Махмудова Д.М., Сиддиков З.Х.,
Муминова Х.Р.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И
ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЧИРЧИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Махмудова Д.М., Сиддиков З.Х., Муминова Х.Р.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(Для специальностей «Физика и астрономия»)

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ташкент
«Osiyo tur»
2024

УДК-530;521
КБК-22.3;22.6
М-56

Махмудова Д.М., Сиддиков З.Х., Муминова Х.Р. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. – Т.: "Osiyo tur", 2024. 128 страниц.

Рецензенты:

Сейитов А.Ж. - *д.т.н.(НУУз).*
Akbarov A. - *к.т.н.доц.(ЧГПУ).*

Данное учебное пособие составлено на основе требований учебного плана предметов, относящихся к блоку математики и естественных наук в учебных программах 5110200 – Физика и методика преподавания астрономии, 5140200 – Физика, 5140400 – Образовательные программы бакалавриата по астрономии. содержит информацию, включая практические упражнения.

На основе характеристики предметов, относящихся к блоку математики и естественных наук в учебных программах, в пособии раскрыты основные понятия и положения раздела дифференциальных уравнений курса «Высшая математика», показано их физическое содержание и приложения. Даны задания для самостоятельной работы по темам и способы их решения, а также ряд полезных рекомендаций для учащихся.

Пособие предназначено для студентов физических, астрономических и технических специальностей высших учебных заведений, базовых докторантов и научных работников.

Согласно решению №5 Совета Чирчикского государственного педагогического университета Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 9 декабря 2023 года, рекомендуется к публикации в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся естественным наукам в учебных программах 5110200 – Методика преподавания физики и астрономии, 5140200 – Физика, 5140400 – Астрономия.

Учебное пособие одобрено к изданию в соответствии с приказом Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан от 22 декабря 2023 года №537 (регистрационный номер 537-457).

УДК-530;521
КБК-22.3;22.6

ИСБН 978-9910-9398-3-9

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

ПЛАН:

- Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
- Общее решение дифференциального уравнения. Свойства общего решения.
- Задача Коши. О существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка.
- Уравнения вида *y' = f(x)*

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Многие задачи естествознания приводят к нахождению неизвестных функций, описывающих рассматриваемые явления или процессы, когда известны соотношения, связывающие между собой эти функции и их производные. Такие соотношения называются *дифференциальными уравнениями.* В качестве иллюстрации рассмотрим следующие примеры.

Допустим, что в каждый момент времени t известна скорость точки, движущейся по оси Ox, где $f(t)$ – функция, непрерывная на (a,b). Кроме того, будем считать, что известна абсцисса x_0 этой точки в некоторый определённый момент времени $t=t_0$. Требуется найти закон движения точки, то есть зависимость абсциссы движущейся точки от времени.

Решение. Положение точки определяется одной координатой x и задача состоит в том, чтобы выразить x как функцию от t. Принимая во внимание механический смысл первой производной, мы получим равенство

$$\frac{d(x)}{d(t)} = f(t) \qquad (1.1)$$

Как известно из интегрального исчисления

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f\ (t)dt + C\ (a < t < b)\ , \qquad (1.2)$$

где верхний предел интеграла – переменный, нижний t_0 есть некоторое фиксированное число из (a,b), C – произвольная постоянная. Так как в формулу (1.2) входит произвольная постоянная, то мы ещё не получили определённого закона движения точки.

Выделим из множества движений (1.2) то движение, при котором движущаяся точка занимает заданное положение x_0 в заданный момент времени t_0:

$$x_0 = \int_{t_0}^{t} f\ (t)dt + C \quad C = x_0,$$

что вместе с (1.2) даёт искомый закон движения точки:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f\ (t)dt + x_0\ (a < t < b)$$

Перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V, которая также является производной по времени t от перемещения S. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2};$$

Тогда получаем:

$$S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$$

– уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $f(t)$.

Задача 1

Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если V(0) = 100 м/с, а V(l) = 50 м/с.

Решение: Примем за независимую переменную время *t*, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки V будет функцией *t*, т. е. *V = V(t)*. Для нахождения *V(t)* воспользуемся вторым законом Ньютона (основным законом механики):

$$ma = F,$$

где a = V′(t) – есть ускорение движущегося тела, F – результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F=-kV^2$, k>0 – коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция *V=V(t)* является решением дифференциального уравнения

$$m \cdot V' = -kV^2$$

или

$$V' = -kV^2/m.$$

Здесь m – масса тела. $V = \dfrac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + c}$,

Как будет показано ниже (пример 2.2), где c – const. Найдя зависимость скорости от времени, легко найти скорость точки через 3 с после начала замедления.

Найдем сначала параметры k/m и c. Согласно условию задачи и ее решению, имеем:

V(0) = 1/c = 100 и V(1)=1/(k/m+c)=50,

отсюда

c =1/100, k/m=1/100.

Следовательно, скорость точки изменяется по закону

$$V = \frac{100}{t+1}.$$

Поэтому V (3) =25 м/с.

Другие задачи

Закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$$

где k>0 – коэффициент пропорциональности, *m(t)* – масса радия в момент *t*;

«Закон охлаждения тел», т.е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

где *T(t)* – температура тела в момент времени *t*, *k* – коэффициент пропорциональности, T_0 – температура воздуха (среды охлаждения);

Зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени *t* во многих случаях описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x$$

где *k* – коэффициент пропорциональности;

«Закон размножения бактерий» (зависимость массы *m* бактерий от времени *t*) описывается уравнением

$m' = km$, где k>0;

Закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$$

где *p(h)* – атмосферное давление воздуха на высоте *h*, *k* >0.

Основные сведения о дифференциальных уравнениях

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференци-альным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ –обыкновенноедифференциальное уравнение 1-го порядка. В общем виде записывается

$$F(x, y, y') = 0.$$

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ – обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка. В общем виде записывается

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение.Общимрешениемдифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция *y=φ(x,C)*, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких-либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C=C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \phi(x,C_0)$.

Определение. Решение вида $y=\phi(x,C_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Определение. Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y=\phi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка)

Если функция *f(x,y) непрерывна в некоторой области D* в плоскости *XOY* и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x,y)$, *то какова бы не была точка* (x_0,y_0) *в области D, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$, *определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *принимающее при* $x=x_0$ значение $\phi(x_0)=y_0$, *т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.*

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' + y = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей

уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$$y = \frac{C}{x}$$

– это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия:

$$x_0 = 1; y_0 = 2,$$

тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

Определение. Интегральной кривой называется график $y=\phi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Определение. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x,y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + y = 0.$$

Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь

$$C_1 = e^{C} \neq 0.$$

§ 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

ПЛАН:

- Примеры решений.
- Уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения кажутся чем-то запредельным и трудным в освоении и многим студентам. Такое мнение и такой настрой в корне неверен, потому что на самом деле дифференциальные уравнения – это просто и даже увлекательно.

Что нужно знать и уметь, для того чтобы научиться решать дифференциальные уравнения? Для успешного изучения дифференциальных уравнений вы должны хорошо уметь интегрировать и дифференцировать. Чем качественнее изучены темы Производная функции одной переменной и Неопределенный интеграл, тем будет легче разобраться в дифференциальных уравнениях.

Если у вас более или менее приличные навыки интегрирования, то тема практически освоена! Чем больше интегралов различных типов вы умеете решать – тем лучше. Почему? Придётся много интегрировать. И дифференцировать.

Определение: Дифференциальные уравнения вида ***f***
Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае содержит:

1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – важно чтобы в ДУ была первая производная y', и не было производных высших порядков – y'', y''', y'''' и т.д.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций часто имеет вид

$$y = f(x; C)$$

(где С – произвольная постоянная), который называется общим решением дифференциального уравнения.

Пример 1: Решить дифференциальное уравнение:

$$xy' = y$$

С чего начать решение? В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде. Вспоминаем громоздкое обозначение

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

которое многим из вас наверняка казалось нелепым и ненужным. В дифференциальных уравнениях рулит именно оно! Итак:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

На втором шаге смотрим, нельзя ли разделить переменные? Что значит разделить переменные? Грубо говоря, в левой части нам нужно оставить только «игреки», а в правой части организовать только «иксы». Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы *dx* и *dy* – это полноправные множители и активные участники боевых действий. В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только

«игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные:

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Как мы помним, к любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу С достаточно записать один раз (т.к. константа + константа всё равно равна другой константе). В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решённым. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено в неявном виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется общим интегралом дифференциального уравнения. То есть,

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

– это общий интеграл.

Ответ в такой форме вполне приемлем, но нет ли варианта получше? Давайте попытаемся получить общее решение.

Пожалуйста, запомните первый технический приём, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях тоже целесообразно записать под логарифмом.

То есть, вместо записи

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем свойство логарифмов

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

В данном случае:

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

Теперь логарифмы и **модули** можно убрать:

$$y = Cx$$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: Общее решение данного уравнения:

У=Сх,

где С=*const*.

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение

У=Сх

и дифференцируем его:

$$y' = (Cx)' = C$$

После чего подставляем

У=Сх

и производную

$$y' = C$$

в исходное уравнение

$$xy' = y.$$

$$x \cdot C = Cx$$

$$Cx = Cx$$

– получено верное равенство, значит, общее решение

$$y = Cx$$

удовлетворяет уравнению

$$xy' = y$$

что и требовалось проверить.

Придавая константе С различные значения, можно получить бесконечно много частных решений дифференциального уравнения. Ясно, что любая из функций

$$y = x,\ y = -3x,\ y = \frac{x}{5}$$

и т.д. удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy' = y.$$

Иногда общее решение называют семейством функций. В данном примере общее решение

$$y = Cx, \text{ где } C = const$$

– это семейство линейных функций, а точнее, семейство прямых пропорциональностей.

После обстоятельного разжевывания первого примера уместно ответить на несколько наивных вопросов о дифференциальных уравнениях:

1) В этом примере нам удалось разделить переменные. Всегда ли это можно сделать? Нет, не всегда. И даже чаще переменные разделить нельзя. Например, в однородных уравнениях первого порядка, необходимо сначала провести замену.

В других типах уравнений, например, в линейном неоднородном уравнении первого порядка, нужно использовать различные приёмы и методы для нахождения общего решения. Уравнения с разделяющимися переменными, которые мы рассматриваем на первом уроке – простейший тип дифференциальных уравнений.

2) Всегда ли можно проинтегрировать дифференциальное уравнение? Нет, не всегда. Очень легко придумать «навороченное» уравнение, которое не проинтегрировать, кроме того, существуют не берущиеся

интегралы. Но подобные ДУ можно решить приближенно с помощью специальных методов.

3) В данном примере мы получили решение в виде общего интеграла $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Всегда ли можно из общего интеграла найти общее решение, то есть, выразить «игрек» в явном виде? Нет не всегда. Например:

$$y + \ln|y| = \arcsin x + xy^2 + C$$

Ну и как тут выразить «игрек»?! В таких случаях ответ следует записать в виде общего интеграла. Кроме того, иногда общее решение найти можно, но оно записывается настолько громоздко и коряво, что уж лучше оставить ответ в виде общего интеграла.

4) Еще одно простое ДУ и еще один типовой приём решения:

Пример 2: Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y' = -2y$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = 2$$

Решение: По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить, мальчики – налево, девочки – направо:

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константу нарисовали с надстрочной звездочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем старое, доброе, школьное:

$$\ln a = b \Rightarrow a = e^b.$$

В данном случае:

$$y = e^{-2x + C^*}$$

Константу в показателе обычно спускают с небес на землю. Если подробно, то происходит это так. Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$$y = Ce^{-2x}$$

Запомните «снос» константы – это второй технический приём, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений.

Итак, общее решение:

$$y = Ce^{-2x}, \text{ где } C = const.$$

Такое вот симпатичное семейство экспоненциальных функций.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлет-воряющее заданному начальному условию

$$y(0) = 2$$

Это тоже просто.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы С, чтобы выполнялось условие

$$y(0) = 2$$

Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2 = Ce^{-2\cdot 0}$$
$$2 = Ce^{0}$$
$$2 = C\cdot 1$$

То есть,

$$C = 2$$

Стандартная версия оформления:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^{0} = C = 2$$

Теперь в общее решение

$$y = Ce^{-2x}$$

подставляем найденное значение константы

$$C = 2, y = 2e^{-2x}$$

– это и есть нужное нам частное решение.

Ответ: Частное решение данного уравнения:

$$y = 2e^{-2x}$$

Выполним проверку. Проверка частного решение включает в себя два этапа:

Сначала необходимо проверить, а действительно ли найденное частное решение

$$y = 2e^{-2x}$$

удовлетворяет начальному условию

$$y(0) = 2$$

Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится:

$$y(0) = 2e^{-2\cdot 0} = 2e^{0} = 2\cdot 1 = 2.$$

действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение

$$y = 2e^{-2x}$$

и находим производную:

$$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x}\cdot(-2x)' = -4e^{-2x}$$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$

в исходное уравнение

$$y' = -2y.$$
$$-4e^{-2x} = -2\cdot 2e^{-2x}$$
$$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}$$

– получено верное равенство.

Вывод: Частное решение найдено правильно.

Переходим к более содержательным примерам.

Пример 3: Решить дифференциальное уравнение

$$y' + (2y+1)ctgx = 0$$

Решение: Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Оцениваем, можно ли разделить переменные? Можно. Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx}=-(2y+1)ctgx$$

И перекидываем множители по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{2y+1}=-ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int\frac{dy}{2y+1}=-\int ctgxdx$$

Интеграл левой части легко найти методом подведения функции под знак дифференциала, с интегралом от котангенса расправляемся стандартным приемом, который мы рассматривали на уроке "Интегрирование тригонометрических функций":

$$\int\frac{dy}{2y+1}=-\int\frac{\cos xdx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(2y+1)}{2y+1}=-\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1|=-\ln|\sin x|+\ln|C|$$

В правой части у нас получился логарифм, и, согласно первой технической рекомендации, константу тоже следует записать под логарифмом.

Теперь пробуем упростить общий интеграл. Поскольку у нас одни логарифмы, то от них вполне можно (и нужно) избавиться. С помощью **известных свойств** максимально «упаковываем» логарифмы. Расписываем очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}}=\ln|\sin x|^{-1}+\ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1}=\ln\frac{1}{|\sin x|}+\ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1}=\ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

$$\sqrt{2y+1}=\frac{C}{\sin x}$$

Можно ли выразить «игрек»? Можно. Надо возвести в квадрат обе части.

Но делать этого не нужно.

Третий технический совет: Если для получения общего решения нужно возводить в степень или извлекать корни, то в большинстве случаев следует воздержаться от этих действий и оставить ответ в виде общего интеграла. Дело в том, что общее решение будет смотреться просто ужасно – с большими корнями, знаками $\pm$.

Поэтому ответ запишем в виде общего интеграла. Хорошим тоном считается представить его в виде

$$F(x;y)=C$$

то есть, в правой части, по возможности, оставить только константу.

Ответ: Общий интеграл:

$$\sqrt{2y+1}\cdot\sin x=C,\ \text{где } C=const$$

Примечание: Общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если ваш результат не совпал с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Пример 4: Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y\ln y+xy'=0$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(1)=e$$

Это пример для самостоятельного решения.

Напоминаю, что алгоритм состоит из двух этапов:

нахождение общего решения;
нахождение требуемого частного решения.

Пример5: Найти частное решение дифференциального уравнения

$$e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = \ln 2.$$

Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^{y} \cdot e^{-x^2}dy - 2xdx = 0$$

$$e^{y} \cdot e^{-x^2}dy = 2xdx$$

$$e^{y}dy = \frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^{y}dy = 2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^{y}dy = 2\int xe^{x^2}dx$$

Интеграл слева – табличный, интеграл справа – берем методом подведения функции под знак дифференциала:

$$\int e^{y}dy = \int e^{x^2}d(x^2)$$

$$e^{y} = e^{x^2} + C$$

Общий интеграл получен, нельзя ли удачно выразить общее решение? Можно. Навешиваем логарифмы на обе части. Поскольку они положительны, то знаки модуля излишни:

$$\ln e^{y} = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

Надеюсь, всем понятно преобразование

$$\ln e^{y} = y\ln e = y \cdot 1 = y.$$

Итак, общее решение:

$$y = \ln(e^{x^2} + C),\ \text{где}\ C = const$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию

$$y(0) = \ln 2$$

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» логарифм двух:

$$\ln 2 = \ln(e^{0} + C)$$

$$\ln 2 = \ln(1 + C) \Rightarrow C = 1$$

Более привычное оформление:

$$y(0) = \ln(e^{0} + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$$

Подставляем найденное значение константы

$$C = 1$$

в общее решение.

Ответ: Частное решение:

$$y = \ln(e^{x^2} + 1)$$

Проверка: Сначала проверим, выполнено ли начальное условие

$$y(0) = \ln 2.$$

$$y(0) = \ln(e^{0} + 1) = \ln(1 + 1) = \ln 2$$

Теперь проверим, а удовлетворяет ли вообще найденное частное решение

$$y = \ln(e^{x^2} + 1)$$

дифференциальному уравнению. Находим производную:

$$y' = (\ln(e^{x^2}+1))' = \frac{1}{(e^{x^2}+1)} \cdot (e^{x^2}+1)' = \frac{1}{(e^{x^2}+1)} \cdot e^{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}$$

Смотрим на исходное уравнение:

$$e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$$

– оно представлено в дифференциалах. Есть два способа проверки. Можно из найденной производной выразить дифференциал dy:

$$y' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)} \Rightarrow dy = \frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)}$$

Подставим найденное частное решение

$$y = \ln(e^{x^2}+1)$$

и полученный дифференциал

$$dy = \frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)}$$

в исходное уравнение

$$e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0:$$

$$e^{\ln(e^{x^2}+1)-x^2} \cdot \frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)} - 2xdx = 0$$

$$e^{\ln(e^{x^2}+1)} \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)} - 2xdx = 0$$

Используем основное логарифмическое тождество

$$e^{\ln a} = a:$$

$$(e^{x^2}+1) \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)} - 2xdx = 0$$

$$2xe^{x^2-x^2}dx - 2xdx = 0$$

$$2xdx - 2xdx = 0$$

$$0 = 0$$

Получено верное равенство, значит, частное решение найдено правильно.

Второй способ проверки зеркален и более привычен: из уравнения

$$e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$$

выразим производную, для этого разделим все штуки на dx:

$$\frac{e^{y-x^2}dy}{dx} - \frac{2xdx}{dx} = \frac{0}{dx}$$

$$e^{y-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$e^{y-x^2} \cdot y' - 2x = 0$$

И в преобразованное ДУ подставим полученное частное решение

$$y = \ln(e^{x^2}+1)$$

и найденную производную

$$y' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}.$$

В результате упрощений тоже должно получиться верное равенство.

Пример 6.

Решить дифференциальное уравнение

$$\sqrt{3+y^2}dx + \sqrt{1-x^2}ydy = 0.$$

Ответ представить в виде общего интеграла

$$F(x;y) = C$$

Это пример для самостоятельного решения.

Какие трудности подстерегают при решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными?

1) Не всегда очевидно, что переменные можно разделить. Рассмотрим условный пример:

$$\sqrt{xy-2x}\cdot y'+xy^2+5y^2=0.$$

Здесь нужно провести вынесение множителей за скобки:

$$\sqrt{x(y-2)}\cdot y'+y^2(x+5)=0$$

и отделить корни:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y-2}\cdot y'+y^2(x+5)=0.$$

Как действовать дальше – понятно.

2) Сложности при самом интегрировании. Интегралы нередко возникают не самые простые, и если есть изъяны в навыках нахождения **неопределенного интеграла**, то со многими дифференциальными уравнениями придется туго.

3) Преобразования с константой. Как все заметили, с константой в дифференциальных уравнениях можно обращаться достаточно вольно, и некоторые преобразования не всегда понятны новичку.

Рассмотрим ещё один условный пример:

$$\frac{1}{2}\ln|1-x|=\frac{1}{2}\ln\left|y^2-3\right|+C^*.$$

В нём целесообразно умножить все слагаемые на 2:

$$\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+2C^*.$$

Полученная константа $2C^*$ – это тоже какая-то константа, которую можно обозначить через C^{**}:

$$\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+C^{**}.$$

Да, и коль скоро в правой части логарифм, то константу С целесообразно переписать в виде другой константы:

$$\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+\ln|C|.$$

В результате запись решения принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\ln|1-x|=\frac{1}{2}\ln\left|y^2-3\right|+C$$

$$\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+C$$

$$\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+\ln|C|$$

Тут же ошибки! Строго говоря – да. Однако с содержательной точки зрения – ошибок нет, ведь в результате преобразования варьируемой константы всё равно получается варьируемая константа.

Или другой пример, предположим, что в ходе решения уравнения получен общий интеграл

$$-y^3-y-x^2-\ln x=C.$$

Такой ответ выглядит некрасиво, поэтому у каждого слагаемого целесообразно сменить знак:

$$y^3+y+x^2+\ln x=C$$

Формально здесь опять ошибка – справа следовало бы записать – С. Но неформально подразумевается, что «минус цэ» – это всё равно константа (*которая с тем же успехом принимает любые значения!*), поэтому ставить «минус» не имеет смысла и можно использовать ту же букву С.

<u>Пример 7:</u>

Решить дифференциальное уравнение:

$$2(xy+y)y'+x(y^4+1)=0.$$

<u>Решение:</u> Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные:

$$2(x+1)y\cdot\frac{dy}{dx}=-x(y^4+1)$$

$$\frac{2ydy}{y^4+1}=-\frac{xdx}{x+1}$$

Интегрируем:

$$2\int\frac{ydy}{y^4+1}=-\int\frac{(x+1-1)dx}{x+1}$$

$$\int\frac{d(y^2)}{(y^2)^2+1}=-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$arctg(y^2)=-x+\ln|x+1|+C$$

Константу C тут не обязательно определять под логарифм, поскольку ничего путного из этого не получится.

Ответ: Общий интеграл:

$$arctg(y^2)+x-\ln|x+1|=C,\text{ где } C=const$$

Пример 8:

Найти частное решение ДУ.

$$2y'\sin y\cdot\cos y\cdot\sin^2 x+\cos x=0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Это пример для самостоятельного решения. Единственная подсказка – здесь получится общий интеграл, и, правильнее говоря, нужно исхитриться найти не частное решение, а *частный интеграл*.

Как уже отмечалось, в дифференциальных уравнениях с разделяющи-мися переменными нередко вырисовываются не самые простые интегралы. И вот еще парочка таких примеров для самостоятельного решения. Рекомендую всем про решать примеры № 9-10, независимо от уровня подготовки, это позволит актуализировать навыки нахождения интегралов или восполнить пробелы в знаниях.

Пример 9:

Решить дифференциальное уравнение:

$$(1+e^x)ydy-e^ydx=0$$

Пример 10:

Решить дифференциальное уравнение:

$$y-xy'=3(1+x^2y')$$

Помните, что общий интеграл можно записать не единственным способом, и внешний вид ваших ответов может отличаться от внешнего вида моих ответов. Краткий ход решения и ответы в конце урока.

Решения и ответы:

Пример 11:

Решение: *Найдем общее решение. Разделяем переменные:*

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=-y\ln y$$

$$\frac{dy}{y\ln y}=-\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=-\ln|x|+\ln|C|$$

Общий интеграл получен, пытаемся его упростить. Упаковываем логарифмы и избавляемся от них:

$$\ln|\ln y|=\ln\frac{1}{|x|}+\ln|C|$$

$$\ln|\ln y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\ln y=\frac{C}{x}$$

Выражаем функцию в явном виде, используя

$$\ln a = b \Rightarrow a = e^{b}.$$

Общее решение:

$$y = e^{\frac{C}{x}},\ \text{где } C = const$$

§ 3. Однородные уравнения

ПЛАН:

- Однородные уравнения.
- Уравнения, приводящиеся к однородным.

Однородные уравнения

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n-го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^{n} f(x, y).$$

Пример 1. Является ли однородной функция

$$f(x, y) = x^{3} + 3x^{2}y?$$

$$f(tx, ty) = (tx)^{3} + 3(tx)^{2}ty = t^{3}x^{3} + 3t^{3}x^{2}y = t^{3}(x^{3} + 3x^{2}y) = t^{3} f(x, y)$$

Таким образом, функция *f(x,y)* является однородной 3-го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

является однородным, если функции *P(x,y)* и *Q(x,y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения

основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция *f(x,y)* – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что

$$t = \frac{1}{x}.$$

Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента

$$u = \frac{y}{x},\ \text{т.е.}$$

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u)$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем

$$y = ux,\quad y' = u'x + ux'.$$

$$u'x + ux' = \varphi(u);\quad u'x + u = \varphi(u);\quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

такимобразом,получилиуравнениесразделяющимися переменными отно-сительно неизвестной функции *u*.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x};\quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.

Введем вспомогательную функцию u.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция u всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее

$$h\ u = h\ \frac{y}{x}.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x};$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

Уравнения, приводящиеся к однородным

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \qquad y = v + \beta;$$

где α и β – решения системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение:

$$(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0.$$

Получаем

$$(x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3};$$

Находим значение определителя

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases};$$

Применяем подстановку

$$x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5;$$

в исходное уравнение:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$

$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0;$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заменяем переменную

$$\frac{v}{u} = t; \quad v = ut; \quad v' = t'u + t;$$

при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dt}{du}u=\frac{2+t}{2t-1}-t=\frac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$$

$$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln|u|+\ln C_1$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right|=-2\ln|C_1u|$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2=\frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t=\frac{v}{u}=\frac{y-7/5}{x+1/5}=\frac{5y-7}{5x+1}; \quad u=x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1}-\left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2=\frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2+(5y-7)(5x+1)-(5y-7)^2=25C_2$$

$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49=25C_2$$

$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2=25C_2+49-1+7$$

$$x^2-x+xy+3y-y^2=C_2+\frac{55}{25}=C;$$

Итого, выражение

$$x^2-x+xy+3y-y^2=C$$

является общим интегралом исходного

дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,$$

то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax+by=t.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0.$$

Получаем

$$2(x+y)\frac{dy}{dx}=-3x-3y+1; \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-3x-3y+1}{2x+2y}=-\frac{3x+3y-1}{2x+2y};$$

Находим значение определителя

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-6+6=0;$$

Применяем подстановку

$$3x+3y=t.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t'}{3}-1;$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3}-1=-\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3)=-9t+9; \quad 2tt'=6t-9t+9; \quad 2tt'=-3t+9;$$

Разделяем переменные:

$$\frac{2t}{-3t+9}dt=dx; \qquad \frac{t}{t-3}dt=-\frac{3}{2}dx;$$

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt=-\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t+3\ln|t-3|=-\frac{3}{2}x+C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции у и переменной х.

$$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)|=-x+C_2;$$

$$3x+2y+2\ln 3+2\ln|x+y-1|=C_2;$$

$$3x+2y+2\ln|x+y-1|=C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

§ 4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним

ПЛАН:

- Линейные однородные дифференциальные уравнения.
- Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.
- Метод Бернулли и метод Лагранжа.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)* - функции непрерывные на некотором промежутке

a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y'+P(x)y=0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx;$$

Общее решение: $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

<u>Линейные неоднородные дифференциальные уравнения</u>

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0*) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

<u>Метод Бернулли.</u>

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций

$$y=uv.$$

При этом очевидно, что

$$y'=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

- дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)uv=Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как

$$y = 1 \cdot 2x^2; \quad y = 2 \cdot x^2; \quad y = 2x \cdot x; \quad \text{и т.п.}$$

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0.$$

Таким образом, возможно получить функцию u, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим поученное выражение для функции u в исходное уравнение

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1;$$

$$v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения

$$y = uv,$$

которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),$$

C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

<u>Метод Лагранжа.</u>

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом вариации произвольной постоянной.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования

произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

Пример. Решить уравнение $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:

$$y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}.$$

Применим полученную выше формулу:

$$P = \frac{1}{x^2}; \quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int \frac{1}{x^2}dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int adx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

§ 5. Уравнения Бернулли и Риккати

ПЛАН:

- Уравнение Бернулли.
- Обобщенные уравнения Бернулли.

Уравнение Бернулли

Определение. **Уравнением Бернулли** называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку

$$z = \frac{1}{y^{n-1}},$$

с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что

$$z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}}\cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$$

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx}dx + C\right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

Пример 1. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$

Разделим уравнение на xy^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = \ln x.$$

Полагаем

$$z = \frac{1}{y}; \quad z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем

$$P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\ln x$$

$$z = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int\frac{dx}{x}}dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x}dx + C\right)$$

$$z = x\left(\int -\ln x\cdot\frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right)$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Пример 2. Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}.$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

Полагаем

$$z = \sqrt{y}; \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'; \quad y' = 2\sqrt{y}z';$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z' - \frac{4}{x}z = x; \qquad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z} = 2\int\frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln z = 2\ln x + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Полагаем *C=C(x)* и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \qquad C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_2;$$

Получаем: $z = x^2\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right);$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y = x^4\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

Обобщенные уравнения Бернулли

Определение. Обобщенным уравнением Бернулли называется уравнение

$$\varphi'(y)y' + a(x)\varphi(y) = b(x)$$

где $\varphi(y)$ - некоторая дифференцируемая функция. Делая замену

$$z = \varphi(y)$$

(тогда $z' = \varphi'(y)y'$), придем к линейному уравнению

$$z' + a(x)z = b(x).$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{y'}{y} + \frac{\ln y}{x} = 1$$

Решение. Роль функции $\varphi(y)$ в этом уравнении играет функция $\ln y$. Полагая

$$z(x) = \ln y(x),\ z' = \frac{y'}{y},$$

придем к уравнению

$$z' + \frac{z}{x} = 1.$$

Решая это уравнение, найдем

$$z = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}.$$

Делая обратную замену, получим

$$\ln y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}$$

Уравнения Рикати

Определение. Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \qquad (1)$$

называется уравнением Риккати. В отличие от всех уравнений, рассматривавшихся ранее, уравнение Риккати не всегда интегрируется в квадратурах. Чтобы решить его, необходимо знать хотя бы одно частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения. Тогда замена $y = y_1 + z$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли. Однако, проще сразу сделать замену

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y - y_1},$$

Которая сводит уравнение Риккати к линейному.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$xy' + y^2 - 2y = 4x^2 - 2x \qquad (2)$$

Решение. Прежде всего нужно найти частное решение. Заметим, что правая часть уравнения является многочленом второй степени от x и y. Это наводить на мысль искать частное решение в виде

$$y = ax + b.$$

Подставив это выражение в уравнение, придем к необходимости выполнения тождества:

$$ax^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ax - 2b \equiv 4x^2 - 2x.$$

Приравняем коэффициенты при x^2, x и свободные члены. Получим переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ a + 2ab - 2a = -2 \\ b^2 - 2b = 0 \end{cases}$$

Однако, легко видеть, что пара чисел $a = 2$, $b = 0$ является ее решением. Значит, $y_1 = 2x$ есть частное решение уравнения (2).

Делаем замену неизвестной функции

$$y = 2x + \frac{1}{z}.$$

Тогда

$$y' = 2 - \frac{z'}{z^2}.$$

Подставляя это в уравнение (4.11) и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение

$$-\frac{2z'x}{z^2} = -\frac{4x}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} \text{ или } z' + \left(\frac{1}{x} - 2\right)z = \frac{1}{2x}.$$

Его решение имеет вид

$$z = -\frac{1}{4x} + \frac{C}{x}e^{2x}.$$

Сделав обратную подстановку $z = \frac{1}{y - 2x}$, найдем общий интеграл уравнения (4.11):

$$\frac{1}{y - 2x} = \frac{4Ce^{2x} - 1}{4x}$$

Записав выражение $4C$ как новую произвольную постаянную C, выразим из полученного соотношения y:

$$y = 2x + \frac{4x}{Ce^{2x} - 1}$$

§ 6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

ПЛАН:

- Уравнения в полных дифференциалах
- Уравнения вида y = f(y′) и x = f(y′)
- Интегрирующий множитель
- Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x,y)$

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции u, после чего решение легко находится в виде:

$$du = 0; \quad u = C.$$

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции u;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u, то можно записать:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по у, а второе – по х:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем необходимое и достаточное условие того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется условием тотальности.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u*.

Проинтегрируем равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

$$u = \int M(x,y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная у полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по у.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо

проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от х. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по х равна нулю.

$$[C'(y)]_x' = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию С(у):

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции *u*, получаем:

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Пример 1. Решить уравнение

$$(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$$

Проверим условие тотальности:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x;$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u.

$$u=\int M(x,y)dx+C(y)=\int(3x^2+10xy)dx+C(y)=x^3+5x^2y+C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=5x^2+C'(y)=N(x,y)=5x^2-1;$$

$$C'(y)=-1;\quad C(y)=\int(-1)dy=-y+C_1$$

Итого, $u=x^3+5x^2y-y+C_1$.

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u=x^3+5x^2y-y+C_1=C_2;.$$

$$x^3+5x^2y-y=C.$$

Уравнения вида y = f(y') и x = f(y')

Решение уравнений, не содержащих в одном случае аргументах,а в другом – функции у, ищем в параметрической форме, принимая за параметр производную неизвестной функции.

$$y'=p.$$

Для уравнения первого типа получаем:

$$y=f(p);\qquad y'=f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Делая замену, получаем:

$$p=f'(p)\frac{dp}{dx};$$

В результате этих преобразований имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$dx=\frac{f'(p)}{p}dp,\qquad x=\int\frac{f'(p)}{p}dp+C.$$

Общий интеграл в параметрической форме представляется системой уравнений:

$$\begin{cases}x=\int\frac{f'(p)}{p}dp+C\\ y=f(p)\end{cases}$$

Исключив из этой системы параметр р, получим общий интеграл и не в параметрической форме.

Для дифференциального уравнения вида $x=f(y')$ с помощью той же самой подстановки и аналогичных рассуждений получаем результат:

$$\begin{cases}y=\int pf'(p)dp+C\\ x=f(p)\end{cases}$$

Интегрирующий множитель

Определение. Функция $M(x,y)\neq 0$, после умножения на которую, уравнение вида (6.1) превращается в уравнение в полных дифференциалах, называется интегрирующим множителем для этого уравнения.

Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные, отличные от нуля одновременно, то интегрирующий множитель существует. Однако нет общего метода для его нахождения.

Приведем один из них.

Если известно, что $\mu=\mu(\omega)$, где $\omega=\omega(x,y)$ – известная дифференцируемая функция, то интегрирующий множитель μ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$ **(1)**

Пример 2. Решить уравнение

$$\left(xy^2-3y^3\right)dx+\left(1-3xy^2\right)dy=0.$$

Положим

$$M(x,y)=xy^2-3y^3,\quad N(x,y)=1-3xy^2.$$

Тогда $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy-9y^2;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-3y^2.$

Подставим полученные выражения в (6.3), получим

$$\left(\left(1-3xy^2\right)\frac{\partial\omega}{\partial x}-\left(xy^2-3y^3\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega}=\left(2xy-6y^2\right)\mu \quad \textbf{(2)}$$

Предположим, что $\omega=x$, тогда (2) преобразуется в выражении вида

$$\left(\left(1-3xy^2\right)\cdot 1-\left(xy^2-3x^3\right)\cdot 0\right)\frac{d\mu}{dx}=\left(2xy-6y^2\right)\mu,$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2y(x-3y)}{1-3xy^2}dx.$$

Замечаем, что функция ω не может зависеть только от x, поскольку в последнем выражении в правой части функция, зависящая от x и y. Испытаем теперь множитель $\omega=y$.

Подставим в (2), получим

$$\left(-xy^2+3y^3\right)\frac{d\mu}{dy}=\left(2xy-6y^2\right)\mu,$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-2y\left(x-3y\right)}{-y^2\left(x-3y\right)}dy,$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{y}dy,$$

$$\ln\mu=-2\ln y,$$

$$\mu=y^{-2}$$

- интегрирующий множитель.

Домножаем исходное уравнение на $\frac{1}{y^2}$, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\left(x-3y\right)dx+\left(\frac{1}{y^2}-3x\right)dy=0.$$

$$M\left(x,y\right)=x-3y,\quad N\left(x,y\right)=\frac{1}{y^2}-3x \quad \Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Пусть

$$F_x'\left(x,y\right)=x-3y,\quad F_y'=\frac{1}{y^2}-3x.$$

Тогда

$$F\left(x,y\right)=\int F_x'dx=\int\left(x-3y\right)dx=\frac{x^2}{2}-3yx+\varphi\left(y\right).$$

Поскольку $\left(\frac{x^2}{2}-3yx+\varphi\left(y\right)\right)_y'=F_y',$

то получаем

$$-3x+\varphi'\left(y\right)=\frac{1}{y^2}-3x,$$

$$\varphi'\left(y\right)=\frac{1}{y^2}\Rightarrow\varphi\left(y\right)=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}+C.$$

Подставляя значение $\varphi\left(y\right)$ в $F\left(x,y\right)$, получаем общее решение исходного уравнения

$$\frac{x^2}{2}-3yx-\frac{1}{y}=C.$$

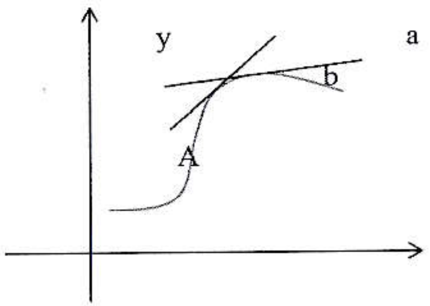
Замечание. Если выражение $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ зависит только от переменной x, то интегрирующий множитель можно вычислить следующим образом

$$\mu=Ce^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}.$$

Если выражение $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ зависит только от переменной y, то интегрирующий множитель можно вычислить следующим образом

$$\mu=Ce^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}dy}.$$

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



Как уже говорилось выше, линия S, которая задается функцией, являющейся каким-либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная y' является угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.

В любой точке A(x,y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки А можно наглядно изобразить поле направлений кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется полем направлений.

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые,

у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

Определение. Линии равного наклона в поле направлений называются изоклинами.

§ 7. Уравнения, неразрешенные относительно производной

ПЛАН:

- Нерешенные уравнения первого порядка относительно производной
- Неполные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной, - уравнение, которое можно записать в виде

$$y' = f(x, y).$$

В общем случае дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Определение. Если из уравнения $F(x, y, y') = 0$ нельзя выразить y', то уравнение называ

ют не разрешенным относительно производной.

Рассмотрим некоторые частные случаи таких уравнений.

Уравнения, разрешаемые относительно y' неоднозначно

Пусть

$$F(x, y, y') = 0.$$

такова, что его можно разрешить относительно y' неоднозначною

Тогда уравнение $F(x, y, y') = 0.$ эквивалентно к различным уравнениям

$$y' = f_1(x, y),\ y' = f_2(x, y),\ y' = f_3(x, y), \dots,\ y' = f_k(x, y) \qquad (1)$$

Предположим, что для каждого из уравнений (1) найден общий интеграл:

$$\Phi_1(x,y,C)=0,\ \Phi_2(x,y,C)=0,\ \dots,\ \Phi_k(x,y,C)=0, \qquad (2)$$

Совокупностьобщихинтегралов(2)называетсяобщим интегралом уравненияб разрешаемого относительно y' неоднозначно.

Замечания.

1)Совокупность (2) можно записать в виде

$$\Phi_1(x,y,C)\cdot\Phi_2(x,y,C)\cdot\ \dots\ \cdot\Phi_k(x,y,C)=0,$$

2)Если уравнение $F(x,y,y')=0$ разрешаеться относительно y' неоднозначно, то через каждую точку $M_0(x_0,y_0)$ области,в которой рассматривается уравнение, будет проходить в общем случае k интегральных кривых.

Однако условие единственности для этой точки будет считаться нарушенным только в том случае, когда хотя бы две кривые в точке M_0

Будут иметь общую касательную.

ПРИМЕР 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(y')^2-4x^2=0.$$

Найти решение, удовлетворяющее условию

$$a)\ y(1)=1, \qquad б)\ y(0)=0$$

Неполные уравнения

1)Уравнения, содержащее только производную

Пусть уравнение имеет вид $F(y')=0$.

Корни этого уравнения не зависят от x и y, то есть y' является константой.

Пусть

$$y'=k_i$$

удовлетворяет уравнению $F(y')=0$.

Тогда

$$y'=k_i x+C,$$

$$\Rightarrow \quad k_i=\frac{y-C}{x}$$

$\Rightarrow$ Общий интеграл уравнения будеть иметь вид

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$$

2)Уравнения, не содержащие искомой функции

Пусть уравнение имеет вид

$$F(x,y')=0. \qquad (3)$$

Возможны 2 случая:

a) (3) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;

b) (3) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, то есть может быть заменено двумя уравнениями вида $x=\varphi(t),\ \ y'=\psi(t)$.

Тогда решения уравнения (3) могут быть найдены в параметрическом виде.

Имеем:

$$y'=\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow dy=y'\cdot dx,$$

$$x=\varphi(t) \quad \Rightarrow dx=\varphi'\cdot dt,$$

$$\Rightarrow dy=\psi(t)\cdot\varphi'\cdot dt,$$

$$\Rightarrow y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (3) имеют параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C. \end{cases} \qquad (4)$$

Замечания.

1)Общий интеграл уравнения (3) получается исключением параметра t из системы (4) (если это возможно).

2)Если уравнение (3) можно разрешить относительно $\tilde{o}$,то есть записать в виде $x=\varphi(y')$,то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

Тогда

$$x = \varphi(y') = \varphi(t), \quad y' = t = \psi(t).$$

Подставляя в (4), получаем:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int t \cdot \varphi'(t) dt + C. \end{cases}$$

3)Уравнения, не содержащие независимой переменной

Пусть уравнение имеет вид

$$F(y, y') = 0 \quad (5)$$

Возможны 2 случая:

c) (5) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;

d) (5) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, то есть может быть заменено двумя уравнениями вида

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Тогда решения уравнения (5) могут быть найдены в параметрическом виде.

Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'}$$

$$y = \varphi(t) \quad \Rightarrow dy = \varphi' \cdot dt,$$

$$\left.\begin{matrix} dy = \varphi' \cdot dt, \\ y' = \psi(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt,$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (5) имеют параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases} \quad (6)$$

Замечания.

1)Общий интеграл уравнения (5) получается исключением параметра t из системы (6) (если это возможно).

2)Если уравнение (5) можно разрешить относительно y, то есть записать в виде $y = \varphi(y')$, то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

Тогда

$$x = \varphi(y') = \varphi(t), \quad y' = t = \psi(t).$$

Подставляя в (20), получаем:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ с начальным условием y(1) = e.

Это уравнение может быть приведено к виду уравнения с разделяющимися переменными с помощью замены переменных.

Обозначим:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u; \qquad \frac{y}{x} = e^u; \qquad y = xe^u; \qquad y' = xu'e^u + e^u;$$

Уравнение принимает вид:

$$xu'e^u + e^u = e^u u, \qquad xu' + 1 = u, \qquad xu' = u - 1;$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$x\frac{du}{dx} = u - 1; \qquad \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{u-1}=\int\frac{dx}{x};\qquad \ln|u-1|=\ln|x|+\ln C;\qquad u-1=Cx;$$

Сделаем обратную замену:

$$Cx=\ln\left(\frac{y}{x}\right)-1;\qquad \ln\left(\frac{y}{x}\right)=Cx+1;\qquad \frac{y}{x}=e^{Cx+1};$$

Общее решение: $y=xe^{Cx+1}$;

С учетом начального условия y(1) = e:

$$e=e^{C+1};\qquad C=0;$$

Частное решение: $y=ex$;

<u>Второй способ решения.</u>

$$xy'=y\ln\frac{y}{x};$$

$$xy'=y\ln y-y\ln x;$$

$$y'-\frac{y}{x}\ln y=-\frac{y}{x}\ln x;$$

Получилилинейноенеоднородноедифференциальное уравнение. Соответствующее однородное:

$$y'-\frac{y}{x}\ln y=0;$$

$$y'=\frac{y}{x}\ln y;\qquad \frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{x};\qquad \int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln C;\qquad \ln y=Cx;\qquad y=e^{Cx};$$

Решение исходного уравнения ищем в виде:

$$y=e^{C(x)x};$$

Тогда

$$y'=e^{C(x)x}\left(C'(x)x+C(x)\right);$$

Подставим полученные результаты в исходное уравнение:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x+C(x)\right)=e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x};$$

$$x^2C'(x)+xC(x)=C(x)x-\ln x;$$

$$x^2C'(x)=-\ln x;\qquad C'(x)=-\frac{\ln x}{x^2};$$

$$C(x)=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=\dfrac{dx}{x^2}; \\ du=\dfrac{dx}{x}; & v=-\dfrac{1}{x}; \end{matrix}\right\}=-\left[-\frac{\ln x}{x}-\int\frac{-dx}{x^2}\right]=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C;$$

$$y=e^{C(x)x}=e^{\ln x+1+Cx}=xe^{Cx+1};$$

Получаем общее решение: $y=xe^{Cx+1}$;

<u>Пример 3.</u> Решить дифференциальное уравнение с начальным условием y(1)=0.

$$y'+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}=0$$

В этом уравнении также удобно применить замену переменных.

$$e^{\frac{y}{x}}=u;\qquad \frac{y}{x}=\ln u;\qquad y=x\ln u;\qquad y'=\ln u+\frac{xu'}{u};$$

Уравнение принимает вид:

$$\ln u+\frac{xu'}{u}+u-\ln u=0;\qquad xu'+u^2=0;$$

$$xu'=-u^2;\qquad \frac{du}{u^2}=-\frac{dx}{x};\qquad \int\frac{du}{u^2}=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{u}=\ln|x|+\ln C;\qquad \frac{1}{u}=\ln Cx;$$

Делаем обратную подстановку:

$$e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx;\qquad -\frac{y}{x}=\ln(\ln Cx);$$

Общее решение:

$$y=-x\ln(\ln Cx);$$

С учетом начального условия y(1) = 0:

$$0=-\ln(\ln C);\qquad C=e;$$

Частное решение: $y=-x\ln(\ln ex)$;
Второй способ решения.

$$y'+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}=0$$

Замена переменной:

$$u=\frac{y}{x};\quad y=ux;\quad y'=u'x+u;$$

$$u'x+u+e^{u}-u=0$$

$$u'x+e^{u}=0$$

$$\frac{du}{dx}x=-e^{u}$$

$$-e^{-u}du=\frac{dx}{x}$$

$$-\int e^{-u}du=\int\frac{dx}{x};$$

$$e^{-u}=\ln|x|+\ln C;\qquad e^{-u}=\ln|Cx|;$$

$$-u=\ln(\ln|Cx|);\qquad u=-\ln(\ln|Cx|);$$

Общее решение: $y=-x\ln(\ln Cx)$;

§ 8. Общий метод введения параметра. уравнения Лагранжа и Клеро. метод введения параметра.

ПЛАН:

- Общий метод введения параметра.
- Уравнения Лагранжа и Клеро.
- Метод введения параметра.

Общий метод введения параметра

Пусть уравнение $F(x,y,y')=0$ можно разрешить относительно y, т.е. записать в виде

$$y=f(x,y').$$

Введя параметр

$$p=\frac{dy}{dx}=y',\qquad (1)$$

получим

$$y=f(x,p).\qquad (2)$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив dy на pdx (из (1)), получим уравнение вида

$$M(x,p)dx+N(x,p)dp=dy.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x=\varphi(p)$, то воспользовавшись равенством (2), получим решение исходного уравнения в параметрической записи:

$$\begin{cases} x=\varphi(p), \\ y=f(\varphi(p),p). \end{cases}$$

Замечание. Уравнение вида $x=f(y,y')$ решаются тем же методом.

Пример 1. Решить уравнение $y-xy'+y'^2=0$.

Данное уравнение разрешимо относительно y:

$$y=xy'-y'^2.\qquad (3)$$

Полагая $y'=p$, выражение (3) перепишется в виде

$$y=xp-p^2.\qquad (4)$$

Продифференцируем обе части равенства (4), приняв во внимание, что

$$dy=pdx.$$

Получим

$$dy=pdx+xdp-2pdp\Rightarrow pdx=pdx+xdp-2pdp\Rightarrow(x-2p)dp=0.$$

Последнее уравнение дает решения

$$x = 2p \quad и \quad p = C.$$

Подставляя полученные решения в (4) получаем решения исходного уравнения:

а) $\begin{cases} x = 2p, \\ y = 2p^2 - p^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2p, \\ y = p^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{x}{2}, \\ y = p^2, \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$

б) $p = C \Rightarrow y = Cx - C^2.$

Общее решение $\left(y - \dfrac{x^2}{4}\right)\left(y - Cx + C^2\right) = 0.$

Пример 2. Решить уравнение $y' - x + y'^3 = 0$.

Данное уравнение разрешимо относительно x:
$x = y' + y'^3$.

Полагая

$$y' = p,$$

получаем

$$x = p + p^3.$$

Продифференцировав обе части последнего выражения и заменяя dx на $\dfrac{dy}{p}$, получаем

$$dx = d\left(p + p^3\right) \Rightarrow dx = dp + 3p^2dp \Rightarrow \frac{dy}{p} = dp + 3p^2dp \Rightarrow$$

$$dy = \left(p + 3p^3\right)dp \Rightarrow y = \frac{p^2}{2} + \frac{3p^4}{4} + C.$$

Таким образом, имеем общее решение в параметрической форме

$$\begin{cases} x = p + p^3, \\ y = \dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{3}{4}p^4 + C. \end{cases}$$

Уравнения Лагранжа и Клеро

Определение. Уравнением Лагранжа называется дифференциальное уравнение, линейное относительно x и y, коэффициенты которого являются функциями от y'.

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$$

Для нахождения общего решение применяется подстановка $p = y'$.

$$y = xf(p) + \varphi(p), \quad f(p) = -\frac{P(y')}{Q(y')}, \quad \varphi(p) = -\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Дифференцируя это уравнение,с учетом того, что $dy = pdx$, получаем:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp.$$

Если решение этого (линейного относительно x) уравнения есть $x = F(p, C)$ то общее решение уравнения Лагранжа может быть записано в виде:

$$\begin{cases} x = F(p, C) \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p, C)\, f(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

Определение. Уравнением Клеро называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида:

$$y = xy' + \varphi(y')$$

Вообще говоря, уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа.

С учетом замены $y' = p$, уравнение принимает вид:

$$y = xp + \varphi(p).$$

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}; \qquad p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx};$$

$$\left[x + \varphi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0;$$

Это уравнение имеет два возможных решения:

$$dp = 0 \text{ или } x + \varphi'(p) = 0.$$

В первом случае:

$$p = c;$$

$$y = cx + \varphi(c)$$

Видно, что общий интеграл уравнения Клеро представляет собой семейство прямых линий.

Во втором случае решение в параметрической форме выражается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p) \\ x + \varphi'(p) = 0 \end{cases}$$

Исключая параметр p, получаем второе решение F(x, y) = 0. Это решение не содержит произвольной постоянной и не получено из общего решения, следовательно, не является частным решением.

Это решение будет являться особым интегралом.

Далее рассмотрим примеры решения различных типов дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 3. Решить уравнение с заданными начальными условиями.

$$y' - \frac{y}{x} = x + 1; \quad y(1) = 0.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \qquad y' = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}; \qquad \ln y = \ln x + \ln C;$$

$$y = Cx;$$

Для неоднородного уравнения общее решение имеет вид:

$$y = C(x)x;$$

Дифференцируя, получаем: $y' = C'(x)x + C(x)$

Для нахождения функции C(x) подставляем полученное значение в исходное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + 1$$

$$xC'(x) = x + 1$$

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x}; \qquad C(x) = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + C;$$

$$C(x) = x + \ln x + C;$$

Итого, общее решение:

$$y = x(x + \ln x + C).$$

С учетом начального условия $y(1) = 0$ определяем постоянный коэффициент C.

$$0 = 1 + \ln 1 + C; \qquad C = -1.$$

Окончательно получаем:

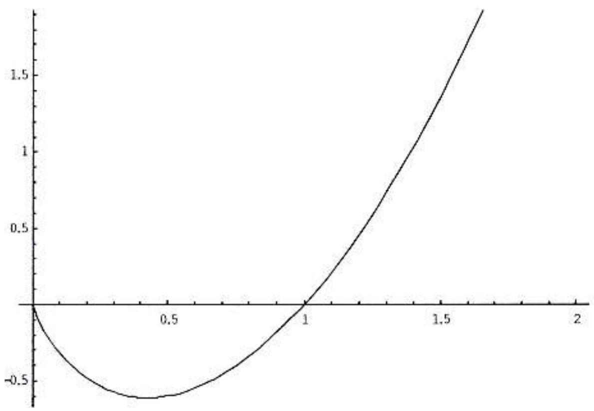
$$y = x^2 + x\ln x - x.$$

Для проверки подставим полученный результат в исходное дифференциальное уравнение:

$$2x + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 - x - \ln x + 1 = x + 1;$$

Верно.

Ниже показан график интегральной кривой уравнения.



Пример 4. Найти общий интеграл уравнения $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными.

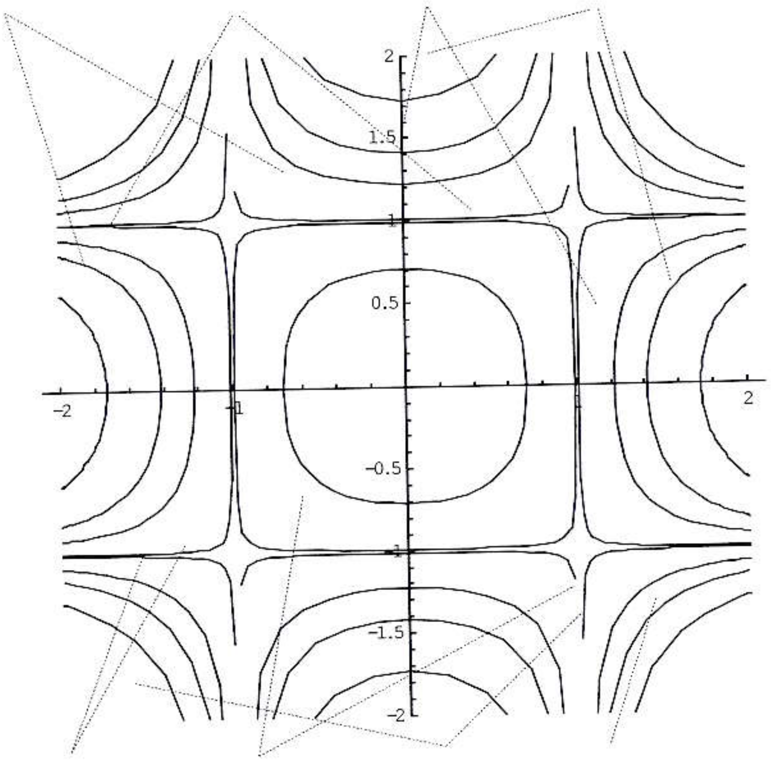
$$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0; \qquad \int\frac{xdx}{x^2-1}=-\int\frac{ydy}{y^2-1};$$

$$\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|y^2-1\right|=\ln C;$$

Общий интеграл имеет вид:

$$(x^2-1)(y^2-1)=C.$$

Построим интегральные кривые дифференциального уравнения при различных значениях С.



C = 0,02 C = 0,5 C = 1 C = 2

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения, удовлет-воряющее заданным начальным

условиям.

$$y'\cos x=(y+1)\sin x; \qquad y(0)=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{y'}{y+1}=\frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{y+1}=tgxdx;$$

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int tgxdx; \qquad \ln\left|y+1\right|=-\ln\left|\cos x\right|+\ln C;$$

$$\ln\left|(y+1)\cos x\right|=\ln C; \qquad (y+1)\cos x=C;$$

Общее решение имеет вид:

$$y=\frac{C}{\cos x}-1.$$

Найдем частное решение при заданном начальном условии y(0) = 0.

$$0=\frac{\tilde{N}}{1}-1; \qquad C=1.$$

Окончательно получаем: $y=\dfrac{1}{\cos x}-1.$

Пример 6. Решить предыдущий пример другим способом.

Действительно, уравнение $y'\cos x=(y+1)\sin x$ может быть рассмотрено как линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y'\cos x-y\sin x=\sin x.$$

Решим соответствующее ему линейное однородное уравнение.

$$y'\cos x-y\sin x=0; \qquad y'\cos x=y\sin x; \qquad \frac{dy}{y}=tgxdx;$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int tgxdx+\ln C; \qquad \ln\left|y\right|=-\ln\left|\cos x\right|+\ln C; \qquad y\cos x=C;$$

$$y=\frac{C}{\cos x}.$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y=\frac{C(x)}{\cos x}.$$

Тогда $$y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{[C'(x)\cos x + C(x)\sin x]\cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos x} = \sin x;$$

$$\frac{C'(x)\cos x}{\cos x} = \sin x; \qquad C'x) = \sin x; \qquad C(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

Итого $$y = \frac{-\cos x + C}{\cos x}; \qquad y = \frac{C}{\cos x} - 1;$$

С учетом начального условия y(0) = 0 получаем $y = \frac{1}{\cos x} - 1;$

Как видно результаты, полученные при решении данного дифференциального уравнения различными способами, совпадают.

При решении дифференциальных уравнений бывает возможно выбирать метод решения, исходя из сложности преобразований.

Пример 7. Решить уравнение $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ с начальным условием y(0) = 0.

Это линейное неоднородное уравнение. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' + y\cos x = 0; \qquad \frac{dy}{y} = -\cos x dx; \qquad \ln|y| = -\sin x + C_1;$$

$$y = e^{-\sin x}\cdot e^{C_1}; \qquad y = Ce^{-\sin x};$$

Для линейного неоднородного уравнения общее решение будет иметь вид:

$$y = C(x)e^{-\sin x};$$

Для определения функции C(x) найдем производную функции y и подставим ее в исходное дифференциальное уравнение. $$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x dx = \left\{\begin{matrix} V = e^{\sin x}; & dU = \cos x dx; \\ dV = e^{\sin x}\cos x dx; & U = \sin x; \end{matrix}\right\} = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x dx =$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Итого

$$y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right);$$

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x};$$

Проверим полученное общее решение подстановкой в исходное дифференциальное уравнение.

$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x\cos x - \cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x;$ (верно)

Найдем частное решение при y(0) = 0.

$$0 = \sin 0 - 1 + Ce^{0}; \qquad C = 1.$$

Окончательно $y = \sin x + e^{-\sin x} - 1.$

Пример 8. Найти решение дифференциального уравнения

$$20xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 5xy^2 dx$$

с начальным условием y(1) = 1.

Это уравнение может быть преобразовано и представлено как уравнение с разделенными переменными.

$$20x - 3yy' = 3x^2 yy' - 5xy^2; \qquad 3yy'(x^2+1) = 5x(y^2+4);$$

$$y'\frac{3y}{y^2+4} = \frac{5x}{x^2+1}; \qquad \frac{3y}{y^2+4}dy = \frac{5x}{x^2+1}dx;$$

$$\int \frac{3y}{y^2+4}dy = \int \frac{5x}{x^2+1}dx;$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

$$(y^2+4)^3 = C\cdot(x^2+1)^5; \qquad y^2 + 4 = C\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2};$$

$$y^2 = C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4;$$

$$y = \sqrt{C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4};$$

С учетом начального условия:

$$1 = \sqrt{C\cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}; \qquad 1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}; \qquad 125 = 8C^3\cdot 4; \quad C^3 = \frac{125}{32};$$

$$C=\frac{5}{2\sqrt[3]{4}}.$$

Окончательно $\quad y=\sqrt{5\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}-4}.$

Пример 9. Решить дифференциальное уравнение $xy'+y=x+1$ с начальным условием y(1) = 0.

Это линейное неоднородное уравнение.

Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$xy'+y=0;\qquad \frac{xdy}{dx}=-y;\qquad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x};\qquad \ln|y|=-\ln|x|+\ln C;$$

$$xy=C;\qquad y=\frac{C}{x};$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y=\frac{C(x)}{x};$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x}=x+1;\qquad \frac{C'(x)x}{x}=x+1;\qquad C'(x)=x+1;$$

$$C(x)=\frac{x^2}{2}+x+C;$$

Общее решение будет иметь вид:

$$y=\frac{x}{2}+1+\frac{C}{x};$$

С учетом начального условия y(1) = 0:

$$0=\frac{1}{2}+1+C;\qquad C=-\frac{3}{2};$$

Частное решение:

$$y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2x}+1;$$

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 9. Дифференциальные уравнения высших порядков

ПЛАН:

- Дифференциальные уравнения высших порядков.
- Уравнения, допускающие понижение порядка.
- Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. Дифференциальным уравнением порядка ***n*** называется уравнение вида:

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y=\varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)}$, если

$$\varphi(x_0)=y_0,\quad \varphi'(x_0)=y_0',\quad ....\quad ,\quad \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Определение. Нахождение решения уравнения

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0,$$

удовлетворяющего начальным условиям $x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)}$, называется решением задачи Коши.

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1)–й *переменных вида* $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y,y',...,y^{(n-1)}$, *то какова бы не была точка* ($x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)}$

) *в этой области, существует единственное решение* $y=\varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)})$, *определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y'_0,..., y_0^{(n-1)}$

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида y(n) = f(x)

Если *f(x)* – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

$$y = \int dx\int dx...\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями

$$x_0 = 0;\ y_0 = 1;$$
$$y'_0 = -1;\quad y''_0 = 0.$$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

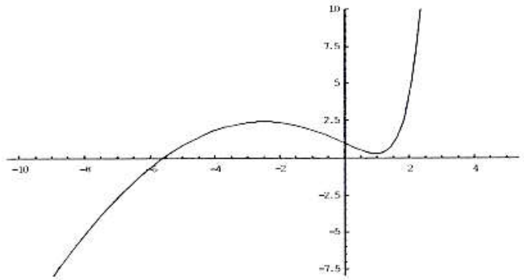
$$1 = \frac{1}{8} + C_3;\quad -1 = \frac{1}{4} + C_2;\quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2};\quad C_2 = -\frac{5}{4};\quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши):

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

Ниже показана интегральная кривая данного дифференциального уравнения.



Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k* – *1* включительно

Это уравнения вида:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0.$$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на *k* единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z;\quad y^{(k+1)} = z';\quad ...\quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем:

$$F(x, z, z',..., z^{(n-k)}) = 0.$$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Применяем подстановку

$$z = y''; \quad z' = y''';$$

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения x =0.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной

Это уравнения вида

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p;$$ и т.д.

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ – совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Замена переменной:

$$p = y'; \qquad y'' = \frac{dp}{dy} p;$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

1) $y\dfrac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \dfrac{dp}{dy} = 4 + \dfrac{p}{y};$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной:

$$u = \frac{p}{y}.$$

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int \frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что

$$p=\frac{dy}{dx},$$

получаем:

$$\frac{dy}{dx}=4y\ln|C_1y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1y|}=\int dx;$$

$$x=\frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1y|)}{\ln|C_1y|}=\frac{1}{4}\ln|\ln|C_1y||+C_2;$$

Общий интеграл имеет вид:

$$\text{h}\,|\text{h}\,|C_1y||=4x+C;$$

$$2)\ \ p=0; \qquad y'=0; \qquad y=C;$$

Таким образом, получили два общих решения.

§ 10. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

ПЛАН:

- Определение.
- Линейные однородные дифференциальные уравнения с произволь-ными коэффициентами.
- Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
- Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Определение

Определение. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'',..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=f(x);$$

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от x или постоянные величины,

причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим $L(y)$.

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=L(y);$$

Определение. Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется линейным однородным уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется линейным неоднородным уравнением, если все коэффициенты p_0, p_1, p_2, ... p_n – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

Определение. Выражение

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=L(y)$$

называется линейным дифференциальным оператором.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

$$1)\ L(Cy) = CL(y);$$

$$2)\ L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

Структура общего решения.

Определение. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение. Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется определителем Вронского.

Теорема. Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.

Теорема. Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронскогонеравеннулюниводнойточкерассматриваемого интервала.

Теорема. Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, ..., y_n$

была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.

Теорема. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (*a, b*), *то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где C_i – постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты p зависят от x, эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

Теорема. Если задано уравнение вида $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ и известно одно ненулевое решение $y = y_1$, *то общее решение может быть найдено по формуле*:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1.$$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Решение дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$.

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n).$$

При этом многочлен

$$F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n$$

называется характеристическим многочленом дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^k$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^k) = 0; \text{ т.е. } e^k F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ – это уравнение называется характеристическим уравнением.

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

Взависимостиоткоэффициентовkхарактеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример. Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^3 - 1 = 0;$$

$$(k-1)(k^2 + k + 1) = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k^2 + k + 1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 = -3; \qquad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

Пример. Решить уравнение $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция $y_1 = x$.

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \qquad 0 - 2x + 2x = 0;$$

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 x\int \frac{1}{x^2} e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx} dx + C_2 x;$

$$y = C_1 x\int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}dx + C_2 x;$$

$$y = C_1 x\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 x; \qquad y = C_2 x + C_1 x\int\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right]dx;$$

$$y = C_2 x + C_1 x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right];$$

Окончательно:

$$y = C_2 x + C_3 x\mathrm{h}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C_4;$$

Пример. Решить уравнение $y^{IV} - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^4 - 1 = 0.$$

$$(k^2-1)(k^2+1) = 0; \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 4 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 2.$$

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 5 = 0; \qquad D = -16; \qquad k_1 = -1 + 2i;$$

$$k_2 = -1 - 2i.$$

Общее решение:

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

Пример. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^3 - 7k^2 + 6k = 0; \qquad k(k^2 - 7k + 6) = 0;$$

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 6;$$

Общее решение:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x};$$

Пример. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Пример. Решить уравнение $y^V - 9y''' = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^5 - 9k^3 = 0; \qquad k^3(k^2 - 9) = 0;$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0; \qquad k_4 = 3; \qquad k_5 = -3;$$

Общее решение:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x};$$

Пример. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = 0$.

Это уравнение не является линейным, следовательно, приведенный выше метод решения к нему неприменим.

Понизим порядок уравнения с помощью

подстановки $y' = p$.

Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p.$$

$$y\frac{dp}{dy} p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1;$$

$$\frac{ydp}{dy} = p; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \qquad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}; \qquad \ln|p| = \ln|y| + \ln C;$$

$$p = Cy; \qquad y' = Cy; \qquad \frac{dy}{Cy} = dx; \qquad \int \frac{dy}{Cy} = \int dx;$$

$$\frac{1}{C}\ln|Cy| = x + \ln C_2; \qquad Cy = e^{Cx} e^{C\ln C_2} = C_3 e^{Cx};$$

Окончательно получаем: $y = C_1 e^{Cx}$;

Это выражение будет общим решением исходного дифференциального уравнения. Полученное выше решение $y_1 = C_1$ получается из общего решения при $C = 0$.

Пример. Решить уравнение $3yy'' + y'^2 = 0$.

Производим замену переменной:

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy} y' = p\frac{dp}{dy};$$

$$3yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C;$$

$$3y\frac{dp}{dy} = -p; \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{3y}; \qquad \int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{y};$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C; \qquad p^3 = \frac{C}{y}; \qquad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}};$$

$$y^{\frac{1}{3}} dy = C_1 dx; \qquad \int y^{\frac{1}{3}} dy = C_1 \int dx; \qquad \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2;$$

$$y^{\frac{4}{3}} = C_3 x + C_4;$$

Общее решение:

$$y = (C_3 x + C_4)^{\frac{3}{4}}.$$

§ 11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами

ПЛАН:

- Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.
- Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x)$$

С учетом обозначения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = L(x)$$

можно записать:

$$L(x) = f(x)$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x)$ в некоторой области есть сумма любого его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Доказательство. Пусть Y – некоторое решение неоднородного уравнения.

Тогда при подстановке этого решения в исходное уравнение получаем тождество:

$$L(Y) \equiv f(x)$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n; \quad C_i = const.$$

Далее покажем, что сумма

$$Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

является общим решением неоднородного уравнения.

$$L(Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n) = L(Y) + L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + \ldots + L(C_n y_n) = L(Y) = f(x)$$

Вообще говоря, решение Y может быть получено из общего решения, т.к. является частным решением.

Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким- то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Обычно оно находится подбором.

На практике удобно применять метод вариации произвольных постоянных.

Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i;$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$

Решаем линейное однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию A(x).

$$A(x) = \int (2\sin^2 x\cos x - x\sin x)dx = 2\int \sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x, & dv = \sin x dx, \\ du = dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Теперь находим B(x).

$$B(x) = \int x\cos x dx - 2\int \cos^2 x\sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x, & dv = \cos x dx, \\ du = dx, & v = \sin x, \end{matrix}\right\} = x\sin x - \int \sin x dx + \frac{2}{3}\cos^3 x =$$

$$= \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x$$

Окончательный ответ:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнения с правой частью специального вида

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного

дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ – многочлен степени *m*.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь *Q(x)* – многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y''' - 4y' = x$.

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$y''' - 4y' = 0.$$

$$k^3 - 4k = 0; \quad k(k^2 - 4) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = -2;$$

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x};$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

$$P(x) = x; \quad \alpha = 0.$$

Частное решение ищем в виде:

$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, где $r = 1; \quad \alpha = 0; \quad Q(x) = Ax + B.$

Т.е. $y = Ax^2 + Bx$.

Теперь определим неизвестные коэффициенты A и B.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A; \quad y''' = 0;$$

$$0 - 8Ax - 4B = x; \quad -8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8}; \quad B = 0;$$

Итого, частное решение:

$$y = -\frac{x^2}{8}.$$

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = -\frac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m Определение – большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид:

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение этого уравнения будет

$$y = y_1 + y_2,$$

где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

Для иллюстрации решим рассмотренный выше пример другим способом.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 1 = 0; \qquad k_{1,2} = \pm i;$$

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде

$$y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x).$$

Получаем:

$$\alpha = 0, \quad r = 0,\ Q(x) = Ax + B; \text{ т.е. } y_1 = Ax + B;$$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x$;

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x).$$

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем:

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$$

Таким образом,

$$y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$

$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:
$$y=\frac{1}{3}\sin 2x+x+C_1\cos x+C_2\sin x;$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

Пример. Решить уравнение $y''-2y'+y=3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:
$$k^2-2k+1-0;\qquad k_1=k_2=1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:
$$y=x^re^{\alpha x}Q(x)$$
$$\alpha=1;\quad r=2;\quad Q(x)=C;$$
$$y=Cx^2e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.
$$y'=2Cxe^x+Cx^2e^x;\qquad y''=2Ce^x+2Cxe^x+2Cxe^x+Cx^2e^x.$$
Подставляя в исходное уравнение, получаем:
$$2Ce^x+4Cxe^x+Cx^2e^x-4Cxe^x-2Cx^2e^x+Cx^2e^x=3e^x.$$
$$2C=3;\qquad C=\frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид:
$$y=\frac{3}{2}x^2e^x.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения:
$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}x^2e^x.$$

Пример. Решить уравнение $y'''-y'=x^2-1$.

Характеристическое уравнение:
$$k^3-k=0;\quad k(k^2-1)=0;\quad k_1=0;\quad k_2=1;\quad k_3=-1;$$
Общее решение однородного уравнения:
$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}.$$
Частное решение неоднородного уравнения:
$$y=x^re^{\alpha x}Q(x).$$
$$\alpha=0;\quad r=1;\quad Q(x)=Ax^2+Bx+C.$$
$$y=Ax^3+Bx^2+Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:
$$y'=3Ax^2+2Bx+C;\quad y''=6Ax+2B;\quad y'''=6A;$$
$$6A-3Ax^2-2Bx-C=x^2-1;$$
$$-3A=1;\quad -2B=0;\quad 6A-C=-1;$$
$$A=-\frac{1}{3};\quad B=0;\quad C=-1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:
$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}-\frac{1}{3}x^3-x.$$

§ 12. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

ПЛАН:

- Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
- Теорема Коши.
- Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \end{cases}$$

где x – независимая переменная, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – искомые функции, называется системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется нормальной системой дифференциальных уравнений.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Теорема. (Теорема Коши). Если в некоторой области *(n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ... $f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *то для любой точки* $(x_0 . y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ этой области существует единственное решение

$$y_1 = \varphi_1(x) \quad y_2 = \varphi_2(x) \quad \ldots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0 . y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, ... $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Определение. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется линейной однородной, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \qquad (2)$$

Решения системы (2) обладают следующими свойствами:

1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu, где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде:

$$y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$$

Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется характеристическим уравнением и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (2):

$$\begin{array}{lll} y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{array}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (2):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$

$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$

$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$

$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$$

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

Эта система дифференциальных уравнений не относится к рассмотренному выше типу, т.к. не является однородным (в уравнение входит независимая переменная x).

Для решения продифференцируем первое уравнение по x. Получаем:

$$y'' = y' + z'.$$

Заменяя значение z′ из второго уравнения получаем:

$$y'' = y' + y + z + x.$$

С учетом первого уравнения, получаем:

$$y'' = 2y' + x.$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$y'' - 2y' = x; \qquad y'' - 2y' = 0; \qquad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{2x}.$$

Теперь находим частное решение неоднородного дифференциального уравнения по формуле

$$y = x^r e^{\alpha x}Q(x); \quad \alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax + B;$$

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \qquad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1)$$

Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получаем:

$$z = -C_1 + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1)$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2 - 1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0; \qquad k^3 - 7k - 6 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = -2; \quad k_3 = 3;$$

1) $k = -1$. $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ $\quad \alpha = 0; \quad \beta = -\gamma;$

Если принять $\gamma = 1$, то решения в этом случае получаем:

$$y_1 = 0; \quad z_1 = -e^{-x}; \quad w_1 = e^{-x};$$

2) $k_2 = -2$.
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0; \qquad \alpha = -\gamma; \quad \beta = \gamma; \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Если принять $\gamma = 1$, то получаем:

$$y_2 = -e^{-2x}; \quad z_2 = e^{-2x}; \quad w_2 = e^{-2x};$$

3) $k_3 = 3$.
$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0; \quad \alpha = \frac{2}{3}\gamma; \quad \beta = \gamma; \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Если принять $\gamma = 3$, то получаем:

$$y_3 = 2e^{3x}; \quad z_3 = 3e^{3x}; \quad w_3 = 3e^{3x};$$

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} y = -C_2 e^{-2x} + 2C_3 e^{3x} \\ z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \\ w = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \end{cases}$$

§ 13. Граничные задачи дифференциального уравнения. Элементы теории устойчивости. Уравнения в частных производных

ПЛАН:

- Граничные задачи дифференциального уравнения.
- Элементы теории устойчивости.
- Уравнения в частных производных.

Граничные задачи дифференциального уравнения Метод конечных разностей, или метод сеток

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x)$$
$$a \le x \le b, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 \cdot y(a) + \alpha_1 \cdot y'(a) = A, \\ \beta_0 \cdot y(b) + \beta_1 \cdot y'(b) = B, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$
$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \ne 0, \ |\beta_0| + |\beta_1| \ne 0,$$

где p(x), q(x) , и $f(x)$ непрерывны на $[a;b]$.

Разобьем отрезок $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ на $\boldsymbol{n}$ равных частей длины, или шага

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Точки разбиения

$$x_i = x_0 + i\cdot h, \ i = 0,1,\ldots,n, \ x_0 = a, \ x_n = b$$

называются *узлами*, а их совокупность – *сеткой* на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Значения в узлах искомой функции y(x) и ее производных

$$y' = y'(x), \ y'' = y''(x)$$

обозначим соответственно через

$$\boldsymbol{y_i = y_i(x_i), \ y_i' = y'(x_i), \ y_i'' = y''(x_i)}.$$

Введем обозначения

$$\boldsymbol{p_i = p(x_i), \ q_i = q(x_i), \ f_i = f(x_i)}.$$

Заменим производные так называемыми *односторонними конечно-разностными отношениями*:

$$\left.\begin{aligned} y_i' &\approx \frac{y_{i+1}-y_i}{h}, \\ y_i'' &\approx \frac{y_{i+1}'-y_i'}{h} = \frac{\dfrac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h}-\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}}{h} = \frac{y_{i+2}-2\cdot y_{i+1}+y_i}{h^2}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Формулы (3) приближенно выражают значения производных во внутренних точках интервала $[a,b]$.

Для граничных точек положим

$$y_0' = \frac{y_1-y_0}{h}, \quad y_n' = \frac{y_{n-1}-y_n}{h}. \quad (4)$$

Используя формулы (3), дифференциальное уравнение (1) при $x = x_i$, (i=1, 2,..., n–1) приближенно можно заменить линейной системой уравнений

$$\frac{y_{i+2}-2\cdot y_{i+1}+y_i}{h^2} + p_i\cdot\frac{y_{i+1}-y_i}{h} + q_i\cdot y_i = f_i,$$

$$i = 0,\ 1,\ldots,\ n-2. \quad (5)$$

Кроме того, в силу формул (4) краевые условия (2) дополнительно дают еще два уравнения:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1\frac{y_1-y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h} = B. \quad (6)$$

Таким образом, получена линейная система n+1 уравнений с n+1 неизвестными $y_0, y_1, \ldots, y_n$, представляющими собой значения искомой функции $y(x)$ в узлах сетки. Система уравнений (5), (6), заменяющая приближенно дифференциальную краевую задачу (1), (2) обычно называется ***разностной схемой***. Решить эту систему можно каким-либо общим численным методом. Однако схема (5), (6) имеет специфический вид и ее можно эффективно решить специальным методом, называемым методом прогонки. Специфичность системы заключается в том, что уравнения ее содержат три соседних неизвестных

и матрица этой системы является трехдиагональной.

Преобразуем уравнения (5):

$$y_{i+2} + (-2+h\cdot p_i)y_{i+1} + (1-h\cdot p_i+h^2 q_i)y_i = f_i\cdot h^2. \quad (7)$$

Введя обозначения

$$-2+h\cdot p_i = m_i,$$

$$1-h\cdot p_i+h^2\cdot q_i = n_i,$$

получим

$$y_{i+2} + m_i\cdot y_{i+1} + n_i\cdot y_i = f_i\cdot h^2, \quad (i=0,\ 1,\ldots,\ n-2). \quad (8)$$

Краевые условия по-прежнему запишем в виде

$$\alpha_0\cdot y_0 + \alpha_1\cdot\frac{y_1-y_0}{h} = A, \qquad \beta_0\cdot y_n + \beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h} = B. \quad (9)$$

Метод прогонки состоит в следующем.

Разрешим уравнение (8) относительно y_{i+1}:

$$y_{i+1} = \frac{f_i}{m_i}h^2 - \frac{n_i}{m_i}y_i - \frac{1}{m_i}\cdot y_{i+2}. \quad (10)$$

Предположим, что с помощью полной системы (8) из уравнения исключен член, содержащий y_i. Тогда уравнение (10) может быть записано в виде

$$y_{i+1} = c_i\cdot(d_i - y_{i+2}), \quad (11)$$

где c_i и d_i должны быть определены. Найдем формулы для этих коэффициентов. При i=0 из формулы (10) и краевых условий (9) следует, что

$$y_1 = \frac{h^2}{m_0}\cdot f_0 - \frac{n_0}{m_0}\cdot y_0 - \frac{1}{m_0}y_2,$$

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - A\cdot h}{\alpha_1-\alpha_0\cdot h}.$$

Исключая из этих двух уравнений y_0, найдем

$$y_1 = \frac{f_0}{m_0}\cdot h^2 - \frac{n_0}{m_0}\cdot\frac{\alpha_1\cdot y_1 - A\cdot h}{\alpha_1-\alpha_0\cdot h} - \frac{1}{m_0}\cdot y_2.$$

Выразим теперь отсюда y_1:

$$y_1 = \frac{\frac{n_0}{m_0}\cdot\frac{A\cdot h}{\alpha_1-\alpha_0\cdot h}+\frac{f_0}{m_0}\cdot h^2-\frac{1}{m_0}\cdot y_2}{1+\frac{n_0}{m_0}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_0\cdot h}} =$$

$$= \frac{\alpha_1-\alpha_0\cdot h}{m_0\cdot(\alpha_1-\alpha_0\cdot h)+n_0\cdot\alpha_1}\left(\frac{n_0\cdot A\cdot h}{\alpha_1-\alpha_0\cdot h}+f_0\cdot h^2-y_2\right). \quad (12)$$

Но, согласно формуле (11),

$$y_1 = c_0(d_0-y_2). \quad (13)$$

Сравнивая теперь (12) и (13), найдем, что

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \frac{\alpha_1-\alpha_0\cdot h}{m_0\cdot(\alpha_1-\alpha_0\cdot h)+n_0\cdot\alpha_1},\\ d_0 &= \frac{n_0\cdot A\cdot h}{\alpha_1-\alpha_0 h}+f_0 h^2 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Пусть теперь $i>0$, то есть $i=1, 2,..., n-2$. Выражая y_i по формуле (11), получим:

$$y_i = c_{i-1}\cdot d_{i-1}-c_{i-1}\cdot y_{i+1}.$$

Подставляя это в формулу (10), будем иметь

$$y_{i+1} = \frac{f_i}{m_i}\cdot h^2-\frac{n_i}{m_i}(c_{i-1}\cdot d_{i-1}-c_{i-1}\cdot y_{i+1})-\frac{1}{m_i}y_{i+2}.$$

Разрешая полученное уравнение относительно y_{i+1}, находим

$$y_{i+1} = \frac{\frac{f_i}{m_i}h^2-\frac{n_i}{m_i}\cdot c_{i-1}\cdot d_{i-1}-\frac{1}{m_i}\cdot y_{i+2}}{1-\frac{n_i}{m_i}\cdot c_{i-1}}, \text{ или}$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{m_i-n_i c_{i-1}}(f_i h^2-n_i c_{i-1}d_{i-1}-y_{i+2}). \quad (15)$$

Отсюда, сравнивая формулы (11) и (15), получаем для

коэффициентов c_i и d_i рекуррентные формулы:

$$\left.\begin{aligned} c_i &= \frac{1}{m_i-n_i\cdot c_{i-1}},\\ d_i &= f_i h^2-n_i c_{i-1}d_{i-1},\\ i &= 1,\ 2,...,\ n-2 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Так как c_0 и d_0 уже определены по формулам (14), то, используя формулы (16), можно последовательно определить коэффициенты c_i и d_i до c_{n-2} и d_{n-2} включительно. Эти вычисления называются *прямым ходом* метода прогонки.

Из формулы (10) при $i=n-2$ и второго краевого условия (9) получаем

$$\left.\begin{aligned} y_{n-1} &= c_{n-2}(d_{n-2}-y_n),\\ \beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h} &= B. \end{aligned}\right\}$$

Разрешая эту систему относительно y_n, будем иметь

$$y_n = \frac{\beta_1\cdot c_{n-2}\cdot d_{n-2}+B\cdot h}{\beta_1\cdot(1+c_{n-2})+\beta_0\cdot h}. \quad (17)$$

Теперь, используя (11) и первое краевое условие (9), мы можем последовательно найти $y_{n-1}, y_{n-2},...,y_0$. Это – *обратный ход* метода прогонки.

Итак, получаем следующую цепочку:

$$\left.\begin{aligned} y_{n-1} &= c_{n-2}(d_{n-2}-y_n),\\ y_{n-2} &= c_{n-3}(d_{n-3}-y_{n-1}),\\ &\dots\\ y_1 &= c_0(d_0-y_2),\\ y_0 &= \frac{\alpha_1 y_1-Ah}{\alpha_1-\alpha_0 h}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Для простейших краевых условий $y(a)=A$, $y(b)=B$ формулы для c_0, d_0, y_0 и y_n упрощаются. Полагая в этом случае $\alpha_0=1,\ \alpha_1=0,\ \beta_0=1,\ \beta_1=0$, из формул (14), (17),

(18) будем иметь

$$c_0 = \frac{1}{m_0}, \quad d_0 = -n_0 A + f_0 h^2,$$

$$y_n = B, \quad y_0 = A\ .$$

Рассмотренный нами подход сводит линейную краевую задачу к системе линейных алгебраических уравнений. При этом возникает три вопроса.

1) Существует ли решение алгебраической системы типа (8)?

2) Как фактически находить это решение?

3) Сходится ли разностное решение к точному при стремлении шага сетки к 0?

Можно доказать, что если краевая задача имеет вид

$$y'' + p(x)y = f(x),$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

причем $p(x)>0$, то решение системы (8), (9) существует и единственно. Фактическое отыскание решения можно провести, например, методом прогонки. На третий вопрос дает ответ следующая

Теорема. *Если* $p(x)$ *и* $f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируемы, то разностное решение, соответствующее схеме с заменой*

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+2} - 2\cdot y_{i+1} + y_i}{h^2},$$

равномерно сходится к точному с погрешностью $O(h)$ *при* $h \to 0$

Таким образом, схема (5), (6) дает приближенное решение краевой задачи, но точность ее весьма мала. Это связано с тем, что аппроксимация производной

$$y' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

имеет низкий порядок точности – погрешность этой аппроксимации

$$r_i(h) = \frac{h}{2}\cdot y''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}.$$

Более точную разностную схему можно получить, если при переходе от линейной краевой задачи к конечно-разностным уравнениям воспользоваться центральными формулами для производных:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad (19)$$

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad (20)$$

$i=1, 2,..., n$.

Погрешность формулы (19) выражается так:

$$r_i(h) = -\frac{h^2}{6}\cdot y'''(\xi), \quad x_{i-1} < \xi < x_{i+1},$$

то есть формула (19) имеет второй порядок точности относительно шага сетки h. Подставляя выражения (19), (20) в задачу (1), (2) и выполняя некоторые преобразования, получим следующую систему:

$$\begin{cases} y_{i+1} + m_i\cdot y_i + n_i\cdot y_{i-1} = \dfrac{2\cdot h^2}{2+h\cdot p_i}\cdot f_i, \quad i=1,2,\dots,n. \\ \alpha_0\cdot y_0 + \alpha_1\cdot\dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \beta_0\cdot y_n + \beta_1\cdot\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\cdot h} = B, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$m_i = \frac{2\cdot q_i\cdot h^2 - 4}{2+h\cdot p_i}, \quad n_i = \frac{2-h\cdot p_i}{2+h\cdot p_i}.$$

Система (21) снова трехдиагональная и ее решение также можно получить методом прогонки. Его алгоритм здесь будет выглядеть так. Сначала находят коэффициенты

$$
\left.\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_0 \cdot h}{m_1 \cdot (\alpha_1 - \alpha_0 \cdot h) + n_1 \cdot \alpha_1}, \\
d_1 &= \frac{2 f_1 h^2}{2 + p_1 h} + n_1 \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 \cdot h}.
\end{aligned}\right\} \quad (22)
$$

Затем определяют коэффициенты c_i, d_i по следующим рекуррентным формулам:

$$
\left.\begin{aligned}
c_i &= \frac{1}{m_i - n_i \cdot c_{i-1}}, \\
d_i &= \frac{2 f_i \cdot h^2}{2 + h \cdot p_i} - n_i \cdot c_{i-1} \cdot d_{i-1}, \\
i &= 2, 3, \ldots, n.
\end{aligned}\right\} \quad (23)
$$

Обратный ход начинается с нахождения y_n:

$$
y_n = \frac{2 \cdot B \cdot h - \beta_1 \cdot (d_n - c_{n-1} \cdot d_{n-1})}{2 \cdot \beta_0 \cdot h + \beta_1 \cdot (c_{n-1} - \dfrac{1}{c_n})}. \quad (24)
$$

После этого находим $y_n, \ldots, y_1, y_0$ по формулам:

$$
y_i = c_i \cdot (d_i - y_{i+1}), \qquad i = n-1,\ n-2, \ldots, 1, \quad (25)
$$

$$
y_0 = \frac{A \cdot h - \alpha_1 \cdot y_1}{\alpha_0 \cdot h - \alpha_1}. \quad (26)
$$

Относительно схемы (21) можно также доказать, что она имеет единственное решение при

$$
\max_{a \le x \le b} |p(x)| < \frac{2}{h} \text{ и } \quad \underset{a \le x \le b}{q(x)} \le 0,
$$

и это решение может быть найдено описанным методом прогонки. Кроме того, для схемы (21) имеет место

Теорема. *Пусть решение граничной задачи* (1), (2) *единственно и непрерывно дифференцируемо на* [**a**, **b**] *до четвертого порядка точности включительно. Если*

выполняются условия

$$
\max_{a \le x \le b} |p(x)| < \frac{2}{h}, \quad \underset{a \le x \le b}{q(x)} \le 0,
$$

$$
\alpha_0 \alpha_1 \le 0, \quad \beta_0 \beta_1 \ge 0,
$$

то схема (21) *будет равномерно сходиться к решению задачи* (1), (2) *с погрешностью* $O(h^2)$.

Заметим, что условия, приводимые в теоремах, являются достаточными, а отнюдь не необходимыми. Поэтому в практике численных расчетов нарушение этих условий обычно не вызывает заметного ухудшения расчетных схем.

<u>Элементы теории устойчивости.</u>

Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений является одним из разделов качественной теории дифференциальных уравнений, которая посвящена не нахождению какого – либо решения уравнения, а изучению характера поведения этого решения при изменении начальных условий или аргумента.

Этот метод особенно важен, т.к. позволяет делать вывод о характере решения без непосредственного нахождения этого решения. Т.е. даже в тех случаях, когда решение дифференциального уравнения вообще не может быть найдено аналитически.

Пусть имеется некоторое явление, описанное системой дифференциальных уравнений:

$$
\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n); \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)
$$

и начальные условия:

$$
y_i(t_0) = y_{i0}.
$$

Для конкретного явления начальные условия определяются опытным путем и поэтому неточны.

Теорема. *(о непрерывной зависимости решения от начальных условий)*

Если правая часть дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ непрерывна и по переменной у имеет ограниченную частную производную $\left(|f'_y| \le N\right)$ на области прямоугольника, ограниченного $D = \{t_0 - a \le t \le t_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$, *то решение*

$y(t) = y(t, t_0, y_0)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(t_0) = y_0$, *непрерывно зависит от начальных данных, т.е. для любого* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0$, *при котором если*

$|y_0 - \bar{y}_0| < 0$, то $|y(t, t_0, y_0) - y(t, t_0 \bar{y}_0)| < \varepsilon$ при условии, что

$$|t_0 - t| < T; \quad T < T_0, \text{ где}$$

$$T_0 = \min\left\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right\}, \qquad M = \max_{(t,y)\in D} |f(t, y)|.$$

Эта теорема справедлива как для одного дифференциального уравнения, так и для системы уравнений.

Определение. Если $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\}$ - решение системы дифференциальных уравнений, то это решение называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0$, такое, что для любого решения $y(t) = \{y_1(t)\ y_2(t), ..., y_n(t)\}$ той же системы, начальные условия которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \Delta \qquad i = \overline{(1, n)}$$

справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \qquad \forall t \in [t_0, \infty)$$

Т.е. можно сказать, что решение ф(t) устойчиво по Ляпунову, если близкие к нему по начальным условиям решения остаются близкими и при $t \ge t_0$.

Если $\lim\limits_{t\to\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = \overline{(1, n)}$, то решение ф(t) называется асимптотически устойчивым.

Исследование на устойчивость по Ляпунову

произвольного решения $\varphi(t) = \{\varphi_1(t)\ \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\}$ системы $\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n); \qquad (i = 1,2,...,n)$ можно свести к исследованию на устойчивость равного нулю решения некоторой другой системы, которая получена из данной заменой неизвестных функций:

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \qquad i = 1, ..., n.$$

Тогда:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1 + \varphi_1(t), ..., x_n + \varphi_n(t)] - f_i[t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)], \qquad i = 1, ..., n. \quad (2)$$

Система (2) имеет тривиальное (равное нулю) решение $x_i(t) = 0$.

Теорема. Решение $\varphi(t) = \{\varphi_1(t)\ \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\}$ системы (1) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда устойчиво по Ляпунову тривиальное решение системы (2).

Это тривиальное решение называется положением равновесия или точкой покоя.

Определение. Точка покоя $x_i(t) = 0$ системы (2) устойчива по Ляпунову, если для любого $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$|x_i(t_0)| < \Delta(\varepsilon) \qquad (i = 1, ..., n)$$

следует

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, ..., n) \quad \forall t \ge t_0.$$

Теорема. (Теорема Ляпунова). Пусть задана система

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n); \qquad (i = 1,2,...,n)$$

имеющая тривиальное решение $y_i(t) = 0$.

Пусть существует дифференцируемая функция $v(y_1, ..., y_n)$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $v(y_1, ..., y_n) \ge 0$ *и* $v = 0$ только при $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$, *т.е. функция v* имеет минимум в начале координат.

2) Полная производная функции v вдоль фазовой траектории (т.е. вдоль решения $y_i(t)$ *системы (1)) удовлетворяет условию:*

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_i}f_i(t,y_i,...,y_n)\le 0 \quad \text{при} \quad t\ge t_0$$

Тогда точка покоя $y_i\equiv 0,\quad i=1,...,n$ устойчива по Ляпунову.

Если ввести дополнительное требование, чтобы вне сколь угодно малой окрестности начала координат $\left(y_1^2+...+y_n^2\ge\Delta\right)$ выполнялось условие

$$\frac{\partial v}{\partial t}\le-\beta<0,\quad (t\ge t_0)$$

где β - постоянная величина, то точка покоя $y_i\equiv 0,\quad i=1,...,n$ асимптотически устойчива.

Функция v называется функцией Ляпунова.

Классификация точек покоя.

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) Корни характеристического уравнения действительные, отрицательные и различные.

$$\lambda_1<0,\quad \lambda_2<0,\quad \lambda_1\ne\lambda_2.$$

Точка покоя $x=y\equiv 0$ будет устойчива. Такая точка покоя называется устойчивым узлом.

2) Корни характеристического уравнения

действительны и

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2<0 \text{ или } \lambda_1=\lambda_2<0.$$

В этом случае точка покоя также будет устойчива.

3) Хотя бы один из корней λ_1,λ_2 положителен.

В этом случае точка покоя $x=y\equiv 0$ неустойчива, и такую точку называют неустойчивым седлом.

4) Оба корня характеристического уравнения положительны $\lambda_1>0,\quad \lambda_2>0$.

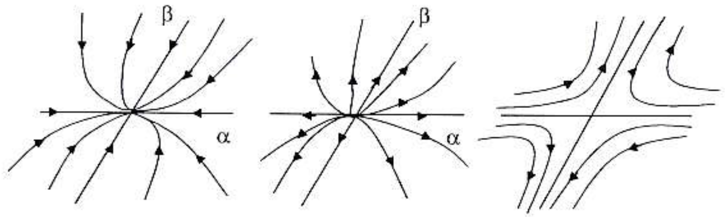
В этом случае точка покоя $x=y\equiv 0$ неустойчива, и такую точку называют неустойчивым узлом.

Если полученного решения

$$\begin{cases}x=C_1\alpha_1e^{\lambda_1t}+C_2\beta_1e^{\lambda_2t}\\ y=C_1\alpha_2e^{\lambda_1t}+C_2\beta_2e^{\lambda_2t}\end{cases}$$

системы исключить параметр t, то полученная функция $y=\varphi(t)$ дает траекторию движения в системе координат XOY.

Возможны следующие случаи:



Устойчивый узел. Неустойчивый узел. Седло.

5) Корни характеристического уравнения комплексные $\lambda_1=p+iq,\quad \lambda_2=p-iq$.

Если p = 0, т.е. корни чисто мнимые, то точка покоя (0, 0) устойчива по Ляпунову.

Такая точка покоя называется центром.

Если $p<0$, то точка покоя устойчива и называется устойчивым фокусом.

Если $p>0$, то точка покоя неустойчива и называется неустойчивым фокусом.

Уравнения в частных производных.

Определение. Дифференциальным уравнением в частных производных называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных, ее аргументов и ее частных производных различных порядков.

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0$$

Порядком дифференциального уравнения в частных производных называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Решением уравнения будет некоторая функция $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая обращает уравнение в тождество.

Линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка от функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно в общем виде записать как

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

Линейное уравнение в частных производных имеет вид:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 , \quad (1)$$

где X_i – некоторые заданные функции.

Очевидно, что одним из решений такого уравнения будет функция $u=C$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}; \quad (2)$$

или

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}; \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}; \quad \ldots \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}$$

– такая система называется нормальной.

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \\ x_2 = f_2(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = f_{n-1}(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \end{cases}$$

Если разрешить эти уравнения относительно постоянных С, получим:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{cases}$$

Каждая из функций ф является интегралом системы (2).

Теорема. Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - интеграл системы (2), то функция $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - решение уравнения (1).

§ 14. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в системе MAPLE

ПЛАН:

- Команда dsolve.
- Задание дифференциального уравнения в системе **MAPLE.**

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

С помощью команды dsolve можно получить аналитическое решение дифференциального уравнения, а можно и сформировать процедуру построения численного решения задачи Коши, если система Maple не сможет найти общее решение в аналитическом виде. Наиболее общий синтаксис вызова команды решения дифференциального уравнения следующий:

dsolve (уравнения, неизвестные, [опции]);

Параметром уравнения задается одно дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений. В последнем случае все уравнения системы должны быть представлены в виде множества (их список через запятую следует заключить в фигурные скобки). Параметр неизвестные определяет неизвестную функцию дифференциального уравнения или неизвестные функции системы дифференциальных уравнений, которые, как и сами уравнения системы, должны быть представлены в виде множества. Необязательный параметр опции, определяемый в виде ключевое_значение = значение, позволяет задать методы и форму представления решения.

Чтобы задать производную искомой функции в дифференциальном уравнении используют команду diff ( ) или оператор D, причем саму неизвестную функцию следует определять с явным указанием независимой переменной, например y(x). Оператор D определяет операцию дифференцирования и имеет следующий синтаксис:

(D@@n) (функция) (переменная);

В этой записи n представляет целое число, определяющее порядок производной, параметр функция – используемый идентификатор функции, а параметр переменная – независимую переменную функции. Например, производная второго порядка функции f (x) с использованием этого оператора задается так:

(D@@ 2) (f) (x);

Ниже представлены несколько примеров задания дифференциальных уравнений и систем

дифференциальных уравнений:

ex1:=diff(y(x),x$3)+k^2*y(x)=0;

$$ex1 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,\mathrm{y}(x)\right) + k^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

ex2:=(D@@3)(y)(x)+k^2*y(x)=cos(k1*x);

$$ex2 := (\mathrm{D}^{(3)})(y)(x) + k^2\,\mathrm{y}(x) = \cos(k1\,x)$$

sys1:={D(y1)(x)=a[1,1]*y1(x)+a[1,2]*y2(x),
D(y2)(x)=a[2,1]*y1(x)+a[2,2]*y2(x)};

$$sys1 := \{\mathrm{D}(y1)(x) = a_{1,1}\,\mathrm{y1}(x) + a_{1,2}\,\mathrm{y2}(x),\ \mathrm{D}(y2)(x) = a_{2,1}\,\mathrm{y1}(x) + a_{2,2}\,\mathrm{y2}(x)\}$$

Заметим, что в приведенных примерах и уравнения, и система уравнений сохраняются в переменных Maple. Как отмечалось ранее, это достаточно распространенный прием, позволяющий использовать в дальнейшем заданные уравнения простой ссылкой на обычную переменную.

Решим одно из известных уравнений:

ex3:=diff(y(x),x$2)+k^2*y(x)=0;

$$ex3 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + k^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

dsolve(ex3,y(x));

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\sin(k\,x) + \_C2\,\cos(k\,x)$$

Найдено общее решение дифференциального уравнения, в котором переменные *C1* и *C2* – это сгенерированные Maple специальные переменные, представляющие произвольные константы общего решения дифференциального уравнения второго порядка. Этот пример показывает, что при отсутствии каких-либо опций система Maple пытается найти точное общее решение в явном виде. Если в явном виде решения не существует, то система попытается найти его в неявном виде, как видно из следующего примера:

ex4:=diff(y(x),x)=-sqrt(x^2-y(x))+2*x;

$$ex4 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = -\sqrt{x^2 - \mathrm{y}(x)} + 2\,x$$

dsolve(ex4,y(x));

$$2\,\frac{\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}}{(4\,\mathrm{y}(x)-3\,x^2)\,(2\,\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}-x)} + \frac{x}{(4\,\mathrm{y}(x)-3\,x^2)\,(2\,\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}-x)} - \_C1 = 0$$

isolate(%,y(x));

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{-5\,\_C1\,x^2 - 1 + x\,(2\,\_C1\,x - 2\,\sqrt{-\_C1}\,)}{\_C1}$$

Команда isolate ( ) в этом примере выражает заданное вторым параметром выражение (y(x)) из уравнения, определяемого первым параметром (в нашем случае из неявного вида общего решения дифференциального уравнения).

По умолчанию команда dsolve ( ) сначала пытается найти общее решение в явном виде, и если таковое не удается найти, то решение выдается в неявном виде (конечно, при условии его существования). Можно «озадачить» Maple поиском общего решения в явном виде, используя опцию explicit = true (по умолчанию используется explicit = false):

$$\mathrm{y}(x) = \mathrm{RootOf}(2\,\sqrt{x^2 - \_Z} + x - 8\,\_C1\,\_Z\,\sqrt{x^2 - \_Z} + 4\,\_C1\,\_Z\,x + 6\,\_C1\,x^2\,\sqrt{x^2 - \_Z} - 3\,\_C1\,x^3)$$

dsolve(ex4,y(x),explicit=true);

Как видим, в этом случае мы действительно получили сразу же решение в явном виде, но оно представлено через функцию Rootof ( ), так что наш первоначальный подход к решению дифференциального уравнения оказался более продуктивным.

Не для любого дифференциального уравнения удается найти общее решение в явном или неявном виде. В этом случае можно построить приближенное решение в

форме ряда Тейлора. Для этого нужно задать опцию type=series в команде dsolve ( ) (по умолчанию используется type=exact), а также установкой значения системной переменной Order определить, до какого порядка малости относительно независимой переменной функции ищется разложение решения в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки:

Order:=4;

$$Order := 4$$

eqq:=(D@@2)(y)(x)+(a*x^2)*D(y)(x)+y(x)=0;

$$eqq := (\mathrm{D}^{(2)})(y)(x) + a\,x^2\,\mathrm{D}(y)(x) + \mathrm{y}(x) = 0$$

dsolve(eqq,y(x),type=series);

$$\mathrm{y}(x) = \mathrm{y}(0) + \mathrm{D}(y)(0)\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{y}(0)\,x^2 - \frac{1}{6}\,\mathrm{D}(y)(0)\,x^3 + \mathrm{O}(x^4)$$

Заметим, что в решении дифференциального уравнения второго порядка, представленном рядом Тейлора, в качестве постоянных используются значения искомой функции и ее первой производной в точке x=0: y(0), D(y)(0).

Для решения задачи Коши или краевой задачи необходимо задать первый параметр команды dsoive( ) в виде множества, элементами которого являются само уравнение и все начальные или краевые условия. Решим задачу Коши и краевую задачу для следующего дифференциального уравнения второго порядка:

eqn1:=diff(y(x),x$2)+k^2*y(x)=0;

$$eqn1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + k^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

Задача Коши для этого дифференциального уравнения второго порядка требует задания в нулевой точке значения неизвестной функции и ее первой производной.

Ее решение представлено ниже:

dsolve({eqn1,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x));

$$y(x) = \frac{\sin(k\,x)}{k}$$

Краевая задача для этого дифференциального уравнения второго порядка требует задания в двух точках, например, x = 0 и x = 1 значения неизвестной функции. Ее решение также получено с помощью команды dsolve()

dsolve({eqn1,y(0)=0,y(1)=1},y(x));

$$y(x) = \frac{\sin(k\,x)}{\sin(k)}$$

Начальные или краевые условия задаются в виде уравнений, в левой части которых определен задаваемый параметр (значение неизвестной функции или ее производной необходимого порядка) в соответствующей точке, а в правой части значение этого параметра. При задании производных в начальных или краевых условиях следует использовать оператор D — команда diff ( ) здесь не употребляется.

Если точное решение задачи Коши или краевой задачи системой Maple не найдено, а приближенное решение в виде ряда Тейлора нас не устраивает, то можно построить численное решение, опять-таки с использованием все той же команды dsoive ( ). Для этого задают опцию type = numeric, а с помощью опции method = метод определяют используемый для построения численного решения метод. Параметр метод принимает одно из значений, представленных в табл. 1.

Таблица 1. Значения опции method *при численном решении дифференциальных уравнений.*

Значение	Описание
Rkf45	Метод Рунге-Кутта-Фальберга порядка 4-5
Dverk78	Метод Рунге-Кутта порядка 7-8

ПО УМОЛЧАНИЮ (ЕСЛИ НЕ ЗАДАНА ОПЦИЯ method) применяется метод Рунге-Кутта-Фальберга порядка 4-5. При использовании численного решения следует помнить, что все параметры дифференциального уравнения (символьные константы) должны быть определены. Например, для задачи Коши уравнения eqn1 предыдущего примера следует задать численное значение для параметра k.

Численное решение строится в форме процедуры Maple, поэтому следует некоторой переменной присвоить результат построения командой dsolve ( ) численного решения в виде процедуры. В дальнейшем имя этой переменной можно использовать как имя процедуры для вычисления значения решения задачи Коши в некоторой точке, соответствующей значению независимой переменной функции решения. Это значение передается в процедуру как ее параметр – после имени процедуры в круглых скобках. Следующий пример демонстрирует построение численного решения задачи Коши и его использование.

eqn1:=diff(y(x),x$2)+k^2*y(x)=0;

Переменной F присваиваем результат численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка (в нулевой точке задается значение неизвестной функции и ее первой производной):

F:=dsolve({eqn1,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x),type=numeric);

F := **proc** (*rkf45_x*) ... **end proc**

Если не присвоить параметру k конкретного числового значения, то попытка получить значение решения в точке, например x = 1, приведет к ошибке:

F(1);

Error, (in dsolve/numeric/rkf45) cannot evaluate boolean: 2.+abs(.2511886433e-1-.2016799760e-5*k^2-.3377712687e-4*k^2*(.2318664400e-1-.3700729218e-

5*k^2)+.6309573448e-5*k^2*(.2511886433e-1-.6603721651e-5*k^2)) <= 0.

Следует обязательно определить все символьные параметры дифференциального уравнения числовыми значениями перед использованием численного решения:

> k:=1:

> F(0);F(1);F(2);

$$\left[x=0,\ y(x)=0.,\ \frac{\partial}{\partial x}y(x)=1.\right]$$

$$\left[x=1,\ y(x)=.841470989048380025,\ \frac{\partial}{\partial x}y(x)=.540302309040994189\right]$$

$$\left[x=2,\ y(x)=.909297437216234794,\ \frac{\partial}{\partial x}y(x)=-.416146840428394782\right]$$

Обратите внимание, в каком виде построенная процедура численного решения выдает результаты – в виде списка значений независимой переменной, самой функции и ее производных (до порядка на единицу меньше порядка самого уравнения).

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. 1969. стр. 168-199

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. 1959, Стр. 260-312

3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967, Стр. 1801-216

4. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. – М.: Мир, 1997. – 208 с.

5. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V. – М.: Издательство "Солон",1998.

6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 176 с.

7. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.:БХВ - Петербург, 2001.– 528 с.

8. Манзон Б.М. Maple V Power Edition – М.: Информационно-издательский дом "Филинъ",1998г.

Содержание

Махмудова Д.М., Сиддиков З.Х., Муминова Х.Р.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор: Х. Тахиров
Технический редактор: С. Меликузиева
Корректор: М. Юнусова
Компьютерная вёрстка: А. Исхоков

Издательская лицензия № 2244. 25.08.2020г.
Подписано в печать с оригинала-макета 20.03.2024.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Гарнитура "Cambria".
Учётно-издательские л. 8. Тираж 100 экз.
Заказ № 2118684.

Издательско-полиграфический творческий дом
«Osiyo tur».

ISBN 978-9910-9398-3-9