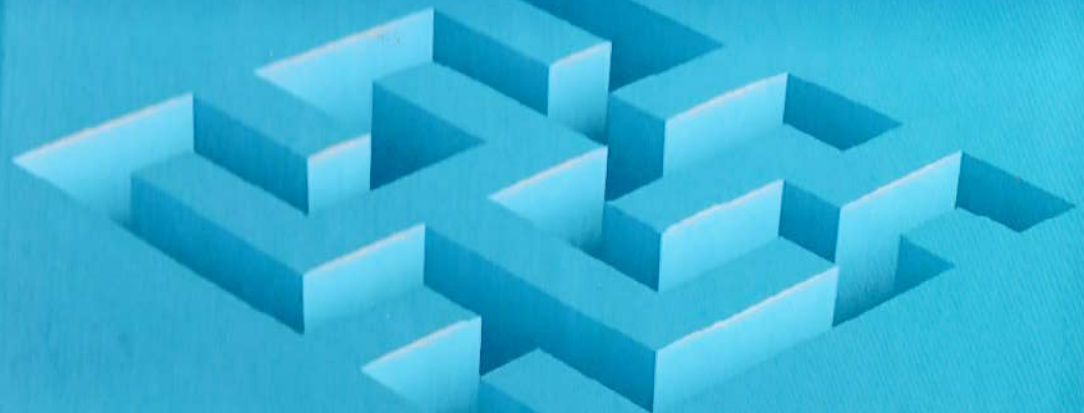




N.OTAJONOVA, M.RAUPOVA

**MATEMATIKA O'QITISH
METODIKASI 2**

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

N.Otajonova, M.Raupova

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI 2.
(o'quv qo'llanma)

**«NAZOKATHON ZIYO PRINT»
TOSHKENT– 2023**

UO'K 373.2;510.2
KBK 74.200;22.1
O-55

Ushbu o'quv qo'llanmada talabalarning matematika o'qitish metodikasi fani doirasida matnli masalalar yechish ko'nikmasini rivojlantirishga oid masalalar ko'rilgan.

Qo'llanma matematika, boshlangich ta'lim va jismoniy madaniyat ta'lim yo'nalishi talabalari, shuningdek, umumiy o'rta ta'lim maktablari o'quvchilari uchun mo'ljallangan bo'lib, bir nechta matnli masalani o'z ichiga olgan. Masalalarni yechish uchun chuqur matematik bilim emas, balki matematik mushohada yuritish va topqirlik ko'proq talab qilinishi aks ettirilgan.

Qo'llanmadan sinfdan tashqari mashg'ulotlarda, o'quvchilarni turli matematik musobaqalarga tayyorlash jarayonida foydalanish mumkin. Qo'llanmadan joy olgan mantiqiy fikrlashga undovchi ko'plab masalalar har bir o'quvchida qiziqish uyg'otadi.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2022 yil 30 dekabrda 429-sonli buyrug'iga asosan o'quv qo'llanma sifatida chop etishga ruxsat berilgan.

ISBN 978-9943-9239-1-1

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
AXBOROT RESURS MARKAZI

MUNDARIJA

1 §. Matnli masalalar va ularni yechish usullari. Matnli masalalarni tenglamalar sistemasi yordamida yechish	5
2 §. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi	7
3 §. Birgalikda bajarilgan ishga doir masalalar	40
4 §. Natural sonlar, progressiya va protsentli miqdorlarga doir masalalar	45
5 §. Matematikadan tarixiy masalalar yechish orqali o'quvchilarni mantiqiy fikrini rivojlantirish	48
6 §. Uchburchaklarga oid masalalar	57
7 §. To'rtburchaklarga oid masalalar	66
8 §. Kombinatorikaga oid masalalar	73
9 §. Paskal uchburchagi	77
10 §. O'quvchilarni fikrlash qobiliyatini rivojlantiruvchi masalalar	80
11 §. Tarbirkorlik masalalarida matematikadan foydalanish	107
Javoblar	114
Adabiyotlar	119

Kirish

Mamlakatimizda qabul qilingan va amalga oshirilayotgan "Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi" bo'yicha ta'lim islohotining eng asosiy maqsadi – tayyorlanayotgan mutaxassislarining sifatini oshirishdan iboratdir. Yuqori malakali raqobatbardosh zamonaviy kadrlar tayyorlash O'zbekiston Respublikasi Hukumati tomonidan «Ta'lim to'g'risida»gi qonun va «Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi»da ifodalangan talablarga to'liq javob beradigan darsliklar, o'quv qo'llanmalari, uslubiy qo'llanmalar yaratish hozirgi kunning dolzarb masalasi bo'lib qolmoqda. Mazkur qo'llanma matematika, boshlang'ich ta'lim va jismoniy madaniyat ta'lim yo'nalishi talabalari, shuningdek, umumiy o'rta ta'lim maktablari o'quvchilari uchun mo'ljallangan.

Maktab matematika kursida o'rganilgan nazariy ma'lumot, matematik tushuncha, aksioma, teorema va matematik xulosalar, qonun-qoidalarining aniq masala yoki masalalarga tadbiqui natijasida talabalarda mustahkam matematik bilim va malakalar hosil qilish orqali amalga oshiriladi. Mazkur qo'llanmadagi masalalar talabalarni mantiqiy tafakkurini shakllantiradi. Bunda talabalarni matematika o'qitish metodikasidagi metodlardan foydalanib, masala yoki misollarni yechish jarayonida ulardan to'g'ri foydalanish malakalarini rivojlantirishda qaratilgan. Shu orqali ularda biror matematik hukm va xulosalar to'g'risida aniq fikr yuritish imkoniyatlarini shakllantiradi hamda masalalar yechish qobiliyatlarini rivojlantiriladi.

Qo'llanma kamchiliklardan holi bo'lmashligi mumkin. Uni yanada mukammallashtirishga qaratilgan tanqidiy fikr va mulohazalarini bildiradigan hamkasblarga oldindan o'z tashakkurimizni izhor etamiz.

1 §. Matnli masalalar va ularni yechish usullari. Matnli masalalarni tenglamalar sistemasi yordamida yechish

Tayanch iboralar: ifoda, tuzilish, miqdor, munosabat, sxematik, nostandart, taxlil, ketma-ketlik.

Masala deb ma'lum shartlarga ko'ra qo'yilgan savolga javob berishni talab etuvchi har qanday jumlagi aytiladi. Masalani yechish bu masalani bevosita yoki bilvosita mavjud bo'lgan sonlar, miqdorlar, munosabatlar ustida amallar va operatsiyalarning mantiqan to'g'ri ketma-ketligi orqali masalalarning talabini bajarish (uning savoliga javob berish) demakdir.

Matnli masalalarni yechish ushbu bosqichlarni bajarishdir:

- Masalani tahlil qilish;

Bu bosqichda masalaning sharti va talabi aniqlanadi.

- Masalani sxematik yozib olish;

Bu bosqichda qonunlardan foydalanib, berilgan va izlanayotgan kattaliklar orasidagi bog'lanlar o'rganilishi natijasida tenglamaning tarkibiy qismlari aniqlanadi.

- Yechish usulini izlash (tenglama tuzish);

Bu bosqich masala shartidagi ma'lumotlardan foydalanib izlanayotgan kattaliklarni topishga imkon beradigan tenglik yoziladi, ya'ni matematika tiliga aylantiriladi.

- Masala topilgan biror usulda yechib chiqish;

Bu bosqichda hosil bo'lgan algebraik tenglama yechiladi.

- Hosil bo'lgan yechimlarning masala shartlarini qanoatlantirishini sinab ko'rish;

- Tekshirish (mazkur shartlar asosida masala yechimga ega yoki yechimga ega emasligi tekshiriladi);

Masala yechimining bayonini berish;

- Yechish usulini taxlil qilish (rastional yoki umumiy yechish usuli bor-yo'qligi haqida xulosalar).
- Masala javobini ifodalash;

Bu bosqichda masala yechimining to'g'riligiga ishonch hosil qiligandan keyin, masalaning javobi matematika tilida aniqlanadi.

Bu bosqichlar umumiy bo'lib, uning ba'zilar yechish jarayonida bajarilmasligi mumkin.

Matematika fanini o'qitishda matnli masalalarni yechishning o'rni ulkandir. Bunday masalalarni yecha borib o'quvchilar matematik bilimlarni egallaydilar, amaliy faoliyatga tayyorlana boradilar. Masalalar ularning mantiqiy fikrlashlarini rivojlantirishga imkon beradi. Shuning uchun, o'quvchilarning matnli masala hamda uning tuzilishi haqida chuqur tasavvurga ega bo'lishi va masalalarni turli usullar bilan yecha olish qobiliyatlariga ega bo'lishi muhimdir.

Matnli masala biror bir vaziyatning tabiiy tildagi ifodasi bo'lib, unda bu vaziyatning biror-bir komponentasiga miqdoriy tavsifnoma berish, uning komponentlari orasidagi ba'zi munosabatlar bor-yo'qligini aniqlash yoki bu munosabat turini aniqlash talab etiladi.

Bir masala bir necha usul bilan yechilsa, uni bajargan o'quvchi, unda qo'llanilayotgan turli faktlarning o'zaro aloqador ekanligini ko'rish imkoniyatiga ega bo'ladi.

Ko'rilyotgan masalalar standart yoki nostandart bo'lishi mumkin. Standart masalalar deb, shunday masalalarga aytiladiki, ularning har birining yechish tartibi biror bir matematik qoida yoki tasdiqlar bilan aniq beriladi.

Nostandart masalalarni bunday yechish yo'li, odatda, sun'iy usul (yoki «Evrík» qoida) deb ataladi. Quyidagi tipdagi algebraik masalalarni yechishda tenglamalar tuzib yechish maqsadga muvofiqdir.

1. Progressiyaga doir masalalar;
2. Prostant miqdorli masalalar;
3. Harakatga doir masalalar.

4. Birgalikda bajariladigan ishga doir masalalar;
5. Aniqmas tenglama, tenglamalar sistemasi tuzib yechiladigan masalalar;
6. Natural sonlarga doir masalalar.

Mavzuga doir savol va topshiriqlar

1. Nostandard masala tushunchasiga izoh bering.
2. Matnli masalalarni yechishning qanday bosqichlari bor?
3. Aniqmas tenglamalar sistemalariga keltiriladigan masalalar turlarini sanang.
4. Natural sonlarga misollar keltiring.
5. Matnli masalalarni tenglamaga keltirish bosqichlarini ayting.

2 §. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi

Tayanch iboralar: masala, masala sharti, masalaning talabi, masalaning operatori, tenglama, noma'lum ifoda.

Masala – bu kundalik hayotimizda uchraydigan vaziyatlarning tabiiy tildagi ifodasidir. Masala asosan uch qismdan iborat bo'ladi.

1. Masalaning sharti - o'rganilayotgan vaziyatni xarakterlovchi ma'lum va no'malum miqdoriy qiymatlar hamda ular orasidagi miqdoriy munosabatlar haqidagi ma'lumot demakdir.

2. Masalaning talabi – masala shartidagi miqdoriy munosabatlarga nimani topish kerakligini ifodalash demakdir.

3. Masalaning operatori – masala talabini bajarish uchun shartdagi miqdoriy munosabatlarga nisbatan bajariladigan amallar yig'indisi.

Tenglama tuzish orqali masala yechish, masala talabida so'ralgan miqdorni imkoniyati boricha biror harf bilan belgilash, masala shartida qatnashayotgan boshqa miqdorlarni belgilangan harf orqali ifodalash, masala shartida ko'rsatilgan miqdoriy munosabatlarni, amallarning mantiqan to'g'ri ketma-ketligi orqali ifodalaydigan tenglama tuzish va uni yechish orqali masalaning talabini bajarish demakdir.

Masalalarni tenglama tuzish orqali yechishni quyidagi ketma-ketlik asosida olib borish maqsadga muvofiqdir.

1. Masala talabida so'ralgan miqdorni, ya'ni noma'lum miqdorni harf bilan belgilash.

2. Bu harf yordamida boshqa no'malumlarni ifodalash.
3. Masala shartini qanoatlantiruvchi tenglama tuzish.
4. Tenglamani yechish.
5. Tenglama yechimini masala sharti bo'yicha tekshirish.

Maktab matematika kursida tenglama tuzish orqali yechiladigan masalalar ko'pincha uchta har xil miqdorlarni o'zaro bog'liqlik munosabatlari asosida beriladi. Chunonchi:

- 1) Tezlik, vaqt va masofa.
- 2) Narsaning qiymati, soni va jami bahosi.
- 3) Mehnat unumdorligi, vaqt va ishning hajmi.
- 4) Yonilg'ining sarf qilish normasi, transportning harakat vaqti yoki masofasi va yonilg'ining miqdori.
- 5) Jismning mustahkamligi, hajmi va uning og'irligi.
- 6) Ekin maydoni, hosildorlik va yig'ilgan hosildorlik miqdori.
- 7) Quvurni o'tkazish imkoniyati, vaqti va quvurdan o'tayotgan moddalarning aralashma miqdori.
- 8) Bir mashinaning yuk ko'tarishi, mashinalar soni va keltirilgan yuklarning og'irligi.
- 9) Suyuqlikning zichligi, chiqarish chuqurligi va bosimi.

10) Tokning kuchi, zanjir bir qismining qarshiligi va undagi kuchlanishning pasayishi.

- 11) Kuch, masofa va ish.
- 12) Quvvat, vaqt va ish.
- 13) Kuch, elkaning uzunligi va quvvat momenti.

Masalalarni tenglama tuzib yechishda no'malum miqdorlarni turlicha belgilash, ya'ni asosiy miqdor qilib noma'lumlardan istalgan birini olish mumkin. Asosiy qilib olinadigan va harf bilan belgilanadigan noma'lumni tanlash ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

Noma'lum miqdorni tanlashga qarab tuziladigan tenglama har xil bo'ladi, ammo masalaning yechimi bir xil bo'ladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani turlicha usul bilan yechib ko'raylik.

I - masala. Ikki idishga 1480 litr suv sig'adi. Birinchi idishga ikkinchi idishga qaraganda 760 litr suv ko'p sig'sa, har qaysi idishga necha litr suv sig'adi?

Yechish. **I - usul.**

1. Belgilash: x_1 - ikkinchi idishdagi suv bo'lsin, u holda $(x + 760)$ - birinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar: I va II idishdagi suvlarning miqdori x_1 va $(x+760)_1$.

3. Tenglama tuzish: $x + x + 760 = 1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x+760=1480$, $2x=1480 - 760$, $2x=720$, $x=720:2=360$ litr. Bu ikkinchi idishdagi suv $x=360+760=1120$ litr, birinchi idishdagi suv.

5. Tekshirish. $360 + 360 + 760 = 1480$. $1480 = 1480$.

II- usul. Belgilash. x_1 - birinchi idishdagi suv bo'lsa, u holda $(x - 760)_1$ ikkinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. I va II idishdagi suvlarning miqdori.

3. Tenglama tuzish. $x + x - 760 = 1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x-760=1480$, $2x=1480+760=2240$.

$x=2240:2=1120$ litr, birinchi idishdagi suv, $x=1120-760 = 360$ litr, bu ikkinchi idishdagi suv.

5. Tenglamani tekshirish. $x+x-760=1480$, $1120+360=1480$, $1480=1480$.

III - usul. 1. Belgilash. Faraz qilaylik, birinchi idishga x l suv sig'sin, ikkinchi idishga esa y l suv sig'sin.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. Birinchi va ikkinchi idishlardagi suv miqdorlari va ularning o'zaro farqi.

3. Tenglama tuzish. $\begin{cases} x+y=1480, \\ x-760=y. \end{cases}$

4. Sistemani yechish. $\begin{cases} x+y=1480, \\ x-760=y. \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x+x-760=1480, \\ x-760=y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=1240, \\ x-760=y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1120, \\ y=360 \end{cases}$$

5. Tekshirish. $1120+360=1480$, $1480=1480$

$$1120-760=360, \quad 360=360$$

2-masala. Bitta daftar va bitta bloknot hamda bitta qalam uchun 2,2 so'm to'landi. Qalam daftarga qaraganda to'rt marta arzon, bloknot esa daftarga qaraganda 0,4 so'm qimmat. Har qaysi buyumning narxini toping.

1. Belgilashlar. Bloknotning narxini x so'm deb olamiz, u holda daftarning narxi $(x-0,4)$ so'm, qalamning narxi $(x-0,4):4$ so'm.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. Bloknot, daftar, qalam narxleri va narxlar orasidagi munosabat.

3. Tenglama tuzish. $x+(x-0,4)+(x-0,4):4=2,2$.

4. Tenglamani yechish. $9x-2=8,8$ $9x=10,8$ $x=1,2$ so'm bloknotning narxi, $x-0,4=1,2-0,4=0,8$ so'm daftarning narxi, $(x-0,4):4=0,8:4=0,2$ so'm qalamning narxi.

5. Tekshirish. $1,2+0,8+0,2=2,2$ $2,2=2,2$.

II - usul. Belgilashlar. Daftarning narxini x so'm deb olamiz, u holda bloknotning narxi $(x+0,4)$ so'm, qalamning narxi esa $(x:4)$ so'm bo'ladi.

2. Tenglama tuzish va uni yechish.

$$x+x+0,4+x:4=2,2, \quad 9x+1,6=8,8; \quad 9x=7,2;$$

$$x=0,8 \text{ so'm}, \quad x+0,4=1,2 \text{ so'm}, \quad x:4=0,2 \text{ so'm}.$$

III - usul. 1. Belgilashlar. Qalamning narxini x so'm deb olamiz, u holda daftarning narxi $4x$ so'm bo'ladi. Bloknotning narxi esa $4x+0,4$ so'm. Tenglama tuzish va yechish.

$$x+4x+4x+0,4=2,2; \quad 9x+0,4=2,2. \quad 9x=1,8;$$

$$x=0,2 \text{ so'm}; \quad 4 \cdot 0,2=0,8 \text{ so'm}; \quad 4x+0,4=4 \cdot 0,2+0,4=1,2 \text{ so'm}$$

Yuqoridagi belgilashlar har xil bo'lsa ham javob bir xil chiqadi. Qalam narxi 0,2 so'm, daftar narxi 0,8 so'm, bloknot narxi 1,2 so'm.

3-masala. Bir sabzovot omborida 21 t ikkinchida 18 t kartoshka bor edi. Birinchi omborga kuniga 9 tonnadan, ikkinchisiga 12 tonnadan kartoshka keltirilsa, necha kundan keyin birinchi ombordagi kartoshka ikkinchisidan 1,2 marta kam bo'ladi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar x deb kartoshka tashilgan kunlar sonini belgilasak, u holda birinchi omborga $9x$ tonna, ikkinchi omborga esa $12x$ tonna kartoshka keltirilgan bo'ladi. Birinchi ombordagi jami kartoshka $(21+9x)$ t, ikkinchi ombordagi jami kartoshka $(18+12x)$ t bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $(21+9x)$ t va $(18+12x)$ t.

3. Tenglama tuzish. $1,2(21+9x)=18+12x$

4. Tenglamani yechish. $\frac{6}{5}(21+9x)=18+12x$

$$126+54x=90+60x,$$

$$6x=36. \quad x=6 \text{ kun}.$$

5. Tekshirish. $\frac{6}{5}(21+54)=18+12 \cdot 6; \quad 90=90.$

4-masala. Tomosha zali 100 ta elektr lampochka bilan yoritiladi. Bir katta lampochkaning bir hafta davomida yonishi 15 tiyinga, kichik lampochkaning

yonishi esa 10 tiyinga tushadi. Agar zalni bir hafta yoritish 13,50 so'mga tushsa, zalga nechta katta lampochka va kichik lampochka o'rnatilgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Faraz qilaylik, x dona katta va y dona kichik lampochkalar bo'lsin, u holda katta va kichik lampochkalarning har birini haftada yonish puli $\frac{15x}{100}$ va $\frac{10y}{100}$ so'mdan bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{15x}{100}$ va $\frac{10y}{100}$

3. Tenglama tuzish.

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{3}{20}x+\frac{1}{10}y=\frac{27}{2} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish.

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{3}{20}x+\frac{1}{10}y=\frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ 3x+2y=270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=300 \\ 3x+2y=270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=30 \\ x=70 \end{cases}$$

- kichik lampochkalar soni
- katta lampochkalar soni

5. Tekshirish.

$$\begin{cases} 30+70=100 \\ \frac{3}{20} \cdot 70 + \frac{1}{10} \cdot 30 = \frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30+70=100 \\ \frac{27}{2} = \frac{27}{2} \end{cases}$$

5-masala. Kotlovan qazish uchun ikkita ekskavator ishga solindi. I ekskavator soatiga II ekskavatorga qaraganda 40 kub metr ortiq tuproq oladi. I ekskavator 16 soat, II ekskavator 24 soat ishladi. Shu vaqt ichida ikkala ekskavator 8640 kub metr tuproq qazib olindi. Har qaysi ekskavator soatiga nechta kub metr tuproq olgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I ekskavator soatda x kub metr tuproq qaziydi desak, u holda II ekskavator $(x-40)$ kub metr tuproq qaziydi. I ekskavatorning 16 soatdagi

qazigan tuprog'i $16x$, II ekskavatorning 24 soatda qazigan tuprog'i $24(x-40)$ bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $16x$ va $24(x-40)$

3. Tenglama tuzish. $16x+24(x-40)=8640$.

4. Tenglamani yechish. $16x+24x-960=8640$, $40x=9600$, $x=240$ kub metr - I ekskavatorchining I soatda qazigan tuprog'i. $x-40=240-40=200$ kub metr, II ekskavatorning I soat qazigan tuprog'i.

5. Tekshirish. $16 \cdot 240 + 24 \cdot 200 = 8640$, $8640 = 8640$.

6-masala. Ikki traktor birgalikda ishlab bir maydonni 6 soatda haydab bo'ladi. Agar I traktorining yolg'iz o'zi ishlasa, bu maydonni II traktorichiga nisbatan 5 soat tez haydab bo'ladi. Bu maydonni har qaysi traktorining yolg'iz o'zi nechta soatda haydab bo'ladi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqtini x soat desak, u holda II-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqti $(x+5)$ soat bo'ladi.

$$\frac{1}{x} - \text{I - traktorning I soatdagi ishi.}$$

$$\frac{1}{x+5} - \text{II - traktorning I soatdagi ishi.}$$

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $\frac{1}{x}$ va $\frac{1}{x+5}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$

4. Tenglamani yechish.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

$$6(x+5) + 6x = x^2 + 5x, \quad x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 30} = \frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -3 \quad \text{chet ildiz}$$

$x=10$ soat - birinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqti.

$x=15$ soat - ikkinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqti.

5. Tekshirish.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

II - usul. Berilgan masalani tenglamalar sistemasini tuzish orqali yechish quyidagicha bajariladi.

1. Belgilash. Faraz qilaylik, I - traktor yer maydonini x soatda, II - traktor yer maydonini y soatda haydab bo'lsin, y holda I-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{x}$,

II-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{y}$ bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. Birinchi traktorning ish soati $\frac{1}{x}$ bilan ikkinchi traktorning ish soati $\frac{1}{y}$ hamda ular orasidagi vaqtning farqi.

3. Tenglamalar sistemasini tuzish.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x - y = 5 \end{cases}$$

4. Sistemani yechish.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} 6y + 6x = xy \\ x = 5 + y \end{cases} \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6y + 6(5 + y) = 5y + y^2) \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 7y - 30 = 0, \\ x = 5 + y \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 30} = \frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} 6y + 6x = xy \\ x = 5 + y \end{cases} \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6y + 6(5 + y) = 5y + y^2) \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 7y - 30 = 0, \\ x = 5 + y \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 30} = \frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}$$

$y_1 = 10$ kun; $x = 5 + 10 = 15$ kun, $y_2 = -3$ chet ildiz.

5. Tekshirish.

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{6} \right)$$

7-masala. Turist paraxodda 72 km suzdi, paraxodda o'tgan yo'lidan 25% ortiq masofani avtomashinada yurdi. Avtomobil tezligi paraxod tezligidan soatiga 21 km ortiq. Turist avtomobilida paraxodda yurganiga qaraganda 1 soat kam yurgan bo'lsa, avtomobilning tezligi qancha?

Yechish.

1. Belgilashlar. x paraxodning tezligi bo'lsa, u holda $(x+21)$ - avtomobilning tezligi bo'ladi. $\frac{72}{x}$ - paraxodda sarf qilingan vaqt, $\frac{90}{x+21}$ - avtomobilida sarf qilingan vaqt.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{72}{x}$ va $\frac{90}{x+21}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{72}{x} - \frac{90}{x+21} = 1$

4. Tenglamani yechish. $\frac{72}{x} - \frac{90}{x+21} = 1$

$$72(x+21) - 90x = x^2 + 21x$$

$$x^2 + 21x - 72x + 90x - 1512 = 0$$

$$x^2 + 39x - 1512 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-39 \pm \sqrt{1521 + 4 \cdot 1512}}{2} = \frac{-39 \pm 87}{2}$$

$x = 24$ km/s paraxod tezligi, $x = 45$ km/s, avtomobil tezligi.

$$\frac{72}{24} - \frac{90}{45} = 1; \quad 72 \cdot 45 - 90 \cdot 24 = 24 \cdot 45$$

Tekshirish: $24 \cdot 45 = 24 \cdot 45$.

8-masala. Teplovoz ma'lum vaqt ichida 325 km masofasani o'tish kerak, shu yo'lning $\frac{2}{5}$ qismini o'tgandan keyin u 24 minut ushlanib qoldi. Keyin muddatida manzilga etib borish uchun tezligini soatiga 10 km oshirdi. Teplovozning tezligini toping?

Yechish.

Belgilash. Agar teplovozning dastlabki tezligi x km/s desak, u holda $(x+10)$ km/s uning keyingi tezligi bo'ladi.

$\frac{195}{x+10}$ - keyingi masofani bosib o'tish uchun ketgan vaqt.

$\frac{130}{x}$ - avvalgi, masofani bosib o'tish uchun ketgan vaqt.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{130}{x}$; $\frac{195}{x+10}$ va $\frac{325}{x}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{130}{x} + \frac{195}{x+10} + \frac{2}{5} = \frac{325}{x}$

4. Tenglama yechish.

$$130 \cdot 5(x+10) + 5 \cdot 195x + 2(x^2 + 10x) = 5(x+10) \cdot \frac{325}{x}$$

$$650x + 6500 + 975 + 2x^2 + 20x - 1625x - 16250 = 1$$

$$2x^2 + 20x - 9750 = 0, \quad x^2 + 10x - 4875 = 0$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 4875} = -5 \pm \sqrt{4900} = -5 \pm 70$$

$x_1 = 65$ km/s, avvalgi tezlik,

$x_2 = -75$ km/s, chet ildiz,

$x+10 = 75$ km/s keyingi tezlik

5. Tekshirish.

$$\frac{130}{65} + \frac{195}{75} + \frac{2}{5} = \frac{325}{65}, \quad \frac{30+39+6}{15} = 5, \quad \frac{75}{15} = 5, \quad 5 = 5.$$

9-masala. Tomonlari 12 m va 10 m bo'lgan to'rtburchak shakldagi maydon o'rtasiga chetlari maydon chetlaridan bir xil masofada yotadigan va yuzi 8 m^2 ga teng bo'lgan gulxona ajratish kerak. Gulxonaning cheti maydon chetidan qanday masofada yotishi kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Oraliqdagi masofani x m desak, u holda $12-2x$ gulxonaning bo'yi va $10-2x$ uning eni bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. Gulxonaning bo'yi $12-2x$, uning eni $10-2x$ va gulxonaning yuzi 8 m^2 .

3. Tenglama tuzish. $(12-2x)(10-2x) = 8$.

4. Tenglamani yechish.

$$120 - 24x - 20x + 4x^2 = 8$$

$$4x^2 - 44x + 112 = 0$$

$$\text{yoki } x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 28}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 7; \quad x_2 = 4;$$

$x = 4$ m oraliqdagi masofa.

5. Tekshirish.

$$1) (12-2 \cdot 7) \cdot (10-2 \cdot 7) = 8; \quad 2) (12-8) \cdot (10-8) = 8$$

$$(-2) \cdot (-4) = 8;$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$8 = 8$$

$$8 = 8$$

10-masala. 160 km masofani avtomashina 3 soatda bosib o'tadi. Yo'lning 75% asfalt qilingan, qolgan qismiga esa tosh yotqizilgan. Mashinaning tosh yo'ldagi tezligi asfalt yo'ldagi tezligiga qaraganda 20 km/s kam bo'lsa, u asfalt yo'lda qanday tezlik bilan yurgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar mashinaning asfalt yo'ldagi tezligini x km/s desak, u holda uning tosh yo'ldagi tezligi $(x-20)$ km/s bo'ladi. $\frac{120}{x}$ - mashinaning asfalt yo'lini bosib o'tish uchun sarflagan vaqti.

$\frac{40}{x-20}$ - mashinaning tosh yo'lini bosib o'tish uchun sarflagan vaqti.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{120}{x}$ va $\frac{40}{x-20}$

3. Tenglama tuzish: $\frac{120}{x} + \frac{40}{x-20} = 3$

4. Tenglamani yechish.

$$120x - 2400 + 40x = 3x^2 - 60x,$$

$$3x^2 - 220x + 2400 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{110 \pm \sqrt{12100 - 7200}}{3} = \frac{110 \pm \sqrt{4900}}{3} = \frac{110 \pm 70}{3}$$

$x = 60$ km/s, mashinaning asfalt yo'ldagi tezligi.

$x-20=60-20=40$ km/s, mashinaning tosh yo'ldagi tezligi.

5. Tekshirish:

$$\frac{120}{60} + \frac{40}{40} = 3; \quad 2 + 1 = 3; \quad 3 = 3$$

11-masala. Rejada belgilangan muddatda hosilni yig'ib olish uchun xo'jalik ikkita brigada ajratdi. 400 gektarli uchastkada ishlagan birinchi brigada topshiriqni muddatidan ikki kun oldin bajardi. Ikkinchi brigada esa 900 gektarli uchastkada ishlab, topshiriqni muddatidan 2 kun keyin bajardi. Agar birinchi brigada ikkinchi brigada necha kun ishlagan bo'lsa, shuncha kun, ikkinchi brigada necha kun birinchi brigada ishlagan bo'lsa, shuncha kun ishlaganda edi, ikkala brigada teng miqdorda hosil yig'ar edi. Reja bo'yicha hosil necha kunda yig'ib olinishini va har qaysi brigadaning kundalik ish unumini toping?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar rejada belgilangan muddatni x kun desak, u holda $(x-2)$ kun birinchi brigadaning hosilni yig'ib olish uchun sarf qilgan vaqti, $x+2$ kun esa

ikkinchi brigadaning sarf qilgan vaqti bo'ladi. $\frac{400}{x-2}$ - birinchi brigadaning bir kunlik ishi, $\frac{900}{x+2}$ - ikkinchi brigadaning bir kunlik ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{400}{x-2}$ va $\frac{900}{x+2}$

3. Tenglama tuzish: $\frac{400}{x-2}(x+2) = \frac{900}{x+2}(x-2)$

4. Tenglamani yechish:

$$400(x+2)^2 = 900(x-2)^2 \quad 30x - 20x = 40 + 60$$

$$20(x+2) = 30(x-2) \quad 10x = 100,$$

$$20x + 40 = 30x - 60 \quad x = 100 : 10 = 10$$

$x=10$ - rejada belgilangan kun. $x=8$ - birinchi brigadaning ishlagan kuni, $x=12$ - ikkinchi brigadaning ishlagan kuni.

5. Tekshirish.

$$\frac{400}{8} \cdot 12 = \frac{900}{12} \cdot 8 \quad 600 = 600$$

12-masala. Oralari 24 km bo'lgan A va B punktlardan ikki avtomobil bir vaqtda bir-biriga qarab yo'lga chiqdi. A punktdan kelayotgan avtomobil uchrashuvdan 16 minut keyin B punktga etib keldi, ikkinchi avtomobil esa A punktga 4 minutdan keyin keldi. Avtomobillarning tezliklarini toping?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar A punktdan chiqqan avtomobil uchrashguncha x km yo'l yurgan desak, u holda B punktdan chiqqan avtomobil $24-x$ km yo'l yurgan bo'ladi. $15x$ B dan chiqqan avtomobilning tezligi.

$\frac{15 \cdot (24-x)}{4}$ A - dan chiqqan avtomobilning tezligi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{4x}{15 \cdot (24-x)}$ va $\frac{(24-x)}{15x}$ uchrashguncha ketgan vaqtlar.

3. Tenglama tuzish: $\frac{4x}{15 \cdot (24-x)} = \frac{(24-x)}{15x}$

$$4. \text{ Tenglamani yechish; } 60x^2 = 15(24-x)^2 \quad 2x = 24 - x,$$

$$4x^2 = (24-x)^2 \quad 3x = 24; \quad x = 8.$$

$x = 8 \text{ km}$ A dan chiqqan avtomobilning uchrashguncha bosib o'tgan yo'li.

$x = 16 \text{ km}$ B chiqqan avtomobilning uchrashguncha bosib o'tgan yo'li.

60 km/s A dan chiqqan avtomobilning tezligi.

120 km/s B dan chiqqan avtomobilning tezligi.

13-masala. Hovuzga ikki krandan suv keladi. Oldin birinchi kran ochib qo'yildi, u ikkinchi kranning yolg'iz o'zi ishlaganda hovuzni qancha vaqtda to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha vaqt ochiq turdi. So'ngra, ikkinchi kran birinchi kran yolg'iz o'zi hovuzni qancha vaqtda to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha ochiq turdi. Shundan keyin hovuzning $\frac{13}{18}$ qismi suvga to'ldi. Agar ikkala kran baravar turganda hovuz 3 soat-u, 36 minutda to'lsa, hovuzni to'ldirish uchun har qaysi kranning yolg'iz o'ziga qancha vaqt kerak bo'lishi hisoblansin.

Yechish.

1. Belgilashlar. Birinchi kran hovuzni x soatda, ikkinchi kran y soatda to'ldiradi deylik, u holda birinchi kran bir soatda hovuzning $\frac{1}{x}$ qismini to'ldiradi, masalaning shartiga ko'ra birinchi kran $\frac{1}{3}y$ soat ochiq turdi, demak, birinchi krandan kelgan suv hovuzning $\frac{\frac{1}{3}y}{x}$ qismini to'ldiradi. Ikkinchi kran hovuzning $\frac{1}{3}x$ qismini to'ldirishi ham shu yo'l bilan topiladi.

$$2. \text{ Taqqoslanadigan miqdorlar: } \frac{1}{3} \frac{x}{y} \text{ va } \frac{1}{3} \frac{y}{x}$$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{x}{y} + \frac{1}{3} \frac{y}{x} = \frac{13}{18}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish.

$$\frac{y}{x} = z \text{ desak, } \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}\frac{1}{z} = \frac{13}{18}, \quad 6z^2 - 13z + 6 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12};$$

$$z_1 = \frac{3}{2}; \quad z_2 = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} \left| \cdot y, \quad \frac{y}{x} + 1 = \frac{5}{18}y \right.$$

$$\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{18}y, \quad \frac{5}{2} = \frac{5}{18}y, \quad y = 9; \quad x = \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$$

Kranlarning biri hovuzni 9 soatda, ikkinchisi 6 soatda to'ldiradi.

14-masala. Sof spirt to'ldirilgan bakdan undagi spirtning bir qismini quyib olindi va uning o'miga shuncha suv quyib qo'yildi. So'ngra bakdan yana o'shancha litr aralashma quyib olindi, shundan keyin bakda 49 litr sof spirt qoldi. Bakning sig'imi 64 l. Bakdan birinchi safar qancha va ikkinchi safar qancha spirt quyib olingan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar birinchi safar x l spirt quyib olingan bo'lsa, bakda $(64 - x)$ l spirt qoladi, ikkinchi safar $\frac{64-x}{64}x$ l sof spirt quyib olindi, u holda bakda $64 - x - \frac{64-x}{64}x$ l sof spirt qoladi.

$$2. \text{ Taqqoslanadigan miqdorlar: } (64 - x) \text{ l va } \frac{64-x}{64}x \text{ l.}$$

$$3. \text{ Tenglama tuzish: } \frac{1}{64}(64 - x)^2 = 49$$

4. Tenglamani yechish:

$$\frac{1}{64} \cdot 64^2 - \frac{1}{64} \cdot 64 \cdot 2x + \frac{1}{64}x^2 = 49$$

$$x^2 - 128x + 960 = 0$$

$$x_{1,2} = 64 \pm \sqrt{4096 - 960} = 64 \pm 56;$$

$$x_1 = 8 \text{ l, } x_2 = 110 \text{ l.}$$

$$\frac{64-x}{64}x = \frac{56}{64} \cdot 8 = 7 \text{ l spirt quyib olingan.}$$

5. Tekshirish:

$$\frac{1}{64}(64-8)^2 = 49, \quad \frac{1}{64} \cdot 56^2 = 49, \quad 49 = 49$$

15-masala. Mashinistka o'ziga topshirilgan ishni har kuni belgilangan normadan 2 bet ortiq bossa, ishni muddatidan 3 kun ilgari tugatadi. Agar normadan 4 betdan ortiq bossa muddatidan 5 kun ilgari tugatadi. U necha bet ko'chirishi va qancha vaqtda ko'chirishi kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar mashinistkaning bir kunlik normasini x bet, ishni tamomlash muddatini y kun desak, u holda jami ish xy bet bo'ladi. $(x+2)$ mashinistkaning normadan ortiq bosgan bir kunlik betlar soni.

$(y-3)$ mashinistkaning ishni muddatidan ilgari tamomlash kuni.

$(x+4)$ mashinistkaning normadan ortiq bosgan bir kunlik betlar soni.

$(y-5)$ mashinistkaning ishni muddatidan ilgari tamomlash kuni.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x+2$, $y-3$, $x+4$, $y-5$, va xy .

3. Tenglama tuzish:
$$\begin{cases} (x+2) \cdot (y-3) = xy, \\ (x+4) \cdot (y-5) = xy. \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish: Sistemadagi birinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayirsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$xy - 3x + 2y - 6 + 5x - xy - 4y + 20 = 0,$$

$$2x - 2y + 14 = 0, \quad x = y - 7.$$

Bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo'ysak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$(y-5)(y-3) = (y-7)y$$

$$y^2 - 8y + 15 = y^2 - 7y, \quad y = 15 \text{ kun} \quad x = 8 \text{ bet}$$

J: Mashinkada bosiladigan ish 120 bet ekan.

5. Tekshirish:

$$\begin{cases} (8+2) \cdot (15-3) = 15 \cdot 8, \\ (8+4) \cdot (15-5) = 15 \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 120 = 120 \\ 120 = 120 \end{cases}$$

16-masala. Ikki ishchiga bir qancha bir xil detallar tayyorlash topshirildi.

Birinchi ishchi 7 soat, ikkinchisi 4 soat ishlagandan keyin butun ishning $\frac{5}{9}$ qismini tamomlangani ma'lum bo'ldi. Ular birgalikda yana 4 soat ishlagandan keyin butun ishni $\frac{1}{18}$ qismi qolganini aniqlashdi. Bu ishni har qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, necha soatda tamomlar edi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar birinchi ishchi ishni yolg'iz o'zi x soatda, ikkinchi ishchi y soatda tamomlay oladi desak, u holda birinchi ishchi bir soatda ishning $\frac{1}{x}$ qismini, ikkinchisi esa $\frac{1}{y}$ qismini tamomlaydi. $7 \cdot \frac{1}{x}$ - birinchi ishchining 7 soatdagi bajargan ishi, $4 \cdot \frac{1}{y}$ - ikkinchi ishchining 4 soatda bajargan ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $7 \cdot \frac{1}{x}$ va $4 \cdot \frac{1}{y}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} 7 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{5}{9} \\ 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1 - \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{18} \right) = \frac{7}{18} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18} \end{cases}$$

Sistemadagi birinchi tenglamadan ikkinchisini ayiramiz:

$$\frac{7}{x} - \frac{4}{x} = \frac{5}{9} - \frac{7}{18}, \quad \frac{3}{x} = \frac{3}{18}, \quad x = 18 \text{ c}$$

Bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$7 \cdot \frac{1}{18} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9}, \quad \frac{4}{y} = \frac{5}{9} - 7 \cdot \frac{1}{18}, \quad \frac{4}{y} = \frac{3}{18}$$

$$3y = 4 \cdot 18; y = 24 \text{ soat.}$$

5. Tekshirish:

$$\left(\frac{7}{18} + \frac{4}{24} = \frac{5}{9}\right) \Rightarrow \left(\frac{28+12}{72} = \frac{5}{9}\right) \Rightarrow \left(\frac{5}{9} = \frac{5}{9}\right)$$

17-masala. Paraxodga ko'tarma kran bilan yuk ortildi. Oldin quvvati bir xil bo'lgan 4 ta kran ishladi. Ular 2 soat ishlagandan keyin ularga yana kamroq quvvatga ega bo'lgan 2 ta ko'tarma kran qo'shildi va shundan keyin yuk ortish 3 soatda tamom bo'ldi. Agar hamma kran baravariga ishga tushirilsa, yuk ortish 4,5 soatda tugardi. Agar bitta kuchli kran yolg'iz o'zi ishlatilsa, yuk ortishni necha soatda tamomlash mumkin bo'lar edi? Bitta kuchsiz kran yolg'iz o'zi ishlasa, ishni necha soatda tamomlar edi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Katta quvvatga ega bo'lgan kran x soatda yukni ortsin. Kichik quvvatga ega bo'lgan kran u soatda ortsin, u holda birinchi kran ja'mi ishning $\frac{1}{x}$ qismini bir soatda bajaradi. Kichik quvvatga ega bo'lgan kran esa bir soatda ishning $\frac{1}{y}$ qismini bajaradi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: To'rtta katta kranning 5 soatdagi ishi $4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x}$ va ikkita kichik kranning $3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{y}$ soatdagi ishi hamda ularning 4,5 soatdagi ishlari

$$4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x} \text{ va } 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{y}$$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{y} = 1 \\ 4 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \frac{20}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ \frac{18}{x} + \frac{9}{y} = 1 \end{cases} \cdot 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{60}{x} + \frac{18}{y} = 3 \\ \frac{36}{x} + \frac{18}{y} = 2 \end{cases}$$

1 - tenglamadan 2-tenglamani ayirsak, $\frac{24}{x} = 1$ hosil bo'ladi, bundan $x = 24$;

$$\frac{36}{24} + \frac{18}{y} = 2, \quad \frac{18}{y} = 2 - \frac{3}{2}, \quad \frac{18}{y} = \frac{1}{2} \text{ soat, } y = 36 \text{ soat.}$$

$$5. \text{ Tekshirish: } \frac{20}{24} + \frac{6}{36} = 1, \quad \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1, \quad 1 = 1$$

18-masala. Elektrostansiya qurilishda g'isht teruvchilar brigadasi ma'lum vaqtda 120 ming dona g'isht terish kerak edi. Brigada ishni muddatidan 4 kun ilgari tamomladi. Agar brigada norma bo'yicha 4 kunda qancha g'isht terishi kerak bo'lsa, 3 kunda shundan 5 ming dona ortiq g'isht tergani ma'lum bo'lsa, har kungi g'isht terish normasi qancha bo'lgan va brigada haqiqatda kuniga qanchadan g'isht tergan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Bir kunda teriladigan normadagi g'isht x ming dona bo'lsin, haqiqatda esa u ming donadan g'isht terilgan bo'lsa, $\frac{1}{x}$ - norma bo'yicha teriladigan kun, $\frac{1}{y}$ - haqiqatda terilgandagi sarf qilingan kun.

$$2. \text{ Taqqoslanadigan miqdorlar: } \frac{120}{x}, \frac{120}{y}, 3y \text{ va } 4x.$$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 4 \\ 3y - 4x = 5 \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 4 \\ 3y - 4x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30y - 30x = xy \\ y = \frac{5+4x}{3} \end{cases}$$

$$30 \cdot \frac{5+4x}{3} - 30x = x \cdot \frac{5+4x}{3}$$

$$30(5+4x) - 90x = 5x + 4x^2$$

$$150 + 120x - 90x = 5x + 4x^2$$

$$4x^2 - 25x - 150 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 2400}}{8} = \frac{25 \pm 55}{8}$$

$$x_1 = 10 \text{ ming dona}, y_1 = \frac{5+40}{3} = \frac{45}{3} = 15 \text{ ming dona}.$$

5. Tekshirish:

$$\frac{120}{10} - \frac{120}{15} = 4, \quad 12 - 8 = 4, \quad 4 = 4$$

19-masala. Quvvatlari turlicha bo'lgan ikki traktor birga ishlab xo'jalik erini 8 kunda haydab tamomladi. Dastlab dalaning yarmini bir traktor yolg'iz o'zi haydab, keyin ikkala traktor birga ishlasa, hamma ish 10 kunda tugatildi. Dalani har qaysi traktor yolg'iz o'zi necha kunda hayday olardi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Birinchi traktor bilan butun dalani x kunda, ikkinchi traktor bilan u kunda haydash mumkin bo'lsa, u holda birinchi traktor bir kunda $\frac{1}{x}$ qism erini haydasa, ikkinchi traktor bir kunda $\frac{1}{y}$ qism erini haydaydi. Shartga ko'ra birinchi traktor dalani yarmini haydagani uchun $\frac{x}{2}$ bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ va $\frac{x}{2}$.

$$3. \text{ Tenglama tuzish: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \\ \frac{x}{2} + 4 = 10 \end{cases}$$

$$4. \text{ Tenglamani yechish: } \begin{cases} 8y + 8x = xy, \\ x = 12; \end{cases}$$

$$8y + 8 \cdot 12 = 12y, \quad 4y = 96, \quad y = 24.$$

Demak, birinchi traktor bilan dalani 12 kunda, ikkinchi traktor bilan esa 24 kunda haydash mumkin.

20-masala. Ikki ayol bozorga 100 dona tuxum olib kelishdi. Ikkala ayol tuxumlarni turli narx bilan sotib, barobar miqdorda pul to'lashdi. Agar birinchi ayoldagi tuxumlar ikkinchisidagicha bo'lsa, u 7,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi, agar ikkinchi ayoldagi tuxumlar birinchisidagicha bo'lsa, u 3,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi. Har qaysi ayol bozorga nechta dona tuxum oborgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Birinchi ayolda x dona, ikkinchi ayolda y dona tuxum bo'lsa, u holda masala shartiga ko'ra birinchi ayol tuxumning bir donasini $\frac{7,2}{y}$ so'mdan sotib, $\frac{7,2}{y}x$ so'm pul to'plagan bo'ladi. Xuddi shuningdek, ikkinchi ayolga ham $\frac{3,2}{x}y$ so'm pul tushgan bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x, y, \frac{7,2}{y}x$ va $\frac{3,2}{x}y$

$$3. \text{ Tenglama tuzish: } \begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{3,2}{x}y = \frac{7,2}{y}x \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$3,2y^2 = 7,2x^2 \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{7,2}{3,2}; \quad \left(\frac{x}{y}\right)_{1,2} = \pm \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{3}{2};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_2 = -\frac{3}{2}; \quad x = 100 - y, \quad \frac{y}{100 - y} = \frac{3}{2}; \quad 5y = 300,$$

$$y = 60 \text{ dona} \quad x = 40 \text{ dona}$$

5. Tekshirish:

$$\begin{cases} 60 + 40 = 100 \\ 3,2 \cdot 60 = \frac{7,2}{60} \cdot 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 = 100 \\ 4,8 = 4,8 \end{cases}$$

21-masala. Aravaning oldingi g'ildiragi 18 m masofada, keyingi g'ildirakdan 10 marta ortiq aylanadi. Agar oldingi g'ildirak aylanasi 6 dm orttirib, keyingi g'ildirak aylanasi 6 dm kamaytirilsa, shuncha masofada oldingi g'ildirak keyingisidan 4 ta ortiq aylanadi. Har qaysi g'ildirak aylanasi uzunligini toping.

Yechish.

1. Belgilashlar. Oldingi g'ildirakning aylanasi x dm, keyingi g'ildirakning aylanasi y dm bo'lsin.

$$\frac{180}{x} - \text{oldingi g'ildirakning bir marta aylanishi.}$$

$$\frac{180}{y} - \text{keyingi g'ildirakning bir marta aylanishi.}$$

$$\frac{180}{x+6} - \text{oldingi g'ildirakning ortirilgandan keyingi bir marta aylanishi.}$$

$$\frac{180}{y-6} - \text{keyingi g'ildirakning kamaytirilganidan keyingi bir marta aylanishi.}$$

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{180}{x}, \frac{180}{y}, \frac{180}{x+6}$ va $\frac{180}{y-6}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \frac{180}{x} - \frac{180}{y} = 10 \\ \frac{180}{x+6} - \frac{180}{y-6} = 4 \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$18y - 18x = xy,$$

$$45(y-6) - 45(x+6) = (x+6)(y-6),$$

$$45y - 270 - 45x - 270 = xy - 6x + 6y - 36,$$

$$39y - 39x - 504 = 18y - 18x,$$

$$21y - 21x - 504 = 0,$$

$$y - x - 24 = 0, \quad y = x + 24.$$

$$18(x+24) - 18x = (x+24)x$$

$$18x + 332 - 18x = x^2 + 24x; \quad x^2 + 24x - 332 = 0$$

$$x_{1,2} = -12 \pm \sqrt{144 + 332} = -12 \pm 24.$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -36$$

$x_1 = 12$ dm oldingi g'ildirak, $y = 36$ dm g'ildirak aylanasi uzunligi.

5. Tekshirish: $\frac{180}{12} - \frac{180}{36} = 10; 10 = 10.$

22-masala. Bir qotishmada 1:2 nisbatda ikki xil metall bor. Ikkinchi qotishmada esa shu metallar 2:3 kabi nisbatda. Tarkibida o'sha metallar 17:27 kabi nisbatda bo'lgan uchinchi bir qotishma hosil qilish uchun shu qotishmalarning har biridan qancha qism olish kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Uchinchi qotishmada birinchi qotishmaning x qismi va ikkinchi qotishmaning y qismi bo'lsin, ya'ni birinchi qotishmaning x kilogramiga ikkinchi qotishmaning y kilogrami to'g'ri kelsin. U holda $(x+y)$ kilogramm uchinchi qotishmada birinchi metallardan $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$ va ikkinchi metallardan $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$ kg bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$ va $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$

3. Tenglama tuzish:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y\right) : \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y\right) = 17:27$$

4. Tenglamani yechish:

$$\frac{5x+6y}{15} : \frac{10x+9y}{15} = 17:27$$

$$\frac{5x+6y}{10x+9y} = \frac{17}{27}; \quad \frac{5\frac{x}{y}+6}{10\frac{x}{y}+9} = \frac{17}{27}$$

$$5\frac{x}{y}+6 = \frac{17}{27}\left(10\frac{x}{y}+9\right)$$

$$5\frac{x}{y} - \frac{170}{27}\frac{x}{y} = 9 \cdot \frac{17}{27} - 6; \quad \frac{35x}{27y} = \frac{1}{3}; \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{35}; \quad \frac{x}{y} = \frac{9}{35}$$

Javob: birinchi qotishmaning 9 qismiga, ikkinchi qotishmadan 35 qism olish kerak.

23-masala. Ikki ishchining ikkinchisi birinchisidan 1,5 kun keyin ishga tushib, ular bir ishni 7 kunda tamomlay oladilar. Agar bu ishni hap qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, birinchi ishchi ikkinchisiga qaraganda 3 kun ortiq ishlashiga to'g'ri keladi. Har qaysi ishchi yolg'iz o'zi bu ishni necha kunda tamomlaydi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar ikkinchi ishchi butun ishni x kunda tamomlasa, birinchi ishchi $x+3$ kunda tamomlaydi. Birinchi ishchi 7 kun ishlab, butun ishning $\frac{7}{x+3}$

qismini, ikkinchi ishchi 5,5 kun ishlab, butun ishni $\frac{5,5}{x}$ qismini tamomlaydi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar; $\frac{7}{x+3}$ va $\frac{5,5}{x}$

3. Tenglama tuzish:

$$\frac{7}{x+3} + \frac{5,5}{x} = 1$$

4. Tenglamani yechish:

$$7x + 5,5x + 16,5 = x^2 + 3x,$$

$$x^2 - 9,5x - 16,5 = 0,$$

$$x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{33}{2} = 0,$$

$$2x^2 - 19x - 33 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 264}}{4} = \frac{19 \pm 25}{4}$$

$$x_1 = 11, \quad x_2 = -\frac{3}{2} - \text{chet ildiz}$$

Javob: birinchi ishchi ishni 14 kunda, ikkinchi ishchi 11 kunda tamomlaydi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Velosipedchi 30 km yo'l yurishi kerak edi. Velosipedchi tayinlangan vaqtdan 3 minut kech yo'lga chiqib, 1 km/s ortiq tezlik bilan yurdi va boradigan joyiga o'z vaqtida etib keldi. Velosipedchining tezligini toping?

Javob: 25 km/s.

2-masala. Ikki stansiya orasidagi masofa 96 km. Bu masofani birinchi poezd ikkinchi poezddan 40 minut tez o'tadi. Birinchi poezdning tezligi ikkinchi poezdning tezligidan 12 km/s ortiq bo'lsa, ikkala poezdning tezligini toping?

Javob: Birinchi poezd tezligi 48 km/s,

ikkinchi poezd tezligi 36 km/s.

3-masala. Ikki yo'lovchi bir vaqtda bir-biriga qarab A va B shaharlardan yo'lga chiqdi. Birinchi yo'lovchi ikkinchisidan bir soatda 2 km/s ortiq yo'l bosadi va u ikkinchi yo'lovchi A shaharga bormasdan bir soat oldin B shaharga etib boradi. A va B shaharlar orasidagi masofa 24 km. Har qaysi yo'lovchi bir soatda necha kilometr yo'l bosadi?

Javob: 6 km va 8 km.

4-masala. A va B shaharlar orasidagi masofa 200 km. A shahardan B shahargacha bir-biriga qarab bir vaqtda ikkita avtomobil yo'lga chiqdi. Birinchi avtomobil ikkinchi avtomobilga qaraganda 20 km tez yurdi va ikkinchi avtomobilga qaraganda 50 minut oldin etib keldi. Har qaysi avtomobilning tezligini toping?

Javob: 80 km/s va 60 km/s.

5-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 60 km. Motorli qayiq bu masofani oqim bo'yicha oqimga qarshi suzganidan ketgan vaqtga qaraganda 50 minut tez suzib o'tadi. Agar daryo oqimining tezligi soatiga 3 km bo'lsa, motorli qayiqning tezligini toping?

Javob: 21 km/s.

6-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 154 km. Bu pristanlarning birinchisidan ikkinchisiga qarab paraxod yo'lga chiqdi. Paraxod ikkinchi pristanga borib, 45 minut to'xtab turdi va yana yo'lga chiqqan joyiga 18,75 soatdan keyin qaytib keldi. Agar paraxodning turg'un suvdagi tezligi soatiga 18 km bo'lsa, daryo oqimining tezligini toping?

Javob: 4 km/s.

7-masala. Paxta terimida birinchi brigada 6 soat ishladi, shundan so'ng yana bir brigada kelib qo'shildi. Ikki brigada birgalikda topshiriqni 4 soatda tugatishdi. Agar birinchi brigada berilgan uchastkadagi hosilni bir o'zi terib olishi uchun ikkinchi brigada yolg'iz o'zi ishlaganiga qaraganda 3 soat ortiq vaqt talab qilinsa, har qaysi brigadaning yolg'iz o'zi uchastkadagi hosilni necha soatda yig'ib oladi?

Javob: birinchi brigada 15 kunda, ikkinchi brigada 12 kunda.

8-masala. Ikkita stanok birgalikda 9 soat-u 36 minutda ishni tugallaydi. Agar bitta stanok o'zi ishlasa, butun ishni bajarish uchun ikkinchiga qaraganda 8 soat ortiq vaqt talab qiladi. Har bir stanok alohida ishlaganda butun ishni necha soatda tugallaydi?

Javob: 16 soat, 24 soat.

9-masala. Ikki g'isht teruvchi ma'lum bir ishni birgalikda ishlab 4 soatda bajaradi. Agar, ishchi yolg'iz o'zi ishlasa va ishning yarmini bajarsa, so'ngra ikkinchi ishchi ishning qolgan yarmini bajarsa u holda butun ishni bajarish uchun ularga 9 soat kerak bo'ladi. Butun ishni har bir ishchi qancha vaqtda bajaradi?

Javob: 12 kun va 6 kun.

10-masala. Ikki payvandchi malum bir ishni birgalikda ishlab 4 kunda tugata oladilar. Agar bulardan biri yolg'iz o'zi 3 kun ishlagandan keyin, ikkinchisi

kelib qo'shilsa, ular birgalikda topshiriqni 5 kunda bajaradilar. Payvandchilarning har biri topshiriqni necha kunda bajaradi?

Javob: 6 kun va 12 kun.

11-masala. 300 ishchini jo'natish uchun bir necha avtobus chaqirilgan edi, ammo belgilanganidan ikkita avtobus kam keldi, shuning uchun har qaysi avtobusga mo'ljallanganidan 5 kishi ortiq o'tqizildi. Ishchilarni jo'natish uchun nechta avtobus chaqirilgan edi?

Javob: 12 ta.

12-masala. Tez yurar poezd passajir poezdiga qaraganda soatiga 10 km ortiq yuradi. Tez yurar poezdning 210 km ni o'tishi uchun ketkazgan vaqti passajir poezdining 240 km ni o'tishi uchun ketgan vaqtdan bir soat kam bo'lsa, tez yurar poezdning tezligini toping?

Javob: tez yurar poezd tezligi 70 km/s,

13-masala. Tajriba uchastkasida ekilganiga qaraganda 14 kg don ortiq yig'ib olindi. Yig'ib olingan donni yana ekildi va birinchi galdagi olingan hosil qancha bo'lsa, shuncha marta hosil olindi, hammasi bo'lib 128 kg don yigib olindi. Tajriba uchastkasiga birinchi galda qancha don ekilgan?

Javob: 98 kg.

14-masala. Suvoqchilar bilan bo'yoqchilar brigadasi bir uyni remont qildilar. Suvoqchilar soni bo'yoqchilarga qaraganda bittaga ortiq. Har qaysi brigada 150 so'mdan oldi. Agar har bir bo'yoqchi bir suvoqchi olgan pulni olganda edi, suvoqchilar brigadasi bo'yoqchilar brigadasiga qaraganda 67,5 so'm ortiq olgan bo'lardi. Suvoqchilar qancha bo'lgan va bo'yoqchilar qancha bo'lgan?

Javob: 5 ta suvoqchi, 4 ta bo'yoqchi.

15-masala. Ikki pristan orasidagi masofa daryo bo'yicha 50 km. Katerda bu masofani biridan ikkinchisiga borib, u erda 30 minut to'xtab yana birinchisiga qaytib kelishi uchun 5 soat vaqt sarf qilindi. Daryo oqimining tezligi 2,5 km bo'lsa, katerning turg'un suvdagi tezligini toping?

Javob: 90 km/s.

16-masala. Ikki avtomashina birgalikda ishlab ma'lum yukni 15 soatda tashib bo'ladi. Birinchi avtomobil ikkinchisidan 6 soat kam ishlab yukning 40% ni tashidi, qolgan yukni 2-avtomobil tashigan bo'lsa, har qaysi avtomobil necha soat ishlagan?

Javob: 30 soat, 36 soat.

17-masala. Ikki ishchi bir nechtadan detal tayyorlashi kerak edi. Birinchi ishchi bajargan ishi uchun 48 so'm, birinchi ishchidan 6 ta kam detal tayyorlagan ikkinchi ishchi esa 27 so'm oldi. Agar birinchi ishchi tayyorlaganicha detalni ikkinchi ishchi tayyorlaganida edi, ular bir xilda pul olgan bo'lar edilar. Ishchilar qanchadan detal tayyorlashgan?

Javob: Birinchi ishchi 24 ta, ikkinchi ishchi 18 ta detal yasagan.

18-masala. Oralaridagi masofa 900 km bo'lgan ikki stansiyadan bir-biriga qarab ikki poezd yo'lga chiqdi. Bu poezdlar yo'lni o'rtasida uchrashishi kerak edi. Agar bu poezdlardan birining tezligi ikkinchisidan 5 km/soat ortiq bo'lsa u belgilangan masofaga ikkinchisidan bir soat oldin keladi. Har bir poezdning tezligini toping?

Javob: 45 km/soat birinchi poezd tezligi, 50 km/soat ikkinchi poezd tezligi.

19-masala. Avtomashina 160 km kesik yo'lni 3 soatda o'tadi. Bu masofani 75% asfaltlangan bo'lib, qolgan qismi tosh yo'ldan iborat. Agar mashinaning asfalt yo'lidagi tezligi tosh yo'lidagi tezligidan soatiga 20 km ortiq bo'lsa, mashina asfalt yo'lda qanday tezlik bilan yurgan?

Javob: 60 km/soat asfalt yo'lidagi tezlik.

20-masala. Uch idishga suv quyilgan. Agar bir idishdagi suvning $\frac{1}{3}$ qismini ikkinchi idishga quyib, so'ngra ikkinchi idishda bo'lgan suvning $\frac{1}{4}$ qismini uchinchi idishga quyib, nihoyat uchinchi idishda bo'lgan suvning $\frac{1}{10}$ qismini birinchi idishga quyilsa, har bir idishda 9 litrdan suv bo'ladi. Har qaysi idishda qancha suv bor edi?

Javob: 12, 8, 7 litrdan.

21-masala. Oralaridagi masofa 650 km bo'lgan ikki shahardan ikki poezd bir-biriga qarab yo'lga chiqdi. Agar poezdlar bir vaqtda jo'nab ketgan bo'lsa, 10 soatdan keyin uchrashadi. Agar ikkinchi poezd birinchidan 4 soatu 20 minut oldin yo'lga chiqsa, birinchi poezd yo'lga chiqqanidan 8 soat keyin uchrashadi. Har qaysi poezdning o'rtacha tezligi topilsin.

Javob: 35 km/soat birinchi poezd tezligi. 30 km/soat ikkinchi poezd tezligi.

22-masala. Ikki shahar orasidagi masofa daryo yo'li bilan 80 km. Paraxod bu yo'lni bir boshidan ikkinchi boshiga 9 soat-u 20 minutda borib keladi. Daryo oqimining tezligini soatiga 4 km deb hisoblab, paraxodning turg'un suvdagi tezligini toping.

Javob: 20 km/s passajir poezd tezligi 60 km/s.

a) A va B lardan qarama -qarshi ikki yo'lovchi v_1 va v_2 tezliklar bilan yo'lga chiqib, t vaktidan keyin uchrashsa, bo'ladi. $v_1 t + v_2 t = S$ bo'ladi.

b) A va B lardan bir tomonga ikki yo'lovchi v_1 va v_1 tezliklar bilan yo'lga chiqib, vaqtdan t keyin 1-yo'lovchi 2-siga etib olsa, $v_1 t - v_2 t = S$ bo'ladi.

Masala. A punktdan B punktga qarab 50 km/ soat tezlik bilan avtomobil yo'lga chiqdi. 3 soat 45 minut o'tgandan keyin B punktdan A punktga qarab 75 km/ soat tezlik bilan ikkinchi avtomobil yo'lga chiqdi. A va B punktlar orasidagi masofa 450 km. Avtomobillar A punktdan qancha masofada uchrashadilar?

I. Analiz. Shartda

a) Birinchi avtomobilning tezligi 50 km/soat;

b) Ikkinchi avtomobilning tezligi 75 km/ soat;

v) Ikkinchi avtomobil birinchi avtomobilidan 3 soat 45 minut keyin yo'lga chiqdi.

g) A va B punktlar orasidagi masofa 450 km.

450 km

A _____ S _____ B

Masala talati: AS masofani topish, S avtomobillar uchrashgan joy.

II. Masalaning sxematik yozilishi:

a) AS masofani S km orqali belgilaymiz

b) Birinchi avtomobilning harakat vaqti tezligi $\frac{Skm}{50km/soat}$ (Fizikadan

ma'lumki tekis harakatdagi vaqti jism bosib o'tgan yo'lining tezlikka nisbatiga teng).

v) Ikkinchi avtomobilning harakat vaqti esa $\frac{(450-S)km}{75km/soat}$

III. Tenglama tuzish.

Masala shartiga ko'ra ikkinchi avtomobil birinchi avtomobildan 3 soat 45 minut keyin yo'lga chiqqan:

$$\frac{Skm}{50km/s} - \frac{(450-S)km}{75km/soat} = 3soat45minut$$

Vaqt o'lchovini soat orqali ifodalaymiz.

45 minut = $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ soat bo'lgani uchun (1) tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$\frac{S}{50}soat - \frac{450-S}{75}soat = 3\frac{3}{4}soat$$

IV. Tenglamani yechish.

$$\frac{S}{50} - \frac{450-S}{75} = 3\frac{3}{4}$$

$$\frac{S}{50} - \frac{450-S}{45} = \frac{15}{4}$$

$$6 \cdot S - 1800 = 4 \cdot S = 1125$$

$$10 \cdot S = 1125 + 1800$$

$$10 \cdot S = 2925$$

$$S = 2925 : 10$$

$$S = 292,5$$

V. Masala yechimini tekshiring.

Birinchi avtomobil AS=292,5 km yo'lni $\frac{292,5}{50km/soat} = 5\frac{17}{20}soatda$ bosib o'tdi.

Ikkinchi avtomobil SV yo'lni $5\frac{17}{20}soat - 3\frac{3}{4}soat = 2\frac{1}{10}soatda$ bosib o'tdi. SB yo'l

75km/soat $\cdot 2\frac{1}{10}soat = 157,5$ kilometr ga teng.

Bu masofa AB-AS ga teng bo'lishi kerak. AB-AS=450 km-292,5 km=157,5 km

Javobi: Avtomobillar A punktdan 292,5 km masofada uchrashadi.

Masala: Teploxod ko'lga 9 km va daryo oqimi bo'ylab 20 km masofani 1 soatda o'tdi. Agar daryo oqimining tezligi 3 km/ soat bo'lsa, teploxodning ko'ldagi tezligi nimaga teng.

I. Analiz. Masala sharti

a) teploxod ko'lga 9 km suzdi;

b) u daryo oqimi bo'ylab 20 km suzdi.

v) teploxod hammasi bo'lib 1 soat suzdi.

g) Daryo oqimining tezligi 3 km/soat

Masalaning talabi: teploxodning ko'ldagi tezligini toping.

II. Sxematik yozilishi:

a) teploxodning ko'ldagi tezligi V km/soat bo'lsin;

b) teploxod ko'lda $\frac{9}{V}$ soat suzdi;

v) teploxod daryo oqim bo'ylab $\frac{20}{V+3}$ soat suzdi.

III. Tenglama tuzish.

Masala shartiga ko'ra teploxod hammasi bo'lib 1 soat suzdi.

$$\frac{9}{V}c + \frac{20}{V+3}c = 1soat$$

VI. Tenglamani yechish.

Hosil bo'lgan $\frac{9}{V} + \frac{20}{V+3} = 1$ tenglamani echamiz

$$\begin{aligned}
9(V+3) + 20 \cdot V &= V(V+3) \\
9 \cdot V + 27 + 20 \cdot V &= V^2 + V + 3 \\
29 \cdot V + 7 - V^2 - 3 \cdot V &= 0 \\
V^2 - 26V - 27 &= 0 \\
D &= 26^2 - 4 \cdot (-27) = 676 + 108 = 784 > 0 \\
V_{1,2} &= \frac{26 \pm 28}{2} \\
V_1 &= \frac{26 - 28}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\
V_2 &= \frac{26 + 28}{2} = \frac{54}{2} = 27 \\
\text{Демак: } V_1 &= -1, V_2 = 27
\end{aligned}$$

V. Masalaning yechimini tekshirish.

V₂ = -1 ildizini tekshiraylik

Agar teploxod ko'lda $V_2 = -1$ km/soat tezlik bilan suzsa, u daryo oqimi bo'ylab 20 km masofani $\frac{20}{-1+3}$ soat = 10 soat vaqt ichida o'tgan bo'ladi. Bu esa masala shartini qanoatlantirmaydi, chunki teploxod hammasi bo'lib 1 soat suzgan edi.

Ikkinchi ildizni tekshiramiz.

Teploxod ko'lda $V_2 = 27$ km/soat tezlik bilan suzsa, u daryo oqimi bo'ylab 20 km masofani $\frac{20}{27+3}$ soat = $\frac{2}{3}$ soat vaqt ichida o'tadi.

Teploxod ko'lda esa $\frac{9}{27}$ soat = $\frac{1}{3}$ soat suzadi. Bu vaqtlar yig'indisi teploxodning umumiy suzgan vaqtiga teng bo'lishi kerak.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Javob: Teploxodning ko'ldagi tezligi 27 km/soat

Masala. Sayyohlar tushgan teploxod sohildagi bekatdan daryo oqimi bo'yicha jo'nab 5 soatdan keyin qaytib kelishi kerak. Daryo oqimining tezligi 3 km/soat; teploxodning turg'un suvdagi tezligi 18 km/soat. Agar sayyohlar

qaytishdan oldin qirg'oqda 3 soat dam olgan bo'lsalar, ular sohildagi bekatdan qancha masofaga suzib borganlar?

1) Izlanayotgan masofa x kilometr bo'lsin. Teploxod bu masofani daryo oqimi bo'yicha $18 + 3 = 21$ km/soat tezlik bilan o'tadi va bunda $\frac{x}{21}$ soat sarf qiladi. Teploxod $18 - 3 = 15$ km/soat tezlik bilan daryo oqimiga qarshi orqasiga qaytadi va bunga $\frac{x}{15}$ soat sarf qiladi. Sayyohlar qirg'oqda 3 soat dam oladilar: Demak, sayohat $\left(\frac{x}{21} + \frac{x}{15} + 3\right)$ soat davom etadi, bu esa masala shartiga ko'ra 5 soatga teng. Shunday qilib, biz noma'lum x masofani aniqlash uchun quyidagi tenglamani hosil qildik:

$$\frac{x}{21} + \frac{x}{15} + 3 = 5;$$

$$2) \text{ Endi } \frac{x}{21} + \frac{x}{15} = 2;$$

tenglamani yechamiz. Bu tenglamaning ikkala qismini 105 ga (21 va 15 sonlarining eng kichik umumiy bo'linuvchisiga) ko'paytirib, $5x + 7x = 210$, $12x - 210$ tenglikni hosil qilamiz, bundan $x = 17,5$.

Shunday qilib, teploxod sohildagi bekatdan 17,5 km masofaga suzib boradi.

Masalani yechishning birinchi bosqichida (ya'ni tenglama tuzishda) teploxod bilan daryo oqimi tezliklari oqim bo'yicha harakatda qo'shilishi, oqimga qarshi harakatda esa ayirilishi va tezlikka bo'lingan yo'l harakat vaqti ekanligini bilish zarur bo'ldi.

Ikkinchi bosqichda (ya'ni hosil bo'lgan tenglamani yechishda) tenglamalarning bundan oldingi paragrafda o'rganilgan xossalarini qo'llash talab etildi.

Masalaning shartidan foydalanib, yechimning to'g'riligini tekshirish mumkin. Bunda topilgan natijani ma'lum deb qarab, berilgan biror boshqa kattalik topiladi. Masalan, masala yechimining to'g'riligini bunday tekshirish mumkin.

Sayyohlar sohildagi bekatdan 17,5 km ga suzib bordilar. Demak, ular daryo oqimi bo'yicha $17,5 : 21 = \frac{5}{6}$ soat suzdilar. Sayyohlar qaytish uchun $17,5 : 15 = 1\frac{1}{6}$ soat vaqt sarfladilar.

Ular qirg'oqda 3 soat dam olganliklarini e'tiborga olinsa, sayohatga ketgan umumiy vaqt $\frac{5}{6} + 3 + 1\frac{1}{6} = 5$ soat, ya'ni masala sharti dagi kabi bo'ladi.

Amaldagi qo'llanayotgan algebra darsliklarida tenglamalar tuzishga doir bir qancha fizikaviy masalalar mavjud. Hamkasblarimiz bu masalalarni ham bosqichlab yechsalar yaxshi bo'lar edi.

Bu esa darsning effektivligini oshiradi. Shu bilan birga o'quvchilar mustaqil ishlashga o'rganadilar, ularning masala yechishga qiziqish ortadi. Hamda bilimlari yanada chuqur va mustahkam bo'ladi.

Men o'z darslarimda ana shu tipdagi masalalar bilan bir qatorda o'quvchilarga tushunarli va soddaroq bo'lishi uchun, bu masalalarning mazmunini ya'na shaklini biroz o'zgartirib, maktab va qishloq sharoitga moslab masalalar tuzaman va ularning yechimlarini aniq matematik tilda ifodalab beraman.

Savol va topshiriqlar

1. Masala tushunchasiga izoh bering.
2. Masala sharti deb nimaga aytiladi?
3. Masala operatorining tarifini keltiring.

3 §. Birgalikda bajarilgan ishga doir masalalar

Tayanch iboralar: algebraik masala, shart, talab, tekshirish, noma'lum ifoda.

Bu tip masalalariga asosan yuqorida ko'rsatilgan «harakat»ga doir masalalarni yechish usulini ko'llash mumkin bo'lgan boshqa har kandy algebraik masalalar kiradi.

Ma'lumki, harakatga doir masalalarni yechish usuli $S = V \cdot T$ formulaga asoslanadi.

Algebraik masalalarning boshqacha mazmundagi ba'zi masalalari ham, xuddi shunga o'xshash $y = k \cdot x$ (k-o'zgarmas) formula asosida yechilishi mumkin.

Masalan,

a) n ta detal t vaqt ichida tayyorlansa, bir birlik vaqt ichida tayyorlangan N ta detal (ishchi yoki mexanizmning) ish unumdorligini bo'lib, uning uchun $n = N \cdot t$ (N- o'zgarmas) bog'lan o'rindir.

b) W sig'imli hovuz biror quvurdan bir vaqt birligida V kub birlik suv bilan to'ldirilsa $W = V \cdot t$ bog'lan o'rindir.

v) Biror A ish t vaqt ichida to'la bajarilib, a bir-birlik vaqt ichida bajarilgan ish bo'lsa, u xolda $A = a \cdot t$ dir, bunda a-o'zgarmas. Yuqorida ko'rsatilgan tiplarga doir masalalarni yechishga masalalar keltiramiz.

Masala: Birinchi ishchi bir detalni tayyorlash uchun ikkinchisidan 3 minut kam vaqt sarflaydi. Agar 7 soat ichida birinchi ishchi ikkinchi ishchidan 16 ta ko'p detal yasay olsa, ularning har biri shu vaqt ichida qanchadan detal yasay oladi?

Yechilishi: Birinchi ishchining 7 soatda tayyorlagan detallarni sonini n desak, u bitta detalga $\frac{7}{n}$ ga teng vaqt sarflaydi.

Ikkinchi ishchi 7 soatda n-16 ta detal tayyorlasa, bitta detalga

$\frac{7}{n-16}$ birlik vaqt sarflaydi. Bitta detalga birinchi ishchi ikkinchisidan 3

minut kam vaqt sarflaydi.

$$\frac{7}{n-16} - \frac{7}{n} = 3$$

$$\frac{7}{n-16} - \frac{7}{n} = \frac{1}{20}$$

$$140n - 140(n-16) = n(n-16)$$

$$140n - 140n + 2240 - n^2 + 16n = 0$$

$$n^2 - 16n - 2240 = 0$$

$$D = 16^2 + 4 \cdot 2240 = 256 + 8960 = 9216$$

$$n_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{9216}}{2} = \frac{16 \pm 96}{2} = 8 \pm 48$$

$$n_1 = 8 - 48 = -40$$

$$n_2 = 8 + 48 = 56$$

Masala yechimini tekshirish:

a) $n_1 = -40$ da echim mos kelmaydi, chunki natija manfiy chiqayapti.

b) $n_2 = 56$ mos keladi.

Demak, birinchi ishchi 7 soatda 56 ta detal ikkinchi ishchi esa 40 ta detal tayyorlaydi.

Ishga doir masalalar bajarilayotgan ish hajmi ko'rsatilmaydi va u qidirilmaydi, bu ishlar ishlovchi tomonidan bir tekisda bajariladi. Bunday masalalarni echishda ish hajmi 1 ga teng deb olinib, ishlab chiqarish unumdorligi a ning t vaqt bilan $a = \frac{1}{t}$ kabi bog'lanish hisobga olinadi.

Masala: Ikki kran basseyinni 12 soatda to'ldiradi. Basseyinni birinchisi ikkinchisiga qaraganda 10 soat vaqtli to'ldira olsa, ikkinchi kran qancha vaqtda to'ldiradi?

Masalani yechish:

a) Ikkinchi kran basseyinni t soatda to'ldirsa;

b) birinchi kran esa t-10 soatda to'ldira oladi.

Agar ish hajmini 1 ga teng desak, 1 soatda ular basseyinning mos ravishda

$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-10}$ qismini to'ldira oladi.

Agar ular birgalikda ishlasa, 1 soatda basseyinning $\frac{1}{12}$ qismini to'ldirardi, demak,

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-10} = \frac{1}{12}$$

Tenglamani yechamiz:

$$12t - 120 + 12t - t^2 + 10t = 0$$

$$-t^2 + 34t - 120 = 0$$

$$t^2 - 34t + 120 = 0$$

$$D = 1156 - 480 = 676 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{34 \pm 26}{2}$$

$$t_1 = \frac{34 + 26}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$t_2 = \frac{34 - 26}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Masalani yechimini tekshirish:

Yechimning $t_2 = 4$ qiymati masalani qanoatlantirmaydi, chunki $\frac{1}{t} + \frac{1}{t-10} = \frac{1}{12}$

tenglamada aytilgan fikrni tasdiqlamaydi.

v) $t_1 = 30$ soatda to'ldiradi.

Aniqmas tenglamalar, tenglamalar sistemasi tuzib yechiladigan masalalar. Umuman olganda, algebraik masala tarkibidagi ma'lum va noma'lum miqdorni o'zaro bog'lovchi tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kam bo'lishi, lekin masalada qo'yilgan savol javobi bir qiymatli aniqlanishi mumkin.

Masala. Besh kishi bir ishni bajariyapti. Birinchi, ikkinchi va uchinchi ishchi birga ishlaganda hamma ishni 7,5 soatda bajariladi, birinchi, uchinchi va beshinchi ishchi birga ishlaganda 5 soatda; birinchi, uchinchi va to'rtinchi ishchi birga ishlaganda 6 soatda; ikkinchi, to'rtinchi va birinchi ishchi birga ishlaganda 4

soatda bajara olardi. Agar hamma ishchilar birga ishlashsa, ish ishni qancha vaqtda tugatar edi?

Yechilishi:

Ishni har bir kishi o'zicha mos ravishda x, y, z, t, v vaqtda tugata olsa, u xolda

1 soatda ularning har biri mos ravishda ishning $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{t}, \frac{1}{v}$ qismini bajara oladi.

Endi masala shartidan ushbu'larni yoza olamiz.

$$I. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{7,5}$$

$$III. \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{6}$$

$$II. \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = \frac{1}{5}$$

$$IV. \frac{1}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{v} = \frac{1}{4}$$

Bu erda 5 noma'lumli 4 ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

Lekin hamma noma'lumni emas, balki $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{v} = A$ ni aniqlash

kerak.

Bu ifodaning qiymatini topishni izlaymiz.

IV-chi ifodaning ikkala tomonini 2-ga ko'paytirib, so'ng barcha tenglamalarning chap va o'ng tomonlarini o'zaro mos ravishda qo'shib chiqamiz:

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{v}\right) = 1$$

$$3 \cdot A = 1$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Barcha ishni ishchilar birga bajarishlariga sarflanadigan vaqtni topish uchun ish birgalikdagi ish unumdorligining teskarisini olish kerak:

$$\text{Demak: } t = \frac{1}{A} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ soat}$$

Javob: 3 soatda

Savol va topshiriqlar

1. Birgalikda ishlashga doir masalalarg misollar keltiring.
2. Masala yechimini topish nechta bosqichdan iborat?

4 §. Natural sonlar, progressiya va protsentli miqdorlarga doir masalalar

Tayanch iboralar: natural son, masala, tenglama, noma'lum ifoda, progressiya, cheksiz kamayuvchi, geometrik progressiya, algebraik progressiya, tenglama, protsent, miqdor, bir jinsli tenglama.

Bunday masalalarni yechishda quyidagilarni nazarda tutish kerak.

a) a natural sonning o'ng tomonida n xonali b son turgan bo'lsa, unda nazarda tutilgan natural son $10^n a + b$ songa tengdir.

b) $a > b$ va c soni v ga bo'linmasa, u holda shunday q va r natural sonlar topiladiki, ular uchun $a = vq + r$ ($r < b$) tenglik yagona tarzda bajariladi.

Masala : Ikki xonali sonning raqamlari kvadratlari yig'indisi 10 ga teng. U sandan 18 ayrilsa, natijada hosil bo'lgan son ish shu raqamlarning o'rnini almashtirishdan tuzilgan songa teng bo'ladi. U qanday son?

Yechish. $xu = 10x + u$ izlanayotgan son. Masala shartiga ko'ra $x^2 + y^2 = 10$ va $xu - 18 = ux$ bo'lganidan

$$\begin{aligned} 10x + y - 18 &= y - 10 + x \\ 9x - 9y &= 18 \end{aligned} \quad \text{bundan:}$$

Endi ushbu sistema hosil bo'ladi va yechiladi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 9x - 9y = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasining 2-chisidan $x = u + 2$ ni topib 1-chiga qo'ysak, u holda $(u + 2)^2 + u^2 = 10$ hosil bo'ladi.

$$y^2 + 4y + y + y^2 = 10$$

$$2y^2 + 4y + y - 10 = 0$$

$$y^2 2y - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2$$

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = 1$$

$$x_1 = y + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$x_2 = y_2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 3$$

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = 1$$

Demak, izlanayotgan son 31.

Progressiyaga doir masalalar asosan sistemaga (olib) hosil bo'lishiga olib keladi.

Masala: Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi 4, uning hadlari kublari yig'indisi 192. Uning birinchi hadi va maxrajini toping.

Yechilishi:

$$a_1 \neq 0$$

$$0 > |q| < 1$$

Masala tartibiga ko'ra ushbu sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 4 \\ \frac{a_1^3}{1-q^3} = 192 \end{cases} \text{ bunda } \begin{cases} a_1 = 4(1-q) \\ a_1^3 = 192 \cdot (1-q^3) \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a_1 = 4(1-q) \\ a_1^3 = 192(1-q)(1+q+q^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4(1-q) \\ 2q^2 + 5q + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 4(1-q) \\ (q+2)(q+\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 4(1-q) \\ q_1 = -2q_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Demak, bu erdan $q_1 = \frac{1}{2}$ masala shartini qat'iatlantirishdan $a_1 = 6$ topiladi.

$$\text{Javob: } a_1 = 6, q = -\frac{1}{2}$$

Prostent miqdorli masalalar. Ko'p (miqdorda) holda prostent miqdorli masalalar eritma (aralashma, qotishma va hokazo) moddalar haqida bo'lib, undagi yechish usuli umuman boshqa tipdagi algebraik masalalarda ham tadbiq etilishi mumkin.

Bu yerda eritma fizik va ximik qonuniyatlar bo'yicha har doim to'g'ri bo'lmasa ham ushbu xossalarga ega deb hisoblanadi:

a) Barcha hosil bo'lgan eritmalar bir jinsli bo'ladi.

b) V_1 hajmi (m_1 masali va p_1 ogirlikdagi) bir eritma V_2 hajmli (m_2 masali va p_2 ogirlikdagi) eritmaga qo'shilsa, natijada $P_0 = V_1 + V_2$ hajmli ($m_0 = m_1 + m_2$ massali va $P_0 = P_1 + P_2$ ogirlikdagi) eritma hosil bo'ladi.

$$k_1 = \frac{V_1}{V_0}, k_2 = \frac{V_2}{V_0} \text{ miqdorlar birinchi va ikkinchi eritma umumiy eritmaning}$$

qancha qismini tashkil etishini bildiradi va bunda $k_1 + k_2 = 1$ bajariladi.

$K_1 + K_2 + 1$ lar birinchi va ikkinchi eritmaning umumiy eritmadagi konsentratsiyasi deb aytiladi.

$P_1 = K_1 \cdot 100\%$ va $P_2 = K_2 \cdot 100\%$ lar shu eritmalarining har birining konsentratsiyasining prostent miqdorini beradi.

$$\text{Bunda } \frac{V_0}{P_0} = k_1 \cdot \frac{V_1}{P_1} + k_2 \cdot \frac{V_2}{P_2} = \frac{V_0}{P_0} (k_1 + k_2) \text{ tengliklar o'rinlidir.}$$

Masala: 20 kg li mis qotishmada mis 40% ni tashkil etadi. Unga necha kilogramm qo'rgoshin qo'shilsa, qotishmaning 20% ni mis tashkil etadi.

Yechilishi: x kg deb so'ralayotgan qo'rg'oshin miqdorini belgilasak $(20+x)$ kg qotishmaning 20% i mis bo'lishi talab qilinadi.

$$\text{Unda } \frac{20+x}{100} \cdot 20 \text{ kg mis bor.}$$

Dastlabki 20 kg li qotishmaning 40% i mis edi, demak, uning tarkibida $\frac{20}{100} \cdot 40$ kg mis bor.

Lekin hosil qilinishi kerak bo'lgan va berilgan qotishmadagi og'irlikda misning massasi bir xil bo'ladi.

Tenglama tuzamiz:

$$\begin{aligned}\frac{20+x}{100} \cdot 20 &= \frac{20}{100} \cdot 40 \\ \frac{20+x}{5} &= \frac{40}{5} \\ 20+x &= 40 \\ x &= 40 - 20 \\ x &= 20\end{aligned}$$

Demak, berilgan qotishmaga 20 kg qo'rgoshin qo'shish kerak.

Javob: 20 kg

Savol va topshiriqlar

1. Natural son deb nimaga aytiladi?
2. Raqam hamda son tushunchalarining farqi.
3. Geometrik progressiya deb nimaga aytiladi?
4. Cheksiz geometrik progressiya va geometrik progressiyaning farqini tushuntiring.
5. Sonning ma'lum bir protsenti deb nimaga aytiladi?
6. Protsentga doir masalalarni yechishdagi asosiy bosqichni tushuntiring.

5 §. Matematikadan tarixiy masalalar yechish orqali o'quvchilarni mantiqiy fikrini rivojlantirish

Tayanch iboralar: mantiq, tenglama, tarixiy masala.

O'quvchilar masalalarni belgilangan vaqt ichida bajarish uchun o'qituvchi quyidagi uchta mulohazaga e'tibor berishi lozim:

1. Qo'yilgan masalani to'liq tushuntirish.

2. Masalani yechish uchun zarur bo'lgan formula, ta'rif va teoremlarni qoidalarini, xotiraga keltirish

3. Erishgan tajriba va hosil qilingan ko'nikmalarga tayanib zarur formula va teorema asosida masalani yechishni tezkor usulini tanlash

Misol:

Lagerda dam olayotgan o'g'il bolalarga qizlarning soni teng.

13 yoshgacha bo'lgan bolalar soni 13 yoshdan katta bolalarda ikki marta ko'p. Agar 4 sonini o'ng va chap tomoniga bir xil raqam yozilsa lagerdagi bolalar soni hosil bo'ladi. Dam olayotgan bolalar sonini toping.

Yechish:

- 1) o'g'il bolalar soni x ta bo'lsin qiz bolalar soni ham x ta bo'ladi
- 2) 13 yoshdan katta bolalar soni u , 13 yoshdan kichik bolalar soni esa $2u$ bo'lsin.
- 3) izlanayotgan raqam esa a bo'lsin, izlangan son $a4a$ bo'ladi, u holda masala shartiga ko'ra

$$\begin{cases} a4a = 2x \\ a4a = 3y \end{cases}$$

Natural sonning 2 va 3 ga bo'linish alomatlaridan $a=4$. Demak lagerdagi bolalar soni 444 ta.

Yuqoridagi masalani yechish uchun o'quvchi belgilash usulidan, masala shartini qanoatlantiradigan tenglamalar sistemasini tuza olishi, mantiqiy fikrlash orqali 2 va 3ga bo'linish alomatlaridan foydalanib $a=4$ ekanini topa olishi kerak.

Tarixiy masalalarni yechish orqali ilmda, ijodda bahs bo'ladi. Bahs-munozara bor joyda esa haqiqat yuzaga chiqadi, taraqqiyot bo'ladi.

Dunyoda Abu Ali ibn Sino, Abu Rayhon Beruniy, Mirzo Ulug'bek, Muhammad al-Xorazmiy, Ali Qushchi, Umar Hayyom kabi ajoyib olim, mutafakkirlarning yorqin namoyondalarini yetishtirib bergan o'lkamiz va uning xalqi tarixini o'rganishga qiziqish ortadi.

Tarixiy masalalardan ayrimlarining yechimlarini ko'rsatib o'tamiz.

O'nli kasrlar mavzusiga doir masala

Xusayn bir kishini bir yilga yollab, o'nga 12 so'm pul va bir chakmon bermoqchi bo'libdi, lekin u 7 oy ishlab ketmoqchi bo'libdi va Husayndan hisob kitob qilishini so'rabdi. Husayin o'nga 5 so'm pul bilan chakmon beribdi. Chakmon necha so'm turadi?

Yechish:

Chakmonning narxi x so'm bo'lsin. Ishchining bir yillik ish haqqi $(12+x)$ so'm bir oyda esa $\frac{12+x}{12} = 1 + \frac{x}{12}$ so'm bo'ladi.

Masalaning sharti bo'yicha: $(1 + \frac{x}{12}) \cdot 7 = 5 + x$

Tenglamani yechamiz:

$$7 + \frac{7x}{12} = 5 + x$$

$$7 - 5 = x - \frac{7x}{12};$$

$$2 = \frac{5x}{12};$$

$$x = 2 \cdot 12 \div 5 = 4.8$$

Javob: 4.8 so'm

II usul.

12 oy - 360 kun

7 oy - 210 kun deb olamiz. Proporsiya tuzamiz

$$\frac{360}{12+x} = \frac{210}{5+x} \quad 360 \cdot (5+x) = 210 \cdot (12+x) \text{ tenglamani yechamiz}$$

Javob: 4.8 so'm

Masala (Al-Xorazmiy masalasi)

Sondan uning uchdan biri va to'rttdan biri ayrilsa 8 qoladi. Sonning o'zini toping.

Yechish: sonning o'zini a deb belgilaymiz masala shartiga ko'ra

$$a - \frac{a}{3} - \frac{a}{4} = 8$$

Tenglamani yechamiz.

$$\frac{5a}{12} = 8 \Rightarrow a = 12 \cdot 8 : 5 = 19.2$$

Bu masalani yechish davomida al-Xorazmiyning algebra faninig rivojlantirishda qo'shgan hissasi, uning «Aljabr val-mukobala» asari haqida qisqacha to'xtalib o'tamiz.

«... Men arifmetikani oddiy va murakkab masalalarni o'z ichiga oluvchi «Aljabr val muqobala hisobi haqida qisqacha kitob»ni taklif qildim, chunki me'ros taqsimlashda, vasiyatnoma tuzishda, mol taqsimlashda va adliya ishlarida, savdoda va har qanday bitimlarda, shuningdek yer o'lchashda, ariqlar qazishda, muxandislikda va shunga o'xshash turlicha ishlarda kishilar uchun bu zarur»

Aljabr - to'ldirish, to'plash degan ma'noni bildiradi. *Val-muqobala* - ro'para qilish degani.

Masala: Bir kombayn daladagi hosilni 15 soatda, boshqasi esa shu hosilni 10 soatda yig'ib olishi mumkin. Ikkala kombayn birgalikda hosilni qancha soatda yig'ib olishi mumkin?

Yechish: $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ formuladan foydalanib yechamiz. Yuqoridagi tenglikka $x = 15, y = 10$ ni qo'yib z ni topamiz:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \quad z=6.$$

1. Meshdagi suv Anvarning o'ziga 20 kunga, ukasiga esa 60 kunga yetadi. Meshdagi suv ikkalasiga necha kunga yetadi?

2. Hovuzdagi suv ikki quvur orqali orqali chiqariladi. Birinchi quvur to'la hovuzni 30 min- utda, ikkala quvur birgalikda uni 18 minutda bo'sh- atadi. Ikkinchi quvur to'la hovuzni necha minutda bo'shatadi?

3. Birinchi quvur hovuzni 2 soatda to'ldiradi, ikkinchisi esa uch marta tezroq. Ikkala quvur birgalikda hovuzni qancha vaqtda to'ldiradi?

4. Usta muayyan ishni 12 kunda, uning shogirdi esa 30 kunda bajaradi. Agar 3 ta usta va 5 ta shogird birga ishlasalar, o'sha ishni necha kunda bajarishadi?

5. Eski traktor maydonni 6 soatda, yangisi esa 4 soatda haydaydi. Shu maydonni 3 ta eski va 2 ta yangi traktor qancha vaqtda haydaydi?

Ming bir kechadan masala

Bir ayol boka olma tergani kirdi. Bog'dan u 4 ta eshik orqali chiqishi kerak edi. Har bir eshik oldida turgan bo'lib, ayol birinchi qorovulga tergan olmalarining yarmini berdi. Ikkinchi qorovulga ham qolgan olmalarining yarmini berdi. Uchinchi va to'rtinchi qorovullarni ham xudi shunday siyladi, va oxirida o'ziga 10 ta olma qoldi. Ayol bog'dan nechta olma uzgan?

Yechish: masalani yechishdan avval xalq og'zaki ijodiga doir «Ming bir kecha» asari haqida to'xtalib matematika fani va ona til, adabiyot fanlari orasidagi bog'lanish ko'rsatiladi: ayol uzgan olmalar soni x bo'lsin, 1-qorovulga yarmini bergandan keyin $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ dona qoladi ikkinchi qorovulga bergandan keyin

$\frac{x}{2} - \frac{x}{2} : 2 = \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = \frac{x}{4}$ dona, uchinchi qorovulga bergandan keyin $\frac{x}{4} - \frac{x}{8} = \frac{x}{8}$ to'rtinchi qorovulga bergandan keyin $\frac{x}{8} - \frac{x}{16} = \frac{x}{16}$ dona.

Masala shartiga ko'ra: $\frac{x}{16} = 10x$ $x = 16 \cdot 10 = 160$.

Javob: 160 dona

Masala. Ota o'g'liga yechish uchun 30 ta masala taklif qildi va u bilan bunday kelishdi: har bir to'g'ri yechilgan masala uchun otasi o'g'liga 7 tanga to'laydi, har bir noto'g'ri yechilgan masala uchun o'g'li otasiga 12 tanga to'laydi.

Pirovardida kelishuvga muvofiq otasi o'g'liga 77 tanga to'ldi. Nechta masala to'g'ri yechilgan?

Yechish: pul o'lchov birligi tanga haqida tushuncha beriladi to'g'ri yechilgan masalalar soni x bo'lsin, noto'g'ri yechilgan masalalar soni $30-x$ ta bo'ladi.

Shart bo'yicha:

$$7x - (30-x) \cdot 12 = 77$$

$$7x - 360 + 12x = 77$$

$$19x = 437$$

$$x = 437 : 19$$

$$x = 23$$

Javob: 23 ta masala to'g'ri echilgan.

Masala (Umar Xayyom masalasi)

Tenglamani yeching $\frac{1}{x^2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} = 1 \frac{1}{4}$. Tenglamani yechishdan oldin Umar

Xayyomning matematika sohasida olib borgan ishlari haqida to'xtalib o'tiladi. Umar Xayyomni ko'pchilik mayparast shoir sifatida biladi, lekin uning matematika sohasida ham ish olib borib uchinchi darajali tenglamalarni echish haqida tushuncha bergan.

Falakka hukm etga tangriday bo'lsam,

Falakni qilardim o'rtadan barham.

Yarmidan bir falak tuzardim,

Yaxshilar tilakka etardi har dam.

(Umar Xayyom)

Yechish: tenglamani yechish uchun tenglikning ikkala tomoniga 1 ni qo'shamiz

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} = 1 \frac{1}{4}$$

$(1 + \frac{1}{x})^2 = \frac{9}{4}$ tenglamani ikkala tomonidan kvadrat ildiz chiqaramiz $\frac{1}{x} + 1 = \pm \frac{3}{2}$

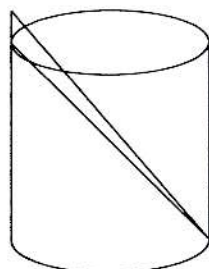
$$1) \frac{1}{x} + 1 = \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2}; \quad x=2$$

$$2) \frac{1}{x} + 1 = -\frac{3}{2}; \quad \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \quad x=-0.4$$

Javob: $x_1=2; \quad x_2=-0.4$

Abu Rayhon Beruniy masalasi

Quduq silindr shaklida bo'lib uni tubi labidagi A nuqtadan α burchak ostida, quduq devori davomidagi V nuqtadan β burchak ostida ko'rinadi, agar $AV=a$ bo'lsa quduqning chuqurligini toping. (rasm)



Yechish: berilgan silindr $\angle CAD=\alpha$, $\angle ABD=\beta$, $AB=a$ topish kerak $AS=?$

1) $\triangle ACD$ to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{CD}{AD} = \operatorname{tg} \alpha \quad (1) \quad CD = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

2) $\triangle BCD$ to'g'ri burchakli uchburchakdan $\frac{CD}{BC} = \operatorname{tg} \beta \quad (2)$

(1) va (2) tenglikdan

$$AC \operatorname{tg} \alpha = BC \operatorname{tg} \beta \quad BC = AC + AB = AC + a$$

$$AC \operatorname{tg} \alpha = (AC + a) \operatorname{tg} \beta; \quad AC \operatorname{tg} \alpha = AC \operatorname{tg} \beta + a \operatorname{tg} \beta; \quad AC(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = a \operatorname{tg} \beta$$

$$AC = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

Javob: quduq chuqurligi $AC = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

Axmesning papirusdan olgan masala (eramizdan oldingi 2000 yillar) 10 o'lchov gallani 10 kishi orasida shunday taqsimlagan bu kishilarning biri bilan undan keyingisi (yoki oldingisi) olgan g'alla farki $\frac{1}{8}$ o'lchovga teng bo'lsin.

Yechish: Bu masalani yechish uchun hadlar soni 10 ta, ayirmasi $\frac{1}{8}$ va 10 ta hadini yig'indisi 10ga teng arifmetik progressiyani birinchi, ikkinchi, ..., uninchi hadini topish kerak.

$$S_n = \frac{2a + (n-1) \cdot d}{2} n \text{ formuladan foydalanamiz}$$

$$S_{10} = \frac{2a + (n-1) \cdot d}{2} n \quad S_{10} = \frac{2a + (10-1) \cdot \frac{1}{8}}{2} \cdot 10 = 10$$

$$a_1 = \frac{7}{16}; \quad a_2 = \frac{9}{16} \text{ va hokazo}$$

Javob: 7/16; 9/16; 11/16; 13/16; 15/16; 17/16; 19/16; 21/16; 23/16; 25/16;

Yuqoridagi kabi masalalarni yechish davomida o'zbek matematik olimlari Qori Nig'ziy, Sarimsoqov, Sirojiddinov, Axadova M. (buxorolik) kabilar haqida ham o'quvchilarga ma'lumotlar, ularning yaratgan asarlari haqida bilimlar berib borilsa o'quvchi bilimdonligi, mantiqiy fikrlashi o'sadi, rivojlanadi.

Ikki qush va baliq haqidagi qadimiy masala. Eni 60 birlik bo'lgan daryoning ikki sohilida bo'yi 20 va 25 birlik uzunlikdagi ikki terak bo'lgan. Ularning uchlarida turgan ikkita qush suv yuzasida ko'ringan baliq tomon to'g'ri chiziqli bo'ylab bir vaqtda va bir xil tezlikda uchib borib o'nga bir vaqtda yetganlar daryoning baliq turgan joyi bilan ikkala terakning tublari bir to'g'ri chiziqli yotadi. O'sha baliq ko'ringan joydan terak tubigacha bo'lgan masofalarni va ikkala qushning uchib o'tgan yo'lini aniqlang.

Yechish: Berilgan: $DB \perp AB$, $CA \perp AB$, $BD=20$, $AC=25$, $AB=60$

Topish kerak: BE, EA, DE, EC masofalarni.

Koshiy usulida yechish. BE ni x deb olamiz. Masalani shartiga ko'ra :

$$BE^2 + BD^2 = DE^2$$

$$EA^2 + CA^2 = EC^2$$

$$EA = AB - BE = AB - x; \quad DE = EC,$$

Chunki qushlar bir xil masofani uchib o'tganlar. Bularga asosan quyidagi tenglik o'rinli:

$$BE^2 + BD^2 = EA^2 + CA^2 \text{ eki } x^2 - 400 = (60 - x)^2 - 625, \text{ bundan}$$

$$x = 31 \frac{7}{8}; \quad AE = 28 \frac{1}{8}; \quad DE = EC = \sqrt{1416 \frac{1}{64}} \approx 37.13 \text{ kelib chiqadi.}$$

Fazoviy jism ko'pyoqlar mavzusiga Al-Beruniy haqida ma'lumot berish mumkin 1010 yilda Xorazm shohi Ma'mun Buruniyini Xorazmga chaqirib «Ma'mun akademiyasi» ni boshqarib borishini so'raydi. Akademiyada Abu Ali ibn Sino, Abu Sahl al Masaxiy, Abu Nasr ibn Iroq, tabib Abu Hasan Hammor, mashhur tarixchi ibn Hammor kabilar bor edilar. Beruniy 1029-1034 yillarda yozgan «Kitob attafim» asarining geometriya bo'limida shar ichida besh xil muntazzam ko'pyoklar yasash mumkinligini aytib, bu ko'pyoklarga turli xil ismlar beradi:

1. Yoqlari 6ta kvadratdan iborat ko'pyoqli jism (kub) olim bu jismni «arziy» ya'ni «erniki» deb atagan.
2. Yoqlari 8ta teng tomonli uchburchakdan tashkil topgan jism (oktayedr) bu jismni «xavoniki» deb atagan
3. Yoqlari 20ta teng tomonli uchburchakdan tashkil topgan jism (ikosayedr) bu jismni «suvniki» deb ataydi.
4. Yoqlari 4ta muntazzam uchburchakdan tashkil topgan jism (tetrayedr) bu jismni «noriy» ya'ni olovniki deydi
5. Yoqlari 12 ta teng tomonli uchburchakdan iborat jism (doderayedr) bu jismni «fallaniy» ya'ni osmonniki deb ataydi.

Shunga o'xshash qo'shimcha ma'lumot va tarixiy masalalar anchagina bu bilimlarni berish orqali o'quvchilar bilimdonligi, ma'naviy mantiqiy, fikrlash, o'z

xalqiga o'z vataniga muhabbati ortadi. Masalalar echishda ularning ijodkorligi rivojlanadi. I.A.Kairimov aytganlaridek «Kelajagi buyuk davlat eng birinchi navbatda bo'lajak fuqarolarning madaniyati, ma'lumoti va ma'naviyati haqida g'amxo'rlik qilmog'i zarur».

Savol va topshiriqlar

1. Tarixiy masalalarga qo'shimcha misollar keltiring.
2. Sinf darsliklarda keltirilgan tarixiy masalalarni topib ularning nostandard yechimlarini toping.

6 §. Uchburchaklarga oid masalalar

Tayanch iboralar: uchburchak, tenglik alomatlari, tomon, ichki nuqta, tashqi burchak, gipotenuza, katet.

Ushbu mavzuga doir misol va masalalarni yechishda quyidagilarni yodda tutish zarur.

1. Uchburchaklarning tenglik alomatlari: Ikki uchburchak teng bo'lishi uchun quyidagi shartlardan biri bajarilishi kerak:

a) birinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga mos ravishda teng bo'lsa;

b) birinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan burchaklari boshqa uchburchakning mos tomoni va unga yopishgan burchaklariga teng bo'lsa;

v) birinchi uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo'lsa.

To'g'ri burchakli uchburchaklarning tenglik alomatlar: ikki to'g'ri burchakli uchburchak bir-biriga teng bo'lishi uchun quyidagi shartlardan biri bajarilishi kerak:

a) gipotenuzasi va bir o'tkir burchagi ikkinchisining gipotenuzasi va bir o'tkir burchagiga teng bo'lsa;

b) kateti va qarshisidagi burchagi ikkinchisining mos kateti va qarshisidagi burchagiga teng bo'lsa;

v) gipotenuzasi va bir kateti mos ravishda ikkinchisining gipotenuzasi va bir katetiga teng bo'lsa.

2. Uchburchak yuzasini hisoblash formulalari:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Geron formulasi);}$$

$$S_{\Delta} = \frac{abc}{4R},$$

$$S_{\Delta} = pr.$$

Bu yerda va bundan keyin a, b, c – uchburchakning tomonlari h_a, h_b, h_c uchburchakni mos tomoni balandliklari; α, β, γ – uchburchakni mos ravishda a, b, c tomonlari qarshisidagi ichki burchaklari;

$r = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – yarim perimetr; R – uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi; r – uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi, S_{Δ} – uchburchak yuzi.

3. Uchburchaklarni o'xshashlik alomatlar:

Ikki uchburchak uchun quyidagi shartlardan biri o'rinli bo'lsa, ular o'zaro o'xshash deyiladi:

a) bir uchburchakning ikki burchagi mos ravishda ikkinchi uchburchakning ikki burchagiga teng bo'lsa;

b) bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional bo'lib, ular orasidagi burchaklari teng bo'lsa;

v) bir uchburchakning uch tomoni ikkinchi uchburchakning uch tomoniga proporsional bo'lsa.

To'g'ri burchakli uchburchaklarning o'xshashlik alomatlar:

Ikki to'g'ri burchakli uchburchak uchun quyidagi shartlardan biri o'rinli bo'lsa, ular o'zaro o'xshash deyiladi:

a) uchburchaklar teng o'tkir burchaklarga ega bo'lsa;

b) birinchisining katetlari ikkinchisining katetlariga proporsional bo'lsa;

v) birinchisining kateti va gipotenuzasi ikkinchisining kateti va gipotenuzasiga proporsional bo'lsa.

Uchburchaklarni o'xshashlik ($\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$) koeffitsiyenti k ularni mos tomonlari nisbatiga teng:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$$

O'xshash uchburchaklar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

a) mos balandliklar nisbati o'xshashlik koeffitsiyentiga teng:

$$\frac{h_a}{h_{a_1}} = \frac{h_b}{h_{b_1}} = \frac{h_c}{h_{c_1}} = k;$$

b) perimetrlar nisbati o'xshashlik koeffitsiyentiga teng:

$$\frac{P}{P_1} = k;$$

c) tashqi chizilgan (ichki chizilgan) aylana radiuslari nisbati o'xshashlik koeffitsiyentiga teng:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{R}{R_1} = k;$$

d) yuzlari nisbati o'xshashlik koeffitsiyenti kvadratiga teng:

$$\frac{S}{S_1} = k^2;$$

4. Sinuslar teoremasi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

5. Kosinuslar teoremasi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

6. Uchburchak medianasi ta'rif va xossalari:

Uchburchakni medianasi deb, uchburchakni uchi bilan qarshisidagi tomon o'rtasini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Mediananing asosiy xossalari:

a) uchburchakni o'rta chizig'i deb ataluvchi tomonlari o'rtasini tutashtiruvchi kesmalar, tomonlarga parallel va mos tomon yarmiga teng;

b) uchburchakning medianalari bir nuqtada kesishadi va uchidan boshlab hisoblaganda 2:1 nisbatda bo'linadi;

c) mediana uchburchakni ikkita tengdosh uchburchakka ajratadi;

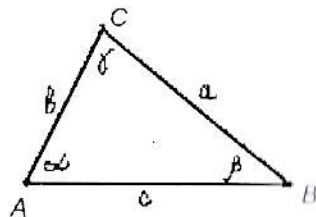
d) O nuqta $\triangle ABC$ ni medianalari kesishgan nuqtasi bo'lsin, $\triangle ABO, \triangle BCO, \triangle ACO$ uchburchaklarni yuzlari teng va ularning yig'indisi $\triangle ABC$ yuzasiga teng bo'ladi.

Mediana va tomon uzunliklarini bog'lovchi formulalarni esda tutish lozim:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

$$m_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2 - ac \cos \beta};$$

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}.$$



Bu yerda m_a, m_b, m_c - $\triangle ABC$ uchburchakning mos ravishda a, b, c tomonlariga o'tkazilgan medianalar uzunliklari (xuddi shu kabi formulalarni qolgan tomon va medianalar uchun ham hosil qilish mumkin).

7. Uchburchak balandligi ta'rif va hisoblash formulalari:

Uchburchakning berilgan uchidan tushirilgan balandligi deb, shu uchidan uning qarshisidagi tomoni yotgan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.

Ixtiyoriy uchburchak balandliklari, tomonlari, burchaklari va ichki chizilgan aylana radiusini bog'lovchi formulalar:

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta, \quad h_b = c \sin \alpha = a \sin \gamma, \quad h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

$$h_a = \frac{2S_3}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r};$$

8. Uchburchak bissektrisasi ta'rif va xossalari:

Uchburchakni berilgan uchidan o'tkazilgan bissektirasi deb, uchburchak burchagi bissektirasining shu uchni uning qarshi tomondagi nuqta bilan tutashtiruvchi kesmasiga aytiladi.

Uchburchak bissektrisasi asosiy xossalari:

a) uchburchak uchta bissektrisasi bir nuqtada kesishadi, bu nuqta uchburchakni ichki nuqtasi bo'lish bilan birga ichki chizilgan aylana markazi bo'ladi;

b) uchburchak bissektrisasi tomonlaridan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rnidir;

c) uchburchak bissektrisasi qarshisidagi tomonni shu burchakka yopishgan tomonlariga proporsional qismlarga ajratadi.

Uchburchakning tomonlari va bissektrisalarini bog'lovchi formulalarni esda tutish foydali:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b};$$

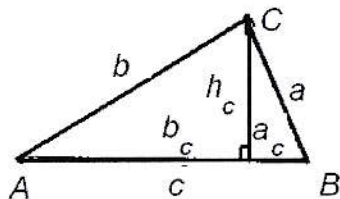
$$l_c = \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{ac}{b+a} = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+c}$$

l_c - $\triangle ABC$ uchburchakni C uchidan chiqqan bissektrisasi uzunligi;

9. Uchburchakning maxsus hollardagi medianasi, bissektrisasi, balandligi va tomonining ba'zi bir xossalari:

a) teng yonli uchburchakning balandligi, bissektrisasi medianasi ustma-ust tushadi;

b) teng tomonli uchburchakning har bir uchidan tushirilgan medianasi, bissektrisasi, balandligi ustma-ust tushadi;



c) to'g'ri tomonli uchburchakda a, b - katetlari va c - gipotenuzasi quyidagi tenglik bilan bog'langan (Pifagor teoremasi)

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

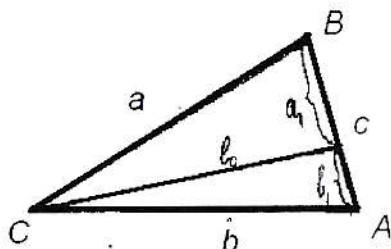
d) to'g'ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzasi va shu katetining gipotenuzadagi proyeksiyasiga o'rta proporsional;

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c};$$

d) to'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagidan tushirilgan balandligi, katetlarning gipotenuzadagi proyeksiyalariga o'rta proporsional:

$$\frac{b_c}{h_c} = \frac{h_c}{a_c};$$

e) to'g'ri burchakli uchburchakda tomonlar va burchaklarni bog'lovchi tengliklar:



$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$

Masala. To'g'ri burchakli uchburchakning perimetrlari 132 ga teng, tomonlari kvadratlari yig'indisi 6050. Katta va kichik katetlari orasidagi farqini toping.

Yechish:

a, b - katetlar; c - gipotenuza va $a > b$ bo'lsin. Masala shartidan quyidagi tengliklar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a + b + c = 132 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6050 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamaga uchinchi tenglamani qo'ysak, $c^2 = 3025$ yoki $c = 55$. U holda a va b larni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} a + b = 77 \\ a^2 + b^2 = 3025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 77 - a \\ a^2 + (77 - a)^2 = 3025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 77 - a \\ a^2 - 77a + 1452 = 0 \end{cases}$$

bu yerdan a ni ikkita qiymatini hosil qilamiz: $a_1 = 44, a_2 = 33$, xuddi shuningdek b ni ham mos ikkita qiymatini hosil qilamiz: $b_1 = 33, b_2 = 44$ va $a_1 = 44, b_1 = 33$.

$a > b$ shartga ko'ra $a = 44, b = 33$. Bundan $a - b = 11$.

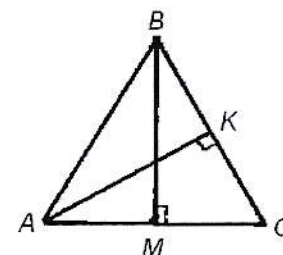
Javob: 11.

Masala. Agar teng yonli uchburchakning asosiga va yon tomoniga o'tkazilgan balandliklari mos ravishda 5 va 6 sm bo'lsa, uchburchakning tomonlarini toping.

Yechish:

Shartga ko'ra $AB = BC, BM = 5 \text{ sm}, AK = 6 \text{ sm}$.

Bizga ma'lumki,



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} BC \cdot AK,$$

$$\text{bu yerdan } AC = \frac{6}{5} BC$$

ΔBCM to'g'ri burchakli uchburchakda Pifagor teoremasiga ko'ra

$$BC^2 = BM^2 + \frac{1}{4} AC^2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikka AC va BC larni topilgan ifodasini keltirib qo'ysak, $AB=BC=6,25\text{sm}$, $AC=7,5\text{sm}$ ni hosil qilamiz.

Javob: 7,5; 6,25

3-masala. To'g'ri burchakli uchburchakni gipotenuzaga tushirilgan balandligi 10sm va u gipotenuzani 2 qismga ajratadi. Qismlardan biri ikkinchisini 30% ni tashkil qiladi. Uchburchakni yuzini toping.

Yechish:

Ma'lumki, $S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 5AC$, $AC = AD + DC$. To'g'ri burchakli uchburchakni to'g'ri burchagidan o'tkazilgan balandligi haqidagi teorema ko'ra $BD^2 = AD \cdot CD$ ga ega bo'lamiz. Masala shartiga ko'ra $\frac{AD}{CD} = \frac{3}{10}$. Oxirgi ikki tenglama noma'lum AD va CD larni topishga imkon beradi:

$$AD = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{3}}, \quad CD = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \quad \text{bundan } AC = 13\sqrt{\frac{10}{3}}.$$

$$\text{Izlanayotgan yuza } S_{\Delta} = 65\sqrt{\frac{10}{3}} \text{ sm}^2.$$

$$\textbf{Javob: } 65\sqrt{\frac{10}{3}} \text{ sm}^2.$$

4-masala. Uchburchakni asosi 60. Asosga o'tgakizgan balandligi va medianasi mos ravishda 12 va 13. Asosi va katta yon tomoni orasidagi farqni toping.

Yechish: ΔBDE uchburchakda $BD=12$, $BE=13$, $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = 5$, shundi shuningdek, $AD = \frac{1}{2} AC - DE = 25$, $DC = EC + DE = 35$.

Uchburchakni yon tomonlarini ΔADB va ΔDCB to'g'ri burchakli uchburchaklardan foydalanib topamiz: $AB = \sqrt{769}$, $BC=37$. U holda izlanayotgan farq $AC - BC = 23$.

Javob: 23.

5-masala. To'g'ri burchakli uchburchakni to'g'ri burchagidan o'tkazilgan bissektrisasi gipotenuzani $m:n$ nisbatda bo'ladi. Bu uchburchakni burchaklarini aniqlang.

Yechish: Shartga ko'ra $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$. Ichki burchakni bissektrisasi xossasiga ko'ra

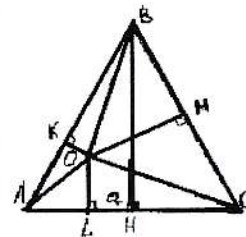
$AD:AC = BD:BC = m:n$. ABC uchburchak to'g'ri burchakli ekanligidan: $AC:BC = \tan \beta$. U holda $\beta = \arctg \frac{m}{n}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{m}{n}$.

Javob: $\arctg$

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{m}{n};$$

6-masala. Uchburchakni balandligi asosini 36 sm va 14 sm bo'lgan qismlarga bo'ladi. Uchburchak yuzasini teng ikkiga bo'luvchi, asosiga perpendikulyar to'g'ri chiziq asosni qanday qismlarga ajratadi?

Yechish: Shartga ko'ra $AD=36$ sm, $DC=14$ sm. ADB va ΔCBD uchburchaklarni yuzalarini S_1 va S_2 desak, ular umumiy balandlikka ega. U holda $S_1 + S_2 = S_{\Delta ABC}$ uchburchakni yuzi shartga ko'ra ΔEKC yuzani teng ikkiga bo'ladi. Demak, bu to'g'ri chiziq AC asosni A va D nuqtalari



orasidan o'tadi. Bundan $\triangle AKE$ uchburchakni S_3 yuzasi $\frac{1}{2}S$ ga teng ekanligini aniqlaymiz. $\triangle AKE$ va $\triangle ADB$ uchburchaklarni o'xshashligidan ularni yuzalari nisbati AK va AD tomonlari kvadratlari nisbatiga teng. U holda, $S_1 : S_3 = \frac{18}{25}S : \frac{1}{2}S = 36^2 : AK^2$, bu yerdan $AK=30$ sm ekanligi kelib chiqadi, demak, $KC=AC-AK=36+14-30=20$.

Javob: 30 sm; 20 sm;

7-masala. Teng tomonli uchburchakning ixtiyoriy ichki nuqtasidan tomonlarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi balandlikka tengligini isbotlang.

Yechish. O nuqta uchburchakni ixtiyoriy ichki nuqtasi bo'lsin. O nuqtani uchburchak uchlari bilan tutashtiramiz. $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ va $\triangle COA$ uchburchak yuzalari yig'indisi ABC uchburchak yuzasini beradi. Uchburchak tomonini a , balandligini h bilan belgilasak. $(OK + OL + OM)\frac{a}{2} = \frac{ah}{2}$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan $h=OK+OL+OM$ kelib chiqadi.

Savol va topshiriqlar

1. Uchburchak deb nimaga aytiladi?
2. Uchburchaklar tengligining nechta va qanday alomatlar bor?

7 §. To'rtburchaklarga oid masalalar

Tayanch iboralar: to'rtburchak, tomon, ichki burchak, tashqi burchak, diagonal, parallelogram, romb, trapetsiya, o'rta chiziq.

To'rtburchaklarning quyidagi asosiy ta'rif va xossalari esda tutish lozim:

1. Ixtiyoriy qavariq to'rtburchakni yuzasi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi,$$

bu yerda d_1, d_2 - to'rtburchakni diagonalari; φ - ular orasidagi burchak;

2. to'rtburchak ichki burchaklari yig'indisi 360° ;

3. agar to'rtburchakning qarama - qarshi tomonlari juft-jufti bilan parallel bo'lsa, bunday to'rtburchak *parallelogram* deyiladi;

Parallelogramning asosiy xossalari:

1. parallelogramning qarama-qarshi tomonlari teng;
2. parallelogramning qarama-qarshi burchaklari teng;
3. parallelogramning diagonalari kesishadi va kesishishi nuqtasida teng ikkiga bo'linadi;
4. parallelogramning diagonalari kvadratlarning yig'indisi, tomonlari kvadratlari yig'indisiga teng;
5. parallelogramning ikki qo'shni burchagi yig'indisi 180° ga teng.

Parallelogramning yuzasi quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$S = ah_a = bh_b; \quad S = ab\sin\alpha; \quad S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi,$$

bu yerda a, b - parallelogram tomonlari; h_a, h_b mos ravishda tomonlariga o'tkazilgan balandliklar; α - parallelogram burchagi; d_1, d_2 - parallelogram diagonalari φ - ular orasidagi burchak.

Romb - hamma tomoni teng parallelogramdir. Romb uchun parallelogramning barcha xossalari o'rinli.

Rombning qo'shimcha xossalari:

1. Rombni diagonalari perpendikulyar;
2. rombni diagonalari uning burchaklari bissektisalaridir;
3. rombni yuzi xuddi parallelogram yuzi kabi hisoblanadi.

4. romb uchun $\varphi=90^\circ$ bo'lganligidan uning yuzi: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, formula bilan hisoblanishi mumkin. Bu yerda d_1, d_2 rombni diagonallari uzunligi.

5. Hamma burchaklari to'g'ri burchak bo'lgan parallelogram *to'g'ri to'rtburchak* deyiladi. To'g'ri to'rtburchak yuzasi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$S=ab;$$

$$S=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$$

bu yerda a va b – to'g'ri to'rtburchakni qo'shni tomonlari; d – diagonali uzunligi; φ – diagonallari orasidagi burchak.

Kvadrat - hamma tomoni teng to'g'ri to'rtburchak. Kvadrat uchun parallelogram, romb va to'g'ri to'rtburchakning barcha xossalari o'rinli. Kvadrat yuzasi quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$S=\frac{1}{2}d^2$$

$$S=a^2$$

bu yerda a - kvadrat tomoni; d – diagonali.

Ikki tomoni parallel qolgan ikki tomoni parallel bo'lmagan to'rtburchak *trapetsiya* deyiladi. Trapetsiya yuzasi asoslari a va b , balandligi h yordamida hisoblanadi:

$$S=\frac{a+b}{2}h.$$

Shuni esda tutish kerakki, agar teng yonli trapetsiyani diagonallari o'zaro perpendikulyar bo'lsa, uning yuzi balandligi kvadratiga teng bo'ladi:

$$S=h^2.$$

Trapetsiyaning *o'rta chizig'i* deb, yon tomonlari o'rtalarini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Trapetsiya o'rta chizig'ining xossalari:

1) Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslariga parallel va ular yig'indisining yarmiga teng:

$$l=\frac{a+b}{2}.$$

2) o'rta chiziq trapetsiya balandligini teng ikkiga bo'ladi.

1-misol. Diagonallari perpendikulyar, asoslari 12 va 20 bo'lgan teng yonli trapetsiyaning yuzini toping.

Yechish. $a=20$, $b=12$ bo'lsin. U holda trapetsiyaning yuzi $S=\frac{a+b}{2}h=16h$. Ikkinchi tomondan trapetsiya teng yonli va diagonallari perpendikulyar bo'lganligi uchun $S=h^2$. Tenglamalarni chap tomonlari tengligi uchun uning tomonlarini tenglashtirib, $h=16$ bundan

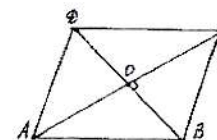
$S=16^2=256$ ekanligini aniqlash mumkin.

Javob: 256

2-misol. Rombni perimetri 2, diagonallari yig'indisi 1,3. Rombni yuzini toping.

Yechish. a - rombni tomoni; d_1, d_2 - romb diagonallari. Masala shartidan $a=0,5$, $d_1+d_2=1,3$. Rombni diagonallari perpendikulyarligidan ΔAOB da Pifagor teoremasiga ko'ra

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2$$



Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} d_1^2+d_2^2=1 \\ d_1+d_2=1,3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^2+2d_1d_2=1,69 \\ d_1^2+d_2^2=1 \end{cases}$$

u holda

$$d_1 d_2 = 0,345; \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 = 0,1725$$

Javob: 0,1725

3- misol. To'g'ri to'rtburchak va kvadrat teng yuzaga ega, lekin to'g'ri to'rtburchak diagonali kvadrat diagonalidan $\sqrt{2}$ marta katta. To'g'ri to'rtburchakni diagonallari kesishishida hosil qilingan o'tkir burchakni aniqlang.

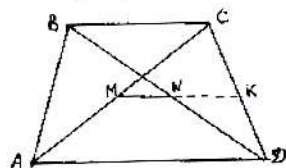
Yechish.

d va d' , S va S' - mos ravishda to'g'ri to'rtburchak va kvadratni diagonallari va yuzalari bo'lsin. Shartga ko'ra $d = \sqrt{2} d'$; $S = S'$. Lekin $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$, $S' = \frac{1}{2} d'^2$. Bundan $d^2 \sin \varphi = d'^2$,

$$\sin \varphi = \left(\frac{d'}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}. \quad \text{Demak } \alpha = 30^\circ.$$

Javob: 30° .

4-misol. Trapetsiyaning kichik asosi a va diagonallari o'rtalari orasidagi masofa v ekanligini bilgan holda trapetsiyaning katta asosini toping.



Yechish: M va N - trapetsiya diagonallari o'rtalari bo'lsin, u holda $MN = v$. MK kesmani

o'tkazamiz. Bilamizki MK ACD uchburchakni o'rta chizig'i. Ma'lumki $AD = 2MK$. NK - BCD uchburchakni o'rta chizig'i, $NK = \frac{a}{2}$. U holda

$$AD = 2MK = 2(MN + NK) = a + 2v.$$

Javob: $a + 2v$.

5-misol. Asoslari 16 va 44 sm, parallel bo'lmagan tomonlari 17 va 25 sm bo'lgan trapetsiyaning yuzini hisoblang.

Yechish:

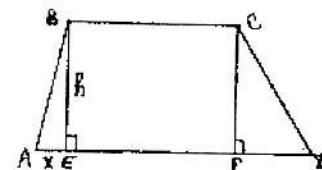
Shartga ko'ra $AD = 44$ sm va $BC = 16$ sm.

Ma'lumki, $AE + FD = 28$ sm. $AE = x$ sm bo'lsin.

U holda $FD = 28 - x$. Shart bo'yicha $AB = 17$ sm va

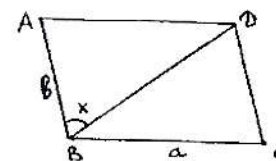
$CD = 25$ sm. Demak, $BE^2 = 17^2 - x^2$ va $CF^2 = 25^2 - (28 - x)^2$, $17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2$ tenglamadan $x = 8$ sm. Bulardan balandlikni topamiz:

$$h = BE = \sqrt{17^2 - x^2} = 15 \text{ cm}. \quad S = \frac{a+b}{2} h = 450 \text{ cm}^2.$$



Javob: 450 sm^2

6- misol. Parallelogramning perimetri 90 sm, o'tkir burchagi 60° . Uning diagonalini o'tmas burchagini 1:3 nisbatda bo'ladi. Parallelogram tomonlarini toping.



Yechish. Shartga ko'ra $\alpha = 60^\circ$; $a + b = 45$ sm.

$(\angle ABD): (\angle DBS) = 1:3$. $\angle ABD$ ni x desak,

$x + 3x + \alpha = 180^\circ$, $x = 30^\circ$ ekanligini ko'rish mumkin. Bundan $\angle ABD = 90^\circ$ ga

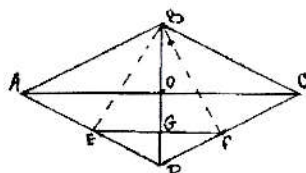
teng. U holda $\triangle ABD$ dan $v = a \sin x = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$. $a + b = 45$ ekanligini

o'tiborga olsak, $a = 30$ sm, $b = 15$ sm.

Javob: 30 sm, 15 sm

7- misol. Rombni o'tmas burchagidan uning tomonlariga perpendikulyarlar o'tkazilgan. Har bir perpendikulyar uzunligi a ga teng. Perpendikulyarlarning

tomonlar bilan kesishgan nuqtalari orasidagi masofa v ga teng. Rombni yuzini toping.



Yechish.

Shartga ko'ra $BE = BF = a$, $EF = b$. Demak $EG = b/2$, $BG = \sqrt{a^2 - (b/2)^2}$.

Proporsional kesmalar haqidagi teorema ko'ra BDE uchburchakdan

$$BD = \frac{BE}{BG} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - (b/2)^2}}$$

ekanligini topamiz. Endi rombni AD tomonini topamiz. Teng yonli $\triangle ABC$ va $\triangle BEF$ uchburchaklar o'xshash, bundan ularning mos tomonlari nisbatlari teng bo'ladi:

$$AB:BD = BE:EF, \quad AB:\frac{a}{\sqrt{a^2 - (b/2)^2}} = a:b,$$

bu yerdan AB ni topamiz, so'ngra esa rombni yuzi $S = AB \cdot a$ ekanligi kelib chiqadi.

Javob: $\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$

Savol va topshiriqlar

1. To'rtburchaklarning turlari nechta?
2. Parallelogramning tarifini ayting
3. Trapetsiyaning o'rta chizig'ining formulasini keltirib chiqaring.
4. Rombning asosiy xossalari sanab o'ting.

8 §. Kombinatorikaga oid masalalar

Tayanch iboralar: o'rinashtirish, gruppash, o'rin almashtirish, birlashma, kombinatorika, hisob, qator.

Ta'rif: Har qanday narsalardan tuzilgan va bir-biridan shu narsalarning tarkibi yoki o'zi bilan farq qiluvchi gruppalar (to'plamlar) birlashmalar (kombinatorika) deyiladi.

Birlashmalarni tashkil etadigan narsalar uning elementlari deyiladi. Ularni $a, b, c, \dots$ harflari bilan belgilash mumkin. Birlashmalar (kombinatorika) uch xil bo'ladi: o'rinashtirish, o'rin almashtirish, gruppash.

O'rinashtirish

Ta'rif: m ta elementdan n ($n \leq m$) tadan o'rinashtirish deb shunday birlashmalarni aytiladiki, ularning har birida berilgan m ta elementdan n ta element bo'lib, ular bir biridan elementlari yoki elementlarining tartibi bilan farq qiladi.

m ta elementdan tuzilgan n tadan o'rinashtirish soni A_m^n simvol bilan belgilanadi. (A fransuzcha "arrangement" – o'rinashtirish so'zining bosh xarfi) m ta $a, b, c, \dots$ element berilgan bo'lsin. Bittadan tuzilgan o'rinashtirishlar soni m ga teng bo'lib, $A_m^1 = m$ ko'rinishda yoziladi. Ikkita elementdan o'rinashtirishlar tuzish uchun a ning yoniga qolgan $(m-1)$ ta element birlashtiriladi va $A_m^2 = m(m-1)$ tenglik o'rinni bo'ladi va h.k. $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$, umumiy holda:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)] \text{ yoki}$$

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)$$

Bu m ta elementlardan n tadan o'rinlashtirishlar sonini topish formulasidir. a, b, c elementlardan 2 tadan o'rinlashtirishlar soni 6 ta, ya'ni ab, ac, bc, ca, ba, cb bo'lib, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$

Misollar: 1,2,3 raqamlari yordamida mumkin bo'lgan barcha ikki xonali sonlarni yozaylik: 12, 13, 23, 21, 31, 32. Demak, bu raqamlardan tuzish mumkin bo'lgan raqamlari turlicha ikki xonali sonlar 6 ta ekan. Bunda raqamlari takrorlanib keladigan ikki xonali sonlar 11, 22, 33 larni ham qo'shib hisoblansa, ular 9 ta bo'ladi. A_3^2 takroriy o'rinlashtirishlar soni 9 ga teng bo'lib, umumiy holda $A_m^n = m^n$ ekanligini ko'rsatish oson.

Takroriy o'rinlashtirishdan asosan raqamlar bilan ish ko'rishda foydalaniladi.

Izoh: Nol bilan boshlanuvchi ATS yo'qligi sababli taxminan deb ataymiz.

1- Masala: Abonent telefon qilayotib, oxirgi raqamni unitib qo'ydi. U oyisi bilan gaplashishi zarur deylik. Aytilgan nomerga tushish uchun ko'pi bilan nechta marta terish kerak?

Yechish: Istalgan raqamni terib, to'g'ri tushish ehtimoli $\frac{1}{10}$ ga teng. Kami bilan 1 marta, ko'pi bilan 10 marta terish kerak.

2- Masala: Sinfda 10 ta fan o'qitiladi va har kuni 5 xil dars o'tiladi. Kunlik dars jadvali nechta turli usul bilan taqsimlab qo'yilishi mumkin?

Yechish: $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$

3- Masala: Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqam bilan ifoda qilinadigan bo'lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

Yechish: $A_3^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

(Izoh. Nol qiymatli raqam emasligi e'tiborga olindi).

O'rin almashtirish

Ta'rif: Faqat elementlarining tartibi bilangina farq qiluvchi (ya'ni $n=m$) o'rinlashtirishlar o'rin almashtirish deyiladi.

m ta elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni P_m bilan belgilanadi (P - fransuzcha *permutation* - o'rin almashtirish so'zining bosh harfi).

$$P_m = A_m^m = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

Bu formulani o'rin almashtirishlar sonini topish formulasi deyiladi.

4- Masala: 8 kishini necha xil usulda o'tkazish mumkin?

Yechish: $P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$.

5- Masala: Har xil qiymatli 9 ta raqam bilan nechta 9 xonali son yozish mumkin?

Yechish: $P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$.

6- Masala: 3, 4, 5 raqamlardan shu raqamlar takrorlanmaydigan qilib nechta 3 xonali son tuzish mumkin?

Yechish: $P_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

7- Masala: 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan beshga karrali nechta besh xonali (raqamlari takrorlanmaydigan) son tuzish mumkin?

Yechish: $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. ta o'rin almashtirishlarning har biriga 5 raqamini yozib qo'ysak, 5 ga karrali sonlar hosil bo'ladi. Bunday sonlar $P_4 = 4! = 24$ ta.

Gruppalash

Ta'rif: Gruppalashlar deb m ta elementdan n tadan tuzilgan va bir - biridan eng kamida bitta element bilan farq qiladigan o'rinlashtirishlarga aytiladi.

Teorema: m ta elementdan n tadan tuzilgan hamma gruppalashlar soni

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-(n+1))}{n!}$$

Formula bilan topiladi (S - fransuzcha *combination*- gruppalash so'zining bosh harfi).

C_m^n ta gruppalashning har birida mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlarni bajaramiz, ular P_n ta.

Agar P_n o'rin almashtirishlar sonini C_m^n gruppalashlar soniga ko'paytirsak, A_m^n o'rinlashtirishlar sonini hosil qilamiz:

$$C_m^n \cdot P_n = A_m^n, \text{ bundan: } C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

8- Masala: Hech bir uchta bir to'g'ri chiziqli yotmaydigan 10 ta nuqtadan nechta to'g'ri chiziqli o'tkazish mumkin?

Yechish: $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ ta.

9- Masala: Biror vazifaga ko'rsatilgan 10 ta nomzoddan 3 kishi saylanishi kerak. Saylovdagi turli nomzodlik guruhi qancha bo'lishi mumkin?

Yechish: $C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$ ta.

10- Masala: 52 xillik qartadan iborat dastadan 3 tasini necha xil usulda olish mumkin?

Yechish: $C_{52}^3 = \frac{A_{52}^3}{P_3} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 22100$

Gruppalashning xossalari:

1-xossa. $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

2-xossa. $C_m^n = C_m^{m-n}$

3-xossa. $C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n$

11- Masala: $A_x^4 - A_{x+1}^3 = \frac{5}{4} A_x^3$ tenglamani eching?

Yechish: $x(x-1)(x-2)(x-3) - (x+1)x(x-1) = \frac{5}{4} x(x-1)(x-2)$; bundan $x=6$

echim chiqadi.

Savol va topshiriqlar

1. O'rinlashtirish qoidasining tarifini keltiring
2. Gruppalash qoidasining asosiy xossalarini sanab o'ting.

9 §. Paskal uchburchagi

Tayanch iboralar: haqiqiy son, natural son, paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsiyent.

Faraz qilaylik, a va b - haqiqiy sonlar. Turli n natural sonda $(a+b)^n$ ifodani ko'rib chiqamiz:

$n=0$ da: $(a+b)^0 = 1$

$n=1$ da: $(a+b)^1 = (1 \cdot a + 1 \cdot b)$

$n=2$ da: $(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$

$n=3$ da: $(a+b)^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

Agar koeffitsientlarni $a^{n-k}b^k$, $k=0,1,2,\dots,n$ darajada yozsak va ularni $n=1,2,3,4$ da tasdiqlaymiz:

U holda ushbu sonlarning mos ekanligini hosil qilamiz. Yuqoridagi rasmda uchburchak quyidagi qoida bo'yicha tashkil etiladi. Har bir qatorning chekka qismida 1 raqami joylashgan ikkita sonning yig'indisiga teng. Ushbu qoida asosida Ushbu uchburchakning yangi qatorini ketma ket yozish mumkin.

Bunday ta'rif 1665 yil fransuz matematigi V. Paskalning "Arifmetik uchburchak haqida traktat" olimdan so'ng chop etildi. Uchburchakning shunga o'xshash variantlari italiyan matematigi N. Tartalya, shu davrga qadar bir necha yillar oldin o'rta osiyolik olim va shoir Umar Xayyom asarlarida bayon etilgan.

Kombinatorika yo'nalishidagi guruhlash soni $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, formulasi

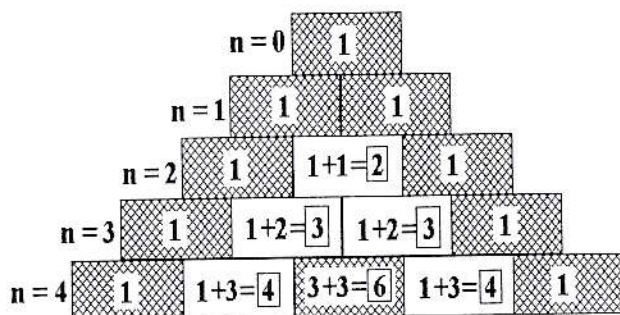
Paskal uchburchakdagi sonlar bilan uzviy bog'liq. Haqiqatdan ham, $n=0$ da $C_0^0=1$ ga ega bo'lamiz. Uchburchakning yuqoridagi qatori (nolinch) bitta sondan iborat. Navbatdagi qator – ikkita sondan iborat: $C_1^0=C_1^1=1$. To'rtinchi qator 5 ta sondan iborat: $C_4^0=C_4^1=1, C_4^2=C_4^3=4, C_4^4=6$.

Nyuton binomi formulasi

Ushbu $(a+b)^n$ ning yoyilmasidan iborat ko'phad **Nyuton binomi** deyilib, bu yoyilmani topish uchun $n=2, n=3, n=4$ va h.k. hollarni qarab, so'ngra umumlashtirish mumkin. Ammo bu induktiv metod bo'lgani uchun ikkinchi hadi bilan farq qiluvchi binomlar ko'paytmasini qaraymiz:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc;$$



$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd;$$

Bundan umumiy holda $(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \dots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + a^n$; (1) yoyilma hosil bo'ladi.

Bunda: $C_m^1 = m; C_m^2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ va hakazo.

Izoh. Isaak Nyuton mashhur ingliz matematigi (1642-1727) bo'lib, (1) formula **Nyuton binomi** formulasi deyiladi $C_m^0=1; C_m^1; \dots; C_m^m=1$ larni **binomial koeffitsientlar** deyiladi.

Nyuton binomi formulasining xossalari:

1. x ning ko'rsatkichi kamayib boradi, a ning ko'rsatkichi oshib boradi.

Ularning ko'rsatkichlari yig'indisi m ga teng.

2. Yoyilma $m+1$ ta haddan iborat.

3. Binomial koeffitsientlari yig'indisi 2^n ga teng.

4. Yoyilmaning istalgan hadi $T_{n+1} = C_n^m a^m x^{n-m}$ dan iborat.

5. Yoyilmaning chetlaridan teng uzoqlikda turgan hadlarning koeffitsientlari o'zaro teng.

6. Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisi juft o'rinda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisiga teng.

Masala: Nyuton binomi formulasini isbotlang?

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m, \quad (1)$$

$$\text{Bu erda } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Yechish: $n=1$ da (1) tenglikning chap qismi $(a+b)^1$ ga teng;

$$\text{Ushbu tenglikning o'ng qismi: } \sum_{m=0}^1 C_1^m a^{1-m} b^m = \frac{1!}{0!1!} a + \frac{1!}{1!0!} b = a+b$$

$n=k$ da (1) tenglikning o'rinli ekanligi berilgan

$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^m,$$

$n=k+1$ da tenglikning o'rinli ekanligini isbotlaymiz.

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m,$$

Haqiqatdan:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b) \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^m =$$

$$= \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^{m+1} =$$

Ikkinchi qo'shiluvchida yig'indini $m=1$ da boshlaymiz. Ikkinchi qo'shiluvchida m ning o'rniga $m-1$ olinadi.

$$= \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^k C_k^{m-1} a^{k-(m-1)} b^{m-1+1} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^{k+1} C_k^{m-1} a^{k+1-m} b^m =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + \sum_{m=0}^k (C_k^m + C_k^{m-1}) a^{k+1-m} b^m =$$

$$\left. \begin{aligned} C_k^0 &= C_{k+1}^0 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1. \\ C_k^m + C_k^{m-1} &= \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!(k-(m-1))!} = \\ &= \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!(k+1-m)(k-m)!} = \\ &= \frac{k!}{m!(k+1-m)!} \cdot (k+1-m+m) = \frac{(k+1)!}{m!((k+1)-m)!} = C_{k+1}^m = \\ &= \sum_{m=0}^{k+1} (C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m. \end{aligned} \right\} (1) \text{ tenglik isbotlandi.}$$

Birinchi yig'indida birinchi qo'shiluvchini alohida yozamiz, ikkinchi yig'indida – oxirgi qo'shiluvchini. Ikkala yig'indi $m=1$ dan $m=k$, bo'yicha yig'iladi. a, b sonlarning yig'indisi ushbu belgilar bilan mos tushadi.

10 §. O'quvchilarni fikrlash qobiliyatini rivojlantiruvchi masalalar

Arifmetikaga doir misol va masalalar

1. To'rtta 2 raqami hamda to'rtta arifmetik amal, qavslar yordamida 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 sonlarini hosil qilish mumkinmi?
2. 100 sonini a) oltita bir xil raqam yordamida, b) to'qqizta turli xil raqamlar yordamida yozing.
3. 9 sonini 10 ta turli raqamlar yordamida yozing.

4. Ikki xonali sonning raqamlar yig'indisi eng katta bir xonali songa teng. O'nlar xonasidagi raqam esa, bu yig'indidan 2 ga kam. Shu sonni toping.

5. Ikki xonali sonning raqamlari yig'indisi eng kichik ikki xonali songa teng. O'nlar xonasidagi raqam birlar xonasidagi raqamdan to'rt marta kichik. Bu sonni toping.

6. a) hamma raqamlari turlicha eng katta; b) hamma raqamlari turlicha va 4 ga bo'linuvchi eng katta sonni toping.

7. Hamma raqamlardan tuzilgan a) 5 ga bo'linuvchi; b) 20 ga bo'linuvchi eng kichik sonni toping.

8. - ifodaga qavslarni qo'yib a) 50 sonini; b) mumkin bo'lgan eng kichik sonni hosil qiling. 41218:63:++

9. 88888888 yozuvda raqamlar orasiga (+) ishorasini qo'yib, 1000 sonini hosil qiling.

10. Yigirmata besh raqami yonma-yon yozilgan: 555...5. Shu raqamlardan ba'zilarining orasiga (+) ishorasini qo'yib, 100 sonini hosil qiling.

11. ifodada qavslarni natija a) eng kichik; b) eng katta bo'ladigan qilib qo'ying. 1:2:3:4:5:6:7:8:9

12. Birlar xonasidagi raqamdan etti marta katta bo'lgan butun sonni toping.

13. Uch xonali son 4 raqami bilan boshlanadi. Agar bu raqamni soning oxiriga o'tkazsak, berilgan sonning 3/4 qismiga teng bo'lgan son hosil bo'ladi. Berilgan sonni toping.

14. Raqamlari o'rnini almashtirganda 4,5 marta ortadigan ikki xonali sonni toping.

15. Son 2 raqami bilan tugaydi. Agar bu raqamni sonning boshiga o'tkazsak, son ikki marta ortadi. Shu xossaga ega bo'lgan eng kichik sonni toping.

16. Agar $42 \cdot 4^*$ son 72 ga bo'linsa, sonning yuzlar va birlar xonasi raqamlarini toping.

17. 1234567...5657585960 sonidan 100 ta raqamni qolgan son a) eng kichik; b) eng katta bo'ladigan qilib o'chiring.

18. 111...11 (81 ta bir) sonning 81 ga bo'linishini isbotlang.

19. Sonning kvadrati 0; 2; 3; 5 sonlaridan tashkil topadi. Sonning o'zini toping.

20. Bir nechta sonlarining yig'indisi 1 ga teng. Ular kvadratlarining yig'indisi 0,01 dan kichik bo'lishi mumkinmi?

21. a) Raqamlari orasida hech bo'lmaganda bitta besh raqami uchraydigan; b) O'nlar xonasidagi raqami birlar xonasidagi raqamidan kichik bo'lgan; c) O'nlar xonasi raqami birlar xonasi raqamidan kata bo'lgan nechta ikki xonali son bor?

22. Birdan yuzgacha bo'lgan sonlar ketma-ket yozilgan. Bu yozuvda a) nol; b) uch raqami necha marta uchraydi?

23. Birdan yuzgacha bo'lgan bo'lgan sonlar orasida ko'pi bilan nechta sonning raqamlari yig'indisi bir xil?

24. To'rtta ketma-ket kelgan butun sonlar to'rt xonali sonning minglar, yuzlar, o'nlar, birlar xonasi raqami. Agar bu sonning raqamlari teskari tartibda yozilsa, berilgan son qancha ortadi?

25. Ikki butun sonni qo'shishda o'quvchi ikkinchi qo'shiluvchining oxiriga ortiqcha nol qo'yib yubordi. Natijada 2411 soninig o'miga 6641 soni hosil qildi. Ikkinchi qo'shiluvchini toping.

26. O'rtadagi ikkita raqami 97 bo'lib, 45 ga bo'linadigan nechta to'rt xonali son mavjud?

27. 15 soning o'ng va chap tomoniga bittadan raqam yozib, 15 ga bo'linadigan son hosil qiling.

28. a) Shunday 3 ta turli natural son topingki, ularning yig'indisi shu sonlarning har biriga bo'linsin. b) Xuddi shunday 3 ta sonni topigki, endi har bir son 100 dan katta bo'lsin. c) a) masalani 4 ta son uchun yeching. d) a) masalani 10 ta son uchun yeching

29. a) Ixtiyoriy ikkitasi 1 dan katta umumiy bo'luvchiga ega bo'lib, uchtasining EKUBi 1 ga teng bo'lgan 3 ta turli sonlarni toping. b) Shu shartni

qanoatlantiruvchi 100 dan katta sonlarga misol keltiring. c) a) masalani 4 ta turli natural sonlar uchun yeching. d) a) masalani 10 ta natural sonlar uchun yeching.

30. Birinchisi 2 ga, ikkinchisi 3 ga, uchinchisi 4 ga, to'rtinchisi 5ga, beshinchisi 6 ga, oltinchisi 7 ga bo'linadigan oltita ketma-ket kelgan natural sonlarni toping. Oltinchi sondan keyin kelgan son 8 ga bo'linishi shartmi?

31. Birinchisi 2 ga, ikkinchisi 3 ga, uchinchisi 5 ga, to'rtinchisi 7 ga, beshinchisi 11 ga, oltinchisi 13 ga bo'lindigan, ketma-ket kelgan oltita natural sonni toping.

32. Kvadratni p ta kichik kvadratlariga ajrating (bir xil bo'lishi shart emas):
a) $p = 4$; b) $p = 7$; c) $p = 10$; d) $p = 2004$.

33. Qopda 64 kg mix bor. Pallali tarozida toshlardan foydalanmasdan 23 kg mixni qanday o'lchash mumkin?

34. Kassa 3 so'mlik va 5 so'mlik qog'oz pullar bor. Ular yordamida 8 so'mdan kam bo'lmagan ixtiyoriy "summani" xosil qilish mumkinligini isbotlang.

35. Zalning devorlari bo'ylab jami p ta stul qo'yilgan. Bunda har bir devor bo'ylab bir hil sondagi stullar qo'yilgan (zalning burchagidagi stul ikkila devor bo'ylab xam qo'yilgan deb qaraymiz). Shu shartni qanoatlantiruvchi barcha p larni toping.

36. Kichkina qutida 4 paket, kattasida esa 9 paket sharbat bor. Oshxona navbatchisi qutilarni ochmasdan 24 dan kichik bo'lmagan ixtiyoriy sondagi sharbat paketlarini ajratib bera olishini aytdi. U xaqmi?

37. Agar 5 va 26 tiyinliklar etarlicha bo'lsa, 1 so'mdan boshlab, ixtiyoriy pulni qaytimsiz to'lash mumkinligini isbotlang.

38. 1 sonini surati 1 bo'lgan a) uchta; b) to'rtta; c) o'nta turli kasrlar yig'indisi shaklida yozing.

39. Bo'yoqchi bir yurish bilan shaxmat doskasining tomoni bo'yicha qo'shni bo'lgan katagiga o'tadi va uni qarama-qarshi rangga bo'yadi. Agar bo'yoqchi doskaning bir burchagidagi katagida turgan bo'lib, hamma kataklar oq rangda

bo'lsa, bo'yoqchi doskani shaxmat doskasi tartibida bo'yashi mumkinligini isbotlang.

40. Qanday p larda berilgan kvadratni p ta kvadratlarga ajratish mumkin (kvadratlar teng bo'lishi shart emas)

41. 2.3 jadvalga (2 ta satr, 3 ta ustun) ustunlardagi sonlar ko'paytmasi o'zaro teng, satrlardagi sonlar yig'indisi xam o'zaro teng (yig'indi ko'paytmadan farqli bo'lishi mumkin) bo'ladigan qilib natural sonlarni joylashtiring.

Mumkin yoki mumkin emas

1. Musbat sonlarning yig'indisi 5 dan katta. Ular kvadratlarining yig'indisi 1 dan kichik bo'lishi mumkinmi?

2. Korxona o'zining daromadlarini yil davomida oyma-oy hisoblab bordi. Har bir ketma-ket keluvchi 3 ta oydagi foydalar yig'indisi manfiy bo'ldi.

a) Butun yil davomidagi foydalar yig'indisi musbat bo'lishi mumkinmi?

b) Birinchi oydagichi?

3. Bir oyda 5 ta yakshanba bo'lishi mumkinmi? 6 tachi?

4. Bir yilda 53 ta yakshanba bo'lishi mumkinmi? 54 tachi?

5. Bir yilda yakshanba kunidan boshlanuvchi 4 oy bo'lishi mumkinmi? Yakshanba bilan tugaydigan 4 oy-chi?

6. O'tgan kun (kechadan oldingi kun) Anvar 10 yoshda edi. Keyingi yil 13 ga to'ladi. Shunday bo'lishi mumkinmi?

7. O'tgan yili Sarvar 10 yoshda edi. Indinga (ertadan keyin) 13 ga to'ladi. Shunday bo'lishi mumkinmi?

8. Bugun, ertangi kun va bir hafta oldingi kunlarning sanasi tub sonlar bo'lishi mumkinmi?

9. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi jadvalga sonlarni har bir ustundagi sonlar yig'indisi musbat, har bir satrdagi sonlar yig'indisi manfiy qiladigan bo'lib joylashtirish mumkinmi?

10. To'g'ri to'rtburchakli jadvalga natural sonlarni har bir ustundagi sonlar yig'indisi 100 dan katta, har bir satrdagi sonlar yig'indisi esa 5 dan kichik bo'ladigan qilib joylashtirish mumkinmi?

11. Shaxmat doskasida a) 9 ta rux b) 14 ta filni bir-birini "ura" olmaydigan qilib joylashtirish mumkinmi?

12. Ikki xonali sonning raqamlar yig'indisi o'zidan 2, 3, ..., 10 barobar kichik bo'lishi mumkinmi?

13. Uch xonali sonning raqamlari yig'indisi sonning o'zidan 19 marta kichik bo'lishi mumkinmi? 38 marta-chi?

14. Ikki xonali sonning birinchi raqami o'chirilgandan keyin, uning qiymati 15 marta; 16 marta; 91 marta; 92 marta kamayishi mumkinmi?

15. Uch xonali sonning raqamlari ko'paytmasi 22, 28, 350 ga teng bo'lishi mumkinmi? Agar 650 dan 720 gacha bo'lgan sonlarni qarasak-chi?

16. Bir nechta natural sonlarning ko'paytmasi ham yig'indisi ham a) 111 soniga teng bo'lishi mumkinmi? b) 101 soniga teng bo'lishi mumkinmi?

17. Agar nishonda 9, 12, 15, 18, 24, va 47 ochkoli soxalar bo'lsa, bir nechta o'q otib, 100 ochko olish mumkinmi?

18. Uchburchakning hamma tomonlari butun sonlar bo'lsa, uning yuzasi butun son bo'lmazligi mumkinmi? Agar uchburchak to'g'ri burchakli bo'lsa-chi?

19. To'g'ri to'rtburchakning yuzasi 1 kv.m dan kichik. Uning perimetri 1 km dan ortiq bo'lishi mumkinmi?

20. Kvadratni bir nechta bir xil bo'lmagan to'g'ri to'rtburchaklarga ajratish mumkinmi?

21. Bir davrali futbol musobaqasida "PAXTAKOR" boshqa hamma jamoalardan ko'p go'l o'tkazib yubordi va ko'p go'l kiritdi. U ohirgi o'rinni olishi mumkinmi?

22. Bir davrali futbol musobaqasida g'alaba uchun 3 ochko, durang uchun 1 ochko, mag'lubiyat uchun 0 ochko beriladi. "PAXTAKOR" hammadan ko'p g'alaba qildi. U hammadan kam ochko yig'ishi mumkinmi?

23. Futbol bo'yicha Osiyo chempionatining A guruhida 4 ta jamoa o'ynab, shulardan 2 tasi chorak finalga chiqdi. Ikkinchi turdan so'ng faqat 1 ta jamoa chorak finalga chiqish imkoniyatini yo'qotgani ma'lum. Dastlabki tur o'yinlarining hech biri durang bilan tugamagan bo'lishi mumkinmi?

24. Bikford shnuri tekis yonmaydi va aniq 1 minutda yonib tugaydi. Shunday ikkita shnur yordamida 45 sekund vaqtni o'lchash mumkinmi?

Qoldiqli bo'lish. Qoldiqlarning hossalari

1. 5 ga bo'lganda qoladigan qoldiqlar uchun qushish va ko'paytirish jadvalini tuzing.

2. a) Agar a soni 5 ga bo'lganda 3 qoldiq qolsa, $2a$ ni 5 ga bo'lgandagi qoldiqni toping. b) Agar a sonini 7 ga bo'lganda 5 qoldiq qolsa, $13a$ ni 7 ga bo'lgandagi qoldiqni toping.

3. 2000·2001·2002·2003 – 24 sonining a) 1999 ga b) 2004 ga bo'linishini isbotlang.

4. 2004·2005·2006+6 sonining 2007 ga bo'linishini isbotlang.

5. To'la kvadratni (butun sonning kvadrati) 3 ga bo'lganda qanday qoldiq qolishi mumkin.

6. Ikkita to'rt orasiga bir nechta uchlar va nollarni joylashtirib, to'la kvadrat hosil qilish mumkinmi?

7. Ikkita butun sonning kvadratlari yig'indisi to'la kvadrat. Bu sonlardan kamida bittasi 3 ga bo'linishini isbotlang.

8. To'la kvadratni 4 ga, 5 ga, 7 ga bo'lganda qanday qoldiq qolishi mumkin?

9. a) ikkita b) uchta toq sonlar kvadratlarning yig'indisi butun sonning kvadratiga teng bo'la oladimi?

10. Ettita sondan ixtiyoriy 6 tasining yig'indisi 5 ga bo'linishi ma'lum. Ularning har biri 5 ga bo'linishini isbotlang.

11. Sarvar o'yinchoq askarlarni o'ynayapti. Dastlab o'yinchoqlarni juft-juft qilib joylashtirishga urindi, ammo bitta ortib qoldi. So'ngra Sarvar o'yinchoqlarni 3 tadan joylashtirmoqchi bo'ldi. Unda ham bitta o'yinchoq ortib qoladi. Agar u 4

tadan, 5 tadan, 6 tadan joylashtirmoqchi bo'lsa ham bitta ortib qoladi. Oxiri 7 tadan safga joylashtirishga erishdi. Agar Sarvardagi o'yinchoqlar soni 1000 tadan kam bo'lsa, unda nechta o'yinchoq bo'lishi mumkin?

12. a) Quyong o'rmonda aylanib yurib, bo'riga duch keldi. Bo'ri quyonga – agar, 1 minut ichida ikkining bir xil raqam bilan tugaydigan ikkita darajasini aytsa, uni emasligini aytdi. Quyonga yordam bering. b) Bo'ri quyonga ikkining ikkita bir xil raqam bilan tugaydigan darajasini topsa uni qo'yib yuborishini, agar uchta bir xil raqam bilan tugaydigan darajasini topsa, uni umuman quvlamasligini aytdi. Quyong bunga erisha oladimi?

Quyidagi masalalardan ba'zi birlari quyidagi tasdiq yordamida isbotlanadi:

Agar ikki ta sonni k ga bo'lganda bir xil qoldiq qolsa, ularning ayirmasi k ga bo'linadi.

13. a) O'n ikki ta butun son ichida bir xil raqam bilan tugaydigan ikkitasi topilishini isbotlang.

b) Ixtiyoriy 8 ta butun son ichida ayirmasi 7 ga bo'linadigan ikkita son topilishini isbotlang.

14. Sarvar 5 ta natural son o'yladi va ularni kvadratga oshirdi. Anvar bu kvadratlar orasida ayirmasi 9 ga bo'linadigan ikkita son bor dedi. U haqmi?

15. Ixtiyoriy o'nta son orasidan yo 1 tasi 10 ga bo'linadigan, yoki bir nechtasining yig'indisi 10 ga bo'linadigan sonlarni tanlash mumkinligini isbotlang.

16. Raqamlari a) faqat nollar va birlar; b) faqat birlardan iborat bo'lib, 321 ga bo'linadigan son borligini isbotlang.

17. 1 dan 10 gacha bo'lgan sonlar orasidan biri ikkinchisidan ikki marta katta sonlar juftligi qilib, ko'pi bilan nechta natural son tanlasa bo'ladi?

18. Sport klubida massalari 1 kg, 2 kg, ..., 100 kg bo'lgan 100 ta tosh bor. Toshlarini, hech bir jamoadagi toshlarning umumiy massasi boshqasida toshlarning umumiy massasini ikki baravariga teng bo'lmaydigan qilib, tarqatish mumkin bo'lishi uchun kamida nechta jamoa kerak bo'ladi.

19. 40 dan oshmaydigan natural sonlar orasidan, biri boshqasiga bo'linmaydigan qilib ko'pi bilan nechta son tanlash mumkin.

20. a) 15 dan oshmaydigan 8 ta turli natural sonlar berilgan. Ularning juft-juft ayirmalari orasida 3 ta bir xili topilishini isbotlang.

b) 70 dan kichik 20 ta turli natural sonlar berilgan. ularning juft-juft ayirmalari orasida to'rtta bir xili topilishini isbotlang.

c) Shunga o'xshash masala tuzing.

21. Ixtiyoriy 9 ta ketma-ket natural sonlar orasida qolganlarining har biri bilan o'zaro tub bo'lgan kamida bitta son topilishini isbotlang.

22. Har doim 37 ta butun son orasidan yig'indisi 7 ga bo'linadigan 7 ta son tanlash mumkinligini isbotlang.

Juft va toq sonlar

1. Otda ketayotgan Kenja botirga dashtda bo'rilar galasi hujum qildi. Kenja botir ikkita bo'ri yonidan o'tayotganda, bu bo'rilar unga tashlandilar. Kenja botir bo'rilarga chap berdi, bo'rilar esa bir-biri bilan to'qnashib, yarador bo'lishdi. Shu chap berish usulini qo'llab, Kenja botir barcha bo'rilarni yarador qildi. Galada 23 ta bo'ri bo'lgan bo'lishi mumkinmi? *Yo'q.*

2. Chigirtka har safar to'g'ri chiziq bo'ylab o'ngga yoki chapga 1 metr masofaga sakraydi. Bir nechta sakrashlardan keyin chigirtka harakatini boshlagan nuqtaga qaytib keldi. Chigirtkaning sakrashlari son juft bo'lganligini isbotlang.

3. Shilliqurt tekislik bo'ylab o'zgarmas tezlik bilan harakat qiladi va har 30 minutdan keyin 90° burchakka buriladi. Shilliqurt p soatdan keyin boshlang'ich nuqtaga qaytib kelgan bo'lsa, a) p – butun son, b) p – juft son ekanligini isbotlang.

4. 5 o'lchamdagi katakli varaqqa 5 ta shashka qo'yilgan. a) Agar bu shashkalar varaqning diogonaliga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lsa, bu diagonalda ham shashka borligini isbotlang. b) Agar shashkalar ikkala diagonalga nisbatan ham simmetrik joylashgan bo'lsa, varaqning markazidagi katakda shashka borligini isbotlang. 5.

5. 9 ta shesterna (tishli doiralar) quyidagicha joylashtirilgan: birinchi shesterna ikkinchisi bilan, ikkinchisi uchinchisi bilan, ..., sakkizinchisi to'qqizinchisi bilan, to'qqizinchisi esa birinchisi bilan tutashtirilgan. Sobir birinchi shesternani soat milining harakati yo'nalishida aylantirdi. Qanday hodisa ro'y beradi? Nima uchun?

6. Dunyo bo'ylab sayohatdan qaytib kelgan Nasriddin afandi «Dashtiston» deb atalmish mamlakat chegarasini 13 marta kesib o'tganligini gapirib berdi. Siz unga ishonasiz-mi?

7. Juda katta maydonida uchta to'p bor. Jasur ulardan bittasini shunday tepadi-ki, natijada u qolgan ikkitasining orasidan o'tadi. U shu qoida bo'yicha 2007 marta to'plarni tepdi. Shundan keyin to'plar dastlabki holatida joylashib qolishi mumkinmi?

8. 8 tup olma daraxti bir qatorda joylashgan. Yonma-yon joylashgan daraxtlardagi mevalar soni 1 taga farq qiladi. Barcha tuplardagi olma mevalari soni 2007 ta bo'lishi mumkin-mi?

9. Pallali tarozining pallalariga bitta 7 grammlik, bir nechta 6 grammlik va bir nechta 8 grammlik toshlarni joylashtirib, tarozini muvozanat holatga keltirish mumkin-mi?

10. 10 ta butun sonning ko'paytmasi 1 ga teng. Bu sonlar yig'indisi nolga teng emasligini isbotlang.

11. 25 ta butun sonning ko'paytmasi 1 ga teng. Bu sonlar yig'indisining eng kichik qiymatini toping.

12. 99 ta qog'oz bo'laklarining har biriga navbat bilan 1, 2, 3, ..., 99 sonlardan bittasi yozildi. Qog'ozlar aralashtirildi va bu qog'ozlarning toza (son 9 1 2 3 8 7 6 5 4 yozilmagan) tomonlariga ham 1, 2, 3, ..., 99 sonlari ketma-ket yozildi. Har bir qog'oz bo'lagidagi sonlarning yig'indilari hisoblandi. Hosil bo'lgan 99 ta sonning ko'paytmasi juft ekanligini isbotlang.

13. Dostaga 2007 ta butun son yozilgan. a) Bitta sonni o'chirib, qolgan sonlar yig'indisida juft son hosil qilish mumkinligini isbotlang. b) Bu isbotlangan 2008 ta butun son uchun ham to'g'rimi?

14. O'qituvchi varaqqa 20 sonini yozdi va uni sinfdagi o'quvchilarga berdi. Har bir o'quvchi varaqdagi songa 1 ni qo'shadi yoki ayiradi. Sinfdagi 33 ta o'quvchi bo'lsa, ohirida varaqda a) 10; b) 21 soni hosil bo'lishi mumkinmi?

15. Zilola bilan Hilola quyidagicha o'yin o'ynashayapti: Zilola yuqoriga tanga otadi, Hilola esa tanganing qaysi tomoni bilan yerga tushushini oldindan aytishi kerak. Agar tanga Hilola aytgan tomoni tushsa, Zilola unga bu nechanchi tanga o'tish bo'lsa, shuncha konfet beradi, agarda Hilola tangani qaysi tomoni bilan tushushini topa olmagan bo'lsa, u Zilolaga shuncha konfet beradi. a) Tanga 11 marta o'tilganidan keyin Zilolaning konfetlari soni oldingidek bo'lishi mumkinmi? b) 30 marta o'tilganidan keyinchi?

16. Ali va Vali navbatma-navbat bitta qog'oz varag'ini bo'laklarga bo'ldilar. Unda, Ali har bir bo'lakni 3 ta bo'lakka, Vali esa beshta bo'lakka bo'ldi. Natijada 100 ta bo'lak hosil bo'lishi mumkinmi?

17. a) Dostaga 1, 2, 3, ..., 12 sonlari yozilgan. Istalgan 2 ta soni ularning yig'indisi yoki ayirmasiga almashtirishga ruxsat etiladi. Bu ish dostkada bitta son qolguncha davom ettiriladi. a) Ohirida qolgan son 0 bo'lishi mumkinmi? b) Dostkadagi sonlar 1 dan 13 gacha bo'lgandachi?

18. Zilola 96 varaqli daftar sotib oldi va uning xamma betlarini 1 dan 192 gacha bo'lgan sonlar bilan nomerlab chiqdi. Xilola bu daftarning qandaydir ketma-ket kelgan 50 betini yirtib oldi va betlarga yozilgan 50 ta sonning yig'indisini hisobladi. Hilola yig'indida 2008 hosil qila olmasligini isbotlang.

19. Stol ustida 1 so'mlik, 5 so'mlik va 10 so'mlik tangalar turgan edi. Dilmurod bu tangalarning bittasini oldi va qolgan tangalarning qiymatini 2009 ga ko'paytirdi. Oldin hosil bo'lgan sonlarni qo'shdi, keyin ko'paytirdi va nihoyat hosil bo'lgan ko'paytma va yig'indining ayirmasini hisobladi. Bu juft son ekan. Dilmurod qaysi tangani olgan?

20. 101 ta tanga bor. Ularning 50 tasi qalbaki. Qalbaki tangalar haqiqiydan 1 grammga farq qiladi. Sitara 1 ta tangani oldi va uning haqiqiy ekanligini pallalaridagi yuklarning ayirmasini ko'rsatuvchi tarozida bir marta o'lchash yordamida aniqlamoqchi bo'ldi. U buni uddalay oladimi?

21. Doira shaklidagi stol atrofida 6 ta stul bor. Ali, Vali va Gulom bu stullarga o'ttirishganda ularning qarshisidagi stullar bo'sh qoldi. Har bir minutdan keyin bolalarda bittasi o'rnidan turib qarshisidagi stulga borib o'tiradi. 15 minutdan keyin bolalar oldingi joylarida o'tirgan bo'lishi mumkinmi?

22. a) Aylanaga 1, 2, 3, ..., 20 sonlari soat mili harakati yo'nalishida, o'sish tartibida joylashtirildi. Oldin 2 dona o'chirildi. Keyin soat mili harakati yo'nalishida o'chirilgan sondan keyin joylashgan sondan keyingi son o'chirildi. Bu ish aylanada bitta son qolguncha davom ettirildi. Qaysi son qolgan? b) Aylanaga 1, 2, 3, ..., 2008 sonlari yuqoridagidek joylashtirilganda, ohirida qaysi son qoladi?

O'yinlar

Quyidagi masalalarda ikkita o'yinchi ishtirok etadi. Ular navbat bilan yurish qiladilar. O'yinda yutish yoki yutqazish shartlari ko'rsatilgan. O'yinda boshlagan o'yinchi yutadimi, yoki ikkinchisimi? Shuni aniqlash talab qilinadi.

1. Toshlarining uchta uyumi bo'lib, 1-uyumda 10 ta, 2-uyumda 15 ta, 3-sida esa 20 ta tosh bor. Har bir yurishda ixtiyoriy bitta uyumni birdan ko'p toshga ega bo'lgan 2 ta uyumga ajratish mumkin. Kim yurish qila olmasa, shu o'yinchi yutqazadi. Kim yutadi?

2. a) Ikki o'yinchi navbat bilan 99. shaxmat taxtasiga shohlarni bir-birini urmaydigan qilib qo'yishmoqda. Kim yurish qila olmasa, shu o'yinchi yutqazadi. Kim yutadi?

b) Ikki o'yinchi navbat bilan shaxmat taxtasiga fillarni qo'yishmoqda. Navbatdagi yurishda hech bo'lmaganda bitta "erkin" turgan (hujum ostida qolmagan) katakni egallash lozim. Kim yurish qila olmasa shu o'yinchi yutqazadi. O'yinda kim yutadi?

3. Aylanada 20 ta nuqta olingan. Har bir yurishda bu nuqtalardan ikkitasini kesma bilan tutashtirish kerak. Bunda o'tkazilgan kesmalar kesishmasligi lozim. Kim yurish qila olmasa, shu o'yinchi yutqazadi. Bu o'yinda kim yutqazadi?

4. Uchta kesishuvchi oltiburchak shaklidagi doska uchburchaklarga ajratib berilgan (1-rasm). Ikki o'yinchi quyidagicha o'yin o'ynashmoqda: 1 – o'zining birinchi yurishida shohni ixtiyoriy katakka qo'yadi, shundan so'ng ikkinchi yurishdan boshlab, o'yinchilar shohni doska bo'ylab harakatlantiradi (tomon bo'yicha qo'shni bo'lgan kataklarga), bunda oldin o'tilgan katakka yurish ta'qiqlanadi. Kim yurish qila olmasa yutqazgan hisoblanadi. O'yinda kim yutadi va u qanday harakat qiladi?

5. Doskaga 1, 2, 3, ..., 2003, 2004 sonlari yozilgan. O'yinchilar navbat bilan doskadagi ixtiyoriy ikkita sonni o'chirib, o'rniga ularning ayirmasini yozib qo'yishadi (kichigini kattasidan ayirib). Bu jarayon doskada 1 ta son qolguncha davom ettiriladi. Agar bu son juft bo'lsa, 1-o'yinchi, aks holda 2-o'yinchi yutadi. O'yinda kim yutadi?

6. Toshlar a) ikkita; b) uchta; c) o'nta uyumda turibdi. Har uyumda 30 tadan tosh bor. Ikki o'yinchi quyidagicha o'yin o'ynashmoqda: har bir yurishda ixtiyoriy bitta uyumdan ixtiyoriy sondagi toshlarni olish mumkin. Ohirgi toshni olgan yutqazadi. O'yinda kim yutadi?

7. Har birida bitta banan bo'lgan likopchalar bir qator terilgan. Ikki o'yinchi navbat bilan bananlarni emoqda. Bunda ikkita qo'shni tarelkaning faqat bittasidagi bananni olishlari mumkin. Ohirgi bananni egan yutadi. Agar hamma tarelkalar soni a) 20; b) 21 ta bo'lsa, bu o'yinda kim yutadi?

8. O'lchamlari a) 10x10; b) 2x10 bo'lgan shokoladlar berilgan. Har bir yurishda ixtiyoriy bir bo'lak va undan chapdagi bo'laklarni eyish mumkin. Kim ohirgi bo'laklarni esa, shu o'yinchi yutqazadi. Qaysi o'yinchi yutadi?

9. Alisa va Oq qirolicha quyidagicha o'yin o'ynashmoqda: Qirolicha birinchi yurishida shaxmat taxtasining ixtiyoriy katagiga shashka qo'yadi, shundan so'ng Alisaning yurishidan boshlab, ular navbat bilan shashkani doska bo'yicha

(tomon bo'yicha yoki diagonal bo'yicha qo'shni kataklarga) harakatlantirishadi. Bunda oldin o'tilgan katakka borish ta'qiqlanadi. Kim yurish qila olmasa, shu o'yinchi yutqazgan hisoblanadi. Bu o'yinda Alisa yutishi mumkinmi?

10. Ali va Vali quyidagicha o'yin o'ynashmoqda: Doskaga 2007 soni yozilgan. Har bir yurishda hosil bo'lgan sondan dastlabki sonning noldan farqli biror raqami ayiriladi. Yurishidan so'ng doskada nol soni qoldirgan o'yinchi yutadi. Bu o'yinda kim yutadi?

11. O'yin 0 soni bilan boshlanadi. Har bir yurishda 1 dan 9 gacha bo'lgan sonlarni qo'shishga ruxsat beriladi.

a) Kimda 100 soni hosil bo'lsa, shu o'yinchi yutadi.

b) Kimda uch xonali son hosil bo'lsa, shu o'yinchi yutqazadi. O'yinda kim yutadi?

c) Kimda 105 soni hosil bo'lsa, shu o'yinchi yutadi. O'yinda kim yutadi?

12. O'lchami 1x40 bo'lgan katak yo'lining ohirlarida shashkalar turibdi. Har yurishda ixtiyoriy shashkani boshqasi tomon a) bir yoki ikki katakka, b) ikki yoki besh katakka yurish mumkin. Shashkaning ustidan o'tish mumkin emas. Kim yuraolmasa shu o'yinchi yutqazadi. O'yinda kim yutadi?

13. Shoh shaxmat taxtasining a1 katagida turibdi. Bir yurish bilan uni bir katakka o'ngga, yuqoriga yoki diagonal bo'yicha "yuqori – o'ngga" yurish mumkin. Kim shohni h8 katagiga qo'ysa, shu o'yinchi yutadi. O'yinda kim yutadi?

14. Birinchi uyumda 5 ta tosh, ikkinchisida 7 ta tosh bor. Ikkita o'yinchi navbat bilan tosh olishadi. Bitta uyumdan bitta yoki har bitta uyumdan bittadan tosh olish mumkin. Ohirgi toshni kim olsa, shu o'yinchi yutadi. O'yinda kim yutadi?

15. 14-masalada, bitta uyumdan istagancha yoki, ikkala uyumdan teng sonda olish mumkin bo'lsa, o'yinda kim yutadi?

16. Ot shaxmat taxtasining a1 katagida turibdi. Har bir yurishda otni ikki katak o'ngga va bir katak tepaga yoki pastga, yoki ikki katak tepaga va bir katak

o'ngga yoki chapga yurish mumkin. Kim yurish qila olmasa, shu o'yinchi yutqazadi. To'g'ri o'yinda kim yutqazadi?

17. Stolda 7 ta qizil va 7 ta yashil sharlar bor edi. Jasur bilan Jahongir navbat bilan quyidagi amallardan birini bajaradi:

a) bitta qizil va bitta yashil sharni yoradi;

b) bitta qizil sharni yoradi;

c) bitta yashil sharni yoradi;

d) bitta qizil sharni (agar qolgan bo'lsa) yashil sharga almashtiradi. Agar o'yinni Jasur boshlagan bo'lsa, u ohirgi sharni yora oladimi?

18. Ikkita qutida 11 tadan qand bor. Har bir yurishda bir qutidan ikkita, ikkinchisidan esa bitta qand olish mumkin. Kim yurish qila olmasa, o'sha o'yinchi yutqazadi. O'yinda kim yutadi?

19. O'yin 60 soni bilan boshlanadi. Har bir yurishda sondan o'zining bo'luvchilaridan birini ayirish mumkin. Kimning yurishidan 0 soni hosil bo'lsa, shu o'yinchi yutqazadi. O'yinda kim yutadi?

20. Ali bilan Vali qutidan navbat bilan 1 ta, yoki 2 ta, yoki 3 ta konfet oladilar. Qutidan oxirgi konfetni olgan bola yutgan hisoblanadi. Qutidan konfet olishni Ali boshlagan. a) Agar dastlab qutida 9 ta konfet bo'lgan bo'lsa, Ali o'yinda yutishi uchun qanday yo'l tutishi kerak? b) Agar dastlab qutida 2008 ta konfet bo'lgan bo'lsa, Ali yuta oladimi? c) Agar dastlab qutida 2008 ta konfet bo'lib, undan 1 ta, 2 ta yoki 4 ta konfet olish mumkin bo'lsa, Ali o'yinda yuta oladimi?

Kombinatorika

1. Xonadagi 3 ta lampochkani 3 ta kalitga nechta usul bilan ulash mumkin (har bir lampochkaga aloxida kalit ulanishi kerak).

2. "Choy ichish uchun hamma narsa" magazinida piyolaning 5 turi, laganning 3 turi va choy qoshig'ning 4 turi bor edi.

a) Bitta to'liq majmuani nechta hil usul bilan tanlash mumkin?

b) "Piyola + lagancha" majmuani nechta xil usul bilan tanlash mumkin?

c) "Piyola + lagancha + qoshiq" majmuasini nechta xil usul bilan tanlash mumkin?

d) Ikkita to'liq majmuani nechta usul bilan tanlash mumkin?

e) Nolta majmuani bitta usul bilan tanlash mumkinligi tushunarli. $1+12+47+60=4\cdot5\cdot6$ tenglikning ma'nosi nima?

f) Bitta chashka, bitta laganga va bitta qoshiq oltindan ekanligi ma'lum. Quyidagi turli majmualardan nechta xil usul bilan sotib olish mumkin:

1) oltin predmet yo'q;

2) 1 ta oltin predmet;

3) 2 ta oltin predmet;

4) 3 ta oltin predmet?

3. Avtobus chiptalarining nomerlari 000000 dan 999999 gacha bo'lgan olti xonali sonlar:

a) Xamma raqamlari toq chiptalar nechta?

b) Birorta ham toq raqami yo'q chiptalar soni nechta?

c) Ixtiyoriy ikkita qo'shni raqamlari turlicha bo'lgan chiptalar soni nechta?

d) Xamma raqamlari har xil bo'lgan chiptalar soni nechta?

e) Xamma raqamlari bir xil juftlikka ega bo'lgan chiptalar soni nechta?

f) Hech bo'lmaganda bitta toq raqami bor bo'lgan chiptalar soni nechta?

g) 7 raqami qatnashgan chiptalar soni nechta?

h) 7 va 0 raqamlari qatnashmagan chiptalar soni nechta?

i) 7 raqami qatnashgan va 0 raqami qatnashmagan chiptalar soni nechta?

4. Yozuvida 4 va 5 raqamlari ketma-ket keladigan va hamma raqamlari turlicha bo'lgan o'n xonali sonlar nechta?

5. Birinchi va oxirgi uchta raqamlarining yig'indisi 15 ga teng bo'ladigan avtobus chiptalarining soni nechta?

6. Ixtiyoriy 2 ta raqami ketma-ket kelgan sonlarda iborat bo'lgan o'n xonali sonlar nechta?

7. Sinfda 35 o'quvchi bor. Ulardan 20 tasi matematika to'garagiga, 11 tasi biologiya to'garagiga qatnashadi. 10 tasi esa hech qaysi to'garakga qatnashmaydi. Nechta o'quvchi ham biologiya, ham matematika to'garagiga qatnashadi?

8. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi, 100 dan kichik butun musbat sonlar nechta?

- a) 2 ga ham, 3 ga ham bo'linadi;
- b) 2 ga bo'linadi, lekin 3 ga bo'linmaydi;
- c) 3 ga bo'linadi, lekin 2 ga bo'linmaydi;
- d) yoki 3 ga, yoki 2 ga bo'linadi;
- e) 2 ga ham, 3 ga ham bo'linmaydi.

9. Uchta ishyoqmas 24 kv.m pol yuzini bo'yadi. Dastlab, birinchisi 10 kv.m polni, 2-si 8 kv.m polni qizil rangga bo'yadi va nihoyat 3-si 6 kv.m polni sariqqa bo'yadi. Natijada ixtiyoriy 2 rang bilan ustma-ust 3 kv.m, uchchala rang bilan ustma-ust 1 kv.m pol bo'yaldi. Polning necha kv.m qismi bo'yalmay qoldi? Qizil rangga bo'yalgan polning yuzini toping. . 228,14mm

10. Sayyohlar guruhi chet ellar bo'ylab sayohatga chiqishdi. Ulardan 28 kishi ingliz tilini, 13 kishi frantsuz tilini, 10 kishi nemis tilini, 8 kishi ingliz va frantsuz tilini, 5 kishi frantsuz va nemis tilini, 6 kishi ingliz va nemis tilini, ikki kishi uchchala tilni xam biladi, 41 kishi yuqoridagi uchta tildan hech birini bilmaydi. Sayyohlarning umumiy sonini toping.

11. a) 100 dan kichik butun musbat sonlar orasida 2 ga ham, 3 ga ham, 5 ga ham bo'linmaydiganlar nechta?

b) 1000 dan kichik butun musbat sonlar orasida 3 ga ham, 5 ga ham, 7 ga ham bo'linmaydiganlar nechta?

12. Asliddin amaki 90 kunlik ta'tilini qishloqda o'tkazdi. Bunda u quyidagi qoidalarga qat'iy amal qildi: xar ikkinchi kun (kun ora) cho'milishga, har uchinchi kun do'kondan mahsulotlar sotib olishga bordi, har beshinchi kun esa bog'da ishladi. Birinchi kun Asliddin amaki hammasi bilan birdaniga shug'ullandi va juda charchadi. Ta'til davomida nechta kun

a) "yoqimli" (bu kun u faqat cho'miladi);

b) "zerikarli" (hech qanday ish qilmaydigan kun.);

c) og'ir (uchta ishni qilishi kerak bo'lgan kunlar) bo'ladi?

13. a) 200 dan kichik, yozuvida 1 va 2 raqamlarining ikkalasi xam qatnashadigan nechta natural son mavjud. b) Milliondan kichik, yozuvida 1, 2 va 3 raqamlarining uchallasi xam qatnashadigan nechta natural son mavjud.

14. Oltinchi sinf o'quvchilari 2 ta masala yechishdi. Dars oxirida Shokir Qosimovich to'rtta ro'yxat tuzdi: 1 – masalani yechganlar, 2 – faqat bitta masala yechganlar, 3 – kamida bitta masala yechganlar, 4 – ikkala masalani yechganlar. Ro'yxatlardan eng uzuni qaysi? Ikkita ro'yxat tarkibi bo'yicha ustma-ust tushishi mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa, qaysilari?

15. Shaxmat taxtasida 8 ta ruhni hamma katakalar hujum ostida qoladigan qilib, nechta usulda joylashtirish mumkin?

16. a) 7 kishi; b) n kishi necha xil usul bilan navbatga turishi mumkin.

17. 12 kishilik guruhdan a) sardor va o'rinbosarni; b) ikkita navbatchini necha xil usul bilan tanlash mumkin.

18. a) Raqamlari kamayish tartibida bo'lmagan nechta ikki xonali son bor?

b) Raqamlari o'sish tartibida bo'lganlarichi?

c) Raqamlari kamayish tartibida bo'lgan nechta uch xonali son bor?

19. Raqamlari kamayish tartibida bo'lgan nechta sakkiz xonali son bor? Raqamlari o'sish tartibida bo'lganlarichi?

20. Quyidagi raqamlardan ko'pi bilan bir martadan foydalanib nechta turli sonlar yozish mumkin:

A) 1, 2, 3. B) 2, 3, 4, 5. C) 3, 4, 5, 6, 7?

21. 20 kishini necha xil usul bilan juftliklarga ajratish mumkin?

22. 28 ta qalamni necha xil usul bilan 4 qutiga 7 tadan joylash mumkin? 7 qutiga 4 tadan joylansachi?

O'quvchilarning tafakkurini rivojlantiruvchi topshiriqlar

1. Ritsarlar va yolg'onchilar orolida. Sehrli orolda yashovchilarning har biri yoki ritsir yoki yolg'onchi. Ritsirlar faqat rost gapiradi, yolg'onchilar esa faqat yolg'on gapiradi.

1. Orolida yashovchi Ali shu orolda yashaydigan Valiga dedi: "Bizlardan kamida bittamiz yolg'onchi". Ali bilan Vali qanday odamlar?

2. Sizga orolda yashaydigan Ali va Vali duch kelishdi. Ali dedi: "bizlar ritsirmiz". Vali dedi "Mening yonimda turgan odam yolg'onchi bo'ladi". Ular kimlar?

3. Dasturxon atrofida bir nechta ritsarlar va yolg'onchilar o'tirishibdi. Ularning har biri o'zining yonidagi bilan bitta qabilada yashashini aytdi. Dasturxon atrofida o'tirganlardan nechitasi yolg'onchi bo'lishi mumkin?

4. Orolning bir nechta fuqorosi bir joyga to'planishdi va ularning har biri: "Sizlar hammangiz yolg'onchisizlar" – dedi. Yig'ilganlar orasida nechta ritsar bo'lgan?

5. Sobir boshlari chuvalashib qolgan ikkita ikki boshli ajdarlarga duch keldi. Ikki boshli ajdarlar rostchi (ikkala boshi ham faqat rost gapiradi) yoki yolg'onchi (ikkala boshi ham faqat yolg'on gapiradi) bo'ladi. Sobir ajdarlarga boshlarini ajratib olishlari uchun yordam bermoqchi bo'ldi. Buning uchun unga har boshning qaysi ajdraga tegishli ekanligini bilish zarur bo'ldi. U buni ajdarlardan so'raganda ajdarlar quyidagicha javob berdi:

birinchi bosh: men – rostchi kallaman;

ikkinchi bosh: uchunchi kalla – mening sherigim;

uchinchi bosh: ikkinchi kalla – mening sherigim

to'rtinchi bosh: uchunchi kalla – yolg'onchi.

Qaysi kalla qaysi bir ajdarga tegishli?

6. Orolga tashrif buyurgan donishman u erda Anvar bilan Sardorga duch keldi va ularning kim ekanligini bilmoqchi bo'ldi. U Anvardan "Sizlar ikkalangiz ham ritsarlarmisiz," - deb so'radi. Anvar javob berdi. Donishmand bu javobdan

ularning kim ekanliklarini anglay olmasligini angladi va "Sizlar bir toifadanmisizlar?" – deb so'radi. Yana Anvar javob berdi. Shundan keyin donishmand ularning qaysi toifadan ekanligini aniqlang.

7. Orolida yolg'onchilar past toifali, orolga chetdan kelgan sayyohlar (ular rost ham, yolg'on ham gapirishlari mumkin) o'rta toifali, ritsarlar esa oliy toifali deb hisoblanadi. a) A va B kishilar quyidagi gaplarni aytdilar:

A: mening toifam B nikidan past;

B: A yolg'on gapirdi.

A va B larning toifalarini aniqlash mumkin-mi? Bu gaplarning rost yoki yolg'on ekanligini aniqlab bo'ladmi?

b) A, B va C kishilardan biri past, ikkinchisi o'rta, uchinchisi oliy toifali. Ular quyidagi gaplarni aytishdi:

A: B ning toifasi C nikidan yuqori;

B: C ning toifasi A nikidan yuqori;

Shundan keyin A va B dan qaysi birining toifasi yuqori degan savolga S nima deb javob beradi?

8. Agar o'quvchi ko'p dars tayyorlasa, u imtixonni muvaffaqiyatli topshiradi. Sobir imtixonda 2 baho oldi. Bu uning kam dars tayyorlaganini bildiradimi?

9. Futbol bo'yicha respublika chempionatida "Darvoza" jamoasini birorta ham kuchli jamoa yuta olmadi, "Jarima" jamoasi esa "Darvoza" jamoasini yutdi. "Jarima" kuchli jamoa hisoblanadimi?

10. Bir mamlakatning aholisi haqida quyidagilar ma'lum:

a) ularning ayrimlari chiroyli yoza oladi;

b) shoirlarning hech biri chiroyli yoza olmaydi;

c) barcha

11.25 bokschilar she'r yozadi. Bu mamlakatga tashrif buyurgan Nasriddin afandi – "barcha aholi yoki shoir yoki bokschi", – dedi. Siz unga ishonasizmi?

2. Bo'rilar va quyonlar orolida. Sexrli orolda faqat bo'rilar va quyonlar yashaydi. Ular sexrli xislatlarga ega. Bo'rilar haftaning seshanba, chorshanba va payshanba kunlari faqat rost gapiradilar, qolgan kunlari esa faqat yolg'on gapiradilar. Quyonlar esa haftaning payshanba, juma va shanba kunlari faqat yolg'on, qolgan kunlari esa faqat rost gapiradi.

1. Bir kuni Afandi oroldagi daraxt soyasida dam olayotgan bo'ri va quyonga duch keldi. Ular quyidagi gaplarni aytdilar:

Bo'ri: kechadan oldingi kun men yolg'on gapirgan edim.

Quyon: shu kuni men ham yolg'on gapirgan edim.

Bu voqea haftaning qaysi kuni ro'y bergan?

2. Boshqa bir kuni Afandi orolda bitta bo'riga duch keldi. Bo'ri unga ikkita gap aytdi: a) Kecha men yolg'on gapirgan edim. b) Ertadan keyin men ketma – ket ikki kun yolg'on gapiraman. Bu uchrashuv haftaning qaysi kuni ro'y bergan?

3. Haftaning qaysi kunlari quyon quyidagi gaplarni aytishi mumkin:

a) Kechadan oldingi kun men yolg'on gapirdim;

b) Men ertadan keyin yohon gapiraman?

4. Haftaning qaysi kunlari bo'ri quyidagi gaplarni aytishi mumkin: "Men kechadan oldingi kun yolg'on gapirgan edim, ertadan keyin ham yolg'on gapiraman"

5. "Bugun haftaning qaysi kuni?"- degan savolga bo'ri "juma"- deb, quyon esa "shanba"- deb javob berdi. Bu haftaning qaysi kuni ro'y bergan?

6. "Bugun haftaning qaysi kuni?" - degan savolga bo'ri ham quyon ham "juma" yoki "seshanba" deb javob berdi. Bu haftaning qaysi kuni ro'y bergan?

Dirixle printsiipi

1. Matematiklar davlatida 15 ta shahar bor. Ulardan ba'zilari yo'llar bilan tutashtirilgan. Qandaydir ikkita shahardan bir xil sondagi yo'llar orqali chiqish mumkinligini isbotlang.

2. O'n beshta o'rtoq uchrashib qolib, qo'l berib so'rasha boshlashdi. Ixtiyoriy vaqtda bir xil sonda qo'l berib ko'rishgan ikkita o'rtoq topilishini isbotlang.

3. Maktabda 30 ta sinf va 1000 ta o'quvchi bor. O'quvchilari a) 34 tadan kam bo'lmagan; b) 33 tadan ko'p bo'lmagan sinf topilishini isbotlang.

4. a) Kafeda muzqaymoqning 4 xili sotiladi. 47 kishining har biri bittada muzqaymoq sotib olidi. O'n ikkitadan kam bo'lmagan odam bir xil muzqaymoq tanlanganini isbotlang. b) Kafeda muzqaymoqning 4 turi sotiladi. 47 kishining har biri 2 tadan muzqaymoq sotib oldi (bir hil bo'lishi ham mumkin). Bir xildagi haridni amalga oshirgan to'rt kishi topilishini isbotlang.

5. a) Bayramga kuni sinf xonasi turli rangdagi 50 ta havo sharlari bilan bezatildi. Ular orasida 8 ta bir xil rangdagi yoki 8 ta turli xil rangdagi sharlar topilishini isbotlang.

b) Agar 50 ni 49 ga almashtirsak, tasdiq to'g'riligicha qoladimi?

c) Yuqoridagi kabi masalani o'ngacha bir xil rangdagi yoki 10 ta turli xil rangdagi sharlar topiladigan qilib tuzing.

d) 200 ta shar uchun yuqoridagi kabi masala tuzing.

6. O'lchamlari 3×3 bo'lgan jadvalning har bir katagiga 1, 2 yoki 3 sonlari yozilgan. Hamma satrlar, hamma ustunlar va katta diagonallardagi sonlarning yig'indisi har xil bo'lishi mumkin-mi?

7. Shaxmat taxtasida bir-birini urmaydigan qilib, nechta a) ruh; b) shoh; c) ot; d) fillarni joylashtirish mumkin?

8. Dengiz jangi o'lchami 6×6 bo'lgan doskada uch katakli burchak shaklida kema joylashgan. Eng kami bilan necha marta o'q otib, kemaga tekazish mumkin?

9. Tomoni 1 m bo'lgan kvadrat shaklidagi qog'ozda 51 ta kichik teshik ochilgan. a) Tomoni 20 sm bo'lgan kvadrat shaklidagi qog'oz bo'lagi yordamida kamida uchta teshikni yopish mumkinligini isbotlang. b) Tomoni 50 sm kvadrat shaklida bo'lgan qog'oz bo'lagi bilan nechta teshikni yopish mumkin? c) berilgan

qog'oz bo'lagida radiusi 12,5 sm bo'lgan, birorta ham teshikni o'z ichiga olmagan doira borligini isbotlang.

10. Doira shaklidagi katta stol atrofida 100 kishi o'tiribdi, shulardan 51 tasi erkak kishi. Qaysidir 2 ta erkak kishi bir-biriga qarama-qarshi o'tirganini isbotlang.

11. Sinfda 26 o'quvchi o'qiydi. Chorak davomida sinf o'quvchilari matematikadan 313 baho to'plashdi. Bir xilda baho to'plagan ikkita o'quvchi borligini isbotlang.

12. 1, 2, ..., 9 sonlar uch guruxga ajratildi. Hech bo'lmaganda bitta guruxdagi sonlar ko'paytmasi a) 72 dan kichik; b) 72 dan kichik emasligini isbotlang. 3371123...972<....<

13. Sayyoramizdagi ikkita odam bir kunda, bir sekunda tug'ilganini isbotlang. Uchta odam haqida nima deyish mumkin?

14. Qirol oy davomida har kuni shirinlik sifatida pirojniyning ikki turini buyurdi. Agar qaysidir ikki kunda shirinliklar bir xil bo'lib qolsa, oshpazning boshi ketadi. Oshpaz boshi ketmasligi uchun pirojniyning necha xilini pishirishni bilishi kerak?

Aralash masalalar

1. Qiz bola o'zining ismidagi har bir harf o'rniga uning alifbodagi tartib raqamini qo'ydi va 1114111 sonini hosil qildi. Qizning ismi nima.

2. **+***=**** rebusni qo'shiluvchilarini o'ngdan chapga qarab o'qilganda o'zgarmasligini bilgan holda yeching.

3. Rasmdagi kvadrat kataklariga 1 dan 9 gacha bo'lgan sonlarni tomonlari bo'yicha qo'shni kataklardagi sonlarning farqi 3 dan kam bo'lmaydigan qilib joylang.

4. Quyidagi $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2002 \cdot 2003 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2003$ ayirma qanday raqam bilan tugaydi.

5. Idishda oq va qora sharlar bor. Undan bitta qora shar olsak, idishdagi oq va qora sharlar soni teng bo'ladi. Bitta oq sharni olsak, qora sharlardan ikki marta kam oq sharlar qoladi. Idishda nechta oq va nechta qora shar bor?

6. Ikki bog'lamda 30 ta daftar bor. Agar birinchi bog'lamdan ikkinchisiga 2 ta daftar olib qo'shilsa, birinchi bog'lamda ikkinchi bog'lamdagidan ikki marta ko'p daftar qoladi. Birinchi bog'lamda nechta daftar bo'lgan?

7. Bir quti rangli qalam sotib olish uchun Karimga 700 so'm, Salimga 200 so'm etmaydi. Ular pullarini qo'shsalar ham, bir quti rangli qalam sotib olishga etmaydi. Rangli qalam qanga turadi?

8. Qutida 7 ta qizil va 5 ta yashil qalamlar bor. Qaramasdan tavakkaliga qalamlar olinadi. Olingan qalamlar orasida ikkitadan kam bo'lmagan qizil va uchtadan kam bo'lmagan yashil qalamlar bo'lishi uchun nechta qalam olish kerak?

9. Qorong'i xonada 10 juft qora va 10 juft oq etiklar bor. Xonadan hech bo'lmaganda bir juft (o'ng va chap oyoq etiklari) bir xil rangdagi etiklar olib chiqish uchun eng kamida nechta etik olib chiqish kerak (Qorong'ida etiklarning nafaqat rangini, poylarini ham farqlab bo'lmaydi deb hisoblang)?

10. Qanday qilib, o'lchov asboblardan foydalanmasdan, 23 metr atlasdan 12 metr qirqib olish mumkin?

11. Dehqon polizdan bodring terib oldi. Uzgan bodringlarini o'nta-dan guruhlaganda, oxirgi guruxga 2 ta bodring etmaydi. O'n ikkitadan guruhlasa, 8 ta bodring ortib qoldi. Agar terilgan bodringlar soni 300 dan katta, lekin 400 dan kichik bo'lsa, ular soni nechta?

12. Dilmurod bitta son o'yladi. O'ylagan soniga 5 ni qo'shib, yig'indisini 3 ga bo'ldi, so'ngra natijani 4 ga ko'paytirib, ko'paytmadan 6 ni ayirdi. Ayirmani 7 ga bo'lib, 2 sonini hosil qildi. Dilmurod qanday son o'ylagan?

13. Ona stolga pechenielarni qo'yib, o'g'illariga maktabdan qaytgach pechenielarni teng bo'lib olishlarini tayinladi. Birinchi bo'lib maktabdan Anvar qaytdi. U pechenielarni uchdan birini olib ketdi. Keyin Sarvar qaytdi, u stolda

turgan pechenielarning uchdan birini olib ketdi. Oxirgi bo'lib Sardor qaytdi va qolgan pechenielarning uchdan birini oldi. Agar Sardor 4 ta pecheniye olgan bo'lsa, stol ustida dastlab nechta pecheniye bo'lgan?

14. Dehqon sotish uchun bozorga karam olib chiqdi. Birinchi xaridorga barcha karamlarning yarmini va yana yarimta qaram sotdi. Ikkinchisiga esa qolgan karamlarning yarmini va yana yarimta karam sotdi va hokazo. Oxirgi – oltinchi haridorga ham qolgan karamlarning yarmini va yana yarimta karam sotdi. Shundan so'ng uning karamlari tugadi. Dehqon bozorga nechta karam olib chiqqan?

15. Son 7 ga kamaytirildi, so'ngra natijani 10 marta kamaytirildi. Natijada dastlabki sondan 34 ga kam son hosil bo'lgan bo'lsa, dastlabki sonni toping.

16. Sonni 52 ga ko'paytirib, natijani 5 ga bo'lsak, berilgan sondan 1974 ga ortiq bo'lgan son hosil bo'ldi. Berilgan sonni toping.

17. Sinfdagi o'quvchilar "ikkichilar" va "a'lochilar"dan iborat. "Ikkichilar" sinfdagi "a'lochilar"ning 16 qismini tashkil etadi. Agar sinfdan bir o'quvchi ketganidan so'ng "ikkichilar" "a'lochilar"ning 15qismini tashkil qilgan bo'lsa, sinfda nechta o'quvchi bo'lgan?

18. To'rtta o'rtoq birgalikda koptok sotib olishdi. Birinchisi qolgan sheriklari qo'shgan jami pulning yarmini, ikkinchisi, uchdan birini, uchinchisi to'rttdan birini va to'rtinchisi 130 so'm qo'shgan bo'lsa, koptok qancha turadi?

19. Yig'indisi ayirmasidan uch marta katta, ko'paytmasidan esa ikki marta kichik bo'lgan ikkita soni toping.

20. Ikkita soni yig'indisi 180 ga, kattasini kichigiga bo'lgandagi bo'linma 5 ga teng. Bu sonlarni toping.

21. Agar bir sonni ikkinchisiga bo'lgandagi bo'linma bu sonlarning kattasidan ikki marta kichik, kichigidan olti marta katta bo'lsa, bo'linmani toping.

22. Soatning soat va minut millari bir kunda necha marta a) ustma-ust tushadi; b) yoyiq burchak hosil qiladi; c) to'g'ri burchak hosil qiladi.

23. Idishda 10 litrdan ko'p suv bor. Undan 9 litrlik va 5 litrlik idishlar yordamida 6 litr suv olish mumkin-mi?

24. Sig'imi 8 litr bo'lgan idish sut bilan to'ldirilgan. 3 litrlik va 5 litrlik bidonlar yordamida 4 litr sutni ajratib oling.

25. Sig'imi 12 litr bo'lgan idish kerosin bilan to'ldirilgan. 5 litrlik va 8 litrlik idishlar yordamida uni teng ikki qismga bo'ling.

26. Idishda 13 litrdan kam bo'lmagan miqdorda benzin bor. Undan 9 litrlik va 5 litrlik idishlar yordamida qanday qilib 8 litrlik benzin olish mumkin.

27. Otaning yoshi qizi va o'g'ilining yoshlari yig'indisiga teng. O'g'li singlisidan 2 yosh katta va otasidan 20 yosh kichkina bo'lsa, ularning har biri necha yoshda?

28. Hozir Eshmat 11 yoshda, Toshmat 1 yoshda. Eshmat Toshmatdan 2 marta katta bo'lganda, ularning har biri necha yoshda bo'ladi?

29. Otasi o'g'lidan 4 marta katta. Yana 20 yildan so'ng otasi o'g'lidan 2 marta katta bo'ladi. Hozir otaning yoshi nechada?

30. Otasi o'g'lidan 4 marta katta, ularning yoshlarini yig'indisi 50 ga teng. Necha yildan keyin ota o'g'lidan 2 marta katta bo'ladi.

31. Tramvayga ikkinchi bekatdan yo'lovchilar chiqdi va ularning yarmi o'rindiqlarni band etdi. Agar bu bekatdan keyin yo'lovchilar soni 8% ga ortgan bo'lsa va tramvayga 70 dan ortiq odam sig'masligi ma'lum bo'lsa, ikkinchi bekatda nechta odam chiqqan?

32. Dengiz suvida 5% tuz bor. 40 kg dengiz suvida necha kg toza suv qo'shsak, hosil bo'lgan suvdagi tuzning miqdori 2%bo'ladi.

33. Noqulay ob havo tufayli kartoshkaning bahosi 20% ga ko'tarildi. Oradan biroz vaqt o'tgach uning narxi 20% ga arzonladi. Kartoshkaning oxirgi narxi dastlabki narxidan arzonmi yoki qimmat? Necha foizga?

34. Ikkita o'quvchi bir vaqtda bitta uydin bitta maktabga qarab yo'lga chiqdilar. Ulardan birining qadami, ikkinchisidan 20% qisqa, lekin bu o'quvchi ikkinchisiga qaraganda bir xil vaqt oralig'ida 20% ko'p qadam tashlaydi. Maktabga qaysi o'quvchi oldin etib keladi?

35. Stadionga kirish uchun chipta narxi 200 so'm. Chipta narxi arzonlashganidan keyin tomashabinlar soni 25% ga, pul tushumi esa 12,5% ga ortdi. Arzonlashgandan so'ng chipta narxi necha so'm bo'lgan?

36. Avtomobil shahardan qishloqqa 50 km/soat tezlik bilan, qaytishda esa 30 km/soat tezlik bilan harakat qildi. Uning butun yo'l davomidagi o'rtacha tezligini toping.

37. Ikkita yuk mashinasi A dan B ga bir vaqtda yo'lga chiqdi. Birinchisi butun yo'lga sarflagan vaqtining yarmida 50 km/soat tezlik bilan, qolgan vaqtda 40 km/soat tezlik bilan harakatlandi. Ikkinchi yuk mashinasi esa yo'lning birinchi yarmini 40 km/soat tezlik bilan, ikkinchi yarmini esa 50 km/soat tezlik bilan bosib o'tdi. Qaysi mashina B ga oldin etib boradi.

38. Poezd uzunligi 450 m bo'lgan ko'prikdin 45 sekundda, simyog'och yonidan esa 15 sekundda o'tadi. Poezdning tezligi va uzunligini toping.

39. Kema A shahardan B ga 5 kunda, teskariyiga esa 7 kunda keladi. A shahardan B ga sol necha kunda keladi?

40. Velosipedchi yo'lning $\frac{5}{7}$ qismini va yana 40 km o'tgandan keyin, butun yo'lning 0,75 qismidan 118 km kam masofa qoldi. Velosipedchi yo'lining uzunligini toping.

41. Suzuvchi anhora oqimga qarshi suzmoqda. Suzuvchi anhor ko'priki ostida turib yog'ichni qo'yib yubordi va o'zi yana 20 minut oqimga qarshi so'zdi. Keyin yog'ichni quvib etish uchun orqaga qarab suzdi. Agar suzuvchi yog'ichni quvib etish uchun 2 km suzgan bo'lsa, anhor oqimining tezligini toping.

42. Shaxmat taxtasining a1 katagida turgan ot har bir katakka bir martadan yurib, oxirida h8 katagiga kelishi mumkinmi?

43. Bir nechta o'g'il bolalar va qiz bolalar dasturxon atrofiga o'tirishdi. O'g'il bola va qiz bola yonma-yon o'tirgan juftliklarning soni juft ekanligini isbotlang.

44. Aylana bo'ylab bir nechta sonlar yozildi va yonma-yon joylashgan sonlarning ko'paytmalari hisoblanadi. Natijada ko'paytmalardan 5 tasi manfiy ekanligi ma'lum bo'ldi. Dastlabki sonlardan kamida bittasining nolga tengligini ko'rsating.

45. Eshmat bilan Toshmat quyidagicha o'yin o'ynamoqda: navbat bilan butun musbat sonlarni aytishadi. Eshmat 10 dan oshmaydigan butun musbat sonlarni aytadi, Toshmat esa Eshmat aytgandan katta ammo orasidagi farq 10 dan oshmagan sonlarni aytishi kerak, O'yin shunday davom etadi. Kim 100 sonini aytsa, shu o'yinchi yutadi. O'yinda yutishi uchun Eshmat qanday yo'l tutishi kerak?

46. Agar quyidagi 3 ta tasdiqdan ikkitasi to'g'ri, bittasi noto'g'ri bo'lsa, A sonni toping:

1) $51A +$ - to'la kvadrat;

2) A ning oxirgi raqami to'la kvadrat;

3) $38A -$ - to'la kvadrat.

47. Quyidagi 4 ta shartlardan 2 tasi to'g'ri va 2 tasi noto'g'ri bo'ladigan barcha ikki xonali A sonlarni toping:

1) A soni 5 ga bo'linadi;

2) A soni 23 ga bo'linadi;

3) $7A +$ - to'la kvadrat;

4) $10A -$ - to'la kvadrat.

11 §. Tarbirkorlik masalalarida matematikadan foydalanish

Tayanch iboralar: kvadrat tenglama, miqdor, omonat, baholash, tovar, foyda

Biz ilg'or ilm-fan yutuqlariga asoslangan kichik biznes va xususiy tadbirkorlikni rivojlantirishga keng yo'l ochib berishimiz zarur, -deb ta'kidlab o'tgan edi, prezident. Yosh avlodni boshqa sohalar qatori biznes, tadbirkorlik yo'nalishida mutaxassis qilib etishtirishda matematika fanini o'qitishning ahamiyati katta. Matematikani chuqur o'rgangan talabani mantiqiy fikrlashi, aqliy rivojlanishi kuchli bo'lishi asrlar davomida isbotlanib kelingan.

Respublikamizda mavjud kasb-hunar kollejlari orasida iqtisodiyot, bank, engil sanoat, biznes tadbirkorlik sohaları bo'yicha faoliyat ko'rsatib kelayotgan o'quv dargohlari talaygina. Ulardan matematikani o'qitishda o'sha sohaga mos holda misol-masalalar echilsa, talaba masalaning tub mohiyatiga borib etadi, masalaning maqsadi va echimi quruq gap emasligini angelaydi, o'sha sohaning mutaxassisi bo'lishiga qiziqishi ortadi.

Maqolada echiladigan masalalar 8-sinfda o'tiladigan kvadrat tenglamalarni o'rgangandan keyin echilsa, kvadrat tenglamalarning tadbirkorlik masalalaridagi tadbirlari ko'rinadi.

Ushbu maqolada ilg'or pedtexnologiyani ijodiy-qidiruv usuli asosida tadbirkorlik yo'nalishi bilan bog'liq masalalarning echish usullari ustida to'xtalib o'tiladi, zero undan matematika fani o'qituvchilari o'z faoliyatlarida foydalanish imkoniyatlariga ega bo'lishlari tabiiy.

1-masala. Tadbirkor omonat kassaga 1640 so'm qo'yib, yil oxirida 882 so'm oladi. Bir yildan keyin qarasa omonat daftarchasiga 882 so'm yozilibdi. Omonat kassa bir yilda necha foiz pul o'tkazgan?

Yechish: O'qituvchi: Aytingchi, biror a sonining p protsenti bo'lgan b soni qanday topiladi?

O'quvchi: a sonini p ga ko'paytirib 100 ga bo'lish kerak.

$$b = \frac{a \cdot p}{100}.$$

O'qituvchi: To'g'ri, bizning masalamizda nima aniq, nimani topish kerak?

O'quvchi: $a=1640$ bo'lib, p ni topish talab qilinadi.

O'qituvchi: Masala sharti bo'yicha hosil bo'ladigan ifodani yozamiz.

$$1640 + \frac{1640}{100} \cdot p = 1640 \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Endi hosil bo'lgan ifodadan 882 ni ayirib, qolgan pul miqdorini yozing.

$$O'quvchi: 1640 - 882 + \frac{1640}{100} \cdot p = 758 + \frac{1640}{100}.$$

Endi qolgan pulning yil oxirida qancha bo'lganini aniqlang.

$$O'quvchi: \left(758 + \frac{1640}{100} \cdot p \right) \frac{p}{100} \text{ so'm bo'ladi.}$$

O'qituvchi: Bu pul miqdori bilan oldingi pul miqdorini qo'shsak, 882 so'm bo'lishi kerak, ya'ni,

$$758 + \frac{1640}{100} \cdot p + \left(758 + \frac{1640}{100} \cdot p \right) \frac{p}{100} = 882.$$

Qavslarni ochib, uni soddalashtirsak

$$41x^2 + 5995x - 31000 = 0$$

kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Endi sizlar bu tenglamaning ildizlarini topinglar.

O'quvchi: Bitta ildizi $x_1 = 5$, ikkinchisi manfiy son. U masala shartini qanoatlantirmaydi.

O'qituvchi: Demak, omonat kassa tadbirkor uchun 5 foiz pul o'tkazgan ekan.

2-masala. Ikki xil tovarlar mos ravishda 22,5 va 32 ming so'mdan sotib olindi. Ikkinchi xil tovar birinchi xil tovarga nisbatan 15 kg. ko'p. Agar ikkinchi xil tovarning bahosi birinchi xil tovar bahosidan 100 so'm arzon bo'lsa, necha kilogrammdan tovar sotib olingan?

Yechish. O'qituvchi: Agar biz birinchi xil tovar maqdori x bilan belgilasak, 1 kg. tovarning bahosi qancha bo'ladi?

O'quvchi: Tovar narxini tovar miqdoriga bo'lsak, 1 kg. tovar bahosi kelib chiqadi, ya'ni birinchi xil tovarning 1 kg. bahosi $\frac{22,5}{x}$ ming so'mni beradi.

O'qituvchi: Ikkinchi xil tovarning 1 kg baxosini toping.

O'quvchi: Bu $\frac{32}{x+15}$ ming so'mdan iborat.

O'qituvchi: Masala shartiga asosan tenglama tuzamiz.

$$\frac{32}{x+15} + 0,1 = \frac{22,5}{x}$$

Uni umumiy maxrajga keltirib soddalashtiringlar.

O'quvchi: $\frac{32}{x+15} + \frac{1}{10} = \frac{22,5}{x}$

$$32 \cdot 10x + x(x+15) = 225(x+15)$$

$$x^2 + 110x - 3375 = 0$$

Bu tenglamaning echimi $x_1 = 25$ -birinchi xil tovarning miqdori 25 kg. ikkinchi xil tovarning miqdori esa $x = 25 + 15 = 40$ kg. ni tashkil qilar ekan.

3-masala. Ikki qismdan iborat bo'lgan 5000 so'm pul ma'lum muddatga yiliga 3 foiz oshirish sharti bilan omonat kassaga qo'yildi. Har bir qism pulning keltiradigan foydasi 60 so'mni tashkil etadi. Agar pulning birinchi qismi ikkinchi qismiga qaraganda 4 oy keyin qo'yilgan bo'lsa, pul miqdorlarini va qancha muddatga qo'yilganini aniqlang.

Yechish. O'qituvchi: Faraz qilaylik, birinchi qism pul miqdorini bilan belgilasak, ikkinchi qism pul maqdori u qanday aniqlanadi?

O'quvchi: Besh ming so'mdan ni ayirish kerak, ya'ni $y = 5000 - x$.

O'qituvchi: Birinchi qism pulning t_1 oydagi foydasi

$$3 \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{t_1}{12} = 60$$

so'mni tashkil etadi. Bundan

$$t_1 = \frac{24000}{x}$$

hosil bo'ladi. Sizlar ikkinchi qism pul miqdorining t_2 oydagi foydasini yozinglar.

O'quvchi: $3 \cdot \frac{y}{100} \cdot \frac{t_2 + 4}{12} = 60$

O'qituvchi: Buni soddalashtirib, uni $5000 - x$ bilan almashtirib, t_2 ni topinglar.

O'quvchi: $t_2 = \frac{4000 + 4x}{5000 - x}$

O'qituvchi: Endi t_1 ni t_2 ga tenglashtiringlar.

$$\frac{24000}{x} = \frac{4000 + 4x}{5000 - x}$$

Bu ifodani umumiy maxrajga keltirib, soddalashtiring.

O'quvchi: Tenglikning ikkala tomonini 4 ga qisqartiramiz:

$$\frac{6000}{x} = \frac{1000 + x}{5000 - x}$$

$$6000(5000 - x) = (1000 + x)x$$

yoki, $x^2 - 70000x - 30000000 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni echsak, $x_1 = 3000$ so'm, $y = 2000$ ekanligi ayon bo'ladi, muddatlar esa $t_1 = 8$, $t_2 = 12$ oylardan tashkil topgan ekan.

4-masala. Omonat kassaga qo'yilgan 100 so'm pul ketma-ket bir xil foiz bo'yicha oshganda 125 so'm 44 tiyin bo'ldi. Qo'yilgan pul necha foiz oshgan?

Yechish. O'qituvchi: Izlanayotgan foiz miqdorini bilan belgilaylik. Pul birinchi marotaba oshganda necha so'm bo'ladi?

O'quvchi: $x + 100$ so'm bo'ladi.

O'qituvchi: Ikkinchi marotaba oshsachi?

O'quvchi: $\frac{x+100}{100} \cdot x$ so'm bo'ladi.

O'qituvchi: Masala shartiga asosan $x + 100 + \frac{x+100}{100}x = 125,44$ bo'lishi kerak.

Umumiy maxrajga keltirib soddalashtiringlar.

O'quvchi:

$$x^2 + 200x - 2544 = 0$$

kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni echib $x+12$ ga, ya'ni pulning 12 foiz oshganligini aniqlaymiz.

5-masala. Tadbirkor 200 ming so'mga bir tup movut oldi. Uning 5 metri sotilmay, qolganlari 190 ming so'mga sotildi. Har bir metr movut uchun tadbirkor 1,5 ming so'm foyda ko'rdi. To'pda necha metr movut bo'lgan?

Yechish. O'qituvchi: To'pdagi movut x metr bo'lsin. Sizlar bir metr movut narxini aniqlang.

O'quvchi: 200 ming so'mni x ga bo'lsak, bir metr movut narxi kelib chiqadi, ya'ni, $\frac{200}{x}$ ming so'm. Bunga 1,5 ming so'm qo'shilsa, movutning sotish narxi hosil bo'ladi, ya'ni $\frac{200}{x} + 1,5$.

O'qituvchi: Masala shartiga asosan 5 metr movut sotilmay qoldi, ya'ni $x-5$ metri sotilgan.

$$\left(\frac{200}{x} + 1,5\right)(x-5) = 190$$

tenglama masala shartini qanoatlantiradi. Uni soddalashtirib

$$3x^2 + 5x - 2000 = 0$$

tenglamaga kelamiz va $x = 25$ metr movut borligini aniqlaymiz.

6-masala. Kooperativ a'zolari 900 000 000 so'mga moshina sotib olishi uchun har bir a'zo bir hil miqdorda pul yig'ishi kerak edi. Pul yig'ishdan oldin, qandaydir sabablarga ko'ra 2 kishi o'yindan chiqib ketdi. Qolgan a'zolar ko'zlangan pulni yig'ish uchun yana 50 000 so'mdan qo'shimcha pul to'ladilar. Kooperativ a'zolarinig necha kishi ekanligini aniqlang.

Yechish. O'qituvchi: Sizlar kooperativ a'zolaridan bittasining beradigan pul miqdorini aniqlang?

O'quvchi: Faraz qilaylik, kooperativ a'zolarining avvalgi soni bo'lsin. U holda kooperativ a'zolarining bittasining beradigan puli

$$\frac{900000000}{x}$$

so'mni tashkil etadi. Ikki kishi ketgandan keyin bu miqdor

$$\frac{900000000}{x-2}$$

so'mdan iborat bo'ladi. Masala shartiga asosan

$$\frac{900000000}{x} + 50000 = \frac{900000000}{x-2}$$

tenglik bajariladi. Uni soddalashtirsak

$$x^2 - 2x - 300 = 0$$

kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Uni echimlari $x_1 = 20$, $x_2 = -18$.

Demak, a'zolar soni 20 kishini tashkil qilar ekan.

7-masala. Foyda topish maqsadida ikki tadbirkor 60 va 40 mln. so'mdan pulni jamg'arma bankga qo'yishdi. Birinchi tadbirkor 2 oydan keyin qo'ygan pulni qaytarib oldi. Yana ikki oy o'tgach, ular 33,81 mln. so'mdan iborat foydani bo'lib olishdi. Foydaning oylik protsentini hisoblang.

Yechish. Faraz qilaylik 2 oyda qo'yilgan pul x marta oshsin. U holda ikki tadbirkor qo'ygan puldan tushgan foyda

$$(60x - 60)x + 40x^2 - 40 = 33,81$$

so'mdan iborat bo'ladi. Bundan

$$80x^2 - 60x - 73,81 = 0$$

bo'lib, $x = 1,21$ ni aniqlaymiz.

Ma'lumki, bir oyda tushgan daromad n marta oshsa, 2 oyda n^2 marta oshadi.

Demak, bir oyda $\sqrt{x} = \sqrt{1,21} = 1,1$ marta, ya'ni foyda 10% ni tashkil etar ekan.

Javoblar

Arifmetika

1. 7 va 9 dan boshqasini mumkin.
2. a) (; b) 11111):1-(5)(19)(28)(37)(64):+++++.
4. 72.
5. 28.
6. a) 9876543210; b) 9876543120.
7. a) 1023467895; b) 1234567980.
8. a) .41218:(63):++
9. $888+88+8+8+8$.
12. 35.
13. 432.
14. 18.
16. 0 va 8 yoki 8 va 0.
17. a) 123456; b) 99999785960.
19. 55.
20. Ha.
21. a) 18 ta; b) 36 ta; v) 45 ta.
22. a) 9; b) 20.
23. 10.
24. 3087.
25. 470.
26. 2 ta.
27. 3150, 6150, 9150, 1155, 7155, 4155.
33. 64 kg mixni tarozi pallalariga teng qilib taqsimlab 32 kg mixni, keyin shu yösinda 16 kg, 8 kg, 4 kg, 2 kg va 1 kg mixni ajratib olamiz. $23=16+4+2+1$.
38. a) 111236++; b) 111124612+++.

Mumkin yoki mumkin emas

1. Mumkin. Masalan, har biri 0,01 ga teng бўлган 501 ta sonni qarang.

2. a) Mumkin emas; b) Mumkin.
6. Ha. Masalan, bugun 1 yanvar bo'lsa.
7. Yöq.
8. Ha. Fevral oyida 28 kun бўlsa.
9. Yöq. Jadvaldagi barcha sonlar yig'indisini ikki usulda hisoblang.
10. Ha. Masalan, jadvalda 101 ta satr va 4 ta ustun бўlsa, har bir katakka 1 sonini yozing.
11. a) Yöq; b) Ha.
12. Ha.
13. Ha.
16. a) Ha; b) Yöq.
17. Yöq. 3 ga бўlgandagi qoldiqlarni qarang.
18. Ha; yöq.
19. Ha. Masalan, 1 km .810– km ölçhamli tórtburchak.
20. Ha.
21. Ha.
22. Ha.
24. Ha. Birinchi shnurni ikkala uchini va ikkinchi shnurni bitta uchini bir vaqtda yondiramiz. Birinchi shnur yonib tugagandan keyin, ikkinchi shurning ikkinchi uchini ham yondiramiz. Bu shnur yonib tugaganda 45 sekund ötgan бўлади.

Qoldiqli bo'lish. Qoldiqlarning hossalari

5. 0 yoki 1.
6. Yöq. Hosil бўlgan sonni 3 ga бўlganda 2 qoldiq qoladi. Oldingi masalaga qarang.
7. Qoldiqlar böyicha tekshiring.
9. a) Yöq; b) Ha.

11. 2 ga, 3 ga, 4 ga, 5 ga, 6 ga bōlganda 1 qoldiq qoladigan sonlar $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot k + 1$ kōrinishda bōladi. Bunday kōrinishdagi sonlardan 7 ga karalilarini topish uchun $60k + 1 = 7t$ tenglamaning natural echimlarini topish kerak. Javob: 721. (eNE

13. a) raqamlar 8 ta bōlgani uchun dirixle printsiptiga kōra bir xil raqam bilan tugaydigan ikkita son bor; b) sonni 7 ga bōlganda qoldiqlar 0 dan 6 gacha Dirixle printsiptiga kōra, 7 ga bōlganda bir xil qoldiq qoladigan 2 son topiladi.

14. Ha, chunki sonning kvadratini 9 ga bōlganda qoldiqda faqat 0, 1, 4, yoki 7 qolishi mumkin.

Juft va toq sonlar

1. Yōq.

2. Dastlab chigirtka son 8 qining koordinata boshida turgan deb qarang.

3. Boshida (0;0) nuqtada bōlgan shilliqurt koordinata tekisligida 30 minutda 1 birlik masofaga yuradi deb qarang va har 30 minutdan keyin shilliqurt joylashgan nuqta koordinatalari yig'indisini juft-toqligiga e'tibor bering.

4. Bitta shashka 8-8 ziga simmetrik ekanligidan foydalaning.

5. Sobir shesternani aylantira olmaydi. Chunki yonma-yon joylashgan shesternalar harakatlarining yōnalishlari qarama-qarshi bōladi.

6. Yōq.

7. Mumkin emas. Jasur bitta tōpni tepgandan keyin tōplarning joylashish tartibi 8 zgaradi.

8. Mumkin emas. Toq sondagi mevasi bor daraxtlar soni 4 ta.

9. Yōq. Bitta paladagi toshlar og'irligi toq, ikkinchi palladagi toshlar og'irligi esa juft son bilan ifodalanadi.

10. Bunday kōpaytuvchilar yo 1, yoki -1 bōlib, -1 lar soni juft.

11. -23.

12. Ikkala tomoniga ham toq son yozilgan qog'oz bōlagi topiladi.

13. a) Toq sonlar soni juft bōladigan qilib bitta son 8 chiriladi. b) Yōq. Masalan, sonlarning har biri toq bōlsa.

14. a) Yōq, chunki ohirida toq son hosil bōladi; b) Ha.

15. a) Yōq; b) Ha.

16. Yōq. Biror bōlakni 3 ta yoki 5 ta bōlakka bōlsak, bōlaklar soni 2 ta yoki 4 taga, ya'ni juft songa ortadi.

17. a) Mumkin; b) Mumkin emas. Har bir qadamdan keyin doskadagi toq sonlar soni yo 8 zgaraydi, yo 2 ga 8 zgaradi.

18. Ketma-ket kelgan 50 ta natural sonning yig'indisi 2008 bōla olmaydi.

19. 25 sōmlik.

20. Qolgan tangalarni tarozi pallalariga 50 tadan joylaydi. Agar tarozi juft son kōrsatsa, Sitoradagi tanga haqiqiy, aks holda qalbaki bōladi.

21. Yōq. Bolalarning joylashish tartibi 15 (toq son) marta 8 zgaradi.

Kombinatorika

1. 6 ta.

2. a) 60 xil; b) 15 xil; c) 60 xil; d) 180 xil; f) 1. 24 xil; 2. 47 xil; 3. 36 xil; 4. 1 xil.

3. a); b); v); 65655109.

4. 29!

7. 6 ta.

8. a) 16 ta; b) 33 ta; s) 17 ta; d) 67 ta; e) 33 ta.

9. 228,14mm

10. 75 kishi bōlgan.

11. a) 28 ta

12. a) 45; b) 24; c) 3.

13. 21 ta

14. 3- rōyxat eng uzun, 2- va 3-.

15. usulda. 88

16. a) 7!; b) p!

17. a) $132 = 11 \cdot 12$; b) $11 \cdot 12 : 2 = 66$.

18. a) 45 ta; b) 36 ta

20. a) 15; b) 76.

21. 190 xil.

22. .7772821147SSSS...

Sehrli orollar

1. Ritsarlar va yolg'onchilar orolida.

2. Ali ritsar emas, aks holda Vali yolg'onchi b'lar edi. Bu esa Alining ritsarligiga zid. Vali ritsar.

4. Bitta.

Dirixle printsipi

6. Y'q.

7. a) 8 ta; b) 16 ta; g) 8 ta.

8. 18 marta. Bir xil rangdagi kataklarga otish kerak.

10. Teskari faraz qilish kerak.

12. ekanligidan foydalaning. $371123...972 < \dots <$

13. Bir yilda sekundlar soni odamlar sonidan kichik.

14. 9 xil.

Aralash masalalar

1. Lola.

4. 5 raqami.

5. 3 ta oq, 4 ta qora.

6. 22 ta.

42. Mumkin emas. Chunki bu ot toq yurishlardan keyin oq rangli katakda, juft yurishlardan keyin esa qora rangli katakda b'lad. A1 (qora) katakdan h8 (qora) katakka (masala) shartida aytilgandek qoida bilan borish uchun 63 ta yurish bajarish kerak.

44. Agar dastlabki sonlar orasida nol bo'lmasa manfiy va musbat sonlar yonma-yon joylashgan juftliklar soni juft bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Sh.Alimov va boshqalar «Algebra» 9 sinf, «Algebra va analiz asoslari» 10-11 sinf, Toshkent-1997.

2. UUTning DTS va o'quv dasturi. // Ta'lim taraqqiyoti O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligining Axborotnomasi 4-makbul son. Toshkent. 1999 yil.

3. R.Drayver Nega matematika? Toshkent 1989 yil. 276 b.

4. Davlat test markazi Axborotnomalari: 1996-2003 yillar soni.

5. Saxaev M. «Algebradan masalalar to'plami» T. «O'qituvchi», 1987 yil.

6. V.M.Govorov, P.T.Dibov, N.V.Miroshin, S.F.Smirnova 88orlik konkursni x zadach po matematike M-1983.

7. G.Sipkin, A.I.Pinskiy spravochnoe posobie po metodam resheniya zadach po matematike M-1983.

8. A.U.Umirbekov, SH.SH.Shoabzalov Matematikani takrorlang, Toshkent, «O'qituvchi» 1989 y.

9. T.To'laganov, A.Normatov Matematikadan praktikum, Toshkent, «O'qituvchi» 1989 y.

10. E.N.Kutsenko, N.N. Melnikov Matematikadan masalalar yechish, 2-qism Geometriya. Toshkent, «O'qituvchi», 1987.

N.Otajonova, M.Raupova

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI 2.

(o'quv qo'llanma)

Muharrir: X. Tahirov

Texnik muharrir: S. Meliquziyeva

Musahhih: M. Yunusova

Sahifalovchi: A. Muhammad

Nashr. lits № 2244. 25.08.2020.

Bosishga ruxsat etildi 27.02.2023.

Bichimi 60x84 1/16. Offset qog'ozi. "Times New Roman"
garnituras. Hisob-nashr tabog'i. 7,5.

Adadi 100 dona. Buyurtma № 1172441.

«NAZOKATHON ZIYO PRINT» MCHJ bosmaxonasida chop
etildi.



9789943923911