уринмалар усули ёрдамида $3x^3 - 7x^2 - 14x + 24 = 0$ тенглама илдизини $\varepsilon = 0{,}1$ аниқликда топинг.
5. Ватарлар усулидан фойдаланиб $x + 2 - e^x = 0$ тенгламанинг [-1;0] оралиқдаги ечимини $\varepsilon = 0{,}1$ аниқликда топинг.
6. Агар $x_0 = 0{,}5$ бўлса, $cosx - x + 1 = 0$ тенглама илдизини $\varepsilon = 0{,}1$ аниқликда оддий итерация усулида топинг.

Таянч сўз ва иборалар

Трансцендент тенглама, алгебраик алмаштириш, илдизларни ажратиш, оралиқни тенг иккига бўлиш усули, ватарлар усули, уринмалар усули, итерация усули.

Саволлар

1. Чизиқсиз тенглама деганда қандай тенгламани тушунасиз?
2. Трансцендент тенглама деганда қандай тенгламани тушунасиз?

3. Чизиқсиз ва трансцендент тенгламалар орасидаги фарқ нимадан иборат?
4. Чизиқсиз тенглама ечимининг мавжудлик шарти.
5. Қандай шартлар бажарилганда *f(x)=0* тенглама [*a*,*b*] оралиқда ягона ечимга эга бўлади?
6. *f(x)=0* тенглама илдизлари қандай усулда ажратилади?
7. Алгебраик алмаштириш қандай алмаштириш?
8. Оралиқни тенг иккига бўлиш усули ва унинг алгоритми.
9. Ватарлар усули ва унинг алгоритми.
10. Уринмалар усули ва унинг алгоритми.
11. Оддий итерация усули ва унинг яқинлашиш шарти.

IV-БОБ. СОНЛИ ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

4.1. Масаланинг қўйилиши

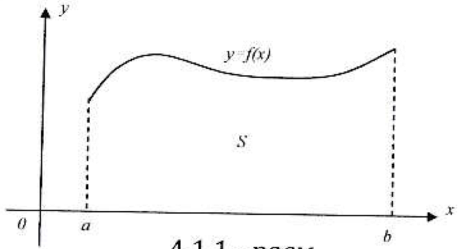
Маълумки, баъзи бир жараёнларни математик моделлаштиришда жисм сирти ва ҳажмини, жисм оғирлик маркази ва инерция моментини, қурилиш материалларида ҳосил бўладиган кучланиш ва деформацияни, бирор куч таъсирида бажарилаган иш миқдорини ҳисобга олишга тўғри келади. Жараённинг бу механик ва геометрик хусусиятлари, математик моделда аналитик ёки жадвал кўринишда берилган функция интеграли шаклида ифодаланади. Айрим ҳолларда қаралаётган масаланинг хосса ва хусусиятларига боғлиқ равишда бу интеграллар шундай кўринишга эга бўладики, уларни аналитик кўринишда аниқ интеграллаш имкони бўлмай қолади. Бундай ҳолларда интеграл қийматини тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

$[a;b]$ оралиқда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функция берилган бўлиб қуйидаги

$$I=\int_a^b f(x)dx \qquad (4.1.1)$$

интегрални ε аниқликда ҳисоблаш талаб қилинсин.

Олий математика курсидан маълумки, агар $f(x)$ функция $[a;b]$ оралиқда берилган бўлиб, $f(x)\geq 0$ бўлса, у ҳолда (15.1.1) аниқ интерал қиймати $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ ва $y=0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзига тенг бўлади (4.1.1-расм).



4.1.1 - расм

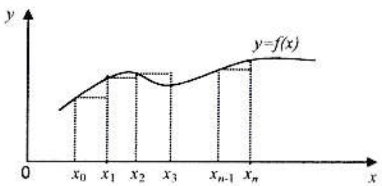
Интеграллар қийматларини ҳисоблашда бир неча тақрибий усуллардан фойдаланиш мумкин. Шу усуллардан айримлари билан танишиб чиқамиз.

4.2. Тўғритўртбурчак усули

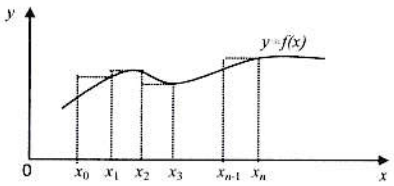
Берилган $[a;b]$ оралиқни $h=\dfrac{b-a}{n}$ қадам билан $n+1$ та оралиқларга бўламиз. Ҳосил бўлган оралиқларда жойлашган эгри чизиқли трапеция юзаларини тақрибий равишда тўғритўртбурчак юзига алмаштирамиз (4.2.1 ва 4.2.2 расмлар). Натижада (4.1.1) интеграл қийматини тақрибий ҳисоблаш учун қуйидаги

$$S=h\sum_{i=0}^{n-1}y_i, \quad Q=h\sum_{i=1}^{n}y_i$$

формулаларга эга бўламиз. Бу ерда $x_i=x_{i-1}+h$, $y_i=f(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$, $x_0=a$, $x_n=b$, n – натурал сон.



4.2.1-расм



4.2.2-расм

Тўғритўртбурчак усулида йўл қўйилган хатолик қуйидагича аниқланади:

$$|I-S|<Mh(b-a), \quad M=max|f'(z)|, \quad z\in[a;b].$$

Мисол. $\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}$ интеграл қийматини тўғритўртбурчак усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг ва натижани интегралнинг аниқ қиймати $arctg1=\dfrac{\pi}{4}\approx 0{,}785$ билан таққосланг.

Ечиш. Аниқлик учун $n=10$, $\Delta x=0{,}1$ ва $x_k=k\cdot 0{,}1$ $(k=0,1,2,\dots 10)$ деб олиб, интеграл остидаги функция қийматини 0,001 аниқликда ҳисоблаймиз:

$$y_0=1,\ y_1=\frac{1}{1+(0{,}1)^2}\approx 0{,}990,\quad y_2=\frac{1}{1+(0{,}2)^2}\approx 0{,}962,$$

$$y_3=\frac{1}{1+(0{,}3)^2}\approx 0{,}917,\quad y_4\approx 0{,}862,\quad y_5=0{,}800,\quad y_6\approx 0{,}735,\quad y_7\approx 0{,}671,$$

$$y_8\approx 0{,}610,\quad y_9\approx 0{,}552,\quad y_{10}=0{,}500.$$

У ҳолда берилган интегралнинг тақрибий қиймати учун

$$S=0{,}1\cdot(1+0{,}990+0{,}962+0{,}917+0{,}862+0{,}800+0{,}735+$$
$$+0{,}671+0{,}610+0{,}552)\approx 0{,}810$$
$$Q=0{,}1\cdot(0{,}990+0{,}962+0{,}917+0{,}862+0{,}800+0{,}735+0{,}671+$$
$$+0{,}610+0{,}552+0{,}500)\approx 0{,}755$$

ларга эга бўламиз, яъни 0,755<0,785<0,810. Бу ерда интегрални тақрибий ҳисоблашда йўл қўйилган абсолют хато $|I-S|<0{,}028$ дан ошмаслигини ва нисбий хато эса $\dfrac{0{,}028\cdot 100}{0{,}785}\approx 3{,}6\%$ га тенглигини кўришимиз мумкин.

Аниқ интеграл қийматини тўғритўртбурчак усулида тақрибий ҳисоблаш учун тузилган дастур матни:

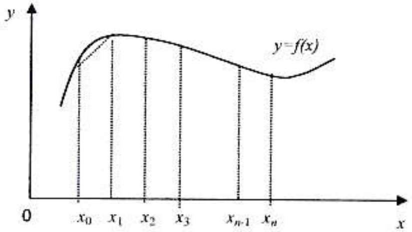
```
var a,b,int:real; n:integer;
function f(x:real):real;
begin
   f:=(x*x*x- x*x+5)*exp(-2*x)*sin(x+1)    { f(x) функция
кўриниши }
end;
procedure turtburchak(a1,b1:real;n1:integer; var int1:real);
  var i:integer; h1,c:real;
    begin
      h1:=(b1-a1)/n1;
      c:=0; int1:=0; c:=a1-h1/2;
      for i:=1 to n1 do
        begin
          c:=c+h1; int1:=int1+f(c)
        end;
      int1:=int1*h1;
    end;
begin clrscr;
    read(a,b,n);
    turtburchak(a,b,n,int);
    writeln('Интеграл =',int:10:4);
end.
```

4.3. Трапеция усули

$[a;b]$ оралиқни $x_i=a+i\cdot h$ нуқталар билан (бу ерда $i=1,2,\dots,n;$ $x_0=a$, $x_n=b$, n - натурал сон) $n+1$ та оралиқларга ажратамиз ва ҳар бир оралиқда эгри чизиқли трапеция юзини тақрибий равишда тўғри чизиқли трапеция юзига алмаштирамиз (4.3.1-расм), натижада интеграл қийматини ҳисоблаш учун қуйидаги тақрибий формулага эга бўламиз:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0+2y_1+\ldots+2y_{n-1}+y_n)=\frac{h}{2}\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)=S$$

бу ерда I - (4.1.1) интегралнинг аниқ қиймати, S - (4.1.1) интегралнинг тақрибий қиймати, $y_i=f(x_i)$.



4.3.1-расм

Хатоликни баҳолаш:

$$|I-S|=R\le\frac{h^2}{12}(b-a)M,\quad M=max|f''(z)|,\quad z\in[a;b].$$

Мисол. $I=\int_0^\pi sin\,xdx$ интеграл қийматини $n=6$ учун трапеция усулидан фойдаланиб тақрибий ҳисобланг.

Ечиш.

$$S=\frac{\pi}{6}\left(\frac{sin\,0+sin\,\pi}{2}+sin\frac{\pi}{6}+sin\frac{2\pi}{6}+sin\frac{3\pi}{6}+sin\frac{4\pi}{6}+sin\frac{5\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(0{,}5+\frac{1}{2}\sqrt{3}+1+\frac{1}{2}\sqrt{3}+0{,}5\right)\approx 1{,}9541.$$

Агар берилган интегралнинг аниқ қиймати 2 га тенглигини ҳисобга олсак, йўл қўйилган абсолют хато 0,0459 га, нисбий хато эса $\frac{0{,}0459\cdot 100}{2}\approx 2{,}5\%$ га тенг эканлигини кўрамиз.

Аниқ интеграл қийматини трапеция усулида тақрибий ҳисоблаш учун тузилган дастур матни:

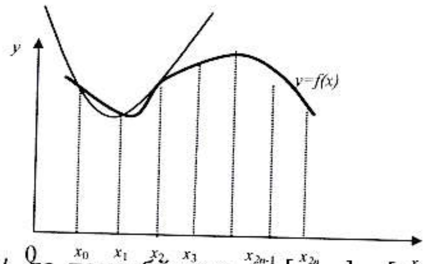
```
var n1:integer; a,b,i1:real;
```



```
function f(x:real):real;
    begin
      f:=x*exp(-x*ln(2))*cos(x*x+1)
     { f(x) функция кўриниши }
    end;
procedure trap1(a1,b1:real;N:integer; var int:real);
  var i:integer; h,s:real;
    begin h:=(b1-a1)/n; s:=(f(a1)+f(b1))/2;
      for i:=1 to n-1 do s:=s+f(a1+i*h);
      int:=s*h;
    end;
begin  clrscr;
    write('a='); read(a); write('b='); read(b);
    write('N='); read(n1);
    trap1(a,b,n1,i1);
    writeln('integral=',i1:10:4);
end.
```

4.4. Симпсон усули

$[a;b]$ оралиқни $h=\frac{b-a}{2n}$ қадам билан $2n$ та оралиқларга ажратамиз (4.4.1- расм). $x_0=a$, $x_{2n}=b$, $y_i=f(x_i)$, $i=1,2,\ldots 2n$. n - натурал сон.



4.4.1-расм

Узунлиги $2h$ га тенг бўлган $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, ..., $[x_{2n-2},x_{2n}]$ оралиқлар учун Симпсон формуласи

$$\int_{x_0}^{x_2}y(x)dx\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

ни қўллаймиз. Натижада интеграл қийматини тақрибий ҳисоблаш учун

$$\int_a^b y(x)dx \approx S = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

ёки

$$\int_a^b y(x)dx \approx S = \frac{h}{3}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})]$$

формулага эга бўламиз. Бу формула интеграл қийматини тақрибий ҳисоблаш учун умумлашган Симпсон формуласи деб аталади. Охирги формулани

$$S=\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n}y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1}y_{2i}\right)$$

кўринишда ёзиш ҳам мумкин. Симпсон усулида йўл қўйилган хатолик қуйидагича $R\le\frac{(b-a)h^4}{180}\cdot M$, $M=max\left|f^{IV}(z)\right|$, $z\in[a,b]$ баҳоланади.

Мисол. Дарё кенглиги 20 метрга тенг. Дарё чуқурлиги кўндаланг кесими бўйича ҳар 2 метр оралиқда ўлчаб чиқилди. Ўлчаш натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

x (метр)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y (метр)	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

Дарё кўндаланг кесими юзасини трапеция ва Симпсон формулалари ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. Трапеция формуласи бўйича:

$$S=2\left(\frac{0,2+0,2}{2}+0,5+0,9+1,1+1,3+1,7+2,1+1,5+1,1+0,6\right)=22м^2$$

Симпсон формуласи бўйича:

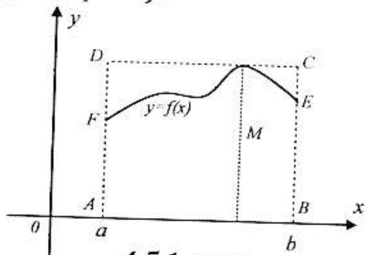
$$S=\frac{2}{3}(0,2+4\cdot0,5+2\cdot0,9+4\cdot1,1+2\cdot1,3+4\cdot1,7+2\cdot2,1+4\cdot1,5+$$
$$+2\cdot1,1+4\cdot0,6+0,2)=21,9м^2$$

Аниқ интеграл қийматини Симпсон усулида тақрибий ҳисоблаш учун тузилган дастур матни:

```
var a,b,int1:real; n:integer;
  function f(x:real):real;
      begin
          f:=(x+3)*exp(x)*sin(x*x*x)   { f(x) функциянинг
кўриниши }
      end;
procedure simps(a,b:real;n:integer;var int:real);
  var h,s,s1,s2:real; i:integer;
   begin  h:=(b-a)/(2*n);
          s1:=0; s2:=0;  s:=f(a)+f(b);
          for i:=1 to n do s1:=s1+f(a+(2*i-1)*h);
          for i:=1 to n-1 do s2:=s2+f(a+2*i*h);
          int:=h*(s+4*s1+2*s2)/3;
   end;
begin    clrscr;
        write('a='); read(a);   write('b='); read(b);
        write('n='); read(n);   simps(a,b,n,int1);
        writeln('integral=',int1:10:4);
end.
```


4.5. Монте-Карло усули

Бу усул эхтимолнинг геометрик ва статистик таърифларини мувофиқлаштиришдан келиб чиққан. Бунинг учун $y=f(x)$ функцияни $a\le x\le b$ оралиқдаги юқори чегараси $|f(x)|<M$ топилади (4.5.1-расм).



4.5.1-расм.

У холда

$$S_{ABCD}=M\cdot(b-a);\quad S_{ABEF}=\int_a^b f(x)dx.$$

Иккинчи тарафдан эхтимолнинг геометрик таърифига кўра $ABCD$ тўғри тўртбурчакдан олинган ихтиёрий нуқтани $ABEF$ эгри чизиқли трапецияга тегишли бўлиш ходисасининг эхтимоли

$$P(A)=\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{S_{ABCD}}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(A)\cdot S_{ABCD} \qquad (4.5.1)$$

Агар A – тасодифий ҳодиса $ABCD$ тўғри тўртбурчакдан олинган ихтиёрий нуқтани $ABEF$ эгри чизиқли трапецияга тегишли бўлиш ҳодисаси десак, бу ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаш учун эҳтимолнинг статистик таърифидан фойдаланамиз. Бунинг учун $[a,b]$ оралиқда текис тақсимланган x_i тасодифий миқдорлар ва $[0;M]$ оралиқда текис тақсимланган y_i тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини тузамиз. Бунинг учун компьютерда мавжуд бўлган псевдотасодифий миқдорлар генераторидан фойдаланиш мумкин. Ҳосил бўлган (x_i,y_i), $(i=\overline{1,n})$ нуқталар $ABCD$ тўғри тўртбурчакка тегишли бўлади. Бу нуқталардан $ABEF$ трапецияга тегишлиларини ажратамиз. Бунинг учун $y_i \le f(x_i)$ шарт бажарилиши керак. Бундай нуқталар сони m та бўлсин. У ҳолда A – ҳодиса эҳтимоли учун

$$P(A) \approx \frac{m}{n} \qquad (4.5.2)$$

формуладан фойдаланиш мумкин. n – қанчалик катта бўлса (4.5.2) формула шунчалик аниқ бўлади. (4.5.2) формуладан A – ҳодиса эҳтимоли учун топилган қийматни (4.5.1) формулага олиб бориб қўямиз ва

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{m}{n}\cdot S_{ABCE} = \frac{m}{n}\cdot M\cdot(b-a)$$

формулани ҳосил қиламиз. Интегрални бу усулда ҳисоблаш Монте-Карло усули дейилади.

Агар биз юқорида келтирилган тақрибий интеграллаш формулалари аниқлиги ҳақида гапирадиган бўлсак, бу ерда энг юқори аниқликка эга бўлган усул – Симпсон усулидир. Ундан кейинги аниқроқ усул эса – трапеция усули. Тўғритўртбурчак усули эса бу усуллар орасида энг катта хатоликка йўл қўйиладиган усул ҳисобланади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $\int_0^1 (2x^2-4x+2)dx$ интегрални $n=5$ учун тўғри тўртбурчак усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.
2. $\int_0^1 (5x^2-6x+1)dx$ интегрални $n=10$ учун тўғри тўртбурчак усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

3. $\int (x^2-x+1)dx$ интегрални $n=10$ учун трапеция усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.
4. $\int (2x^2+x+1)dx$ интегрални $n=5$ учун трапеция усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.
5. $\int (5x^2-6x+1)dx$ интегрални $n=5$ учун Симпсон усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.
6. $\int (3x^2-2x-6)dx$ интегрални $n=10$ учун Симпсон усули ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

Таянч сўз ва иборалар

Аниқ интеграл, трапеция усули, итерация усули, Симпсон усули, Монте-Карло, эхтимол, тасодифий ҳодиса, псевдотасодифий миқдор, абсолют ва нисбий хатоликлар.

Саволлар

1. Аниқ интегралнинг геометрик маъносини нимадан иборат?
2. Тақрибий интеграллаш деганда нимани тушунасиз?
3. Тақрибий интеграллашда тўғри тўртбурчак усули ва унинг алгоритми.
4. Тақрибий интеграллашда трапеция усули ва унинг алгоритми.
5. Тақрибий интеграллашда Симпсон усули ва унинг алгоритми.
6. Тақрибий интеграллашда хатоликлар қандай аниқланади?

V-БОБ. ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР

5.1. Асосий тушунчалар

Функцияни аппроксимациялаш (унга яқин тақрибий функцияга айлантириш) нофақат инженерлик амалиётида, балки янада мураккаброқ масалалар, масалан дифференциал тенгламаларни ечишда ҳам фойдаланилади. x ва y ўзгарувчилар орасида ўзаро $y=f(x)$ боғланиш берилган бўлсин. Математика фанидан маълумки бу боғланиш аналитик, график, жадвал ёки реккурент кўринишларда бўлади. Амалиётда, масалан ўтказилган тажриба (эксперимент) натижалари асосан жадвал, яъни $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$ кўринишда берилади. Функциянинг бу кўринишда берилиши, ундан фойдаланиш имкониятини чегаралаб қўяди. Чунки функция бу кўринишда берилса, унинг факат $x=x_i$ тугун нуқталардаги қийматлари маълум бўлади. Амалиётда эса y нинг x_i нуқталардан бошқа нуқталардаги қийматларидан фойдаланиш зарурияти пайдо бўлади. Бу қийматларни олиш учун эса, катта маблағ талаб қиладиган тажрибалар ўтказиш керак бўлади. Қўшимча тажрибалар ўтказмасдан оралиқ нуқталарда y нинг қийматларини тақрибий аниқлаш мумкинми? Ҳа, бунинг учун жадвал кўринишда берилган функцияни апроксимациялаш формулаларидан фойдаланилади.

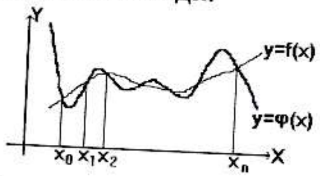
Умуман олганда, $[a,b]$ оралиқда жадвал кўринишда берилган функциянинг қийматларидан, шу оралиққа тегишли ихтиёрий нуқталарда функция қийматларини тақрибий ҳисоблашда фойдаланиш мумкин. Бунинг учун $y=f(x)$ функцияни аппроксимациялаш усулидан фойдаланилади. Жадвал кўринишда берилган $f(x)$ функцияни аппроксимациялаш бу функцияни унга яқин қандайдир аналитик $\varphi(x)$ функция билан тақрибий алмаштиришки, уларнинг қийматлари бир-биридан етарлича кам фарқ қилади. $\varphi(x)$ функция аппроксималовчи функция деб аталади. Агар бу $\varphi(x)$ функция ҳосил қилинган бўлса, ихтиёрий x ларда унинг қийматларини ҳисоблаш мумкин ва бу қиймат тақрибан $f(x)$ га тенг бўлади. Кўпгина ҳолларда $\varphi(x)$ функция сифатида, кўпҳадлар олинади:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Бу ерда a_i сонли коэффициентлар шундай танланадики, $\varphi(x)$ ва $f(x)$ функциялар қийматлари бир-бирига яқин бўлади.

Функцияни аппроксимациялашнинг асосий кўринишларидан бири бу интерполяция (5.1.1–расм) ҳисобланади. Шундай $\varphi(x)$ кўпхад қуриш керакки унинг жадвал нуқталардаги қийматлари $f(x)$ функция қийматлари билан устма-уст тушади, яъни $\varphi(x_i)=y_i$, $i= 0,1, \ldots, n$, $x_0=a$, $x_n=b$.

Бу ерда x_i лар ҳар хил деб ҳисобланади яъни, $i\neq j$ лар учун $x_i\neq x_j$. x_i лар интерполяция *тугун нуқталари*, $\varphi(x)$ кўпхад эса *интерполяция кўпхади* деб аталади.



Шундай қилиб, интерполяциянинг асосий хусусияти қуйидагича: аппроксималовчи $\varphi(x)$ кўпхад жадвал нуқталаридан ўтади ва $[a,b]$ оралиқнинг бошқа нуқталарида $f(x)$ функцияни қандайдир аниқликда ифодалаб беради.

Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ бутун оралиқда ягона кўпҳад билан интерполяция қилинган бўлса, бу *глобал интерполяция* деб, агар $[a,b]$ нинг ҳар хил қисмларида турли хил кўпҳадлар билан интерполяция қилинган бўлса, бу *локал (бўлакли, кўпинтервалли) интерполяция* деб аталади.

5.2. Чекли айирмалар

Фараз қилайлик

$$y=f(x)$$

функция берилган бўлиб, $\Delta x = h = const$ аргумент орттирмаси(қадам) бўлсин. У ҳолда

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

айирмага, $y=f(x)$ функциянинг биринчи тартибли чекли айирмаси деб аталади.

Худди шунга ўхшаш иккинчи тартибли чекли айирма,

$$\Delta^2 y=\Delta(\Delta f(x))=f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)+f(x)=$$
$$=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$$

ёки

$$\Delta^2 y=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$$

формула ёрдамида аниқланади.

Юқори тартибли чекли айирмаларни ҳисоблаш учун

$$\Delta^n y=\Delta(\Delta^{n-1}y);\qquad n=2,3,\ldots$$

формула ўринли бўлади.

Ҳар хил тартибли чекли айирмаларни горизонтал (1-жадвал) ва диагонал (2-жадвал) жадвал кўринишда тасвирлаш мумкин.

1-жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
...	...	...	...	...

2-жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
			$\Delta^2 y_0$	
x_1	y_1			$\Delta^3 y_0$
		Δy_1		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Масалан x_0 ва $h=1$ бўлганда $y=2x^3-2x^2+3x-1$ функция учун чекли айирмалар жадвали қуйидаги кўринишда бўлади:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12
...	...	...	...	...

Мисол. $\Delta x=1$ учун $f(x)=x^3$ функциянинг чекли айирмаларини ҳисобланг.

Ечиш.

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1,$$

$$\Delta^3 f(x)=\Delta(\Delta^2 f(x))=\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x)=6(x+1)+6-(6x+6)=6,$$
$$\Delta^4 f(x)=\Delta(\Delta^3 f(x))=\Delta^3 f(x+\Delta x)-\Delta^3 f(x)=6-6=0,$$

Ихтиёрий $n>3$ лар учун $\Delta^n f(x)=0$ бўлади.

Агар

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

n – тартибли кўпҳад бўлса $\Delta^n P_n(x)=n!\,a_0h^n=const$, $k>n$ лар учун эса $\Delta^k P_n(x)=0$ бўлади. Бу ерда $h=\Delta x$.

Кўпгина ҳолларда $y=f(x)$ функциянинг бир хил узоқликда жойлашган $x_i\ (i=0,1,2,\ldots)$ нуқталардаги $y_i=f(x_i)$ қийматлари берилган бўлади.

Жадвал кўринишда берилган $y_i=f(x_i)$ лар учун чекли айирмалар

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i\ ,$$
$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i)=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i\ ,$$
$$\Delta^3 y_i=\Delta(\Delta^2 y_i)=\Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n y_i=y_{n+i}-C_n^1y_{n+i-1}+C_n^2y_{n+i-2}-\ldots+(-1)^n y_i$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади. Бу ерда

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)]}{m!}.$$

5.3. Умумлашган даража

x сонининг n-умумлашган даражаси деб, $x(x-h)(x-2h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h]$ кўпайтмага айтилади ва у $x^{[n]}$ деб белгиланади:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h],$$

бу ерда h – ўзгармас сон.

Одатда $x^{[0]}=1$ деб олинади. $h=0$ да умумлашган даража оддий даража билан устма-уст тушади: $x^{[n]}=x^n$.

Умумлашган даража учун чекли айирмалар қуйидагича ҳисобланади:

1- тартибли чекли айирма:

$$\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]} =$$
$$= (x+h)x\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h] - x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h] =$$
$$= x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h]\cdot\{(x+h)-[x-(n-1)h]\} =$$
$$= x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h]\cdot nh = nhx^{[n-1]},$$

ёки

$$\Delta x^{[n]} = nhx^{[n-1]}.$$

2- тартибли чекли айирма:

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nhx^{[n-1]}) = nh(n-1)hx^{[n-2]} = nh^2(n-1)x^{[n-2]},$$

ёки

$$\Delta^2 x^{[n]} = nh^2(n-1)x^{[n-2]}$$

кўринишида ёзилади.

Математик индукция методи ёрдамида исботлаш мумкинки, k – тартибли чекли айирма учун

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]}$$

формула ўринли бўлади. Бу ерда $k=1, 2, 3, \ldots, n$ Шу билан бирга $k>n$ бўлса, $\Delta x^{[n]}=0$ бўлади.

5.4. Интерполяция масаласининг қуйилиши

$[a,b]$ оралиқда $n+1$ та $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугун нуқталар берилган бўлиб, уларда $f(x)$ функциянинг $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$, ... , $f(x_n)=y_n$ қийматлари берилган бўлсин. Даражаси n дан кам бўлмаган шундай $F(x)$ кўпҳад тузиш талаб қилинадики, бу функциянинг $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугун нуқталардаги қийматлари мос равишда $f(x)$ функция қийматларига тенг бўлсин, яъни $F(x_0)=y_0$, $F(x_1)=y_1$, ... , $F(x_n)=y_n$. Бу ерда $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугун нуқталар интерполяция нуқталари деб, $F(x)$ функция эса интерполяция функцияси деб аталади.

Юқоридаги берилган масала, жадвал кўринишда берилган

$f(x)$ функцияни $F(x)$ функцияга интерполяциялаш масаласи деб аталади.

Умуман олганда интерполяциялаш масаласи чексиз кўп ечимга эга бўлиши ёки битта ҳам ечимга эга бўлмаслиги мумкин.

Агар интерполяциялаш масаласида $F(x)$ функция ўрнига, даражаси n дан ошмайдиган $P_n(x)$ кўпҳад ҳосил қилиш талаб этилса, у ҳолда масала бир қийматли ечимга эга бўлади.

Ҳосил қилинган $y=F(x)$ интерполяция функция х нинг тугун нуқталаридан бошқа қийматларида $f(x)$ функция қийматини тақрибий ҳисоблаш имкониятини беради.

Интерполяциялаш масаласи математик моделлаштириш масалаларини ечишда кенг фойдаланилади. Масалан ўрганилаётган объект эксперимент (тажриба) усулида моделлаштирилган бўлса, объект хосса ва хусусиятларининг ўлчаш натижалари жадвал кўринишида берилган бўлади. Агар объектнинг ўлчаш (тажриба ўтказиш) оралиқларидаги қийматлари керак бўлса, улар тажриба натижалар орқали тузилган интерполяция функциялар ёрдамида аниқланади.

5.5. Ньютон интерполяцион формулалари

Тенг узоқликда жойлашган $x_i = x_0 + ih$ $(i=0,1,\ldots,n)$ тугун нуқталарда $y=f(x)$ функциянинг $y_i=f(x_i)$ қийматлари берилган бўлсин. Бу ерда h – интерполяция қадами.

Даражаси n дан катта бўлмаган ва x_i тугун нуқталарда

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n) \qquad (5.5.1)$$

шартларни қаноатлантирадиган $P_n(x)$ кўпҳад тузиш талаб қилинсин.

Маълумки, (5.5.1) формула $m=0,1,2,\ldots,n$ лар учун $\Delta^m P_n(x_0)=\Delta^m y_0$ тенглик билан тенг кучли.

$P_n(x)$ кўпҳадни

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

кўринишда, ёки

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)^{[1]}+a_2(x-x_0)^{[2]}+a_3(x-x_0)^{[3]}+\ldots+a_n(x-x_0)^{[n]} \qquad (5.5.2)$$

умумлашган даража кўринишда қидирамиз. Бу ерда a_i $(i=0, 1, \dots, n)$ лар ҳозирча номаълум коэффициентлар.

(5.5.2) да $x=x_0$ деб $P_n(x_0)=y_0=a_0$ ни ҳосил қиламиз. a_1 коэффициентни топиш учун биринчи тартибли

$$\Delta P_n(x)=a_1h+2a_2(x-x_0)^{[1]}h+3a_3(x-x_0)^{[2]}h+\dots+na_n(x-x_0)^{[n-1]}h$$

чекли айирмани тузиб оламиз ва у ерда $x=x_0$ деб $\Delta P_n(x_0)=\Delta y_0=a_1h$ ёки бундан $a_1=\frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}$ га эга бўламиз.

Худди юқоридаги каби амалларни бажариб, a_i лар учун

$$a_i=\frac{\Delta^i y_0}{i!\cdot h^i}\quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

формулага эга бўламиз.

Топилган a_i, $(i=0, 1, 2, \dots, n)$ ларнинг қийматларини (5.5.2) га олиб бориб қўйиб

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x-x_0)^{[1]}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x-x_0)^{[2]}+\dots+\frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x-x_0)^{[n]} \tag{5.5.3}$$

Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласини ҳосил қиламиз.

(5.5.3) да $q=\frac{x-x_0}{h}$ (x_0 нуқтадан x нуқтагача бўлган h қадамлар сони) янги ўзгарувчи киритиб ва

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h^i}=\frac{(x-x_0)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-h)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-2h)}{h}\cdot\dots\cdot\frac{[x-x_0-(i-1)h]}{h}=$$

$$=q(q-1)(q-2)\cdot\dots\cdot(q-i-1)\quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

эканлигини ҳисобга олсак, Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласини

$$P_n(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\dots+\frac{q(q-1)\cdot\dots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласи

$$P_n(x)=y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\dots+\frac{q(q+1)\cdot\dots\cdot(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

кўринишга эга бўлиб, бу ерда $q=\frac{x-x_n}{h}$ (x_n нуқтадан x нуқтагача бўлган h қадамлар сони).

Ньютон интерполяция формулаларининг қайси биридан қачон ва қандай ҳолда фойдаланиш мақсадга мувофиқ?

Агар $x<x_0$ $(q<0)$ ва x нинг қиймати x_0 га яқин бўлса, Ньютоннинг 1-интерполяция формуласидан, агар $x>x_n$ $(q>0)$ ва x нинг қиймати x_n га яқин бўлса, Ньютоннинг 2-интерполяция формуласидан фойдаланиш яхши натижаларга олиб келади.

Мисол. Қуйидаги жадвал

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

кўринишида берилган функция учун Ньютоннинг 1-интерполяция формуласини тузинг.

Ечиш. Жадвалдан кўриниб турибдики, $x_0=0$ ва $h=1$. Дастлаб берилган функция учун горизонтал чекли айирмалар жадвалини тузиб оламиз.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	5,2	2,8	-0,4
1	8,0	2,4	-0,4
2	10,4	2,0	-0,4
3	12,4	1,6	-0,4
4	14,0	1,2	
5	15,2		

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, иккинчи тартибли айирмалар ўзгармас, у ҳолда $\Delta^3 y=0$ бўлади. Шу сабабли (3) формуладан

$$y_2(x)=5,2+2,8x-\frac{0,4}{2}x(x-1)$$

ёки

$$y_2(x)=5,2+3x-0,2x^2$$

га эга бўламиз.

Ньютон интерполяция формулалари интерполяциялаш қадами ўзгармас бўлганда ўринли бўлади. Лекин кўпгина ҳолларда функция қийматлари тенг узоқликда жойлашмаган x_i лар (интерполяция қадами ўзгарувчи) учун жадвал кўринишда берилади. Бундай ҳолларда Лагранж интерполяция формуласидан фойдаланилади.

5.6. Лагранж интерполяцион формуласи

$[a;b]$ оралиқда ўзгарувчи x нинг $n+1$ та $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ тугун қийматлари ва уларга мос $y=f(x)$ функция қийматлари $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $\ldots$, $f(x_n)=y_n$ берилган бўлсин.

Даражаси n дан катта бўлмаган ва x_i тугун нуқталарда

$$L_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\ldots,n) \qquad (5.6.1)$$

шартларни қаноатлантирадиган $L_n(x)$ кўпҳадни тузиш талаб қилинсин.

Дастлаб, шундай $p_i(x)$ кўпҳад тузиб олайликки, у

$$p_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{агар} \quad i=j;\\ 0, & \text{агар} \quad i\neq j,\end{cases}$$

шартни қаноатлантирсин. Бу ерда δ_{ij} - Кронеккер белгиси.

Изланаётган кўпҳад n та $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ тугун нуқталарда нолга айланади, шу сабабли уни

$$p_i(x)=C_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n) \qquad (5.6.2)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин.

Агар (5.6.2) да $x=x_i$ деб ва

$$p_i(x_i)=C_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)=1$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$C_i=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (5.6.3)$$

га эга бўламиз. (5.6.3) ни (5.6.2) га қўйиб,

$$p_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (5.6.4)$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди (5.6.1) шартни қаноатлантирувчи $L_n(x)$ кўпҳадни

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}p_i(x)y_i \qquad (5.6.5)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин.

(5.6.5) даражаси n дан катта бўлмаган кўпҳад бўлиб, (5.6.1) шартни қаноатлантиради:

$$L_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n}p_i(x_j)y_i=p_j(x_j)y_j=y_j \qquad (j=0,1,2,\ldots,n)$$

(5.6.4) ни (5.6.5) га олиб бориб қўйиб,

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (5.6.6)$$

Лагранжнинг интерполяция кўпҳадини ҳосил қиламиз.

Мисол. Берилган $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$ нуқталарга мос равишда $y_0=1$, $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=0$ қийматларни қабул қиладиган функция учун Лагранж кўпҳадини тузинг.

Ечиш. (5.6.6) формулага асосан

$$L_2(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot 1+\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}\cdot 0=$$

$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-9x\left(x-\frac{1}{2}\right)=(3x-1)(2x-1)-9x^2+4{,}5x=-3x^2-0{,}5x+1$$

ёки

$$L_2(x)=-3x^2-0{,}5x+1$$

га эга бўламиз.

Лагранж интерполяция формуласига тузилган дастур матни:

```
const n=2;
type vek=array[0..n] of real;
var  i,j:integer;
     x,y:vek; x1,y1:real;
procedure lagran(x:real; k:integer; px,py:vek; var lag:real);
var s1:real;
begin
     lag:=0;
     for i:=0 to k do
         begin s1:=1.0;
               for j:=0 to i-1 do s1:=s1*(x-px[j])/(px[i]-px[j]);
               for j:=i+1 to k do s1:=s1*(x-px[j])/(px[i]-px[j]);
               lag:=lag+s1*py[i]
         end;
```

```
end;
begin
    write('x='); read(x1)
    for i:=0 to n do begin write('x[',i:1,']='); read(x[i]) end;
    for i:=0 to n do begin write('y[',i:1,']='); read(y[i]) end;
    lagran(x1,n,x,y,y1);
    writeln('y=',y1:8:5);
end.
```

5.7. Кўпинтервалли интерполяция

Агар функция жадвал кўринишда берилган бўлиб, унда тугун нуқталар сони $n+1$ та бўлса, Ньютон ва Лагранж интерполяция формулалари n – тартибли кўпҳаддан иборат бўлади. Нуқталар сони қанча кўп бўлса, шунча юқори тартибли кўпҳадлардан фойдаланишга тўғри келади. Бу эса ўз навбатида мураккаб ҳисоблашларни бажаришга, натижада хатоликларга йўл қўйишга олиб келади. Худди шундай муаммога катта оралиқларда интерполяция формулаларидан фойдаланишда ҳам дуч келиш мумкин. Чунки катта оралиқларда аниқлик кам бўлади. Агар оралиқни кичиклаштирсак у ҳолда тугун нуқталар сони кўпайиб, кўпҳад даражаси ошиб кетади.

Бу каби ҳолларда даражаси юқори бўлмаган кўпҳадлар ёрдамида локал интерполяциялаш усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади. $[a,b]$ оралиқни қандайдир $a=\gamma_0<\gamma_1<...\gamma_m<\gamma_{m+1}=b$ кесмаларга ажратамиз. Бу кесмаларнинг ҳар бири бир нечта тугун нуқталарни ўз ичига олсин. $\gamma_0, \gamma_1,...\gamma_m, \gamma_{m+1}$ ларни шундай танлаймизки, улар жадвалда берилган тугун нуқталардан айримларига мос келсин. Ҳар бир $I_k=[\gamma_{k-1},\gamma_k]$ $(k=1,...,m)$ кесмада жойлашган тугун нуқталар ёрдамида $g_k(x)$ интерполяция кўпҳадини тузамиз. Бу кўпҳаднинг даражаси юқори бўлмайди, чунки ҳар бир кесмада тугун нуқталар сони кўп эмас. $g_k(x)$ $(k=1,...,m)$ кўпҳадларни бирлаштириб $g(x)$ кўпҳадни ҳосил қиламиз. Бу кўпҳад одатда бўлакли-кўпҳад деб аталади ва у оралиқнинг ихтиёрий нуқтасида $f(x)$ функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш имконини беради.

Ҳар қандай берилган x да функция қийматини кўпинтервалли интерполяция формуласи ёрдамида ҳисоблаш қуйидаги алгоритм асосида амалга оширилади:

1. x нуқта қайси $[\gamma_k,\gamma_{k+1}]$ кесмага тегишлилиги аниқланади.
2. Шу кесмадаги тугун нуқталар ёрдамида тузилган интерполяция формула ёрдамида функция қиймати $y=g_k(x)\approx f(x)$ ҳисобланади.

Кўпинтервалли интерполяция формуласи қуйидаги хоссаларга эга:

1. Интерполяция кўпҳадининг даражаси тугун нуқталар сонига боғлиқ бўлмайди. Ҳақиқатан, тугун нуқталарни ошиши билан кесмалар сони m ни, шундай ошириш мумкинки, натижада кесмадаги тугун нуқталар сони ошмасдан қолади.
2. Ўзгармас $[a,b]$ оралиқда кесмалар сони ошиши ҳисобига интерполяция хатолиги нолга интилади.
3. Кўпҳад даражаси юқори бўлмаганлиги учун унинг қийматларини ҳисоблаш қулай ва унга кам вақт сарфланади.

Такидлаб ўтиш керакки, $g(x)$ функция кесмалар бирлашган γ_k нуқтада узлуксиз, лекин унинг биринчи тартибли ҳосиласи бу нуқтада узулишга эга. Локал интерполяциялаш усулининг бу камчилигини сплайн функциясидан фойдаланиш орқали бартараф этиш мумкин.

5.8. Параболик сплайн функциялар

$[a,b]$ оралиқда ўзи ва бир неча тартибли ҳосилалари узлуксиз ҳамда $[x_i, x_{i+1}]$ кесмада алгебраик кўпҳаддан иборат бўлган бўлакли-берилган функцияга *сплайн функция* деб аталади.

Барча $[x_i, x_{i+1}]$ кесмалардаги алгебраик кўпҳадларнинг максимал даражаси *сплайн функция даражаси* деб аталади.

Сплайн функция даражаси ва $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ҳосиланинг юқори тартиби орасидаги фарқ сплайн *функция дефекти* деб аталади.

Сплайн функциядан олинган биринчи тартибли ҳосиланинг тугун нуқтадаги қиймати унинг шу тугун нуқтадаги *оғиши* деб аталади.

Иккинчи тартибли ва дефекти бирга тенг бўлган сплайн функция қуриш масаласини кўриб чиқамиз. Соддалик учун бизга тўртта тугун нуқтада қуйидаги жадвал функция берилган бўлсин:

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

Кесмалар сифатида $I_i=[x_i,x_{i+1}]$, i=1,2,3 ларни танлаймиз. Ҳар бир кесма иккитадан тугун нуқталарни ўз ичига олган. Пароболанинг учта коэффициентини аниқлаш учун учта тенглама зарур бўлади. Берилган нуқталар ёрдамида иккита тенглама ҳосил қилишимиз мумкин. Учинчи тенгламани ҳосил қилиш учун кесмадаги параболадан навбатдаги кесмадаги пароболага силлиқ ўтиш шартидан фойдаланамиз.

Ҳар бир I_i кесмага мос келувчи параболани

$$g_i(x)=a_{i2}x^2+a_{i1}x+a_{i0}\ ,\ i=1,2,3$$

кўринишда қидирамиз. Бу ҳолда учта пароболанинг бирлашмасидан иборат сплайн функция тўққизта a_{ij} коэффициент орқали аниқланади. Олтита тенгламани ҳар бир парабола берилган тугун нуқталардан ўтишлиги шартидан ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}&g_1(x_1)=y_1, g_1(x_2)=y_2,\\&g_2(x_2)=y_2, g_2(x_3)=y_3,\\&g_3(x_3)=y_3, g_3(x_4)=y_4,\end{aligned}\tag{5.8.1}$$

Параболаларнинг бирлашиш нуқталарида бўлакли функциянинг дифференциалланувчилигидан фойдаланамиз:

$$g_1'(x_2)=g_2'(x_2),\quad g_2'(x_3)=g_3'(x_3),\tag{5.8.2}$$

Саккизта (5.8.1) ва (5.8.2) тенглама ёрдамида берилган тугун нуқталардан ўтувчи чексиз кўп сплайн функция ҳосил қилиш мумкин. Сплайн функция ягона бўлиши учун яна битта шарт керак бўлади. Бу шарт сплайн функциянинг бирор тугун нуқтадаги оғишини бериш орқали аниқланади, масалан

$$g_1'(x_1)=d\tag{5.8.3}$$

бу ерда d-берилган катталик. Ҳосил қилинган тенгламалар системасини ечиб, a_{ij} коэффициентлар аниқланади. Натижада I_i кесмага мос келувчи сплайн функцияни ҳосил қиламиз:

$$g(x)=g_i(x)\quad \text{агар}\quad x\in I_i.$$

Умумий ҳолда, яъни $y=f(x)$ функция n та нуқтада берилган

бўлса, сплайн функция худди юқорида келтирилган усулдек қурилади. Тугун нуқталарни $(n-1)$ та $I_i=[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,...,\ n-1$ кесамаларга ажратамиз. Бу ҳолда параболалар сони ҳам $(n-1)$ та бўлади ва уларни аниқлаш учун $3(n-1)$ та номаълум коэффициентлар зарур бўлади. $3(n-1)$ та номаълумни аниқлаш учун шунча тенглама ҳосил қилиш керак. Ҳар бир парабола учун интерполяция шартлари:

$$g_i(x_i)=y_i,\quad g_i(x_{i+1})=y_{i+1},\quad i=1,...,n-1$$

ёрдамида $2(n-1)$ та тенгламани ҳосил қиламиз.

$(n-2)$ та нуқтада параболалар кесишади, бу нуқталарда сплайн функциянинг дифференциалланувчилигидан фойдаланиб, яна $(n-2)$ та тенглама ҳосил қиламиз:

$$g_i'(x_{i+1})=g_{i+1}'(x_{i+1}),\ i=1,...,n-2.$$

Натижада $(3n-3)$ та номаълумли $2(n-1)+(n-2)=3n-4$ тенгламага эга бўламиз. Бу системага яна битта (5.8.3) тенгламани қўшиб, сплайн функцияни бир қийматли аниқловчи $(3n-3)$ та номаълумли $(3n-3)$ та чизиқли тенгламалар системасига эга бўламиз.

Дастлабки $2(n-1)$ та интерполяция шартларини қаноатлантирувчи (5.8.1) та тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned}
a_{12}x_1^2+a_{11}x_1+a_{10}&=y_1\\
a_{12}x_2^2+a_{11}x_2+a_{10}&=y_2\\
a_{22}x_2^2+a_{21}x_2+a_{20}&=y_2\\
a_{22}x_3^2+a_{21}x_3+a_{20}&=y_3\\
&\dots\\
a_{n-1,2}x_{n-1}^2+a_{n-1,1}x_{n-1}+a_{n-1,0}&=y_{n-1}\\
a_{n-1,2}x_n^2+a_{n-1,1}x_n+a_{n-1,0}&=y_n
\end{aligned}$$

Агар $g_i'(x)=2a_{i2}x+a_{i1}$ эканлигини ҳисобга олсак, (5.8.2) тенглама

$$2a_{i2}x_{i+1}+a_{i1}=2a_{i+1,2}x_{i+1}+a_{i+1,1}$$

ёки

$$2a_{i2}x_{i+1}+a_{i1}-2a_{i+1,2}x_{i+1}-a_{i+1,1}=0.$$

кўринишга эга бўлади. Шу сабабли системанинг сплайн функция дифференциалланувчанлигини ифодаловчи тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

$$2a_{12}x_2+a_{11}-2a_{22}x_2-a_{21}=0$$

$$2a_{22}x_3 + a_{21} - 2a_{32}x_3 - a_{31} \qquad\qquad = 0$$

$$\cdot$$

$$2a_{n-2,2}x_{n-1} + a_{n-2,1} - 2a_{n-1,2}x_{n-1} - a_{n-1,1} = 0$$

$$2a_{12}x_1 + a_{11} \qquad\qquad\qquad\qquad = d$$

Умумий ҳолда сплайн функция коэффициентларини аниқловчи ЧАТС матрица кўринишда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{bmatrix}
x_1^2 & x_1 & 1 & & & & & & & \\
x_2^2 & x_2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & x_2^2 & x_2 & 1 & & & & \\
 & & & x_3^2 & x_3 & 1 & & & & \\
 & & & & & & \cdots & & & \\
 & & & & & & & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\
 & & & & & & & x_n^2 & x_n & 1 \\
2x_2 & 1 & 0 & -2x_2 & -1 & & & & & \\
 & & & 2x_3 & 1 & 0 & -2x_3 & -1 & & \\
 & & & & & & \cdots & & & \\
 & & & & & 2x_{n-1} & 1 & 0 & -2x_{n-1} & -1 \\
2x_1 & 1 & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_{22} \\ a_{21} \\ a_{20} \\ \\ \cdots \\ \\ a_{n-1,2} \\ a_{n-1,1} \\ a_{n-1,0} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Бу системанинг бўш қолдирилган элементлари 0 га тенг.

5.9. Кубик сплайн функциялар

Кубик сплайн функцияларни қуришда бир неча усуллардан фойдаланиш мумкин. Дастлаб, $I_i=[x_i,x_{i+1}]$ кесмалар учун кубик сплайн функция қуйидаги

$$S(x) = S_i(x) = a_{i3}x^3 + a_{i2}x^2 + a_{i1}x + a_{i0}, \quad x \in I_i$$

кўринишга эга бўлсин.

n та x_i, $(i=1,2,...,n)$ тугун нуқталарда $y=f(x)$ функция жадвал кўринишда берилган бўлсин. x_i, $(i=1,2,...,n)$ тугун нуқталар $[a,b]$ $(x_1=a,\ x_n=b)$ оралиқни n-1 та I_i, $(i=1,..., n-1)$ кесмаларга ажратади. Бу кесмаларнинг ҳар бири учун $S_i(x)$, $(i=1,..., n-1)$ кубик сплайн функция кўрайлик. $S_i(x)$ кўпхад тўртта a_{ij}, $(j=3,2,1,0)$, коэффициентлар орқали аниқланади. Бутун $[a,b]$ оралиқ учун эса $4(n-1)$ та a_{ij} коэффициентларни аниқлашга тўғри келади. Бу коэффициентларни аниқловчи тенгламалар системаси қандай кўринишга эга бўлади? Тенгламалар системасини ҳосил қилиш учун $S_i(x)$ функцияга қўйиладиган шартлардан фойдаланамиз.

Ҳар бир $S_i(x)$ кўпхадни I_i кесмадаги тугун нуқталардан ўтадиган қилиб танлаймиз. Бу шартлардан $2(n-1)$ та

$$S_i(x_i) = y_i,\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1},\ i=1,2,....,\ n-1 \qquad (5.9.1)$$

тенгламага эга бўламиз.

I_i кесмаларнинг бирлашиш нуқталари(бундай нуқталар сони n-2 та)да сплайн функция дифференциалланувчилигидан, яна $2(n-2)$ та

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}),\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}),\ i=1,2,...,\ n-2$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Натижада $(4n-6)$ та тенгламага эга бўламиз. a_{ij}, $(i=1,..., n-1;\ j=3,2,1,0)$ коэффициентлар сони эса $4n-4$ та. Агар $[a,b]$ $(x_1=a,\ x_n=b)$ оралиқнинг четки нуқталарида сплайн функция эгрилиги нолга тенглигидан фойдалансак, яна иккита

$$S_1''(x_1) = 0,\ S_{n-1}''(x_n) = 0, \qquad (5.9.2)$$

тенгламага эга бўламиз.

Натижада $4n$-4 та a_{ij} коэффициентларга нисбатан $4n$-4 та (5.9.1) - (5.9.2) чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани ечиб, номаълум коэффициентларни аниқлаймиз ва кубик сплайн функциясини ҳосил қиламиз.

Агар бу системага мос келувчи матрица тартиби катта ((4n-4)-тартибли матрица) эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда уни ечиш айрим қийинчиликларни келтириб чиқариши мумкин. Шу сабабли кубик сплайн функция қуришда бошқача усулдан фойдаланамиз. Бу ҳолда чизиқли алгебраик тенгламалар системасига мос келувчи матрица тартиби n-2 га тенг бўлади.

Кубик сплайн функцияни

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,\ x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$i=1,2,...,\ n-1. \qquad (5.9.3)$$

кўринишда қидирамиз. Бу ердан

$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2,\quad S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i).$$

га эга бўламиз.

a_i, b_i, c_i, d_i коэффициентларни аниқлаш учун, олдинги ҳолдаги каби сплайн функциянинг интерполяция ва дифференциалланувчилиги шартларидан фойдаланамиз:

$$S_i(x_i) = y_i,\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1},\ i=1,2,...,\ n-1$$

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}),\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}),\ i=1,...,\ n-2.$$

Агар (5.9.2) ни эътиборга олсак, a_i, b_i, c_i, d_i коэффициентларга нисбатан яна $4n$-4 та номаълумли $4n$-4 та тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системани айрим номаълумларини йўқотиш ҳисобига содда кўринишга келтириш мумкин.

$h_i = x_{i+1} - x_i$ белгилаш киритиб ҳосил бўлган системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$a_i = y_i, \quad i=1,..., n-1, \tag{5.9.4}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1}, \quad i=1,..., n-1, \tag{5.9.5}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i=1,..., n-2, \tag{5.9.6}$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}, \quad i=1,..., n-2, \tag{5.9.7}$$

$$c_1 = 0, \tag{5.9.8}$$

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0. \tag{5.9.9}$$

(5.9.7) ва (5.9.9) тенгликлардан d_i ни аниқлаймиз:

$$d_i = \frac{2c_{i+1} - 2c_i}{6h_i} = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i=1,\ldots,n-2, \quad d_{n-1} = \frac{-c_{n-1}}{3h_{n-1}} \tag{5.9.10}$$

(5.9.5) га d_i ва a_i ларнинг қийматларини олиб бориб қўйсак, қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$y_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_{i+1}, \quad i=1,\ldots,n-2,$$

$$y_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 - \frac{c_{n-1}}{3h_{n-1}} h_{n-1}^3 = y_n.$$

Бу икки тенгликдан

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3} h_i, i=1,\ldots,n-2 \tag{5.9.11}$$

$$b_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{2}{3} c_{n-1} h_{n-1}.$$

га эга бўламиз. Ҳосил қилинган b_i ва d_i нинг ифодаларини (5.9.6) га қўйсак:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3} h_i + 2c_i h_i + 3\frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^2 =$$

$$= \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{c_{i+2} + 2c_{i+1}}{3} h_{i+1}, i = 1,\ldots,n-3,$$

$$\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{c_{n-1} + 2c_{n-2}}{3} h_{n-2} + 2c_{n-2}h_{n-2} + 3\frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{3h_{n-2}} h_{n-2}^2 =$$

$$= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{2}{3} c_{n-1} h_{n-1}.$$

ҳосил бўлади ва c_i (i=1,..., n-1) коэффициентларга нисбатан n-1 та тенгламага эга бўламиз. Агар (5.9.8) да c_1=0 эканлигини ҳисобга олсак, натижада c_i га нисбатан n-2 та тенгламага эга бўламиз. Содда алмаштиришлар натижасида бу система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ & & \cdots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_{n-2} \end{bmatrix} \tag{5.9.12}$$

бу ерда $\gamma_i = 3\left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right]$.

Умуман олганда (5.9.3) кўринишдаги кубик сплайн функцияни ҳосил қилиш алгоритми қуйидаги амаллар кетма-кетлигидан иборат:

1. (5.9.12) системани ечиб, $c_2,\ldots,c_{n-1}$ лар аниқланади. Бу ерда c_1=0.
2. (5.9.10) формула ёрдамида $d_1,\ldots, d_{n-1}$ лар аниқланади.
3. (5.9.11) формула ёрдамида $b_1,\ldots, b_{n-1}$ лар аниқланади.
4. i=1,..., n-1 лар учун a_i=y_i деб олинади.

Шу кўринишда ҳосил қилинган сплайн функция коэффициентлари тугун нуқталарда

$$b_i = S_i'(x_i), \quad c_i = \frac{S_i''(x_i)}{2}, \quad i=1,\ldots,n-1$$

тенгликларни қаноатлантиради.

Кубик сплайн функция қуришнинг яна бир усули билан танишиб чиқай-лик. Бу усулга кўра ҳар бири ўзгармас h узунликка эга $[x_i,x_{i+1}]$ (i=1,..., n-1) кесмаларда кубик сплайн функцияни қуйидаги кўринишда тасвирлаймиз:

$$S_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2[2(x - x_i) + h]}{h^3} y_i + \frac{(x - x_i)^2[2(x_{i+1} - x) + h]}{h^3} y_{i+1} +$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)}{h^2} m_i + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{h^2} m_{i+1}. \tag{5.9.13}$$

Бу ерда x_i, y_i (i=1,..., n) лар тугун нуқталар координаталари; m_i – лар тугун нуқталарда сплайн функция оғиши ($S_i'(x_i) = m_i$); h - x_i тугун нуқталар орасидаги масофа. Текшириб кўриш мумкинки, (5.9.13) кубик сплайн функция учун $S_i(x_i)$=y_i, $S_i(x_{i+1})$=y_{i+1}, унинг ҳосилалари учун $S_i'(x_i)=m_i$, $S_i'(x_{i+1})=m_{i+1}$ тенгликлар бажарилади.

Тугун нукталарда сплайн функция оғиш қийматларини қуйидаги кўринишларда бериш мумкин:

1. Жадвал кўринишда берилган функциядан иккинчи тартибли сонли дифференциаллаш формулалари ёрдамида сплайн функция оғиши

$$m_i = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \quad i=2,\dots,n-1,$$
$$m_1 = \frac{4y_2-y_3-3y_1}{2h}; \quad m_n = \frac{3y_n+y_{n-2}-4y_{n-1}}{2h}$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади ва уларнинг қийматлари (5.9.13) формулага олиб бориб қўйилади.

2. Агар тугун нуқталарда $y_i' = f'(x_i)$ лар аниқ бўлса, у ҳолда $m_i = y_i'$, $i=1,\dots,n$.

Бу икки усулда берилган сплайн функция оғиши *функциянинг локал оғиши* деб аталади, чунки бу ерда сплайн функция ҳар бир кесмада алохида қурилади.

3. Умумий ҳолда функция оғиш қийматини аниқлаш учун чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Бу система тенгламалари жадвалда берилган тугун нуқталарда иккинчи тартибли ҳосилаларнинг узлуксизлигидан ҳосил қилинади:

$$S_{i-1}''(x_i)=S_i''(x_i). \qquad i=2,\dots,n-1.$$

Натижада номаълум m_i ларга нисбатан $n-2$ та тенгламаларга эга бўламиз:

$$m_{i-1}+4m_i+m_{i+1} = \frac{3(y_{i+1}-y_{i-1})}{h}, \quad i=2,\dots,n-1.$$

Номаълум m_i лар сони n та ва уларнинг ягоналигини таъминлаш учун, яна иккита тенглама зарур бўлади. Шу сабабли охирги системага чегаравий шартларни ифодаловчи яна иккита тенглик қўшилади. Одатда $[a,b]$ кесаманинг четки нуқталарида m_1 ва m_n оғишлар берилади. У ҳолда система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \dots & & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ \dots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 - m_1 \\ \gamma_3 \\ \dots \\ \gamma_{n-2} \\ \gamma_{n-1} - m_n \end{bmatrix},$$

бу ерда $\gamma_i = \dfrac{3(y_{i+1}-y_{i-1})}{h}$. Бу системани оддий прогонка усулида ечиш мумкин: тўғри прогонка асосида прогонка коэффициентлари:

$$L_0=0; \; M_0=b_0; \; L_i = -\frac{1}{L_{i-1}+4}; \;\; M_i = L_i(M_{i-1}-b_i); \; (i=1,2,3,\dots,n-1)$$

ва тескари прогонка ёрдамида эса m_i коэффициентлар кетма-кет

$$\begin{cases} m_n = b_n, \\ m_i = L_i m_{i+1} + M_i \qquad (\mathrm{i = n-1, n-2,\dots,0}) \end{cases}$$

формула ёрдамида аниқланади.

Сплайн функцияларни аниқлашда чегаравий шартлар қуйидагича берилади:

1) агар $y_1' = f'(x_1)$ ва $y_n' = f'(x_n)$, у ҳолда $m_1 = y_1'$, $m_n = y_n'$;

2) $[a,b]$ кесманинг четки нуқталарида $f'(x)$ ҳосила қийматларини учинчи тартибли сонли дифференциаллаш формулалари орқали бериш мумкин:

$$m_1 = \frac{1}{6h}(-11y_1+18y_2-9y_3+2y_4),$$
$$m_n = \frac{1}{6h}(11y_n-18y_{n-1}+9y_{n-2}-2y_{n-3});$$

3) $[a,b]$ кесма четки нуқталарида иккинчи тартибли ҳосилалар берилиши мумкин: $y_1''=f''(x_1)$, $y_n''=f''(x_n)$. Бу ҳолда $S_1''(x_1)=y_1''$ ва $S_{n-1}''(x_n)=y_n''$ тенгликлардан қуйидаги чегаравий шартларга эга бўлиш мумкин:

$$m_1 = -\frac{m_2}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{h}-\frac{h}{4}y_1'', \; m_n = -\frac{m_{n-1}}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+\frac{h}{4}y_n''.$$

Мисол. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ораликда $h=\frac{\pi}{4}$ қадам билан берилган

x	$x_0=0$	$x_1=\pi/4$	$x_2=\pi/2$
sinx	$y_0=0$	y_1 =0.7071068	$y_2=1$

$y=\sin x$ функция учун кубик сплайн функция қуринг ва у ёрдамида $\sin\frac{\pi}{6}$ нинг қийматини тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. Сплайн функция қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x), & 0\le x\le \pi/4 \\ S_2(x), & \pi/4\le x\le \pi/2 \end{cases}$$

У ҳолда

$$\begin{cases} m_0=\sin' x_0=\cos x_0=1, \\ m_0+4m_1+m_2=\dfrac{3(y_2-y_0)}{h}=\dfrac{3}{h}, \\ m_2=\sin' x_2=\cos x_2=0 \end{cases}$$

Бу ердан $1+4m_1=12/\pi$ ёки $m_1=(12-\pi)/(4\pi)=0{,}70493$ га эга бўламиз.

$$S_1(x)=\frac{x^2[2(h-x)+h]}{h^3}y_1+\frac{(x-h)^2x}{h^2}+m_1\frac{(x-h)x^2}{h^2},\qquad 0\le x\le h;$$

$$S_2(x)=\frac{(x-2h)^2[2(x-h)+h]}{h^3}y_1+\frac{(x-h)^2[2(2h-x)+h]}{h^3}+m_1\frac{(x-2h)^2(x-h)}{h^2},\qquad h\le x\le 2h.$$

Хусусий холда $S_1(x)$ функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$S_1(x)=\frac{x^2[2(h-x)+h]}{h^3}y_1+\frac{(x-h)^2x}{h^2}+m_1\frac{(x-h)x^2}{h^2}=$$

$$=x-0{,}0050683975\cdot x^2-0{,}15514782\cdot x^3,\qquad 0\le x\le\frac{\pi}{4}.$$

Бу ердан

$$\sin\frac{\pi}{6}\approx S_1\left(\frac{\pi}{6}\right)=0{,}499938.$$

Агар аниқ қиймат 0,5 эканлигини ҳисобга олсак, бу ерда йўл қўйилган абсолют хато 0,000062 га нисбий хато эса 0,0124 % га тенг эканлигини кўришимиз мумкин.

Кубик сплайн функция қуриш учун тузилган дастур матни:

```
const p=15;   {массивларни аниқлаш учун ёрдамчи параметр}
type
   vec1=array[0..p] of real;
   vec2=array[0..p-1] of real;
   vec3=array[1..p-1] of real;
var
   i,n:integer;
   a,b1,h,s,x,x0,x1:real;
   y,m:vec1;
   b:vec3;
   l:vec2;
begin
```



```
clrscr;
writeln('[a,b] оралиқни бўлишлар сони='); read(n);
writeln('a='); read(a);
writeln('b='); read(b1);
writeln('y[i] =');
for i:=0 to n do read(y[i]);
writeln('x  нинг қиймати='); read(x);
m[0]:=1; m[n]:=0; l[0]:=0; h:=(b1-a)/n;
for i:=1 to n-1 do
            begin
               b[i]:=3*(y[i+1]-y[i-1])/h;
               l[i]:=-1/(l[i-1]+4);
               m[i]:=l[i]*(m[i-1]-b[i]);
            end;
for i:=n-1 downto 1 do
     m[i]:=l[i]*m[i+1]+m[i];
     if (x>a) and (x<b1) then
       begin
         i:=trunc((x-a)/h)+1;
         x0:=a+(i-1)*h;
         x1:=x0+h;
         s:=y[i-1]*((x-x1)*(x-x1)*(2*(x-x0)+h))/(h*h*h)+
           y[i]*((x-x0)*(x-x0)*(2*(x1-x)+h))/(h*h*h)+
           m[i-1]*(x-x1)*(x-x1)*(x-x0)/(h*h)+
           m[i]*(x-x0)*(x-x0)*(x-x1)/(h*h);
     write('x=',x:5:2,'    s=',s:8:5);
     end;
     end.
```

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $\Delta x=1$ бўлса $f(x)=x^3-2x^2+x+5$ функция учун 3-тартибли чекли айирмани ҳисобланг.
2. Қуйидаги

1,5	2,0	2,5	3,0
0,3691	0,6309	0,8340	1,0000

жадвал кўринишда берилган функция учун Лагранж интерполяция формуласини тузинг.

3. Агар $f(x)$ функция қуйидаги

7,1	7,6	8,1	8,6
2,8278	2,9260	3,0179	3,1043

жадвал кўринишда берилган бўлса, Ньютон 1-интерполяция формуласини тузинг ва у ёрдамида $f(7{,}65)$ ни ҳисобланг.

4. Агар функция қуйидаги

24	24,1	24,2	24,3
3,1781	3,1822	3,1864	3,1905

жадвал кўринишда берилган бўлса, Ньютон 2-интерполяция формуласини тузинг.

5. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда $h = \frac{\pi}{4}$ қадам билан берилган

x	$x_0=0$	$x_1=\pi/4$	$x_2=\pi/2$
cosx	$y_0=1$	y_1 =0.7071068	$y_2=0$

y=cosx функция учун кубик сплайн функция қуринг ва у ёрдамида $\cos\frac{\pi}{3}$ нинг қийматини тақрибий ҳисобланг.

6. $[0, \pi]$ оралиқда $h = \frac{\pi}{4}$ қадам билан берилган

x	$x_0=0$	$x_1=\pi/4$	$x_2=\pi/2$	$x_3=3\pi/4$	$x_4=\pi$
sinx	$y_0=0$	y_1 =0.7071068	$y_2=0$	y_3 =0.7071068	$y_4=0$

y=sinx функция учун кубик сплайн функция қуринг ва у ёрдамида $\sin\frac{2\pi}{3}$ нинг қийматини тақрибий ҳисобланг.

Таянч сўз ва иборалар

Чекли айирма, умумлашган даража, интерполяция, Ньютон интерполяция формуласи, Лагранж интерполяция формуласи, тугун нуқта, сплайн функция, функция дефекти, функция оғиши.

Саволлар:

1. Функцияни аппроксимациялаш деганда нимани тушинасиз?
2. Интерполяция тугун нуқталари деб қандай нуқталарга айтилади?
3. Интерполяция кўпхади деб қандай кўпҳадга айтилади?
4. Локал ва глобал интерполяция ҳақида гапириб беринг.
5. Чекли айирмага таъриф беринг.
6. Юқори тартибли чекли айирмалар қандай аниқланади?
7. Чекли айирма қандай ҳисобланади?
8. Чекли айирмаларда хатолик қандай аниқланади?
9. Умумлашган даража нима ва у қандай ҳисобланади?
10. Юқори тартибли умумлашган даража қандай ҳисобланади?
11. Интерполяциялаш масаласи ва унинг асосий мақсади нимадан иборат?
12. Ньютон биринчи ва иккинчи интерполяция формулалари.
13. Лагранж интерполяция формуласи.
14. Лагранж ва Ньютон интерполяция формулаларининг камчилиги нимада?
15. Кўпинтервалли интерполяция деганда нимани тушунасиз?
16. Кўпинтервалли интерполяциянинг хоссаларини айтиб беринг.
16. Сплайн функцияга таъриф беринг.
17. Сплайн функция даражаси қандай аниқланади?
18. Сплайн функция оғиши қандай аниқланади?
19. Сплайн функция дефекти нима?
20. Квадратик сплайн функция қуриш алгоритми.
21. Кубик сплайн функция қуриш алгоритми.
22. Кронеккер белгисини ёзиб беринг.

VI-БОБ. ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН БОШЛАНҒИЧ ШАРТЛИ МАСАЛАЛАР

6.1. Асосий тушунчалар

Дифференциал тенглама ва уларнинг системалари асосан физик масалаларни математик моделлаштиришда фойдаланилади, чунки физиканинг асосий қонунларига кўра физик катталиклар орасидаги боғланишлар дифференциал кўринишда ифодаланади.

Таъриф. Номаълум функция ҳосиласи ёки дифференциали қатнашган тенглама ***дифференциал тенглама*** деб аталади.

Масалан қуйидаги

$$\frac{dy}{dx} = x + y; \quad \dot{y} = x + y; \quad y' = x + y$$

тенгламалар дифференциал тенгламага мисол бўлади. Бу ерда y – номаълум функция, x – эркли ўзгарувчи.

Агар номаълум функция битта эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлса, бу тенглама оддий дифференциал тенглама деб аталади. Агар номаълум функция бир неча эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, бу тенглама хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб аталади.

Дифференциал тенглама қатнашган номаълум функция ҳосиласининг юнг юқори даражаси, шу тенгламанинг тартиби деб аталади. Масалан $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ тенглама биринчи тартибли, $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ тенглама эса иккинчи тартибли тенглама бўлади. n – тартибли дифференциал тенглама умумий холда $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ кўринишга эга бўлади.

Дифференциал тенгламани қаноатлантирувчи ихтиёрий функция унинг ечими деб аталади. Умуман олганда дифференциал тенгламанинг ечими чексиз кўп бўлади. Масалан $y(x)=e^{x}+C$ функция $\frac{dy}{dx} = y$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади. Бу ерда C ихтиёрий ўзгармас. Агар тенглама n тартибли бўлса, унинг умумий ечими n та ўзгармасга боғлиқ бўлади, яъни $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Агар умумий ечимдаги ўзгармасларга аниқ бир қийматлар берилса,

у ҳолда ҳосил бўлган ечим хусусий ечим деб аталади. Дифференциал тенгламани ечиш уни интеграллаш деб аталади.

Умуман олганда дифференциал тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлади. Бу ечимни ягоналигини таъминлаш учун дифференциал тенглама тартибига мос равишда, номаълум функция ёки унинг ҳосилаларига нисбатан қўшимча шартлар берилади. Қўшимча шартларнинг берилишига боғлиқ равишда дифференциал тенгламалар учун икки хил, бошланғич шартли масала(Коши масаласи) ва чегаравий масалалар ҳосил бўлади. Агар қўшимча шартлар эркли ўзгарувчининг битта қийматида берилган бўлса бу масала – бошланғич шартли масала деб аталади. Қўшимча шартлар эса бошланғич шартлар деб аталади. Агар қўшимча шартлар эркли ўзгарувчининг бир неча қийматида берилган бўлса бу масала – чегаравий масала деб аталади. Қўшимча шартлар эса чегаравий шартлар деб аталади.

6.2. Бошланғич шартли масала

Таъриф. $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг $y(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирувчи $y=y(x)$ ечимини топиш масаласи, бошланғич шартли масала деб аталади.

n – тартибли дифференциал тенглама учун бошланғич шартли масала қуйидагича таърифланади.

Таъриф.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y^{(n-1)}) \tag{16.2.1}$$

тенгламанинг

$$y(x_0)= y_0,\ y'(x_0)= y'_0,\ y^{(n-1)}(x_0)= y_0^{(n-1)} \tag{6.2.2}$$

шартларни қаноатлантирувчи $y=y(x)$ ечимини топиш масаласи, бошланғич шартли масала деб аталади. Бу ерда $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – берилган ўзгармас сонлар.

Кўпгина амалий масалаларни ечиш дифференциал тенгламалар системаларини ечишга олиб келинади. Дифференциал тенгламалар системаси учун бошланғич шартли масала қуйидагича ифодаланади:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
\dfrac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
\dots\dots\dots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{cases} \qquad (6.2.3)
$$

тенгламалар системасининг

$$y_1(x_0)= y_{10},\ y_2(x_0)= y_{20}, \dots,\ y_n(x_0)= y_{n0}$$

шартларни қаноатлантирувчи $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ечиминни аниқланг. Бу ерда y_{10}, $y_{20}, \dots$, y_{n0} – берилган ўзгармас сонлар. Номаълум функциялар ҳосилаларига нисбатан ечилган (6.2.3) системага нормал дифференциал тенгламалар системаси деб аталади. (6.2.1) - (6.2.2) Коши масаласини ҳам нормал кўринишга келтириш мумкин. Агар (6.2.1) - (6.2.2) да $y_1=y'$, $y_2=y''$,..., $y_{n-1}=y^{(n-1)}$ алмаштиришларни бажарсак, у ҳолда y, $y_1, \dots, y_{n-1}$ ларга нисбатан

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = y_1 \\
\dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\
\dots \\
\dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\
\dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})
\end{cases}
$$

нормал ситемага эга бўламиз.

Дифференциал тенгламаларни ечишда фойдаланиладиган, усулларни икки гуруҳга ажратиш мумкин: аниқ ва тақрибий ечиш усуллари. Баъзи типдаги чизиқли дифференциал тенгламалар (ўзгарувчиларга ажраладиган, биржинсли ва бошқалар) ни аниқ ечиш усуллари олий математика курсида ўрганилади. Охирги пайтларда дифференциал тенгламалар ёрдамида моделлаштириладиган амалий масалаларни ечишда тақрибий ечиш усулларидан асосий қурол сифатида фойдаланилмоқда.

Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишда фойдаланиладиган айрим усуллар билан танишиб чиқамиз.

6.3. Сонли дифференциаллаш

x-[a, b] оралиқга тегишли ихтиёрий x_i тугун нўқтанинг қийматларини қабул қилувчи эркли ўзгарувчи бўлсин. У ҳолда ихтиёрий тугун нуқта қийматини

$$x + kh, \qquad k= 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots$$

формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин.

$$\frac{d^s y(x)}{dx^s}, \qquad s \ge 1$$

ни функциянинг тугун нуқталардаги қийматлари, яъни $y(x+kh)$ лар орқали ифодалаш, $y(x)$ функция ҳосиласини тақрибий ҳисоблаш ёки тақрибий дифференциаллаш деб аталади.

Фараз қилайлик $y(x) \in C^2[a,b]$, $x < b$ бўлсин. $y(x+h)$ нинг иккинчи тартибли аниқликда Тейлор қаторига ёйилмаси

$$y(x+h) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx} h + O(h^2)$$

дан фойдалансак

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h)$$

тенгликга эга бўламиз. Агар бу ерда $x = x_i$ деб олсак, биринчи тартибли ҳосила учун икки нуқталик олдинга тақрибий ҳисоблаш формуласи ҳосил бўлади:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + O(h), \quad 0 \le i \le m\text{-}1 \qquad (6.3.1)$$

Одатда сонли дифференциаллаш формуласи деганда қуйидаги

$$\frac{dy(x_i)}{dx} \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

тақрибий формула тушунилади.

$$R = \frac{dy(x_i)}{dx} - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

айирмага сонли дифференциаллаш хатоси деб аталади. (6.3.1) формула учун $h \to 0$ да $R = O(h)$.

Худди шунга ўхшаш биринчи тартибли ҳосила учун икки нуқталик тақрибий ҳисоблаш формуласини ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + O(h), \quad 1 \le i \le m.$$

Агар $y(x) \in C^3[a,b]$ бўлса, биринчи тартибли ҳосила учун янада аниқроқ икки нуқталик тақрибий ҳисоблаш формуласи – марказий айирма формуласи мавжуд ва у қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2), \quad 1 \le i \le m\text{-}1.$$

ёки

$$\frac{dy(x_i)}{dx} \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}.$$

Биринчи тартибли ҳосилани тақрибий ҳисоблашда кўп нуқтали, масалан уч нуқтали

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{-y(x_{i+2}) + 4y(x_{i+1}) - 3y(x_i)}{2h} + O(h^2) \qquad (6.3.2)$$

формуладан ҳам фойдаланиш мумкин.

Умумий ҳолда биринчи тартибли ҳосила учун кўп нуқтали формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \sum_{k=0}^{m} a_k y(x_k) + O(h^p)$$

Бу ерда a_k ларни шундай танлаш мумкинки, формуланинг аниқлик тартиби p га тенг бўлади.

Иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаш учун ҳам тақрибий ҳисоблаш формулаларини келтириш мумкин:

$$\frac{d^2 y(x_i)}{dx^2} = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

ёки

$$\frac{d^2 y(x_i)}{dx^2} = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}. \qquad (6.3.3)$$

1-мисол. $y = x^3 + e^x$ функция учун $y'(2)$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $h = 0{,}05$ деб, қуйидаги

x	1,9	1,95	2,00	2,05	2,1
y	13,5449	14,4436	15,3891	16,3830	17,4272

жадвални тузиб оламиз. $y_0 = y(1{,}9) = 13{,}5449$; $y_1 = y(1.95) = 14{,}4436$ ва $y_2 = y(2) = 15{,}3891$ $y_3 = y(2{,}05) = 16{,}3830$ $y_4 = y(2{,}1) = 17{,}4272$ эканлигини ҳисобга олсак, олдинга тақрибий ҳисоблаш

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

формуласига асосан

$$y'(2) \approx \frac{16{,}3830 - 15{,}3891}{0{,}05} = 19{,}878$$

га эга бўламиз. Агар орқага тақрибий ҳисоблаш $\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h}$ формуласидан фойдалансак

$$y'(2) \approx \frac{15{,}3891 - 14{,}4436}{0{,}05} = 18{,}91$$

ни ҳосил қиламиз. Агар икки нуқталик тақрибий ҳисоблаш формуласидан фойдалансак

$$y'(2) \approx \frac{16{,}3830 - 14{,}4436}{2 \cdot 0{,}05} = 19{,}394$$

бўлади. Агар уч нуқтали формула (6.3.2) дан фойдалансак

$$y'(2) \approx \frac{-17{,}4272 + 4 \cdot 16{,}3830 - 3 \cdot 15{,}3891}{2 \cdot 0{,}05} = 19{,}3777$$

га эга бўламиз.

Агар $y'(2)$ нинг аниқ қиймати 19,3891 эканлигини ҳисобга олсак, тақрибий ҳисоблашдаги абсолют хато биринчи ҳолда 0,4889 га, иккинчи ҳолда 0,4791 га, учинчи ҳолда эса 0,0049 га ва тўртинчи ҳолда эса 0,0114 тенг бўлади. Бу ҳолларда нисбий хатолар мос равишда 2,52% , 2,47%, 0,025% ва 0,059% ларга тенг бўлади.

2-мисол. $y = xe^x$ функция учун $y''(5)$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $h = 0{,}05$ деб, қуйидаги

x	4,95	5	5,05
y	698,8161	742,0658	787,9134

жадвални тузиб оламиз. $y_0 = y(4{,}95) = 698{,}8161$; $y_1 = y(5) = 742{,}0658$ ва $y_2 = y(5{,}05) = 787{,}9134$ эканлигини ҳисобга олсак, (6.3.3) формулага асосан

$$y''(5) \approx \frac{787{,}9134 - 2 \cdot 742{,}0658 + 698{,}8161}{0{,}05^2} = 1039{,}1704$$

га эга бўламиз.

Агар $y''(5)$ нинг аниқ қиймати 1038,8921 эканлигини ҳисобга олсак, тақрибий ҳисоблашдаги абсолют хато 0,2783 га, нисбий хато эса 0,027% га тенглиги келиб чиқади.

6.4. Кетма-кет яқинлашиш усули

Кўпгина мухандислик масалаларини ечиш чизиқли ёки чизиқсиз дифференциал тенглама учун Коши масаласини ечишга келтирилади. Коши масаласини кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланиб ечиш мумкин. Бу усул алгоритмини қуйидаги

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \qquad (6.4.1)$$

дифференциал тенгламанинг

$$x(t_0)=x_0 \qquad (6.4.2)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топишда кўриб чиқайлик.

Агар (6.4.1) ни $[t_0,t]$ оралиқда t бўйича интеграллаб, (6.4.2) шартдан фойдалансак, берилган Коши масаласига тенг кучли қуйидаги интеграл тенгламага келамиз:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))d\tau \qquad (6.4.3)$$

(6.4.3) да $x(\tau)$ ўрнига нолинчи яқинлашиш сифатида ихтиёрий функцияни, масалан $x(t_0)=x_0$ ни олишимиз мумкин. У ҳолда (6.4.1) тенглама ечимига биринчи яқинлашиш

$$x_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x_0)d\tau$$

ни ҳосил қиламиз.

$x_1(t)$ ни (6.4.3) га олиб бориб қўйиб,

$$x_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x_1(\tau))d\tau$$

иккинчи яқинлашишни ҳосил қиламиз. Умумий ҳолда n-яқинлашиш учун

$$x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x_{n-1}(\tau))d\tau$$

формулага эга бўламиз.

Теорема. Агар (6.4.1), (6.4.2) Коши масаласининг ечими $x(t)$ мавжуд ва у ягона бўлса, у ҳолда $n\to\infty$ да $x_n(t)\to x(t)$ бўлади.

Худди юқорида келтирилган усулдан фойдаланиб,

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)) \quad (i=1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

дифферециал тенгламалар системасининг

$$x_i(t_0)=x_{i0} \quad (i=1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини ҳам кетма-кет яқинлашиш усули ёрдамида топиш мумкин.

Мисол. Берилган

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=3y-2x \end{cases} \qquad (6.4.4)$$

дифференциал тенгламалар системасининг

$$\begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad (6.4.5)$$

шартни қаноатлантирувчи ечимини кетма-кет яқинлашиш усули ёрдамида топинг.

Ечиш. (6.4.1) система тенгламаларини $[0,t]$ оралиқда интеграллаб, (6.4.5) шартни ҳисобга олсак, қуйидаги

$$x(t)=1+\int_0^t [x(\tau)+y(\tau)]d\tau, \quad y(t)=\int_0^t [3y(\tau)-2x(\tau)]d\tau$$

интеграл тенгламаларга эга бўламиз.

Нолинчи яқинлашиш сифатида $x_0=1$ ва $y_0=0$ ларни қабул қиламиз. У ҳолда биринчи яқинлашиш учун

$$x_1(t)=1+\int_0^t d\tau=1+t, \quad y_1(t)=\int_0^t(-2)d\tau=-2t$$

иккинчи яқинлашиш учун

$$x_2(t)=1+\int_0^t(1+\tau-2\tau)d\tau=1+t-\frac{t^2}{2}, \quad y_2(t)=\int_0^t(-6\tau-2-2\tau)d\tau=-2t-4t^2$$

учинчи яқинлашиш учун эса

$$x_2(t)=1+\int_0^t\left(1+\tau-\frac{\tau^2}{2}-2\tau-4\tau^2\right)d\tau=1+t-\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}t^3,$$

$$y_3(t)=\int_0^t(-6\tau-12\tau^2-2-2\tau+\tau^2)d\tau=-2t-4t^2-\frac{11}{3}t^3$$

формулаларга эга бўламиз.

Учинчи яқинлашиш (6.4.4), (6.4.5) масаланинг аниқ ечими $x(t)=e^{2t}(cost-sint)$ ва $y(t)=-2e^{2t}\,sint$ ларнинг $t=0$ атрофида t^3 аниқликда Фурье қаторига ёйилмаси билан устма-уст тушади.

Бу усулдаги мавжуд камчиликлар қуйидагилардан иборат:

1. Баъзи яқинлашишларни ҳисоблаш давомида интеграл қийматини аниқ ҳисоблаш мумкин бўлмай қолади;

2. $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг $x(t)$ га яқинлашиш тезлиги юқори бўлмаслиги мумкин. У ҳолда яқинлашишлар сонини оширишга тўғри келади, бу эса мураккаб бўлган ҳисоблаш ишларини бажаришни тақоза этади;

3. Чексиз қатор кўринишида ҳосил бўладиган ечим қийматини ҳар доим аниқ ҳисоблаш имкони бўлавермайди.

6.5. Эйлер ва Эйлер-Коши усуллари

Маълумки, амалий масалаларни математик моделлаштриш дифференциал тенглама учун Коши, чегаравий ёки аралаш масалаларни ечишга келтирилади. Аммо бу масалалар ечимларини аниқ кўринишда ҳар доим ҳам ёзиш имкони бўлавермайди. Бу ҳолда берилган масалани ечиш учун тақрибий сонли ечиш усуллардан фойдаланилади. Қуйида шу усулларнинг айримлари билан танишиб чиқамиз.

Эйлер усули. $[a,b]$ кесмада

$$y'(x)=f(x,y)$$

дифференциал тенгламанинг

$$y(a)=x_0$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи (Коши масаласи) ечимини топиш талаб этилсин.

Эйлер усулига асосан $[a,b]$ кесмани n та оралиқларга ажратиб, $x_i=a+ih=x_{i-1}+h$, $(x_0=a)$ нуқталарни ҳосил қиламиз, бу ерда $h=(b\text{-}a)/n$. Ҳосил бўлган ҳар бир оралиқда y' ҳосилани тақрибий равишда $\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h}$ чекли айирмага алмаштирамиз. Натижада номаълум $y(x)$ функциянинг x_i нуқталардаги қийматлари $y_i=y(x_i)$ ни ҳисоблаш учун ушбу тақрибий

$$y_i\approx y_{i-1}+hf(x_{i-1},y_{i-1})$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула Эйлер формуласи деб аталади ва берилган бошланғич шарт ёрдамида номаълум

функциянинг $x=x_i$ нуқталардаги қийматларини кетма-кет топиш мумкин бўлади.

Мисол. $y'(x)=\dfrac{1}{2}xy$ тенгламанинг $[0,1]$ кесмада $y(0)=1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимининг тақрибий қийматлар жадвалини тузинг.

Ечиш. Аниқлик учун $n=10$, $h=0{,}1$ бўлсин. Ушбу

$$y_i=y_{i-1}+\frac{1}{2}hx_{i-1}y_{i-1}$$

формуладан y_i нинг қийматлари топилади, $i=1,2,\ldots,10$.

Текшириб кўриш мумкинки, берилган масала $y=e^{\frac{x^2}{4}}$ аниқ ечимга эга. Агар $x=1$ нуқтада аниқ $y(1)=e^{\frac{1}{4}}=1{,}2840$ ва тақрибий $y(1)\approx 1{,}2479$ ечимларни солиштирсак, абсолют хато 0,0361 га, нисбий хато эса $\dfrac{0{,}0361\cdot 100}{1{,}2840}\approx 2{,}8\%$ га тенг бўлади.

i	x_i	y_i	$f(x_i,y_i)$	$hf(x_i,y_i)$
0	0	1	0	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537
10	1,0	1,2479		

Эйлер-Коши усули. Эйлера усулида $y(x)$ функциянинг x_1 нуқтадаги қийматини аниқлашда y' ҳосиланинг x_0 нуқтадаги қийматидан фойдаланилади. y' нинг қиймати эса x_0 нуқтадан x_1 нуқтага ўтишда ўзгаради. Шу сабабли оддий Эйлер усулидаги хато катта бўлади. Бу хатони Эйлер-Коши усулидан фойдаланиб камайтириш мумкин. Эйлер-Коши усулининг алгоритми қуйидагича:

$$\widetilde{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \widetilde{y}_{k+1}) \right].$$

Мисол. Ушбу $y'(x) = y + x$ тенгламанинг $y(0) = 1$ шартни қаноатлантирувчи ечимини Эйлер-Коши усули ёрдамида аниқланг ($n = 10$; $h = 0{,}1$).

k	x_k=	y_k=	$f(x_k,y_k)$=	$\bar{y}_{k+1}$ =	$f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ =	$0{,}5h[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})]$	y_{k+1}=
0	0	1,0000	1,0000	1,1000	1,2000	0,1100	1,1100
1	0,1	1,1100	1,2100	1,2310	1,4310	0,1321	1,2421
2	0,2	1,2421	1,4421	1,3863	1,6863	0,1564	1,3985
3	0,3	1,3985	1,6985	1,5683	1,9683	0,1833	1,5818
4	0,4	1,5818	1,9818	1,7800	2,2800	0,2131	1,7949
5	0,5	1,7949	2,2949	2,0244	2,6244	0,2460	2,0409
6	0,6	2,0409	2,6409	2,3049	3,0049	0,2823	2,3231
7	0,7	2,3231	3,0231	2,6255	3,4255	0,3224	2,6456
8	0,8	2,6456	3,4456	2,9901	3,8901	0,3668	3,0124
9	0,9	3,0124	3,9124	3,4036	4,4036	0,4158	3,4282
10	1	3,4282					

Дифференциал тенглама учун Коши масаласини Эйлер ва Эйлер-Коши усулида ечишга тузилган дастур матни:

```
var a,b,y0,y:real; n:integer;
  function f(x,y:real):real;
  begin
    f:=y-0.5*x*x+x-1
  end;
 procedure eyler(a,b,y1:real;n:integer;var y:real);
   var h,x,y0:real; i:integer;
    begin
      h:=(b-a)/n;   x:=a;
      writeln('x=',x:6:2,'   y=',y1:10:6);
      for i:=1 to n do
        begin
          y0:=f(x,y1)*h+y1;        { Эйлер усули}
            y:=f(x,y0)*h+y1;     { Эйлер-Коши усули}
       x:=x+h;
          writeln('x=',x:6:2,'   y1=',y0:10:6,'   y2=',y:10:6);
          y1:=y;
        end;
    end;
begin
  clrscr;
  write('a='); read(a);  write('b='); read(b);
  write('n='); read(n);  write('y0='); read(y0);
  eyler(a,b,y0,n,y);
end.
```


6.6. Рунге-Кутта усули

Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (6.6.1)$$

оддий дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлиб, унинг $[a,b]$ оралиқдаги

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \qquad (6.6.2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин $(x_0 = a)$.

Агар

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{ва} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

белгилашлар киритсак, (6.6.1) ва (6.6.2) ни қуйидагича ёзишимиз мумкин.

$$Y = F(x, Y), \qquad (6.6.3)$$

$$Y(x_0) = Y_0 \qquad (6.6.4)$$

Бу ерда

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

(6.6.3) тенгламалар системасининг (6.6.4) бошланғич шартни қаноат-лантирувчи ечимини Рунге-Кутта усули ёрдамида топамиз. Бунинг учун $x_i = a +_i h,\ Y_i = F(x_i, Y_i),\ i = 1,2,\ldots,n$ белгилашларни киритиб, қуйидаги ҳисоблашлар кетма-кетлигини бажарамиз:

$$x_i = a + ih;$$
$$k_1 = F(x_i, Y_i) * h;$$
$$k_2 = F(x_i + h/2, Y_i + k_1/2) * h;$$
$$k_3 = F(x_i + h/2, Y_i + k_2/2) * h;$$
$$k_4 = F(x_i + h, Y_i + k_3) * h;$$
$$Y_{i+1} = Y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \qquad (6.6.5)$$

Бу ерда $h = (b-a)/n$.

Бу ҳисоблашлар кетма-кетлиги $i = 1$ дан $n-1$ гача такрорий равишда ҳисобланади ва (6.6.5) формуладан дифференциал тенгламанинг $y_i = y(x_i)$ тақрибий сонли ечимлари топилади.

Мисол. Ушбу $y'(x) = y + x$ тенгламанинг $y(0) = 1$ шартни қаноатлантирувчи ечимини Рунге-Кутта усули ёрдамида аниқланг ($n = 10$; $h = 0{,}1$).

Ечиш: $y_1 = y(x_1)$ ни аниқлаймиз:

$$K_1 = h(x_0 + y_0) = 0{,}1 \cdot (0 + 1) = 0{,}1;$$
$$K_2 = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{K_1}{2}) = 0{,}1 \cdot (0 + 0{,}05 + 1 + 0{,}05) = 0{,}11;$$
$$K_3 = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{K_2}{2}) = 0{,}1 \cdot (0 + 0{,}05 + 1 + 0{,}055) = 0{,}1105;$$
$$K_4 = h(x_0 + h + y_0 + K_3) = 0{,}1 \cdot (0 + 0{,}1 + 1 + 0{,}1105) = 0{,}12105;$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1 + \frac{1}{6}(0{,}1 + 2 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}1105 + 0{,}12105) \approx 1{,}1103.$$

$y_2 = y(x_2)$ ни аниқлаймиз:

$$K_1 = h(x_1 + y_1) = 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 1{,}1103) = 0{,}121;$$
$$K_2 = h\left(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{K_1}{2}\right) = 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 0{,}05 + 1{,}1103 + 0{,}0605) = 0{,}1321;$$

$$K_3 = h\left(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{K_2}{2}\right) = 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 0{,}05 + 1{,}1103 + 0{,}66) = 0{,}1326;$$
$$K_4 = h(x_1 + h + y_1 + K_3) = 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 0{,}1 + 1{,}1103 + 0{,}1326) = 0{,}1443;$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1{,}1103 + \frac{1}{6}(0{,}121 + 2 \cdot 0{,}1321 + 2 \cdot 0{,}1326 + 0{,}1443) = 1{,}2428.$$

Кейинги *x* лардаги ечимларни юқорида келтирилган кетма-кетликлар ёрдамида аниқлаймиз:

x_k	*K1=*	*K2=*	*K3=*	*K4=*	*y=*
0.1	0,1	0,11	0,1105	0,1211	1,1103
0,2	0,1210	0,1321	0,1326	0,1443	1,2428
0,3	0,1443	0,1565	0,1571	0,1700	1,3997
0,4	0,1700	0,1835	0,1841	0,1984	1,5836
0,5	0,1984	0,2133	0,2140	0,2298	1,7974
0,6	0,2297	0,2462	0,2471	0,2645	2,0442
0,7	0,2644	0,2826	0,2836	0,3028	2,3275
0,8	0,3028	0,3229	0,3239	0,3451	2,6511
0,9	0,3451	0,36743	0,3685	0,3920	3,0192
1,0	0,3919	0,4165	0,4177	0,4437	3,4366

Дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласини Рунге-Кутта усулида ечишга тузилган дастур матни:

```
    const nurav=2; {тенгламалар сони}
    type vector2=array[1..nurav] of real;
var
  y0,y: vector2;
  n,i,j:integer;
  a,b,x0,x1,h:real;
procedure pv(x: real; y: vector2; var dy: vector2);
      begin
          dy[1]:=y[1]+y[2]+4x-1;
          dy[2]:=y[1]-y[2]-2*x*x-2*x+1;
      end;
procedure rungikytta(x: real; y0: vector2;
          var dy: vector2);
   var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vector2;
begin
```

```
    pv(x,y0,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk1[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
    x:=x+0.5*h;   pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk2[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
    pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk3[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
    x:=x+0.5*h;  pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk4[i]:=h*fc[i];
    dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i]) end;
  end;
begin  clrscr;
    write('a='); read(a);         write('b='); read(b);
    write('n='); read(n);         h:=(b-a)/n;
    x0:=a;
    for i:=1 to nurav do
              begin
                 write('y0[',i:1,']='); read(y0[i]);
              end;
    writeln; writeln;  write('x=',x0:5:2);
    for i:=1 to nurav do write('   y[',i:1,']=',y0[i]:10:6);
    writeln;    x1:=a;
    for j:=1 to n do begin
    rungikytta(x1,y0,y);
    x1:=a+j*h;   write('x=',x1:5:2);
    for i:=1 to nurav do write('   y[',i:1,']=',y[i]:10:6);
    x0:=x1; y0:=y;
    writeln;    end;
end.
```

Эйлер усулида йўл қуйиладиган хатолик h тартибда, Рунге-Кутта усулида йўл қўйилган хатолик эса h^4 тартибда бўлади. Агар $0<h<1$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда Рунге-Кутта усули Эйлер усулига нисбатан аниқлик даражаси юқори эканлиги келиб чиқади.

6.7. Чекли айирмалар усули

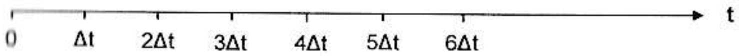
Бу усул дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш усули бўлиб, у номаълум функция ҳосиласини чекли айирмаларга алмаштиришга асосланган. Соддалик учун бу усул алгоритмини қуйидаги

$$y''(t)+A(t)y'(t)+B(t)y(t)=F(t) \qquad (6.7.1)$$

дифференциал тенгламанинг

$$y(0)=C_0, \quad y'(0)=D_0 \qquad (6.7.2)$$

бошланғич шартларни қаноатантирувчи ечимини топиш масаласида кўриб чиқайлик.



t ўзгарувчининг аниқ $t=t_i=i\cdot\Delta t;$ $i=0,1,2,3,...$ (Δt - вақт бўйича интеграллаш қадами) деб олиб, $y(t_i)=y_i$, $y'(t_i)=y'_i$, $y''(t_i)=y''_i$, $A(t_i)=A_i$, $B(t_i)=B_i$, $F(t_i)=F_i$ белгилашларни киритамиз.

Функция ҳосиласини бир неча усул ёрдамида тақрибий чекли айирмаларга алмаштириш мумкин. Шулардан бири марказий айирмалар усулидир. Бу усулга асосан $y(t+\tau)$ ни τ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйилмаси

$$y_{i+1}=y_i+\eta y'_i+\frac{\eta^2}{2}y''_i+... \qquad (6.7.3)$$

дан фойдаланамиз. (6.7.3) ни τ^2 аниқликда

$$y_{i+1}=y_i+\eta y'_i+\frac{\eta^2}{2}y''_i \qquad (6.7.4)$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин.

(6.7.4) да кетма-кет $\tau=-\Delta t$ ва $\tau=\Delta t$ деб олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y_{i-1}=y_i-\Delta t\cdot y'_i+\frac{\Delta t^2}{2}y''_i \qquad (6.7.5)$$

$$y_{i+1}=y_i+\Delta t\cdot y'_i+\frac{\Delta t^2}{2}y''_i \qquad (6.7.6)$$

(6.7.5) ва (6.7.6) лардан y'_i ва y''_i ларни топиш учун

$$y'_i=\frac{1}{2\Delta t}(y_{i+1}-y_{i-1}) \qquad (6.7.7)$$

$$y''_i=\frac{1}{\Delta t^2}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}) \qquad (6.7.8)$$

га эга бўламиз.

(6.7.7) ва (6.7.8) ни (6.7.1) га қуйиб,

$$y_{i+1} = \frac{1}{2 + A_i \Delta t}\left[(4 - 2B_i \Delta t^2)y_i + (A_i \Delta t - 2)y_{i-1} + 2\Delta t^2 F_i\right] \qquad (6.7.9)$$

тенгликга эга бўламиз.

Бошланғич вақт $t_0 = 0$ учун $y_0 = C_0$. (6.7.9) дан фойдаланиб, y_{i+1} $(i = 0,1,2,\ldots)$ ларни аниқлаш учун y_{-1} қиймати зарур бўлади. Бу қийматни (6.7.7) формуладан фойдаланиб, y_0' ва y_1 орқали ифодалаб оламиз:

$$y_{-1} = y_1 - 2\Delta t y_0' \qquad (6.7.10)$$

(6.7.9) да $i = 0$ деб,

$$y_1 = \frac{1}{2 + A_0 \Delta t}\left[(4 - 2B_0 \Delta t^2)y_0 + (A_0 \Delta t - 2)y_{-1} + 2\Delta t^2 F_0\right] \qquad (6.7.11)$$

(6.7.10) ни (6.7.11) га қўйиб, y_1ни ҳисоблаш учун

$$y_1 = \frac{1}{4}\left[(4 - 2B_0 \Delta t^2)C_0 - 2\Delta t(A_0 \Delta t - 2)D_0' + 2\Delta t^2 F_0\right] \qquad (6.7.12)$$

формулага эга бўламиз.

Натижада (6.7.9) формула $i = 1,2,3,\ldots$ лар учун y_{i+1} ларнинг қийматларини кетма-кет ҳисоблаш имконини беради.

Чекли айирмалар усулига тузилган дастур матни:

```
    const nt=21; dt=1; C0=-1; D0=3.0;
    type mas=array[1..nt] of real;
    var y,t:mas; i:integer;
function a(x:real):real;
begin
    a:=x+1;     {A(t) – функция кўриниши}
end;
function b(x:real):real;
begin
    b:=x-2;     {B(t) – функция кўриниши}
end;
function f(x:real):real;
begin
    f:=x*x*x+3*x*x-2*x+7;          {F(t) – функция кўриниши}
end;
begin
    for i:=1 to nt do t[i]:=(i-1)*dt;
    y[1]:=C0;
    y[2]:=1/4*((4-2*b(0)*sqr(dt))*C0-2*dt*(a(0)*dt-
2)*D0+2*sqr(dt)*f(0));
    for i:=2 to nt-1 do
                    y[i+1]:=1/(2+a(t[i])*dt)*((4-
2*b(t[i])*sqr(dt))*y[i]+
                    (a(t[i])*dt-2)*y[i-1]+2*sqr(dt)*f(t[i]));
    for i:=1 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'  y=',y[i]:8:7);
end.
```


6.8. Квадратура формула усули

Бошланғич шартли дифференциал тенглама (Коши масаласи)ни тақрибий ечиш усулларидан бири квадратура формуласи(интегрални чекли йиғинди билан алмаштириш)дан фойдаланишга асосланган усулдир. Бу усул алгоритмини қуйидаги Коши масаласини ечишда қараб чиқамиз.

$[0,t]$ оралиқда

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + p\frac{dy(t)}{dt} + qy(t) = f(t) \qquad (6.8.1)$$

тенгламанинг

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \qquad (6.8.2)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинган бўлсин. Бу ерда p, q, y_0, y_1 лар ўзгармаслар; $f(t)$ – берилган функция.

(6.8.1) тенгламани 0 дан t гача икки марта интеграллаб ва (6.8.2) бошланғич шартларни ҳисобга олсак,

$$y(t) - y_0 - y_1 \cdot t - p\left(\int_0^t y(s)ds - y_0 \cdot t\right) + q\int_0^t (t-s)y(s)ds = \int_0^t (t-s)f(s)ds \qquad (6.8.3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

(6.8.3) ни қуйидаг

$$y(t) - p\int_0^t y(s)ds = y_0 + y_1 \cdot t - p \cdot y_0 \cdot t - q\int_0^t (t-s)y(s)ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds \quad (6.7.4)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

(6.8.4) да $t = t_n = n\Delta t, \ (n = 1,2,3,\ldots)$ деб, интегралларни трапеция формуласига алмаштирамиз ва

$$y_n - pA_n y_n = y_0 + y_1\cdot t_n - p\cdot y_0\cdot t_n + p\sum_{i=0}^{n-1} A_i y_i -$$

$$-q\sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n-t_i)y_i + \sum_{i=0}^{n-1}A_i(t_n-t_i)f(t_i) \qquad (6.8.9)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$y_i = y(t_i),\ (i=\overline{0,n-1});\ A_0 = A_n = \frac{\Delta t}{2};\ A_j = \Delta t,\ (j=\overline{1,n-1});\ \Delta t - t$ бўйича қадам.

(6.8.9) тенгликдан

$$y_n = \frac{2}{2-p\Delta t}\Big[y0 + y1\cdot t_n - p\cdot y0\cdot t_n + p\sum_{i=0}^{n-1} A_i y_i -$$

$$-q\sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n-t_i)y_i + \sum_{i=0}^{n-1}A_i(t_n-t_i)f(t_i)\Big] \qquad (6.8.10)$$

формулага эга бўламиз.

(6.8.10) ихтиёрий $n=1,2,3,\ldots$ лар учун y_n ни топишга реккурент формула, яъни олдинги t_i нуқталарда берилган y_i лар орқали кейинги t_{i+1} нуқталардаги y_{i+1} ларни топиш формуласи бўлади.

Коши масаласини квадратура формула усулида ечишга тузилган дастур матни:

```
const p=1; q=-2; y0=2; y1=1; dt=0.05; nt=21;
type mas=array[0..nt] of real;
var  i:integer;    t,a,y:mas; s1,s2,s3,s4:real;
function f(x:real):real;
begin
   f:=-2*x*x-1       { f(t) – функциясининг кўриниши}
end;
begin clrscr;
      for i:=0 to nt do begin a[i]:=dt; t[i]:=i*dt end;
      a[0]:=dt/2; y[0]:=y0; s1:=0; s2:=0; s3:=0; s4:=0;
      for i:=1 to nt do begin
            s1:=s1+a[i-1]*y[i-1];        s2:=s2+a[i-1]*t[i-1]*y[i-1];
      s3:=s3+a[i-1]*f(t[i-1]);     s4:=s4+a[i-1]*t[i-1]*f(t[i-1]);
            y[i]:=2*(y0+y1*t[i]+p*y0*t[i]-
            p*s1-q*t[i]*s1+q*s2+t[i]*s3-s4)/(2+p*dt);
                        end;
```



```
      for i:=0 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'     y=',y[i]:10:5);
end.
```

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $[0;1]$ оралиқда $y'(x)=2x+y-1$ тенгламанинг $y(0)=1$ шартни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини $h=0,1$ қадам билан Эйлер усули ёрдамида топинг.
2. $[0;1]$ оралиқда $y'(x)=x-y$ тенгламанинг $y(0)=1$ шартни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини $h=0,1$ қадам билан Эйлер-Коши усули ёрдамида топинг.
3. $[1;2]$ оралиқда $y'(x)=x+y$ тенгламанинг $y(1)=0$ шартни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини $h=0,2$ қадам билан Рунге-Кутта усули ёрдамида топинг.
4. Сонли дифференциаллаш усулидан фойдаланиб, $y=2x^2+e^{2x}$ бўлса, $y'(2)$ ни ҳисобланг.
5. $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+xy(x)=x^2$ тенгламанинг $y(0)+2y'(0)=1$ ва $y(1)-y'(1)=3$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини $x\in[0;1]$, $h=0,2$ лар учун оддий прогонка усулида топинг.
6. $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+2\frac{dy(x)}{dx}-3y(x)=5$ тенгламанинг $y(x)\big|_{x=0}=0$ ва $y(x)\big|_{x=1}=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Бубнов-Галёркин усули ёрдамида топинг.
7. $\frac{d^4y(x)}{dx^4}+3y(x)=x$ тенгламанинг $y(0)=y''(0)=y(1)=y''(1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Бубнов-Галёркин усули ёрдамида топинг.

Таянч сўз ва иборалар

Дифференциал тенгламалар, Коши масаласи, чегаравий масала, сонли дифференциаллаш, Эйлер усули, Рунге-Кутта усули, кетма-кет яқинлашиш усули, квадратура формула усули.

Саволлар

1. Дифференциал тенгламага таъриф беринг.
2. Дифференциал тенгламанинг тартиби қандай аниқланади?
3. Коши масаласи деганда қандай масалани тушинасиз?
4. Чегаравий масала деганда қандай масалани тушинасиз?
5. Бошланғич шартли чегаравий масалалар қандай бўлади?
6. Дифференциал тенгламага қуйиладиган қўшимча шартларнинг вазифаси нимадан иборат?
7. Сонли дифференциаллаш нима?
8. Сонли дифференциаллашда хатолик қандай аниқланади?
9. Марказий айирма қандай анқланади?
10. Эйлер усулининг алгоритмини келтиринг.
11. Эйлер-Коши усулининг алгоритмини келтиринг.
12. Рунге-Кутта усулининг алгоритмини келтиринг.
13. Рунге-Кутта усулининг хатолиги нимага тенг.
14. Чекли айирмалар усулининг алгоритмини келтиринг.
15. Кетма-кет яқинлашиш усули алгоритмини келтиринг.
16. Кетма-кет яқинлашиш усули қачон яқинлашувчи бўлади?
17. Кетма-кет яқинлашиш усулининг камчиликлари нимадан иборат?
18. Оддий прогонка усули ва унинг алгоритми.
19. Квадратура формула усулининг алгоритмини келтиринг.
20. Трапеция формуласининг хатолиги нимага тенг?

VII-БОБ. ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ ШАРТЛИ МАСАЛАЛАР

7.1. Асосий тушунчалар

Олдинги бобда оддий дифференциал тенглама ёки уларнинг системалари учун Коши масаласини ечиш алгоритмлари билан танишиб чиқдик. Амалий масалаларни ечишда бу тенгламалар учун бошқа кўринишдаги шартлардан фойдаланишга тўғри келади. Бу шартлар эркли ўзгарувчининг бир неча қийматларида функция ёки унинг ҳосиласига қўйилган шартлардан иборат бўлади ва улар *чегаравий шартлар* деб аталади. Дифферннциал тенгламанинг чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи *чегаравий масала* деб аталади.

Агар дифференциал тенглама ва чегаравий шартлар чизиқли кўринишда бўлса, бу масала *чизиқли чегаравий масала* деб аталади. Таъкидлаб ўтамиз, чегаравий масала ҳар доим хам ечимга эга бўлавермайди, агар у ечимга эга бўлса, бу ечим ягона бўлади.

Қуйидаги

$$p_n(x)y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x), \qquad (7.1.1)$$

n – тартибли ($n\geq 2$), чизиқли дифференциал тенгламанинг $[a,b]$ оралиқда $(n-1)$ – та

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{sk}^{(j)}\cdot y^{(k)}(x_i)=\beta_s,\quad S=1,2,\ldots,n \qquad (7.1.2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи *чизиқли чегаравий масала* деб аталади. Бу ерда x_i, $i=1,2,\ldots,m$ лар $[a,b]$ оралиқда берилган нуқталар; $p_j(x)$, $f(x)$ – $[a,b]$ оралиқда узлуксиз функциялар ва $p_n(x)\neq 0$; $\alpha_{sk}^{(j)}$ ва β_s - берилган ўзгармас коэффициентлар.

Агар $[a,b]$ оралиқда $f(x)=0$ бўлса, (7.1.1) тенглама *бир жинсли тенглама* деб, акс ҳолда эса *бир жинсли бўлмаган тенглама* деб аталади. Агар $\beta_s=0$ бўлса, (7.1.2) шарт *бир жинсли чегаравий шарт* деб аталади. Агар тенглама ва чегаравий шартлар бир жинсли бўлса, у холда *чегаравий масала бир жинсли* деб аталади. (7.1.1) ва (7.1.2) ларни қаноатлантирувчи $y=y(x)$ функцияни аниқлаш, чегаравий масалани ечиш деб аталади.

Агар чегаравий шарт фақат икки нуқтада $x_1=a$ ва $x_2=b$ берилган бўлса бу чегаравий масала *иккинуқтали чегаравий масала* деб аталади.

Масалан чизиқли, иккинчи тартибли

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)\,y=d(x)$$

тенглама учун иккинуқтали чегаравий шартлар қуйидаги кўринишларда берилиши мумкин:

$$y(a) = A \quad , \quad y(b) = B;$$
$$y'(a) = A \quad , \quad y'(b) = B;$$
$$y(a) = A \quad , \quad y'(b) = B.$$

7.2. Оддий прогонка усули

Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг яна бир усулини кўриб ўтайлик. $x \in [a; b]$ оралиқда

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + q(x)y(x) = r(x) \qquad (7.2.1)$$

дифференциал тенгламанинг

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 \dfrac{dy(b)}{dx} = a_2 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 \dfrac{dy(b)}{dx} = \beta_2 \end{cases} \qquad (7.2.2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин. Бу ерда $q(x)$, $r(x)$ - $[a;b]$ оралиқда берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $a_i, \beta_i (i=0,1)$ - лар $a_0^2 + a_1^2 = 0$ ва $O(h^2)$ шартларни қаноатлантирсин.

Теорема. Агар $q(x)$, $r(x)$ функциялар $[a; b]$ оралиқда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ва $q(x) \leq 0$ бўлса, (7.2.1), (7.2.2) чегаравий масала ягона $y(x)$ ечимга эга бўлади.

$[a; b]$ оралиқни $x_i = a + i \cdot h \quad (0 \leq i \leq m, h = (b - am)/m)$ тугун нуқталар билан тўр(сетка)га ажратиб, $y_i = y(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$ белгилашларни киритамиз. Ички $x_i\,(1 \leq i \leq m-1)$ нуқталар учун чекли айирмалардан фойдаланиб, $O(h^2)$ аниқликда (7.2.1) тенгламани

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i y_i = r_i \qquad (7.2.3)$$

ва (7.30) чегаравий шартни эса

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \dfrac{\alpha_1}{2h}(-y_2 + 4y_1 - 3y_0) = \alpha_2 \\ \beta_0 y_m + \dfrac{\beta_1}{2h}(3y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}) = \beta_2 \end{cases} \qquad (7.2.4)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

(7.2.3) да $y_2 = r_1h^2 - q_1h^2y_1 + 2y_1 - y_0$ эканлигини ҳисобга олиб, уни (7.2.4) га қўямиз ва

$$\alpha_0 y_0 + \frac{\alpha_1}{2h}(-r_1h^2 + q_1h^2y_1 - 2y_1 + y_0 + 4y_1 - 3y_0) = \alpha_2$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликни y_0 га нисбатан ечиб

$$y_0 = E_1 y_1 + D_1$$

га эга бўламиз. Бу ерда $E_1 = \dfrac{2\alpha_1 + \alpha_1 q_1 h^2}{2\alpha_1 - 2\alpha_0 h}$, $D_1 = -\dfrac{2\alpha_2 h + \alpha_1 r_1 h^2}{2\alpha_1 - 2\alpha_0 h}$.

Худди шунга ўхшаш (7.2.3) да $y_{m-2} = r_{m-1}h^2 - q_{m-1}h^2y_{m-1} + 2y_{m-1} - y_m$ эканлигини ҳисобга олиб ва уни (7.2.4) га қўясак

$$\beta_0 y_m + \frac{\beta_1}{2h}(3y_m 4y_{m-1} + r_{m-1}h^2 - q_{m-1}h^2y_{m-1} + 2y_{m-1} - y_m) = \beta_2$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликни y_m га нисбатан ечсак

$$y_m = Qy_{m-1} + S \qquad (7.2.5)$$

ни оламиз. Бу ерда

$$Q = \frac{2\beta_1 + \beta_1 q_{m-1} h^2}{2\beta_1 + 2\beta_0 h}, \quad S = \frac{h(2\beta_2 - \beta_1 r_{m-1} h)}{2\beta_1 + 2\beta_0 h}.$$

(7.2.3) ва (7.2.4) биргаликда $y_0, y_1, \ldots, y_m$ – номаълумларни ўз ичига олган $(m+1)$ та чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ташкил этади.

Агар системани

$$Ay = b,$$

матрица кўринишида ифодаласак, бу системани Гаусс, Крамер коидаси, тескари матрица усуллари билан ечиш яхши самара бермайди. Шу сабабли бу системани ечиш учун прогонка усулидан фойдаланамиз.

Умумий

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = r_i \; , \; (1 \leq i \leq m-1) \qquad (7.2.6)$$

кўринишдаги учдиагоналли тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бу ерда A_i, B_i, C_i лар i га боғлиқ ўзгармаслар.

(7.2.6) нинг ечимини

$$y_i = E_{i+1}y_{i+1} + D_{i+1}, \ (0 \le i \le m-1) \qquad (7.2.7)$$

кўринишда ифодалаймиз. Бу ерда E_1, D_1 - лар маълум, E_i, D_i $(i = 2,3,\dots,m-1)$ - лар эса ҳозирча номаълум коэффициентлар.

(7.2.7) да i ни $i-1$ га алмаштириб, $y_{i-1} = E_i y_i + D_i$ га эга бўламиз ва y_i ўрнига унинг (7.2.7) даги ифодасини олиб келиб қўямиз. Натижада

$$y_{i-1} = E_i y_i + D_i = E_i(E_{i+1}y_{i+1} + D_{i+1}) + D_i = E_i E_{i+1}y_{i+1} + E_i D_{i+1} + D_i, \quad (7.2.8)$$
$$(1 \le i \le m-1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (7.2.7), (7.2.7) ларни (7.2.8) га олиб бориб қуйиб,

$$A_i E_i E_{i+1} y_{i+1} + A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i E_{i+1} y_{i+1} - C_i D_{i+1} + B_i y_{i+1} - r_i = 0$$
$$(1 \le i \le m-1)$$

тенгликга эга бўламиз. Бу тенгликда y_{i+1} олдидаги коэффициентларни ҳамда озод ҳадларни нолга тенглаштириб,

$$A_i E_i E_{i+1} - C_i E_{i+1} + B_i = 0$$
$$A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i D_{i+1} - r_i = 0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу ердан E_i, D_i ларни ҳисоблаш учун

$$\begin{cases} E_{i+1} = \dfrac{B_i}{C_i - A_i E_i}, \\ D_{i+1} = \dfrac{A_i D_i - r_i}{C_i - A_i E_i}, \quad 1 \le i \le m-1 \end{cases} \qquad (7.2.9)$$

формулаларга эга бўламиз. (7.2.5) тўғри прогонка формуласи деб аталади ва у E_1, D_1 ларни билган ҳолда E_k, D_k, $(k = 2,3,\dots,m)$ ларни ҳисоблаш имконини беради.

E_m, D_m ларнинг қийматларини аниқлаб, уларни (7.2.5) га қўйсак, натижада

$$y_m = Q(E_m y_m + D_m) + S$$

ёки

$$y_m = \frac{QD_m + S}{1 - QE_m}$$

га эга бўламиз. y_m ни билган ҳолда, (7.2.7) формула ёрдамида y_k, $(k = m-1, m-2, \dots 0)$ ларнинг қийматларини ҳисоблаймиз. Бу амал тескари прогонка деб аталади.

Теорема (прогонка усулининг турғунлиги ҳақида). Агар $A_i > 0$, $B_i > 0, C_i \ge A_i + B_i$, $1 \le i \le m-1$; $0 \le E_1 < 1$, $0 \le Q < 1$ шартлар бажарилса прогонка усули турғун бўлади.

Прогонка усулига тузилган дастур матни:

```
const  a1=0; b1=1; m=10; h=(b1-a1)/m;
  alfa0=0.5; alfa1=0.5; alfa2=1.0;
  betta0=-3.0; betta1=2.0; betta2=-3.0;
type vektor=array[0..m] of real;
var
  x,y,a,b,c,r,d,e:vektor;
  i:integer;
  q,s,g1,g2:real;
function fq(t:real):real;
begin
  fq:=2-t       {q(x) функциясининг берилиши}
end;
function fr(t:real):real;
begin
  fr:=-sqr(sqr(t))/3+2*t*sqr(t)/3-sqr(t)+3*t+2   {r(x)
функциясининг берилиши}
end;
begin
for i:=0 to m do begin
              x[i]:=a1+i*h; a[i]:=1.0; b[i]:=1.0;
              c[i]:=2-fq(x[i])*sqr(h);  r[i]:=fr(x[i])*sqr(h)
           end;
g1:=2*(alfa1-alfa0*h);  e[1]:=alfa1*(2+fq(x[1])*sqr(h))/g1;
d[1]:=-h*(2*alfa2+alfa1*fr(x[1])*h)/g1;
for i:=1 to m-1 do begin
              e[i+1]:=b[i]/(c[i]-a[i]*e[i]); d[i+1]:=(a[i]*d[i]-
r[i])/(c[i]-a[i]*e[i]);
            end;
g2:=2*(betta1+betta0*h);   q:=betta1*(2+fq(x[m-1])*sqr(h))/g2;
s:=(2*h*betta2-betta1*fr(x[m-1])*sqr(h))/g2;
```

```
y[m]:=(q*d[m]+s)/(1-q*e[m]);
for i:=m-1 downto 0 do y[i]:=e[i+1]*y[i+1]+d[i+1];
for i:=0 to m do writeln('y[',i:1,']=',y[i]:6:4);
end.
```

7.3. Дифференциал прогонка усули

Маълумки, кўпгина инженерлик масалаларни ечиш, ўзгарувчан коэффициентли дифференциал тенгламанинг ҳар хил чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишга келтирилади. Бошланғич шартли масалаларни ечиш, чегаравий масалаларни ечишга нисбатан соддароқ. Чунки чегаравий масалаларни берилган аниқликда ечиш алгоритмларини қуриш анча мураккаб. Бошланғич шартли масалаларни эса берилган аниқликда ечиш учун қатор алгоритмлар ишлаб чиқилган бўлиб, уларни ечишда фойдаланиладиган стандарт дастурлар мавжуд. Шу сабабли берилган чегаравий масалаларни бошланғич шартли масалаларга келтириб ечиш энг қулай усуллардан биридир. Дифференциал прогонка усули ёрдамида чегаравий масалани ечиш, унга тенг кучли бўлган бошланғиш шартли масалаларни ечишга келтирилади. Бу усулнинг яна бир қулайлик томони шундан иборатки, Коши масаласини берилган аниқликда ечиш учун ҳар бир алгоритмик тил ўзининг стандарт дастурларига эга.

Дифференциал прогонка усули алгоритмини қуйида берилган мисолда кўриб чиқамиз. Ушбу

$$y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=F(x) \tag{7.3.1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$\begin{cases} a_{11}y'(0)+a_{12}y(0)=b_1 \\ a_{21}y'(1)+a_{22}y(1)=b_2 \end{cases} \tag{7.3.2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин. Бу ерда a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 –ўзгармаслар; $A(x)$, $B(x)$, $F(x)$ – $[0,1]$ оралиқда берилган узлуксиз функциялар. $y(x)$ – номаълум функция.

Дифференциал прогонка усулига кўра (7.3.1), (7.3.2) чегаравий масала ечимини

$$\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=\gamma(x) \tag{7.3.3}$$

кўринишда тасвирлаймиз. Бу ердаги $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ лар ҳозирча номаълум функциялар.

(7.3.3) ни (7.3.1) га олиб бориб қўямиз ва $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ ларга нисбатан қуйидаги

$$\begin{cases} \alpha'(x)=\alpha(x)A(x)-\beta(x) \\ \beta'(x)=\alpha(x)B(x) \\ \gamma'(x)=-\alpha(x)F(x) \end{cases} \tag{7.3.10}$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$a_{11}y'(0)+a_{12}y(0)=b_1 \quad \text{ва} \quad \alpha(0)y'(0)+\beta(0)y(0)=\gamma(0)$$

тенгликлардан

$$\alpha(0)=a_{11}, \quad \beta(0)=a_{12}, \quad \gamma(0)=b_1 \tag{7.3.11}$$

ни ҳосил қиламиз.

(7.3.10), (7.3.11) Коши масаласини $[0,1]$ оралиқда ечиб, $\alpha(1)$, $\beta(1)$, $\gamma(1)$ ларни аниқлаймиз. Одатда бу усул тўғри прогонка усули деб аталади.

$$a_{21}y'(1)+a_{22}y(1)=b_2 \quad \text{ва} \quad \alpha(1)y'(1)+\beta(1)y(1)=\gamma(1)$$

Тенгликлардан

$$y(1)=\frac{b_2\alpha(1)-a_{21}\gamma(1)}{a_{22}\alpha(1)-a_{21}\beta(1)}, \quad y'(1)=\frac{b_2\beta(1)-a_{22}\gamma(1)}{a_{21}\beta(1)-a_{22}\alpha(1)} \tag{7.3.12}$$

га эга бўламиз.

(7.3.1), (7.3.12) Коши масаласини $[0,1]$ оралиқда ечиб, $y(x)$ функциясининг сонли қийматларини ҳосил қиламиз. Бу усул тескари прогонка усули дейилади.

Дифференциал прогонка усулининг аниқлиги унга тенг кучли бўлган Коши масалаларини ечиш аниқлиги каби бўлади. Агар Коши масалалари ечими тўртинчи тартибли Рунге-Кутта усули ёрдамида топилган бўлса, дифференциал прогонка усулининг аниқлиги ҳам тўртинчи тартибга эга бўлади. Бу эса чегаравий масалани дифференциал прогонка усулида юқори аниқлик билан ечиш имконини беради.

Чегаравий масалаларни дифференциал прогонка усулида ечишга тузилган дастур матни:

```
const a11=1; a12=1; a21=1; a22=-1; b1=0; b2=2;
      ndx=11; dx=0.1;
type vek=array[1..ndx] of real;
```

```
type vek1=array[1..2] of real;
type vek2=array[1..3] of real;
var
   y0,y,yt: vek1; alf0,alf: vek2; px: vek; zlx,h:real;
   i,nx:integer;
function fa(z: real): real;
begin
      fa:=z+1; { A(x)-функциясининг кўриниши}
end;
function fb(z: real): real;
begin
      fb:=z+3;  { B(x)-функциясининг кўриниши}
end;
function ff(z: real): real;
begin
      ff:=z*z*z*z+7*z*z*z+7*z*z+5*z+4;   { F(x)-
функциясининг кўриниши }
end;
procedure pv(x: real; y: vek2; var dy: vek2);
begin
      dy[1]:=fa(x)*y[1]-y[2];
      dy[2]:=y[1]*fb(x);
      dy[3]:=y[1]*ff(x)
end;

procedure rungikytta1(x: real; y0: vek2; var dy: vek2);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek2;
begin
   pv(x,y0,fc);
   for i:=1 to 3 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
   v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
   x:=x+0.5*h;
   pv(x,v3,fc);
   for i:=1 to 3 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
   v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
   pv(x,v3,fc);
   for i:=1 to 3 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
```



```
   v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
   x:=x+0.5*h;
   pv(x,v3,fc);
   for i:=1 to 3 do begin fk4[i]:=h*fc[i];
   dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i])
end;
end;
procedure pv1(x: real; y: vek1; var dy: vek1);
begin
     dy[1]:=y[2];
     dy[2]:=-y[2]*fa(x)-y[1]*fb(x)+ff(x);
end;
procedure rungikytta2(x: real; y0: vek1; var dy: vek1);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek1;
begin
     pv1(x,y0,fc);
     for i:=1 to 2 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
                     v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i]
                 end;
     x:=x+0.5*h;   pv1(x,v3,fc);
     for i:=1 to 2 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
                     v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i]
                 end;
     pv1(x,v3,fc);
     for i:=1 to 2 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
                     v3[i]:=y0[i]+fk3[i]
                 end;
     x:=x+0.5*h;  pv1(x,v3,fc);
     for i:=1 to 2 do begin fk4[i]:=h*fc[i];

dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i])
                 end;
end;
begin clrscr;
for i:=1 to ndx do px[i]:=(i-1)*dx;
alf0[1]:=a11; alf0[2]:=a12; alf0[3]:=b1;
for nx:=2 to ndx do begin zlx:=px[nx-1]; h:=dx;
```

```
                    rungikytta1(zlx,alf0,alf);
                    for i:=1 to 3 do alf0[i]:=alf[i];
                end;
y0[1]:=(b2*alf[1]-a21*alf[3])/(a22*alf[1]-a21*alf[2]);
y0[2]:=(b2*alf[2]-a22*alf[3])/(a21*alf[2]-a22*alf[1]);
writeln('x=',px[ndx]:4:2,' yy===',y0[1]:7:4);
for nx:=ndx downto 2 do begin  zlx:=px[nx]; h:=-dx;
                        rungikytta2(zlx,y0,y);
                        writeln('x=',(zlx+h):4:2,'
              yy=',y[1]:7:4);
                        for i:=1 to 2 do y0[i]:=y[i];
                    end;
end.
```

7.4. Бубнов-Галёркин усули

Чегаравий масалаларни сонли-аналитик ечиш усулларидан бири Бубнов-Галёркин усулидир. Бу усул чегаравий шартларни қаноатлантирувчи координат функцияларини танлашга асосланган. Бубнов-Галёркин усулининг алгоритмини қуйидаги чегаравий масалани ечишда кўриб чиқайлик.

$$y^{IV} + Ay = F(x) \qquad (7.4.1)$$

тенгламани

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0 \qquad (7.4.2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда A - ўзгармас; $F(x)$ - $[0,1]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз функция.

Бубнов-Галёркин усулига кўра (7.4.1), (7.4.2) чегаравий масаланинг ечимини

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\pi x \qquad (7.4.3)$$

кўринишда қидирамиз. Бу ерда a_n лар ҳозирча номаълум ўзгармас коэффициентлар.

(7.4.3) ни (7.4.1) га олиб бориб қўямиз ва

$$\sum_{n=1}^{N} a_n (n\pi)^4 \sin n\pi x + A\sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\pi x = F(x) \qquad (7.4.4)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

(7.4.4) тенгликнинг иккала томонини $\sin m\pi x$, $m = 1,2,3,\ldots$ ларга кетма-кет кўпайтириб уни $[0,1]$ оралиқда x бўйича интеграллаймиз. Агар

$$\int_0^1 \sin px \sin qx dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{агар} \quad p = q \\ 0 & \text{агар} \quad p \neq q \end{cases}$$

эканлигини ҳисобга олсак, натижада

$$a_m (m\pi)^4 + Aa_m = f_m$$

ёки

$$a_m = \frac{f_m}{(m\pi)^4 + A}, \quad m = 1,2,3,\ldots,N \qquad (7.4.5)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $f_m = 2\int_0^1 F(x) \sin m\pi x dx$.

Топилган a_m ларни (7.4.3) га олиб бориб қўямиз ва номаълум $y(x)$ функцияни аниқлаш учун

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n \sin n\pi x}{(n\pi)^4 + A} \qquad (7.4.6)$$

формулага эга бўламиз.

Бубнов-Галёркин усулининг аниқлиги (7.4.6) формуладаги йиғиндилар сонига ва танланган координат функциясига боғлиқ бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + xy(x) = x^2$ тенгламанинг $y(0) + 2y'(0) = 1$ ва $y(1) - y'(1) = 3$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини $x \in [0;1]$, $h = 0,2$ лар учун оддий прогонка усулида аниқланг.

2. $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 5$ тенгламанинг $y(x)|_{x=0} = 0$ ва $y(x)|_{x=1} = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Бубнов-Галёркин усули ёрдамида аниқланг (N=3).

3. $\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 3y(x) = x$ тенгламанинг $y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Бубнов-Галёркин усули ёрдамида аниқланг (N=3).

4. $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+4x\frac{dy(x)}{dx}+(4x^2+2)y(x)=0$ тенгламанинг $y(0)=0$ ва $y(1)=e$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини дифференциал прогонка усулига тузилган дастур ёрдамида аниқланг ва уни аниқ ечим $y(x)=x\cdot e^{x^2}$ билан солиштиринг.

5. $(x-2)^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}-3(x-2)\frac{dy(x)}{dx}+4y(x)=x+2$ тенгламанинг $y(0)=3$ ва $y(1)=1$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини дифференциал прогонка усулига тузилган дастур ёрдамида аниқланг ва уни аниқ ечим $y(x)=(x-2)^2+x-1$ билан солиштиринг.

Таянч сўз ва иборалар

Дифференциал тенглама, Коши масаласи, чегаравий масала, бир жинсли тенглама, бир жинсли чегаравий шарт, иккинуқтали чегаравий масала, оддий прогонка усули, дифференциал прогонка усули, Бубнов-Галёркин усули, координат функцияси.

Саволлар

1. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий шартлар кандай қўйилади?
2. Чизиқли чегаравий масала қандай аниқланади?
3. Бир жинсли чегаравий шарт деб қандай шартга айтилади?
4. Бир жинсли чегаравий масала деб қандай масалага айтилади?
5. Иккинуқтали чегаравий масалага мисоллар келтиринг.
6. Оддий прогонка усули ва унинг алгоритми.
7. Тўғри ва тескари прогонка ҳақида гапириб беринг.
8. Прогонка усулининг турғунлиги ҳақидаги теоремани айтиб беринг.
9. Дифференциал прогонка усулининг асл моҳияти нимадан иборат?
10. Дифференциал прогонка усулининг хатолиги нимага боғлиқ?
11. Бубнов-Галёркин усули ёрдамида қандай масалалар ечилади?

VIII-БОБ. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

8.1. Асосий тушунчалар

Олдинги иккита бобда математик модели бошланғич ёки чегаравий шартли оддий дифференциал тенгламаларни ечишга келтириладиган масалаларни кўриб чиққан эдик. Бу масалаларнинг ечимлари битта эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлган функциялардан иборат эди.

Маълумки кўпгина мухандислик масалаларининг ечими бир неча ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, унинг математик моделида хусусий ҳосилалар қатнашган бўлади. Шу сабабли бу масалаларнинг математик моделлари хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларга қўйиладиган қўшимча шартлар ёрдамида ифодаланади. Масалан, гидродинамика, радиотехника, қурилиш механикаси, диффузия, ернинг шўрланиши, суюқликларни фильтрлаш, электр занжирида ток кучини аниқлаш каби масалалар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ёрдамида моделлаштирилади. Асосан бу масалаларнинг ечимлари, температура, тезлик, кучланиш, босим, эгилиш каби физик ва геометрик катталиклардан иборат бўлиб, улар фазовий координаталарга, ҳамда вақтга боғлиқ бўлади.

Мисол сифатида қўйидаги, яъни бирлик узунликга эга, бир жинсли, сирти иссиқлик ўтказмайдиган, етарлича ингичка стерженда иссиқлик тарқалиш масаласини кўриб чиқайлик. Ox ўқини стержень бўйича йўналтириб ва унинг чап учини $x=0$ нуқтада жойлаштирамиз. Бу ҳолда иссиқлик оқими фақат Ox ўқи бўйича тарқалади. Агар стерженнинг t вақт ва x нуқтасидаги температурасини $u(x,t)$, стержень кўнданг кесими юзасини эса a деб белгиласак, унинг ихтиёрий кўндаланг кесимидан ўтадиган иссиқлик миқдори $Q=-kau_x$ га тенг бўлади. Бу ерда $k>0$ – стерженнинг иссиқлик ўтказиш коэффициенти. Агар $u_x<0$ бўлса, стерженнинг чап қисмидаги температура унинг ўнг қисмидаги температурадан катта бўлади, натижада иссиқлик чапдан ўнгга ҳаракатлана бошлайди. Стерженнинг Δx узунликга эга қисмини кўриб чиқайлик. Бир вақт ўлчов бирлигида бу қисмнинг x

координатали кесимидан $Q_1=-kau_x|_x$, миқдорда иссиқлик кириб келса, шу қисмнинг $x+\Delta x$ координатали кесимидан эса $Q_2=-kau_x|_{x+\Delta x}$ миқдорда иссиқлик чиқиб кетади. Натижада қисмдаги иссиқлик миқдори

$$\Delta Q=Q_1-Q_2=(-kaux)|_x-(-kaux)|_{x+\Delta x}. \qquad (8.1.1)$$

га ўзгаради. Элементар физика курсидан маълумки, қаралаётган қисмдаги иссиқлик миқдори $Q=s\rho a\Delta x u_t$ га тенг бўлади. Бу ерда s – материалнинг иссиқлик ўтказиш сиғими, ρ – материал зичлиги. Бу миқдордан вақт бўйича олинган ҳосила қисмдаги иссиқлик ўзгаришига тенг бўлади:

$$\Delta Q=s\rho a\Delta x u_t. \qquad (8.1.2)$$

(8.1.1) ва (8.1.2) дан $(s\rho a\Delta x u_t=(kau_x)|_{x+\Delta x}-(kau_x)|_x)$ га эга бўламиз. Бу ерда $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтсак, $s\rho au_t=a(ku_x)_x$ ёки

$$u_t=(ku_x)_x/s\rho. \qquad (8.1.3)$$

кўринишдаги дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Агар $k=const$ бўлса, (8.1.3) ни

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c=k/s\rho)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Одатда бу тенглама *иссиқлик тарқалиш* ёки *диффузия* тенгламаси деб аталади.

Бу тенгламанинг хусусий ечимини аниқлаш учун унга қўшимча шартлар зарур бўлади. Фараз қилайлик, бошланғич $t=0$ вақтда стержен $g(x)$ температурага эга бўлсин:

$$u(0,x)=g(x),\ 0<x<1. \qquad (8.1.4)$$

Бу шарт *бошланғич шарт* деб аталади. Стержень ўзининг четки учларида ўзгармас α ва β температураларга эга бўлсин:

$$u(t,0)=\alpha,\ u(t,1)=\beta, \qquad (8.1.5)$$

(8.1.5) шартлар *чегаравий шартлар* деб аталади.

Шундай қилиб қуйидаги масалага эга бўламиз. Ўзининг четки учларида ўзгармас α ва β температураларга эга стержень берилган бўлиб, у бошланғич $t=0$ вақтдаги температурага $g(x)$ эга бўлсин. Ихтиёрий $t>0$ вақтда стерженнинг исталган x нуқтасидаги температура қандай аниқланади?

Бу масаланинг математик модели ўзгармас коэффициентли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \left(c=\frac{k}{s\rho},\ 0\le x\le 1\right)$$

ва унга қўйилган (8.1.4) бошланғич ва (8.1.5) чегаравий шартлардан иборат бўлади.

Иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун бошқа кўринишдаги масалаларни ҳам келтириш мумкин. Масалан, стерженнинг ўнг четки қисми иссиқлик ўтказмайдиган бўлса, у ҳолда (8.1.5) чегаравий шартлар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(t,0)=\alpha,\ u_x(t,1)=0.$$

Агар қаралаётган стержень бир жинсли бўлмаса ($\rho=\rho(x)$, $s=s(x)$, $k=k(x)$), у ҳолда (8.1.3) ўзгарувчан коэффициентли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага айланади ва уни ечиш янада мураккаблашади.

8.2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни классификациялаш

Маълумки, асосий физик жараёнлар иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ёрдамида ифодаланади. Бу тенгламаларни умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0, \qquad (8.2.1)$$

бу ерда x,y - эркли ўзгарувчилар, u – номаълум функция ва $u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}$ – лар эса u нинг хусусий ҳосилалари. Агар $u=u(x,y)$ функция (8.2.1) тенгламани айниятга айлантирса, бу функция *тенгламанинг ечими* деб аталади. Умумий ҳолда бу ечим x,y,u фазода қандайдир сиртни ифодалайди.

(8.2.1) тенглама

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0,$$

кўринишга эга бўлса, у *юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизиқли тенглама* деб аталади. Бу ерда, a,b,c – лар x ва y нинг функциялари ёки ўзгармас катталиклар.

(8.2.1) тенглама *чизиқли тенглама* деб аталади, агар у

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g, \qquad (8.2.2)$$

кўринишга эга бўлса. Бу ерда *a,b,c,d,e,f,g* – лар *x* ва *y* нинг функциялари ёки ўзгармас катталиклар. Агар (8.2.2) да g=0 бўлса, у ҳолда бу тенглама бир *жинсли тенглама* деб аталади.

(8.2.2) тенгламадаги *a,b,c* коэффициентлардан камида биттаси нолдан фаркли бўлсин. Бу тенгламанинг типи *a,b,c* ларга, яъни $D=b^2$-ac дискриминантнинг қийматига боғлиқ бўлади. Агар (8.2.2) тенгламада D>0 бўлса, у *гиперболик*, агар D=0 бўлса, у *параболик*, агар D<0 бўлса, у *эллиптик* типдаги тенглама деб аталади. Инженерлик масалаларида кўп учрайдиган тенгламалар, масалан иссиқлик тарқалиш (диффузия) тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (8.2.3)$$

параболик типдаги, тўлқин тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (8.2.4)$$

гиперболик типдаги, Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (8.2.5)$$

эса эллиптик типдаги тенгламалар бўлади.

a,b,c коэффициентлар *x* ва *y* ларга боғлиқ бўлган ҳолларда, тенглама типи бир соҳадан иккинчи соҳага утганда ўзгариши мумкин. Бу ҳолда тенглама *аралаш типдаги* тенглама деб аталади. Масалан $yu''_{xx}+u''_{yy}=0$ Трикоми тенгламаси аралаш типдаги тенгламага мисол бўла олади.

Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y).$$

Лапласа тенгламаси Пуассон тенгламаси деб аталади.

Айрим ҳолларда дифференциал тенгламаларни қисқа кўринишда ёзишда Лаплас оператори - Δ дан фойдаланилади. Бу оператор қуйидаги кўринишларга эга:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Бу операторлардан фойдаланиб, иссиқлик тарқалиш

тенгламасини - $\Delta u = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$; тўлқин тарқалиш тенламасини - $\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ва *Лаплас* тенгламасини - $\Delta u=0$ кўринишларда ифодалаш мумкин.

8.3. Бошланғич ва чегаравий шартлар

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар умумий ҳолда чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Бу ечимни ягоналигини таъминлаш учун тенгламага қўшимча шартлар қўйилади. Бу қўшимча шартлар бошланғич ва чегаравий шартлардан иборат бўлади.

Бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини қидириш масаласи Коши масаласи деб аталади. Бу ҳолда масала чегараланмаган соҳада ечилади ва чегаравий шарт берилмайди. Асосан Коши масаласи гиперболик ва параболик типидаги чизиқли дифференциал тенгламалар учун қўйилади.

Масалан, гиперболик типидаги тенгламалар учун Коши масаласи, қуйидагича ифодаланади: $G(-\infty < x < +\infty)$ соҳада $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ тенгламанинг $u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \phi(x,$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини аниқланг. Бу ерда $\varphi,\ \psi$ - берилган функциялар.

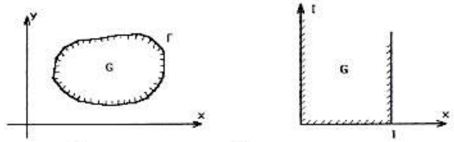
(8.2.2) тенгламанинг чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u=u(x,y)$ ечимини топиш масаласи, чегаравий масала деб аталади. Бундай масалалар эллиптик типдаги тенгламаларга қўйилади.

Функция ва функция ҳосиласининг соҳа чегарасида берилиш усулларига қараб чегаравий шартлар қуйидаги турларга ажратилади:

- агар соҳа чегарасида функция қийматлари берилган бўлса, бу – 1-тур чегаравий шарт деб;
- агар соҳа чегарасида функция ҳосиласи қийматлари берилган бўлса, бу – 2-тур чегаравий шарт деб;
- агар соҳа чегарасида функция ва унинг ҳосиласининг чизиқли комбинацияси қийматлари берилган бўлса, бу – 3-тур чегаравий шарт деб аталади;

Бу шартларга тўғри келган чегаравий масалалар мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи тур чегаравий масалалар деб аталади.

Масалан эллиптик типидаги (8.2.2) тенглама учун чегаравий масалаларни қуйидагича ифодалаш мумкин. Г чегарали G соҳада (расм-8.1а) тенгламанинг шундай $u=u(x,y)$ ечимини аниқлангки, Г да қуйидаги шартлар бажарилсин: $u(x,y)_{\Gamma}=\varphi$ - 1-тур чегаравий масала; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\psi$ - 2-тур чегаравий масала; $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma\cdot u(x,y)\right)_{\Gamma}=p$ - 3-тур чегаравий масала.



а) б)

расм.8.1.

(8.2.2) чизиқли дифференциал тенгламанинг бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u=u(x,t)$ ечимини аниқлаш масаласи аралаш масала деб аталади. Аралаш масалалар гиперболик ва параболик типидаги тенгламалар учун қўйилади. Масалан, гиперболик типидаги тенглама учун аралаш масала қуйидагича ифодаланади: G ($0<x<1$, $t>0$) соҳада (расм-7.1б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$ тенгламанинг $u(x,0)=\varphi_1(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_2(x)$ ($0<x<1$, $t=0$) бошланғич шартлар ва $\alpha_1 u(0,t)+\beta_1\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\phi_1(t)$, $\alpha_2 u(1,t)+\beta_2\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t)=\phi_2(t)$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u=u(x,t)$ ечимини аниқланг. Бу ерда $|\alpha_1|+|\beta_1|\neq 0$, $|\alpha_2|+|\beta_2|\neq 0$, $0<t<\infty$.

Коши ва чегаравий масалаларни аралаш масаланинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин.

Хусусий ҳосилали тенгламаларга қуйилган аралаш масалаларни ечишда фойдаланиладиган айрим усуллар алгоритми билан танишиб чиқайлик.

8.4. Бубнов-Галёркин усули

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни берилган шартларни қаноатлантирувчи ечимларини аниқлаш учун бир қатор усуллар мавжуд. Шулардан бири Бубнов-Галёркин усулидир. Бу усул алгоритмини қуйидаги масалада кўриб чиқамиз. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad 0\le x\le 1,\quad t\ge 0 \tag{8.4.1}$$

берилган бўлиб, унинг

$$U(x,0)=f(x) \tag{8.4.2}$$

бошланғич ва

$$U(0,t)=0,\ U(1,t)=0 \tag{8.4.3}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими $U(x,t)$ топиш талаб қилинсин.

Бубнов-Галёркин усулига кўра шундай $\varphi_1(x)$, ... , $\varphi_n(x)$ базис функцияларни танлаймизки, улар ўзаро ортогонал ва $\varphi_i(0)=0$, $\varphi_i(1)=0$, ($i=1,..,n$) шартларни қаноатлантирсин:

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}1, & \text{агар} \quad i=j\\ 0, & \text{агар} \quad i\neq j\end{cases}$$

(8.4.1)-(8.4.3) масаланинг тақрибий $u(x,t)\approx U(x,t)$ ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз:

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\varphi_i(x). \tag{8.4.4}$$

Бу ерда $c_i(t)$ коэффициентлар ҳозирча номаълум функциялар. (8.4.4) дан

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}c_i'(t)\varphi_i(x),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\varphi''_i(x),$$

эканлигини хисобга олиб, уларни (8.4.1) тенгламага олиб бориб қўямиз, ва

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(t)\varphi_i(x)=a\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\varphi''_i(x),\ i=1,...,n\ , \tag{8.4.5}$$

тенгликга эга бўламиз. Бу тенгликнинг иккала тамонини $\varphi_j(x)$ ($j=1,2,3,...,n$) ларга кўпайтириб ҳосил бўлган тенгликни ҳадма-ҳад x бўйича $[0;1]$ оралиқда интеграллаймиз ва $c_j(t)$ ларга нисбатан

$$c_j'(t) = a\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_0^1 \varphi''_i(x)\varphi_j(x)dx, \qquad j=1,\dots,n \qquad (8.4.6)$$

оддий дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

(8.4.4) да $t=0$ деб, (8.4.2) бошланғич шартдан фойдалансак,

$$c_j(0) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \qquad j=1,\dots,n \qquad (8.4.7)$$

га эга бўламиз. Оддий дифференциал тенгламалар системаси учун (8.4.6), (8.4.7) Коши масаласини 6-бобда келтирилган усуллардан бири ёрдамида ечиб $c_j(t)$ ларни аниқлаймиз, ва уларни (8.4.4) га қўйиб масаланинг ечимини ҳосил қиламиз.

8.5. Фурье усули

Бу усул алгоритмини узунлиги l га тенг бўлган икки учи маҳкамланган торнинг эркин тебраниши масаласида кўриб чиқайлик. Маълумки, бу масалани ечиш

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (8.5.1)$$

тенгламанинг

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{dt}\bigg|_{t=0} = F(x) \qquad (8.5.2)$$

бошланғич ва

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \qquad (8.5.3)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишга келтирилади.

Фурье усули одатда ўзгарувчиларни ажратиш усули ҳам деб аталади. Бу усул икки қисмдан иборат бўлиб, биринчи қисмда (8.5.1) тенгламанинг (8.5.3) чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими топилса, иккинчи қисмда эса хос функциялар асосида (8.5.2) шартни қаноатлантирувчи ечим аниқланади.

Фурье усулига кўра ечимни

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (8.5.4)$$

кўринишда қидирамиз.

(8.5.4) ни икки марта x ва t лар бўйича дифференциаллаб $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ ва $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$ тенгликларни ҳосил қиламиз ва уларни (8.5.1) га қўйиб,

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

ёки

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (8.5.5)$$

га эга бўламиз.

(8.5.5) нинг чап қисми фақат t га, ўнг қисми эса фақат x ўзгарувчига боғлиқ. Агар (8.5.5) да t ни ўзгармас, яъни унинг чап қисми ўзгармас деб, x ни ихтиёрий равишда ўзгартирсак, унинг ўнг қисми ҳам ўзгармас бўлади. Худди шунга ўхшаш (8.5.5) да x ни ўзгармас, яъни унинг ўнг қисми ўзгармас деб, t ни ихтиёрий равишда ўзгартирсак, унинг чап қисми ҳам ўзгармасдан қолади. Бу эса $\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$ ва $\frac{X''(x)}{X(x)}$ ларнинг бир хил ўзгармас катталикка тенглигини билдиради:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = const \qquad (8.5.6)$$

Бу ердан $T(t)$ ва $X(x)$ функциялар мос равишда

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad T''(t) - ca^2T(t) = 0 \qquad (8.5.7)$$

дифференциал тенгламаларнинг ечими эканлиги келиб чиқади.

Агар (8.5.3) чегаравий шартни ҳисобга олсак

$$u(x,t)\big|_{x=0} = X(0)T(t) = 0$$

$$u(x,t)\big|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

тенгликлар ихтиёрий t лар учун ўринли бўлади. Бу эса

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

бўлганда ўринли бўлади.

Натижада $X(x)$ функцияни топиш учун

$$X''(x) - cX(x) = 0 \qquad (8.5.8)$$

$$X(0) = X(l) = 0 \qquad (8.5.9)$$

чегаравий масалага эга бўламиз.

(8.5.8), (8.5.9) чегаравий масала бир қарашда $X(x)\equiv 0$ тривиал ечимга эгадек кўринади, лекин биздан масаланинг 0 дан фарқли ечимини топиш талаб этилади. c нинг шундай қийматини танлайликки, қаралаётган масала 0 дан фарқли ечимга эга бўлсин. Бунинг учун (8.5.8) да $X(x)=e^{rx}$ деб олиб $r^2-c=0$ характеристик тенгламани ҳосил қиламиз. Бу характеристик тенглама учун қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $c=\lambda^2>0$ бўлсин, у ҳолда $r=\pm\lambda$ бўлиб,

$$X(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$$

ечимга эга бўламиз. (5.66) шартдан фойдалансак, C_1 ва C_2 лар учун

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\lambda l}+C_2e^{-\lambda l}=0 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг асосий детерменанти 0 дан фарқли. Ҳақиқатдан

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix}=e^{-\lambda l}-e^{\lambda l}\neq 0.$$

Бу ердан эса $C_1=C_2=0$ га эга бўламиз, яъни бу ҳолда $X(x)\equiv 0$ тривиал ечимга эга бўламиз.

2) $c=0$ бўлсин, у ҳолда характеристик тенгламанинг иккала ечими ҳам 0 га тенг бўлиб, (8.5.8), (8.5.9) чегаравий масаланинг ечими

$$X(x)=C_1+C_2x$$

кўринишда бўлади. Агар (8.5.9) шартдан фойдалансак $C_1=C_2=0$ эканлиги келиб чиқади ва яна $X(x)\equiv 0$ тривиал ечимга эга бўламиз.

3) $c=-\lambda^2<0$ бўлсин, у ҳолда $r=\pm i\lambda$ бўлиб,

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$$

ечимга эга бўламиз. (8.5.9) шартдан фойдалансак, $C_1=0$ ва $C_2\sin\lambda l=0$ тенгликларга эга бўламиз. $C_2\neq 0$, яъни $X(x)\neq 0$ бўлиши учун $\sin\lambda l=0$ ёки $\lambda=\frac{k\pi}{l}$ $(k=\pm1,\pm2,\pm3,\dots)$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, $\lambda=\frac{k\pi}{l}$, яъни $c=-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ бўлса, (8.5.8), (8.5.9) чегаравий масала 0 дан фарқли ечимга эга бўлади.

Агар ҳар бир k учун (8.5.8) нинг ечимини $X_k(x)$ деб белгиласак, у ҳолда

$$X_k(x)=A_k\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (8.5.10)$$

кўринишга эга бўлади. Бу ерда A_k лар ихтиёрий ўзгармаслар.

Кейинчалик $k=1,2,3,\dots$ деб оламиз, чунки A_k ларнинг ихтиёрийлигидан $k=-1,-2,-3,\dots$ ларда ҳосил бўладиган ечимларни ҳам келтириб чиқариш мумкин бўлади.

Ҳар бир $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$ учун (8.5.10) нинг фақат ўзгармас кўпайтувчиларга фарқ қиладиган чексиз кўп ечимини ҳосил қиламиз.

$\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$ ва $\sin\frac{k\pi x}{l}$ лар мос равишда (8.5.8), (8.5.9) чегаравий масаланинг хос сонлари ва хос функциялари деб аталади.

λ_k га (8.5.7) нинг иккинчи тенгламасини қаноатлантирувчи $T_k(t)$ функция мос келади ва у

$$T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k(t)=0$$

тенгламанинг умумий ечими сифатида

$$T_k(t)=B_k\cos\frac{k\pi at}{l}+D_k\sin\frac{k\pi at}{l} \qquad (8.5.11)$$

кўринишида аниқланади. Бу ерда B_k ва D_k лар ихтиёрий ўзгармаслар.

(8.5.10) ва (8.5.11) ни (8.5.4) га қўйиб, (8.5.8) тенгламанинг (8.5.9) чегаравий шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими

$$u_k(x,t)=\left(B_k\cos\frac{k\pi at}{l}+D_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)A_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $a_k=A_kB_k$ ва $b_k=A_kD_k$ белгилашлар киритиб, уни

$$u_k(x,t)=\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (8.5.12)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$u_k(x,t)$ ечим торнинг эркин тебраниши масаласига мос келувчи хос функциялари деб аталади.

Теорема. Агар $u_k(x,t)$ функциялар (8.5.1) тенгламанинг бир жинсли (8.5.3) чегаравий шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими бўлса, $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)$ функция ҳам (8.5.1) тенгламанинг (8.5.3) шартни қаноатлантирувчи ечими бўлади.

Фурье усулининг иккинчи қисми, хос функциялар асосида (8.5.2) шартни қаноатлантирувчи ечимни топишдан иборат. (8.5.2) ни (8.5.1) га қўйиб, уларни йиғиб чиқамиз:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (8.5.13)$$

Ҳар бир k лар учун $u_k(x,t)$ функция (8.5.3) чегаравий шартни қаноат-лантирганлиги сабабли, $u(x,t)$ функция учун ҳам бу шарт бажарилади.

Энди a_k ва b_k коэффициентларни шундай танлайликки, (8.5.13) ечим (8.5.2) бошланғич шартни қаноатлантирсин.

(8.5.13) да $t=0$ деб,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l}=f(x) \qquad (8.5.14)$$

га эга бўламиз.

(8.5.13) ни t бўйича дифференциаллаб, унда $t=0$ десак

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}=F(x) \qquad (8.5.15)$$

тенгликка эга бўламиз.

(8.5.14) ва (8.5.15) ларни $\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ ларга кўпайтириб, $[a,b]$ оралиқда интеграллаймиз. Агар

$$\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & \text{агар } k\neq n\\ \frac{1}{2}, & \text{агар } k=n\end{cases}$$

эканлигини ҳисобга олсак, a_k ва b_k коэффициентлар учун

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

формулаларга эга бўламиз. Бу коэффициентларни (8.5.13) га қўйиб,

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\cos\frac{k\pi at}{l}+\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

(8.5.1) - (8.5.3) масаланинг ечимини ҳосил қиламиз.

Мисол. Фурье усулидан фойдаланиб (8.5.1)-(8.5.3) бошланғич шартли чегаравий масалада $f(x)=1+x^2$ ва $F(x)=0$ лар учун ечимни аниқланг.

Ечиш. a_k ва b_k коэффициентларни аниқлайлик:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l(1+x^2)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k\cdot\left(\frac{2l^2}{k^2\pi^2}-1-l^2\right)-\frac{2l^2}{k^2\pi^2}+1\right],\ b_k=0.$$

Бу қийматларни (8.5.13) га қўйиб,

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[(-1)^k\cdot\left(\frac{2l^2}{k^2\pi^2}-1-l^2\right)-\frac{2l^2}{k^2\pi^2}+1\right]\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

берилган масаланинг ечимига эга бўламиз.

8.6. Квадратура формула усули

Узунлиги L га тенг $(0 \le x \le L)$ стерженда иссиқлик тарқалиш масаласини қараб чиқайлик. Маълумки, бу масаланинг математик модели

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (8.6.1)$$

тенгламанинг

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (8.6.2)$$

бошланғич ва стержень учидаги физик жараёнга боғлиқ равишда бирор чегаравий шартни қаноатлантрувчи ечимини топишга келтирилади. Аниқлик учун стержень учларидаги температуралар берилган бўлсин:

$$u(0,t)=\alpha(t) \text{ ва } u(L,t)=\beta(t) \qquad (8.6.3)$$

(8.6.1) - (8.6.3) бошланғич шартли чегаравий масаласини ечишда квадратура формуласи алгоритмини келтириб чиқарамиз.

(8.6.1) тенгламани t бўйича *[0;t]* оралиқда интеграллаб ва (8.6.2) бошланғич шартни хисобга олсак

$$u(x,t)-\varphi(x)=a^2\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau$$

бу ерда $t=t_n=n\Delta t$ $(n=0,1,2,3,...)$ деб, интегрални бирор квадратура формуласига алмаштирсак,

$$u_n(x)-\varphi(x)=a^2\sum_{i=0}^{n} A_i \frac{d^2 u_i(x)}{dx^2}$$

тенгликга эга бўламиз. Бу ерда $u_i(x)=u(x,t_i)$. Охирги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$a^2 A_n \frac{d^2 u_n(x)}{dx^2}-u_n(x)=a^2\sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^2 u_i(x)}{dx^2}-\varphi(x)$$

ёки

$$\frac{d^2 u_n(x)}{dx^2}-\frac{1}{a^2 A_n}u_n(x)=\frac{1}{A_n}\sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^2 u_i(x)}{dx^2}-\frac{1}{a^2 A_n}\varphi(x). \qquad (8.6.4)$$

Натижада (8.6.4) оддий дифференциал тенгламага эга бўламиз. Бу ерда A_i $(i=0,1,2,...,n)$ лар квадратура формуласи коэффициентлари. Хусусан трапеция формуласи учун $A_0=A_n=\Delta t/2$; $A_1=A_2=A_3=...=A_{n-1}=\Delta t$. (8.6.4) тенгламада ўнг тамон $t=t_n$ дан олдинги вақтлар учун берилганлар орқали аниқланади.

Агар (8.6.3) чегаравий шартни эътиборга олсак,

$$u_n(0)=\alpha(t_n) \text{ ва } u_n(L)=\beta(t_n) \qquad (8.6.5)$$

га эга бўламиз. Натижада хар бир $t=t_n$ учун (8.6.4) - (8.6.5) чегаравий масалага эга бўламиз. Бу чегаравий масалани 6-бобда келтирилган усуллардан бири ёрдамида ечиб қўйилган масаланинг ечимига эга бўламиз.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ тенгламанинг $U(x,0)=2$ бошланғич ва $U(0,t)=0$, $U(1,t)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Бубнов-Галёркин усулида аниқланг. (Кўрсатма: $\varphi_i(x)=\sin i\pi x$ деб олинг).

2. $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u\big|_{t=0}=2$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$ бошланғич ва $u\big|_{x=0}=0$, $u\big|_{x=1}=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Фурье усули ёрдамида аниқланг.

Таянч сўз ва иборалар

Хусусий ҳосила, дифференциал тенглама, иссиқлик тарқалиш тенгламаси, тўлқин тарқалиш тенгламаси, параболик тип, гиперболик тип, эллиптик тип, 1-2-3-тур чегаравий масалалар, базис функция, ортогонал функция, диффузия масаласи, Коши масаласи, чегаравий масала, алгоритм, Квадратура формуласи, Бубнов-Галёркин усули, Фурье усули.

Саволлар

1. Хусусий ҳосила нима?
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага таъриф беринг.
3. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама тартиби қандай аниқланади?
4. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ўлчови қандай аниқланади?
5. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга мисоллар келтиринг.
6. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни қандай турларга ажратиш мумкин?
7. Иссиқлик тарқалиш (диффузия)тенгламасини ёзиб беринг.
8. Тўлқин тарқалиш тарқалиш тенгламасини ёзиб беринг.
9. Лаплас тенгламасини ёзиб беринг.
10. Қандай операторга Лаплас оператори деб аталади?
11. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи қандай ифодаланади?
12. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар қандай ифодаланади?

13. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун аралаш масала қандай ифодаланади?
14. Гиперболик типидаги тенгламалар учун Коши масаласи қандай ифодаланади?
15. Гиперболик типидаги тенгламалар учун аралаш масаласи қандай ифодаланади?
16. Чегаравий шарт турлари ҳақида гапириб беринг.
17. Бубнов-Галёркин усули ва унинг алгоритми.
18. Базис функция ҳақида гапириб беринг.
19. Базис функциялар қачон ортоганал деб аталади?
20. Фурье усули ва унинг алгоритми.
21. Фурье усулининг биринчи қисмида нима аниқланади?
22. Фурье усулининг иккинчи қисмида нима аниқланади?
23. Хос сон ва хос функциялар ҳақида гапириб беринг.
24. Квадратура формуласи усули ва унинг алгаоритми.

IX-БОБ. ИНТЕГРАЛ ВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ҲАМДА УЛАРНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

9.1. Асосий тушунчалар.

Инженерлик масалалари мураккаб физик жараёнлардан ташкил топган масалалардир. Бу жараёнларни математик моделда ҳар хил усулларда ҳисобга олиш мумкин. Математик моделда уларни етарлича аниқликда ҳисобга олиш, модель адекватлигини таъминлаб беради.

Маълумки, физик жараёнларда ҳар хил қаршилик кучлари пайдо бўлади. Бу ички қаршилик кучларни математик моделда турли (дифференциал, интеграл ва ҳ.к.) кўринишда ҳисобга олиш мумкин. Ўтказилган қатор тажрибалар, мутахассислар томонидан олиб борилган илмий тадқиқотлар натижалари шуни кўрсатадики, ички қаршилик кучларини ҳисобга олишда интеграл формалардан фойдаланиш ижобий натижаларга олиб келади. Шу сабабли физик жараёнларда ҳосил бўладиган ички қаршилик кучларини интеграл формада ҳисобга олиш амалиётда кенг фойдаланилмоқда. Натижада жараённнинг математик модели интеграл ёки интегро-дифференциал тенгламалар ва уларга қўйиладиган қўшимча шартлардан иборат бўлади.

Таъриф. Агар тенгламада номаълум функция интеграл остида қатнашса, бу тенглама интеграл тенглама деб аталади.

Чизиқли интеграл тенгламани умумий ҳолда

$$g(t)y(t)-\lambda\int_{\Omega}k(t,s)y(s)ds=f(t) \qquad (9.1.1)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин. Бу ерда $k(t,s)$, $g(t)$ ва $f(t)$ - берилган функциялар бўлиб, $k(t,s)$ - интеграл тенгламанинг ядро функцияси дейилади. $y(t)$- номаълум функция, λ - берилган сонли параметр.

Интеграл тенгламанинг бир неча турлари мавжуд:

$$\int_{\Omega}k(t,s)y(s)ds=f(t)$$

кўринишдаги тенглама ((9.1.1) да $g(x)=0$ ва $\lambda=-1$ бўлган ҳол), бир жинсли бўлмаган 1-тур чизиқли интеграл тенглама деб аталади.

$$\lambda\int_{\Omega} k(t,s)y(s)ds = y(t)$$

кўринишдаги тенглама ((9.1.1) да $g(t)=1$ ва $f(t)=0$ бўлган ҳол), бир жинсли 2-тур чизиқли интеграл тенглама деб аталади.

$$y(t)-\int_{\Omega} k(t,s)y(s)ds = f(t)$$

кўринишдаги тенглама ((9.1.1) да $g(t)=1$ ва $\lambda=1$ бўлган ҳол), бир жинсли бўлмаган 2-тур чизиқли интеграл тенглама деб аталади.

Таъриф. Номаълум функциянинг дифференциалини ҳам ўз ичига олган интеграл тенгламага интегро-дифференциал тенглама деб аталади.

Интегро-дифференциал тенгламага мисол сифатида қуйидаги

$$\frac{dy(t)}{dt}+\lambda\int_0^t R(t,s)y(s)ds = f(t),$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\lambda\left[y(t)-\int_0^t R(t,s)y(s)ds\right] = f(t)$$

тенгламаларни келтиришимиз мумкин. Интегро-дифференциал тенгламаларни ечиш учун тенгламада қатнашган дифференциал тартибига мос равишда бошланғич шартлар берилиши талаб этилади.

Интеграллаш соҳасига боғлиқ равишда (9.1.1) тенглама Фредгольм типидаги (Ω ўзгармас) ёки Вольтерра типидаги (Ω ўзгарувчи) интеграл тенгламалар деб аталади.

Интеграл ва интегро-дифференциал тенгламаларни аниқ ечимини топиш ўта мураккаб бўлиб, кўпгина ҳолларда уларни ечишда тақрибий сонли ечиш усулларидан фойдаланилади. Қуйида интеграл ва интегро-дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш учун бир неча сонли усуллар ва бу усуллар алгоритми асосида тузилган дастурлар келтирилган.

9.2. 1-тур Вольтерра типидаги интеграл тенгламалар

Чизиқли 1-тур Вольтерра тенгламаси қуйидаги

$$\int_a^t k(t,s)y(s)ds = f(t),\quad t,s\in[a,b] \qquad (9.2.1)$$

кўринишга эга.

Теорема. Агар $k(a,a)\neq 0$, $f(a)=0$ бўлиб $k(t,s)$, $f(t)$ функциялар (a,b) оралиқда узлуксиз $k_t'(t,s)$, $f'(t)$ ҳосилаларга эга ҳамда $k(t,s)\neq 0$ бўлса, (9.2.1) тенглама шу оралиқда узлуксиз ягона ечимга эга бўлади.

(9.2.1) тенгламани ечишда квадратура формуласидан фойдаланамиз. Дастлаб (9.2.1) тенгламанинг иккала томонини t бўйича бир марта дифференциаллаб, ҳосил бўлган ифодада $t=a$ десак,

$$y(a)=\frac{f'(a)}{k(a,a)} \qquad (9.2.3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (9.2.1) тенгламадаги интегрални ўзгармас h қадамли трапеция формуласи бўйича чекли йиғиндига алмаштириб, қуйидаги

$$y(t_i)=y_i=\frac{2}{k(t_i,t_i)}\left[\frac{f(t_i)}{h}-\sum_{j=1}^{i-1}A_j k(t_i,t_j)y_j\right], \qquad (9.2.4)$$

рекуррент формулага эга бўлиш мумкин. Бу ерда $t_i=a+(i-1)h$, $i=2,3,\ldots,$ $A_1=\frac{1}{2}$, $m>1$ лар учун эса $A_m=1$.

(9.2.3) ва (9.2.4) формулалар ёрдамида y_i $(i=2,3,\ldots)$ ларни кетма-кет аниқлаш мумкин.

Чизиқли 1-тур Вольтерра тенгламасини ечиш учун тузилган дастур матни:

```
const
     a=0.0;       {t нинг бошланғич қиймати }
     n=31;        {t бўйича нўқталар сони }
     h=0.1;       {t бўйича қадам }
type  vek=array[1..n] of real;
var  y,t,c:vek;  s:real;i,j:integer;
function f(x:real):real;
begin
     f:=x*x       { f(t) функция кўриниши  }
end;
function f1(x:real):real;
begin
     f1:=2*x      { f'(t) функция кўриниши  }
end;
```

```
function r(x,y:real):real;
begin
      r:=2+x*x-y*y       {r(t,s) функция кўриниши }
end;
   begin clrscr;
         for i:=1 to n do begin t[i]:=a+(i-1)*h; c[i]:=1.0 end;
         c[1]:=0.5; y[1]:=f1(a)/r(a,a); toch[1]:=ftoch(a);
          for i:=2 to n do
                                  begin
                                       s:=0;
                                      for j:=1 to i-1 do
s:=s+c[j]*r(t[i],t[j])*y[j];
                                       y[i]:=2/r(t[i],t[i])*(f(t[i])/h-s);
                                  end;
     for i:=1 to n do writeln(t[i]:5:2,'  ',y[i]:10:6);
   end.
```

Мисол. Тузилган дастурдан фойдаланиб берилган $a=0$, $h=0{,}05$, $f(t)=t^2$, $k(t,s)=2+t^2-s^2$ лар учун олинган (9.2.1) интеграл тенламанинг тақрибий ва аниқ $y(t)=te^{-t^2/2}$ ечимлари ҳар хил t ларда қуйидаги жадвалда келтирилган.

t	Тақрибий ечим	Аниқ ечим	t	Тақрибий ечим	Аниқ ечим
0,0	0,000000	0,000000	1,6	0,444020	0,444860
0,2	0,197000	0,196040	1,8	0,355225	0,356218
0,4	0,370889	0,369247	2,0	0,269770	0,270671
0,6	0,503031	0,501162	2,2	0,194969	0,195628
0,8	0,582535	0,580919	2,4	0,134354	0,134723
1,0	0,607539	0,606531	2,6	0,088411	0,088523
1,2	0,584365	0,584103	2,8	0,055624	0,055555
1,4	0,525031	0,525436	3,0	0,033494	0,033327

9.3. 2-тур Вольтерра типидаги интеграл тенгламалар

Чизиқли бир жинсли бўлмаган 2-тур Вольтерра тенгламаси қуйидаги

$$y(t)-\int_a^t k(t,s)y(s)ds=f(t),\quad t,s\in[a,b] \tag{9.3.1}$$

кўринишга эга. Бу ерда $k(t,s)$- ядро функцияси, $s=a$, $t=b$, $t=s$ чизиқлар билан чегараланган учбурчак ичида ва унинг чегарасида узлуксиз, $f(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз. $y(t)$- номаълум функция.

(9.3.1) тенгламани ечишда квадратура формуласидан фойдаланамиз. (9.3.1) тенгламадаги интегрални ўзгармас h қадамли трапеция формуласи бўйича чекли йиғиндига алмаштириб, қуйидаги

$$y(t_i)=y_i=\frac{f(t_i)+h\sum_{j=1}^{i-1}A_jk(t_i,t_j)y_j}{1-\frac{h}{2}k(t_i,t_i)}, \tag{9.3.2}$$

рекуррент формулага эга бўлиш мумкин. Бу ерда $t_i=a+(i-1)h$, $i=2,3,\ldots$, $A_1=\frac{1}{2}$, $m>1$ лар учун эса $A_m=1$. Агар (9.3.1) тенгламада $t=a$ десак,

$$y(a)=f(a) \tag{9.3.3}$$

га эга бўламиз.

(9.3.2) ва (9.3.3) лар ёрдамида y_i $(i=2,3,\ldots)$ ларни кетма-кет аниқлаш мумкин.

Чизиқли 2-тур Вольтерра тенгламасини ечиш учун тузилган дастур матни:

```
const
      a=0.0;      {t нинг бошланғич қиймати }
       n=21;      {t бўйича нуқталар сони }
      h=0.05;    {t бўйича қадам }
  type  vek=array[1..n] of real;
  var  y,t,c:vek;
        s:real;
i,j:integer;
function f(x:real):real;
begin
      f:=(1-x*exp(2*x))*cos(1)-exp(2*x)*sin(1) { f(t) функция
кўриниши  }
end;
function r(x,y:real):real;
begin
```

```
r:=1-(x-y)*exp(2*x)        {r(t,s) функция кўриниши }
end;
  begin clrscr;
        for i:=1 to n do begin
                          t[i]:=a+(i-1)*h; c[i]:=1.0
                      end;
        c[1]:=0.5;
        y[1]:=f(a);
        for i:=2 to n do
                     begin
                          s:=0;
                          for j:=1 to i-1 do s:=s+c[j]*r(t[i],t[j])*y[j];
                          y[i]:=(f(t[i])+h*s)/(1-h*r(t[i],t[i])/2);
                     end;
     for i:=1 to n do writeln(t[i]:5:2,'   ',y[i]:10:6);
  end.
```

Мисол. Тузилган дастурдан фойдаланиб, берилган $a=0$, $h=0{,}05$, $f(t)=(1-te^{2t})\cos 1-e^{2t}\sin 1$, $k(t,s)=1-(t-s)e^{2t}$ лар учун олинган (9.3.1) интеграл тенламанинг тақрибий ва аниқ $y(t)=e^{t}(\cos e^{t}-e^{t}\sin e^{t})$ ечимлари ҳар хил t ларда қуйидаги жадвалда келтирилган.

t	Тақрибий ечим	Аниқ ечим
0,0	-0,301169	-0,301169
0,2	-0,983602	-0,983569
0,4	-2,101015	-2,100915
0,6	-3,669153	-3,668947
0,8	-5,284334	-5,284021
1,0	-5,513842	-5,513636
1,2	-1,309168	-1,309882
1,4	10,545296	10,542137
1,6	25,010640	25,006065
1,8	14,346203	14,355014
2,0	-45,527236	-45,489898

9.4. Фредгольм типидаги интеграл тенгламалар

Умумий ҳолда чизиқли бир жинсли бўлмаган Фредгольм типидаги интеграл тенгламалар

$$\alpha y(t)-\lambda\int_a^b k(t,s)y(s)ds=f(t) \qquad (9.4.1)$$

кўринишга эга. Бу ерда $x,s\in[a,b]$, $k(t,s)$ - ядро функцияси $[a,b]\times[a,b]$ квадратда аниқланган ва узлуксиз.

Агар (9.4.1) да $\alpha=0$ ва $\lambda=-1$ бўлса, 1-турдаги; агар $\alpha=1$ ва $\lambda\neq 0$ бўлса 2-турдаги Фредгольм интеграл тенгламалари ҳосил бўлади.

$t=t_i$ $(i=1,2,..n)$ лар учун, (9.4.1) даги интегрални ўзгармас $h=\frac{b-a}{n-1}$ қадам билан трапеция формуласига алмаштирсак,

$$\alpha y_i-\lambda h\sum_{j=1}^{n}A_j k_{ij}y_j=f_i,\ (i=1,2,\ldots,n) \qquad (9.4.2)$$

тенгликга эга бўламиз. Бу ерда $y_i=y(t_i)$, $k_{ij}=k(t_i,t_j)$, $f_i=f(t_i)$, $t_i=a+(i-1)h$, $i=2,3,\ldots$, $A_1=\frac{1}{2}$, $m>1$ лар учун эса $A_m=1$.

(9.4.2) да $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{агар } i=j\\ 0, & \text{агар } i\neq j\end{cases}$ Кронекер белгилашини киритсак, ихтиёрий $i=1,2,\ldots,n$ лар учун

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha\delta_{ij}-\lambda hA_j k_{ij})y_j=f_i \qquad (9.4.3)$$

n та y_i номаълумларни ўз ичига олган чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. (9.4.3) чизиқли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс усулида ёрдамида ечиб, y_i ларни аниқлаймиз.

Фредгольм типидаги интеграл тенгламаларини ечиш учун тузилган дастур матни:

```
const alfa=1;              {α нинг қиймати }
      lambda=1;            {λ нинг қиймати }
      n=37;                {t бўйича нуқталар сони }
      a=-3.14159265;       {t нинг бошланғич қиймати }
      b=-a;                {t нинг охирги қиймати }
type
     matrisa=array[1..n,1..n+1] of real;
     vektor=array[1..n] of real;
```

```
var
    aij:matrisa; t,y,c:vektor;
    h:real;i,j:integer;
function f(x:real):real;
begin
   f:=25-16*sqr(sin(x))          { f(t) функция берилиши }
end;
function fk(x,s:real):real;
begin
   fk:=0.3/(0.64*pi*sqr(cos((x+s)/2))-pi)
                                 { k(t,s) функция берилиши }
end;
function d(l,m:integer):integer;
begin
   if l=m then d:=1 else d:=0;      { δij функция берилиши }
end;
procedure gauss(b:matrisa; var y:vektor);
var max,c:real;
          k,m:integer;
   begin
      for i:=1 to n do
         begin
            max:=abs(b[i,i]); j:=i;
            for k:=i+1 to n do if abs(b[k,i])>max then
            begin
                max:=abs(b[k,i]); j:=k;
            end;
            if j<>i then for k:=i to n+1 do
            begin
                c:=b[i,k]; b[i,k]:=b[j,k];
                b[j,k]:=c;
            end;
            c:=b[i,i];
            for k:=i to n+1 do b[i,k]:=b[i,k]/c;
            for m:=i+1 to n do
               begin
                  c:=b[m,i];
```



```
                  for k:=i+1 to n+1 do
                  b[m,k]:=b[m,k]-b[i,k]*c;
               end;     end;
   y[n]:=b[n,n+1];
            for i:=n-1 downto 1 do
            begin
               y[i]:=b[i,n+1];
               for k:=i+1 to n do
               y[i]:=y[i]-b[i,k]*y[k]
            end;
      end;
   begin
      h:=(b-a)/(n-1);
      for i:=1 to n do begin
                     t[i]:=a+(i-1)*h; c[i]:=1
               end;
      c[1]:=0.5; c[n]:=0.5;
      for i:=1 to n do for j:=1 to n do
            aij[i,j]:=alfa*d(i,j)-h*lambda*c[j]*fk(t[i],t[j]);
         for i:=1 to n do
               aij[i,n+1]:=f(t[i]);
      gauss(aij,y);
      for i:=1 to n do writeln('t=',t[i]:8:6,'   ',y[i]:10:9);
end.
```

Мисол. Тузилган дастурдан фойдаланиб берилган $a=-\pi$, $b=\pi$, $\alpha=1$, $\lambda=1$, $n=37$, $f(t)=25-16\sin^2 t$, $k(t,s)=\dfrac{0{,}3}{0{,}64\pi\cos^2\dfrac{t+s}{2}}-\pi$ лар учун олинган (9.4.1) интеграл тенгламанинг тақрибий ва аниқ $y(t)=8{,}5+\dfrac{128}{17}\cos 2t$ ечимлари ҳар хил t ларда қуйидаги жадвалда келтирилган.

t	Тақрибий ечим	Аниқ ечим
-3,141593	16,029411784	16,029411765
-2,792527	14,267864029	14,267864011

-2,443461	9,807468605	9,807468590
-2,094395	4,735294098	4,735294086
-1,745329	1,424667324	1,424667316
-1,396263	1,424667340	1,424667334
-1,047198	4,735294138	4,735294133
-0,698132	9,807468648	9,807468644
-0,349066	14,267864050	14,267864046
-0,000000	16,029411768	16,029411765
0,349066	14,267864050	14,267864046
0,698132	9,807468648	9,807468644
1,047198	4,735294138	4,735294133
1,396263	1,424667340	1,424667334
1,745329	1,424667324	1,424667316
2,094395	4,735294098	4,735294086
2,443461	9,807468605	9,807468590
2,792527	14,267864029	14,267864011
3,141593	16,029411784	16,029411765

9.5. Квадратура формула усули

Ушбу

$$y''(t)+\omega^2\left[y(t)-\int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau\right]=f(t) \qquad (9.5.1)$$

интегро-дифференциал тенгламанинг

$$y(0)=a,\ \ y'(0)=b \qquad (9.5.2)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин. Бу ерда $f(t)$, $R(t)$ - $[0,t]$ оралиқда берилган узлуксиз функциялар.

(9.5.1) - (9.5.2) Коши масаласи ечимини, квадратура формуласига асосланган тақрибий ечиш алгоритми қуйидаги амаллар кетма-кетлигидан иборат: (9.5.1) тенгламани t бўйича $[0;\ t]$ оралиқда бир марта интеграллаб, (9.5.2) нинг иккинчи шартини ҳисобга олсак,

$$y'(t)-b+\omega^2\left[\int_0^t y(s)ds-\int_0^t\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds\right]=\int_0^t f(s)ds$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани яна бир марта t бўйича $[0,t]$ оралиқда интеграллаб, (9.5.2) даги биринчи шартни ҳисобга олиб

$$y(t)-a-bt+\omega^2\left[\int_0^t\int_0^z y(s)dsdz-\int_0^t\int_0^z\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau dsdz\right]=\int_0^t\int_0^z f(s)dsdz$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Агар охирги тенгликдаги интеграллар учун қуйидаги

$$\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t \varphi(t)dtdt\ldots dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}\varphi(\tau)d\tau$$

формулани қўлласак, у қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$y(t)-a-bt+\omega^2\left[\int_0^t (t-s)y(s)ds-\int_0^t (t-s)\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds\right]==\int_0^t (t-s)f(s)ds \qquad (9.5.3)$$

Бу тенгликдаги $\int_0^t (t-s)\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds$ интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб,

$$\int_0^t (t-s)\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds=\int_0^t\int_0^{t-s}(t-s-\tau)R(\tau)d\tau y(s)ds$$

ни ҳосил қиламиз. У ҳолда (9.5.3) ни қуйидаги

$$y(t)=a+bt-\omega^2\left[\int_0^t (t-s)y(s)ds-\int_0^t\int_0^{t-s}(t-s-\tau)R(\tau)d\tau y(s)ds\right]+$$

$$+\int_0^t (t-s)f(s)ds \qquad (9.5.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади. Бу ерда $t_n=n\cdot\Delta t$ $(n=0,1,2,\ldots)$ деб, интегралларни тақрибий равишда трапеция формуласига алмаштирсак, у қуйидаги кўринишни олади:

$$y_n=a+bt_n-\omega^2\left[\sum_{i=0}^{n-1}A_i(t_n-t_i)y_i-\sum_{i=0}^{n-1}A_iR_{n-i}y_i\right]+\sum_{i=0}^{n-1}A_i(t_n-t_i)f(t_i) \qquad (9.5.5)$$

бу ерда $y_i = y(t_i)$, $R_{n-i} = \int\limits_0^{t_n - t_i}(t_n - t_i - \tau)R(\tau)d\tau$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$;

$A_0 = A_n = \dfrac{\Delta t}{2}$, $A_k = \Delta t$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

(9.5.5) реккурент формула ҳар бир $n = 1, 2, 3, \dots$ учун y_n ларни y_j $(j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ лар орқали топиш имконини беради.

(9.5.1) – (9.5.2) Коши масаласини ечиш учун тилида тузилган дастур матни:

```
      const nt=20; dt=0.2; ya=1; yb=1; omega_kvad=6;
      type vek=array[0..nt] of real;
      var a,y,r,t:vek; s1,s2,s3,s4,s5,tk,int1:real; i,n:integer;
function fr(z:real):real;
begin
        fr:=exp(-3*z)
end;
function fr1(z:real):real;
begin
        fr1:=(tk-z)*fr(z)
end;
function ff(z:real):real;
begin
        ff:=5.5*exp(z)+1.5*exp(-3*z)
end;
procedure simpson(a,b:real; n:integer; var int:real);
   var h,s,s1,s2:real; i:integer;
   begin
        h:=(b-a)/(2*n); s1:=0; s2:=0; s:=fr1(a)+fr1(b);
        for i:=1 to n do s1:=s1+fr1(a+(2*i-1)*h);
        for i:=1 to n-1 do s2:=s2+fr1(a+2*i*h);
         int:=h*(s+4*s1+2*s2)/3;
   end;
begin clrscr;
      for i:=0 to nt do begin t[i]:=i*dt; a[i]:=dt end;
      a[0]:=dt/2; a[nt]:=dt/2; y[0]:=ya;
      for i:=0 to nt do begin tk:=i*dt;
      simpson(0,tk,50,int1); r[i]:=int1 end;
```



```
   s1:=0; s2:=0; s3:=0; s4:=0;
   for n:=1 to nt do
          begin
               s1:=s1+a[n-1]*y[n-1]; s2:=s2+a[n-1]*t[n-1]*y[n-1];
                 s3:=s3+a[n-1]*f(t[n-1]); s4:=s4+a[n-1]*t[n-1]*f(t[n-
1]); s5:=0;
               for i:=0 to n-1 do s5:=s5+a[i]*r[n-i]*y[i];
                y[n]:=ya+yb*t[n]-omega_kvad*(t[n]*s1-s2-
                s5)+t[n]*s3-s4;
          end;
   for i:=0 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'  y=',y[i]:7:4;
end.
```

Мисол. $\omega^2 = 6$; $R(t) = e^{3t}$; $f(t) = 5{,}5e^t + 1{,}5e^{-3t}$; $a = b = 1$ лар учун (8.5.1), (8.5.2) масалани ечинг.

Ечиш. Дастурга керакли бошланғич маълумотларни киритамиз: nt, Δt - мос равишда t бўйича олинган тугун нуқталар сони ва қадам, $ya = a$, $yb = b$, $omega\_kvad = \omega^2$. Дастур ёрдамида олинган натижалар ва масаланинг аниқ $y(t) = e^t$ ечими t нинг ҳар хил қийматларида қуйидаги жадвалда келтирилган.

t	$y(t)$			Аниқ ечим
	$\Delta t = 0{,}05$	$\Delta t = 0{,}1$	$\Delta t = 0{,}2$	
1	2,7186	2,7194	2,7229	2,7183
2	7,3886	7,3871	7,3809	7,3891
3	20,0863	20,0886	20,0979	20,0855
4	54,5992	54,6024	54,6142	54,5982
5	148,4157	148,4232	148,4519	148,4132

Таянч сўз ва иборалар

Интеграл тенглама, интегродифференциал тенглама, ядро функцияси, бир жинсли тенлама, трапеция формуласи, реккурент формула, Кронекер белгиси, квадратура формулами, Коши масаласи.

Саволлар

1. Интеграл тенгламага таъриф беринг.
2. Интегродифференциал тенгламага таъриф беринг.
3. Ядро функцияси ҳақида гапириб беринг.
4. Чизиқли интеграл тенглама ва унинг турлари қандай кўринишларда бўлади?
5. Қандай тенгламалар Фредгольм типидаги тенгламалар деб аталади ва унинг қандай турлари мавжуд?
6. Қандай тенгламалар Вольтерра типидаги тенгламалар деб аталади?
7. Қандай тенгламага 1-тур Вольтерра тенгламаси деб аталади?
8. Қандай тенгламага 2-тур Вольтерра тенгламаси деб аталади?
9. 1-тур Вольтерра тенгламаси қачон узлуксиз ягона ечимга эга бўлади?
10. Вольтерра типидаги тенгламаларни ечишда қандай усулдан фойдаланилади?
11. Квадратура формуласи усули деганда қандай усулни тушунасиз?
12. Реккурент формула – қандай формула?

X-БОБ. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ

10.1. Масаланинг қўйилиши

Кўпгина иқтисодий масалаларни ечиш чизиқли дастурлаш масалаларини ечишга келтирилади. Чизиқли дастурлаш масаласи умумий ҳолда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \ldots + c_nx_n \to max(min) \tag{10.1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n \le a_n \end{cases} \tag{10.1.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \tag{10.1.3}$$

бу ерда (10.1.1) мақсад функцияси, (10.1.2) чекланишлар системаси, (10.1.3) номанфийлик шарти дейилади.

Масалада $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (10.1.2) ва (10.1.3) шартларни қаноатлантирсин ҳамда (10.1.1) функция максимал (минимал) қийматни қабул қилсин.

Ушбу масалани умумий ҳолда симплекс усулда, ўзгарувчилар сони иккита бўлган ҳолда эса, график усулда ечиш мумкин.

10.2. График усул

Агар (10.1.1)-(10.1.3) масалада ўзгарувчилар сони иккита бўлса, бу масала қуйидаги кўринишга келади:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to max(min) \tag{10.2.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_n \end{cases} \tag{10.2.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \tag{10.2.3}$$

(10.2.1) – (10.2.3) масалани график усулда ечишни кўриб чиқамиз. (10.2.2) ва (10.2.3) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар тўпламига ечимлар кўпбурчаги дейилади.

Теорема. Мақсад функцияси ўзининг оптимал қийматига ечимлар кўпбурчагининг чегара нуқталарида эришади.

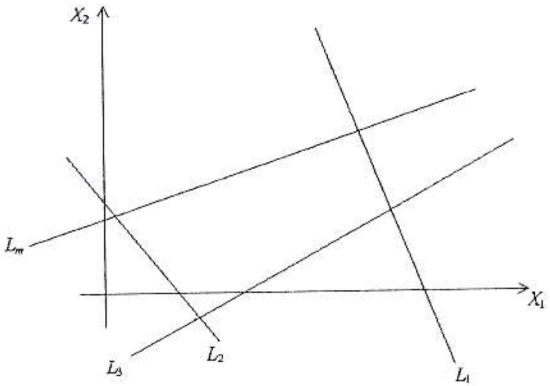
Чизиқли дастурлаш масаласини график усулда ечиш қуйидаги тартибда бажарилади:

1) Берилган масаладаги тенгсизликларга мос тенгламаларни тузамиз ва уларни мос равишда

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \qquad (L_1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2 \qquad (L_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = a_n \qquad (L_m)$$
$$x_1 = 0 \qquad (L_{m+1})$$
$$x_2 = 0 \qquad (L_{m+2})$$

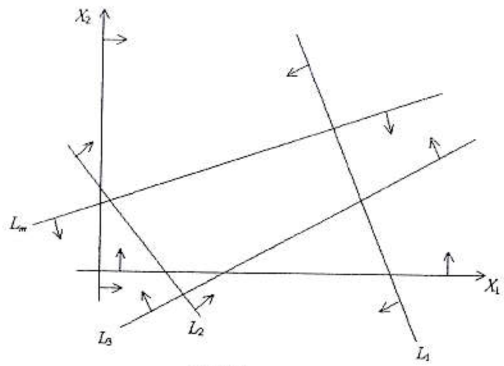
билан белгилаймиз.

2) $(L_1), (L_2), \ldots, (L_{m+2})$ тенгламалар билан берилган чизиқларни X_1OX_2 координаталар текислигида ифодалаймиз (10.1-расм).



10.1-расм

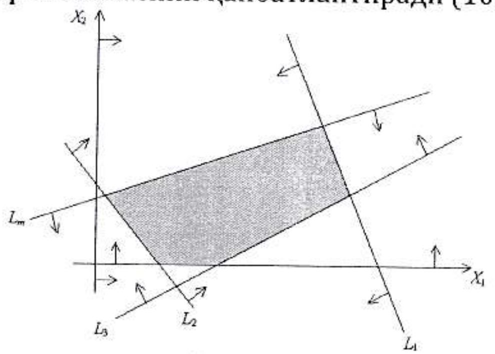
3) (10.2.2) да берилган тенгсизликларга мос ярим текисликларни аниқлаймиз (10.2-расм).



10.2-расм

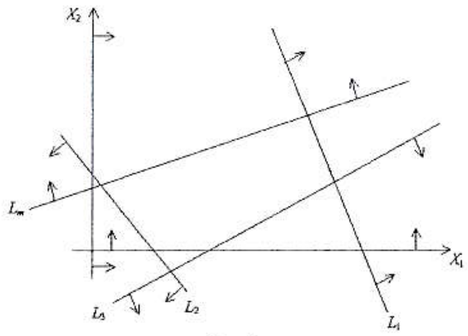
Расмдаги ҳар бир тўғри чизиқ графигига қўйилган стрелкалар (10.2.2)-(10.2.3) тенгсизликларга мос ярим текисликларни аниқлайди.

4) Ярим текисликларнинг кесишмасини қараймиз. Агар кесишма кўпбурчакдан иборат бўлса, масаланинг ечими чекли қийматга эга бўлади. Ушбу кўпбурчак ечимлар кўпбурчаги бўлиб, унинг ихтиёрий нуқтаси берилган (10.2.2)-(10.2.3) тенгсизликлар системасини қаноатлантиради (10.3-расм).



10.3-расм

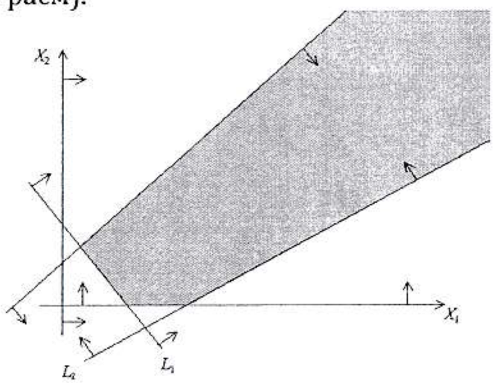
Агар кесишма бўш тўплам бўлса, масала ечимга эга бўлмайди (10.4-расм).



10.4-расм

Кесишма бўш тўплам бўлмаган ҳолда масаланинг оптимал ечимини топиш учун ўзгарувчиларнинг шундай қийматларини топиш керакки, ушбу қийматларда z мақсад функцияси энг катта (энг кичик) қийматга эришсин. Бундай қийматлар ечимлар кўпбурчагининг чегаравий нуқталарида бўлади. Агар оптимал ечим кўпбурчакнинг битта учида бўлса, ечим ягона бўлади, акс ҳолда масала чексиз кўп ечимга эга бўлиб, улар кўпбурчакнинг оптимал ечим қабул қиладиган учларининг чизиқли комбинацияларидан иборат бўлади.

Агар ярим текисликлар кесишмаси чексиз соҳа бўлса, масала ечимининг қиймати юқоридан чегараланмаган бўлиши мумкин (10.5-расм).



10.5-расм

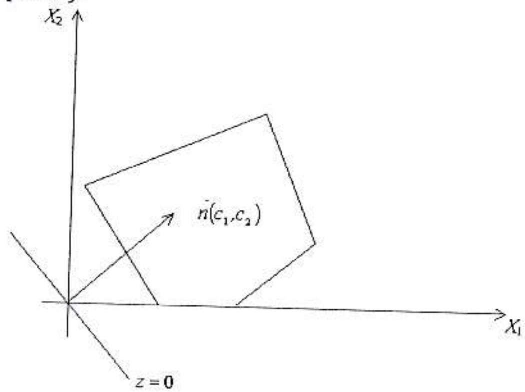
Агар кесишма бўш тўплам бўлмаса, оптимал ечим икки хил усулда аниқланади.

Биринчи усул:

1) Ечимлар кўпбурчаги учларининг координаталари аниқланади.
2) Аниқланган координаталар z функциясига қўйилади.
3) Ҳосил бўлган қийматларнинг энг катта ёки энг кичиги топилади.

Иккинчи усул:

1) $\vec{n}(c_1, c_2)$ нормал вектор чизилади.
2) Нормал векторга перпендикуляр бўлган $z=0$ тўғри чизиқ чизилади (10.6-расм).

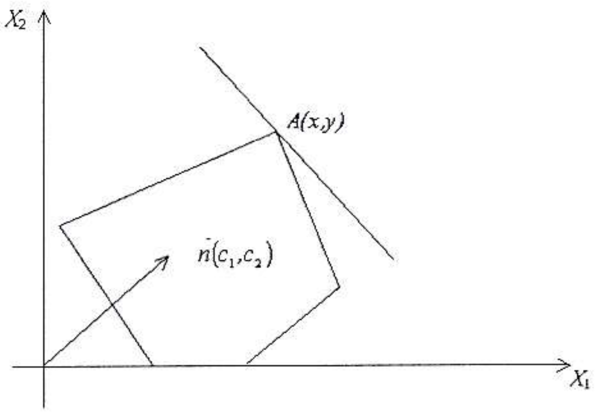


10.6-расм

3) $z=0$ тўғри чизиқ нормаль бўйлаб ўзига нисбатан параллел ҳолда сурилади.

4) Параллел суриш жараёнида $z=0$ тўғри чизиқ ечимлар кўпбурчагига уринадиган биринчи кирувчи нуқтада масала минимал ечимга эга бўлади, охирги чиқувчи нуқтада максимал ечимга эга бўлади.

Масалан, қуйидаги 10.7-расмда z функция $A(x,y)$ нуқтада максимал қийматга эришади.



10.7-расм

Масала. Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини график усулда ечинг:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 & L_1 \\ x_1 + x_2 \le 3 & L_2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

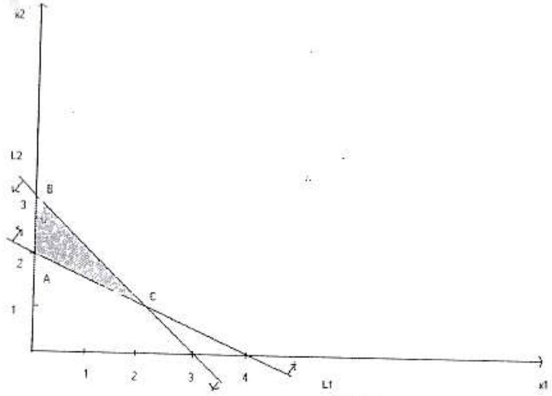
Ечиш. Берилган $(L_1),(L_2)$ тенгсизликларга мос тенгламаларни ёзамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 & (L_1) \\ x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

Берилган тенгламаларга мос тўғри чизиқларни ва тенгсизликларга мос ярим текисликларни X_1OX_2 координаталар текислигида ифодалаб, ярим текисликлар кесишмасини топамиз (10.8-расм).

Бу ерда AC тўғри чизиқ билан чегараланган юқори ярим текислик L_1 тенгсизликни, BC тўғри чизиқ билан чегараланган қуйи ярим текислик эса L_2 тенгсизликни ифодалайди. Бўялган соҳадаги нуқталарнинг координаталари берилган масаладаги барча тенгсизликларни қаноатлантиради. z мақсад функцияси максимал қийматга ABC учбурчакнинг чегаравий нуқталарида эришганлиги сабабли, оптимал ечимни топиш учун A, B, C нуқталарнинг координаталарини топиб, z функциясига қўямиз

ва уларнинг ичидан z функцияга энг катта қиймат берувчи нуқтани танлаб оламиз.



10.8-расм

C нуқта (L_1) ва (L_2) тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлганлиги учун ушбу тенгламаларни биргаликда ечамиз.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Тенгламалар системасидан $x_1 = 2,\ x_2 = 1$ эканлиги келиб чиқади. У ҳолда A, B, C нуқталарнинг координаталари қуйидагича бўлади: $A(0,2),\ B(0,3),\ C(2,1)$. Ушбу нуқталарнинг координаталарини мақсад функциясига қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

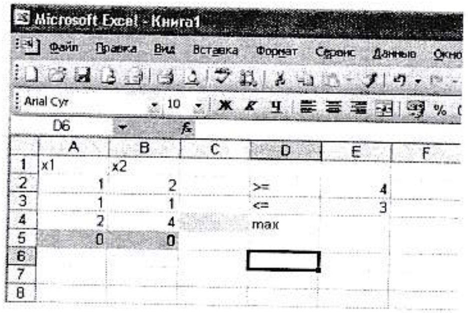
$$z_A = 2\cdot 0 + 4\cdot 2 = 8$$

$$z_B = 2\cdot 0 + 4\cdot 3 = 12$$

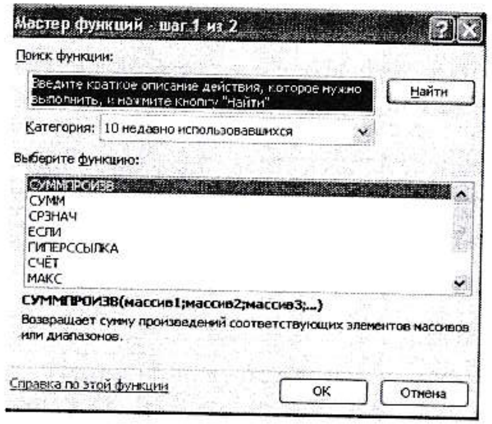
$$z_C = 2\cdot 2 + 4\cdot 1 = 8$$

Юқоридагилардан кўриниб турибдики z функция максимал қийматга B нуқтада эришади: $z_{max} = 12,\ x_1^* = 0,\ x_2^* = 3$.

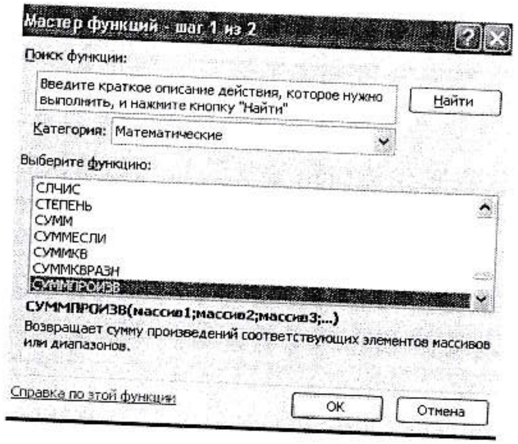
Чизиқли дастурлаш масаласини амалий дастурлар, масалан *ПЭР, Excel, Mathcad* дастурлари ёрдамида ҳам ечиш мумкин. Юқоридаги масалани *Excel* электрон жадвали ёрдамида ечамиз. Бунинг учун электрон жадвалда масала тенгсизликларидаги коэффициентлар ва озод ҳадларни иккинчи ва учинчи сатрларга, z функция коэффициентларини тўртинчи сатрга, x_1 ва x_2 ўзгарувчиларнинг бошланғич қийматларини 0 га тенглаб бешинчи қаторга ёзамиз. Натижада жадвал қуйидаги кўринишга келади:



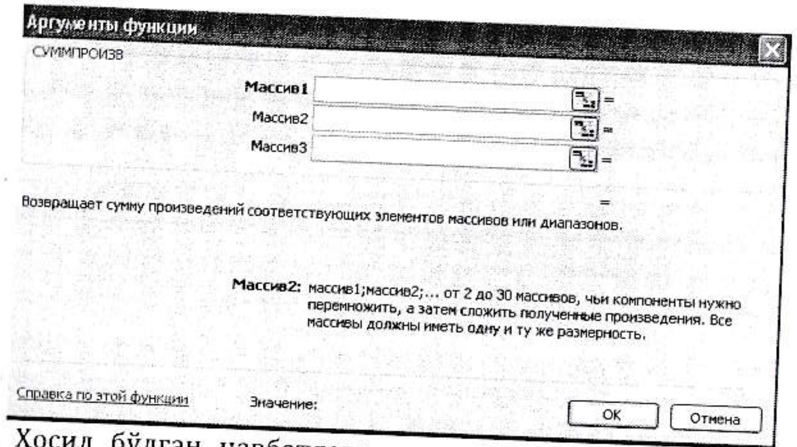
Курсорни C2 ячейкага ўрнатиб f_x тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:



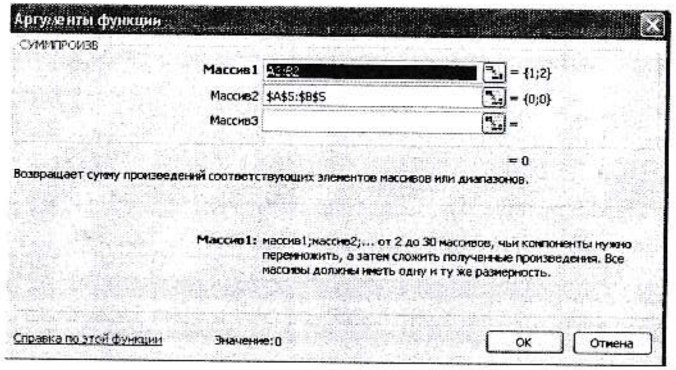
Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Категория» бўлимида «Математическое» пунктини танлаймиз, сўнг «Выберите функцию» бўлимида «Суммпроизв» функциясини танлаймиз.



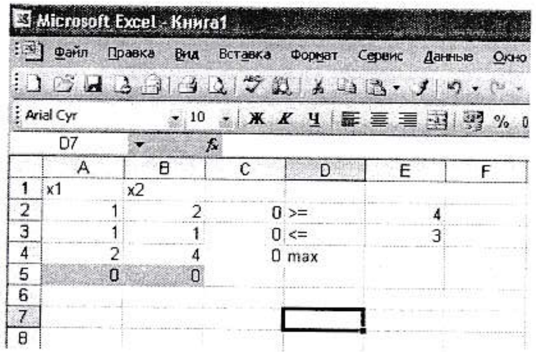
Сўнгра «ОК» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:



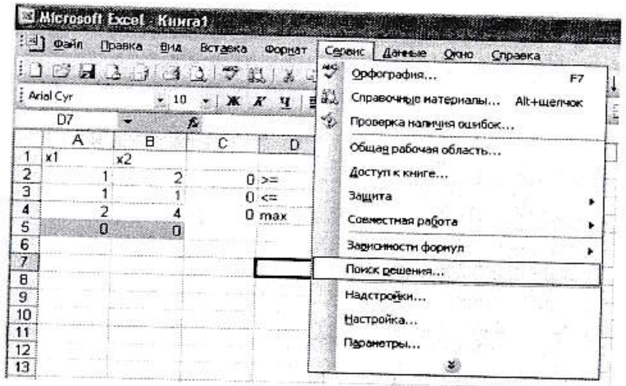
Ҳосил бўлган навбатдаги мулоқот ойнасида «Массив 1» дарчасидаги тугмачани босиб, A2:B2 диапазонидаги маълумотларни, «Массив 2» дарчасидаги тугмачани босиб, A5:B5 диапазонидаги маълумотларни киритамиз, «Массив 2» дарчасидаги диапазонни фиксирлаш учун F4 тугмасини босамиз:



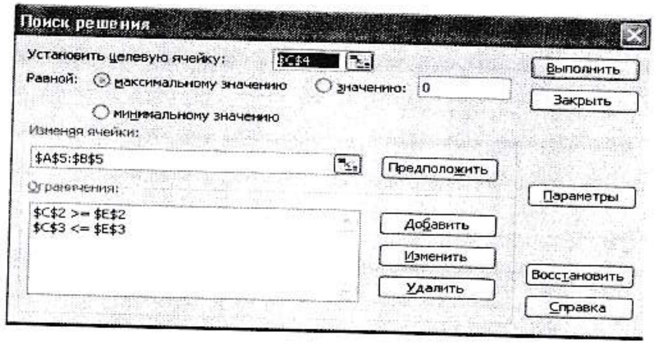
Сўнгра «ОК» тугмасини босамиз ва C2 катакда ҳосил бўлган маълумотни C3:C4 диапазонига нусха қиламиз. Натижада жадвал қуйидаги кўринишга келади:



Курсорни мақсад функцияси коэффициентлари жойлашган C4 катакка ўрнатиб, «Сервис- Поиск решения» буйруғини берамиз.

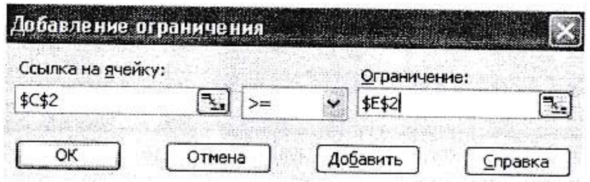


Натижада қуйидаги «Поиск решение» мулоқот ойнаси ҳосил бўлади.

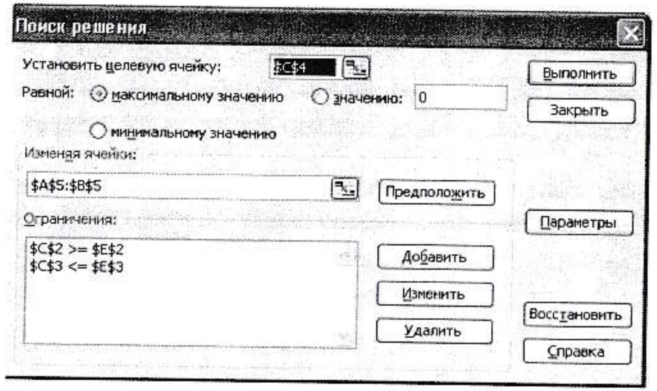


Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Установить целевую ячейку» дарчасига C4 катагини, «Изменяя ячейки» дарчасига A5:B5 диапазонини киритамиз. «Ограничения» дарчасига ўтиб «Добавить» тугмасини босамиз ва қуйидаги ойнани ҳосил қиламиз:

Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Ссылка на ячейку» дарчасига C2 ни киритамиз, тенгсизликни аниқлаймиз, «Ограничения» дарчасига E2 ни киритиб, «Добавить» тугмасини босамиз.



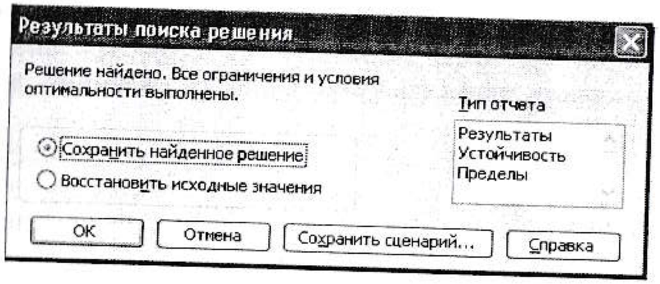
C5 : E5 диапазондаги муносабатни ҳам шу тариқа киритиб, «OK» тугмасини босамиз. Натижада «Поиск решения» мулоқот ойнасига қайтамиз:



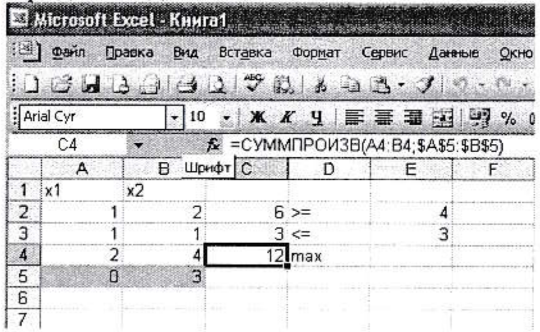
«Параметры» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:

Ойнадаги «Неотрицательное значение» параметрини белгилаймиз.

«OK» тугмасини босиб, «Поиск решение» мулоқот ойнасига қайтамиз ва «Выполнить» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги ойнага ўтамиз:

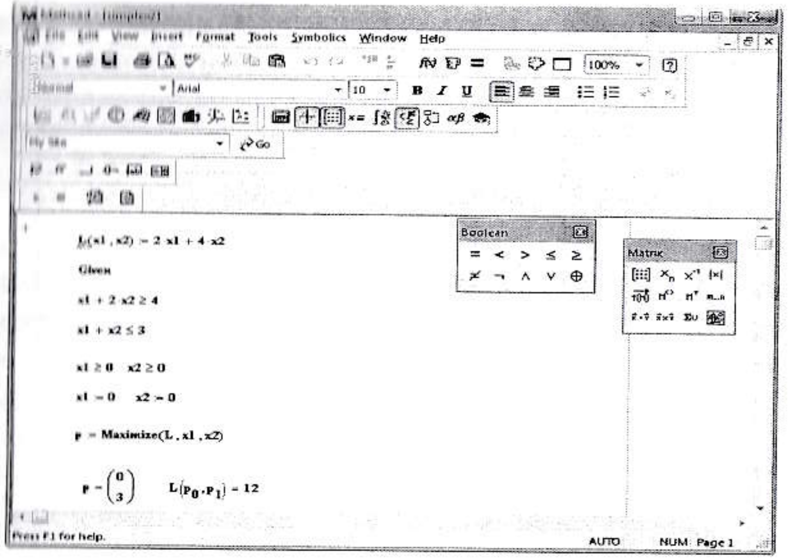


«ОК» тугмасини босамиз. Натижада ечим қуйидаги кўринишда ифодаланади:



Ушбу расмдан кўриниб турибдики, барча чекланишлар бажарилади ва ечим қуйидаги кўринишда бўлади: $x_1=0,\ x_2=3,\ z_{\max}=12$.

MathCadда чизиқли дастурлаш масаласини ечишда maxsimize ва minimize функцияларидан фойдаланилади. Бу функциялар умумий кўринишда қуйидагича ёзилади: Maxsimize(<ўзгарувчилар рўйхати>) Miniimize(<ўзгарувчилар рўйхати>). MathCadда чизиқли дастурлаш масаласини ечиш қуйидаги амаллар кетма-кетлигидан иборат бўлади: MathCad дастури ишга туширилади. Биринчи қаторга мақсад функцияси қуйидагича ёзилади: L(x1,x2):=2*x1+4*x2. Навбатдаги қаторга "Given" сўзи ёзилгач, кейинги қатордан қуйидаги тенгсизликлар системаси ёзилади: x1+2*x2≥4 x1+x2≤3 x1≥0 x2≥0 x3≥0. Навбатдаги қаторда ўзгарувчиларнинг бошланғич қийматлари ёзилади: x1:=0 x2:=3 Сўнг қуйидаги оператор киритилади: p:=Maxsimize(L,x1,x2). Оптимал ечимни берувчи ўзгарувчиларнинг қийматлари p= оператори ёрдамида, мақсад функциясининг оптимал қиймати еса L(p0,p1)= оператори ёрдамида ҳосил қилинади. MathCadда масаланинг дастури қуйидагича бўлади:



Натижа қуйидагича бўлади:
$x_1=0,\ x_2=3,\ z_{\max}=12$.

10.3. Симплекс усули

Маълумки, чизиқли дастурлаш масаласи умумий ҳолда симплекс усулда ечилади. Чизиқли дастурлаш масаласини симплекс усулда ечиш икки босқичдан иборат бўлиб, биринчи босқичда масаланинг таянч ечими, иккинчи босқичда эса оптимал ечим топилади.

Таянч ечимни топиш қоидаси қуйидагича:

1) (10.1.1)-(10.1.3) масалани қуйидаги

$$z=c_1x_1+c_2x_2\ldots+c_nx_n\rightarrow max(min)$$

$$\begin{cases} y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2\ldots-a_{1n}x_n+a_1\geq 0\\ y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2\ldots-a_{2n}x_n+a_2\geq 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2\ldots-a_{mn}x_n+a_m\geq 0\end{cases}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ldots,x_n\geq 0$$

кўринишга келтирамиз.

2) Юқоридаги муносабатлардан қуйидаги симплекс жадвалини тузамиз:

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	Озод сонлар
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
$z =$	c_1	c_2	...	c_n	

3) Озод сонлар устунидаги манфий сонларни қараймиз. Агар ушбу сонларнинг ҳаммаси мусбат бўлса, у ҳолда масаланинг таянч ечими топилган ҳисобланади. Агар озод сонлар орасида бир нечта манфий сонлар мавжуд бўлса, улардан бирини танлаймиз. Фараз қилайлик l- сатрдаги $a_l < 0$ озод сонни танлаб олайлик.

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_k$	$-x_{k+1}$	...	$-x_n$	Озод сонлар
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	a_{1k+1}	...	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	a_{2k+1}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_l =$	a_{l1}	a_{l2}	...	a_{lk}	a_{lk+1}	...	a_{ln}	a_l
$y_{l+1} =$	a_{l+11}	a_{l+12}	...	a_{l+1k}	a_{l+1k+1}	...	a_{l+1n}	a_{l+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_j =$	a_{jk}	a_{j2}	....	a_{jk}	a_{jk+1}	...	a_{jn}	a_j
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_{mk}	a_{m2}	....	a_{mk}	a_{mk+1}	...	a_{mn}	a_m
$z =$	c_1	c_2	...	c_k	c_{k+1}	...	c_n	0

4) l- сатрдаги манфий сонларни қараймиз. Агар ушбу сатрда манфий сонлар бўлмаса, масала ечимга эга бўлмайди, агар манфий сонлар бир нечта бўлса, улардан бирини танлаймиз. Масалан, k- устундаги $a_{lk} < 0$ сонни танлаб олайлик. k- устун ҳал қилувчи устун дейилади.

5) Озод сонлар ва k-устундаги мос коэффициентлар жуфтликларини қараймиз. Агар уларнинг ишоралари бир хил бўлса, озод сонларни мос коэффициентларга бўламиз.

6) Ҳосил бўлган нисбатларнинг энг кичигини танлаб оламиз: $\theta = min\left(\frac{a_i}{a_{ik}}\right)_{i=\overline{1,p}}$. Бу ерда p- танлаб олинган жуфтликлар сони. θга мос келувчи k-устундаги элемент бош элемент дейилади. Агар бош элемент j- сатрга мос келса a_{jk} - бош элемент бўлади, j- сатр ҳал қилувчи сатр дейилади. Жадвал қуйидаги кўринишга келади:

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_k$	$-x_{k+1}$	...	$-x_n$	Озод сонлар
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	a_{1k+1}	...	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	a_{2k+1}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_l =$	a_{l1}	a_{l2}	...	a_{lk}	a_{lk+1}	...	a_{ln}	a_l
$y_{l+1} =$	a_{l+11}	a_{l+12}	...	a_{l+1k}	a_{l+1k+1}	...	a_{l+1n}	a_{l+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_j =$	a_{jk}	a_{j2}	....	a_{jk}	a_{jk+1}	...	a_{jn}	a_j
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_{mk}	a_{m2}	....	a_{mk}	a_{mk+1}	...	a_{mn}	a_m
$z =$	c_1	c_2	...	c_k	c_{k+1}	...	c_n	0

7) a_{jk} элементга нисбатан симплекс алмаштиришларини бажариб навбатдаги жадвални тўлдирамиз:

7.1) Ҳал қилувчи сатр ва устундаги ўзгарувчилар ўрни алмаштирилади;

7.2) Бош элемент ўрнига унга тескари сонни ёзамиз;

7.3) Ҳал қилувчи сатр элементларини бош элементга бўлиб, мос катакларга ёзамиз;

7.4) Ҳал қилувчи устун элементларини бош элементга бўлиб, ишорасини ўзгартирамиз ва мос катакларга ёзамиз;

7.5) Қолган катаклар тўртбурчак қоидаси бўйича тўлдирилади.

Масалан, (2.2) катакни тўлдириш учун қуйидаги ҳисоблаш бажарилади:

$$a_{22}^{1}=\frac{a_{jk}\cdot a_{22}-a_{2k}\cdot a_{j2}}{a_{jk}}.$$

Натижада жадвал қуйидаги кўринишга келади:

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-y_i$	$-x_{k+1}$	…	$-x_n$	Озод сонлар
$y_1=$	a'_{11}	a'_{12}	…	$-\frac{a_{1k}}{a_{jk}}$	a'_{1k+1}	…	a'_{1n}	a'_1
$y_2=$	a'_{21}	a'_{22}	…	$-\frac{a_{2k}}{a_{jk}}$	a'_{2k+1}	…	a'_{2n}	a'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$y_l=$	a'_{l1}	a'_{l2}	…	$-\frac{a_{lk}}{a_{jk}}$	a'_{lk+1}	…	a'_{ln}	a'_l
$y_{l+1}=$	a'_{l+11}	a'_{l+12}	…	$-\frac{a_{l+1k}}{a_{jk}}$	a'_{l+1k+1}	…	a'_{l+1n}	a'_{l+1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$x_k=$	$\frac{a_{i1}}{a_{jk}}$	$\frac{a_{i2}}{a_{jk}}$	…	$\frac{1}{a_{jk}}$	$\frac{a_{ik+1}}{a_{jk}}$	…	$\frac{a_{in}}{a_{jk}}$	$\frac{a_i}{a_{jk}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$y_m=$	a'_{mk}	a'_{m2}	…	$-\frac{a_{mk}}{a_{jk}}$	a'_{mk+1}	…	a'_{mn}	a'_m
$z=$	c'_1	c'_2	…	$-\frac{c_k}{a_{jk}}$	c'_{k+1}	…	c'_n	z'_{max}

8) Сўнгра 3)-6) пунктлар барча озод сонлар мусбат бўлгунча ёки масаланинг ечими мавжуд эмаслиги аниқлангунга қадар такрорланади.

Таянч ечим топилгач оптимал ечимни топишга ўтиш мумкин. Бунинг учун қуйидаги амаллар бажарилади:

1) z сатрдаги манфий сонлар қаралади. Агар манфий сонлар бўлмаса, оптимал ечим топилган ҳисобланади ва 1 - устундаги x ўзгарувчилар ва z уларга мос озод сонларга, 1-сатрдаги x ўзгарувчилар эса нолга тенглаштирилади. Агар z сатрда бир нечта манфий сонлар бўлса, улардан энг кичиги танланади. Масалан энг кичик манфий коэффициент c'_2 бўлсин.

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-y_i$	$-x_{k+1}$	…	$-x_n$	Озод сонлар
$y_1=$	a'_{11}	a'_{12}	…	a'_{1k}	a'_{1k+1}	…	a'_{1n}	a'_1
$y_2=$	a'_{21}	a'_{22}	…	a'_{2k}	a'_{2k+1}	…	a'_{2n}	a'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$y_l=$	a'_{l1}	a'_{l2}	…	a'_{lk}	a'_{lk+1}	…	a'_{ln}	a'_l
$y_{l+1}=$	a'_{l+11}	a'_{l+12}	…	a'_{l+1k}	a'_{l+1k+1}	…	a'_{l+1n}	a'_{l+1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$x_k=$	a'_{i1}	a'_{i2}	…	a'_{ik}	a'_{ik+1}	…	a'_{in}	a'_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$y_m=$	a'_{mk}	a'_{m2}	…	a'_{mk}	a'_{mk+1}	…	a'_{mn}	a'_m
$z=$	c'_1	c'_2	…	c'_k	c'_{k+1}	…	c'_n	z'_{max}

2) 2- устундаги мусбат сонларни танлаймиз. Агар ушбу устунда мусбат сонлар бўлмаса, масаланинг оптимал ечими чексизликка интилади. Агар устунда мусбат сонлар бўлса, уларга мос озод сонларни бўлиб, энг кичик нисбатни танлаб оламиз: $\theta=min\left(\frac{a_2}{a_{j2}}\right)_{j=\overline{1,k}}$. Бу ерда k- танлаб олинган жуфтликлар сони.

3) Энг кичик нисбатга мос элемент бош элемент ҳисобланади ва унга нисбатан симплекс алмаштиришлари бажарилади.

4) 1)-3) пунктлар z қатордаги барча сонлар мусбат бўлгунча ёки масаланинг ечими юқоридан чегараламаганлиги аниқлангунча давом эттирилади.

Агар мақсад функциясида $z=c_1x_1+c_2x_2\ldots+c_nx_n\rightarrow min$ бўлса, у ҳолда масала коэффициентлар ишоралари ўзгартирилиб, максимумга келтирилади:

$$z=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n\rightarrow max$$

ва масала юқоридаги усул билан ечилади. Натижада $z_{min}=-z_{max}$ бўлади.

Масала:

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини симплекс усулида ечинг.

$$z = 17x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le -1 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Ечиш:

1) Берилган масалани қуйидаги

$$z = 17x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 - x_n + 2 \ge 0 \\ y_2 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 \ge 0 \\ y_3 = -x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 \ge 0 \\ y_4 = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots x_n \ge 0$$

кўринишга келтирамиз.

Юқоридаги берилган масала учун симплекс жадвал тузамиз.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	1	2
$y_2 =$	4	2	1	3
$y_3 =$	1	-1	2	-1
$y_4 =$	-3	2	-2	5
$z =$	-17	-1	-3	0

Озод сонлар устунида битта манфий сон –1 бор. –1 жойлашган қатордаги манфий сонларни қараймиз. Ушбу сатрда битта манфий сон –1 бор. –1 сони жойлашган 3-устунни ҳал қилувчи устун сифатида қабул қиламиз. Бир хил ишорали мос озод сон ва 3-устун элементларидан симплекс нисбатлар тузамиз: $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-1}{-1}, \frac{5}{2}$. Бу нисбатларнинг энг кичиги 1 га тенг бўлиб, у 3-устундаги –1 сонига мос келади. –1 сонини бош элемент сифатида қабул қиламиз. Ҳал қилувчи сатр эса 4-сатр бўлади. У ҳолда жадвал қуйидаги кўринишга келади:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	1	2
$y_2 =$	4	2	1	3
$y_3 =$	1	-1	2	-1
$y_4 =$	-3	2	-2	5
$z =$	-17	-1	-3	0

-1 га нисбатан симплекс алмаштиришларни бажариб, навбатдаги жадвалга ўтамиз.

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	2	1	3	1
$y_2 =$	6	2	5	1
$x_2 =$	-1	-1	-2	1
$y_4 =$	-1	2	2	3
$z =$	-18	-1	-1	1

2-жадвалда барча озод сонлар мусбат. Демак таянч ечим топилган. Энди таянч ечимлар ичидан оптимал ечимни қидирамиз. Оптимал ечим мавжуд бўлиши учун z қатордаги барча коэффициентлар мусбат бўлиши керак. Аммо z сатрда учта манфий сонлар –18 ,-1 ва –1 бор. Улардан кичиги –18 ни танлаймиз. Ушбу устун ҳал қилувчи устун бўлади. Озод сонлар ва 2-устун коэффициентлари бўйича симплекс нисбатларни қараймиз. Бу нисбатлар $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ лардан иборат. Энг кичик нисбатга мос элемент 6 ни бош элемент сифатида танлаб оламиз.

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	2	1	3	1
$y_2 =$	6	2	5	1
$x_2 =$	-1	-1	-2	1
$y_4 =$	-1	2	2	3
$z =$	-18	-1	-1	1

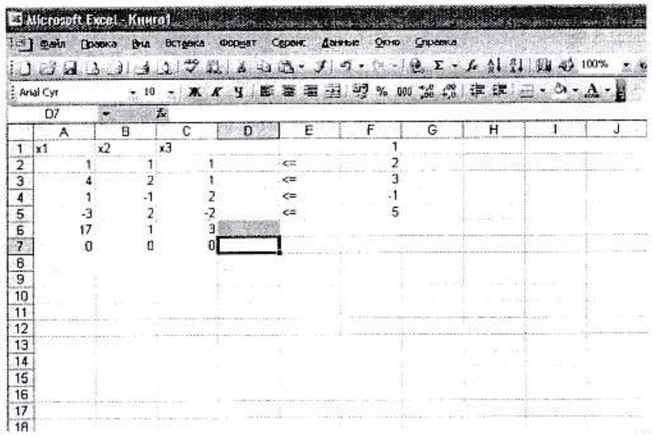
6 га нисбатан симплекс алмаштиришларни бажариб, навбатдаги жадвалга ўтамиз.

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1./3	1/3	4/3	2/3
$x_1 =$	1/6	1/3	5/6	1/6
$x_2 =$	1/6	-2/3	-7/6	7/6
$y_4 =$	1/6	7/3	17/6	19/6
$z =$	3	5	14	4

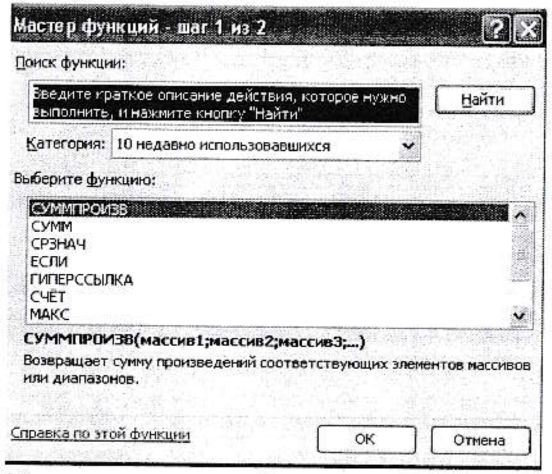
z қатордаги барча коэффициентлар мусбат бўлди. Демак оптимал ечим топилди. 1-устундаги x ларни озод сонларга тенглаймиз, 1–сатрдаги x ларни 0 га тенглаймиз, z нинг максимал қиймати эса z қатордаги охирги сонга тенг бўлади: $x_1 = 1/6,\ x_2 = 7/6,\ x_3 = 0,\ z_{max} = 4$.

Юқоридаги масалани *Excel* дастури ёрдамида ечамиз.

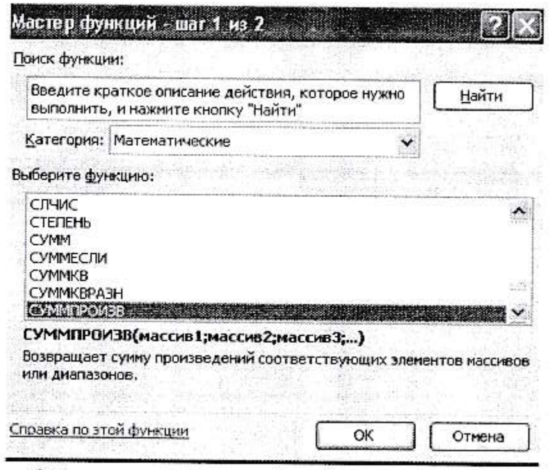
Берилган масаланинг коэффициентларини жадвалга киритиб чиқамиз, x_1, x_2, x_3 ўзгарувчиларнинг бошланғич қийматларини 0 га тенглаб оламиз: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Ушбу қийматлар қуйидаги жадвалнинг 7-қаторида берилган.



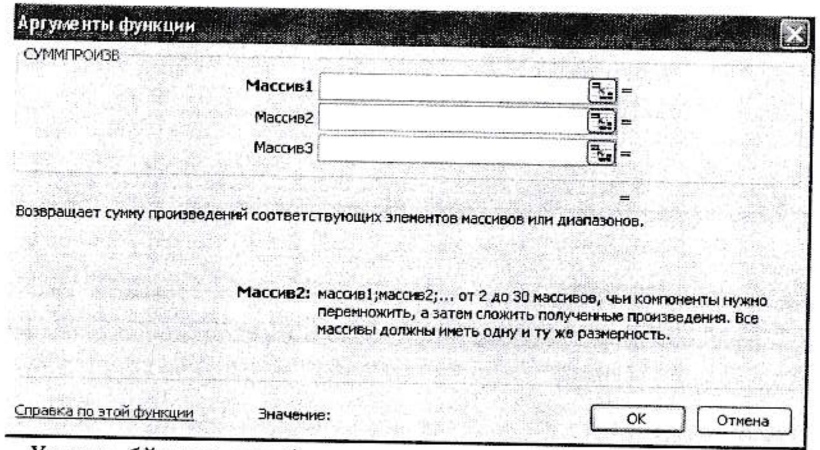
Масалани ечиш учун курсорни D2 катакка қўйиб, f_x тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:



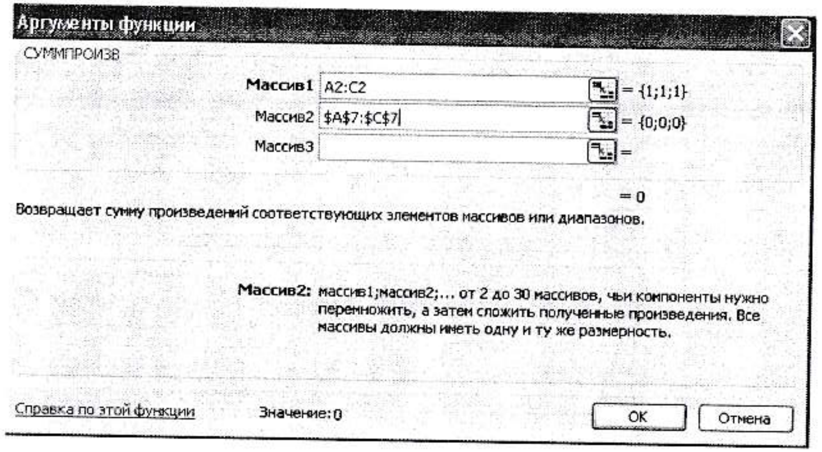
Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Категория» бўлимида «Математическое» пунктини танлаб, сўнг «Выберите функцию» бўлимида «Суммпроизв» функциясини танлаймиз.



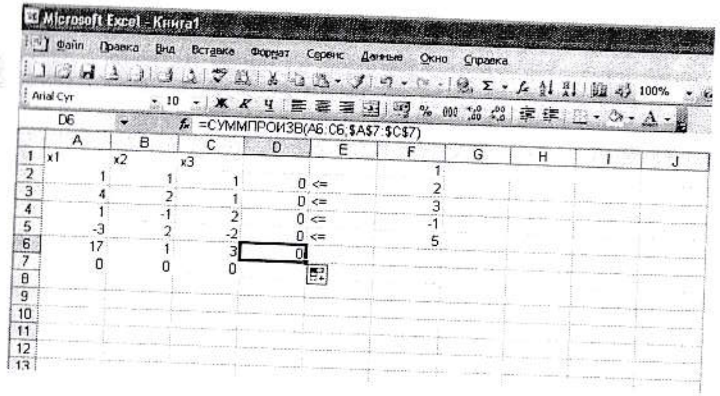
Сўнгра «ОК» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:



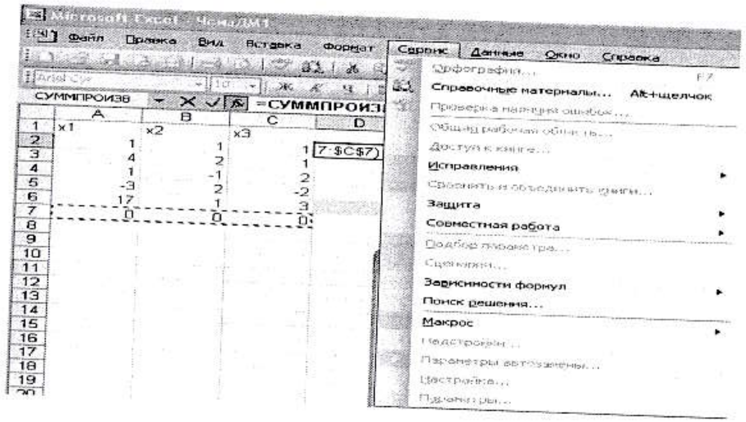
Ҳосил бўлган навбатдаги мулоқот ойнасида «Массив 1» дарчасидаги тугмачани босиб, A2:C2 диапазонидаги маълумотларни, «Массив 2» дарчасидаги тугмачани босиб, A7:C7 диапазонидаги маълумотларни киритамиз, «Массив 2» дарчасидаги диапазонни фиксирлаш учун F4тугмасини босамиз:



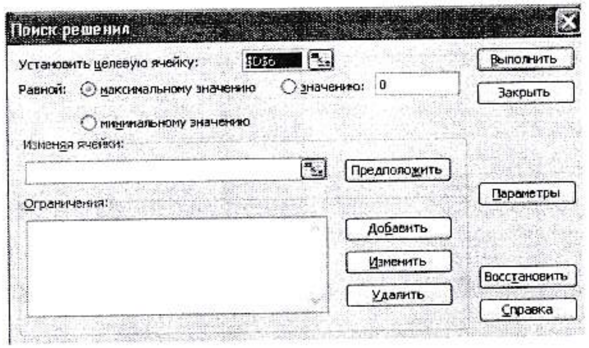
Сўнгра «ОК» тугмасини босамиз ва қуйидаги ойнада D2 катакда ҳосил бўлган маълумотни D3:D6диапазонига нусха қиламиз. Натижада жадвал қуйидаги кўринишга келади.



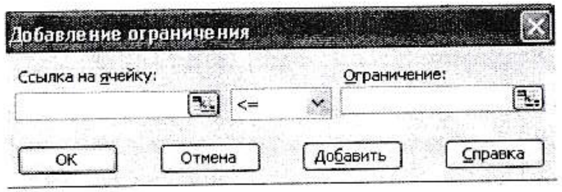
Курсорни D6 катакка ўрнатиб, «Сервис-Поиск решения» буйруғини берамиз.



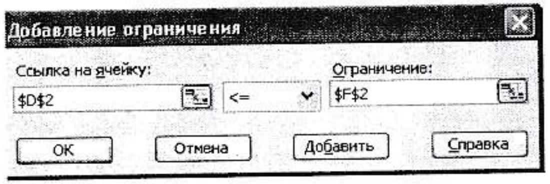
Натижада қуйидаги «Поиск решение» мулоқот ойнаси ҳосил бўлади.



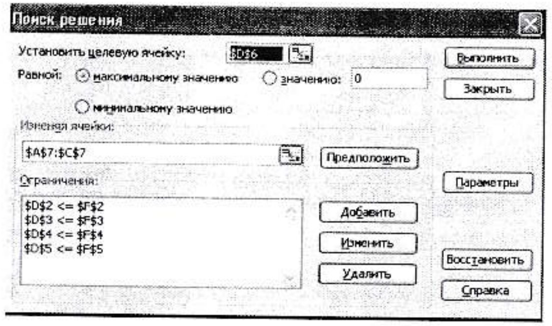
Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Установить целевую ячейку» дарчасига D6 катагини, «Изменяя ячейки» дарчасига A7:C7 диапазонини киритамиз. «Ограничения» дарчасига ўтиб «Добавить» тугмасини босамиз.



Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Ссылка на ячейку» дарчасига D2 ни киритамиз, тенгсизликни аниқлаймиз, «Ограничения» дарчасига F2 ни киритиб, «Добавить» тугмасини босамиз.

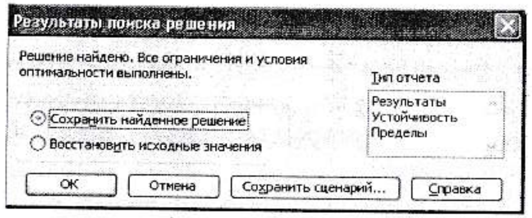


D2:F6 диапазондаги қолган муносабатларни ҳам шу тариқа киритиб чиқамиз. Охирги муносабатни киритгандан кейин «ОК» тугмасини босамиз. Натижада «Поиск решения» мулоқот ойнасига қайтамиз:

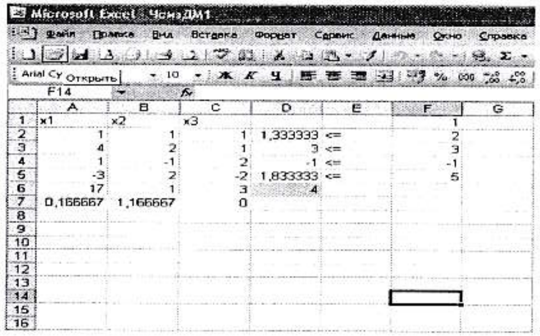


«Параметры» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:

Ойнадаги «Неотрицательное значение» параметрини белгилаймиз ва «ОК» тугмасини босиб, «Поиск решение» мулоқот ойнасига қайтамиз ва «Выполнить» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги ойнага ўтамиз:



«ОК» тугмасини босамиз. Натижада ечим қуйидаги кўринишда ифодаланади:



	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2	x3			1	
2	1	1	1	1,333333	<=	2	
3	4	2	1	3	<=	3	
4	1	-1	2	-1	<=	-1	
5	-3	2	-2	1,833333	<=	5	
6	17	1	3	4			
7	0,166667	1,166667	0				
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							

Расмдан кўриниб турибдики, барча чекланишлар бажарилади ва ечим қуйидаги кўринишда бўлади: $x_1 = 0{,}166667,\ \ x_2 = 1{,}16667,\ \ x_3 = 0,\ \ z_{max} = 4$.

Юқоридаги чизиқли дастурлаш масаласини MathCad дастурида ечиш қуйидаги амаллар кетма-кетлигидан иборат:

Дастлаб мақсад фунцияси қуйидагича ёзилади:

L(x1,x2,x3):=17*x1+x2+3*x3

Given калит сўзидан кейин тенгсизликлар системаси ёзилади:

x1+x2+x3≤2

4*x1+2*x2+x3≤3

x1-x2+2*x3≤-1

-3*x1+2*x2-2*x3≤5

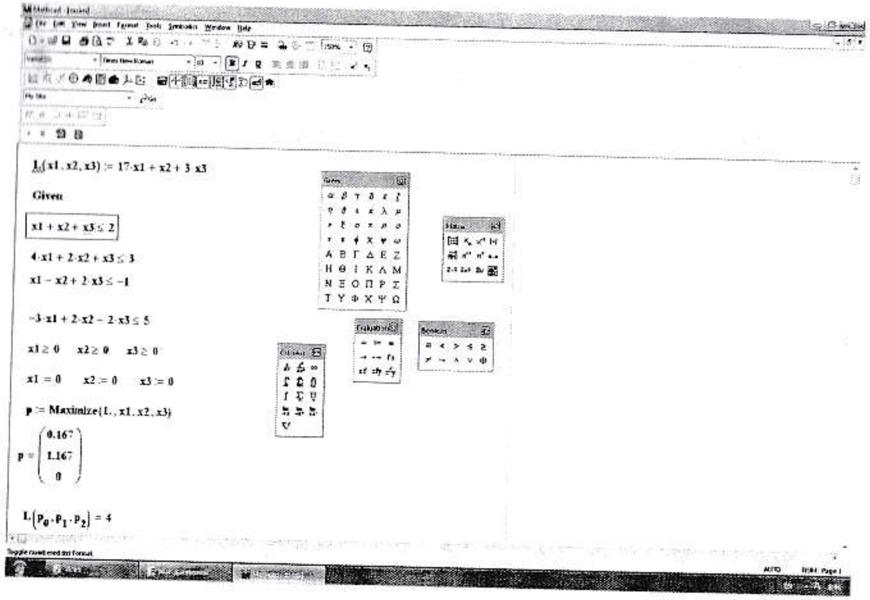
x1≥0 x2≥0 x3≥0

Ўзгарувчиларга бошланғич қийматлар берилади:

x1:=0 x2:=0 x3:=0

p:=Maxsimize(L,x1,x2,x3) оператори ёзилади.

Оптимал ечимни берувчи ўзгарувчиларнинг қийматлари p= оператори ёрдамида, мақсад функциясининг оптимал қиймати эса L(p0,p1,p2)= оператори ёрдамида ҳосил қилинади. MathCad дастурида масаланинг дастури қуйидагича бўлади:



10.4. Чизиқли дастурлашда иккиланганлик масаласи

Қуйидаги масалаларнинг математик моделларини тузайлик:

1-масала. Корхона n хил маҳсулот ишлаб чиқариш учун m хил хом ашёдан фойдаланади. Хом ашё захиралари $a_1, a_2, \ldots, a_n$, бирлик маҳсулотлардан олинадиган фойда $c_2, c_2, \ldots c_n$, бирлик маҳсулотларни ишлаб чиқазиш учун зарур бўлган хом ашё миқдорлари $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nm}$ берилган. Маҳсулот ишлаб чиқазишнинг шундай режасини тузиш керакки, бунда хом ашё сарфи унинг заҳираларидан ошиб кетмаслиги, маҳсулот ишлаб чиқазишдан максимал фойда олиш керак. Ишлаб чиқазилаётган маҳсулотлар ҳажми номаълум бўлиб, уларни $x_1, x_2, \ldots x_n$ орқали белгилаймиз. 1-турдаги бирлик маҳсулотни ишлаб чиқазиш учун зарур бўлган 1-тур хом ашё миқдори a_{11} ни 1-тур маҳсулот миқдори x_1 га кўпайтириб, 1-тур маҳсулот учун сарфланадиган 1-тур хом ашёнинг умумий миқдори - $a_{11}x_1$ ни ҳосил қиламиз. Худди шу каби иккинчи, учинчи ва ҳоказо n-турдаги маҳсулотларни ишлаб чиқазиш учун зарур бўлган 1-

турдаги хом ашё сарфи мос равишда $a_{12}x_2$, $a_{13}x_3$, $a_{1n}x_n$ га тенг бўлади. Ушбу ифодаларни қўшиб, 1-тур хом ашёнинг умумий сарфини ҳосил қиламиз:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

Шартга кўра хом ашё сарфи унинг захирасидан ошиб кетмаслиги керак:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1$$

Худди шу каби қолган хом ашёлар учун ҳам юқоридаги муносабатларни оламиз:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m$$

1-тур маҳсулотдан олинадиган фойда c_1x_1, 2-тур маҳсулотдан олинадиган фойда c_2x_2, ..., n–тур маҳсулотдан олинадиган фойда эса c_nx_n га тенг бўлади. Маҳсулотлардан олинадиган умумий фойда эса қуйидаги $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ кўринишга келиб, максимал фойда олиш учун ушбу функцияни максимумга текширамиз:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

Маҳсулот ишлаб чиқазиш ҳажми манфий бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун қуйидаги муносабатларга эга бўламиз:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots, x_n \ge 0$$

Ҳосил қилинган муносабатларнинг барчасини бирлаштириб, берилган масаланинг қуйидаги математик моделини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0 \end{aligned} \qquad (10.4.1)$$

2-масала. Бирор корхона хўжаликдан бир неча хил хом ашёни сотиб олмоқчи. Хом ашёларга $u_1, u_2, \ldots, u_m$ нархларни шундай қуйиш керакки:

1) сотиб олувчи корхона хом ашёлар нархини минималлаштиришга ҳаракат қилади;

2) хўжалик учун шунча миқдорда пул тўлаш керакки, бу пул хўжалик хом ашёни қайта ишлаб, тайёр маҳсулот ҳолига келтириб, ундан оладиган фойдасидан кам бўлмасин.

Хом ашё захираларини $a_1, a_2, \ldots, a_n$, i- турдаги бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун зарур бўлган j–турдаги хом ашё миқдорини $a_{ij}, i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,m$ билан белгилаймиз. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ орқали бирлик маҳсулотларнинг нархларини белгилаймиз. Хом ашёларнинг умумий нархи $w = a_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m$ бўлиб, уни минималлаштириш керак, яъни $w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \to min$. Биринчи турдаги бирлик маҳсулотни етиштириш учун зарур бўлган барча хом ашёларнинг умумий нархи $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m$ бўлиб, у маҳсулотнинг таннархидан кам бўлмаслиги керак, яъни $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1$. Қолган маҳсулотлар учун ҳам худди шундай муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n$$

Хом ашё нархлари манфий бўлиши мумкин эмас, яъни:

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ \ldots,\ u_m \ge 0$$

Юқоридаги барча муносабатларни бирлаштириб, берилган масаланинг қуйидаги математик моделини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \to min \\ & a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1 \\ & a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n \\ & u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ \ldots,\ u_m \ge 0 \end{aligned} \qquad (10.4.2)$$

(10.4.1) ва (10.4.2) масалалардан бири тўғри масала, икккинчиси эса унга иккиланган масала дейилади.

Агар тўғри масала берилган бўлса, унга иккиланган масалани қуйидаги тартибда ҳосил қилинади:

1) Иккиланган масаланинг мақсад функцияси коэффициентлари тўғри масала озод сонларидан иборат бўлади;

2) Тўғри масала мақсад функцияси максимумга интилса, иккиланган масала мақсад функцияси минимумга интилади;

3) Иккиланган масаладаги тенгсизликлар сони тўғри масаладаги ўзгарувчилар сонига тенг бўлади ва аксинча иккиланган масаладаги ўзгарувчилар сони тўғри масаладаги тенгсизликлар сонига тенг бўлади;

4) Иккиланган масала тенгсизликларидаги коэффициентлар матрицаси тўғри масала тенгсизликларидаги коэффициентлар матрицасидан транспонирлаш орқали ҳосил қилинади;

5) Тўғри масаладаги тенгсизликлар $\geq$ кўринишида бўлса, иккиланган масаладаги тенгсизликлар $\leq$ кўринишида бўлади;

6) Иккиланган масала озод сонлари тўғри масала мақсад функцияси коэффициентларидан ташкил топади;

Тўғри ва иккиланган масалани битта симплекс жадвал ёрдамида ечиш мумкин. Бунинг учун ҳар иккала масала ≥ 0 кўринишга келтирилади:

Тўғри масала:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$
$$y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0$$
$$y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + a_2 \geq 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + a_m \geq 0$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

Иккиланган масала:

$$w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \to min$$
$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - c_1 \geq 0$$
$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - c_2 \geq 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - c_n \geq 0$$
$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ \ldots,\ u_m \geq 0$$

Юқоридаги муносабатлардан фойдаланиб қуйидаги жадвални тузамиз:

Иккиланган		$v_1 =$	$v_2 =$	...	$v_n =$	$w =$

масала	Тўғри масала	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
u_1	$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
u_2	$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
u_m	$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
1	$z =$	c_1	c_2	...	c_n	0

Жадвал устида симплекс алмаштиришларни бажариб, масаланинг оптимал ечими топилади. Тўғри масалада 2- устундаги x ўзгарувчилар ва z уларга мос озод сонларга, 2- сатрдаги x ўзгарувчилар эса нолга тенглаштирилади. Иккиланган масалада 1- сатрдаги u ўзгарувчилар ва w уларга мос озод сонларга, 1- устундаги u ўзгарувчилар эса нолга тенглаштирилади.

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига иккиланган масала тузинг. Тўғри ва иккиланган масаланинг оптимал ечимини топинг.

$$z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 11 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Юқорида берилган умумий қоидалар бўйича иккиланган масалани тузамиз:

$$w = 5u_1 + 12u_2 + 8u_3 + 11u_4 \to min$$
$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 \geq 12 \\ u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 \geq 6 \\ -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 \geq -7 \end{cases}$$
$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0,\ u_4 \geq 0$$

Иккала масалани ҳам ≥ 0 кўринишга келтирамиз:

$$z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to max$$
$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 + 5 \ge 0 \\ y_2 = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 12 \ge 0 \\ y_3 = -x_1 + 3x_2 - x_3 + 8 \ge 0 \\ y_4 = -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 11 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

$$w = 5u_1 + 12u_2 + 8u_3 + 11u_4 \to min$$
$$\begin{cases} v_1 = u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 12 \ge 0 \\ v_2 = u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 - 6 \ge 0 \\ v_3 = -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 + 7 \ge 0 \end{cases}$$
$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0,\ u_4 \ge 0$$

Ҳосил қилинган муносабатлар асосида қуйидаги жадвални тузамиз:

Иккиланган масала	Тўғри масала	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
u_1	$y_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	2	4	-5	12
u_3	$y_3 =$	1	-3	1	8
u_4	$y_4 =$	2	8	-1	11
1	$z =$	-12	-6	7	0

Тўғри масалада барча озод сонлар мусбат бўлганлиги учун масаланинг таянч ечими мавжуд. Оптимал ечимни топиш учун z катордадаги энг кичик манфий сон -12 ни танлаймиз. -12 сони жойлашган устун ҳал қилувчи устун бўлади. Ҳал қилувчи устундаги барча коэффициентлар мусбат бўлиб, уларга мос озод сонларни бўлиб, симплекс нисбатларнинг энг кичигини ҳисоблаймиз $min\left\{\frac{5}{1},\frac{12}{2},\frac{8}{1},\frac{11}{2}\right\} = 5$. Минимал нисбатга мос келувчи коэффициент 1 ни бош элемент сифатида танлаб оламиз. Ҳал қилувчи сатр u_1 бўлади. Жадвални қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

10.1-жадвал

Иккиланган масала	Тўғри масала	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
→ u_1	$y_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	2	4	-5	12
u_3	$y_3 =$	1	-3	1	8
u_4	$y_4 =$	2	8	-1	11
1	$z =$	-12	-6	7	0

Симплекс алмаштиришларни бажариб, навбатдаги жадвалга ўтамиз:

10.2-жадвал

Иккиланган масала	Тўғри масала	$u_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
		$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
v_1	$x_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3 =$	-1	-4	2	3
u_4	$y_4 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	12	6	-5	60

10.2-жадвалда z қаторда -5 жойлашган устун ҳал қилувчи бўлиб, бош элемент эса $min\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{1}\right\} = 1$ минимал нисбатга мос коэффициент 1 бўлади.

Иккиланган масала	Тўғри масала	$u_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
		$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
v_1	$x_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3 =$	-1	-4	2	3
→ u_4	$y_4 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	12	6	-5	60

Симплекс алмаштиришларни бажариб, навбатдаги жадвалга ўтамиз:

10.3-жадвал

Иккиланган масала	Тўғри масала	$u_1 =$	$v_2 =$	$u_4 =$	$w =$
		$-y_1$	$-x_2$	$-y_4$	1
v_1	$x_1 =$	-1	7	1	6

u_2	$y_2 =$	-8	20	3	5
u_3	$y_3 =$	3	-16	-2	1
v_3	$x_3 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	2	36	5	65

Тўғри масалада 2-қатордаги x ўзгарувчиларни 0 га тенглаб, 2-устундаги x ўзгарувчиларни ва z функциясини озод сонларга тенглаймиз: $x_1 = 6,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ z_{max} = 65$. Иккиланган масалада 1-устундаги u ўзгарув-чиларни нолга тенглаймиз, 1-сатрдаги u ўзгарувчилар ва w функцияни охирги сатрдаги сонларга тенглаймиз:

$$u_1 = 2,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 5,\ w_{min} = 65.$$

10.5. Транспорт масаласи ва уни потенциаллар усулида ечиш

Юк захиралари $a_1, a_2, \ldots, a_m$ бўлган m та жўнатиш пункти, юкка бўлган талаб $b_1, b_2, \ldots, b_n$ бўлган n та қабул пунктлари берилган бўлиб, жўнатиш пунктларидан қабул пунктларига бирлик юкни ташиш ҳаражатлари $c_{ij},\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n$ бўлсин. Бу ерда i - жўнатиш пункти номери, j - қабул пункти номерини билдиради. Умумий юк ташиш харажатлари

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

формула орқали берилади. Бу ерда x_{ij} - i номерли жўнатиш пунктидан j номерли қабул пунктига ташиладиган юк ҳажми. Юк ташиш ҳаражатларини иложи борича камайтириш учун z функцияни минимумга интилтирамиз:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \qquad (10.5.1)$$

Юқоридаги масала жадвал кўринишида қуйидагича ифодаланади:

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	Юк захиралари
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	…	b_n	

Юк ташишнинг шундай ташкил этиш керакки, жўнатиш пунктларидаги барча юк олиб чиқиб кетилиши ва қабул пунктларидаги юкка бўлган талаб тўлиқ қондирилиши керак:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases} \qquad (10.5.2)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} \qquad (10.5.3)$$

Агар

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (10.5.4)$$

муносабат бажарилса, транспорт масаласи ёпиқ масала дейилади ва масалани ечишга киришиш мумкин. Агар (10.5.4) шарт бажарилмаса, масала очиқ дейилади. Очиқ масалани ечиш учун у ёпиқ масалаги келтирилади. Масалан, $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ бўлсин. Ушбу масалани ёпиқ масалаги келтириш учун юкка бўлган талаби $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ бўлган қўшимча қабул пункти тузилади. Ушбу пункт учун бирлик юкни ташиш харажатларини 0 га тенг деб оламиз: $c_{1,n+1} = c_{2,n+1} = \ldots = c_{m,n+1} = 0$. Натижада қуйидаги ёпиқ масалани ҳосил қиламиз.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	$n+1$	Юк захиралари
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	0 x_{1n+1}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	0 x_{2n+1}	a_2
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	0 x_{mn+1}	a_m
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	…	b_n	b_{n+1}	

Агар $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ бўлса, юк захиралари $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ бўлган қўшимча жўнатиш пункти тузилади ва юқоридаги каби ёпиқ масалаги келтирилади.

Транспорт масаласини ечиш икки босқичда олиб борилади:

1) Биринчи босқичда (10.5.2)- (10.5.4) шартларни қаноатлантирувчи бошланғич $x_{ij},\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$ ечим топилади. Бошланғич режани топишнинг бир неча усуллари бўлиб, уларга шимоли-ғарб усули, минимал элемент усули ва бошқалар киради. Шимоли- ғарб усулида (1,1) катак танлаб олиниб, $x_{11} = min(a_1, b_1)$ деб олинади. Агар $min(a_1, b_1) = a_1$ бўлса, бу 1-жўнатиш пунктидаги барча юк 1 –қабул пунктига юборилишини, 1- жўнатиш пунктидан қолган қабул пунктларига юк юборилмаслигини билдиради. Шунинг учун a_1 жойлашган сатрдаги бошқа катакларга минус қўйилади. 1-қабул пунктидаги юкка бўлган талаб $b_1^1 = b_1 - a_1$ бўлиб қолади.

Агар $min(a_1, b_1) = b_1$ бўлса, 1- қабул пунктидаги юкка бўлган талаб тўлиқ қондирилганлигини, 1-жўнатиш пунктида эса

$a_1^1 = a_1 - b_1$ миқдор юк қолганлигини билдиради. 1- қабул пунктига бошқа жўнатиш пунктларидан юк келтирилмайди.

10.4-жадвал

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	Юк захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} –	…	c_{1n} –	a_1	0
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	
…	…	…	…	…	…	

10.5-жадвал

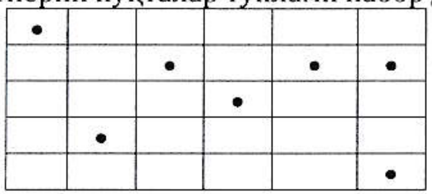
Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	Юк захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1	a_1^1
2	c_{21} –	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	
…	…	…	…	…	…	
m	c_{m1} –	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	…	b_n		
	0					

Ҳисоблашларни 10.4-жадвал бўйича давом эттириб, (2,1) катакка ўтамиз. $x_{21} = min(a_2, b_1^1) = b_1^1$ бўлсин. Жадвални юқоридаги усул билан тўлдириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

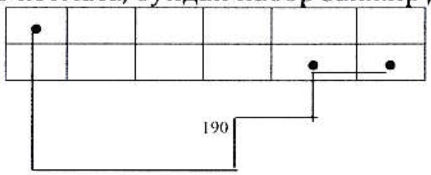
Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	Юк захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} –	…	c_{1n} –	a_1	0
2	c_{21} x_{12}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	a_2^1
…	…	…	…	…	…	
m	c_{m1} –	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	…	b_n		
	b_1^1					
	0					

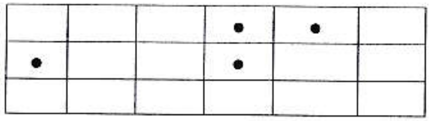
Шу тариқа ҳисоблашларни жадвалнинг қуйи ўнг бўрчагигача давом эттириб, жадвадаги барча $x_{ij},\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$ ларни аниқлаймиз. Бунда (10.5.2)-(10.5.4) шартлар бажарилиши керак.

Масаланинг иккинчи босқичида бошланғич режа асосида (10.5.1) шартни қаноатлантирувчи оптимал ечим топилади. Оптимал ечимни топишнинг потенциаллар, тақсимот каби бир неча усуллари мавжуд бўлиб, биз потенциаллар усулини қараб чиқамиз. Ушбу усулни қарашдан олдин ҳисоблаш жараёнида ишлатиладиган айрим тушунчалар билан танишамиз. Жадвалдаги ихтиёрий нуқталар тўплами набор дейилади.

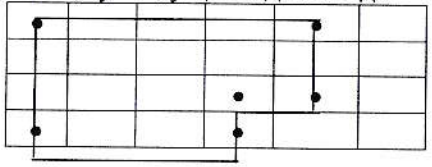


Наборни ташкил қилувчи нуқталар ҳар бир қаторда иккитадан ошиб кетмаса, бундай набор занжир дейилади.





Агар занжир ёпиқ бўлса, у цикл дейилади.



Агар жадвалдаги n та нуқталар тўплами цикл ташкил қилмаса, уларга битта нуқта қўшиш орқали цикл ҳосил қилсак, бундай n та нуқталар тўплами ациклик режани ташкил қилади дейилади.

Агар транспорт масаласида $x_{ij}>0$ бўлса, *(i,j)* катак белгиланган катак дейилади.

Агар транспорт масаласида барча катаклар учун $v_j-u_i\le c_{ij}$ (10.5.4) шартни, белгиланган катаклар учун эса $v_j-u_i=c_{ij}$ шартни қаноатлантирувчи $v_j,\ j=1,2,\dots,n;\ u_i, i=1,2,\dots,m$ сонлари мавжуд бўлса, $x_{ij},\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$ режа оптимал бўлади. $v_j,\ j=1,2,\dots,n;\ u_i,\ i=1,2,\dots,m$ сонлари эса потенциаллар дейилади.

Транспорт масаласини потенциаллар усулида ечиш қуйидаги тартибда бажарилади:

1) Белгиланган катаклар учун $v_j-u_i=c_{ij}$, $v_j,\ j=1,2,\dots,n;\ u_i,\ i=1,2,\dots,m$ шартни қаноатлантирувчи тенгламалар системаси тузилади. Бунда тенгламалар сони ўзгарувчилар сонидан битта кам бўлгани учун система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Ситеманинг битта хусусий ечимини топиб потенциалларнинг қийматини аниқлаймиз;

2) Белгиланмаган катаклар учун $v_j-u_i\le c_{ij}$ шартни текширамиз. Агар ушбу шарт барча катаклар учун бажарилса, оптимал ечим топилган ҳисобланади ва $z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ функция қиймати ҳисобланади;

3) Агар $v_j - u_i \le c_{ij}$ шарт бир нечта катаклар учун бажарилмаса, Ушбу катаклар учун $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ айирма ҳисобланади ва $\delta_{i_0 j_0} = \max_{i,j} \delta_{ij}$ топилади;

4) (i_0, j_0) катак белгиланган катаклар қаторига қўшилади ва белгиланган катаклардан цикл тузилади;

5) (i_0, j_0) катакдан бошлаб циклни ташкил қилувчи катакларга "+" ва "-" ишоралари навбат билан қўйилиб чиқилади;

6) "−" ишорали катаклар учун $\theta = \min(x_{ij})$ ни аниқлаймиз;

7) "-" ишорали катаклардан θ ни айириб, "+" ишорали катакларга θ ни қўшамиз;

8) θ жойлашган катакни белгиланган катаклар қаторидан чиқазамиз.

Натижада янги режани ҳосил қиламиз ва бу режа учун (1)-(7) амалларни такрорлаймиз. Юқоридаги ҳисоблашлар барча катаклар учун $v_j - u_i \le c_{ij}$ шарт бажарилиб, оптимал режа топилгунча давом эттирилади.

Қуйидаги мисолни қараймиз:

Транспорт масаласи қуйидаги жадвал кўринишида берилган бўлиб, уни потенциаллар усули билан ечамиз.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	v_j / u_i	1 v_1	2 v_2	3 v_3	4 v_4	Юк захиралари
1	u_1	2	4	6	10	90
2	u_2	1	3	7	4	100
3	u_3	4	8	13	7	140
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330

Бошланғич режани тузиш учун шимоли-ғарб усулидан фойдаланамиз. (1,1) катакка мос захира ва талабнинг кичигини $x_{11} = 90$ деб оламиз.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	v_j / u_i	1 v_1	2 v_2	3 v_3	4 v_4	Юк захиралари	
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0
2	u_2	1	3	7	4	100	
3	u_3	4	8	13	7	140	
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330	
		20					

Юқоридаги жадвалга кўра 1-жўнатиш пунктидан 1-қабул пунктига 90 бирлик юк юборилади, 1-жўнатиш пунктида бошқа юк қолмайди, шунинг учун 1-жўнатиш пунктидан бошқа қабул пунктларига юк ташилмайди, 1- қабул пунктига яна 30 бирлик юк келтириш керак. (2,1) катакка ўтиб, шу катакка мос талаб ва захираларнинг кичигини $x_{21} = 20$ деб оламиз.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	v_j / u_i	1 v_1	2 v_2	3 v_3	4 v_4	Юк захиралари	
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0
2	u_2	1 20	3	7	4	100	80
3	u_3	4 -	8	13	7	140	
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330	
		20					
		0					

(2,3) катакка ўтиб, юқоридаги қоида бўйича $x_{22}=80$ ни аниқлаймиз.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	v_j / u_i	1	2	3	4	Юк захиралари		
		v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8	13	7	140		
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330		
		20	20					
		0						

Ҳисоблашларни шу тариқа давом эттирамиз ва охирги жадвал қуйидаги кўринишга келади:

Қабул пунктлари / Жўнатиш Пунктлари	v_j / u_i	1	2	3	4	Юк захиралари		
		v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8 20	13	7	140	120	
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330		
		20	20					
		0	0					

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	v_j / u_i	1	2	3	4	Юк захиралари		
		v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7	140	120	40
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330		
		20	20	0				
		0	0					

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	v_j / u_i	1	2	3	n	Юк захиралари			
		v_1	v_2	v_3	v_4				
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0		
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0	
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140	120	40	0
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330			
		20	20	0	0				
		0	0						

Шу тарзда бошланғич режани ҳосил қилдик: $x_{11}=90, x_{21}=20, x_{22}=80,$
$x_{32}=20, x_{33}=80, x_{34}=40, x_{12}=x_{13}=x_{14}=x_{23}=x_{24}=x_{31}=0,$

$$z=90\cdot 2+20\cdot 1+80\cdot 3+20\cdot 8+80\cdot 13+40\cdot 7=$$
$$=180+20+240+160+1040+280=1920.$$

Масаланинг оптимал ечимини топиш учун охирги жадвални қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90
u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100
u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

Белгиланган катаклар учун $v_j - u_i = c_{ij}$ $v_j,\ j = 1,\ldots,4,$ $u_i,\ i = 1,2,3$ шарт бўйича тенгламалар системасини тузамиз:

$$v_1 - u_1 = 2$$
$$v_1 - u_2 = 1$$
$$v_2 - u_2 = 3$$
$$v_2 - u_3 = 8$$
$$v_3 - u_3 = 13$$
$$v_4 - u_3 = 7$$

Тенгламалар системасидаги номаълумлар 7 та, тенгламалар эса 6 та бўлгани учун система чексиз кўп ечимга эга. Хусусий ечимни топиш учун ўзгарувчилардан бирига ихтиёрий қиймат берамиз, масалан $u_1 = 0$ бўлсин. У ҳолда $v_1 = 2,\ u_2 = 1,\ v_2 = 4,\ u_3 = -4,\ v_3 = 9,\ v_4 = 3$ келиб чиқади. Потенциалларнинг қийматларини жадвалга қўямиз:

v_j / u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	
$u_1 = 0$	2 90	4	6	10	90
$u_2 = 1$	1 20	3 80	7	4	100
$u_3 = -4$	4	8 20	13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

Белгиланмаган катаклар учун $v_j - u_i \le c_{ij}$ шартни текширамиз:

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = c_{12}$$
$$v_3 - u_1 = 9 - 0 = 9 > 6 = c_{13}$$
$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$
$$v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > 7 = c_{23}$$
$$v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}$$
$$v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

Учта (1,3), (2,3), (3,1) катаклар учун $v_j - u_i \le c_{ij}$ шарт бажарилмайди. Ушбу катаклар учун $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ ларни ҳисоблаймиз:

$$\delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3$$
$$\delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1$$
$$\delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2$$

δ ларнинг энг каттасини топамиз. Бу $\delta_{13} = 3$ бўлиб, унга мос катакни белгиланган катаклар қаторига қўшиб, белгиланган катаклар ёрдамида цикл тузамиз. Циклни ташкил этувчи катакларга (1,3) катакдан бошлаб "+" ва "-" ишораларини навбат билан қўйиб чиқамиз:

v_j / u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	
$u_1 = 0$	- 2 90	4	+ 6 0	10	90
$u_2 = 1$	+ 1 20	- 3 80	7	4	100
$u_3 = -4$	4	+ 8 20	- 13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

"-" ишорали катаклар учун $\theta = min\, x_{ij} = min\{90,80,80\}$ ни топамиз. Ушбу шартни қаноатлантирувчи катаклар иккита (2,2) ва (3,3) катаклари бўлиб, улардан бирини, масалан (3,3) катакни танлаймиз.

v_j / u_i	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=9$	$v_4=3$	
$u_1=0$	- 2 90	4	+ 6 0	10	90
$u_2=1$	+ 1 20	- 3 80	7	4	100
$u_3=-4$	4	+ 8 20	- 13 80=θ	7 40	140
	110	100	80	40	

θ ни "+" ишорали катакларга қўшиб, "-" ишорали катаклардан айирамиз ва θ жойлашган (3,3) катакни белгиланган катаклар қаторидан чиқариб ташлаймиз. Натижада қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз.

v_j / u_i	$v_1=$	$v_2=$	$v_3=$	$v_4=$	захира
$u_1=$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2=$	1 100	3 0	7	4	100
$u_3=$	4	8 100	13	7 40	140
талаб	110	100	80	40	

Ҳосил бўлган янги режада белгиланган катаклар учун $v_j-u_i=c_{ij}$ шарт орқали юқоридаги усул билан тенгламалар системаси тузиб, потеналларни аниқлаймиз:

$$v_2-u_1=4-0=4=c_{11}$$
$$v_4-u_1=3-0=3<10=c_{14}$$
$$v_3-u_2=6-1=5<7=c_{23}$$
$$v_4-u_2=3-1=2<4=c_{24}$$
$$v_1-u_3=2-(-4)=6>4=c_{31}$$
$$v_3-u_3=6-(-4)=10<13=c_{33}$$

Юқоридаги системада $u_1=0$ бўлсин. У ҳолда $v_1=2,\ u_2=1,\ v_2=4,$ $u_3=-4, v_3=6, v_4=3$ бўлади.

v_j / u_i	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=6$	$v_4=3$	Захира
$u_1=0$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2=1$	1 100	3 0	7	4	100
$u_3=-4$	4	8 100	13	7 40	140
талаб	110	100	80	40	

Битта (3,1) катакда $v_j-u_i\le c_{ij}$ шарт бажарилмаганлиги учун, бу катакни белгиланган катаклар қаторига қўшиб, юқоридаги усул билан цикл тузамиз. Циклни ишоралаб, "-" ишорали катаклар учун θ ни аниқлаймиз. "-" ишорали катаклардаги сонлар бир хил 100 бўлганлиги учун улардан бирини, масалан (3,2) катакни танлаймиз. Натижада қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

v_j / u_i	$v_1=$	$v_2=$	$v_3=$	$v_4=$	захира
$u_1=$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2=$	- 1 100	+ 3 0	7	4	100
$u_3=$	+ 4 0	- 8 100=θ	13	7 40	140
талаб	110	100	80	40	

θ ни "-" ишорали катаклардан айириб, "+" ишорали катакларга қўшамиз. (3.2) катакни белгиланган катаклар қаторидан чиқариб ташлаб, янги режа учун потенциалларни юқоридаги усул билан аниқлаймиз. Натижада қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

u_i \ v_j	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=6$	$v_4=5$	Захира
$u_1=0$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2=1$	1 0	3 100	7	4	100
$u_3=-2$	4 100	8	13	7 40	140
талаб	110	100	80	40	

Юқоридаги жадвалдаги режада барча катаклар учун $v_j-u_i\le c_{ij}$ потенциаллик шарти бажарилади. Демак, масаланинг оптимал ечими топилди ва у қуйидагича бўлади:

$$x_{11}=10,\ x_{13}=80,\ x_{22}=100,\ x_{31}=100,\ x_{34}=40,$$

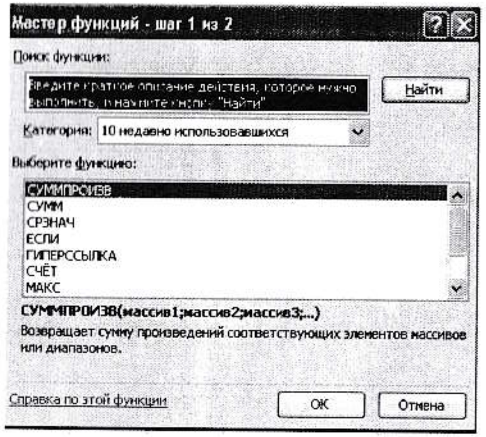
$$x_{12}=x_{14}=x_{21}=x_{23}=x_{24}=x_{32}=x_{33}=0,$$

$$z_{min}=10\cdot2+80\cdot6+100\cdot3+100\cdot4+40\cdot7=20+480+300+400+280=1480.$$

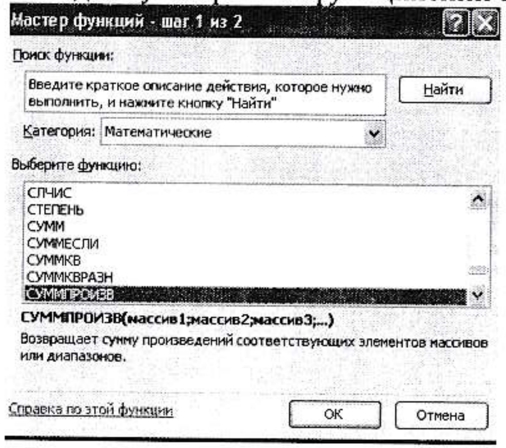
Масалани Excel дастури ёрдамида ечамиз. Бунинг учун бирлик юкларни ташиш харажатларини A2:D4 диапазонига, жўнатиш пунктларидаги юк захираларини G7:G9 диапазонига, қабул пунктларидаги юкка бўлган талабни A12:D12 диапазонига киритамиз. Ташиладиган юкларнинг бошланғич қийматларини 0 деб оламиз ва уларни A7:D9 диапазонига киритамиз. (10.5.1) ва (10.5.3) шартларнинг бажарилишини текшириш учун E7:E9, A10:D10 диапазонларини бўш қолдирамиз. Натижада жадвал қуйидаги кўринишни олади:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Birlik yuk tashish xarajatlari					
2	2	4	6	10			
3	1	3	7	4			
4	4	8	13	7			
5							
6		Tashiladigan yuk xajmlari					Yuk zaxirasi
7	0	0	0	0		=	90
8	0	0	0	0		=	100
9	0	0	0	0		=	140
10							
11	=	=	=	=			
12	110	100	80	40	Yukka talab		
13							
14	Umumiy yuk tashish xarajati z=						
15							

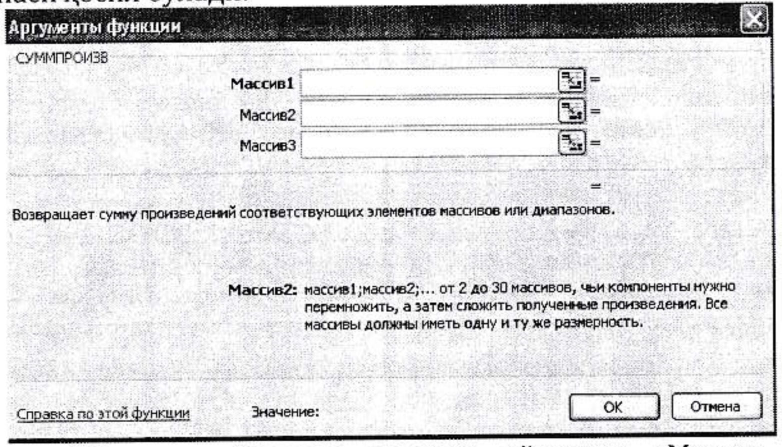
E7, E8, E9, A10,B10,C10,D10 катакларига мос равишда A7:D7,A8:D8, A9:D9, A7:A9, B7:B9, C7:C9, D7:D9 диапазонларига, юк хажмлари йиғиндиларини Σ тугмаси ёрдамида хисоблаймиз. Сўнгра курсорни D14 катагига ўрнатиб, тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:



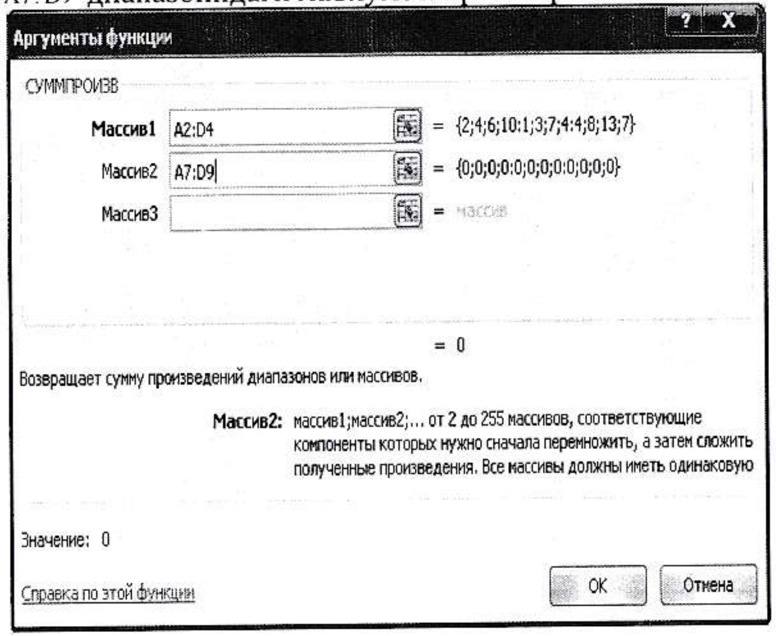
Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Категория» бўлимида «Математическое» пунктини танлаймиз, сўнг «Выберите функцию» бўлимида «Суммпроизв» функциясини танлаймиз:



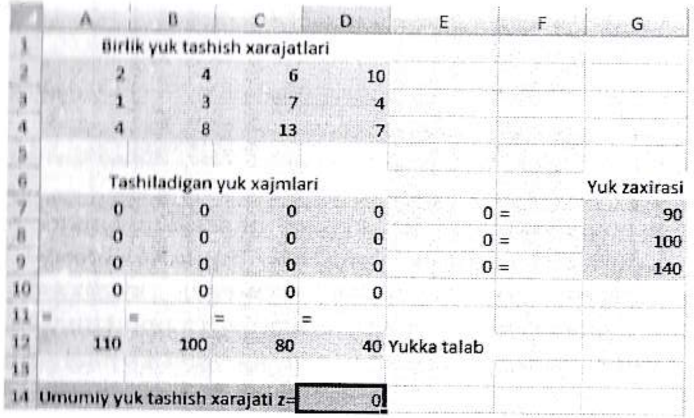
Сўнгра «ОК» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:



Ҳосил бўлган навбатдаги мулоқот ойнасида «Массив 1» дарчасидаги тугмачани босиб, A2:D4 диапазонидаги маълумотларни, «Массив 2» дарчасидаги тугмачани босиб, A7:D9 диапазонидаги маълумотларни киритамиз:

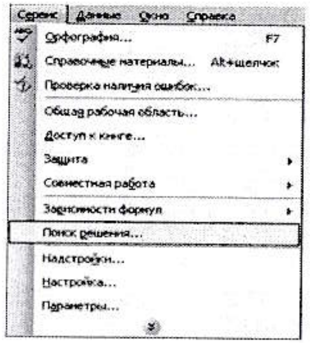


Сўнгра «ОК» тугмасини босамиз. Натижада жадвал қуйидаги кўринишга келади:

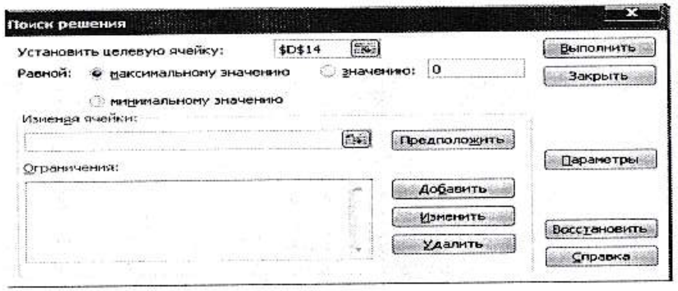


	A	B	C	D	E	F	G
1		Birlik yuk tashish xarajatlari					
2	2	4	6	10			
3	1	3	7	4			
4	4	8	13	7			
5							
6		Tashiladigan yuk xajmlari					Yuk zaxirasi
7	0	0	0	0	0 =		90
8	0	0	0	0	0 =		100
9	0	0	0	0	0 =		140
10	0	0	0	0			
11	=	=	=	=			
12	110	100	80	40	Yukka talab		
13							
14	Umumiy yuk tashish xarajati z=			0			

Курсорни мақсад функцияси жойлашган D14 катакка ўрнатиб, «Сервис-Поиск решения» буйруғини берамиз.

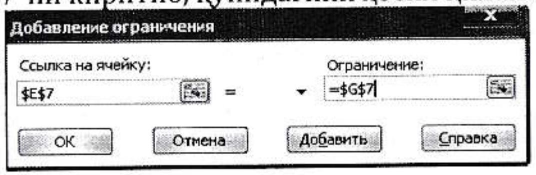


Натижада қуйидаги «Поиск решения» мулоқот ойнаси ҳосил бўлади.

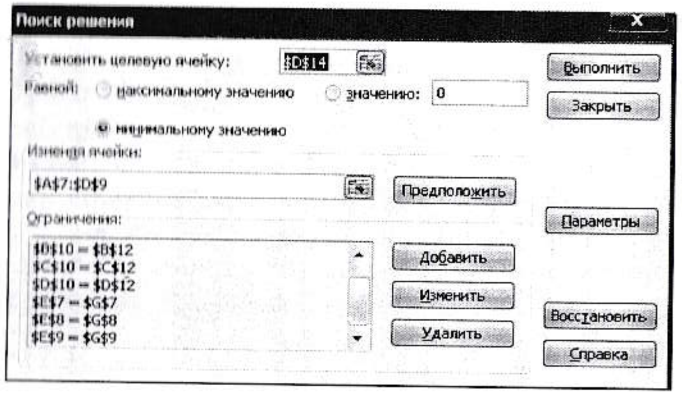


Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Установить целевую ячейку» дарчасига D14 катаги номини ўрнатиб "минимальному значению" параметрини белгилаймиз, «Изменяя ячейки» дарчасига A7:D9 диапазонини киритамиз. «Ограничения» дарчасига ўтиб «Добавить» тугмасини босиб, қуйидаги ойнани ҳосил қиламиз:

Ҳосил бўлган мулоқот ойнасида «Ссылка на ячейки» дарчасига E7 ни киритамиз, тенгликни ўрнатамиз, «Ограничения» дарчасига G7 ни киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

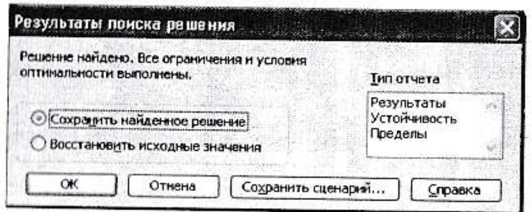


"Добавить" тугмасини босамиз. Диапазонларидаги қолган муносабатларни ҳам шу тарика белгилаб чиқамиз. Охирги муносабатни киритгандан кейин «ОК» тугмасини босамиз. Натижада «Поиск решения» мулоқот ойнасига қайтамиз:



«Параметры» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги мулоқот ойнаси ҳосил бўлади:

Ойнадаги «Неотрицательное значение» параметрини белгилаймиз ва «ОК» тугмасини босиб, «Поиск решения» мулоқот ойнасига қайтамиз ва «Выполнить» тугмасини босамиз. Натижада қуйидаги ойнага ўтамиз:



«ОК» тугмасини босамиз. Натижада ечим қуйидаги кўринишга келади:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	birlik yuk tashish xarajatlari							
2	2	4	6	10				
3	1	3	7	4				
4	4	8	13	7				
5								
6	Tashiladigan yuk xajmlari						Yuk zaxirasi	
7	10	0	80	0	90 =		90	
8	0	100	0	0	100 =		100	
9	100	0	0	40	140 =		140	
10	110	100	80	40				
11	=	=	=	=				
12	110	100	80	40	Yukka talab			
13								
14	Umumiy yuk tashish xarajati z=			1480				
15								

Расмдан кўриниб турибдики, барча чекланишлар бажарилади ва ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_{11}=10,\ x_{13}=80,\ x_{22}=100,\ x_{31}=100,\ x_{34}=40,$$

$$x_{12}=x_{14}=x_{21}=x_{23}=x_{24}=x_{32}=x_{33}=0,$$

$$z_{\min}=10\cdot 2+80\cdot 6+100\cdot 3+100\cdot 4+40\cdot 7=20+480+300+400+280=1480$$

Юқоридаги транспорт масалани MathCad дастурида ечамиз. Дастлаб мақсад функцияни қуйидаги кўринишда ёзилади:

Z(x11,x12,x13,x14,x21,x22,x23,x24,x31,x32,x33,x34):=2*x11+4*x12+6*x13+10*x14+x21+3*x22+7*x23+4*x24+4*x31+8*x32+13*x33+7*x34

Given сўзидан кейин қуйидаги мантиқий ифодалар ёзилади:

x11+x12+x13+x14=90
x21+x22+x23+x24=100
x31+x32+x33+x34=140
x11+x21+x31=110
x12+x22+x32=100
x13+x23+x33=80
x14+x24+x34=40
x11≥0 x12≥0 x13≥0 x14≥0
x21≥0 x22≥0 x23≥0 x24≥0
x31≥0 x32≥0 x33≥0 x34≥0

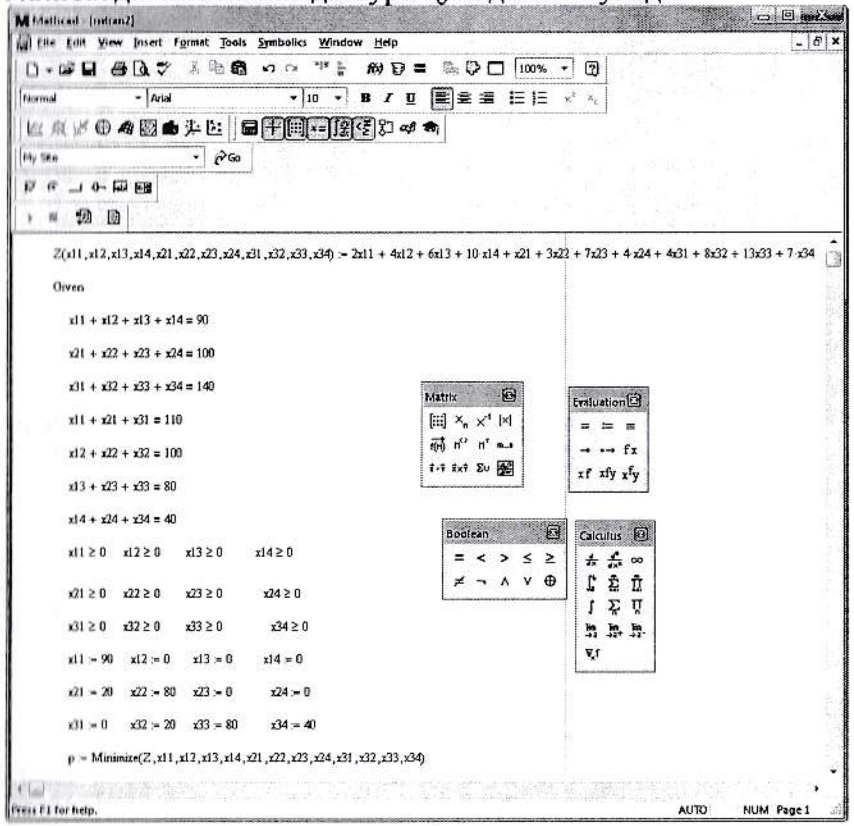
Номаълумларнинг бошланғич қийматлари киритилади:

x11:=90 x12:=0 x13:=0 x14:=0
x21:=20 x22:=80 x23:=0 x24:=0
x31:=0 x32:=20 x33:=80 x34:=40

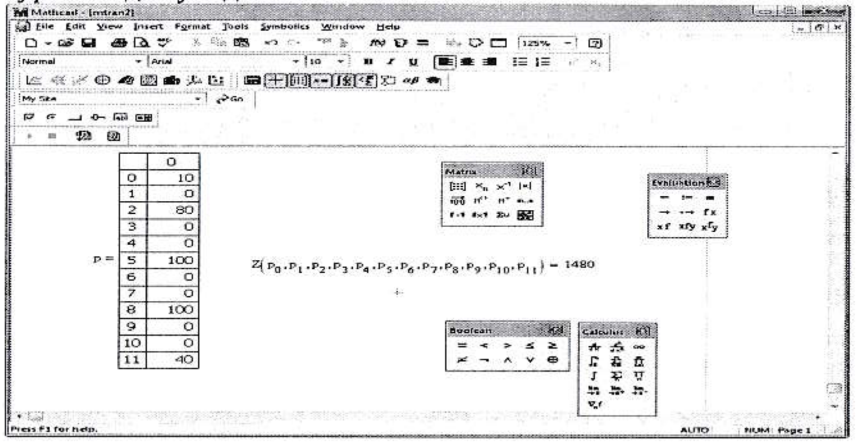
Натижа чиқариш учун қуйидаги оператор ёзилади:

p :=Minimize(Z, x11, x12, x13, x14, x21, x22,x23, x24, x31, x32, x33, x34)

MathCadда масаланинг дастури қуйидагича бўлади:



Оптимал ечимни берувчи ўзгарувчиларнинг қийматлари p= оператори ёрдамида, мақсад функциясининг оптимал қиймати эса Z(p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11)= оператори ёрдамида хосил қилинади. Масаланинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:



10.6. Чизиқсиз дастурлаш масаласи

Агар мақсад функцияси ёки тенгсизликлар системаси ўзгарувчиларга нисбатан чизиқсиз ифодаларни ўз ичичга олса, бундай масалалар чизиқсиз дастурлаш масаласи дейилади. Чизиқсиз дастурлаш масаласи умумий кўринишда қуйидагича ифодаланади: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларнинг шундай қийматларини топиш керакки, бунда қуйидаги шартлар бажарилсин: $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to max(min)$ (10.6.1)

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \end{aligned} \qquad (10.6.2)$$

(10.6.2) тенгсизликларни қуйидагича ифодалаймиз:

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \\ &y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \end{aligned} \qquad (10.6.3)$$

$y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ тенгламалар n ўлчовли фазодаги гипертекисликларни аниқлаб, улар билан чегараланган нуқталар тўплами (10.6.2) шартларни қаноатлантиради,

бошқача қилиб айтганда, мумкин бўлган ечимлар тўпламини ҳосил қилади. Шу нуқталар ичидан (10.6.1) функцияга оптимал қиймат берадиган нуқталарни топиш керак. (10.6.1)-(10.6.2) масалани ечишнинг бир неча усуллари бўлиб, уларга фазовий тўр узеллари усули, тасодифий текшириш ҳамда, градиент усуллари киради. Градиент усулини қараб чиқамиз.

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг аргументлари бўйича хусусий ҳосилаларидан ташкил топган $grad\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)\right\}$ векторга f функциянинг градиенти дейилади. Ҳар бир нуқтанинг ўз градиенти бўлиб, у берилган нуқтада функциянинг энг катта ўзгариш йўналишини кўрсатади ва шу нуқтадан ўтувчи сирт чизиғига нисбатан перпендикуляр бўлади.

Масалани ечиш учун дастлаб, мумкин бўлган ечимлар тўпламида бошланғич нуқта A ни танлаб оламиз. A нуқтада мақсад функциясининг градиентини ҳисоблаймиз:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_A, \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_A, \ldots, \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_A.$$

A нуқта орқали ўтувчи градиентга параллел бўлган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини тузамиз.

$$x_1 = x_1^{(A)} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_A \cdot t$$

$$x_2 = x_2^{(A)} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_A \cdot t$$

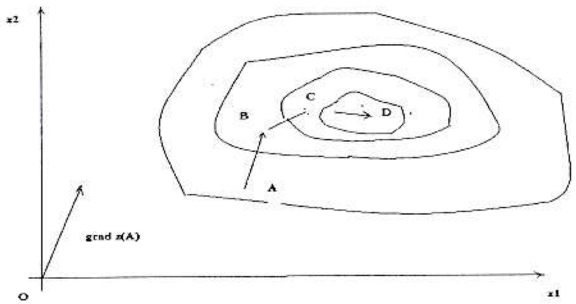
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_n^{(A)} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_A \cdot t$$

Мақсад функцияси максимумга текширилаётган бўлса, градиент йўналиши бўйлаб силжиймиз ва $t > 0$ деб оламиз. Бошланғич нуқтадан градиент йўналиши бўйлаб t параметр қиймати билан аниқланувчи бирор h масофага силжиб, бирор B нуқтага ўтамиз. Янги B нуқтада яна градиентни аниқлаймиз. Аниқланган йўналиш бўйича яна h масофага силжиб, C нуқтага ўтамиз ва шу тариқа жараённи давом эттирамиз. Агар градиент ташкил этувчилари ноль қийматни қабул қилса, оптимал ечим топилган ҳисобланади:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,\ \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

Масаланинг график тасвири қуйидагича бўлади:



Агар масала минимумга текширилаётган бўлса, $t<0$ деб олиниб, z функциянинг камайишини кўрсатувчи градиент йўналишига қарама-қарши томонга силжиймиз.

Мисол. Қуйидаги чизиқсиз дастурлаш масаласини ечинг.

$$z = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 2x \ \to max$$

$$x_1^2 - x_2^2 \le 9$$

$$x_2 \le 3$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

Тенгсизликлар системасини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$y_1 = 9 - x_1^2 + x_2^2 \ge 0$$

$$y_2 = 3 - x_2 \ge 0$$

$$x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0$$

z функциясидан x_1, x_2 ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 - 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2 - 2. \qquad (10.6.4)$$

Бошланғич нуқта сифатида $O(0,0)$ нуқтани танлаймиз. Бу нуқта берилган масаладаги тенгсизликларни қаноатлантириб, $z_0 = 0$ бўлади. O нуқта координаталарини (10.6.4) ифодага қўямиз.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0 = 2\cdot 0 - 3 = -3$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_0 = 2\cdot 0 - 2 = -2$$

Натижада O нуқта учун қуйидаги градиентни ҳосил қиламиз: $grad\ z_0(-3;-2)$. O нуқта оптимал бўлмайди.

O нуқта орқали ўтувчи, гардиентга параллел тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини тузамиз:

$$x_1 = 0 - 3t$$

$$x_2 = 0 - 2t$$

Масала минимумга текширилаётганлиги учун $t = -1 < 0$ деб оламиз ва юқоридаги параметрик тенгламага қуйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_1 = 0 - 3\cdot(-1) = 3$$

$$x_2 = 0 - 2\cdot(-1) = 2$$

Натижада $A(3;2)$ нуқтага ўтамиз. A нуқтада z функция қийматини ҳисоблаймиз:

$z_A = 3^2 - 3\cdot 3 + 2^2 - 2\cdot 2 = 0 = z_0$. Бундан кўринадики, A ва O нуқталарда функция қиймати бир хил бўлиб, бу берилган йўналишда минимум нуқтани сакраб ўтиб кетганлигимизни билдиради. Шунинг учунт t параметрнинг қийматини кичикроқ оламиз: $t = -0{,}5$ қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_1 = 0 - 3\cdot(-0{,}5) = 1{,}5$$

$$x_2 = 0 - 2\cdot(-0{,}5) = 1$$

Топилган $B(1{,}5;1)$ нуқтада функция қиймати $z_B = 1{,}5^2 - 3\cdot 1{,}5 + 1^2 - 2\cdot 1 = \ = -3{,}25$ бўлиб, бошланғич қийматга нисбатан кичрайди. Бу нуқта учун чекланишларни текшириб кўрамиз:

$$y_1 = 9 - 1{,}5^2 + 1^2 = 7{,}75 > 0$$

$$y_2 = 3 - 1 = 2 > 0$$

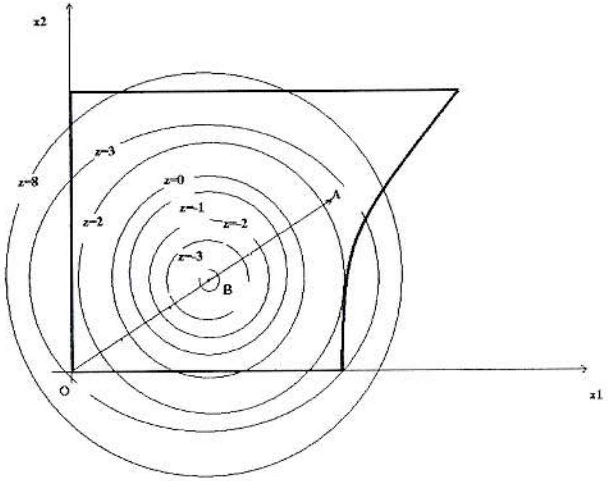
Барча шартлар бажарилгани учун, топилган нуқта мумкин бўлган ечимлар тўпламига киради. B нуқтада z нинг градиентини ҳисоблаймиз:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_B = 2\cdot 1{,}5 - 3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_B = 2\cdot 1 - 2 = 0$$

$z_B(0;0)$ ноль вектор бўлгани учун z нинг қийматини янада камайтириб бўлмайди.

Демак масала оптимал ечим B нуқтада эришади. Масаланинг график ифодаси қуйида чизмада келтирилган:



Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масалаларини график ва симплекс усулда ечинг:

1) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) $z = -x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) $z = 2x_1 - 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4) $z = 1{,}5x_1 - 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5) $z = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

6) $z = 1{,}5x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7) $z = 2x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8) $z = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9) $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10) $z = 2 + 6x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масалаларини симплекс усулда ечинг ва уларга иккиланган масала тузинг:

1) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) $z = -x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) $z = 2x_1 - 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4) $z = 1{,}5x_1 - 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5) $z = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to min$

6) $z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 0 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge -2 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7) $z = 2x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8) $z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Қуйидаги транспорт масалаларини ечинг:

1)

	1	2	3	Захира
1	6	2	1	70
2	4	6	4	30
3	4	2	5	20
Талаб	50	40	30	

2)

	1	2	3	Захира
1	3	2	4	80
2	3	9	5	60
3	8	7	5	60
Талаб	80	80	40	

3)

	1	2	3	Захира
1	5	8	4	2
2	4	5	3	14
3	4	2	5	8
Талаб	4	12	8	

4)

	1	2	3	Захира
1	1	2	5	20
2	4	3	4	30
3	8	5	1	40
Талаб	40	30	20	

5)

	1	2	3	Захира
1	9	6	7	90
2	8	8	4	20
3	10	7	4	50
Талаб	70	40	50	

6)

	1	2	3	Захира
1	15	24	12	3
2	12	15	9	21
3	12	6	15	12
Талаб	16	8	12	

7)

	1	2	3	Захира
1	15	24	12	4
2	12	6	15	16
3	12	15	9	28
Талаб	8	24	18	

8)

	1	2	3	Захира
1	15	24	12	3
2	12	15	9	14
3	12	6	15	8
Талаб	4	12	8	

9)

	1	2	3	Захира
1	3	5	2	20
2	4	4	1	20
3	4	4	6	50
Талаб	30	20	40	

10)

	1	2	3	Захира
1	3	5	2	10
2	6	6	4	10
3	9	10	6	10
Талаб	7	13	10	

Қуйидаги чизиқсиз дастурлаш масалаларини ечинг:

1) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 \ge 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) $z = x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) $z = 2x_1 - 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 5x_2^2 \ge 15 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4) $z = x_1 - 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1^2 + 2x_2^2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5) $z = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_2 \ge 0 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

6) $z = x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \ge -2 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7) $z = 2x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8) $z = 2x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1^2 + 3x_2^2 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9) $z = x_1 + 2x_2 \to min$

10) $z = 2 + 6x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^3 \geq 1 \\ x_1 + 3x_2 + \geq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^2 - 2x_2^2 \geq -3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Таянч сўз ва иборалар

Чизиқли ва чизиқсиз дастурлаш, мақсад функцияси, чекланишлар системаси, номанфийлик шарти, симплекс усули, график усули, ечимлар кўпбурчаги, нормал вектор, параллел суриш, максимал ва минимал ечимлар, мулоқат ойнаси, диапазон, массив, таянч ечим, оптимал ечим, ҳал қилувчи сатр ва устун, бош элемент, тўртбурчак қоидаси, симплекс алмаштириши, MathCad дастури, Excel дастури, иккиланган масаласи, транспорт масаласи, потенциаллар усули, очиқ ва ёпиқ масалалар, шимоли-ғарб усули, градиент усули.

Саволлар

1. Чизиқли дастурлаш масаласи умумий ҳолда қандай қўйилади?
2. Мақсад функцияси - қандай функция?
3. Чизиқли дастурлаш масаласи қачон график усулда ечилади?
4. Симплекс усули алгоритми қандай амаллар кетма-кетлигидан иборат?
5. Ечимлар кўпбурчаги қандай кўпбурчак?
6. Оптимал ечим неча хил усулда аниқланади?
7. Чизиқли дастурлаш масаласи Excel дастурида қандай ечилади?
8. Чизиқли дастурлаш масаласи MathCad дастурида қандай ечилади?
9. Бош элемент қандай аниқланади?
10. Ҳал қилувчи сатр ва устун қандай аниқланади?
11. Тўртбурчак қоидаси – қандай қоида?
12. Таянч ва оптимал ечимлар қандай аниқланади?
13. Иккиланганлик масаласи - қандай масала?
14. Тўғри масала - қандай масала?

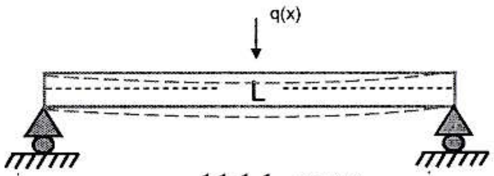
15. Транспорт масаласини таърифлаб берниг.
16. Потенциаллар усули ҳақида гапириб беринг.
17. Шимоли-ғарб усулининг маъноси нимадан иборат?
18. Чизиқсиз дастурлаш масаласи ҳақида гапириб беринг.
19. Градиент усули алгоритмини келтиринг.

XI-БОБ. БАЪЗИ БИР МУХАНДИСЛИК МАСАЛАЛАРИНИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

Маълумки, инженерлик масалаларининг қатор объектлари худди стержен ёки пластинка кўринишда математик моделлаштирилади. Ташқи куч таъсирида бўлган стержен ва пластинканинг эгилиши ҳамда тебранишини аниқлаш амалиётда муҳим аҳамиятга эга. Марказий симметрия ўқи бўйича маълум куч билан сиқилган стержен ва пластинканинг турғунлиги масаласида критик вақт ва унга мос келувчи критик кучни аниқлаш объектларни текширишда асосий фактор(омил)лар бўлиб ҳисобланади. Ушбу бобда шу каби инженерлик масалаларининг математик моделлари тузилиб, уларни ечиш усуллари келтирилган.

11.1. Эластик тўсин эгилиши масаласи

Узунлиги L га тенг, учлари ихтиёрий ҳолда маҳкамланган, ўзгарувчан кесимли эластик тўсин(балка)нинг эгилиши ҳақидаги масалани қарайлик (11.1.1-расм). Тўсинга $q(x)$ куч таъсир этаётган бўлсин. У ҳолда тўсин деформацияланиб унинг кесимларида кучланишлар ҳосил бўлади.



11.1.1 - расм

Агар кучланишни σ ва деформацияни ε деб белгиласак, улар орасидаги боғланиш Гук қонунига асосан

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (11.1.1)$$

бўлади. Бу ерда E эластиклик модули.

Тўсиннинг ихтиёрий нўқтасидаги эгилишини $u(x)$ деб олсак, у деформация билан қуйидагича боғланган:

$$\varepsilon = -z\frac{d^2u}{dx^2} \qquad (11.1.2)$$

(11.1.1) ва (11.1.2) ни тўсиннинг мувозанат тенгламаси

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0, \quad M = \iint_F z\sigma dF,$$

га қўйиб,

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left[J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] = q \qquad (11.1.3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда $J = J(x)$ – инерция моменти, F - тўсин кўндаланг кесим юзаси, M - куч моменти, z - тўсин сиртидан унинг ўқ кесимигача бўлган масофа.

Тўсиннинг учлари ихтиёрий кўринишда маҳкамланганлиги учун $x = 0$ ва $x = L$ да чегаравий шартларни

$$\begin{cases} G^{(0)}V'(0) + D^{(0)}V(0) = T^{(0)} \\ G^{(L)}V'(L) + D^{(L)}V(L) = T^{(L)} \end{cases} \qquad (11.1.4)$$

кўринишда беришимиз мумкин. Бу ерда

$$V(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ M(x) \end{bmatrix}; \quad M(x) = J(x)\frac{d^2u}{dx^2};$$

$G^{(0)};\ D^{(0)};\ G^{(L)};\ D^{(L)}$ - квадрат матрицалар ва $T^{(0)};\ T^{(L)}$ - икки ўлчовли векторлар бўлиб, уларни танлаш орқали, ихтиёрий чегаравий шартларни ҳосил қилишимиз мумкин.

(11.1.3) ва (11.1.4) биргаликда ўзгарувчан кесимли тўсиннинг эгилиши масаласининг математик модели бўлади.

(11.1.3) ва (11.1.4) да $\bar{u} = \frac{u}{u_0}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\overline{J(x)} = \frac{J(x)}{J_0}$, $\bar{q} = \frac{L^4}{Eu_0J_0}q$ алмаштиришларни бажариб (ва қулайлик учун олдинги белгилашларни сақлаб қолиб)

$$V''(x) + R(x)V(x) = S(x) \qquad (11.1.5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (11.1.4) чегаравий шарт эса $x = 0$ ва $x = 1$ да қуйидаги

$$\begin{cases} G^{(0)}V'(0) + D^{(0)}V(0) = T^{(0)} \\ G^{(1)}V'(1) + D^{(1)}V(1) = T^{(1)} \end{cases} \qquad (11.1.6)$$

кўринишга эга бўлади. Бу ерда

$$R(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J(x)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad S(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix}.$$

(11.1.5) тенгламанинг (11.1.6) шартларни қаноатлантирувчи ечимини дифференциал прогонка усули ёрдамида аниқлаймиз. Бу усулга кўра ечимни

$$\alpha(x)V'(x) + \beta(x)V(x) = \gamma(x), \qquad (11.1.7)$$

кўринишда қидирамиз. Бу ерда $\alpha(x);\ \beta(x);\ \gamma(x)$ –лар ҳозирча номаълум коэффициент. Бу коэффициентлар

$$\begin{cases} \alpha'(x) + \beta(x) = 0 \\ \beta'(x) - \alpha(x) \cdot R(x) = 0 \\ \gamma'(x) = \alpha(x) \cdot S(x) \end{cases}$$

системани қуйидаги

$$\begin{cases} \alpha(0) = G^{(0)} \\ \beta(0) = D^{(0)} \\ \gamma(0) = T^{(0)} \end{cases}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади. Системани ечиб, $\alpha(1);\ \beta(1);\ \gamma(1)$ ларни аниқлаймиз. Бу амаллар кетма-кетлиги, одатда тўғри прогонка усули деб аталади.

(11.1.7) ва (11.1.6) нинг иккинчи тенгламасида *x=1* деб олиб

$$\alpha(1)V'(1) + \beta(1)V(1) = \gamma(1).$$

$$G^{(1)}V'(1) + D^{(1)}V(1) = T^{(1)}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз ва уларни $V(1)$ ва $V'(1)$ ларга нисбатан ечиб,

$$\begin{cases} V(1) = \left[G^{(1)}\beta(1) - D^{(1)}\alpha(1)\right]^{-1} \cdot \left[G^{(1)}\gamma(1) - \alpha(1)T^{(1)}\right] \\ V'(1) = -\left[G^{(1)}\beta(1) - D^{(1)}\alpha(1)\right]^{-1} \cdot \left[D^{(1)}\gamma(1) - \beta(1)T^{(1)}\right] \end{cases} \qquad (11.1.8)$$

га эга бўламиз.

(11.1.5) тенгламалар системасини (11.1.8) шартларни қаноатлантирувчи (Коши масаласи) ечимини аниқлаймиз. Бу қўйилган масаланинг ечими бўлади. Кейинги бажарилган амаллар кетма-кетлиги тескари прогонка усули деб аталади.

ABC Pascal дастурлаш тилида, юқорида келтирилган алгоритм асосида тўсин эгилишини аниқлаш учун, дастурий таъминот яратилган.

11.2. Эластик тўсин тебраниши масаласи

Узунлиги L га тенг, учлари шарнирли маҳкамланган, ўзгарувчи кесимли тўсинга $q = q(t)$ куч таъсир этаётган бўлсин (11.1.1-расм). Тўсиннинг тебраниш масаласини қараб чиқамиз. Тўсиннинг тебраниш функциясини $W(x,t)$ деб белгилайлик. У ҳолда кучланиш ва деформация орасидаги боғланиш

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (11.2.1)$$

кўринишда, $W(x,t)$ ва ε деформация орасидаги боғланиш эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\varepsilon = -z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad (11.2.2)$$

Тўсиннинг тебраниш масаласида инерцион куч ҳосил бўлиб, ҳаракат тенгламаси Даламбер принципига кўра қуйидаги муносабат ёрдамида ифодаланади

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad (11.2.3)$$

Бу ерда t - вақт; m - тўсин массаси; $q = q(t)$ - тўсинга таъсир этаётган куч; $M = \iint\limits_F z\sigma dF$ - инерция моменти.

(11.2.1), (11.2.2) ва (11.2.3) ёрдамида тўсиннинг тебранишини ифодаловчи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] + m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(t) \qquad (11.2.4)$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз.

(11.2.4) тенглама $x = 0$ ва $x = L$ ларда қуйидаги чегаравий

$$W = 0; \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \qquad (11.2.5)$$

ва $t = 0$ да бошланғич

$$W = \varphi(x), \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \psi(x) \qquad (11.2.6)$$

шартлар билан биргаликда, тўсиннинг тебраниши ҳақидаги масаланинг математик моделини ташкил этади.

Хусусий ҳолда $F = const$ бўлса, у ҳолда

$$EJ\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(t)$$

тенгламани оламиз.

(11.2.4)–(11.2.6) да қуйидаги $\overline{W} = \frac{W}{W_0}$, $\bar{x} = \frac{x}{l}$, $\overline{J(x)} = \frac{J(x)}{J_0}$, $\bar{m} = \frac{m}{m_0}$, $\bar{t} = \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0 l^4}} \cdot t$, $\bar{q} = \frac{l^4}{EW_0 J_0} q$ алмаштиришларни бажариб (ва олдинги белгилашларни сақлаб қолиб) қуйидаги

$$m(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[J(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] = q(t) \qquad (11.2.7)$$

хусусий хосилали дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. (11.2.5) ва (11.2.6) шартлар эса $x = 0$ ва $x = 1$ да

$$W(x,t) = 0, \qquad \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (11.2.8)$$

ва $t=0$ да

$$W(x,t)=\varphi(x), \quad \frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (11.2.9)$$

кўринишни олади.

Бубнов-Галёркин усулига кўра (11.2.7) тенгламанинг (11.2.8) шартларни қаноатлантирувчи ечимини

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{N} y_n(t)\sin n\pi x \qquad (11.2.10)$$

кўринишда қидирамиз. (11.2.10) ни (11.2.7) га қўйиб

$$\sum_{n=1} y_n''(t)\sin n\pi x+\sum_{n=1} y_n(t)[J(x)(n\pi)^4\sin n\pi x-2J'(x)(n\pi)^3\cos n\pi x-$$

$$-J''(x)(n\pi)^2\sin n\pi x]\frac{1}{m(x)}=\frac{q(t)}{m(x)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликни иккала томонини $\sin m\pi x$ га кўпайтириб, уни x бўйича 0 дан 1 гача оралиқда интеграллаймиз ва натижада

$$y_m''(t)+\sum_{n=1}^{N} a_{mn}y_n(t)=q_m(t), \quad m=1,2,\dots,N \qquad (11.2.11)$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламалар ситемасига эга бўламиз. Бу ерда

$$a_{mn}=2\int_0^1[J(x)(n\pi)^4\sin n\pi x-2J'(x)(n\pi)^3\cos n\pi x-$$

$$-J''(x)(n\pi)^2\sin n\pi x]\frac{\sin m\pi x}{m(x)}dx,$$

$$q_m(t)=q(t)\int_0^1\frac{\sin m\pi x}{m(x)}dx.$$

(11.2.11) тенгламалар системаси учун бошланғич шартлар қуйидаги

$$y_m(0)=y_{mo}, \quad y_m'(0)=y_{m1} \qquad (11.2.12)$$

кўринишни олади. Бу ерда

$$y_{m0}=2\int_0^1\varphi(x)\sin m\pi x dx, \quad y_{m1}=2\int_0^1\psi(x)\sin m\pi x dx$$

(11.2.11), (11.2.12) Коши масаласини Рунге-Кутта усулида ечамиз. Топилган $y_n(t)$ ни (11.2.10) га олиб бориб қўямиз ва тўсиннинг тебраниш $W(x,t)$ функциясини аниқлаймиз.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Горностаева Т.Н., Горностаев О.М. Математическое и компьютерное моделирование. Учебное пособие – М.: Мир науки, 2019, 123 с.
2. Максимова, Н.Н. Математическое моделирование. Учебно-методическое пособие. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2019, 88 с.
3. Файсман А. Профессиональное программирование на Турбо Паскале. Тошкент, Информэкс Корпорейшн, 1992. с.271.
4. Петров А.В. Вычислительная техника и программирование. Москва. Высшая школа. 1991. с. 479.
5. Эшматов Х., Верлань А.Ф., Лукьяненко С.А. Численные методы в моделировании. Ташкент, «Узбекистан», 2010.
6. Калиткин Н.Н., Численные методы. – М., Наука, 1978. - 512 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М., Наука, 1989. – 432 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. – 736 с.
9. Кошляков В.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
10. А.Е. Мудров. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. - Томск, 1992.
11. В.Е. Алексеев и др. Вычислительная техника и программирование. - Москва, 1991.

МУНДАРИЖА

-14160/42-

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
AXBOROT RESURS MARKAZI

ХУРРАМОВ АНВАР
КОМОЛОВ ЭШМУРОД

МАТЕМАТИК ВА КОМПЬЮТЕРЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

Муҳаррир:	Х. Тахиров
Теҳник муҳаррир:	С. Меликузива
Мусаҳҳиҳ:	М. Юнусова
Саҳифаловчи:	А.Зиямуҳамедов

Нашриёт литсензия № 2044, 25.08.2020 й
Бичими 60x84 1/16. “Самбриа” гарнитураси, кегли 16.
Оффсет босма усулида босилди. Шартли босма табоғи 14,25. Адади 100 дона. Буюртма № 1596117

City of book МЧЖда чоп этилди.

9789910751509