Махмудова Д.М., Сиддиков З.Х.,
Муминова Х.Р.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЧИРЧИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Махмудова Д.М., Сиддиков З.Х., Муминова Х.Р.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(Для специальностей «Физика и астрономия»)

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ташкент
«Osiyo tur»
2024

УДК-530;521
КБК-22.3;22.6
М-56

Махмудова Д.М., Сиддиков З.Х., Муминова Х.Р. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. – Т.: "Osiyo tur", 2024. 128 страниц.

Рецензенты:

Сейитов А.Ж. - *д.т.н.(НУУз).*
Akbarov A. - *к.т.н.доц.(ЧГПУ).*

Данное учебное пособие составлено на основе требований учебного плана предметов, относящихся к блоку математики и естественных наук в учебных программах 5110200 – Физика и методика преподавания астрономии, 5140200 – Физика, 5140400 – Образовательные программы бакалавриата по астрономии. содержит информацию, включая практические упражнения.

На основе характеристики предметов, относящихся к блоку математики и естественных наук в учебных программах, в пособии раскрыты основные понятия и положения раздела дифференциальных уравнений курса «Высшая математика», показано их физическое содержание и приложения. Даны задания для самостоятельной работы по темам и способы их решения, а также ряд полезных рекомендаций для учащихся.

Пособие предназначено для студентов физических, астрономических и технических специальностей высших учебных заведений, базовых докторантов и научных работников.

Согласно решению №5 Совета Чирчикского государственного педагогического университета Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 9 декабря 2023 года, рекомендуется к публикации в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся естественным наукам в учебных программах 5110200 – Методика преподавания физики и астрономии, 5140200 – Физика, 5140400 – Астрономия.

Учебное пособие одобрено к изданию в соответствии с приказом Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан от 22 декабря 2023 года №537 (регистрационный номер 537-457).

УДК-530;521
КБК-22.3;22.6

ИСБН 978-9910-9398-3-9

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

ПЛАН:

- Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
- Общее решение дифференциального уравнения. Свойства общего решения.
- Задача Коши. О существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка.
- Уравнения вида $y' = f(x)$

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Многие задачи естествознания приводят к нахождению неизвестных функций, описывающих рассматриваемые явления или процессы, когда известны соотношения, связывающие между собой эти функции и их производные. Такие соотношения называются *дифференциальными уравнениями.* В качестве иллюстрации рассмотрим следующие примеры.

Допустим, что в каждый момент времени t известна скорость точки, движущейся по оси Ox, где $f(t)$ – функция, непрерывная на (a,b). Кроме того, будем считать, что известна абсцисса x_0 этой точки в некоторый определённый момент времени $t = t_0$. Требуется найти закон движения точки, то есть зависимость абсциссы движущейся точки от времени.

Решение. Положение точки определяется одной координатой x и задача состоит в том, чтобы выразить x как функцию от t. Принимая во внимание механический смысл первой производной, мы получим равенство

$$\frac{d(x)}{d(t)} = f(t) \qquad (1.1)$$

Как известно из интегрального исчисления

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f\ (t)dt + C\ (a < t < b)\ , \qquad (1.2)$$

где верхний предел интеграла – переменный, нижний t_0 есть некоторое фиксированное число из (a,b), C – произвольная постоянная. Так как в формулу (1.2) входит произвольная постоянная, то мы ещё не получили определённого закона движения точки.

Выделим из множества движений (1.2) то движение, при котором движущаяся точка занимает заданное положение x_0 в заданный момент времени t_0:

$$x_0 = \int_{t_0}^{t} f\ (t)dt + C \quad C = x_0,$$

что вместе с (1.2) даёт искомый закон движения точки:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f\ (t)dt + x_0\ (a < t < b)$$

Перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V, которая также является производной по времени t от перемещения S. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2};$$

Тогда получаем:

$$S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$$

– уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $f(t)$.

Задача 1

Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если V(0) = 100 м/с, а V(l) = 50 м/с.

Решение: Примем за независимую переменную время *t*, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки V будет функцией *t*, т. е. *V = V(t)*. Для нахождения *V(t)* воспользуемся вторым законом Ньютона (основным законом механики):

$$ma = F,$$

где a = V′(t) – есть ускорение движущегося тела, F – результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F=-kV^2$, k>0 – коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция *V=V(t)* является решением дифференциального уравнения

$$m \cdot V' = -kV^2$$

или

$$V' = -kV^2/m.$$

Здесь m – масса тела. $V = \dfrac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + c}$,

Как будет показано ниже (пример 2.2), где c – const. Найдя зависимость скорости от времени, легко найти скорость точки через 3 с после начала замедления.

Найдем сначала параметры k/m и c. Согласно условию задачи и ее решению, имеем:

V(0) = 1/c = 100 и V(1)=1/(k/m+c)=50,

отсюда

c =1/100, k/m=1/100.

Следовательно, скорость точки изменяется по закону

$$V = \frac{100}{t+1}.$$

Поэтому V (3) =25 м/с.

Другие задачи

Закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$$

где k>0 – коэффициент пропорциональности, *m(t)* – масса радия в момент *t*;

«Закон охлаждения тел», т.е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

где *T(t)* – температура тела в момент времени *t*, *k* – коэффициент пропорциональности, T_0 – температура воздуха (среды охлаждения);

Зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени *t* во многих случаях описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x$$

где *k* – коэффициент пропорциональности;

«Закон размножения бактерий» (зависимость массы *m* бактерий от времени *t*) описывается уравнением

$m' = km$, где k>0;

Закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$$

где *p(h)* – атмосферное давление воздуха на высоте *h*, *k* >0.

Основные сведения о дифференциальных уравнениях

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференци-альным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ –обыкновенноедифференциальное уравнение 1-го порядка. В общем виде записывается

$$F(x, y, y') = 0.$$

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ – обыкновенное дифферен-циальное уравнение 2-го порядка. В общем виде записывается

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение.Общимрешениемдифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция *y=φ(x,C)*, которая при подстановке в исходное уравнение