D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarova,
A.R. Qutlimurotov, Z.X.Siddiqov,
N.Y.Toshboyeva, F.Xasanov

# MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O'RTA MAXSUS TALIM VAZIRLIGI

CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarova, A.R. Qutlimurotov,
Z.X.Siddiqov, N.Y.Toshboyeva, F.Xasanov



# MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI

O'QUV QO'LLANMA



Toshkent – 2022
Yangi chirchiq prints
nashriyoti

**D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarova, A.R. Qutlimurotov, Z.X.Siddiqov, N.Y.Toshboyeva, F.Xasanov Матемaтика o'qitish metodikasi. O'quv qo'llanma –T.: «Yangi chirchiq prints», 2022, 404 bet.**

**UO'K: 3;520**
**KBK: 22.3;22.6**
**M 36**

Ushbu o'quv qo'llanma 5110100 – Matematika va informatika ta'lim yo'nalishlarining o'quv rejasidagi matematika va tabiiy-ilmiy fanlar blokiga tegishli fanlarning o'quv dasturlari talablari asosida tayyorlangan bo'lib, unda nazariy va amaliy mashg'ulotlarni o'z ichiga olgan ma'lumotlar berilgan.

O'quv qo'llanma universitet va pedagogika oliygohlarining matematika fakulteti talabalari uchun "Matematika o'qitish metodikasi" fanining xususiyatidan kelib chiqib, unda asosan xususiy metodikaga doir bo'lgan matematika o'qitish metodikasining maqsadi, mazmuni, metod va vositalari orasidagi munosabatlar pedagogik, psixologik va didaktik nuqtai-nazardan ochib berilgan.

O'quv qo'llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalarining matematika o'qitish metodikasi talabalari, aspirantlar, matematika o'qituvchilari hamda mazkur fan yo'nalishida ilmiy tadqiqot izlanishlarini olib borayotgan ilmiy xodimlar uchun mo'ljallangan.

**Taqrizchilar:** f-m.f.n.dots. A.R.Qutlimurodov(ChDPU)
f-m.f.n.dots. B.R.Tadjibaev (TDTU)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Toshkent viloyati Chirchiq davlat pedagogika instituti kengashining 2021-yil 28-dekabrdagi 3-sonli qaroriga asosan 5110100 – Matematika va informatika ta'lim yo'nalishlari bo'yicha tahsil olayotgan talabalar uchun o'quv qo'llanma sifatida nashr qilishga tavsiya etilgan.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2022-yil 17-martdagi 106-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruhsat berilgan (Ro'yxatga olish raqami 106-105)



**ISBN 978-9943-9238-8-1**



## SO'Z BOSHI

Taklif etilayotgan o'quv qo'llanmadan universitetlar va institutlar "matematika", "matematika o'qitish metodikasi" bakalavr yo'nalishlari talabalari, magistrantlar, maktab matematika o'qituvchisilari foydalanishlari mumkin. O'quv qo'llanmada "Matematika o'qitish metodikasi" fanining dasturiga muvofiq maktabda matematika o'qitish usullari keltirilgan.

Hozirgi vaqtda maktab o'quv dasturlari va darsliklari tez-tez o'zgarib turibdi, shuning uchun biz biron bir darslikka asoslanmadik. Shuningdek, har bir sinfda o'quv materiallarini taqdim etishga va o'qitishning uslubiy xossalariga alohida e'tibor bermadik.

Arifmetika, algebra va tahlil asoslari, geometriya kabilarni maktabda o'qitishning barcha jihatlarini ko'rib chiqa olmaymiz va biz uni to'liq yoritdik, deb ham ayta olmaymiz.

Umuman olganda, maktab dasturidagi fanlar, ma'lum bir mavzu, uning tushunchalari, qoidalari, kiritilishi nazariyasi va tavsifida juda ko'p o'ziga xosliklar mavjud. Masalan, maktab darsligidagi masalalar to'plamini tanlashda maqsadlar va qiziqishlar, maxsus turlari va ularni hal qilishning turli usullari mavjud. Bu kabi barcha masalalarni bitta kitobda yoritib bo'lmaydi va kerak emas. Chunki o'qituvchi har doim ijodkor, bo'lajak matematika o'qituvchisi doimiy izlanuvchidir.

Maktab matematika kursining har qanday mavzusini o'qitish uchun maxsus ko'rsatmalar va o'qituvchilar uchun mo'ljallangan darsliklarda, "Fizika, matematika va informatika", "Kvant" va hokazo jurnallarda mavjud.

Ushbu o'quv qo'llanmani tayyorlashda sinfda va maktabda o'qitiladigan mavzular hajmidan qat'iy nazar, o'quvchilarning bu fanni o'zlashtirishlari uchun zarur bo'lgan mazmunli va metodik yo'nalishlari bo'yicha yagona uslubiy yondashuvni shakllantirishni maqsad qilganmiz.

"Sonli to'plamlar", "Tenglamani o'rganish", "Tenglamalar va tengsizliklar", "Funksiya", "Hosila, differensial va integrallar" hamda boshqa mavzularni o'qitish bo'yicha tavsiyalar, metodik ko'rsatmalar mavjud.

Maktab matematikasi kursiga asosiy tushuncha va metodik ko'rsatmalarni kiritishning turli imkoniyatlari, yondashuvlar va metodik tadqiqotlar, uning mazmuni va maktab kursida taqdim etish tartibi, o'qitishning o'ziga xos xususiyatlari umumiy tahlil qilinadi. Ba'zi mavzularni o'qitishda umumiy metodologik tavsiyalarni boshqa mavzularni o'rganishda hisobga olinishi mumkin.

Masalan, "Tengsizliklarni yechish" mavzusini o'qitishda "Tenglamalarni yechish" mavzusini o'qitish uslubiyotidan ma'lum ma'noda foydalanish mumkin. O'quvchilarning mumkin bo'lgan xatolarining oldini olish, muammolarni hal qilishning turli usullarini topish, ularning qiziqishlarini oshirish va boshqalar.

Bo'lajak matematika o'qituvchisi didaktikani, o'quv nazariyasini, pedagogika, psixologiyani o'zlashtirish bilan bir qatorda maktab matematikasi kursining o'quv materiallarini chuqur bilishi va ularning nazariy asoslarini puxta egallashi kerak. Shuning uchun, maktabda o'qituvchilar uchun qiyin bo'lgan ba'zi tushunchalar va amallar, masalan, oddiy kasrlar bilan arifmetik amallarni bajarish, matnli masalalarni tenglamalar tuzish orqali yechish, matematik ifodalarni, tenglamalarni o'zgartirish, ekvivalent tenglamalar va tengsizliklar, modul yordamida berilgan tenglamalar va tengsizliklarni yechish, funksiyalar grafiklarini chizish, trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarni yechish va boshqalarga e'tibor qaratilgan.

Matematika o'qitishning umumiy usullarida ko'rib chiqilgan matematik tushunchalarni, teoremalarni isbotlash va muammoni hal qilish usullarini yaxshi biladigan o'qituvchi har bir mavzu bo'yicha tushunchalar, teoremalarni isbotlash va muammolarni yechishda tizimli ravishda ishlay oladi.

Har qanday matematik tushunchani shakllantirish, teoremalarni isbotlash, o'quvchilarni taqqoslash, o'xshashliklarni topish, tahlil qilish, birlashtirish,



aniqlashtirish, umumlashtirish kabilar ustida fikr yuritish faqat harakatlar maqsadga muvofiq amalga oshirilganda samarali bo'ladi.

Shuning uchun o'quvchilar va yosh o'qituvchilarga mustaqil ishlash usulini o'rganish uchun quyidagi maslaxatlarni tavsiya etamiz:

1) maktab o'quv dasturidan mavzuning umumiy mazmunini va uning sinflarga, qaysi sinfda, necha soat, qancha miqdorda bo'lishini bilib oling;

2) maktab darsligidagi mavzu tavsifining mazmunini o'qish;

3) har bir mavzu bo'yicha barcha tuchunchalarni konspekt qilish;

4) darslikni o'qituvchilar uchun mavzuni o'qitishga qanday tavsiyalar berilganligini hisobga olish;

5) mavzuni organishga mos yozuvlar, qoidalar, qonunlar, teorema, aksiomalarni tushunish;

6) ushbu darslikdagi muammolarni yechish modellarini, berilgan misollarni maktab darsligidagi tegishli materiallar bilan solishtirish, qaysi biri samaraliroq ekanligini aniqlash;

7) mavzuni o'qitish metodikasi bo'yicha boshqa darsliklar va adabiyotlardagi ma'lumotlarning qiyosiy tahlilini o'tkazish.

Ushbu o'quv qo'llanma matematika o'qitish metodikasi (umumiy metodika)ning davomi bo'lib, unda matematika o'qitishning xususiy metodikasi, jumladan algebra va sonlar nazariyasi, analiz asoslari mavzularini o'qitish metodikasi yoritilgan. Geometriya fani mavzularini o'qitish metodikasi 3-qismda yoritish mo'ljallangan.

O'quv qo'llanmada ba'zi ma'lum kamchiliklar bo'lishi mumkin. Ular haqida o'z fikr-mulohazalarini bildirganlar uchun oldindan o'z minnatdorligimizni bildiramiz.

*Mualliflar*

# I BOB. MAKTABDA SONLAR TO'PLAMLARINI O'RGANISH

## 1.1-§. Maktab matematikasida son haqida tushuncha berish usullari

REJA:

1. Maktab matematikasida son haqida tushunchalarni berish usullari.
2. Natural sonlarni o'rganish.
3. Natural son tushunchasi va uning qo'llanilishi.

### 1. Maktab matematikasida son haqida tushunchalarni berish usullari

Maktab matematika kursida sonlarni o'qitish quyidagi tizim orqali amalga oshiriladi: natural sonlar, butun sonlar, musbat sonlar, kasr sonlar, manfiy sonlar, ratsional sonlar, irratsional sonlar va haqiqiy sonlar to'plami. Sonlar tizimining bunday kengayishi matematikada son tushunchasining tarixiy rivojlanishi bilan bir xil:

Shuni ta'kidlash kerakki, matematikada kasr sonlar manfiy sonlarga qaraganda ancha oldin paydo bo'lgan.

Matematik fanlar sonlar rivojlanishining boshqa tizimini qabul qildilar: $N \subset Z \subset Q \subset R$. Bu son tushunchasi rivojlanishining mantiqiy tuzilishi deb ataladi. Uning tarixiy tizimdan farqi shundaki, manfiy sonlar avval kiritiladi. Shuning uchun ushbu tizimda butun sonlar natural sonlardan keyin o'rganiladi. Z to'plamning xossalari Q to'plamnikiga qaraganda oddiyroq.

Maktab matematika kursining tarixiy tuzilish yo'lidan borishining asosiy sababi shundaki, kasrlar inson hayotiy tajribasi bilan bog'liq bo'lib, o'quvchilarga manfiy sonlar tushunchasini tushuntirishdan ko'ra kasrlar tushunchasini tushuntirish osonroq.

Maktab kursida ba'zi sonli to'plamlarni o'qitish konsentratsiyalangan tarzda tasvirlangan. Shuning uchun maktabda sonli to'plamlarni o'qitish yuqorida aytib



o'tilgan sonlar konsepsiyasi rivojlanishining tarixiy va mantiqiy tuzilishidan ko'ra murakkabroqdir.

Maktabning turli bosqichlarda sonlarni o'qitish ularning ba'zilari mazmunini har xil talqin qilishga bog'liq. Masalan, ratsional sonlar shakli $\left(\frac{p}{q}\right)$ yoki oddiy kasrlar sifatida ko'rib chiqiladi. Bu o'nli va oddiy kasrlar oldindan o'qitilishi kerak bo'lgan muayyan uslubiy muammolarni keltirib chiqaradi.

Sonli to'plamlarni o'qitishning turli xil usullari ham ularni o'qitishda aks etadi. Mavjud o'quv dasturida haqiqiy sonlarni erta kiritish taklif etiladi. O'rta maktabda haqiqiy sonlar nazariyasini shakllantirish juda qiyin. Biroq, ushbu nazariyaning asosiy tushunchalari va ma'lumotlari o'quvchilarga erta yoshdanoq vizual tarzda tanishtirilishi mumkin.

Ma'lumki, maktabda sonli to'plamning kengayishi quyidagi to'rt shartga javob beradi. A to'plam B ni o'rnatish uchun kengaytirilgan, deb faraz qilaylik, keyin:

1) $A$ to'plam $B$ to'plamining qism to'plami bo'lishi kerak;

2) $A$ to'plamda bajarilgan barcha amallar $B$ to'plamda ham bajarilishi kerak;

3) $A$ to'plamda bajarib bo'lmaydigan amallar $B$ to'plamda bajarilishi kerak;

4) $B$ to'plam yuqoridagi (1-3) shartlarni qanoatlantiradigan barcha to'plamlarning eng kichigi bo'lishi kerak.

Matematikada sonli to'plamni qurishning ikki yo'li mavjud: aksiomatik va konstruktiv. Maktab o'quv dasturida ikkala yondashuvning ham elementlari mavjud. Son maktab matematikasida bo'lgani kabi matematikada ham eng asosiy tushunchalardan biridir. Son tushunchasi birinchi sinfdan oxirgi sinfgacha doimiy ravishda o'qitiladigan va ishlatiladigan yagona tushunchadir.

Boshlang'ich sinflarda o'quvchilar natural sonlar haqida intuitiv tushunchaga ega bo'ladilar va arifmetikadagi qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish kabi amallarni qo'llash ko'nikmalarini rivojlantiradilar. To'rt arifmetik amal yordamida amaliy muammolarni hal qilishni o'rganadilar. Ammo bu yerda natural son atamasi aytib o'tilgan va tushuntirilmagan. Asosan, boshlang'ich maktabda manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plami ko'rib chiqiladi, ammo bu faqat son sifatida tushuniladi.

Butun maktab matematika kursini o'qitishda "son nima?" degan savolga to'g'ri asosli javob berishning iloji yo'q. "Son" atamasi maktab matematikasi kursida son tushunchasining kengayishi munosabati bilan ko'rib chiqilgan sonlar to'plamining har qanday elementini anglatadi. Masalan, boshlang'ich sinf o'quvchilari uchun "son" atamasi natural son va nolni anglatadi, beshinchi sinf o'quvchilari uchun sonning nomi natural son, nol, oddiy va o'nli kasrlar, oltinchi sinfda - ratsional, keyin esa - haqiqiy sonlar ma'nosini anglatadi.

Maktabda butun sonlarni, ratsional, haqiqiy sonlarni aniqlash natural sonlar tushunchasiga asoslanadi. Natural son tushunchasi o'zi shakllantirilmaydi, u faqat tushuntiriladi.

Maktab matematika kursini sonlar to'plamining mantiqiy (nazariy) tuzilishiga asoslangan holda tuzish har doim ham mumkin emas. Sonlar to'plamini kengaytirishning mantiqiy tuzilishi matematik fanning ichki talablarini qondirishga asoslangan. Bu har doim ham o'quvchilarning yoshi va bilim darajasiga mos kelmaydi. Shu sababli, maktabda sonlar tizimini kengaytirish masalasini ko'tarishda, sonlarning kelib chiqishi va tarixiy rivojlanishini hisobga olish kerak.

Maktab matematika kursida sonlar tizimini kengaytirishning mumkin bo'lgan usullarini ko'rib chiqaylik:

Avval natural sonlar, so'ngra musbat kasrlar va kasrlar, manfiy sonlar, ratsional sonlar, haqiqiy sonlar o'rganiladi.

O'tgan asrning etmishinchi yillariga qadar sonlar tizimi ushbu tartibda o'rganilgan. Hozirgi maktab o'quv rejasi ham xuddi shunday.



2. Natural sondan so'ng darhol o'nli kasrlarni o'rganishga o'tish rejalashtirilmoqda (Ammo o'nli kasr mavzulariga o'tishdan oldin, oddiy kasr tushunchasi va kasrlarni bir xil mahrajga keltirish ko'rib chiqiladi va kasrlarni kiritish uchun oldindan tayyorgarlik ko'rib chiqiladi). Keyin, barcha ratsional sonlar to'plami bo'yicha amaliyotlar o'rganiladi.

Ushbu tartibda sonli to'plamlarni o'rganish o'tgan asrning 70-yillaridan boshlab joriy etilgan.

3. Natural sonlarni qisqacha tanishtirgandan so'ng, qarama-qarshi sonlar kiritiladi, ya'ni asta-sekin "ikki yo'nalishda kengayadigan" butun sonlar to'plami o'rganiladi. Masalan, avval -10 dan +10 gacha, keyin -100 dan +100 gacha va hokazo. Vanihoyat, butun sonlar to'plami cheksiz deyiladi. Butun sonlarni o'rganish jarayonida o'quvchilar xatto oddiy kasrlarni ham o'rgana boshlaydilar, ammo butun sonlarni o'rganib bo'lgandan keyingina ular ratsional sonlar to'plamini yaratishga o'tadilar. Ushbu tartibda sonli tizimni o'qitish mantiqiy tizimga yaqin bo'lsa ham, maktab amaliyotida keng tarqalgan emas.

Maktabda sonli to'plamni yaratish va ularni o'qitish o'quvchilarning yosh xususiyatlarini hisobga olgan holda o'quv dasturining mazmuniga bog'liq bo'ladi. Shu bilan birga, o'qituvchi sonlarni o'qitish jarayonida quyidagi nazariy va metodologik muammolarni hisobga olishi kerak:

1. Sonlar to'plamini qanday kiritish kerak va uning elementlari qanday?

2. Sonli to'plamning elementlari o'rtasida qanday bog'liqliklar mavjud va ular qanday o'rnatiladi?

3. Ushbu to'plamda qanday amallar bajariladi, ular qanday kiritiladi, uning ma'nosi nima va ular orqali qanday muammolar hal qilinadi?

4. Ushbu amaliyotlarga qanday qonunlar qo'llaniladi?

## 2. Natural sonlarni o'rganish

Natural sonlarni o'rganish (natural sonlarni o'qish va yozish), natural sonlarga qo'llaniladigan arifmetik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish), ularning xossalari.

Ushbu mavzular boshlang'ich sinfda o'qitiladi. Ular boshlang'ich sinfda matematika o'qitish metodikasi fanida tasvirlangan.

Boshlang'ich sinfni bitiruvchilari ko'p xonali sonlarni yozish va o'qish qobiliyatiga, ko'p xonali sonlar ustida og'zaki yoki yozma amallardan erkin foydalanish qobiliyatiga, amallar tartibini to'g'ri qo'llash qobiliyatlariga ega bo'lishlari kerak.

5-sinfda natural son tushunchasi umumlashtiriladi va tizimlashtiriladi, natural sonlarning bo'linish alomatlari, bo'linuvchi va tub ko'paytuvchilar, eng katta umumiy bo'luvchi, eng kichik umumiy karrali, asosiy va kompozit sonlar, o'zaro tub sonlar, natural sonlarni qoldiqsiz bo'linish alomatlarini tasniflash, 2, 5, 10, 3 va 9 ga bo'linish alomatlari kabilar o'rganiladi.

5-sinfda matematikani o'qitish va o'quv materiallarini taqdim etishda induktiv usul afzal bo'ladi. Bundan tashqari, ushbu kursni o'qitishda deduktiv usul qo'llaniladi: ba'zi tushunchalar aniqlanadi; belgilar, qoidalar, qonunlar, xossalar va boshqalar o'rganiladi. Teoremalar shaklida tuzilgan yangi qoidalarning to'g'riligi ma'lum tamoyillar va tushunchalarga murojaat qilish orqali ta'minlanishi kerak. Shuning uchun ushbu sinfda matematika darsini o'qitishning asosiy usuli - induktiv usulga ustunlik berilib, deduktiv usulga bosqichma-bosqich o'tiladi.

### 3. Natural son tushunchasi va uning qo'llanilishi

Boshlang'ich sinflarda ob'ektlarni hisoblash, masofa yoki uzunlikni o'lchash, massa, vaqtni hisoblash va boshqalarda son tushunchasidan foydalaniladi. 1,2,3,4,... kabi sonlar natural sonlar tushuniladi.

Natural son tushunchasining birinchi izohi oddiy amaliy yondashuv asosida 5-sinfda berilgan. Hisoblashda natural sonlar ishlatiladi. Keyin, narsalarni hisoblashda ishlatiladigan son natural son deb ataladi. Ushbu jumlaning shakli ta'rifga o'xshash bo'lsa-da, ammo uni ta'rif sifatida ko'rib bo'lmaydi. Bunday tushuntirish natural sonning barcha mumkin bo'lgan holatlarini to'liq qamrab olmaydi. Natural son nafaqat hisoblashda, balki o'lchov va amallarda ham



ishlatilishi mumkin. Hisoblash paytida ko'rinmaydigan bitta son mavjud - nol. Nol soni teng sonlarni ayirishda vujudga keladi, masalan, 3-3=0. Nol soni natural son emas (G'arbiy Yevropa maktablarida nol soni natural sondir. Mavjud bo'lmagan narsalar soni nolga teng deb qaraladi).

Har qanday natural sonni o'nta raqamlar yordamida yozish mumkin. Bu raqamlar - 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Natural sonlarni o'qishni va yozishni o'rganayotganda son razryadida nol ham bo'lishini yodda tutish kerak.

O'quvchilardan natural son tushunchasini bilish uchun "Qanday sonlar natural sonlar deyiladi?" yoki "Natural son nima?" kabi savollarni so'rashingiz shart emas. Buning o'rniga: "ketma-ket kelgan musbat sonlarni yozing", "musbat butun son bilan qaysi son boshlanadi, musbat butun sonlar oxiri bormi?", "Bitta raqamli musbat butun sonlarni yozing" va hokazo savol va topshiriqlar berishingiz mumkin.

Odatda boshlang'ich sinf bitiruvchilari ko'p xonali sonlarni o'qish va yozishga hamda ular ustida to'rt arifmetik amallarni bajarishga tayyor bo'ladilar. Shu bilan birga, beshinchi sinfda o'quvchilar olgan bilimlarini qayta ko'rib chiqish va mustahkamlash kerak. Beshinchi sinf matematika kursi boshlang'ich va o'rta maktab o'rtasidagi uzluksizlikni ta'minlaydi.

5-sinfda "Natural sonlar va ular ustida amallar" mavzusini o'rganishning asosiy maqsadi o'quvchilar tomonidan boshlang'ich maktabda olgan hisoblash qobiliyatlari va ko'nikmalarini mustahkamlash va takomillashtirishdir.

5-sinfda arifmetik materiallarni o'qitish jarayonida quyidagi masalalarga alohida e'tibor qaratish lozim:

1. Ko'p sonli natural sonlarni o'qish va yozishni bilish.
2. Natural sonlar ustida amallarni bilish.
3. To'rt arifmetik amallarni xatosiz bajarish.
4. To'rt arifmetik amallar aralashmasi yordamida ifodalangan misollarni yecha olish.
5. Qavslar qatnashgan misollardagi amallar tartibini bilish.

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Maktab matematika kursini sonlar to'plamining qanday tuzilishiga asoslangan holda tuzish kerak?

2. Maktabda sonli toplamni yaratish va ularni o'qitish o'quvchilarning qanday xususiyatlarini hisobga olgan holda tashkillanadi?

3. Boshlang'ich sinflarda ob'ektlarni hisoblash, masofa yoki uzunlikni o'lchash, massa, vaqtni hisoblash va boshqalarda nimadan foydalaniladi?

4. Har qanday natural sonni nima yordamida yozish mumkin?

5. 5-sinfda arifmetik materiallarni o'qitish jarayonida qanday masalalarga alohida e'tibor qaratish lozim?

---

## 1.2-§. Natural sonlar xossalarini o'rganish

REJA:

1. Natural sonlarni taqqoslash.
2. Natural sonlarni qo'shish va ayirish.
3. Natural sonlarni ko'paytirish va bo'lish.
4. Natural sonlarning bo'linishi.
5. Tub va murakkab sonlar.
6. Natural sonlarning bo'linish alomatlari.

### 1. Natural sonlarni taqqoslash

Boshlang'ich sinflarda o'quvchilarga ma'lum bo'lgan eng kichik son – 0, natural sonlarning eng kichigi esa 1 deb qaraladi. Hisoblashda 1 soni avval ishlatiladi. 1 sonidan keyin 2, keyin 3 va hokazo. Ikkita musbat butun sonning qaysi biri avval qatnashsa u keyingilaridan kichikroqdir. Bundan ayon bo'ladiki, har qanday bitta raqamli son har qanday ko'p xonali sondan kichik bo'ladi.



Boshqacha qilib aytganda, har qanday ko'p xonali son bir xonali sondan kattaroqdir. Masalan, 5 <87, 37> 9, 8 <325, 10230> 9.

Hisoblash jarayonining o'zi va uni yozish natijalaridan kelib chiqqan holda, har qanday ikki xonali son uch xonali sondan kichik, uch xonali son to'rt xonali sondan kichik va hokazo. Shunga o'xshaydigan misollarni keltirish mumkin: 61< <106, 5241> 524, 1000 <10000.

Ko'p xonali sonlarni ko'p xonali sonlar bilan taqqoslashda ham hisoblash g'oyasiga amal qilinadi: o'nlar, yuzlar, minglar, o'n minglar va hokazo xonali sonlar taqqoslanadi.

Quyidagi ko'p xonali sonlarni taqqoslash kerak: 8610 va 7921. Etti ming sakkiz mingdan oldin keladi: 8610>7921.

Endi 26489 va 26491 sonlarini taqqoslaymiz. O'n minglardagi sonlar, minglar va yuzlar xonasidagi sonlar bir xil. Shuning uchun bu sonlarni taqqoslash uchun 89 va 91 sonlaridan qaysi biri kattaroq ekanligini aniqlash kifoya. Bu sonlar o'nlik xonasida 8<9 bo'lganligi uchun 89<91. Shunday qilib, 26489<26491.

Ikkita musbat butun sonlarni taqqoslash uchun o'quvchi quyidagilarni bilishi kerak: qaysi ikkita musbat butun sonning chap tomonidagi birinchi soni kattaroq bo'lsa, bu son kattaroq bo'ladi. Agar bu sonlar teng bo'lsa, u holda chapdan keyingi raqamlar taqqoslanadi. Agar sonlardagi barcha raqamlar bir xil bo'lsa, bu sonlar tengdir.

Koordinata o'qida kichikroq son katta sonning chap tomonida yotadi. O'quvchi koordinata o'qida o'ngdagi sonlar chapdagi sonlardan katta ekanligini bilishi kerak.

### 2. Natural sonlarni qo'shish va ayirish

Boshlang'ich sinfda o'quvchilar natural sonlar ustida amallarni bajarish va ushbu amallardan foydalangan holda misol va masalalarni yechishning muhimligini yaxshi bilishadi. Shuning uchun bu muammolarni 5-sinfda takrorlash qiyin emas. Buni oddiy matnli masalarni hal qilish, masalaning qanday hal qilinishini o'rganish, qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va hokazolarni bajarish orqali amalga oshirish mumkin. Ularning ma'nosini o'quvchi tushunishi yoki tushunmasliklarini ko'rish oson.

5-sinfdagi muammo arifmetik amallarni aniqlashdir. Matematikada natural sonlarni qo'shish usuli aksiomatik aniqlanadi. Bu, albatta, o'quvchining bilim darajasiga mos kelmaydi.

5-sinfda natural sonni qo'shish ma'nosi intiutiv ravishda ochiladi. O'quvchi uchun uning tarkibiy qismlari (qo'shiluvchilar, yig'indilar) ni to'g'ri aniqlay olish kifoya qiladi, muammolarni yechish orqali qo'shimcha misollar keltiradi.

Quyidagi masalani ko'raylik. Bir idish ichida 5 ta olma, ikkinchisida 3 ta olma bor. Bularning barchasi bitta katta idishga solingan. Katta idishda nechta olma bor?

O'quvchilar muammoni hal qilish uchun 3 ni 5 ga qo'shish kerakligini osonlikcha aniqlaydilar:

$$5 + 3 = 8$$

O'qituvchi: Bunday muammolarni hal qilishda qo'shish amali quyidagicha amalga oshiriladi: 5 + 3 ifoda 5 va 3 sonlarining yig'indisi, 8 soni esa bu sonlarni qo'shish natijasidir. "Qo'shish natijasi" atamasi "yig'indi" deb ham ataladi.

O'quvchi bir element va boshqa buyumlar to'plamining kombinatsiyasi ularning sonlarini qo'shish orqali hal qilinishi mumkin bo'lgan muammo sifatida tushuniladi.

Bir sonni boshqasiga qo'shish uchun birinchi son ko'p sonli birliklarga ko'payadi (ikkinchi ulagich soni), chunki ikkinchi sonda birliklar mavjud. Ya'ni 5 soniga 3 ni qo'shish 3 birlikni 5 ga 3 marta qo'shish demakdir:

$$5 + 3 = 5 + 1 + 1 + 1 = 6 + 1 + 1 = 7 + 1 = 8$$

Shuning uchun qo'shimcha amal shuningdek berilgan sonni ikkinchi ulagichning soniga ko'paytirish tushuniladi.

Umuman olganda, qo'shish usuli quyidagicha yoziladi:



$$a + b = c$$

Sonlarni qo'shish qo'shish qonunlariga asoslanadi. Qo'shishning o'rin almashish qonuni

$$a + b = b + a,$$

assotsiativlik qonuni

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

Buning uchun *A*, *B*, *C* aholi punktlarining masofalari ma'lum bo'lsa, masofalar yig'indisini eng samarali usulda qanday topish kerakligi muammosi paydo bo'ladi.

O'quv materialining taqdimoti paytida $a$, $b$, $c$ o'zgaruvchilar tomonidan yozilgan qonuniyatlarni nol soni uchun, shu jumladan natural sonlar uchun amal qilishi aytilgan:

$$( a + 0 = 0 + a ).$$

Oxir-oqibat, qo'shish amalini samarali ravishda bajarish uchun qancha tarkibiy kasr va mashqlar bajarilmasin, qo'shish qonunlari to'g'ri amalga oshirilishi kerak.

Faqat bir xil miqdorlarni, jumladan, uzunligni uzunlikka, yuzini yuziga, massani massaga qo'shish mumkinligi ayniqsa ta'kidlangan.

Har qanday natural sonni raqamlar bo'yicha tasniflanishi mumkinligi esga olinadi, ya'ni son tarkibiy raqamlarining yig'indisi sifatida yoziladi. Masalan,

$$7629 = 7000 + 600 + 20 + 9.$$

451 va 635 sonlarining yig'indisini toping. Buning uchun har bir sonning tarkibiy kasrlarini toifalarga ajratamiz.

451 + 635 = (400 + 50 + 1) + (600 + 30 + 5) = (qo'shimchani qo'shish va almashtirish qonunlariga muvofiq) = (600 + 400) + (50 + 30) + (5 + 1) = 1000 + 80 + 6 = 1086. Bu esa natural sonlarga "ustunlar" qo'shish qoidasini tushuntiradi. Ayirish amalini bajarishda qo'shish amalidan foydalaniladi.

Ta'kidlash kerakki, agar kamayuvchi ayriluvchidan kichik bo'lsa, natural sonlarni ayirish mumkin emas. Masalan, siz 3-5 orasidagi farqni topa olmaysiz. Aslida, agar bu sonlar o'rtasida farq bor deb aytsak va uni $x$ harfi bilan belgilasak, u $3-5=x$, $3=5+x$ bo'ladi.

$3=5+x$ tenglamani natural sonlar to'plamida yechish mumkin emas.

Ayirish amali quyidagi xossalarga ega:

1) kamayuvchi va ayriluvchi bir xil songa ko'paytirilsa, ayirma ham shu songa ko'payadi, ya'ni agar $a - b = c$ bo'lsa, u holda $(a n) - (b n) = c n$.

2) kamayuvchi va ayriluvchiga bir xil son qo'sxilsa, ayirma o'zgarmaydi, ya'ni agar

$a - b = c$ bo'lsa, u holda $(a + n) - (b + n) = c$.

Ushbu xossani quyidagicha ifodalash mumkin:

$$13 - 5 = (13 + 2) - (5 + 2) = (13 - 2) - (5 - 2) = 8$$

2) Ikkala farqning yig'indisini topish uchun kamayuvcxilar yig'indisidan ayriluvcxilar yig'indisi ayriladi:

$$(a - c) + (c - d) = (a + c) - (c + d)$$

### 3. Natural sonlarni ko'paytirish va bo'lish

1 dan katta natural sonlarni ko'paytirish bir nechta bir xil sonlarning yig'indisi sifatida aniqlanadi: $b$ ta $a$ sonlar yig'indisi $a$ va $b$ sonlarining ko'paytmasi deyiladi va $a \cdot b = c$ bilan belgilanadi.

Agar $a \cdot b = c$ bo'lsa, $a$ va $b$ ko'paytuvchilar, $ab$ ifoda yoki $c$ ko'paytirish natijasi deb ataladi. (Ba'zan "multiplikatsiya" atamasi "multiplikatsiya natijasi" atamasi o'rniga ishlatiladi).

Natural sonlarni ko'paytirish ta'rifi biron bir joyda bevosita qo'llanilmaydi. Shu bilan birga, ushbu ta'rif natural sonni bir va nolga ko'paytirish ma'nosini tushuntirish uchun ham kerak: sonning o'zi shunday qo'shib olinmaydi, agar qo'shiluvchilar soni birga teng bo'lsa, u holda qo'shish natijasi shu songa teng bo'ladi, $a$ ta 1 sonining yig'indisi $a$ ga teng bo'ladi.

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a;$$

0 sonini nol komponentlarning yig'indisi sifatida talqin qilish mumkin emas

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a.$$



Ko'paytirish xossalari:

$ab = ba$ (ko'paytirishning o'rin almashtirish qonuni),

$abc = (ab)c = a(bc) = (ac)b$ (ko'paytirishning guruxlash qonuni),

$(a + b)c = ac + bc$ (qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni),

$(a - b)c = ac - bc$ (ayirishga nisbatan taqsimot qonuni)

O'quvchilar boshlang'ich sinflarda natural sonlarni ko'paytirish bilan tanish bo'lganliklari sababli, ularni o'qitishga ko'p vaqt sarflamasdan, qonunlardan tez foydalanishni, hisoblashni o'qitilishi kerak.

$a$ sonini $b$ soniga bo'lish bu shunday $x$ sonini topishki, $x$ sonini $b$ soniga ko'paytirilganda $a$ soni hosil bo'ladi, ya'ni

$$a : b = x, \quad b \cdot x = a.$$

$a$ soni bo'linuvchi, $b$ soni bo'luvchi, $x$ bo'linma deb ataladi, Ba'zida u "bo'linish natijasi" yoki "bo'linish" deb ham ataladi.

Bo'linuvchi nolga teng bo'lgan holatga alohida e'tibor berilishi kerak. Shungdek, 0 ga bo'lish masalasini ko'rib chiqish maqsadga muvofiq. Masalan, 5:0. Ta'rif bo'yicha $x$ sonini topishimiz kerakki, 0 ni qandaydir songa ko'paytmasi 5 ga teng bo'lishi kerak. 0 ning har qanday songa ko'paytmasi 5 ga teng bo'lishi mumkin emas. Shuning uchun, bu holda bo'lunmani topish mumkin emas, ya'ni 5 ni 0 ga bo'lish mumkin emas. 5 o'rniga noldan boshqa har qanday sonni olinganda ham bu fikr to'g'ri.

Endi nolni nolga bo'lish haqida o'ylab ko'raylik. 0 ni 0 ga bo'lish $x$ sonini topishni anglatadi. Ammo nol bilan har qanday sonning ko'haytnmasi 0 ga teng. Shunday qilib, biz bo'lish qiymati uchun aniq sonni ololmaymiz. Bunday holda, bo'lish aniqlanmagan va 0 ni 0 ga bo'lishning ma'nosi yo'q.

**Xulosa.** Hech qanday sonni nolga bo'lish mumkin emas. Nolga bo'lmang!

### 4. Natural sonlarning bo'linishi

"Natural sonlarning bo'linishi" mavzusini o'qitishning asosiy maqsadi: natural sonlar to'g'risidagi bilimlarni kengaytirish, har qanday natural sonni natural songa ko'paytirishga teskari amal deb tushunish qobiliyatiga ega bo'lish va oddiy kasrlar mavzusini o'rganish uchun zarur bo'lgan bilimlar zaxirasini yaratishdir.

Sonlar nazariyasining asoslari sonlarning bo'linishi mavzusida ko'rib chiqiladi: natural sonlarning bo'linish belgilari, berilgan sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish.

Sonlarning bo'linishi mavzusini o'qitish tartibi darsliklarda har xil ko'rib chiqiladi. Ba'zi bir darsliklarda natural sonlarning bo'linishi oddiy kasrlar mavzusiga kiradi, oddiy kasrlar va natural sonlarning bo'linishi o'rtasidagi yaqin aloqani ta'minlaydi. Ushbu tizim o'quvchilarga ikkita sonning eng katta umumiy bo'luvchisi kasrning ulushini va kasrni qisqartirish amali uchun va umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish uchun kerakligini tushunishga imkon beradi. Ba'zi darsliklarda natural sonlar mavzusining davomi sifatida natural sonlarning bo'linishi ko'zda tutilgan. Bu esa natural sonlarni va ularning xossalarini tizimli ravishda o'zlashtirishga imkon beradi.

O'quvchilar tomonidan sonlarning bo'linishi mavzusida o'zlashtiradigan birinchi tushuncha bu bo'linuvchi va natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratishdir. Natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish tushunchasini o'zlashtirish o'quvchilar uchun katta qiyinchiliklarga olib kelmaydi. Buning sababi, multiplikatsiya tushunchasi boshlang'ich maktabda ko'pgina muammolarni hal qilish jarayonida, berilgan sonni ko'paytuvchi songa ko'paytirish kabi shakllanadi. Endi har qanday natural sonni tub ko'paytuvchilarga ajratish uchun 1,2,3,4,5,... ga ajratish va berilgan sonni ko'paytma shaklda yozib olish kifoya.

Natural sonni berilgan songa bo'lish natijasi ikki xil bo'ladi: berilgan son bo'luvchiga qoldiqsiz yoki qoldiqli bo'linadi. Ikkala holatda ham bitta sonni boshqasiga bo'lish amalga oshiriladi. 21 ni 6 ga bo'lganda, 6 bo'luvchi va 3 qoldiq deyiladi. 6 soni 21 sonining bo'luvchisi deb nomlanmaydi, 6 soni 21 sonining to'liqsiz bo'linuvchisi deb ataladi. Agar $p$ sonini $q$ soniga bo'lganga bo'linma $n$, goldiq $r$ bo'lsa, u holda qoldiqli bo'lish



$$p = qn + r$$

shaklida yoziladi. Bu yerda $r < q$.

21 soni 1,3,7,21 sonlariga qoldiqsiz bo'linadi. Butun son berilgan musbat butun sonning bo'luvchisi bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash uchun bo'lish amali bajariladi. Agar son berilgan sonning bo'linuvchisi bo'lsa, o'quvchilarga bo'linuvchi ham bo'linuvchi ekanligini eslatib turadi. Masalan, 48 ning bo'luvchisi 6, 6 ning bo'linuvchisi 48 ning ham bo'linuvchisi bo'ladi.

Bunday qoidalarni ko'rsatgandan so'ng, sonning bo'linuvchilarini topishning quyidagi usuli taklif etiladi. Har qanday natural sonning bo'luvchilarini topish uchun, bu sonni 1,2,3... sonlariga bo'lish yo'li bilan, bu bo'linadigan sondan kam bo'lguncha tartibda bajariladi. Keyin bo'linadigan sonlar va qoldiqsiz bo'linuvchilar bo'linuvchilari topiladi.

Masalan, 32 sonining bo'luvchilarini topaylik. 32 sonini 1,2,3,4,... sonlariga bo'laylik.

| | |
|---|---|
| $32 : 1 = 32$ | - 32 ning bo'luvchilari 1 va 32; |
| $32 : 2 = 16$ | - 32 ning bo'luvchilari 2 va 16; |
| $32 : 3 = 10$ (qoldiq2) | - 3 soni 32 sonining bo'luvchisi emas; |
| $32 : 4 = 8$ | - 32 ning bo'luvchilari 4 va 8; |
| $32 : 5 = 6$ (qoldiq 2) | - 5 soni 32 sonining bo'luvchisi emas; |
| $32 : 6 = 5$ (qoldiq 2) | - 6 soni 32 sonining bo'luvchisi emas. |

Ikkinchi holda, 32 soni 6 ga va 5 ga bo'linmaydi. Keyin 32 sonining bo'luvchilari 1,2,4,8,16,32 sonlari ekanligi va 32 soni 1,2,4,8,16,32 sonlariga qoldiqsiz bo'linishi aytiladi.

Shuningdek, sonning tub bo'luvchilari va sonni tub ko'paytuvchilarga ajratish, ular o'rtasidagi munosabatlarning mohiyatini ochib berish juda muhimdir: agar biron bir son berilgan sonning bo'luvchisi bo'lsa, demak, berilgan sonning o'zi bo'linuvchiga ko'paytuvchidir.

Sonning tub ko'paytuvchilarini topish uchun bir nechta mashqlarni bajargandan so'ng, o'quvchilarga vazifa sifatida bir nechta natural sonlar uchun jadval tuzish va ularning bo'luvchilarini topishni vazifa sifatida berish mumkin.

| son | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ko'paytuv-chilari | 1 | 1,2 | 1, 3 | 1,2, 4 | 1, 5 | 1,2,3, 6 | 1. 7 | 1,2,4, 8 | 1,3, 9 | 1,2,5,10 |

| son | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ko'paytuvchilari | 1,11 | 1,2,3,4,6,12 | 1,13 | 1,2,7,14 | 1,3,5,15 | 1,2,4,8,16 | 1,17 |

| son | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ko'paytuvchilari | 1,2,3,6,9,18 | 1,19 | 1,2,4,5,10,20 | 1,3,7,21 | 1,2,11,22 | 1,23 |

O'quvchilar ushbu jadvalni davom ettirishlari mumkin. Bunday vazifani bajarish o'quvchilarda katta qiziqish uyg'otadi, shuningdek, keyingi darsda sonlarni tub va murakkab sonlar, sonlarning bo'linishi va tub ko'paytuvchilarga ajratish kabi boshqa tushunchalarni rivojlantirish uchun zarur bo'lgan material bo'lib xizmat qiladi.

### 5. Tub va murakkab sonlar

Jadvaldan o'quvchilar natural sonlarni bo'luvchilari soniga ko'ra ikki guruhga bo'lish mumkinligini payqadilar: birinchi guruhdagi sonlarda faqat ikkita bo'luvchi bor, ulardan biri 1, ikkinchisi esa shu sonning o'zi; ikkinchi guruhga ikkitadan ortiq bo'luvchiga ega sonlar kiradi.

Faqat 1 ga va o'ziga bo'linadigan sonlar tub sonlar deb nomlan-gan natural sonlardir.

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29, ... – tub sonlardir. Ikkitadan ortiq bo'luvchiga ega sonlar murakkab sonlar deb ataladi. O'quvchilarga "Jadvalda tub sonlarni bir qatorga, ikkinchi qatorga murakkab sonlarni yozing va ularning nima uchun



murakkab sonlar ekanligini aniqlang. Bunda ikki soninig eng kichik tub son ekanligini esda tuting" kabi topshiriqlarni berish mumkin.

Natural sonlarning bo'linish belgilarini ko'rib chiqqandan so'ng, Eratosfenning "kanistri" haqida ma'lumot berish foydali bo'ladi, bu birinchi sonlar jadvalini tuzishning eng qadimgi va sodda usuli bo'lib, unda tub sonlar qatori keltiriladi. Bu sonlar azaldan matematiklarni qiziqtirib kelgan.

### 6. Natural sonlarning bo'linish alomatlari

"Natural sonlarning bo'linish alomatlari" mavzusiga o'tishdan oldin, o'quvchilarning e'tiborini mavzuga jalb qilish uchun suhbat o'tkaziladi. Sonni boshqasiga bo'linishini bilish uchun, birinchisini ikkinchisiga bo'lish orqali bo'linish amalini bajardik. Matematikada natural son boshqasiga bo'linishini yoki bo'linmasligini bilib olishga imkon beradigan qoidalar mavjud. Bunday qoidalar sonlarni bo'linish alomatlari deb ataladi. Maktabda asosan natural sonning 2 ,3, 5, 9, 10 ga bo'linish alomatlari o'rganiladi.

Avvalo, bo'linish belgilari hisobga olinadi. Yigindining bo'lini-shini asoslash induktiv usul bilan amalga oshiriladi. 48 + 64 + 96 ning har biri 16 ga bo'linadi va ularning yig'indisi 208 ham 16 ga bo'linadi. Bir nechta bunday misollarni ko'rib chiqqandan keyin qoida quyidagicha shakllantiriladi:

Agar qo'shiluvchilarning har biri qandaydir songa bo'linadigan bo'lsa, bu sonlarning yig'indisi ham shu songa bo'linadi.

Ammo, qo'shiluvchilarning har biri qandaydir songa bo'linmasa, yig'indisi shu songa bo'linmaydi deb o'ylamaslik kerak. Masalan, 37 + 19 yig'indi (56) 4 ga bo'linadi, ammo qo'shiluvchilarning birortasi ham 4 ga bo'linmaydi. Bu muammoli vaziyatni yuzaga keltiradi.

Bir nechta misollarni ko'rib chiqqandan so'ng, o'quvchilar o'z qoidalarini shakllantirishlari mumkin: Agar har bir qo'sxiluvchi songa bo'linsa, yig'indisi ham shu songa bo'linadi.

Muayyan misollarni ko'rib chiqish natijasida ko'paytmaning bo'linishi quyidagicha shakllantiriladi: Agar hech bo'lmaganda bittadan ko'paytivchi songa bo'linsa, u holda ko'paytma ham shu songa bo'linadi. Masalan, $125\times37\times49\times55$ sonlar ko'paytmasi 5 ga bo'linadi, chunki kamida bitta ko'paytuvchi - 125 va 55 sonlari 5 ga qoldiqsiz bo'linadi. Ushbu ko'paytmadagi 49 soni 7 ga qoldiqsiz bo'linganligi sababli, ko'paytma ham 7 ga bo'linadi. Yig'indi va ko'paytmaning bo'linish belgilari natural sonlarning 2 ,3, 5, 9 va 10 ga bo'linishini asoslash uchun zarurdir. Yig'indi va ko'paytmaning bo'linish belgilarini shakllantirishda o'quvchilar intuitiv ravishda kon'yunktiv yoki dizyunktiv mantiqiy fikrlashning ma'nosini tushunishga kirishadilar.

Ular o'zlari tuzgan jadvalni yoki o'qituvchi tomonidan tavsiya etilgan misollarni ko'rib chiqib, 0, 2, 4, 6, 8, ya'ni juft sonlar bilan tugasa, natural son 2 ga bo'linishini ko'radilar.

2 ga bo'linish alomati. Agar natural sonning oxirgi raqami 2 ga bo'linsa, u holda bu son 2 ga bo'linadi (Agar natural son juft son bo'lsa, u 2 ga bo'linadi).

Ushbu jumlaning to'g'riligini ta'minlash uchun uch yoki to'rt xonali sonni olishni va sonni xona birliklari shaklida yozishni topshiriq shaklida berish lozim. 10 va 100 sonlari 2 ga bo'linadi, shuning uchun $a\cdot 100$, $b\cdot 10$ lar 2 ga bo'linadi va bizning dastlabki taxminimiz bo'yicha $c$ soni ham 2 ga bo'linadi. Binobarin, $c = a\cdot 100 + b\cdot 10 + 2$ yig'indi ham 2 ga qoldiqsiz bo'linadi. Demak, juft raqam bilan tugaydigan natural son 2 ga bo'linadi.

Shunday qilib, fikrlash – bu o'quvchilarda matematikaning deduktiv mohiyatini tushunishga birinchi tayyorgarligi bo'ladi. Bunda teskari mulohaza ham to'g'ri: Agar natural son 2 ga bo'linsa, demak, sonning oxirgi raqami 2 ga bo'linadi.

Natural sonning 2 ga bo'linish alomatini o'rganayotganda o'quvchilar shuni bilishlari kerakki, agar natural sonning oxirgi raqami 2 bo'lsa, u juft son va agar u juft son bo'lsa, uning oxirgi raqami 2 ga qoldiqsiz bo'linadi. Bu sonning juft son bo'lishi uchun zarur va to'g'ri shartdir: natural son juft bo'lishi uchun uning oxirgi raqami juft bo'lishi zarur va to'g'ri.



Shunday mulohazalar yordamida natural sonning 5 va 10 ga bo'linish alomatlari ham shakllantiriladi.

5 ga bo'linish alomati. Agar natural sonning oxirgi raqami 0 yoki 5 bilan tugasa (0 yoki 5 bo'lsa), u holda bu son 5 ga qoldiqsiz bo'linadi.

10 ga bo'linish belgisi. Agar natural sonning oxirgi raqami 0 bo'lsa, u holda bu son 10 ga qoldiqsiz bo'linadi.

### Mustahkamlash uchun savollar

**1. Natural sonlarni taqqoslashni o'rgatish nimalarga asoslanadi?**
**2. Natural sonlarni ko'paytirish va bo'lish, ularning xossalari qanday o'rgatiladi?**
**3. Natural sonlarning bo'linishini izohlang.**
**4. Tub va murakkab sonlarni o'qitishga misol keltiring.**
**5. Natural sonlarning bo'linish alomatlarini izohlang.**

## 1.3. Natural sonlarni tub sonlar ko'paytmasi sifatida tasniflash. EKUK va EKUB

REJA:

**1. Natural sonni tub sonlar ko'paytmasi sifatida tasniflash.**
**2. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo'luvchi.**

### 1. Natural sonni tub sonlar ko'paytmasi sifatida tasniflash

Bo'linish alomatlaridan keyin natural sonlarni ko'paytuvchilarga ajratish o'rganiladi. Natural sonlarni ko'paytuvchilarga ajratish zarurligini namoyish qilish uchun geometrik masalalarni keltirish mumkin: to'rtburchaklar eni va bo'yini to'rtburchak yuzi berilgan holda, to'rtburchakli parallelepiped hajmi berilgan holda uning uch o'lchovini topish masalalarni yechish yo'li bilan amalga oshiriladi.

To'rtburchakning yuzi 15 ga teng bo'lsa, uning eni 1, bo'yi 15 ga, yoki eni 3 va bo'yi 5 bo'lishi mumkin. Keyin 15 sonini

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$$

kabi ifodalash mumkin.

Muammolarni yechishda, agar son tub son bo'lsa, uni ikkita sonning ko'paytmasi sifatida bitta usulda yozish mumkin (masalan, $17 = 1 \cdot 17$) va agar u murakkab son bo'lsa, u bir necha usulda ikki sonning ko'paytmasi sifatida yozilishi mumkin ($30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 5 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$). O'quvchilar bularni tasniflash mumkinligini bilishlari kerak.

O'quvchilar har qanday natural sonni ko'paytuvchilarga ajratish, tez ko'paytirishni o'rgatadi. Masalan, $24 \cdot 25 = 4 \cdot 6 \cdot 25 = 6 \cdot (4 \cdot 25) = 6 \cdot 100 = 600$; $375 \cdot 16 = 3 \cdot 125 \cdot 2 \cdot 8 = (3 \cdot 2) \cdot (8 \cdot 125) = 6 \cdot 1000 = 6000$.

Murakkab sonlarni tub sonlar ko'paytmasi shaklida tasniflashga asosiy e'tibor qaratiladi va murakkab sonlarni tub sonlar ko'paytmasiga ajratish usullari o'rgatiladi.

Natural sonlarni tub sonlar ko'paytmasi sifatida tasniflash ikki, uch va hokazo sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini yoki eng kichik umumiy karralisini topishda qo'llaniladi.

Agar natural son tub son bo'lsa, u tub sonlar ko'paytmasiga faqat bitta yo'l bilan tasniflanadi: 1 soni va bu sonning o'zi.

Murakkab sonni tub ko'paytuvchilarga ajratish uchun u tub sonlarga bo'lgunga qadar sonni ketma-ket ikkita sonning ko'paytmasi sifatida yozishni davom ettiradi:

$$210 = 21 \cdot 10 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$540 = 54 \cdot 10 = 2 \cdot 27 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 5 =$$
$$= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$



Natural sonlarni tub sonlar ko'paytmasi sifatida tasniflashning yana bir yo'li quyidagicha:

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$; $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Natural sonni ko'paytuvchiga ajratish uchun ushbu ikki usuldan ham foydalanishingiz mumkin.

**2. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo'luvchi**

Eng muhim tushunchalari "Eng kichik umumiy karrali" ("EKUK") va "Eng katta umumiy bo'luvchi" ("EKUB") dir. EKUK, EKUB tushunchalarini joriy etish quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1) ikkita son tanlanadi va ularni tub ko'paytuvchilari yoziladi;

2) ikkata sonning umumiy ko'paytuvchilari yoziladi;

3) ikkita sonning umumiy ko'paytuvchilaridan daraja ko'rsatkichi kichigi tanlanadi.

Berilgan natural sonning berilgan ko'paytmalari orasidagi eng kichik musbat butun son eng kichik umumiy karrali deyiladi.

Berilgan natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish orqali EKUK ni topish usuli o'rgatiladi. Ikki sonning EKUKni topishga misol keltiramiz.

Misol. 504 va 305 ning eng kichik umumiy karralisini toping.

$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$,

$378 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$.

EKUK $(504, 360) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = 1512$.

EKUB ni topish quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1) ikkita son tanlanadi va ularning tub ko'paytuvchilari yoziladi;

2) ikkala sonning umumiy bo'luvchilarini turlarga ajratiladi;

3) Ikkala sonning umumiy bo'linuvchilarining eng kattasi olinadi.

Berilgan natural sonlarning bo'luvchilari ichida eng kattasi eng katta umumiy bo'luvchi deb ataladi. Berilgan natural sonlarni tub ko'paytuncxilarga alratish orqali EKUB ni topish usuli o'rgatiladi.

Bir nechta sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini topish uchun, bu sonlar tub ko'paytuvchilarga ajratiladi, ushbu sonlarning barchasiga xos bo'lgan asosiy ko'paytuvchilarning eng kichik ko'rsatkichini olamiz va ularni bir-biriga ko'paytiramiz.

Misol. 540 va 630 ning eng katta umumiy bo'luvchi (EKUB (540,630)) sini toping.

O'qituvchi uchun o'quvchilarga ikkita sonning EKUB ni topishning oddiy usullarini o'rgatish ortiqcha emas.

1. Agar $a$ va $b$ sonlar o'zaro tub sonlar bo'lsa (*EKUB (a, b)*=1), ularning EKUB si bu sonlarning ko'paytmasidir.

Masalan, EKUB (5;17) = 85; EKUB(4;7) =28.

2. Ikki sondan biri ikkinchisiga bo'linsa, u holda bu son bu sonlarning EKUB si bo'ladi. Masalan, EKUB (4; 28) = 28, EKUB (44; 11) = 44.

3.Umumiy holda ikki son EKUB ni topish.

Masalan, EKUB(8; 6) ni topish kerak bo'lsin.

$8 \cdot 2 = 16, \quad 6 \cdot 2 = 12$

$8 \cdot 3 = 24, \quad 6 \cdot 3 = 18$

$8 \cdot 4 = 32, \quad 6 \cdot 4 = 24.$

Demak EKUB (8; 6) =24.



### Mustahkamlash uchun savollar

1. Agar $a$ va $b$ sonlar o'zaro tub sonlar bo'lsa, ularning EKUK si nimaga teng?

2. Ikki sondan biri ikkinchisiga bo'linsa, u holda bu sonlarning EKUB si nimaga teng?

3. EKUK, EKUB tushunchalarini joriy etish qanday tartibda amalga oshiriladi?

## 1.4-§. Oddiy kasrlarni o'rgatish uslubiyoti

REJA:

1. Oddiy kasr tavsilotlarini o'rganish.
2. Oddiy kasr tushunchasi bilan tanishish.
3. Oddiy kasrning xossalarini o'rgatish.
4. Oddiy kasrlarning turlarini o'rgatish.
5. Kasrlarni umumiy mahrajga keltirish.
6. Kasrlarni taqqoslash.

### 1. Oddiy kasr tavsilotlarini o'rganish

Oddiy kasrlar bilan birinchi tanishish boshlang'ich sinfda natural sonlarni o'qitish bilan parallel ravishda amalga oshiriladi. O'quvchilarga sonning qismini topishni, sonning ulushini topishda masalalar yechishlari uchun hayotiy misollar va ko'rgazmali qurollardan foydalanish mumkin.

Kasrlarni tizimli o'rganish 5-sinfdan boshlanadi. Birinchidan, oddiy kasrlar va ular ustida amallar, so'ngra o'nli kasrlar mavzusi o'rganiladi. O'nli kasrlarni oddiy kasrlar bilan taqqoslash yangi sonlar emas. Ular allaqachon o'quvchilarga tanish. Sonnig 10 dan biri, 100 dan biri, 1000 dan biri va boshqalar oddiy kasrlarning bir ko'rinishi yoki boshqacha yozilishidir. Matematik hisoblar va amaliy hisob-kitoblarda o'nli kasrlardan foydalanish qulayroqdir. Oddiy kasrlar amaliy hisoblashlarda o'nli kasrlarga qaraganda kamroq qo'llaniladi. Kompyuter faqat o'nlik kasrlar bilan ishlaydi.

Shu munosabat bilan matematika o'qitish metodikasida oddiy kasrlar va o'nli kasrlarni o'qitish tartibi to'g'risida savol tug'iladi. Ushbu muammoni hal qilishning mumkin bo'lgan usullarini ko'rib chiqaylik:

1) birinchi oddiy kasrlar, keyin o'nli kasrlar o'rganiladi (an'anaviy usul);

2) birinchi o'nli kasrlar, keyin oddiy kasrlar o'rganiladi;

3) oddiy kasrlar va musbat kasrlarni o'rgatish kombinatsiyalashgan holda olib boriladi.

Zamonaviy maktab o'quv dasturi avval oddiy kasrlar, keyin foizlar va nisbatlar, keyin o'nli kasrlarni o'rgatishni ko'zda tutadi. N.Ya. Vilenkinning "Matematika-5" darsligida, birinchi navbatda oddiy kasr tushunchasi kiritilgan. Keyin kasrlarni taqqoslash, kasrlarni teng kasrlarga bo'lish usullari o'rganiladi. Keyin o'nli kasrlarga o'tish va ularga qo'llaniladigan to'rt amal ko'rib chiqiladi. O'nli kasrlarni o'qish 5-sinfda boshlanadi va keyin, 6-sinfda ular oddiy kasrlarni o'rganishga qaytadilar: har qanday kasrlarni taqqoslashga va ular ustida arifmetik amallarni bajarishga o'rgatiladi. Foiz tushunchasi o'nli kasr tushunchasi bilan parallel ravishda o'rganiladi. Foiz o'nli kasrlar shaklida yoziladi:

$$1\% = 0{,}01;\ 15\% = 0{,}15 \text{ va boshqalar.}$$

## 2. Oddiy kasr tushunchasi bilan tanishish

Ulushning asosiy tushunchasi oddiy kasrdir. Uni quyidagicha tanishtirish mumkin: 4 ta teng bo'lakka bo'lingan olma tasviri ko'rib chiqiladi. Ulardan biri bitta taqsimchaga, qolgan uchtasi boshqa taqsimchaga joylashtirilgan va shunday deyiladi: "Birinchi taqsimchada to'rtdan bir olma, ikkinchisida esa to'rtdan uch olma bor, ya'ni: 1- taqsimchada 1/4 olma, 2-taqsimchada 3/4 qism olma bor.



Shundan so'ng, bunday sonlar oddiy kasr sonlar deb atalishiga e'tibor qaratiladi. 3/4 sondagi 3 soni kasr surati, 4 soni esa uning mahraji deb ataladi. Mahraj predmetning (narsaning) nechta qismga teng bo'lishini va sur'at shu qismdan qancha olinishini anglatadi. Sur'at kasr chizig'i ustida va uning ostiga mahraj yoziladi. Shunga o'xshash tushuntirishlar boshqa misollar bilan takrorlanadi. Olma o'rniga (sakkiz, olti, o'n ikki) ga bo'lingan to'rtni (tilim, to'rtburchaklar, kvadratlar shaklida bo'lingan holda) olish mumkin.

Ushbu metodikaga ko'ra, oddiy kasr tushunchasini kiritishning uslubiy sxemasi quyidagicha:

1) narsani teng qismlarga bo'lish, jumladan yuqoridagi holatda 4 qismga bo'lish;

2) "to'rtdan bir", "to'rtdan uch qism" atamalarini yetkazish;

3) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ yozuvlarni joriy etish;

4) "oddiy kasr", "kasr", "butunning bir qismi" atamalari nimani anglatadi?

5) o'quvchilarga kasrlarga doir boshqa misollar keltiring, o'qing va yozing kabi topshiriqlar berish mumkin.

Kasr sonlarni o'qitish uslubiyotining eng muhim elementi o'quvchilarni yangi sonlarni kiritish zarurligiga ishontirishdir. O'quvchilarni ishontirishning bir usuli, bunday kasr sonlar kerakligiga, kasrlarni yozishda juda foydali ekanligini tushuntirishdir. Kasrlarni kiritish zarurati o'quvchilarga quyidagicha tushuntirilishi mumkin: natural sonlar to'plamida 2 soni 3 ga bo'linmaydi. Ammo natural sonlarni bo'lish har doim kasrlar tomonidan amalga oshiriladi. Natural sonlar to'plami kasrlar bilan to'ldiriladi. Keling, 2 ni 3 ga qanday bo'lish natijasini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, 2 ta olma 3 ta o'quvchiga teng taqsimlanadi. Buni qanday amalga oshirish mumkin? Har bir olmani 3 ta teng qismga ajrating. Keyin bunday qismlardan biri 1/3 kasr bilan ifodalanadi. Agar har bir o'quvchiga bo'lingan bo'lsa, unda 2 ta olma 3 ta o'quvchiga teng ravishda taqsimlanadi. Shunday qilib, har bir o'quvchi 2/3 bo'lak olma oladi, ya'ni $2:3 = \frac{2}{3}$. Xulosa shuki, endi 2 natural sonni 3 natural songa bo'lish mumkin, bo'linish natijasi natural son emas, balki kasrdir.

Kasrlarni kiritishning yana bir usuli bu miqdorlarni o'lchashdir. Masalan, uzunligi 1 sm dan kam kesma santimetrda o'lchanadi deylik. O'lchov paytida o'quvchilar kesma uzunligi 1 sm dan kam bo'lishini payqashadi. Bu yerda millimetrlarni (1mm=0,1sm) ishlatish yaxshiroq-dir. Aytaylik, kesma uzunligi 9 mm. Buni santimetrlardagi uzunligi 0,9 sm ekanligini ko'rsatadi. Berilgan kesma uzunligi kasrlarda santimetr bilan ifodalanganligini ko'rish mumkin. Shuning uchun turli uzunlikdagi predmetlar uzunligini o'lchash uchun kasr sonlar kerak bo'ladi.

### 3. Oddiy kasr xossalarini o'rgatish

Oddiy kasrni ikkita musbat butun sonning bo'linmasi sifatida ko'rib chiqqandan so'ng, oddiy kasrning xossalari o'rganiladi.

O'qituvchi doskada doira chizadi va doirani to'rt teng qismga ajratadi, uning bir qismi 1/4 oddiy kasr shaklida yoziladi. Bunda ulush oddiy kasrda yozilgan. Ushbu doiraning qolgan qismi bo'yalgan bo'lsin. Endi biz ushbu qismlarning har birini ikkita teng qismga ajratsak, doiraning bo'yalgan ulushi sakkisdan olti ulushga teng bo'ladi. Keyin doiraning bo'yalgan qismlarini ifodalovchi kasr sonlari va tavsilotlari bir xil ekanligi aniq bo'ladi. Ushbu jarayon teskari ko'rib chiqiladi va ularning teng ekanligi ko'rsatiladi. Shuning uchun $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\frac{24}{32}\ldots$ yoki

$$\frac{2}{7}=\frac{4}{14}=\frac{8}{28}=\cdots.$$

Kasrning sur'at va mahrajini bir xil butun songa ko'paytirish yoki bo'lish kasrning qiymatini o'zgartirmaydi. Bu xossadan kasrni qisqartirish uchun foydalaniladi. Kasrlarni qisqartirish bo'yicha ishlar faqat kasr sur'ati va mahraji o'zaro tub sonlar bo'lgunga qadar davom ettiriladi. Shuni ta'kidlash kerakki, kasr sur'ati va mahraji o'zaro tub sonlar bo'lgan kasrlar qisqartirilmaydigan kasrlardir.



### 4. Oddiy kasrlar turlarini o'rgatish

Oddiy kasrlarning xususiy hollari bo'lgan to'g'ri kasrlar, noto'g'ri kasrlarni tushuntirish uchun sur'at va mahrajdagi sonlar bir-biridan katta va kichik ekanligi misollar bilan izohlanadi. Shuningdek, butun sonlar va to'g'ri kasrlardan iborat bo'lgan sonlar aralash kasr sonlar deyiladi.

Noto'g'ri kasrni aralash kasr son shaklida yozish va aksincha, aralash kasr yordamida notog'ri kasr sonni yozish qoidalari mavjudligini o'quvchilarga izohlash kerak. Noto'g'ri kasr aralash son sifatida ifodalanadi. O'quvchilarga tushunarli bo'lishi uchun noto'g'ri kasrning sur'ati bo'linuvchiga, kasr mahraji esa bo'luvchi, bo'linma - aralash sonning butun qismiga tengligi va qoldiq aralash sonning sur'ati bo'lishi, kasr mahraji o'zgarmasligi aytiladi. Noto'g'ri kasrlarni aralash kasr sonlar ko'rinishida aniqlash uchun kasr sur'atini mahrajiga bo'lish zarur ekan.

Ikki kasr bir xil mahrajli bo'lsa, ular taqqoslanganda, sur'atga bog'liq ekanligi aniq ko'rsatiladi: agar ular bir xil sur'atlarga ega bo'lsalar, u holda bu kasrlar teng, sur'ati katta kasr esa katta kasr bo'ladi.

### 5. Kasrlarni umumiy mahrajga keltirish

Kasrlarni taqqoslash, qo'shish va ayirish uchun turli mahrajli kasrlarni bir xil mahrajga keltirish kerak. Kasrlarni bir xil mahrajga keltirish uchun ular mahrajlarining eng kichik umumiy karralisi topiladi.

Misol. $\frac{5}{8}$ va $\frac{7}{12}$, ushbu kasrlarning mahrajlari 12 va 8 sonlaridan iborat. 12 va 8 ning eng kichik umumiy karralisi 24 dir. Unda 24 soni bu kasrlarning mahrajlari uchun eng kichik umumiy karrali bo'ladi. Bir xil eng kichik umumiy karrali mahraj bilan kasrlarni yozish uchun har bir kasrning qo'shimcha omillarini toping: 24: 12 = 2; 24: 8 = 3. Endi berilgan kasrlarni bir xil kasrga (24) keltirish uchun kasrlarning asosiy xossalaridan foydalangan holda mahrajini ham, sur'atini ham bir xil songa ko'paytiramiz. Keyin uni

$$\frac{5}{8}=\frac{5\cdot3}{8\cdot3}=\frac{15}{24} \quad \text{va} \quad \frac{7}{12}=\frac{7\cdot2}{12\cdot2}=\frac{14}{24}$$

ko'rinishda yoza olamiz.

### 6. Kasrlarni taqqoslash

Turli mahrajga ega kasrlarni solishtirish uchun ular umumiy mahrajga keltirilish bilan taqqoslanadi.

Misol. $\frac{1}{2}$ va $\frac{2}{3}$ kasrlarni taqqoslang.

Uni yechish uchun o'quvchilar uchun savol: 1 ta olmani teng ikkiga bo'lgandagi ko'proqmi? Yoki 2 ta olmani 3 kishiga bo'lgandami? Savolga javob topish uchun ikkala kasr mahrajlarini umumiy mahrajga keltiramiz:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6} \quad ; \quad \frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$$

So'ngra kasrlarining mahrajlari tengligi uchun ularning sur'atlarini solishtirish natijasida 3<4 ni hosil qilamiz ,shu sababli, $\frac{3}{6}<\frac{4}{6}$.

Aralash kasr sonlarni taqqoslash uchun birinchi navbatda kasrlarni butun qismi taqqoslanadi, masalan, $8\frac{1}{5}>3\frac{4}{5}$, chunki 8>3, agar aralash kasrlarning butun qismlari teng bo'lsa, solishtirish kasr qisming kattaligiga bog'liq bo'ladi. Masalan, $4\frac{3}{8}<4\frac{4}{7}$, chunki

$$\frac{3}{8}=\frac{21}{56}; \quad \frac{4}{7}=\frac{32}{56}; \quad \frac{3}{8}<\frac{4}{7}.$$

Ba'zida kasrlar quyidagicha taqqoslanadi: $\frac{5}{9}>\frac{3}{7}$, chunki

$$5\cdot7>9\cdot3.$$

Kasrlarni shu tarzda taqqoslash qobiliyati kasrlarni qisqartirish mavzusida qayta takrorlanadi.



### Mustahkamlash uchun savollar

1. Oddiy kasrlarni o'rganish uslubiyoti haqida nimalar bilasiz?
2. Oddiy kasr tushunchasi bilan tanishish qanday amalga oshiriladi?
3. Oddiy kasrning xossalarini o'rgatish qanday tartibda olib boriladi?
4. Oddiy kasrlarning turlarini o'rgatishni so'zlab bering.
5. Kasrlarni umumiy mahrajga keltirishga misol keltiring.
6. Kasrlarni taqqoslashni o'rgatish uslubiyoti haqida nimalar bilasiz?

## 1.5-§. Oddiy kasrlarni qo'shish va ayirish

REJA:

1. Oddiy kasrlarni qo'shish.
2. Oddiy kasrlarni ayirish.
3. Oddiy kasrlarni ko'paytirish.
4. Oddiy kasrlarni bo'lish.

### 1. Oddiy kasrlarni qo'shish

Oddiy kasrlarni qo'shish bir xil mahrajli kasrlarni qo'shishni o'rganishdan boshlanadi. Buning uchun algebra va geometriya fanlari o'rtasidagi fanlararo aloqadan foydalanish, ya'ni kasrlarni, ulushlarni o'rgatishni geometrik usulda ko'rsatish mumkin. Doskaga ABCD to'rtburchakni chizing va 9 ta teng bo'lakka bo'ling. Agar bitta o'quvchiga 2 bo'lakni bir xil rangga, 5 bo'lakni boshqa o'quvchi 2-xil rangga bo'yab qo'ysa va sinfdan jami necha kasr bo'yalganligini so'rasak, o'quvchilar 7 bo'lak rangli ekanligini aytadilar:

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}.$$

Kasrlarni qo'shishni raqamlarda yozish, harflar bilan yozish mumkin:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Ushbu hisob-kitoblardan so'ng o'quvchilar mahrajlari bir xil kasrlarni qo'shish uchun o'zlarining qoidalarini tuzadilar.

Mahrajlari turli kasrlarni qo'shish uchun mahrajlarining eng kichik umumiy karralisi topilib, ular umumiy mahrajga keltiriladi, so'ngra bir xil mahrajli kasrlarni qo'shish qoidasiga ko'ra kasrlar qo'sxiladi. Masalan,

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{4}$$

Yig'indini topish uchun berilgan kasrlar mahrajlarining eng kichik umumiy karralisini topish kerak. EKUK (7,4) = 28. Binobarin, birinchi kasr sur'at va mahraji 4 ga, ikkinchi kasr sur'at va mahraji 7 ga ko'paytiriladi:

$$\frac{2\times 4}{7\times 4}+\frac{1\times 7}{4\times 7}=\frac{8}{28}+\frac{7}{28}=\frac{15}{28}$$

Bu kabi qator misollar o'quvchilarga yechish uchun beriladi. Aralash kasr sonni butun songa qo'shishda ham kasrning butun qismiga butun sonni qo'shish to'g'ri ekanligini izohlab, quyidagicha misollarni keltirish mumkin:

$$7+4\frac{5}{6}=(7+4)+\frac{5}{6}=11\frac{5}{6}.$$

yoki qisqacha

$$7+4\frac{5}{6}=11\frac{5}{6}.$$

Aralash kasr sonlarning butun qismi natural sonlar bo'lganligi sababli, aralash kasr sonlarni qo'sxilishi natural sonlarni qo'shish va turli kasrlarni qo'shishdan iboratdir.

Bundan tashqari, aralash kasr sonlarning butun qismini alohida-alohida, kasr qismlarini alohida-alohida qo'shish uchun qo'shishning o'rnatilgan xossalari qo'llaniladi. Masalan,



$$5\frac{3}{8}+7\frac{4}{9}=(5+7)+\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{9}\right)=12+\left(\frac{27}{72}+\frac{32}{72}\right)=12+\frac{59}{72}=12\frac{59}{72}$$

## 2. Oddiy kasrlarni ayirish

Oddiy kasrlarni ayirish amalini tushuntirishda ko'rgazmalilik tamoyilini amalga oshirish uchun uzunliklari oddiy kasrlar yordamida ifodalangan kesma uzunliklarini solishtirish maqsadga muvofiq:

$$AB=\frac{7}{8};\ AC=\frac{3}{8};\ CB=AB-AC;$$

$$CB=\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2};\ CB=\frac{1}{2};$$

Ushbu masala yecxilgandan so'ng mahrajlari bir xil bo'lgan oddiy kasrlarni ayirishga doir misollar keltirilsa, mavzu o'quvchilarga tushunarli bo'ladi.

1) $\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{5-4}{9}=\frac{1}{9}$; 2) $\frac{7}{15}-\frac{2}{15}=\frac{7-2}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$; 3) $\frac{8}{21}-\frac{5}{21}=\frac{8-5}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$.

Keyingi bosqich mahrajlari turlicha bo'lgan kasrlarni ayirish ularni qo'shishga analogik ravishda olib borilishi o'rgatiladi:

$$\frac{^{3/}5}{7}-\frac{^{7/}2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{15-14}{21}=\frac{1}{21}$$

Umumiy holda

$$\frac{n}{m}-\frac{l}{k}=\frac{^{k/}n}{m}-\frac{^{m/}l}{k}=\frac{kn}{mk}-\frac{ml}{mk}=\frac{kn-ml}{mk}$$

Bir nechta misollar keltirishni o'rgangandan so'ng, har xil mahrajlarga ega kasrlar sonini ayirish qoidalari shakllantiriladi. Ammo o'qituvchi aniq ma'noda tushunib, qoidalarni takrorlashi kerak.

Endi natural sondan kasrni ayirishning ikkita usulini ko'rib chiqamiz. Birinchi usulda berilgan musbat butun son noto'g'ri kasr sifatida yozilgan bo'lsa, ikkinchi usulda aralash son sifatida yoziladi.

Masalan,

1-usul: $4-\frac{3}{11}=\frac{44}{11}-\frac{3}{11}=\frac{44-3}{11}=\frac{41}{11}=3\frac{8}{11}$, 2-usul: $4-\frac{3}{11}=3\frac{11}{11}-\frac{3}{11}=3\frac{11-3}{11}=3\frac{8}{11}$.

Turli aralash kasr sonlarni ayirish uchun: avvalo ularning butun qismlari ayriladi, so'ngra ularning mahrajlari uchun eng kichik umumiy karrali son topish va kasrlarni bir xil mahrajga keltirish va ayirish amali bajariladi:

$$14\frac{7}{9}-5\frac{2}{3}=\left(14+\frac{7}{9}\right)-\left(5+\frac{2}{3}\right)=(14-5)+\left(\frac{7}{9}-\frac{{}^{3/}2}{3}\right)=9+\frac{7-6}{9}=9\frac{1}{9}.$$

Qisqacha

$$14\frac{7}{9}-5\frac{2}{3}=14\frac{7}{9}-5\frac{6}{9}=9\frac{1}{9}, \quad \text{yoki} \quad 14\frac{7}{9}-5\frac{{}^{3/}2}{3}=9\frac{7-6}{9}=9\frac{1}{9}.$$

Aralash kasrlarni ayirish jarayonida birinchi kasrdan 2-sini ayirishni bajarishda qiyinchilik tug'ilsa, u holda ayriluvchidagi butun qismdan bir sonini kasr ko'rinishda yozish mumkin:

$$18\frac{1}{7}-5\frac{2}{3}=18\frac{3}{21}-5\frac{14}{21}=\left(17+\frac{21}{21}+\frac{3}{21}\right)-5\frac{14}{21}=17\frac{24}{21}-5\frac{14}{21}=$$

$$=(17-5)+\left(\frac{24}{21}-\frac{14}{21}\right)=12+\frac{10}{21}=12\frac{10}{21}$$

yoki

$$18\frac{{}^{3/}1}{7}-5\frac{{}^{7/}2}{3}=18\frac{3}{21}-5\frac{14}{21}=17\frac{21+3}{21}-5\frac{14}{21}=(17-5)+\left(\frac{24}{21}-\frac{14}{21}\right)=12+\frac{10}{21}=12\frac{10}{21},$$

qisqacha

$$18\frac{{}^{3/}1}{7}-5\frac{{}^{7/}2}{3}=13\frac{3-14}{21}=12\frac{(21+3)-14}{21}=12\frac{24-14}{21}=12\frac{10}{21}.$$

1. Aralash sonni natural sondan ayirish uchun natural sonni aralash songa aylantirish va aralash sonni aralash sondan ajratish lozim.

1-misol. $5-3\frac{5}{7}=\left(4+\frac{7}{7}\right)-\left(3+\frac{5}{7}\right)=(4-3)+\left(\frac{7}{7}-\frac{5}{7}\right)=1+\frac{2}{7}=1\frac{2}{7}$.

Qisqacha: $5-3\frac{5}{7}=4\frac{7}{7}-3\frac{5}{7}=1\frac{7-5}{7}=1\frac{2}{7}$.



2. Aralash sondan musbat butun sonni ayirishda, kamayuvchining butun qismidan musbat sonni ayirish va kasr qismini olish yo'li bilan yoziladi.

2-misol. $8\frac{4}{9}-3=\left(8+\frac{4}{9}\right)-3=(8-3)+\frac{4}{9}=5+\frac{4}{9}=5\frac{4}{9}$

Qisqacha: $8\frac{4}{9}-3=5\frac{4}{9}$.

3. Aralash kasr sondan kasrni ikki xil usul bilan ayirish mumkin.

1-hol. Kamayivchi aralash kasr sonning kasr qismi ayriluvchi kasrdan katta bo'lsin.

3-misol. $10\frac{11}{12}-\frac{{}^{4/}2}{3}=10\frac{11}{12}-\frac{8}{12}=10\frac{11-8}{12}=10\frac{3}{12}=10\frac{1}{4}$

Qisqacha: $10\frac{11}{12}-\frac{{}^{4/}2}{3}=10\frac{11-8}{12}=10\frac{3}{12}=10\frac{1}{4}$.

2-hol. Kamayuvchi aralash kasr sonning kasr qismi ayriluvchining kasr qismidan kichik bo'lganda ayirish amali quyidagicha bajariladi:

4-misol.

$$4\frac{{}^{4/}2}{3}-\frac{{}^{3/}3}{4}=4\frac{8}{12}-\frac{9}{12}=\left(3+\frac{12}{12}+\frac{8}{12}\right)-\frac{9}{12}=\left(3+\frac{20}{12}\right)-\frac{9}{12}=3+\left(\frac{20}{12}-\frac{9}{12}\right)=$$

$$=3+\frac{11}{12}=3\frac{11}{12},$$

Qisqacha: $4\frac{{}^{4/}2}{3}-\frac{{}^{3/}3}{4}=4\frac{8-9}{12}=3\frac{20-9}{12}=3\frac{11}{12}$.

Shuning uchun, bu holda kamayayotgan aralash kasr sonni noto'g'ri kasrga aylantirish va uni noto'g'ri kasr shaklida yozish kerak.

### 3. Oddiy kasrlarni ko'paytirish

To'rtburchakning yuzini topish uchun ko'paytirish amalga oshirilganligi sababli, kasrlarning ko'payishi to'rtburchakning yusini topish bilan izohlanishi mumkin. To'rtburchakning eni $\frac{4}{5}$ dm va bo'yi $\frac{2}{3}$ dm bo'lsin. Undan kvadratchalarni kesish uchun uning enini 5 qismga va bo'yini 3 qismga bo'lish kerak. Shunda o'quvchilar kesilgan to'rtburchakning 15 katakchadan iboratligini va bir katakchaning yuzi $\frac{1}{15}$ dm$^2$ ekanligini biladilar. Aniqlanishicha, to'rtburchakning yuzi $\frac{8}{15}$ dm$^2$ ga teng. Ya'ni bu kasrlar ko'paytiriladi. Endi o'quvchilarga qo'shimcha savollar berib, ularni oddiy kasrlarni ko'paytirish qoidalarini umumlashtirishga olib kelish mumkin.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

**Izoh:** O'qituvchi qoidalarni o'quvchilarga maxsus ritmda ovoz chiqarib aytib berishi kerak. Keyin u harflar bilan yozilishi kerak. O'quvchilarga oddiy kasrlarni ko'paytirish faqat qisqartirilgandan so'ng va kasrlar qisqartirilmagan shaklida yozilgandan keyingina samarali bo'lishi eslatib o'tiladi.

Misol uchun,

$$\frac{\cancel{8}^2}{\cancel{12}_3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{4}{15}.$$

Natural sonni oddiy kasrga ko'paytirishga urg'u beriladi. Natural sonni oddiy kasrga ko'paytirganda, natural son mahraji 1 ga teng bo'lgan noto'g'ri kasr shaklida yoziladi va kasrni kasrga ko'paytirish qoidasiga ko'ra ko'paytiriladi.

Shunday qilib, faqat kasr sur'ati natural songa ko'paytiriladi va kasr mahraji o'zgarishsiz qoladi, degan xulosaga kelish mumkin:

$$n\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{b} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b}.$$

Masalan:

$$3\cdot\frac{5}{7}=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7} \text{ yoki } 3\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

Aralash kasr sonlarni ko'paytirishni tushuntirganda, oddiy kasrlarni ko'paytirish qoidasi faqat aralash kasr son noto'g'ri kasrga aylantirilgandan keyingina qo'llanilishi ta'kidlab o'tiladi. Masalan:

$$11\frac{2}{5}\cdot 6\frac{2}{3}=\frac{57}{5}\cdot\frac{20}{3}=\frac{\cancel{57}^{19}\cdot\cancel{20}^{4}}{\cancel{5}_1\cdot\cancel{3}_1}=76.$$



Shuni ta'kidlash kerakki, ko'paytirish qoidasini qo'llash uchun mashqlarni bajarayotganda, oddiy kasrlarni asta-sekin qisqartirish tavsiya etiladi. Masalan:

$$1\frac{7}{12}\times\frac{3}{4}=\frac{19\times 3_1}{12_4\times 4}=\frac{19}{16}=1\frac{3}{16}$$

Keyinchalik kasrlarni ko'paytirishda o'zaro almashish, yig'ish va taqsimlash bajarilganligi aniq misollarda ko'rib chiqish orqali namoyon bo'ladi.

### 4. Oddiy kasrlarni bo'lish

Oddiy kasrni oddiy kasrga bo'lish natijasi noma'lum kasr bo'lsin. Masalan $\frac{3}{4}:\frac{9}{10}$ bo'linma $x$ kasr bo'lsin:

$$\frac{3}{4}:\frac{9}{10}=x$$

Biz bilamizki, bo'lunuvchi bo'livchi va bo'linmaning ko'paytmasiga teng, ya'ni $\frac{9}{10}\cdot x=\frac{3}{4}$. Bu tenglamani yechish uchun tenglikning ikki tomonini $\frac{10}{9}$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{9}{10}\cdot x\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{9}$$

Bundan

$$x=\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{9}$$

Oxirgi ifodadan, bo'lishni bajarish uchun birinchi kasr o'z holida qoladi, ikkinchi kasrning sur'at va mahraji almashtirib yoziladi:

$$\frac{3}{4}:\frac{9}{10}=\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{10}^5}{\cancel{9}_3}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$$

Aralash kasr sonlarni bo'lish uchun ularni noto'g'ri kasrga aylantirish kerak. Masalan:

$$3\frac{2}{5}:4\frac{8}{15}=\frac{17}{5}:\frac{68}{15}=\frac{\cancel{17}^1\cdot\cancel{15}^3}{\cancel{5}_1\cdot\cancel{68}_4}=\frac{3}{4};$$

Qisqacha

$$9\frac{2}{3}:\frac{7}{12}=\frac{29\cdot 12^{4}}{\cancel{3}_{1}\cdot 7}=16\frac{4}{7}.$$

Quyidagi misolni keltirish maqsadga muvofiq:

$$3\frac{2}{5}:4\frac{8}{15}=\frac{17}{5}:\frac{68}{15}=\frac{\cancel{17}^{1}\cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}\cdot \cancel{68}_{4}}=\frac{3}{4};$$

Kasrni butun songa va butun sonni kasrga bo'lishda butun sonni mahraji 1 ga teng noto'g'ri kasr deb qarash mumkin. Masalan,

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5}{1}:\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3},$$

qisqacha

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}.$$

$$\frac{3}{7}:9=\frac{3}{7}:\frac{9}{1}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{9}=\frac{3}{7\cdot 9}=\frac{1}{21}.$$

Qisqacha

$$\frac{3}{7}:9=\frac{3}{7\cdot 9}=\frac{1}{21}.$$

Bu misollarni o'tishda innovatsiyalardan, ijodkorlikdan foydala-nish zarur, chunki didaktika inson ongiga progressiv ta'sir qiladi va u sezilmaydi, lekin o'quvchining fikrlash tizimini faollashtiradi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Oddiy kasrlarni qo'shishni o'rgatishda nimalarga e'tibor berish kerak?
2. Oddiy kasrlarni ayirishga misol keltiring.
3. Oddiy kasrlarni ko'paytirishni ko'rgazmali izohlang.
4. Oddiy kasrlarni bo'lishni qanday tushuntirilsa maqsadga muvofiq?



## 1.6-§. O'nli kasrlarni o'qitish uslubiyoti

REJA:

1. **O'nli kasrlar tushunchasi bilan tanishish.**
2. **O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish.**
3. **O'nli kasrlarni ko'paytirish va bo'lish.**

### 1. O'nli kasrlar tushunchasi bilan tanishish

Kasrlarning mahrajlari 10, 100, 1000 va 10 ning darajalari bo'lsa, bu kasr sonlarni kasrlarning mahrajlarisiz yozishingiz mumkin. Buning uchun dastlab kasrning butun qismi, keyin vergul va kasrning o'nli qismi haqida tushuncha berilishi kerak.

Misol uchun,

$$\frac{1}{10}=0{,}1;\ \frac{3}{10}=0{,}3;\ \frac{5}{100}=0{,}05;\ \frac{17}{10000}=\quad 0{,}0017.$$

Bunday tushuntirish berilgandan so'ng individual holatlar bilan shug'ullanadigan induktiv fikrlash usulidan foydalanib, o'quvchilarga o'nli kasrlarni yozishga va o'qishga o'rgatiladi (to'qqizdan uch kasri, besh yuzdan yuz yigirma etti va boshqalar).

To'g'ri kasrni o'nli kasr shaklida yozganda kasrdagi nol soni o'nli kasrdan keyin qancha son bo'lishi kerakligi tushuntiriladi.

Misol. $3\frac{9}{100}=3{,}09;\quad \frac{7}{1000}=0{,}007.$

O'nli kasr oxirida nolni olib tashlash yoki qo'shish uning qiymatini o'zgartirmaydi, deyiladi.

Masalan, $2{,}31=2{,}310=2{,}3100.$

7,189 o'nli kasrning kasr qismida o'ndan 1, yuzdan 8, mingdan 9 kabi qismlarga ega. Shuningdek kasrning mahrajlari 2 va 5 ga teng bo'lgan oddiy kasrlarni o'nli kasrlarga aylantirish mumkinligiga misollar keltiriladi:

$$2\frac{1}{2} = 2\frac{1 \times 5}{2 \times 5} = 2\frac{5}{10} = 2{,}5 \qquad 7\frac{3}{5} = 7\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = 7\frac{6}{10} = 7{,}6$$

O'quvchilar foizni o'nli kasr shaklida yozish mumkinligi haqida bilishlari kerak:

$$7\% = \frac{1}{100} \cdot 7 = 0{,}07; \quad 29\% = \frac{1}{100} \cdot 29 = \frac{29}{100} = 0{,}29$$

**2. O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish**

O'nli kasrlar o'nli tizimda yozilgan sonlar bo'lganligi sababli, ularni qo'shish natural sonlarni qo'shish bilan analogik tarzda amalga oshiriladi va kasrlarning vergullariga e'tibor qaratish o'nli kasrlarni qo'shish uchun zaruriy shartdir. Keyin bir xil toifalarni, bir xil ulushlarni bir-biriga ustunlar shaklida qo'shish mumkin bo'ladi. So'ngra o'nli kasrlar qo'sxiladi, ya'ni, ustunlardagi natural sonlar qo'sxiladi. Yig'indi-dagi kasrlarda vergul berilgan kasrlarda vergul ostiga qo'yilishi kerak. O'nli kasrlarni qo'shish usulining asoslanishi o'nli kasrlarni oddiy kasrlar shaklida yozish orqali, yig'indilarni o'nli kasrlarga aylantirish orqali amalga oshiriladi.

Misol. $5{,}25 + 16{,}3 = 5{,}25 + 16{,}30 = 5\frac{25}{100} + 16\frac{30}{100} = 21\frac{55}{100} = 21{,}55.$

Shunday qilib,

$$\begin{array}{r} 5{,}25 \\ +\ 16{,}30 \\ \hline 21{,}55 \end{array}$$

O'nli kasrlarni qo'shganda ham qo'shiluvchilarning o'rinlarini o'zaro almashinish xossalari bajariladi. Ushbu xossalardan foydalanib, o'nli kasrlarni osonlikcha qo'shish mumkinligi aytiladi.

Misol. $(2{,}3 + 5{,}81) + 6{,}7 = (2{,}3 + 6{,}7) + 5{,}81 = 9 + 5{,}81 = 14{,}81.$

O'nli kasrlarni ayirishda, o'nli kasrlarni qo'shishda bo'lgani kabi vergul to'g'ridan-to'g'ri vergul ostida yozilishi kerak, so'ngra kasr sonlar kasr qismidagi raqamlar sonlari tenglashtiriladi va kasrlari kasrning eng past (eng kichik) qismidan yuqori qismga qarab borish yo'li bilan amalga oshiriladi.

1-misol. $18{,}45 - 9{,}76 = 8{,}69$, ya'ni



$$\begin{array}{r} 18{,}45 \\ -\ 9{,}76 \\ \hline 8{,}69 \end{array}$$

Uni oddiy kasrlar yordamida ko'rsatib beriladi:

$$18\frac{45}{100} - 9\frac{76}{100} = 17\frac{145}{100} - 9\frac{76}{100} = 8\frac{69}{100} = 8{,}69$$

Agar kamayuvchi natural son bo'lsa, u holda natural sondan keyin vergul qo'yiladi, kerakli miqdordagi nol yoziladi va ayirish amalga oshiriladi.

2-misol. $67 - 45{,}63 = 21{,}37$

Haqiqatdan ham

$$67 - 45\frac{63}{100} = 66\frac{100}{100} - 45\frac{63}{100} = 21\frac{37}{100} = 21{,}37$$

**3. O'nli kasrlarni ko'paytirish va bo'lish**

O'nli kasrlarni o'nli kasrlarga ko'paytirishni to'rtburchak yuzini topish bilan izohlanishi mumkin. O'lchov birliklari o'rtasidagi munosabatdan foydalanib, maydalash (1 sm=10 mm), kasrni natural songa aylantiriladi, keyin yana kattalashtirish va oddiy kasr yordamida hisoblash mumkin bo'ladi.

Masala. Eni 8,7 sm, bo'yi 5,3 sm bo'lgan to'rtburchakning yuzini hisoblash quyidagicha amalga oshiriladi:

8,7 sm =87 mm; 5,3 sm=53 mm, bu yerda

$S = 8{,}7$ sm $\cdot$ 5,3 sm=87 mm $\cdot$ 53 mm = 4611 mm$^2$.

$$4611\ мм^2 = \frac{4611}{100}\ см^2 = 46\frac{11}{100}\ см^2 = 46{,}11\ см^2.$$

Ushbu o'nli kasrlarni ko'payishi oddiy kasrlarning ko'payishi orqali tekshiriladi.

$$8{,}7 \cdot 5{,}3 = 8\frac{7}{10} \cdot 5\frac{3}{10} = \frac{87}{10} \cdot \frac{53}{10} = \frac{4611}{100} = 46\frac{11}{100} = 46{,}11$$

yoki

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 8{,}7 \\ 5{,}3 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 261 \\ 435\phantom{0} \end{array} \\ \hline 46{,}11 \end{array}$$

Xuddi shunday $5{,}13 \cdot 6{,}2 = 31{,}806$.

Demak, o'nli kasrlarni ko'paytirish natural sonlarni ko'paytirish kabi bajariladi. Shu bilan birga, o'quvchilar ko'paytmadagi kasrning verguldan keyingi raqamlari soni ko'paytuvchilardagi verguldan keyingi raqamlari sonlari yig'indisi teng bo'lishiga e'tibor qaratishlari kerak.

O'nli kasrlarni ko'paytirish qoidalarini umumlashtirgandan so'ng, o'quvchilarning mavzuni tushunish darajalari tekshiriladi va baholanadi.

O'nli kasrlarni o'nli kasrlarga bo'lganda, bo'lishning asosiy xossaidan foydalanib, bo'linuvchi va bo'luvchini butun songa aylantirish uchun uni (10 ,100, va hokazo) ga ko'paytiriladi, bunda bo'luvchi butun son bo'lishi kerak va sonlarni bo'lish qoidalariga rioya qilinishi lozim.

Masalan: 274,56:85,8=2745,6: 858= 3,2.

Demak o'nli kasrlarni bo'lish uchun:

1) bo'luvchi - o'nli kasrdagi verguldan keyingi raqamlar soni miqdorida vergulni surish, ya'ni bo'luvchini butun son bo'lishini ta'minlash va bo'linuvchini shuncha marta orttirilishi kerak;

2) So'ngra bo'lishni amalga oshirish kerak. Misol keltiramiz:

1) $5{,}1 : 0{,}17 = 510 : 17 = 30$;

2) $6{,}3 : 0{,}1 = 63 : 1 = 63$;

3) $6{,}3 : 0{,}01 = 630 : 1 = 630$.

O'nli kasrlarni 0,1; 0,01; 0,001; ... larga bo'lish ularni 10, 100, 1000, ... larga ko'paytirishga teng kuchli bo'lishi haqida o'quvchilar xulosa chiqara oladilar.



Mustahkamlash uchun savollar

1. O'nli kasrlarni qo'shishning o'ziga xos tomonlarini tushuntiring.
2. O'nli kasrlarni ayirishda nimalarga e'tibor beriladi?
3. O'nli kasrlarni ko'paytirishga misol keltiring.
4. O'nli kasrlarni bo'lish usulini ko'rsating.

## 1.7-§. Manfiy sonlarni o'rganish metodikasi

REJA:

1. Manfiy son haqida tushuncha
2. Musbat va manfiy sonlar ustida amallarni o'qitish metodikasi.

### 1. Manfiy sonlar haqida tushuncha

Manfiy sonlarni kiritishda yuzaga keladigan birinchi uslubiy masala o'quvchilarni yangi sonlarni kiritish kerakligiga ishontirishdir. Bu tegishli hayotiy masalalarni tanlash orqali amalga oshiriladi:

1) Daromad va kamomadni farqlash uchun.

2) Ob-havodagi issig va sovuqni farqlash uchun.

3) Tepalikka chiqish yoki pastlikka tushishni farqlash uchun.

4) O'ngga yoki chapga yurishni farqlash uchun.

Yuqoridagi holatlarning har biri uchun o'quvchilar misollar keltirishlari mumkin. So'ngra chapdan o'ngga chiziq chizib, $O$ nuqta belgilanadi, birlik masshtab tanlanadi. Bu chiziqdagi $O$ nuqta o'ng tomonida $O$ nuqtadan 6 birlik masofa uzoqlikdagi $A$ nuqtani, $O$ nuqta o'ng tomonida 5,5 birlik masofa uzoqlikdagi $B$ nuqtani, $O$ nuqta chap tomonida O nuqtadan 2 birlik uzoqlikda joylashgan C nuqtani, $O$ nuqta chap tomonida 7,5 masofadagi $K$ nuqtani belgilang. Natijada, o'quvchilar "koordinata chizig'i" tushunchasini qabul qilishga tayyor bo'ladilar. O'quvchilarga "boshlang'ich nuqta", "chiziqning musbat yo'nalishi", "chiziqning manfiy yo'nalishi" atamalarini tushuntirish kerak.

Agar biz musbat yo'nalishni "+" belgisi bilan va manfiy yo'nalishni "-" belgisi bilan belgilasak, yuqoridagi muammoda $A$ nuqtaning holati +6, $B$ nuqtaning holati +5.5, $C$ nuqtaning holati -2, $K$ nuqtaning holati esa –7,5 soni bilan, $O$ nuqtasi esa $0$ soni bilan aniqlanadi. 0, +6, +5,5 sonlari allaqachon ma'lum, -2, -7,5 - bu yangi sonlar. +6, + 5,5, ... sonlari musbat sonlar deb ataladi (ular "+" belgisisiz belgilanishi mumkin), -2, -7,5, ... - manfiy sonlar deyiladi. Musbat va manfiy sonlar va 0 soni chiziqdagi nuqtaning o'rnini to'liq aniqlashi mumkin.

O'quvchilar nafaqat yangi sonlarni kiritish zarurligini, balki ularning ma'nosini ham tushunishlari muhimdir. Buning uchun chiziqdagi nuqtalar orqali o'qish, musbat va manfiy sonlarni belgilash uchun mashqlarni bajarish foydalidir.

Misollar. "+" va "-" belgilaridan foydalanib, quyidagi jumlalarni qisqacha yozing:

1) yarim tunda havo harorati $0^0$ dan 4 darajagacha, kunduzi noldan 10 daraja yuqori edi;

2) toshqin paytida daryodagi suv darajasi belgidan noldan 1,9 m yuqori bo'lgan va toshqin qaytishi paytida belgidan noldan 1,9 m past bo'lgan;

3) tarozining o'qi noldan o'ngga 4,5 ga burildi; zo'ngra chapga 2,5 ga burildi.

Teskari topshiriqlarni bajarish ham foydalidir.

Omborchi ombordagi jurnalga quyidagi yozuvlarni yozdi: "Tong" jamoasi +23,5 tonna; 1-oshxona - 2,5 tonna; "G'alaba" jamoasi +32 tonna; 2-oshxona - 3 tonna; 5-sonli meva do'koni - 6 tonna. Ushbu eslatmalarni qanday o'qiy olasiz va tushunasiz?



**2. Musbat va manfiy sonlar ustida amallarni o'qitish metodikasi**

Musbat va manfiy sonlarga amallarni qanday qo'llashni ko'rib chiqamiz. Musbat va manfiy sonlarga nisbatan qo'llaniladigan qoidalar muhim muammolarni yechish bilan izohlanadi (masalan, haroratni aniqlash to'g'risidagi hisobot).

Misol tariqasida musbat va manfiy sonlarni qo'shish qoidasini joriy etishning metodologik sxemasini keltiramiz (bunga induktiv umumlashtirish amalga oshiriladi).

1) haroratning o'zgarishi qo'shimcha usul bilan aniqlanganligini ko'rsating;

2) haroratni o'lchash quyidagilarni bajarish orqali amalga oshiriladi:

+2 + (+ 3) = + 5; -2 + (- 3) = - 5; -2 + (+ 3) = + 1 ; +2 + (- 3) = - 1.

3) E'tibor bering: har bir son moduli va ishorasi bilan belgilanadi. yig'indining moduli va ishorasini qanday aniqlash mumkin?

+2 + (+ 3) = + (| +2 | + |+3 |) = + 5; -2 + (- 3) = - (| -2 | + | -3 |) = - 5;

-2 + (+ 3) = + (| +3 | - | -2 |) = + 1; +2 + (- 3) = - (| -3 | - |+2 |) = - 1.

4) Ko'p xonali sonlar va qarama-qarshi sonlar uchun ham shu qoidalar o'rinlidir.

5) Yozma mashqlarni to'liq bajarib, ushbu qoidani tasdiqlang.

6) Hisoblash natijasi to'g'risida xulosa yozing.

Endi musbat va manfiy sonlarni ko'paytirishning metodik sxemasini keltiramiz.

1) Quyidagi masalani ko'rsatish mumkin: "Havo harorati $b$ kun davomida har kuni $a$ darajaga qarab o'zgargan. Agar:

a) $a = 2$, $b = 3$; b) $a = -2$, $b = 3$; c) $a = 2$, $b = -3$; d) $a = -2$, $b = -3$ bo'lsa, $b$ kundan keyin havo harorati qanday o'zgaradi?

a) $b$ kundan keyin havo harorati 6 darajaga ortadi, deb o'ylayman;

b) Ma'nosi: bu holda $b$ kundan keyin havo harorati 6 darajaga kamayadi deb o'ylayman, chunki kuniga 2 gradusdan kamaymoqda;

c) Ma'nosi: bu holda *b* kundan keyin havo harorati 6 darajaga kamayadi deb o'ylayman,

d) $b=-3$ ga teng bo'lganda havo harorati -2 darajaga o'zgargan degani nimani anglatadi?

Demak bu masalani yechish uchun musbat va manfiy sonlarni qanday ko'paytirishni bilish kerak. Boshqa holatlar uchun masalaning yechimi quyidagicha belgilanadi:

Topilgan ko'paytmani matematik usulda qanday topish kerak;

-musbat va manfiy sonlarni ko'paytirish qoidalarini shakllantirish;

-ko'paytma ishorasi va uning modulini qanday aniqlash mumkin?

-qisqartirilgan hisoblashga o'tish bosqichma-bosqich amalga oshiriladi.

Musbat va manfiy sonlar mavzusini o'rganish natijasida o'quvchilar quyidagi qoidalarni bilishlari kerak:

1. Bir xil ishorali sonlarni qo'shish uchun ularning moduli qo'sxiladi, yig'indisi umumiy ishora bilan olinadi.

Masalan: $6 + 7 = 13$, $-6 + (-7) = -13$.

3. Turli xil ishoraga ega bo'lgan sonlarni qo'shish uchun moduli katta bo'lgan sondan kichik modulli son ayriladi va katta modulli son ishorasi qo'yiladi.

Misol. $-9 + 15 = 6$; $-17 + 3 = -14$; $9-5 = 4$; $9-18 = -9$.

Musbat va manfiy sonlarni ko'paytirish va bo'lishda quyidagi qoidalar hisobga olinadi:

1. Ikki musbat sonning (ikkita manfiy sonning) ko'paytmasi (bo'linmasi) musbat sondir:

| | |
|---|---|
| $(+)\cdot(+) = +$ | $(+):(+) = +$ |
| $(-)\cdot(-) = +$ | $(-):(-) = +$ |

Misol. $7 \cdot 8 = 56$, $(-7)\times(-8) = 56$.

2. Ikki xil ishorali sonlarni ko'paytirish va bo'lishda quyidagi qoidalarga amal qilinadi:

| | |
|---|---|
| $(-)\cdot(+) = -$ | $(-):(+) = -$ |
| $(+)\cdot(-) = -$ | $(+):(-) = -$ |



Misol. $(-0.25)\cdot 8 = -2$.

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Manfiy sonlarni kiritishda qanday uslubiy masalalar yuzaga keladi?
2. Musbat va manfiy sonlarga amallar qanday qo'llaniladi?
3. Musbat va manfiy sonlar qanday ko'paytiriladi?
4. Musbat va manfiy sonlar mavzusini o'rganish ucun o'quvchilar qanday qoidalarni bilishlari kerak?
5. Musbat va manfiy sonlarni ko'paytirish va bo'lishda qanday qoidalar hisobga olinadi?

## 1. 8-§. Ratsional sonlarni o'rgatish

REJA:

1. Son tushunchasi va uning kengaytmalari.
2. Ratsional son ta'rifi.

### 1. Son tushunchasi va uning kengaytmalari

Son tushunchasi o'rta maktab va oily ta'limda o'qitiladigan matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. Ma'lumki, son tushunchasi odamlarning amaliy ehtiyojlaridan, jumladan predmet va narsalarni hisoblash yoki o'lchash natijasida paydo bo'ldi. Insoniyat madaniyat eshiklarini ochishni boshlaganda, avvalambor, natural sonlardan foydalanishni o'rgangan. Bu sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,.... Alohida narsalarni hisoblash natijasida paydo bo'lgan bu sonlar insoniyat madaniyatining eng muhim yutuqlaridan biridir. Bu sonlar nafaqat narsalarni sanash uchun zarur, balki ular atrofimizdagi turli tabiat hodisalarini o'rganishda juda katta rol o'ynaydi. Natural sonlarni boshqa sonlardan ajratish uchun ularni maxsus belgilar bilan yozish kerak. Ushbu belgilar sonlar to'plamlari deb nomlanadi.

Natural sonlar to'plami odatda N={1,2,3,...} bilan belgilanadi. Agar natural sonni bir yoki bir necha marotaba ko'paytirsangiz va natural sonlarga qo'shsangiz ham natija natural son bo'ladi. Endi ushbu amallarning xossa va qonunlarini (*a, b* va *c* ma'lum sonlar) ko'raylik:

1. $a + b = b + a$ – qo'shishning o'rin almashish qonunidir, ya'ni qo'shiluvchilar o'rni almashtirilganda yig'indi o'zgarmaydi.

2. $a{\cdot}b = b{\cdot}a$ – bu ko'paytmaning o'rin almashish qonunidir, ya'ni ko'paytuvchilarni o'rni almashsa, ko'paytma o'zgarmaydi.

3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ – bu qo'sxilish qonunidir, ya'ni ikkita sonning yig'indisiga uchinchi sonni qo'shish uchun siz birinchi songa ikkinchi va uchinchi sonlarning yig'indisini qo'shishingiz mumkin.

4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunidir, ya'ni yig'indini songa ko'paytirish uchun har bir qo'sxiluvchining ko'paytmalarini alohida-alohida qo'shishingiz mumkin.

Ushbu beshta qonun asosiy arifmetik qonunlar deb nomlanadi. Ushbu qonunlar sodda ko'rinishga ega bo'lsa-da, ular juda ko'p ma'noga ega.

Natural sonlarni o'lchamda taqqoslash mumkin. Agar *m* va *n* natural sonlar bo'lsa, ulardan biri ikkinchisidan kattaroq bo'lishi mumkin. Shunday qilib, 25 soni 15 sonidan katta. Agar *m* va *n* larni ayirmasini *p* desak, agar *p* musbat bo'lsa, u holda *m* soni *n* sonidan katta bo'ladi: $n<m$, aks holda esa $n>m$.

Shuni ta'kidlash kerakki, natural sonlar to'plamidagi ayirish amali, bo'lish amali natijasida har doim ham natural son hosil bo'lavermaydi.



Odamlar ayirish amali doimo bajarilishi uchun butun son tushunchasini kiritgan. Bu butun sonlar, jumladan manfiy sonlarni kiritish orqali amalga oshiriladi. Butun sonlarni hosil qilish uchun natural sonlarga –1, -2, -3 ,..., -*n*, ... lar va nol qo'sxiladi va bu sonlar butun son deb ataladi. Shunday qilib, *m–n* ayirmani doimo hisoblash mumkin bo'ladi.

Butun sonlar to'plami: Z= {0; 1; 2; ... } deb belgilanadi.

Bu to'plam elementlari uchun

$$-a+(-b)=-a-b=-b-a,$$
$$a+(-b)=a-b=-b+a,$$
$$-a\cdot(b+c)=-a\cdot b-a\cdot c,$$
$$a+0=a,$$
$$a\cdot 0=0.$$

xossalar o'rinli. Natural sonlar toplami ham, butun sonlar to'plami ham cheksiz, ya'ni bu toplamlardagi sonlarning oxiri yo'q. Shuncha ko'p bo'lishiga qaramay insonlar ehtiyoji uchun ular kamlik qiladi. Inson hayotida sonlardan foydalanadi. Masalan, yer uchastkasining yuzini, binoning hajmini, harakatlanuvchi jismning tezligi va tezlanishini, elektr toki va kuchlanish miqdorini va boshqalarni hisoblash kerak bo'ladi. Ushbu miqdorlarni o'lchash uchun ularning har biri uchun mos o'lchov birligi (standart) tanlanadi.

Misol uchun, uzunlikning o'lchov birliklari – metr, santimetr, millimetr, millimikron va hokazo, vazn o'lchov birliklari – kg, gramm, va hokazo. Demak, santimetr metrning yuzdan bir qismi ekanligi, millimetr metrning mingdan bir qismi ekanligi, gramm kilogrammning mingdan biri ekanligini bilib oldik. Misol uchun, bir jism uzunligi 25 sm bo'lsin, u metrning yuzgan 25 qismiga yoki to'rtdan bir qismiga tengdir:

$$25sm = \frac{25}{100}\ m = \frac{1}{4}\ m$$

Shunday qilib, agar *m* ma'lum qiymati, uning ikkinchi bir o'lchov birligidagi *n* ga nisbati kasr son bo'lsa, u holda miqdor qiymatini ifodalovchi songa arifmetikada kasr yoki nisbat deyiladi. Ushbu kasr ba'zan $n:m$ shaklida yoziladi.

### 2. Ratsional son ta'rifi

Ta'rif. Natural va butun sonlar, musbat va manfiy kasr sonlar va nol ratsional sonlar to'plami deyiladi va u quyidagicha belgilanadi:

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\right\}$$

Bu yerda $p\in Z$, $q\in N$ ekanligi o'quvchilarga tushuntiriladi. Shuningdek, o'quvchilarga 1 ni 3 ga bolishdan hosil bo'lgan kasr son ratsional son ekanligidan, uning o'nli kasr ko'rinishi

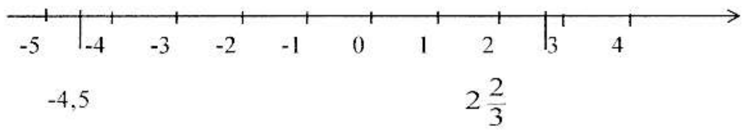
$$\frac{1}{3}=0{,}333...=0{,}(3)$$

yoki

$$\frac{29}{110}=0{,}26363\,...=0{,}2(63)$$

ni izohlash natijasida davriy o'nli kasr tushunchasi va davr tushunchasi o'rgatilishi kerak. Bunda sof davriy, aralash davriy o'nli kasrlar va ularni oddiy kasrlarga aylantirish qoidalari o'rgatilishi lozim.

Ratsional sonlarni sonlar o'qidagi tasviri o'quvchilar uchun katta yangilik bo'lmaydi, chunki ular bu o'q bilan avval ham tanishganlar (1-rasm).




1-rasm.

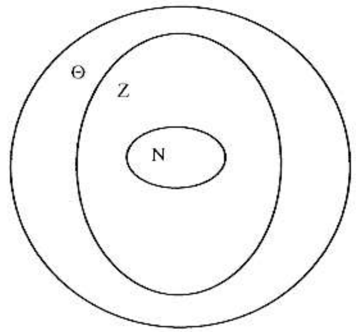
Har qanday ratsional sonni $\frac{n}{m}$ (butun sonning natural songa nisbati) kasr (nisbat) sifatida yozish mumkin. Bu yerda $n$ butun son, $m$ esa natural son.

Masalan: $6=\frac{18}{3}$; $0{,}8=\frac{4}{5}$; $-0{,}8=-\frac{4}{5}$; $2\frac{5}{7}=\frac{19}{7}$



Hisoblashda berilgan ratsional son uchun uning qisqartirib bo'lmaydigan kasr shakli olinadi.

2-rasmda natural sonlar to'plami *(N)* butun sonlar to'plami *(Z)* ning qism to'plami va butun sonlar to'plami ratsional sonlar to'plami *(Q)* ning qism to'plami ekanligi ko'rsatilgan: $N\subset Z\subset Q$.




2-rasm.

Ratsional sonlarni cheksiz davriy o'nli kasr sonlar kabi yozish keyinchalik esa irratsional sonlarni ko'rib chiqish ko'zda tutilgan. Ratsional son qisqartirilmaydigan kasr shaklida berilgan bo'lsa, kasrning mahraji tarkibiga qarab, u chekli o'nli kasr, cheksiz o'nli kasr deb hisoblanadi. Agar oddiy kasrning mahrajida ko'paytuvchi sifatida 2 va 5 dan boshqa sonlar bo'lmasa, u chekli kasr sifatida yoki oddiy kasr sifatida yoziladi.

Misol: $\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{3}{4}=0{,}75$; $\frac{2}{5}=0{,}4$.

Agar oddiy kasrning mahrajida 2 yoki 5 dan boshqa sonlar bo'lsa, u o'nli kasrlarda yoziladi (davriy, davriy emas).

Misol. $\frac{1}{6}=0{,}1(6)$; $\frac{7}{15}=0{,}4(6)$; $\frac{6}{11}=0{,}(54)$; $\frac{1}{9}=0{,}(1)$.

Bu yerda cheksiz davrga ega bo'lmagan o'nli kasrga irratsional son deyilladi. Irratsional va ratsional sonlar haqiqiy sonlar to'plamini tashkil etadi. Haqiqiy sonlar to'plamini $R$ deb belgilash mumkin.

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Son tushunchasi va uning kengaytmalari haqida gapirib bering.
2. Natural sonlar to'plamida qanday amallarni doimo bajarib bo'lmaydi?
3. Butun sonlar to'plamida qanday amallarni doimo bajarib bo'lmaydi?
4. Ratsional son, uning turlarini sanab bering.

## 1.9-§. Irratsional sonlarni kiritish usullari

REJA:

1. Haqiqiy sonlarni kiritish.
2. Irrasional sonlarni kiritishning ehtiyojlari.

### 1. Haqiqiy sonlarni kiritish

Matematikada haqiqiy sonlarni kiritish (yaratish) ning turli xil usullari mavjud (Dedekind usuli, Veyershtrass belgisi, Kantor aksiomasi va boshqalar). Biroq, bu usullarning barchasi murakkab. Matematika chuqurlashtirib o'tiladigan sinflar uchun haqiqiy sonlarni hosil qilishning qat'iy usullari ham mavjud, ammo ular o'rta maktab o'quvchilari uchun qiyinroq. Bundan tashqari, cheksiz davrsiz o'nli kasrlar shaklidagi sonlarga asoslangan haqiqiy sonlar tushunchasi ham 6-sinf o'quvchilari uchun tushunarli bo'lmaydi. Haqiqiy sonlarni erta o'rganish o'quvchilarning sonlar to'g'risida tizimli bilimlarini shakllantirishni tezlashtiradi, batafsil amaliy hisob-kitoblarni ta'minlaydi, hisob-kitob ishlarining ba'zi muammolarini aniq tasvirlash-ga imkon beradi va hokazo.



Amaliy hisoblar uchun ratsional sonlar to'plami to'g'ri. Irratsional sonlarni kiritish birinchi navbatda matematikaning ichki ehtiyojlari uchun zarurdir, masalan, ular quyidagi muammolarni yechishda kuzatiladi:

1. 2 soni kvadrat ildizining qiymatini topish.
2. $x^2 - 2 = 0$ tenglamani yechish.
3. Kvadrat diagonalini unig tomonlari orqali ifodalash.
4. Kvadratning yuzi 3 ga teng bo'lganda uning tomonlarini topish.
5. Son o'qidagi har bir nuqtaga to'g'ri keladigan ratsional sonni topish.

O'rta maktabda irratsional sonni kiritishning quyidagi usullari mavjud:

1) Irratsional sonni cheksiz davrsiz o'nli kasr ko'rinishida kiritish (Weyershtrass tomonidan);

2) Dedekind usuli orqali irratsional sonni kiritish;

3) Kantor aksiomasi bilan kirish;

4) Quyidagi teoremani ko'rib chiqish orqali kiritish:

Teorema. Ratsional sonlarning ichida kvadrati ikkiga teng bo'lgan ratsional son yo'q.

Har bir ratsional son chekli yoki cheksiz davrga ega bo'lgan o'nli kasr shaklida yoziladi. $\sqrt{2}$ son bunday kasrlarda yozilmagan. Masalan, bu songa yaqin bo'lgan ratsional sonlarni yozaylik;

$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4;$

$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25;$

$(1.41)^2 = 1.9881 < 2 < (1.42)^2 = 2.0264;$

$(1,414)^2 = 1.999396 < 2 < (1,415)^2 = 2,002225;$

$(1.4142)^2 = 1.9999164 < 2 < (1.4143)^2 = 200024449;$

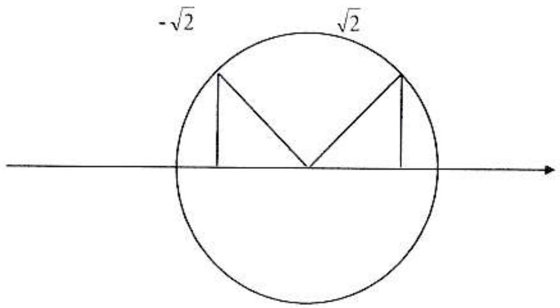
……………………………………………………………

Ushbu jarayonni cheksiz davom ettirish mumkin.

$\sqrt{2}$ soniga yaqin bo'lgan ratsional sonlar ketma-ketligi chekisiz o'nli kasrlar ekanligiga e'tibor bering. Davrsiz cheksiz o'nli kasr shaklida yozilishi mumkin bo'lgan sonlarga irratsional sonlar deyiladi. Misol uchun,

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$ ... – irratsional sonlardir. Pifagor teoremasi $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, ...$ irratsional sonlarni geometrik ravishda ifodalash uchun ishlatiladi.

Masalan, $\pm\sqrt{2}$ son geometrik ravishda sonlar qatorida quyidagicha ifodalanadi (3-rasm):




3-rasm.

Ratsional va irratsional sonning sonlar o'qiga joylashishini quyidagi misolda ko'rib chiqish foydalidir: Faraz qilaylik, sonlar satridagi har bir ratsional son ko'k chiroq bilan, har bir irratsional son qizil chiroq bilan ko'rsatilgan bo'lsin. Agar siz ko'k chiroqni yoqsangiz, u holda koordinata o'qining ba'zi nuqtalari "ko'k" bilan bo'yalgan bo'ladi. Agar biz faqat qizil chiroqlarni yoqsak, sonlar qatori "qizil" ga aylanadi. Agar biz barcha yoritgichlarni (ko'k va qizil ranglarni) yoqsak, u holda sonlar qatori "qizil" rangga bo'yalgan bo'ladi. Ushbu tajriba nimani ko'rsatmoqda? Shunga o'xshash taqqoslashda, masalan, quyidagini keltirish mumkin

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2=2,0000... | | 3=3,0000... | |
| 2 | | 3 | |
| 2,0 | 2,1 | 3,0 | 3,1 |
| 2,00 | 2,01 | 3,00 | 3,01 |
| 2,000 | 2,001 | 3,000 | 3,001 |
| 2,0000 | 2,0001 | 3,0000 | 3,0001 |



| | | | |
|---|---|---|---|
| 2,00000 | 2,00001 | 3,00000 | 3,00001 |
| 2,000000 | 2,000001 | 3,000000 | 3,000001 |
| 2,0000000 | 2,0000001 | 3,0000000 | 3,0000001 |
| ... | ... | ... | ... |

## 1. Irratsional sonlarni kiritishning ehtiyojlari

Ratsional sonlar to'plamida sonlar qanchalik yaqin bo'lishidan qat'iy nazar, ular o'rtasida "bo'shliq" mavjud, bu "bo'shliq" ni to'ldirish kerak, buning uchun irratsional sonlar tushunchasi kiritiladi va ratsional sonlar to'plamidagi "bo'shliqlar" yopiladi.

Haqiqiy sonlarga arifmetik amallarni qo'llash usulini ko'rib chiqaylik.

Aksariyat darsliklarda irratsional sonlar cheksiz davrlarsiz o'nli kasr shaklida aniqlanadi (Veyershtrassga ko'ra). Keyin quyidagi savollar tug'iladi: "Cheksiz davrsiz o'nli kasrlarda qanday amallar bajariladi?", "Cheksiz davrsiz o'nli kasr sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish mumkinmi? "Buning iloji yo'qligini tushunish oson. Chekli kasrlar kiritilganda, ularning nozikligi hisobga olinadi. Shuning uchun ular oxiridan qo'sxiladi: avval eng kichik sonlarning birliklari qo'sxiladi, eng oxirida eng katta sonlarning birliklari qo'sxiladi.

Qo'shish amalini teskari tartibda bajarish mumkin emas, chunki o'nli tizimdagi bitta sonning o'nta birligi keyingi sonning bitta birligini tashkil qiladi.

Quyidagi muammo tug'iladi: ikki cheksiz davrsiz o'nli kasrlarning yig'indisi nimaga teng? Cheksiz davrsiz o'nli kasrlarga qo'llaniladigan arifmetik amallarning ma'nosini tushuntirish oson emas. Ularning geometrik ma'nosini tushuntirish oson. Uzunliklari $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ikkita mavjud segmentlar (tegishli to'g'ri burchakli uchburchaklarning gipotenuzalari kabi) asta-sekin bitta chiziq bo'ylab tortilishi mumkin. Natijada uzunliklarning yig'indisi $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan yangi irratsional son hosil bo'ladi. Siz tomonlari $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ bo'lan to'rtburchak chizishingiz mumkin. Ushbu to'rtburchakning yuzi $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ bo'ladi. Ushbu muhokamalarning uslubiy maqsadi nima? Ularni iloji boricha aniqlaylik. Ma'lum bo'lgan 2 va 3 sonlarini olib, ularni quyidagi yangi qoida bo'yicha qo'shamiz: Bu sonlarni cheksiz davrsiz o'nli kasr shaklida ifodalaylik: 2 = 2,00000 , 3 = 3,0000 Berilgan sonlarning ortig'i va kami bilan yaqinlashishlarini ko'rib chiqamiz. Ularni qo'shamiz: 2 + 3 ning yig'indisi quyidagi ajoyib xossalarga ega ekanligini ko'rish oson bo'ladi:

$$\begin{gathered} 5 \leq 2+3<5, \\ 5,0 \leq 2+3<5,2, \\ 5,00 \leq 2+3<5,02, \\ 5,000 \leq 2+3<5,002, \\ 5,0000 \leq 2+3<5,0002, \\ 5,00000 \leq 2+3<5,00002. \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{gathered}$$

Ushbu tengsizliklardan 2 + 3 yig'indisining butun qismi 5 ga teng va har bir verguldan keyin berilgan raqami 0 ga teng. Ushbu qo'shimcha usul, har qanday ikki davrsiz o'nli kasrlarni qo'shish uchun ishlatilishi mumkin. Ikkita haqiqiy sonni ko'paytirish jarayoni xuddi shu tarzda amalga oshiriladi. Ayirish va bo'lish o'z navbatida qo'shish va ko'paytirishga teskari amal sifatida bajarilishi mumkin. Bundan haqiqiy sonlarni taqqoslash $x_n \leq x < x_n'$ qoidadan kelib chiqadi.

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Aksariyat darsliklarda irratsional sonlar qanday aniqlanadi?
2. Ratsional sonlarning ichida kvadrati ikkiga teng bo'lgan ratsional son bormi?
3. O'rta maktabda irratsional sonni kiritishning qanday usullari mavjud?
4. Haqiqiy sonlarni kiritish uslubiyotini izohlang.
5. Irratsional sonlarni kiritishning ehtiyojlari haqida nimalar bilasiz?



## 1.10-§. Taqribiy hisob-kitoblarni o'qitish usullari

REJA:

1. Taqribiy hisob-kitoblar haqida tushuncha.
2. Taqribiy hisob-kitoblarni o'qitish uslubiyoti.

Maktab matematika kursida amaliy orientatsiyani "Taqribiy hisoblash mavzusi"oshiradi. Milliy iqtisodiyotda va maktab amaliyotida elektron hisoblash mashinalari kiritilganligi sonlarni yaxlitlash masalasini qo'yadi. Demak matematika o'qituvchisi sonlarni yaxlitlash qoidalarini o'quvchilarga o'rgatishi kerak. Bunda sonlar yaxlitlanayotganda quyidagi sxemaga amal qilish kerak:

Agar son qaysi bir razryadga yaxlitlanayotgan bo'lsa, bu razryaddan keyingi raqamga e'tibor qaratiladi: agar bu raqam 0,1,2,3,4 ragamlaridan biri bo'lsa, razryaddagi raqam o'zgarishsiz qoladi; agar bu raqam 5,6,7,8,9 ragamlaridan biri bo'lsa, razryaddagi raqamga bir qo'sxiladi. Masalan,

18785 minglargacha yaxlitlansa, $18785 \approx 19000$.

18785 yuzliklargacha yaxlitlansa, $18785 \approx 18800$.

15,489 butun songacha yaxlitlansa, $15,489 \approx 15$.

125,671 kasr soni o'ndan birgacha yaxlitlanganda $125,671 \approx 125,7$ bo'ladi.

Muhandislik va boshqa hisoblash ishlarida o'nli kasrlarni qo'llash maqsadga muvofiq. Misol uchun, $\frac{6}{11}=0,(54)$ ekanligini bilamiz. Ammo taqribiy hisoblarda $\frac{6}{11} \approx 0,54$ deb olinadi. Taqribiy hisoblarda taqribiy sonlarni qo'shish va ayirish quyidagi muammolarni o'z ichiga oladi.

1-misol. $x \approx 3,614$, $y \approx 1,56$.

$$\begin{array}{r} 3{,}614 \\ +\ 1{,}56? \\ \hline 5{,}174 \end{array}$$

1,56 komponentining minginchi razryadidagi son noma'lum, shuning uchun yig'indining minginchi razryadidagi son ham shubhali. Shuning uchun yig'indini 5,17 deb olamiz. Binobarin, $x+y\approx 5{,}17$

2-misol. $x\approx 5{,}895$ va $y\approx 3{,}6$ larning farqini toping

$$\begin{array}{r} 5{,}895 \\ -\ 3{,}6?? \\ \hline 2{,}295 \end{array}.$$

3,6 sonidagi verguldan keyingi ikkita honadagi sonlar noma'lum. Shuning uchun bular orasidagi farq shubhali bo'lganligi uchun ayirishni verguldan keyingi o'nliklargasha yaxlitlash zarur:

$$x-y\approx 2{,}3.$$

Sonlarni ko'paytirish amalini bajarish uchun ham e'tiborli bo'lish kerak.

1-misol.Ikki $x\approx 2{,}963$; $y\approx 0{,}7$ sonlarning ko'paytmasini topish:

$$2{,}963\cdot 0{,}7\approx 2{,}0741;\quad x\cdot y\approx 2;$$

Ko'paytma bitta songa ega bo'lishi uchun yaxlitlanadi, chunki multiplikatorda minimal son bitta bo'ladi.

2-misol. $x\approx 9{,}837$; $y\approx 1{,}7$.

$$9{,}837:1{,}7\approx 5{,}786...;\ x:y\approx 5{,}8.$$

## Bobni o'zlashtirish uchun savollar

1. Maktab matematikasida tarixiy rivojlanish va matematik fanlar jarayonida sonlar to'plamlarini kengaytirishdagi o'xshashlik va farqlar nimada?

2. Maktabda sonli to'plamlarning kengaytmasini qanoatlantiradigan shartlarni aytib bering.

3. Maktabda son tushunchasi nima?



4. Maktab matematikasi kursida sonlar to'plamlarni kengaytirishning mumkin bo'lgan variantlarini ko'rib chiqing.

5. Natural sonlar tushunchasi qaysi sinflarda va qaysi tarkibda o'qitiladi?

6. O'quvchilarga natural sonlarning ma'nosini qanday tushuntirish mumkin?

7. Boshlang'ich sinfda natural son tushunchasini o'rganish natijasida olingan bilimlarni nomlang.

8. 5-sinfda "Natural sonlar va ularning xossalari" mavzusini o'rganishning asosiy maqsadini aytib bering.

9. Natural sonlarni taqqoslashni namoyish eting.

5. 5-sinfda natural sonlarni qo'shish masalasini qanday umumlashtirish kerak?

11. Qo'shish qonunlarini nomlang va uni izohlang.

12. Ko'p xonali natural sonni yozing. Son razryadlarini kiritishni o'rgatish uchun undan qanday foydalanish kerak?

13. Natural sonlarni qanday ayirishni aniqlang. Kamayuvchining xossalari qanday?

14. Natural sonlarni ko'paytirish va bo'lish usullarini qanday aniqlash mumkin? Ularga qanday qonunlar yoki qoidalar qo'llaniladi?

15. "Natural sonlarning bo'linish alomatlari" mavzusini o'qitishning asosiy maqsadi nima? Qanday qilib bu mavzu darsliklarda yoritilishi mumkin?

16. Natural sonning tub bo'luvchiari tushunchasini qanday aniqlash mumkin?

17. Qanday sonlar tub yoki murakkab deb ataladi?

18. "Natural sonlarning bo'linish alomatlari" mavzusini o'tishda o'quvchilarga qanday turtki berish kerak?

19. Natural sonlar yig'indisi va ko'paytmasining bo'linishi tushunchalarini qanday o'rgatish mumkin?

20. Natural sonlarning yig'indisi va ko'paytmasini izohlang.

21. 2 ,3, 5, 9, 10 ga bo'linish alomatlarini qanday o'rganish mumkin?

22. Natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish zarurligini qanday tushuntirish mumkin?

23. Natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratishni qanday o'rgatish kerak?

24. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo'luvchi tushunchalarini qanday kiritishni ko'rsating.

25. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo'luvchi nima?

26. Oddiy kasrlar tushunchasining kiritilishi haqida gapirib bering. Oddiy kasr tushunchasini kiritish zarurligini izohlang.

27. Oddiy kasrning xossalari qanday?

28. Oddiy kasrlar turlarini ayting va misollar keltiring.

29. Oddiy kasrlarni qanday taqqoslash mumkin?

30. Oddiy kasrlarni qo'shishni o'rgatish uchun misollar keltiring.

31. Oddiy kasrlarning qisqarishini qanday izohlash mumkin?

32. Oddiy kasrlarni ko'paytirishni qanday o'rgatish kerak?

33. Oddiy kasrlarni ayirish va kasrlarga bo'lishni o'rgatish usullarini namoyish eting.

34. O'nli kasr tushunchasini qanday kiritish mumkin?

35. O'nli kasrlarni qo'shishni va ayirishni o'rganishni ko'rsating.

36. O'nli kasrni o'n soniga qanday ko'paytirish kerak?

37. Oddiy kasrlarni o'nli kasrlarga aylantishni qanday o'rgatish kerak?

38. Manfiy sonlar tushunchasini kiritish zarurligini tushuntiring.

39. Qanday misollar musbat va manfiy sonlarning ma'nosini ochib beradi?

40. Musbat va manfiy sonlarni qo'shish va ayirish qoidalariga misollar keltiring.

41. Musbat va manfiy sonlarni ko'paytirish va bo'linishini qanday o'rganish kerak?

42. Natural sonni butun sonlar to'plamiga kengaytirishning izohi nima?

43. Ratsional songa qanday o'tish kerak?



44. Ratsional son tushunchasi qaysi sinfda va qanday kiritiladi?

45. Maktab darsliklaridagi "Ratsional sonlar" mavzusini tahlil qiling.

46. Haqiqiy sonlar tushunchasini 6-sinfdan boshlab kiritishning sabablari nimada?

47. Matematikada irratsional sonlar tushunchasining paydo bo'lishiga nima sabab bo'ldi?

48. Maktab matematikasi kursida irratsional sonlar tushunchasini kiritish imkoniyatlari qanday?

49. "Barcha ratsional sonlarning ichida kvadratlari ikkiga teng bo'lgan ratsional son yo'q" teoremasini isbotlang.

50. Haqiqiy sonlarda qanday amallar bajariladi? Misollar ko'rsating.

51. Taqribiy hisob-kitoblar qaysi sinflarda, qanday sabablarga ko'ra joriy qilinadi?

52. Taqribiy sonlar nima, u qanday yaxlitlanadi?

# II BOB. MATEMATIK AYNIY ALMASHTIRISHLARNI O'QITISH USLUBIYOTI

## 2.1. Ayniy almashtirishlar

REJA:

**1. Ayniy almashtirishga ehtiyoj to'g'risida umumiy ma'lumot.**
**2. Ifodalar.**
**3. Ifodaning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasi.**
**4. Shakl almashtirish, uni o'zgartirish usullari.**

### 1. Ayniy almashtirishga ehtiyoj to'g'risida umumiy ma'lumot

Ayniy almashtirish maktab matematikasining asosiy tarkibiy-uslubiy yo'nalishlaridan biridir. Har bir matematik masalani analitik usulda yechish ba'zi mutanosib o'zgarishlarni amalga oshirishni talab qiladi. Tenglama o'zgarishlari algebra va matematik tahlil davomida o'rganiladi. O'rta maktab matematika kursining eng dolzarb masalalaridan biri bu matematik ifodalarni ayniy almashtirish madaniyatini shakllantirishdir. O'quvchi matematik ifodalarning to'g'ri o'zgarishi natijasida analitik ifodani oddiy ifodaga almashtirishga, ayniy almashtirish ketma-ketligida aniqlanish sohasidagi o'zgarishlarni boshqarishga, o'zgarishlarni tez va xatosiz bajarishga va hokazo ko'nikmalarni egallaydi.

O'quvchilarning mutanosib o'zgarishlarni amalga oshirish qobiliyati, madaniyati matematik ob'ektlar (sonlar, birhadlar, ko'phadlar, vektorlar va boshqalar) bo'yicha amallarning xossalari va ularni amalga oshirish algoritmi to'g'risidagi bilimlari asosida rivojlanadi. Ayniy almashtirishlarni bajarmasdan matematikada qadam tashlash mumkin emas.

Algebrani o'qitish jarayonida ayniy almashtirish – bu bitta analitik ifodani unga teng keladigan va shakli jihatidan farq qiladigan boshqa ifoda bilan



almashtirish. Matematik ifodalarning ayniy almashtirish konvertatsiyasining asosiy tushunchasi "ifoda", "tenglama" dir.

### 2. Ifodalar

Matematikada sonlarni, kasrlarni va irratsional sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, sonlarni logarifmini topish, trigonometrik funksiyalarning qiymatlarini topish kabi qator amallar bajariladi. Ifodalar sonlar va harflar bilan belgilanadi.

Matematik amallar orqali sonlar yoki harflarni bog'laydigan yozuvga matematik yoki analitik ifoda deyiladi. Biz matematik ifodani qisqacha ifoda deb ataymiz. Algebraik amallarda qatnashgan son va harflar ifoda hosil qiladi. Agar faqat sonlar bilan ish olib borilsa, masalaning mohiyatini topishga arifmetik ifoda deyiladi. Algebraik ifodalar ratsional va irratsional ifodalarga bo'li-nadi. Agar amallar butun darajali ifodalarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lishni o'z ichiga olgan bo'lsa, bu ifodalar ratsional ifodalar deb, sonning ildizini topish bo'yicha amallar ushbu amallar bilan birga bajarilgan bo'lsa, bu ifoda irratsional ifoda deb ataladi.

Masalan, $4x + x^2 - 3, \quad \frac{a}{2}, \quad \frac{x^4 - 2y}{x+3}$ ratsional ifodalar,

$\sqrt{x^2 - 1}, \quad 2x^2\sqrt{x}, \quad y \cdot x^{\frac{3}{2}}$ esa irratsional ifodalardir.

Agar algebraik amallardan tashqari, ifoda shuningdek irratsional darajali bo'lsa, sonning logarifmini va trigonometrik funksiyalarning qiymatlarini topish amallarini o'z ichiga olsa, transsendent (algebraik bo'lmagan) ifoda deyiladi. Masalan,

$$\frac{x^{\sqrt{3}} + x^2}{5}, \quad x\sin x, \quad \log_2 x + 3, \quad \frac{tgx + 1}{tgx - 1}$$

ifodalar transsendent ifodalardir. Ifodalar butun va kasrlarga bo'linadi. Mahrajda o'zgaruvchi qatnashgan ifoda kasrli ifoda deyiladi.

$\frac{x^3-27}{x^2}$, $\frac{\lg x+1}{\lg x}$, $\frac{a^2-1}{\sqrt{a}}$, $\frac{2\sin x}{\cos 2x}$ - kasrli ifoda va

$2\frac{1}{2}a^2$, $\frac{x+3}{4}$, $x^2-2x$ - butun ifodalardir.

### 3. Ifodaning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasi

Ifodaning sonli qiymati - bu berilgan harflarni harflar qabul qila oladigan sonlar bilan almashtirish orqali bajariladigan amallardir. Ifoda tarkibidagi harflar, ya'ni ifodani tashkil etuvchi harflarning qiymatlari ifodaning mumkin bo'lgan qiymatlari deyiladi. Ifodadagi barcha harflarning mumkin bo'lgan qiymatlari mumkin bo'lgan qiymatlar sohasi yoki ifodalarning aniqlash sohasi deyiladi. Keyinchalik haqiqiy sonlarda harflarning mumkin bo'lgan qiymatlarini ko'rib chiqamiz.

Masalan, logarifmik funksiyada qatnashgan $x$ faqat musbat sonlarni qabul qiladi va uning boshqa funksiyalardan asosiy farqi musbat sonlardan boshqa sonlarni qabul qila olmasligidir, xatto $x$ nolga teng bo'lishi mumkin emas: $x \neq 0$.

Ifodada noma'lumning mumkin bo'lgan qiymatlari diapazoni ham masalaning shartlariga bog'liq. Agar harf geometrik shaklning o'lchamini aks ettirsa, uning mumkin bo'lgan qiymati faqat musbat sonlar va agar harf ob'ektlarning sonini ko'rsatsa, u faqat natural sonlar bo'lishi mumkin.

Misol. Ifodalarning aniqlanish sohasini toping.

*a)* $\frac{2x}{x-3}$; *b)* $\sqrt{x^2-4}$; *c)* $\sqrt{x+1}\cdot\log(x-1)$;

*d)* $\sqrt{\sin x+\cos x-2}$; *e)* $\frac{a^2-b^2}{a-b}$; *k)* $\frac{x}{x^2+1}$.

Yeshish: *a)* kasr mahraji $x-3\neq 0$ nolga teng emas, shuning uchun $x\neq 3$. Binobarin, ifodaning aniqlanish sohasi: $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

*b)* Ildiz ostidagi ifoda manfiy emas $x^2-4\geq 0$. Ammo bu tengsizlik $x\leq -2$; $x\geq 2$ tengsizliklarga teng kuchli.



Ifodaning aniqlanish sohasi: $x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

*c)* Ushbu ifodaning mumkin bo'lgan qiymatlari

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

tengsizliklar bilan ifodalanadi.

Yechim: $\begin{cases} x\geq -1 \\ x>1 \end{cases}$

Bundan tashqari $x>1$, shu sababli, ifodaning aniqlanish sohasi: $x\in(1;+\infty)$.

*c)* $sinx+cosx-2\geq 0$ bo'lishi kerak. Lekin

$$sinx+cosx\geq 2\to\frac{\sqrt{2}}{2}sinx+\frac{\sqrt{2}}{2}cosx\geq\sqrt{2}\ \to\sin(\frac{\pi}{4}+x)\geq\sqrt{2}$$

va $\left|\sin(\frac{\pi}{4}+x)\right|\leq 1$ bo'lganlıgi uchun, ifodaning mumkin bo'lgan qiymatlari oralig'i $\emptyset$, ya'ni bo'sh to'plamdir.

*d)* $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ ifoda faqat $a\neq b$ holdagina ma'noga ega bo'ladi.

*e)* $x^2+1$ ifoda $x$ ning ixtiyoriy qiymatida ham nolga teng emas. Shuning uchun, bu ifodaganing mumkin bo'lgan aniqlanish oralig'I $x\in(-\infty;+\infty)$.

### 4. Shakl almashtirish, uni o'zgartirish usullari

Agar ikkita ifoda teng belgi bilan bog'langan bo'lsa, u tenglik deyiladi. Tenglikning har ikki tomonidagi harflarning mumkin bo'lgan qiymatlari bu tenglikning mumkin bo'lgan qiymatlari oralig'i yoki aniqlash sohasi hisoblanadi. Masalan, tenglamani aniqlanish sohasini topish kerak bo'lsin:

*a)* $x=\frac{x^2}{x}$ *b)* $sinx=tgx$ *c)* $\sqrt{3+x}=\sqrt{2-x}$

Yeshish. *a)* Tenglikning chap tomoni $x$ ning barcha qiymatlari uchun, o'ng tomoni esa nol bo'lmagan barcha haqiqiy qiymatlar uchun aniqlanadi. Berilgan tenglikni aniqlanish sohasi noldan boshqa barcha haqiqiy sonlar bo'ladi:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

*b*) Uning aniqlanish sohasi: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k \in Z.$

*c*) Tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun

$$\begin{cases} 3+x \geq 0, \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$$

tengsizliklar, yoki $-3 \leq x \leq 2$ o'rinli bo'lishi kerak. Aniqlanish sohasi $x \in [-3; 2]$.

Tenglikning chap va o'ng tomonidagi ifodalar teng ifodalar deyiladi. Matematik ifodani uning ekvivalent ifodalari bilan almashtirish uning o'zgarishi deb ataladi.

Masalan, $(x+2)(x-2)$ va $x^2-4$ ifodalar $x$ ning har qanday qiymatida tengdir.

$$\frac{a^2-1}{a-1} = a+1$$

tenglik esa- bu $a$ ning birdan tashqari barcha qiymatlarida tengdir.

Aytaylik, $x$, $y$ va $z$ o'zgaruvchilar berilgan bo'lsin. Ular uchun quyidagilar o'rinli:

1. Agar $x=y$ va y=z bo'lsa u holda $x=z$ bo'ladi.
2. Agar $x = y$ bo'lsa, u holda $x \pm z = y \pm z$ bo'ladi.
3. Agar $x = y$ bo'lsa, u holda $x \times z = y \times z$ bo'ladi.
4. Agar $x = y$ bo'lsa, u holda $\frac{x}{z} = \frac{y}{z}$ , $(z \neq 0)$ bo'ladi.

Oddiy tenglamalarga xos arifmetik amallarning xossalari:

1) $a + b = b + a$

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

3) $a \cdot b = b \cdot a$

4) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$



5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Qisqa ko'paytirish formulalarini ham tengliklar sifatida olish mumkin:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Maktab darsliklarida "tenglik" tushunchasining turli xil ta'riflari qo'llaniladi:

1) o'zgaruvchining har qanday qiymatida amal qiladigan tenglikka tenglama deyiladi;

2) o'zgaruvchining barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida to'g'ri bo'lgan tenglikka tenglama deyiladi;

3) berilgan to'plamga mos keladigan o'zgaruvchining har qanday qiymatida to'g'ri bo'lgan tenglikka bu to'plamdagi tenglama deyiladi.

1-turdagi tenglama ta'rifi faqat ratsional ifodali tenglamalar uchun o'rinli, ammo kasrlar va ildizlar qatnashgan tenglamalar bu holatda tenglama bo'lolmaydi.

$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ va $(\sqrt{x})^2 = x$ lar 2-ta'rifning $x \geq 0$ qiymatlari uchun ekvivalentdir va $\sqrt{x^2} = x$ tenglama ushbu tenglik ta'rifini qoniqtirmaydi, chunki $x$ ning manfiy qiymatlarida tenglamaning o'ng va chap tomonlarining mumkin bo'lgan qiymatlari teng bo'lishi mumkin emas.

Ta'rifga ko'ra, tenglama bu o'zgaruvchining ushbu to'plamning har qanday qiymati uchun haqiqiy deb hisoblanadigan tenglama. Ushbu to'plam tenglamaning chap va o'ng qismidagi ifodalarning umumiy aniqlanish sohasidagina teng bo'la oladi.

Odatda, tenglik ta'rifi to'g'ridan-to'g'ri ifodalarning ekvivalentligini isbotlash uchun ishlatilmaydi va ular teng emasligini ko'rsatish uchun ifodalarni ishlatish qulay.

Ayniy almashtirishning qiymati shundaki, u berilgan ifodani unga o'xshash boshqa ifoda bilan, uchinchi o'xshash ifoda bilan almashtiradi va hokazo almashtirishga imkon beradi. Boshqacha aytganda, u o'tish xossasiga ega: agar A B ga teng bo'lsa , B esa C ga teng bo'lsa, u holda A C ga tengdir.

1-turdagi tenglikni aniqlashning oqibatlari 2 va 3-tipdagi ta'riflar ekanligini ko'rish qiyin emas. Qarama-qarshi xulosa har doim ham o'rinli emas. Bu shuni ko'rsatadiki, ta'riflar bir-birini inkor etmaydi. Algebraik ifodalarga nisbatan qo'llaniladigan amallarning ikkita mumkin bo'lgan talqini mavjud.

Birinchi izoh mavhum algebraning qarashlarini aks ettiradi. Muayyan algebraik amalni bajarish uchun berilgan ifodalar o'rtasida mos keladigan ishorani qo'yish kifoya qiladi. Agar amallar ifodalar orasida joylashtirilgan bo'lsa, amal bajarilgan deb hisoblanadi. Agar keyingi ekvivalent o'zgarishlar amalga oshirilsa, hosil bo'lgan yig'indisi (ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi) transformatsiya emas, balki yozma yig'indi (ayirma, ko'paytma, bo'linma) ning o'zgarishini ko'rsatadi. O'zgarish algebraik qonunlarni rasmiy qo'llash orqali amalga oshiriladi.

Ikkinchi izoh funksional tahlil nuqtai-nazarni aks ettiradi, bunda ikki polinomni "+" belgisi bilan rasmiy birlashtirish (bu ifodaga kiritilgan o'zgaruvchining barcha qiymatlarida) yyto'g'ri emas. Shu sababli, birinchi talqinga ko'ra, "Ikkita ifodaning yig'indisini (farqini, ko'paytmasini, bo'linimasini) topish" ga doir misollar juda kam uchraydi. Algebra darsliklarida quyidagi mashqlar uchraydi:

1. Hisoblang: 1,6 (-0,2);

2. *7(x-y)* formuladagi ayirishni ko'paytirishga nisbatan guruhlashdan foydalangan holda ekvivalent ifodaga aylantiring;

3. Qavslarni oching: $x + (a-b) - (c + d)$;

4. Ifodani soddallashtiring: $64- (14 + 7x)$;

5. O'xshash ifodalarni soddalashtiring: $(x-1) + (12-7{,}5x)$ va hokazo. Ba'zan quyidagi mashqlar topshiriladi:

$$17x-13y + 8 \text{ va } 20x + 6y$$



ifodalar orasidagi farqni aniqlang".

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Ayniy almashtirishga ehtiyoj to'g'risida nimalar bilasiz?
2. Matematik ifodalarga nimalar kiradi?
3. Ifodaning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasi qanday o'rgatiladi?
4. Shakl almashtirish, uni o'zgartirish usullari o'z ichiga nimalarni oladi?
5. Maktab darsliklarida "tenglik" tushunchasining qanday ta'riflari qo'llaniladi?

## 2.2-§. Ratsional ifodali tengliklarni o'rganish

REJA:

1. Algebraik kasrlar va algebraik kasrlar ustida amallarni o'rgatish uslubiyoti.
2. Algebraik kasrlarni soddalashtirishga oid misollar.

**1. Algebraik kasrlar va algebraik kasrlar ustida amallarni o'rgatish uslubiyoti**

Ifoda sur'at va mahrajida $x$ o'zgaruvchili polinomlar qatnashgan ifodalar kasr ratsional ifodalar yoki algebraik kasrlar deyiladi. $P(x)$ va $Q(x)$ polinomlar bo'lsa , algebraik kasr odatda $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kabi yoziladi, bu yerda $Q(x) \neq 0$. Masalan,

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad \frac{x+y}{x-y}; \quad \frac{3}{x}; \quad \frac{20y}{5bx}$$

ratsional ifodalardir. Ularning barchasida mahrajdagi ifoda noldan farqli bo'lishi kerak. $\frac{P}{Q}$ va $\frac{P_1}{Q_1}$ lar teng bo'lishi uchun $Q \neq 0, Q_1 \neq 0$ bo'lganda $Q_1P = QP_1$

bo'lishi zarur. Agar sur'atni ham, mahrajni ham nolga aylanmaydigan bir xil ifodaga ko'paytirilsa yoki bo'linsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\frac{P}{Q} = \frac{N \times P}{N \times Q}\ ,\ \frac{P}{Q} = \frac{P/N}{Q/N}.$$

Kasrlarni qo'shish va ayirishda ularning umumiy mahrajini topish kerak. Kasrlar bo'yicha amallarga quyidagi qoidalar qo'llaniladi:

$$1.\ \frac{P}{N} + \frac{Q}{N} = \frac{P+Q}{N}\ ;2.\ \frac{P}{N} - \frac{Q}{N} = \frac{P-Q}{N}$$

$$2.\ \frac{P}{N} \times \frac{Q}{M} = \frac{P \times Q}{NM}\ ;4.\ \frac{P}{N} : \frac{Q}{M} = \frac{P \times M}{N \times Q}$$

$$3.\ (\frac{P}{Q})^n = \frac{P^n}{Q^n}\ ;6.\ (\frac{P}{Q})^{-n} = \frac{Q^n}{P^n}$$

### 2.Algebraik kasrlarni soddalashtirishga oid misollar

1-misol. Amallarni bajaring:

$$a: \frac{a-1}{2} - \frac{a^3 + 3a(a-1) - 1}{2a^2 + 2a} \times \frac{-4a}{a^2 + 1 - 2a} - \frac{4a^2}{a^2 - 1}$$

Bu misolni yechish uchun avvalo ifodadagi mahrajdagi ifodalarning 0 dan farqli bo'lishi kerakligiga e'tibor qaratamiz:

$$a - 1 \neq 0,\quad a^2 + a \neq 0,\quad a^2 - 1 \neq 0,\qquad a^2 - 2a + 1 \neq 0$$

Oxirgi tengliklardan $a \neq 1, a \neq 0$ ni hosil qilamiz. Endi har bir amalni alohida-alohida bajaramiz:

$$1)\ a: \frac{a-1}{2} = a \times \frac{2}{a-1} = \frac{2a}{a-1}$$

$$2)\ \frac{a^3+3a(a-1)-1}{2a^2+2a} \times \frac{-4a}{a^2+1-2a} = \frac{(a^3+3a(a-1)-1)\times(-4a)}{2a(a+1)(a-1)^2} =$$

$$= \frac{-2(a-1)(a^2+a+1+3a)}{(a+1)(a-1)^2} = \frac{-2(a^2+4a+1)}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{-2(a-1)(a^2+a+1+3a)}{(a+1)(a-1)^2} = \frac{-2(a^2+4a+1)}{(a+1)(a-1)}.$$



$$\frac{2a}{a-1} - \frac{-2(a^2+4a+1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{4a^2}{a^2-1}$$

$$= \frac{2a(a+1) + 2(a^2+4a+1) - 4a^2}{a^2-1} =$$

$$= \frac{2a^2+2a+2a^2+8a+2-4a^2}{a^2-1} = \frac{10a+2}{a^2-1}$$

ni hosil qilamiz.

2-misol. Ifodani soddalashtiring: $\frac{x^2}{(x-y)(y-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$

Yechish. Kasrlarning umumiy mahraji: $(x-y)(y-z)(z-x)$

$$\frac{x^2(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} + \frac{-(z-x)y^2}{(y-z)(y-x)(z-x)} + \frac{(x-y)z^2}{(z-x)(z-y)(x-y)}$$

Sur'atlarni soddalashtiramiz:

$$x^2(z-x) + y^2(x-z) + z^2(y-x) =$$

$$x^2(z-x) + y^2(x-z) + z^2(y-x) = -x^2(y-z) + xy^2 - y^2z + yz^2 - xz^2 =$$

$$= -x^2(y-z) + x(y^2 - z^2) - yz(y-z) = (y-z)(-x^2 + xy + zx - yz) =$$

$$= (y-z)(x(z-x) - y(z-x)) = (y-z)(z-x)(x-y)$$

Demak, $\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$.

3-misol. Ifodani soddalashtiring:

$$f(a) = \left(\frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{a^2+5a+6}\right)^2 \frac{(a-3)^2+12a}{2}$$

Yeshish. Biz kasr mahrajlarni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$a^2+3a+2 = a^2+a+2a+2 = a(a+1)+2(a+1) = (a+1)(a+2),$$

$$a^2+4a+3 = (a+1)(a+3),\quad a^2+5a+6 = (a+2)(a+3).$$

Qavslarni umumiy mahrajga keltirib, biz quyidagilarni amalga oshirishimiz mumkin.

$$f(a)=\left(\frac{a+3+2a(a+2)+a+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}\right)^2\cdot\frac{a^2-6a+9+12a}{2}=$$

$$=\left(\frac{2a^2+6a+4}{(a+1)(a+2)(a+3)}\right)^2\cdot\frac{a^2+6a+9}{2}=\left(\frac{2(a^2+3a+2)}{(a^2+3a+2)(a+3)}\right)^2\cdot\frac{(a+3)^2}{2}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{(a+3)^2}\cdot(a+3)^2=2.$$

va $a\neq-1,\quad a\neq-2,\quad a\neq-3$ bo'lganda $f(a)=2$ bo'ladi.

4-misol. Agar $a+b+c=0$ bo'lsa, $a^3+b^3+c^3=3abc$ ni isbotlang.

Yechish. $a+b+c=0$ dan $a=-b-c$ kelib chiqadi. Keyin

$$a^3+b^3+c^3=(-b-c)^3+b^3+c^3=-(b+c)^3+b^3+c^3=$$

$$=-(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+b^3+c^3=-(3b^2c+3bc^2)=-3bc(b+c).$$

$b+c=-a$ ekanligini hisobga olsak,

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

ni hosil qilamiz.

5-misol. Agar $a\neq0,\quad b\neq0,\quad c\neq0$ va $a+b+c=0$ bo'lsa,

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$$

ekanini isbotlang.

Yechish. Ikkinchi qavsdagi birinchi kasrga birinchi qavsni ko'paytiramiz:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{c}{a-b}=1+\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}=$$

$$=1+\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}\cdot\frac{c}{a-b}=1+\frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}\cdot\frac{c}{a-b}=$$

$$=1+\frac{(a-b)(c-(a+b))}{ab}\cdot\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{ab}(c-(a+b))$$



Shart bo'yicha $a+b=-c$.

Shuning uchun $1+\frac{2c^2}{ab}$ hosil bo'ladi.

Xuddi shunday, agar birinchi qavsdagi ifoda ikkinchi qavsdagi ikkinchi kasrga $1+\frac{2a^2}{ab}$ va uchinchi kasrga ko'paytiramiz: $1+\frac{2b^2}{ca}$

Biz natijalarni qo'shamiz.

$$1+\frac{2c^2}{ab}+1+\frac{2a^2}{bc}+1+\frac{2b^2}{ca}=3+2\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}\right)=3+\frac{2(c^3+a^3+b^3)}{abc}$$

Va $a^3+b^3+c^3=3abc$ (4-misol)dan

$$3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=3+\frac{2\cdot3abc}{abc}=9$$

ni hosil qilamiz.

6-misol. Agar $\frac{l}{a}+\frac{m}{b}+\frac{n}{c}=1$ va $\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=0$ bo'lsa,

$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}=1$ ekanligini isbotlang.

Yechish:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}=\left(\frac{l}{a}+\frac{m}{b}+\frac{n}{c}\right)^2-2\frac{l}{a}\cdot\frac{m}{b}-2\frac{l}{a}\cdot\frac{n}{c}-2\frac{m}{b}\cdot\frac{n}{c}=1-2\left(\frac{lm}{ab}+\frac{ln}{ac}+\frac{mn}{bc}\right)=$$

$$=1-2\frac{l}{a}\cdot\frac{m}{b}\cdot\frac{n}{c}\left(\frac{c}{n}+\frac{b}{m}+\frac{a}{l}\right)=1-2\frac{l}{a}\cdot\frac{m}{b}\cdot\frac{n}{c}\cdot0=1.$$

7-misol. $ax+by+cz=0$ bo'lganda

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$ ni soddalashtiring.

Yechish: Kasr mahrajini soddalashtiramiz:

$$bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2=bcy^2-2bcyz+bcz^2+$$
$$+acz^2-2acxz+acx^2+abx^2-2abxy+aby^2=$$
$$=c(ax^2+by^2)+b(ax^2+cz^2)+a(cz^2+by^2)-2bcyz-2acxz-2abxy=$$
$$=c(ax^2+by^2)+b(ax^2+cz^2)+a(cz^2+by^2)-2bcyz-2acxz-2abxy=$$
$$-2acxz-2abxy=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)-(ax+by+cz)^2.$$

Misolning shartiga ko'ra, $ax+by+cz=0$, shuning uchun oxirgi natija

$(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)$

ga teng bo'ladi va ushbu ifodani berilgan kasrning mahrajiga qo'yib,

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)}=\frac{1}{a+b+c}.$$

ni hosil qilamiz.

8-misol. Tenglikni isbotlang:

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-z)(y-x)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=\frac{1}{xyz}.$$

Yechish. Bu kasr $xyz(x-y)(x-z)(y-z)\neq 0$ bajarilmasa ifoda ma'noga ega bo'lmaydi. Umumiy mahrajga keltirib

$$\frac{yz(y-z)-xz(x-z)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(x-z)}$$

ni hosil qilamiz va

$$y-z=y+x-x-z=(x-z)-(x-y)\text{ekanligidan}$$
$$yz((x-z)-(x-y))-xz(x-z)+xy(x-y)=$$
$$=(x-z)(yz-xz)+(x-y)(xy-yz)=(x-y)(x-z)(y-z).$$

kelib chiqadi. Agar shunday bo'lsa, $\dfrac{(x-y)(x-z)(y-z)}{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}=\dfrac{1}{xyz}.$

shuni isbotlash kerak edi.



## 2.3. Irratsional ifodali tenglamalarni o'zgartirish

REJA:

1. Arifmetik ildiz.
2. Ratsional darajaning xossalari.
3. Irrasional ifodalar va ularni o'zgarishiga misollar.

### 1. Arifmetik ildiz

Aytaylik, $a$ haqiqiy son, $n$ esa 1 dan katta musbat butun son bo'lsin

$$x^n=a \qquad (1)$$

tenglikdan $x$ ni topaylik.

Agar (1) da $a=25$, $n=2$ desak, $x^2=25$ va bu tenglama ildizlari ikkita son $x_1=5$, $x_2=-5$ ga teng bo'ladi.

Agar $a=32$, $n=5$ bo'lsa, tenglama $x^5=32$ ko'rinishda bo'lib, uning ildizi bitta son $x=2$ bo'ladi. Agar $a=-16$, $n=4$ desak, $x^4=-16$ tenglikni qanoatlantiradigan haqiqiy son yo'q deb aytamiz.

Ushbu misollar shuni ko'rsatadiki, $n$ juft son $a>0$ bo'lsa, masalaning ikkita yechimi bor va agar $a<0$ bo'lsa, yechim yo'q, agar $n$ toq son bo'lsa, $a$ musbat sonmi yoki manfiy sonmi, baribir bitta yechim bor.

Agar (1) tenglamani qanoatlantiruvchi $x$ qiymatlari bo'lsa, u sonni $x=\sqrt[n]{a}$ belgilab, uni $a$ sonining $n$-darajali ildizi deyiladi (Bundan tashqari, "ildiz" atamasi o'rniga "radikal" atamasini ishlatishingiz mumkin).

Agar $a$ haqiqiy son, $n$ birdan katta bo'lgan natural son bo'lsa, (1) tenglamaning musbat yechimi borligini isbotlaymiz. Agar ildiz musbat sonda bo'lsa va topilgan ildiz ham musbat son bo'lsa, bunday ildiz arifmetik ildiz deb ataladi.

Arifmetik ildizlar quyidagi xossalarga ega:

$1^0$. Ikki son ko'paytmasining arifmetik ildizi, xuddi shu sonlarning arifmetik ildizlari ko'paytmasiga tengdir. Ya'ni,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{a^m b^k} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^k}.$$

$2^0$. Bo'linmaning har qanday darajadagi arifmetik ildizi arifmetik ildizlarning nisbatiga teng:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^k}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^k}}.$$

$3^0$. Har qanday darajadagi arifmetik ildizdan natural darajali arifmetik ildiz olish mumkin:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^m = \sqrt[n]{a^{km}}.$$

$4^0$. $n$- darajali arifmetik ildizdan $m$-darajali ildizini topish uchun, ildizlarning ko'rsatkichlari $m$ va $n$ sonlar ko'paytiriladi va ildiz ostidagi ifoda o'zgarmaydi:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^k}} = \sqrt[mn]{a^k}.$$

$5^0$. Arifmetik ildiz darajasini ildiz ostidagi ifoda darajasiga ko'paytirish yoki bo'lish ildizning qiymatini o'zgartirmaydi:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}; \qquad \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Arifmetik ildizning bu xossalari ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmagan holatlar uchundir. Masalan, $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-5)^2}$ o'rniga $\sqrt{\sqrt{3}-5}$ deb olish mumkin emas , chunki

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3}-5)^2} = \sqrt{\left|\sqrt{3}-5\right|} = \sqrt{5-\sqrt{3}}$$

Umuman olganda, $n = 2k$ bo'lganda, quyidagi tenglik to'g'ri bo'ladi:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & agar \quad a \geq 0. \\ -a, & agar \quad a < 0. \end{cases}$$

Xuddi shunday, agar $n$ juft, $a < 0$, $b < 0$ bo'lganda,

$$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{a} \cdot \sqrt[2k]{b}$$



yozish noto'g'ri, chunki $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$ o'rinlidir.

### 2. Ratsional darajaning xossalari

$a$ musbat haqiqiy sonning har qanday ratsinoal $r = \frac{m}{n}$ darajasi (bu yerda $m$ – butun son, $n$ – natural son) deb $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ songa aytiladi. U quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda $a^0 = 1$ .

2. Agar $a > 0$ bo'lsa, u holda $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

3. Agar $a > 0$, $b > 0$, va agar $p$ va $q$ sonlari ratsional sonlar bo'lsa, u holda

4. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ 5. $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$. 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

7. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$. 8. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

### 3. Irrasional ifodalar va ularni o'zgarishiga oid misollar

Aytaylik, $\frac{m}{n}$ ($m$ va $n$ butun sonlar) va nisbat irratsional son, ya'ni nodavriy cheksiz o'nli kasr bo'lsin.

Masalan, $\pi$, $tg5^0$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sonlar irratsional sonlardir.

O'zgaruvchining ildizini topish yoki o'zgaruvchini eksponenta-tsiya qilish bo'yicha amallarni o'z ichiga olgan algebraik ifodalarga irratsional ifodalar deyiladi.

Bunday ifodalarni soddalashtirish mumkin. Irratsional ifodalarning o'zgarishi odatda musbat sonlar to'plamida amalga oshiriladi.

1-misol. Ifodani soddalashtiring:

$$\left(\left(\sqrt{75}+\sqrt{48}\right)-\sqrt{300}\right)\left(6\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)$$

Yechish: Birinchidan, har bir ildizni alohida-alohida soddalashtiramiz:

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3};\quad \sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=4\sqrt{3};$$

$$\sqrt{300}=\sqrt{100\cdot 3}=10\sqrt{3};\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad \sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}.$$

Ularni o'rniga qo'ysak:

$$\left(\left(\sqrt{75}+\sqrt{48}\right)-\sqrt{300}\right)\left(6\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)=(5\sqrt{3}+4\sqrt{3}-10\sqrt{3})\times$$

$$\times(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3})=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=-3.$$

2-misol. Ifodani soddalashtiring:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Yechish: Birinchi navbatda so'nggi ikki ildiz ostidagi ifodalar bir-biriga bog'liq bo'lganligi sababli, ularni ko'paytirishdan boshlash yaxshiroqdir.

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})^2}=$$

$$=\sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Bu natijani ikkinchi ko'paytuvchiga ko'paytiramiz:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

va $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$ ni hosil qiladimiz.

3-misol. $\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^3}$ ifodani soddalashtiring:

Yechish: Daraja ko'rsatkichlarini kamaytiramiz:

$$\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^3}=\sqrt{|2-\sqrt{5}|}.$$

Bu yerda $2-\sqrt{5}<0$ ekanligidan $|2-\sqrt{5}|=-(2-\sqrt{5})=\sqrt{5}-2.$ masalaning yechimi

$$\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^3}=\sqrt{|2-\sqrt{5}|}=\sqrt{-(2-\sqrt{5})}=\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

bo'ladi.

4-misol. $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=1$ tenglikni isbotlang.



Yechish: Ildizni ko'paytirish uchun uning darajalarini tenglashtiramiz.

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=\sqrt[6]{(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt[6]{1+2\sqrt{2}+2}=\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$$

yoki

$\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=\sqrt[6]{9-4\cdot 2}=1$ ni hosil qilamiz.

5-misol. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ni soddalashtiring:

Yechish: Bu misolni yechishda murakkab ildiz formulalaridan foydalanish mumkin

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}};$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Bu misolda A=19, B=64×3=192. Demak,

$$\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{19+\sqrt{19^2-192}}{2}}-$$

$$\sqrt{\frac{19-\sqrt{19^2-192}}{2}}=\sqrt{\frac{19+\sqrt{361-192}}{2}}-\sqrt{\frac{19+\sqrt{169}}{2}}=\sqrt{\frac{19+13}{2}}-\sqrt{\frac{19-13}{2}}=\sqrt{16}-\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$$

Bu misolni ikkinchi usulda yechamiz:

$$\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}\cdot 4+16}=\sqrt{(\sqrt{3}-4)^2}=|\sqrt{3}-4|=4-\sqrt{3}$$

Chunki $\sqrt{3}-4<0$, ya'ni $|\sqrt{3}-4|=-(\sqrt{3}-4)=4-\sqrt{3}$

6-misol. Soddalashtiring: $\sqrt[4]{x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{3x}}$

Yeshish:

$$f(x)=\sqrt[4]{x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[4]{(2\sqrt{x}-\sqrt{3x})^2}=\sqrt[4]{x(7+4\sqrt{3})(7x-4\sqrt{3x})}=$$

$$=\sqrt[4]{x^2(49-48)}=\sqrt{x}.$$

Oxirgi ifodada modul kerak emas, chunki berilgan ifoda faqat $x \geq 0$ holda ildiz mavjud bo'ladi.

7-misol. Ifodani soddalashtiring:

$$\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{x^2-10x+25}$$

Yechish: Ifodani qisqacha $f(x)$ deb belgilaylik:

$$f(x)=\sqrt{(x+4)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=|x+4|+|x-5|$$

bo'ladi. Ifoda $x_1=-4$, $x_2=5$ da nolga teng. Shung uchun ildiz osti ma'noga ega bo'lishi $(-\infty;-4)$, $[-4;5)$, $[5;+\infty)$. oraliqlardan iborat.

3 ta intervalning har birini alohida ko'rib chiqamiz. Shuning uchun, birinchi $(-\infty;-4)$ oraliqda, ya'ni $x<-4$ da $x+4<0$, $x-5<0$. va $|x+4|=-(x+4)$, $|x-5|=-(x-5)$ bo'ladi, u holda berilgan ifoda $f(x)=-x-4-x+5=1-2x$ ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi oraliq $[-4;5)$ da, ya'ni $-4 \leq x<5$ da $x+4 \geq 0$, $x-5<0$ va $|x+4|=x+4$, $|x-5|=-(x-5)=5-x$ bo'lib, shuning uchun berilgan ifoda $f(x)=x+4+5-x=9$ ko'rinishga ega bo'lib chiqadi. Uchinchi oraliqda, ya'ni $x \geq 5$ bo'lganda, berilgan ifoda $f(x)=x+4+x-5=2x-1$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Shunday qilib, masalaning yechimi:

$$\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{x^2-10x+25}=\begin{cases}1-2x, agar\ -\infty<x<4\\ 9, agar\ -4 \leq x<5\\ 2x-1, agar\ 5 \leq x \leq +\infty\end{cases}$$

10-misol. Irratsionallikdan qutqaring:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2}$$

Yechish: 1-usul:



$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{(3-1)+\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}+1}=\frac{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)}{3+1}=\frac{-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}.$$

2-usul. Ushbu muammoni hal qilish uchun quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: $\sqrt[3]{9}=x$, $\sqrt[3]{3}=y$, $z=2$ va

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$$

dan $$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2}=\frac{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+4-\sqrt[3]{27}-2\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}}{9+3+8-3\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}\cdot 2}=\frac{-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$$

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Arifmetik ildiz tushunchasi haqida nimalar bilasiz?
2. Ratsional darajaning xossalari qanday o'rgatiladi?
3. Irrasional ifodalar va ularni o'zgarishiga misollar keltiring.
4. Arifmetik ildizlar qanday xossalarga ega?

## 2.4. Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar va ularning xossalarini o'rganish

REJA:

1. Ko'rsatkichli funksiya.
2. Logarifmik funksiya va uning xossalari.
3. Logarifmik ifodalarga doir misollar yechish metodikasi.

### 1. Ko'rsatkichli funksiya

Agar ifoda tarkibidagi o'zgaruvchi transsendent funksiya bilan ifodalangan bo'lsa, bunday ifoda transsendent deb ataladi. Masalan, eksponent, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik funksiyalar transsendent funksiyalardir.

Agar birga teng bo'lmagan musbat haqiqiy son $a$ berilgan bo'lsa, haqiqiy sonlar to'plamidan olingan $x$ ning har bir qiymati uchun $a^x$ ning bitta qiymati to'g'ri keladi. Shuning uchun, $y = a^x$ ko'rsatkichli funksiya berilgan deyiladi. U $a > 1$ bo'lganda quyidagi xossalarga ega:

a) funksiya aniglanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidir. Ular orasida: $x > 0$ $a^x > 1$; $x = 0$ bo'lganda $a^x = 1$; $x < 0$ bo'lsa, $a^x < 1$ bo'ladi;

b) funksiya qiymatlari to'plami haqiqiy musbat sonlardir: $(0, +\infty)$

c) funksiya juft ham, toq ham emas. Chunki $a^{-x} \neq -a^x$; $a^{-x} \neq a^x$;

d) funksiya monoton, ya'ni $x_1 < x_2$ da $a^{x_1} < a^{x_2}$.

$y = a^x$ funksiya xossalari $0 < a < 1$ bo'lganda 2-3 xossalari saqlanib qoladi, ammo d) xossa o'zgaradi, u monoton kamayuvchi bo'ladi.



### 2. Logarifmik funksiya va uning xossalari

N sonini hosil qilish uchun $a(a > 0, \quad a \neq 1)$ sonini ko'tarish kerak bo'lgan darajasiga $a$ asosga ko'ra N sonidan olingan logarifm deyiladi va uni $\log_a$ N kabi belgilanadi. Ta'rifga ko'ra $a^{\log_a N} = N$ bo'ladi. Asosi 10 ga teng bo'lgan logarifmga o'nli logarifm deyiladi. Uni quyidagicha $\log_{10} N$ deb belgilash mumkun. Ba'zan u $\lg N$ deb ham belgilanadi.

Logarifmik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $a > 0, \quad a \neq 1$ da $\log_a N$ mavjud va $N > 0$ bo'ladi;
2. $a > 1$ va $N > 1$ da $\log_a N$ musbat, $0 < N < 1$ da logarifm manfiy bo'ladi. Misol uchun, $\log_2 7 > 0$ va $\log_2 \frac{1}{3} < 0$.
3. Asosi $0 < a < 1$ va $N > 1$ bo'lganda, logarifm manfiy, $0 < N < 1$ da esa logarifm musbat. Misol uchun, $\log_{\frac{1}{2}} 3 < 0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$ bo'ladi.
4. Asoslari teng va $N_1 = N_2$ bo'lsa, logarifmlari teng bo'ladi: $\log_a N_1 = \log_a N_2$.
5. $a > 1$ da katta sonning logarifmi katta bo'ladi: $N_1 > N_2$ da, $\log_a N_1 > \log_a N_2$. Masalan, $\log_2 7 > \log_2 6$.
6. $0 < a < 1$ da katta sonning logarifmi kichik bo'ladi: $N_1 > N_2$ da, $\log_a N_1 < \log_a N_2$. Masalan, $\log_{0,2} 3 > \log_{0,2} 6$.
7. $a$ asosga ko'ra $a$ ning logarifmi birga teng: $\log_a a = 1$.
8. $a$ asosga ko'ra 1 ning logarifmi 0 ga tengdir: $\log_a 1 = 0$

$$y = \log_a x$$

ni logarifmik funksiya deb nomlanadi. Bu yerda $a$ – birdan farqli musbat son. Logarifmning ta'rifi bo'yicha $x = a^y$ deb yozish mumkin.

Logarifmning asosiy formulalari quyidagicha ($a, b, x, y$ – musbat sonlar, $a \neq 1$):

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$

2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$

3. $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$

4. $\log_a x^k = k \log_a x, \quad k \in R.$

5. $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x, \quad \alpha \in R.$

6. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \quad n \in N.$

7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a \neq 1,\ c \neq 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a \neq 1, b \neq 1, a > 0, b > 0.$

Ko'rsatkichli, logarifmik funksiyalar bilan ifodalarni ko'rib chiqilayotgan to'plamda unga teng keladigan boshqa ifodalar bilan almashtirishga eksponent, logarifmik ifodalarni ekvivalent almashtirish deyiladi.

**3. Logarifmik ifodalarga doir misollar yechish metodikasi**

1-misol. $\log_5 25, \quad \log_{\frac{1}{2}} 8, \quad \log_4 2$ logarifmlar qiymatlarini toping.

Yeshish.

1) $\log_5 25$ ning qiymatini $x$ desak, ya'ni $\log_5 25 = x$

Logarifmni aniqlash orqali ushbu tenglamani $5^x = 25$ bilan yechib, $x = 2$ ni hosil qilamiz, chunki $\log_5 25 = 2$



2) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, chunki $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8.$

3) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, chunki $4^{\frac{1}{2}} = 2.$

2-misol. 1) $\log_{\frac{\sqrt[5]{3}}{3}} \frac{1}{243}$; 2) $\log_{\sqrt[3]{a^2}} a^3\sqrt[5]{a^4}$; 3) $\log_{\sqrt[3]{(a+b)^2}} (a+b)^4$

logarifmlarning qiymatlarini toping.

Yechish: 1) Aytaylik, $\log_{\frac{\sqrt[5]{3}}{3}} \frac{1}{243} = x$ u holda $\left(\frac{\sqrt[5]{3}}{3}\right)^x = \frac{1}{243}.$

Bundan tashqari $\left(3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{5}}\right)^x = 3^{-5},\ 3^{-\frac{4}{5}x} = 3^{-5},\ -\frac{4}{5}x = -5,\ x = \frac{25}{4}.$

Shunday qilib, $\log_{\frac{\sqrt[5]{3}}{3}} \frac{1}{243} = \frac{25}{4}$

2) $\log_{\sqrt[3]{a^2}} a^3\sqrt[5]{a^4} = x$ desak, $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^x = a^3\sqrt[5]{a^4}.$

Shunday qilib, $\log_{\sqrt[3]{a^2}} a^3\sqrt[5]{a^4} = 5{,}7.$

3) $\log_{\sqrt[3]{(a+b)^2}} (a+b)^4 = x$ desak, bundan

$$\left(\sqrt[3]{(a+b)^2}\right)^x = (a+b)^4; (a+b)^{\frac{2x}{3}} = (a+b)^4, \frac{2x}{3} = 4,\ x = 6.$$

Keyin $\log_{\sqrt[3]{(a+b)^2}} (a+b)^4 = 6.$

3-misol. Ifodaning qiymatini toping.

1) $10^{3-2\lg 5}$. 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}} 6}$. 3) $49^{\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_{49} 64}$.

Yechish: Muammoni hal qilish uchun logarifmning asosiy xossalaridan foydalaniladi:

1) $10^{3-2\lg 5}=10^3\cdot 10^{-2\lg 5}=10^3\cdot\left(10^{\log_{10}5}\right)^{-2}=10^3\cdot 5^{-2}=\frac{1000}{25}=40.$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}}6}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}}6}=\frac{1}{9}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}6}\right)^2=\frac{1}{9}\cdot 6^2=\frac{36}{9}=4.$

3) $49^{\log_7 2-\frac{1}{2}\log_{49}64}=49^{\log_7 2}\cdot 49^{-\frac{1}{2}\log_{49}64}=7^{2\log_7 2}\left(49^{\log_{49}64}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=4(64)^{-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{64}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

4-misol. $\lg 2=a$ bo'lsa, $\lg 25$ ni toping.

Yechish: $\lg 25=\lg 5^2=2\lg 5$, biz 2 ni 10 orqali ifodalaymiz. Keyin esa

$$2\lg 5=2\lg\frac{10}{2}=2(\lg 10-\lg 2)=2(1-a).$$

va $\lg 25=2(1-a)$ bo'ladi.

5-misol. $\log_3 12=a$ bo'lsa $\log_3 18$ nimaga teng?

Yechish:

$$\log_3 18=\log_3(9\cdot 2)=\log_3 9+\log_3 2=2\log_3 3+\log_3 2=2+\log_3 2.$$

Shunday qilib, $\log_3 12=a$ bo'lganda $\log_3 2$ nimaga teng ekanligini aniqlashni ko'ramiz. Endi biz 2 ni 12 va 3 bilan ifodalaymiz: $2=\sqrt{4}=\sqrt{\frac{12}{3}}$, va

$$\log_3 2=\log_3\sqrt{\frac{12}{3}}=\frac{1}{2}(\log_3 12-\log_3 3)=\frac{1}{2}(a-1).\ ,$$

$$\log_3 18=2+\log_3 2=2+\frac{1}{2}(a-1)=\frac{4+a-1}{2}=\frac{3+a}{2}$$ ni hosil qilamiz.

6-misol. $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}$ farqni toping.

Yechish: $2^{\sqrt{\log_2 3}}=x_1$, $3^{\sqrt{\log_3 2}}=x_2$ belgilash kiritamiz. Ularning har birini 2 asos bo'yicha logarifmlaymiz:



$\sqrt{\log_2 3}\log_2 2=\log_2 x_1$, $\sqrt{\log_2 3}=\log_2(x_1)$ va $\sqrt{\log_3 2}\log_2 3=\log_2 x_2$,

$$\log_2 x_2=\sqrt{\log_3 2(\log_2 3)^2}=\sqrt{\frac{1}{\log_2 3}\cdot(\log_2 3)^2}=\sqrt{\log_2 3}$$

Shuning uchun $x_1=x_2$ va $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}=x_1-x_2=0.$

7-misol. $\log_{bn}an=\frac{\log_b a+\log_b n}{1+\log_b n}$ tenglikni isbotlang.

Yechish: Tenglikning chap tomonini soddalashtiramiz:

$$\log_{bn}an=\log_{bn}a+\log_{bn}n=\frac{1}{\log_a bn}+\frac{1}{\log_n bn}=$$

$$=\frac{1}{\log_a b+\log_a n}+\frac{1}{\log_n b+\log_n n}=\frac{1}{\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_n a}}+\frac{1}{\frac{1}{\log_b n}+1}=$$

$$=\frac{\log_b a\log_n a}{\log_n a+\log_b a}+\frac{\log_b n}{1+\log_b n}=$$

$$=\frac{\log_b a\log_n a+\log_b a(\log_n a\log_b n)+\log_b n\log_b a+\log_b n\log_n a}{(\log_b a+\log_n a)(1+\log_b n)}=$$

$$=\frac{\log_b a(\log_n a+\log_b a)+\log_b n(\log_b a+\log_n a)}{(\log_b a+\log_n a)(1+\log_b n)}=$$

$$=\frac{(\log_n a+\log_b a)(\log_b a+\log_b n)}{(\log_b a+\log_n a)(1+\log_b n)}=\frac{\log_b a+\log_b n}{1+\log_b n}.$$

Bu yerda $\log_n a\cdot\log_b n=\log_b a$. formuladan foydalandik.

8-misol. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$ nimaga teng?

Yechish: $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}=x$ bo'lsin. Keyin logarifmning ta'rifi bo'yicha:

$$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}=3$$

bo'ladi.

9-misol. $\frac{\log_a\sqrt{a^2-1}\log^2_{a^4}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$ soddalashtiring.

Yechish: Bu yerda biz $\log_{a^m} b = \log_a b^{\frac{1}{m}} = \frac{\log_a b}{m}$ formuladan foydalanamiz. Keyin

$$\log_{a^{-1}} \sqrt{a^2-1} = -\log_a \sqrt{a^2-1},$$

$$\log_{a^2}(a^2-1) = \log_a (a^2-1)^{\frac{1}{2}} = \log_a \sqrt{a^2-1}$$

$$\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1} = \log_a \sqrt{a^2-1}$$

ga ega bo'lamiz. Shuning uchun

$$\frac{\log_a \sqrt{a^2-1} \log^2_{a^{-1}} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}} = \frac{\log_a \sqrt{a^2-1} (-1)^2 \log^2_a \sqrt{a^2-1}}{\log_a \sqrt{a^2-1} \log_a \sqrt{a^2-1}} =$$

bo'ladi.

10-misol. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}$ tenglikni isbotlang.

Yechish:

$\log_a N = \log_a b \log_b N$ formulaga asosan

$\log_3 2 \cdot \log_4 3 = \log_4 2 = \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2}$, $\log_5 4 \log_6 5 = \log_6 4$, $\log_7 6 \cdot \log_8 7 = \log_8 6$ bo'lar edi. Keyin

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{2}\log_6 4 \cdot \log_8 6 =$$

$$= \frac{1}{2}\log_8 4 = \frac{1}{2}\log_{2^3} 2^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Ko'rsatkichli funksiyani o'rgatish usullari qanday?
2. Logarifmik funksiya va uning xossalarini o'ziga xosligi nimalarda ko'rinadi?



3. Logarifmik ifodalarga doir misollar yechish metodikasida qanday formulalardan foydalaniladi?
4. Logarifmik ifodalarni soddalashtirishda foydalaniladigan asosiy formulalarni ko'rsatib bering.

## 2.5-§. O'rta maktabda tenglamali almashtirishlarni o'rgatish

REJA:

1. Ekvivalent o'zgarishlar.
2. Tenglamali transformatsiyani o'qitishda ong prinsipini amalga oshirish.

### 1. Ekvivalent o'zgarishlar

Tenglama va tenglamani almashtirish konsepsiyalari asosan maktab matematikasining 6-sinfidan boshlab kiritilgan. Ammo o'quvchilar boshlang'ich maktabdan sonli, ifodali oddiy tenglamalar bilan tanishadilar. Xatto birinchi sinfdayoq 5 va 2 sonlarining yig'indisini ularni quyidagicha almashtirish orqali topish mumkin:

$$5 + 2 = 5 + (1 + 1) = (5 + 1) + 1 = 6 + 1 = 7$$

Boshlang'ich matematikada arifmetik amallarni bajarish barcha holatlarda sonli o'zgarishlarni talab qiladi. Arifmetik amallarning xossalari tenglamalar ko'rinishida yoziladi. Ular quyidagi tenglamalardan iborat:

$$a + b = b + a;\ ab = ba;\ (a + b)\,c = ac + bc.$$

Ushbu arifmetik amallarning qonuniyatlari dastlab tenglama deb nomlanmagan, ammo ular sonli ifodalarning ma'nosini hisoblashda keng qo'llaniladi. O'quvchilar ongli ravishda qabul qilishlari va o'qituvchining yordami bilan ulardan foydalanishlari kerak.

6-sinfda tenglama tushunchasi quyidagicha izohlanadi: Agar tenglamaning o'ng va chap tomonlaridagi ifoda tarkibiga kirgan harflarning har bir mos keladigan qiymati uchun teng bo'lsa, bu ifodalar tenglama deb ataladi. Tenglamani yechayotganda almashtirishni amalga oshirayotganda, biz arifmetik amallarni bajarish va ularning xossalaridan foydalanish orqali yangi ifoda olamiz va olingan yangi ifoda dastlabki ifoda bilan teng bo'ladi.

Masalan: $a(b+8)=ab+8a$, $\frac{8x+6}{2}=4x+3$

O'qituvchi tenglik tushunchasini boshqacha talqin qilishi mumkin. Masalan, avval ikkita ifodalarning tengligi tushunchasini aniqlaymiz: "Ikkita ifoda teng qiymatga ega bo'lsa, ular teng deyiladi."Shunda biz tenglama tushunchasini tenglik orqali shakllantirishimiz mumkin. "Agar tenglikning chap va o'ng qismlari bir-biriga teng bo'lsa, u tenglama deyiladi."Endi ekvivalent o'zgarishni aniqlaymiz: Bir ifodani unga teng keladigan boshqa ifoda bilan almashtirish ekvivalent transformatsiya deb nomlanadi.

Yuqori sinflarda tenglik va tenglamani o'zgartirish tushunchalari boshqacha tarzda belgilanadi: Tenglik bu unga kirgan harflarning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari uchun amal qiladigan tenglikdir. Harfning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamidagi bitta ifodani ekvivalent ifoda bilan almashtirish ekvivalent transformatsiya deb ataladi.

O'quvchilar ushbu ta'riflarni o'zlashtirishlari kerak. O'quvchilar tenglikka o'tishda harflarning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamini hisobga olishlari kerak. Harflarning mumkin bo'lgan ma'nolari quyidagi misol bilan oson izohlanadi:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

Ushbu tenglamaning o'ng va chap kasrlari bir xil bo'lsa ham, ular teng bo'lolmaydi. Bu tenglamani *"b"* harfini qabul qilinishi mumkin bo'lmagan qiymati nol, chunki 0 ga bo'lish mumkin emas, barcha noldan farqli qiymatlarda u o'rinli.



Harflarning mumkin bo'lgan ma'nolari tushunchasi turli xil matematik tushunchalar va ularga turli xil yondashuvlar qo'llanilishi tufayli asta-sekin sinfdan sinfgacha kengayib boradi.

Ikkala ifodaning tengligini isbotlashda, o'quvchiga ifodani mutanosib ravishda o'zgartirishi amalda qo'llanilmasligini tushuntirish muhimdir. Yuqorida aytganimizdek, agar ikkita qiymat, agar ularning qiymatlari teng bo'lsa, tengdir. Bu yerda mos keladigan qiymatlarning soni cheksiz katta. Shu sababli, ikkita ifodaning tengligini cheksiz ko'p marta tekshirish mumkin emas. Bu haqiqatni o'quvchilar hisobga olishlari kerak.

Barcha matematika darsliklarida tenglikni isbotlaydigan mashqlar mavjud, ammo tenglik tenglik emasligini isbotlaydigan hech qanday mashq yo'q.

Tenglamali ifoda ta'rifidan bunday mashqlarda samarali foydala-nish mumkin. Tenglamaning tengsizligini isbotlash uchun ikkita ifoda ichidagi harflar mumkin bo'lgan qiymatlarining kamida bittasida teng emasligini ko'rsatish kifoya. Ba'zan, qanday o'zgarishlar kiritmasligi-mizdan qat'iy nazar, tenglama tasdiqlanmasligi mumkin. Bunday holda, o'ylashimiz kerak: tenglik tenglik bo'lmasligi mumkin. Shuni ta'kidlash kerakki, berilgan tenglik tenglama emas. Buning uchun harflarning tegishli va mumkin bo'lgan qiymatlarini tanlaymiz, bu tenglamaning o'ng va chap tomonlari teng emas. Bu dalil berilgan tenglikning teng emasligidan dalolat beradi. Masalan,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$$

Aniqlanish sohasi ma'lum: $\alpha,\beta$ har qanday son (burchak). Bu tenglik $\alpha=0$, $\beta=0$ va $\alpha=0$; $\beta=45^0$ va bir $\alpha=45^0,\beta=0$ juft qiymatlarda berilgan tenglikni qanoatlantiradi, bu yerda $\alpha=45^0$ va $\beta=45^0$ lar tenglikni qanoatlantirmaydi $(1\neq\sqrt{2})$. O'quvchi ifodalarni mutanosib o'zgartirishning ma'nosi bu ifodaga kiritilgan amallarning ta'rifi va xossalaridan to'g'ri foydalanish ekanligini tushunishi kerak. Ko'pgina o'quvchilar tenglikni o'zgarishlarning ma'nosini tushunishmaydi. Ular har qanday ayniy almashtirishda olingan yangi ifoda va original ifoda barcha mumkin bo'lgan qiymatlarda bir xil qiymatga ega ekanligini tushunmaydilar. O'quvchi bilimidagi bu kamchilik, matematik tushunchalar va ularning xossalarini, shuningdek, ularning ramziy ifodalarini tushunmasliklari bilan bog'liq. Masalan, logarifmik ifodani almashtirishda xatolar yuzaga keladi, chunki logarifmning ta'rifi $a^{\log_a b} = b$ va xossalarini tushunmaydi.

Misol. Tenglikni isbotlang: $a^{\log^2_a b} = b^{\log_a b}$

Uni isbotlash uchun biz tenglamaning chap tomonini olamiz va o'ng tomoni hosil bo'lguncha uni teng ravishda aylantiramiz. Quyidagi hollarda berilgan tenglik $b>0$, $b$ va $a>0$ o'rinli bo'ladi.

$$a^{\log^2_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a b} = b^{\log_a b}$$

Bu yerda biz daraja va logarifm ta'rifi xossalaridan foydalandik.

Bundan tashqari, o'quvchilar mutanosib o'zgarishlarni, masalan, qavslarni ochish, o'xshash hadlarni ixchamlashtirish, kasrlarni qisqartirish, kasrlarni umumiy mahrajga keltish va hokazolar haqida bilishadi. Bu tegishli amallarning ta'rifi va xossalarining natijasi ekanligini tushunishlari kerak.

A = B tenglikni quyidagi yo'llar bilan isbotlash mumkin:

1) A formulani B formulasiga o'zgartirish orqali;

2) A formulasini olish uchun B formulasini o'zgartirish orqali;

3) A va B formula har ikkalasini bir xil ifodaga o'zgartirish orqali;

4) A - B=0 ekanligini isbotlash orqali;

5) $\frac{A}{B}=1$ ekanligini ko'rsatish orqali.

Sonli tenglikka misol. Tenglikni isbotlang: $75^{20} = 45^{10} \cdot 5^{30}$

1-usul. Tenglikning o'ng qismini oling va uni chap tomoniga aylantiring:

$45^{10} \cdot 5^{30} = (5 \cdot 9)^{10} \cdot 5^{30} = 5^{10} \cdot 9^{10} \cdot 5^{30} = 5^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^{20} \cdot 9^{10} =$

$= 25^{10} \cdot (5^2)^{10} \cdot 9^{10} = 25^{10} \cdot 25^{10} \cdot ((3)^2)^{10} = 25^{20} \cdot 3^{20} = 75^{20}$.

2-usul. Chap tomonni oling va undan o'ng tomonini hosil qilmaguningizgacha uni soddalashtiring:



$$75^{20} = (3 \cdot 25)^{20} = 3^{20} \cdot 25^{20} = 3^{20} \cdot (5 \cdot 5)^{20} = 3^{20} \cdot 5^{20} \cdot 5^{20} =$$
$$= 9^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^{30} = 45^{10} \cdot 5^{30}$$

va u boshqa usullar bilan isbotlanishi mumkin.

Ba'zan sonlarni teng ravishda almashtirish uchun ularni ekvivalent ifoda bilan almashtirish yaxshiroqdir. Masalan, quyidagi ifoda bilan almashtirish mumkin:

$$75^{20} = (3 \cdot 25)^{20} = 3^{20} \cdot 25^{20} = 3^{20} \cdot (5 \cdot 5)^{20} = 3^{20} \cdot 5^{20} \cdot 5^{20} =$$
$$= 9^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^{30} = 45^{10} \cdot 5^{30}$$

va hokazo.

Tengdan-tengga o'tish sinfdan-sinfga o'tgan sari murakkablashadi. Xususiy holda, arifmetik ildiz tushunchasini o'rganib chiqqandan so'ng, quyidagi tenglik ko'rib chiqiladi $\sqrt{x^2} = |x|$, bu o'quvchilar tushunishi uchun qiyin.

Arifmetik ildiz tushunchasi, amalni ildizga qo'llash o'quvchi uchun qiyin materialdir, uni faqat ko'pgina mashqlarni bajargan o'quvchilar tushunadilar xolos.

Berilgan tenglama to'g'ri bo'lishi uchun o'zgaruvchining mumkin bo'lgan qiymatlarini topish kerak.

1) $\sqrt[4]{(x-3)^2} = \sqrt{x-3}$ 3) $\sqrt[3]{\left(x-\sqrt{3}\right)^3} = x-\sqrt{3}$

2) $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$ 4) $\sqrt[6]{\left(x-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt[3]{x-\sqrt{2}}$

Oxirgisi faqat $x-\sqrt{2}>0 \Rightarrow x>\sqrt{2}$ tengsizlik holatida tengdir. Va uchinchi tenglama $x$ ning barcha qiymatlari uchun orinli va hokazo.

"Xato qayerda" mashqlari o'quvchilar tomonidan ildizli ifodalarni o'zgartirganda xatolarni tuzatishda muhim rol o'ynaydi. Bunday mashqlar har bir o'qituvchi tomonidan barcha mavzularda ularning ehtiyojlariga qarab tuzilgan. Taniqli fiziolog, akademik Pavlov ta'kidlaganidek: "Xatoni to'g'ri tushunish kashfiyotning kalitidir". Bu haqda taniqli aforizm mavjud: "xato bilan o'qish".

Masalan.

1. 8>4 tengsizlikning ikkala tomonini $\frac{1}{2}$ asos bilan logarifmlaymiz:

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 > \log_{\frac{1}{2}} 4.$$

Endi biz ushbu logarifmning qiymatlarini topamiz: -3>-2. Xato qaerda? Ushbu misoldagi xatolarni aniqlashda asosi birdan kichik, ammo logarifm ostidagi ifoda birdan katta bo'lgan logarifmik funksiyaning kamayib boruvchi xossasini ongli ravishda tushunishga imkon beradi.

2. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=\sqrt[6]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\sqrt[6]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=$

$$=\sqrt[6]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{3}-2\right)^2\left(\sqrt{3}-2\right)}=\sqrt[6]{\left(\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)\right)^2\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\sqrt[6]{(3-4)^2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}$$

«Tenglik-tenglik» larining ketma-ketligida qayerida xato bor?

Agar e'tibor bergan bo'lsangiz, $\sqrt{2+\sqrt{3}}>0$ va $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}<0$, chunki, ildiz ostidagi ifoda manfiy. Yakuniy natija esa $\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}>0$ bo'ldi. Xo'sh, xato qayerda ketdi?

Bunday xatolarni tuzatish mashqlarini bajargandan so'ng, o'quvchilar matematik amallar va tushunchalarni chuqurroq tushunishni rivojlantiradilar.

O'rta maktab matematika dasturida o'quvchilar har bir mavzuni o'rganishi bilan ularning tenglik haqida bilimlari oshadi. Umuman olganda, matematikani tenglikli o'zgarishlar deb aytish mubolag'a emas.

Vaziyatga qarab, mutanosib o'zgarishning maqsadi masalasini hal qilish uchun qulayroq bo'lishiga o'quvchilar e'tiborini jalb qilish kerak.

Masalan, $x^2+y^2-2xy$ ifoda qiymatini toping.

*a)* $x-y=5$ berilgan bo'lsin. Bunday holda ifodani quyidagicha o'zgartirish qulay.

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=5^2=25$$



*b)* $x+y=7$ va $xy=10$ berilgan bo'lsin. Buni quyidagi tarzda yechish qulay

$$x^2+y^2-2xy=(x+y)^2-4xy=7^2-4\cdot10=49-40=9.$$

O'quvchilarga quyidagi talablarga amal qilishni o'rgatish kerak: agar berilgan ifoda muammoni hal qilish uchun mos bo'lmasa, muammoni soddalashtirish uchun o'zgartirishlar kiritilishi kerak. Ba'zan bu hol yuz berishi mumkin: Muammoning yechimini topish uchun uni soddalashtirish emas, balki berilgan ifodani murakkab o'zgartirish zarur. Masalan,

$$ax^2+bx+c=0$$

kvadrat tenglamani yechish formulasini keltirib chiqarish uchun kvadrat uchhaddan to'la kvadratni ajratamiz:

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0.$$

Ushbu formulani matematikada va matematikadan foydalanadigan barcha bilim tizimlarida ko'rib chiqilayotgan masalani hal qilish uchun eng sodda yoki eng qulay shaklga aylantiradi. Boshqacha aytganda, ifoda o'zgartiriladi.

Maktab matematikasi kursida tenglamali transformatsiya alohida o'rin tutadi. Tenglama almashtirishlari tenglamalar va tengsizliklarni yechishda, funksiyalarni o'rganishda, formulalarni umumlashtirishda, teoremalarni isbotlashda va boshqa ko'plab holatlarda qo'llaniladi. Shuni ta'kidlash kerakki, tenglamali transformatsiya maktab matematikasi kursining eng muhim uslubiy yo'nalishlaridan biri bo'lib, u birinchi sinfdan boshlab doimiy ravishda o'qitiladi.

Tenglamali o'zgarishlarning xilma-xilligi o'quvchilarga ular qanday maqsadda ishlashlari kerakligini tushunishni qiyinlashtiradi. Ba'zi hollarda o'quvchilar bir polinomni "kamaytirish" uchun bir nechta ko'paytuvchilarning ko'paytmasi bilan almashtirishadi, ba'zi hollarda ular bir nechta ko'paytuvchilarning ko'paytmalarini bitta polinom bilan almashtirishadi. Ba'zi mashqlarda "$-(a+b)=-a-b$" belgisi qavslar tashqarisiga qo'yiladi, ba'zi mashqlarda aksincha $-a-b = -(a+b)$ o'rnatiladi. Bitta konversiyalashda kasrlar yig'indisi bitta kasr bilan almashtiriladi va ba'zi bir kasrlarda berilgan kasr bir nechta kasrlar yig'indisi sifatida tasniflanadi. Bu shuni ko'rsatadiki, o'quvchilarga tenglamani konvertatsiya qilish maqsadini tushuntirish ta'limning eng muhim qismlaridan biridir. Matematikani o'qitish metodologiyasida ushbu muammoning muhimligini A.N.Xinchin ta'kidlagan.

Tenglamali konvertatsiya maqsadlariga ba'zi bir misollar keltiramiz:

**1.** $3,45x-3,45y=3,45(x-y)$ mohiyati miqdoriy baholashni yengil-lashtirish talab qilinsin. Agar $x$ va $y$ ning sonli qiymatlarini $3,45x-3,45y$ ga qo'yish bo'lsa, buning uchun $x$ va $y$ ning qiymatlarini $3,45\ (x-y)$ ga qo'yish qulay. Bundan ayon bo'ladiki, ushbu tenglamali o'zgarishlarni amalga oshirish kerak.

**2.** Agar

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$$

$x$ va $y$ qiymatlarini to'g'ridan-to'g'ri almashtirish orqali ifoda qiymatini topsak, unda yettita amalni bajarishimiz kerak. Uning 4 ga teng ekanligini ko'rsatish uchun

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}=4$$

Qisqa ko'paytirish formulalaridan foydalanish kerak. Bu uzoq hisoblash ishlaridan qutqaradi.

3. $lgx^2 = 2$ tenglamani yechganda $lgx^2 = lg100$ yoki $2lgx = 2$ kabi modifikatsiya qilinadi. Ushbu ikkita o'zgarishlardan qaysi biri samarali-roq? Albatta, birinchisi, chunki ikkinchisida ildizlardan biri yo'qoladi. Ikkinchisida $lgx^2 = 2lg|x|$ ekanligini hisobga olinmaydi.

$x^3-x^2-2x+2=(x-1)(x^2-2)$ tenglamani yechish uchun

$$x^3-x^2-2x+2=0$$

tenglamani hal qilish oson.

4. $99^2-1$ ni topish uchun qisqa ko'paytirish formulasini quyidagicha qo'llash mumkin: $99^2-1=(99+1)(99-1)$ bu samarali usul.



5. Quyidagi sonli ifodaning $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ qiymatini topish uchun quyidagi konversiyani amalga oshirish samarali bo'ladi (mahrajlarni qo'shmasiga ko'paytirish):

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1}=2\sqrt{2}.$$

6. $f(x)=\frac{3x-1}{x-1}$ funksiya grafigini chizish uchun quyidagi modifikatsiyani amalga oshirish zarur:

$$f(x)=\frac{3x-1}{x-1}=3+\frac{2}{x-1}$$

7. $f(n)=\frac{n-1}{n}$ funksiyani quyidagi shaklga o'zgartirizish orqali funksiyani o'rganish oson bo'ladi:

$$f(n)=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$$

**2. Tenglamali transformatsiyani o'qitishda ong printsipini amalga oshirish**

O'quvchilar tenglamali transformatsiyani o'rganishda xato qilishiga yo'l qo'ymaslik uchun transformatsiyaning "qismi" bo'lgan oddiy o'zgarishlarni chuqur va ongli ravishda egallashga erishishlari kerak.

Masalan, o'quvchilar

$$-(a+b)=-a-b$$

bilan tanishganda, ular chapdan o'ngga o'qish va yozishni bilishlari kerak va aksincha:

$$-a-b=-(a+b).$$

Ushbu belgilarning ma'nolari bir-biridan farq qiladi: birinchisi qavslarni "-" belgisi bilan ochganda o'zgarishni anglatadi, ikkinchisi qavslar tashqarisidagi "-" belgisini olib tashlashni anglatadi. Tenglamalarni taqqoslash

$$-(a+b)=-(a+b) \text{ va } -a-b=-(a+b)$$

asl tenglama to'g'risida qo'shimcha ma'lumot beradigan oddiy tenglamaning boshqa turlari mavjud.

$-(a+b)=-a-b,$ $\quad -(a-b)=-a+b,$

$-a-b=-(a+b),$ $\quad -a+b=-(a-b),$

$-(-a-b)=a+b,$ $\quad -(-a+b)=a-b,$

$a+b=-(-a-b),$ $\quad a-b=-(-a+b)=-(b-a).$

O'quvchilar uchun ayniy shakl almashtirishlarni ongli ravishda o'zlashtirishning yana bir usuli bu tenglik va sonli tengliklar o'rtasidagi o'xshashlikdan foydalanishdir.

Masalan, $-(a+b)=-a-b$ quyidagi sonli ifodalarning tengligini ko'rsatadi:

$-(5+3)=-5-3,$ $\quad -(1{,}2+4)=-1{,}2-4$

va boshqalar.

Masalan, $-(a+b)=-a-b$ quyidagicha isbotlanishi mumkin:

$-(a+b)=-1\cdot(a+b)=-1\cdot a+(-1\cdot b)=-a+(-b)=-a-b.$

Bu tenglikdan: $-x=-1\cdot x$ dan bu usul bo'yicha

$-1\cdot x=-x$ va $x+(-y)=x-y$

Tenglik ishlatiladi.

3. **Tenglamalar o'quvchilar qiziqishini oshirish vositasi sifatida**

Har qanday ta'lim turida o'quvchilar qiziqishlarini oshirish doirasida darslarda ko'proq o'quvchilarni faollashtirish, ilk rivojlantirish bo'yicha o'qituvchi tenglama va ayniy almashtirishlar elementlaridan unumli foydalanishlari kerak.

Misol. $\dfrac{ax+ay-x-y}{2a-2}$ kasrni qisqartiring. Buning uchun bir nechta usullarni ko'rib chiqaylik:

1) $\dfrac{ax+ay-x-y}{2a-2}=\dfrac{a(x+y)-(x+y)}{2(a-1)}=\dfrac{(x+y)\cdot(a-1)}{2(a-1)}=\dfrac{x+y}{2};$

2) $\dfrac{ax+ay-x-y}{2a-2}=\dfrac{x(a-1)-y(a-1)}{2(a-1)}=\dfrac{(a-1)\cdot(x+y)}{2(a-1)}=\dfrac{x+y}{2}.$



### Mustahkamlash uchun savollar

1. Ekvivalent o'zgarishlar deganda nimani tushunasiz?
2. Tenglamali transformatsiyani o'qitishda ong prinsipini amalga oshirish yo'llarini aytib bering.
3. O'quvchilar qiziqishini qanday oshirish mumkin?
4. Matematika o'qitish metodologiyasida qaysi muammo muhimroq sanaladi.

## 2.6-§ Ayniy shakl almashtirishlarni o'qitish metodikasi

REJA:

1. Ayniy shakl almashtirishlar mavzularini o'tishda o'quvchilar yo'l qo'yadigan xatoliklar.
2. Ayniy shakl almashtirishni joriy etish usullari.

### Ayniy shakl almashtirishlar mavzularini o'tishda o'quvchilar yo'l qo'yadigan xatoliklar

Yuqoridagi yondashuvlar o'quvchilarning xato qilishiga yo'l qo'ymaslik uchun qilingan. Ammo, bu ish qanchalik yaxshi bajarilmasin, o'quvchilar tomonidan hamon xatolarga yo'l qo'yilmoqda. Ular xatolarni tuzatish bilan o'qiganliklari bejiz emas. Kuzatish va xatolarni tuzatish o'quvchilarning o'zini-o'zi boshqarishining asosidir. Keling, ushbu ba'zi yondashuvlarni amaliy misollar yordamida ko'rib chiqaylik.

Misol. $\sqrt{67-42\sqrt{2}}+\sqrt{19-6\sqrt{2}}$ ifoda qiymatini toping.

Aytaylik, doskada o‘quvchi yozishni boshlaydi:

$$\sqrt{62-42\sqrt{2}+\sqrt{19-6\sqrt{2}}}= \dots$$

ko‘rinishidan, u yozishni boshlaganda xatoga yo‘l qo‘ygan – o‘quvchi sonli ifodani to‘g‘ri yozmagan: 67 o‘rniga 62 va barobar ishorasini ildiz ostiga yozgan. Ishning boshidayoq qilingan xatolar tez-tez uchraydi. Ulardan halos bo‘lish uchun o‘quvchining e'tiborini hali ham qaratilmaganligidan dalolat beradi. Agar bu xato darhol payqalmasa, darsning bir qismi behuda ketadi. Shuning uchun o‘qituvchining o‘quv jarayonini boshqarishdagi birinchi qadami doskada misol yoki masala ishlaydigan o‘quvchining har bir harakatlarini diqqat bilan kuzatib borishdir. Shu bilan birga o‘qituvchi sinfdagi boshqa o‘quvchilarni e’tiborsiz qoldirmasligi kerak: "Doskada ifoda to‘g‘ri yozilganmi?" O‘quvchiga o‘z vaqtida eslatma berish kifoya. Xatoni tuzatgandan so‘ng, o‘quvchi

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

murakkab radikal formuladan foydalanib, quyidagi yozuvlarni kiritadi:

$$\sqrt{67-\sqrt{42^2\cdot 2}}=\sqrt{\frac{67+\sqrt{67^2-3528}}{2}}+\sqrt{\frac{67-\sqrt{67^2-3528}}{2}}=\dots$$

Bunday holda, u birdaniga ikkita xatoga yo‘l qo‘yadi. Xatolarning biri murakkab radikal formulasini noto‘g‘ri ishlatish bilan bog‘liq:

Ildizlar o‘rtasida amal “+” emas “–“ bo‘lishi kerak, ikkinchidan o‘quvchi B o‘rniga $\sqrt{B}$ ni qo‘ygan: $\sqrt{B}=42\sqrt{2}, B=42^2\times 2$.

Yana xato shundaki, o‘quvchi faqat birinchi ildizni o‘zgartirgan va ikkinchisini unutgan. $\sqrt{19-\sqrt{6\sqrt{2}}}=\dots=3\sqrt{2}-1$

Keyin o‘quvchi avval birinchi ildizning, keyin ikkinchi ildizning ma’nosini topmoqchi bo‘ldi. U quyidagi yozuvni kiritadi:

1. $7-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-1=6.$

Bu yerda o‘quvchi yana formuladan to‘g‘ri foydalana olmadi: ifodaning o‘ng tomonida kvadrat ildizlarning yig‘indisi emas, balki farq yozilishi kerak.



Xatoni tuzatgandan va kerakli hisob-kitoblarni amalga oshirilgandan so‘ng, o‘quvchi birinchi ildiz 7-3 $\sqrt{2}$ ga teng ekanligini aniqlaydi.

2. Ikkinchi ildiz quyidagicha hisoblanadi:

$$\sqrt{19-\sqrt{6\sqrt{2}}}=\dots=3\sqrt{2}-1$$

3. Natijada: $7-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-1=6.$

Xato qiluvchi o‘quvchi formulani asosiy xususiyatlarini tubdan tahlil qildi. endi xatoga yo‘l qo‘ymaydi. Xatoga yo‘l qo‘ymaslikning bir usuli mashqlarni yechishdan oldin ishni yengillashtirish uchun murakkab radikal formulasini doskaga yozish kerak, shunda u har doim o‘quvchilar ko‘z oldida bo‘ladi.

Birhadlarni standart ko‘rinishga keltirishda uchraydigan xatoliklar:

1) ko‘paytirishni bajaring: - $6ax^3\times 9bx^2$ ni o‘quvchi– $54abx^6$ kabi yozishi mumkin;

2) $(3x^2)^3$ darajani bajaringda o‘quvchi $3x^6$ deb yozadi;

3) $(m+n)^2$ ni ochishda o‘quvchi $m^2+n^2$ deb yozadi;

4) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$ kasrni qisqartirib o‘quvchi $\frac{a}{b}$ sifatida yozadi;

5) o‘quvchi $\frac{a+b}{6}-\frac{a-2b}{6}$ amalni bajarishda $\frac{a+b-a-2b}{6}$ kabi yozgan;

6) o‘quvchi $\frac{12a+y^2}{6ay}$ ni summa $\frac{12a}{6a}+\frac{y^2}{y}=2+y$ shaklida oldi;

7) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$ formulani soddalashtirib, o‘quvchi uni -1 ga teng ekanligini aniqladi;

8) $\sqrt{(x-1)^2}$ formulaning arifmetik ildizini topishda o‘quvchi uni x-1 deb yozadi;

9) $\sqrt[4]{x+4}=2$ tenglamani yeching topshirig‘ini o‘quvchi uni quyidagicha yozdi: $\sqrt[4]{x}+1=2$;

10) $cos(\frac{\pi}{4}-\varphi)$ ni soddalashtirgandan so'ng o'quvchi uni $cos\frac{\pi}{4}$-$cos\varphi$ ga teng ekanligini aytadi.

Xo'sh, oquvchi qanday xatolarga yo'l qo'ydi? Xatoni o'quvchilarga qanday tushuntirish kerak?

### 2. Ayniy shakl almashtirishni joriy etish usullari

Yangi dasturga ko'ra, o'quvchilar birinchi marta 5-sinfda tenglik tushunchasi bilan tanishadilar.

Birinchidan, so'zma-so'z iboralar tushunchasidan so'ng, so'zma-so'z iboralarini yozishda quyidagi qoidalar va shartlarni hisobga olish kerak.

1. Agar ikkita ko'paytuvchidan biri son bo'lsa, u koeffitsiyent deb ataladi va ko'paytmaning oldida harf yoziladi. Koeffitsiyent va harf ko'paytuvchisi o'rtasida (⍰) ko'paytirish ishorasini qo'ymaslik ham mumkin. Masalan, $7x$; $3y$; $\frac{1}{2}x$; $0,7y$.

2. Harf ifodasida harf ko'paytuvchilari orasiga ko'payish ishorasi qo'yilmaydi. Masalan, $mn$; $0,3xy$; $\frac{1}{4}abc$.

3. Harflardan iborat bo'linma kasr shaklida yoziladi.

Misol uchun, $\frac{x}{y}$; $\frac{3}{mn}$; $\frac{ab}{c}$; $\frac{4a}{b+c}$.

4. Qavslar harflarni ifodalash bo'yicha operatsiyalarni bajarishda alohida o'rin tutadi. Masalan, $9-(a+b)$ va $9-a+b$ ifodalari bir xil emas.

Ifodani kasr bilan berilganligi sababli, sonni nolga bo'lish mumkin emasligi, ifodaning ma'nosi bo'lishi uchun kasrning mahraj qismi nolga teng bo'lmasligi kerak. Ushbu shartning bajarilishidan boshlab harfli ifodadagi harflarning sonli qiymatlari haqida tushuncha hosil bo'ladi. Ifodadagi harflarning sonli qiymatlari turlicha bo'lganligi sababli undagi harf o'zgaruvchan deb nomlanadi va harf bilan ifodalangan narsa o'zgaruvchi bilan ifodalanadi. Masalan. $\frac{7}{x}$ ifoda $x\neq 0$ dan



tashqari barcha qiymatlarni qabul qila oladi. $\frac{2}{a-3}$ ifodadagi $a$ qiymatlari $a=3$ dan boshqa barcha qiymatlarni qabul qila oladi.

6-sinfda birhadlarning ifodasi, ayniy shakl almashtirish tushuncha-lari kiritiladi. Ushbu konsepsiyalarni real induktiv usulga asoslangan holda ko'rib chiqaylik.

1. Ekvivalent iboralarni kiritish quyidagi vazifadan boshlanadi: $2x+3x^2$ va $5x$ ifodalarning qiymatlari $x$ ning qanday qiymatlarida teng bo'ladi? Vazifani bajarish uchun quyidagi jadvalni to'ldiramiz:

| $x$ | $2x+3x^2$ | $5x^3$ |
|---|---|---|
| -0.4 | -0.3 2 | -0.32 |
| -0.1 | -0.17 | -0.005 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0.23 | 0.005 |
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 16 | 40 |

Ko'rish mumkinki, $2x+3x^2$ va $5x^3$ ifodalarning qiymatlari $x$ ning ba'zi qiymatlarida bir xil, ammo boshqa qiymatlarda farq qiladi.

2. $7x^3$-$x$ va $6x^2$ ifodalarni $x=0$; $1$; $-\frac{1}{7}$;-1 ga teng qiymatlarining jadvali quyidagicha to'ldiriladi:

| $x$ | $7x^3$-$x$ | $6x^2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 6 | 6 |
| $-\frac{1}{7}$ | $\frac{6}{49}$ | $\frac{6}{49}$ |
| -1 | -6 | 6 |

Ushbu jadval asosida quyidagi xulosa chiqariladi: $7x^3$-$x$ va $6x^2$ ifodalarning qiymatlari $x$ ning barcha qiymatlarida teng emas.

3. $5(y + 3)$ va $5y + 15$ ifodalarni ko'rib chiqing.

Aytaylik, $y=0;\ 1;-5;\ 4$ bo'lsin. To'g'ridan-to'g'ri hisob bilan $y$ ning ko'rsatilgan qiymatlarida berilgan ikki ifoda teng ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Demak $5(y + 3)$ va $5y + 15$ ifodalar mos ravishda teng bo'ladi. Bunday ifodalar ekvivalent ifodalar deyiladi.

Yuqorida aytilganlarni mustahkamlash uchun mashqlar:

1) $p + 25$ va $25 + p$ ifodalar ekvivalent ifodalardir

2) $c(c-3)$ va $c^2-3c$ ifodalar ekvivalent ifodalardir.

Analitik ifodani unga teng keladigan, ammo shakli turlicha bo'lgan ifoda bilan almashtirishga ekvivalent transformatsiya deyiladi.

I. $(4x + 5) -3x + 2 = (4x-3x)+5+2=x+7.$

$(4x + 5) -3x + 2$ va $x + 7$ ifodalar ekvivalent ifodalardir, masalan, agar

$x = 1,3$ bo'lsa, $(4x + 5) -3x + 2 = (4\times 1,3 + 5)) -3\times 1,3 + 2 = (5,2 + 5) -3,9 + 2 = 8,3$ va $x + 7 = 1,3 + 7 = 8,3.$

II. $5,2x \times 2\times 3 = (5,2\times 2\times 3)\,x = 31,2x.$

Ko'paytirish usulining o'zaro o'rin almashtirish xossasi yordamida soddalashtirildi.

III. Ko'paytirish amalining tarqatish xususiyatidan foydalanishga misol keltiramiz: $\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}x-8\right)=\frac{1}{8}x-5$

IV. Umumiy mahraj topishga teskari amaldan foydalanishga misol:

$$\frac{9x+5}{3}=\frac{9x}{3}+\frac{5}{3}=3x+1\frac{2}{3}.$$

V. Qisqartirish xossalaridan foydalanishga misol:

$$\frac{8ab}{4a}=2b,\quad \frac{5xy}{2y}=2,5x.$$

qavslar ochilganda va o'xshash hadlar soddalashtirilganda:

a) qavs oldida "+" ishorasi bo'lsa, qavsni ochishda qavs ichidagi ifoda o'zgarmaydi.



Misol. $4a +(2 + 6a-5b) = 4a + 2 + 6a-5b = 10a + 2-5b.$

b) agar qavs oldida "-" ishorasi qo'yilgan bo'lsa, u holda qavslarni ochganda qavs ichidagi ifodalar ishoralari qarama-qarshi ishoraga o'zgartiriladi.

Misol. $3a- (4b-a+9) = 3a-4b + a-9 = 4a-4b-9.$

2. Agar harfiy ifodalarda umumiy ko'paytuvchilar bo'lsa, umumiy ko'paytuvchi qavs tashqarisiga chiqariladi.

Misol. $3ab-6ac = 3a(b-2c).$

a) agar qavslar oldida umumiy "+" ishorasi bilan bo'lsa, qavs ichidagi ifodalar o'z ishorasi bilan qoladi.

b) agar umumiy ko'paytuvchi "-" ishorasi bilan bo'lsa, qavslar ichidagi ifoda ishorasi qarama-qarshi ishora bilan almashtiriladi.

Misollar.

$5 + 3a-7b-4c = 5 + (3a-7b-4c);\ 6a + 7b-49c = 6a + 7(b-7c);$

$5 + 3a-7b-4c = 5 - (-3a + 7b + 4c);\ x-2xy + 3x = -x(-1 + 2y-3).$

## Bob bo'yicha mustahkamlash uchun savollar

1. Nega matematik ayniy shakl almashtirishlar o'rgatiladi?
2. Ayniy shakl almashtirish nima?
3. Matematik ifoda deb nimaga aytiladi?
4. Ratsional, irratsional ifodalarga misollar keltiring.
5. Qanday ifodalar butun sonlar, kasrlar deb ataladi?
6. Ifodaning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasini qanday topish mumkin?
7. $\sqrt{x+1}\times log_5(x-1)$ ning aniqlanish sohasini toping.
8. $\frac{x}{x^2+1}$ ning aniqlanish sohasini toping.
9. Agar $a + b + c = 0$ bo'lsa, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ni isbotlang.

10. Isbotlang: $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-y)(z-x)}=\frac{1}{xyz}$

11. Arifmetik ildiz nima? Arifmetik ildizning xossalarini aytib bering.

12. $\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^3}$ ni soddalashtiring.

13. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2}$ kasrning mahrajini irratsionallikdan qutqaring.

14. $\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$ kasrning mahrajini irratsionallikdan qutqaring.

15. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ni soddalashtiring.

17.1) $\log_{\frac{\sqrt[4]{3}}{3}}\frac{1}{243}$; 2) $\log_{\sqrt[3]{a^2}} a^3\sqrt[5]{a^4}$; 3) $\log_{\sqrt[3]{(a+b)^2}}(a+b)^4$

logarifmlarning qiymatlarini toping.

18. 1) $10^{3-2\lg 5}$. 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}}6}$ ifodalarning qiymatini toping.

19. $\log_3 12=a$ ga teng bo'lsa, $\log_3 18$ nimaga teng?

20. Hisoblang: $49^{\log_7 2-\frac{1}{2}\log_{49}64}$

21.O'quvchilar qaysi sinfdan ayniy shakl almashtirish tushunchasi bilan tanishadilar?

22.8>4 tengsizlikning ikkala tomonidan $\frac{1}{2}$ asosli logarifm olamiz: $\log_{\frac{1}{2}}8>\log_{\frac{1}{2}}4$. Endi biz ushbu logarifmlarning qiymatlarini topamiz: *-3> -2.* Xato qaerda?

23.Ayniy shakl almashtirish tushunchasini o'rgatish maqsadi haqida gapiring.

24. O'quvchilarni ayniy shakl almashtirish tushunchasi bilan ishlaganlarida xatolarga yo'l qo'ymaslik uchun nima qilish kerak?



25. Ayniy shakl almashtirish tushunchasini o'qitishda o'quvchilarning qiziqishlarini oshirish uchun ko'riladigan choralarni ko'rsating.

26. Maktab o'quvchilari ayniy shakl almashtirish tushunchasiga oid misollar yechganda yo'l qo'yadigan xatolariga misollar keltiring.

27. Tenglik tushunchasini birinchi marta qanday kiritish kerak?

28. Ildiz tushunchalarini o'rganishda ayniy shakl almashtirish tushunchasi birinchi kiritilishi haqida gapirib bering

# III BOB. TENGLAMA VA TENGSIZLIK TUSHUNCHALARINI O'QITISH USULLARI

## 3.1-§ Maktabdagi tenglamalarni yechish usullari

REJA:

1. Maktabdagi tenglamalarni yechish haqida umumiy ma'lumot.
2. Maktabdagi tenglamalarni yechishning umumiy usullari.
3. Tenglamalarni ko'paytuvchilarga ajratish usuli bilan yechish usuli.
4. Tenglamalarni yechish uchun yangi o'zgaruvchini kiritish usuli.

Eramizgacha 3000 yillarda qadimgi grek papiruslarida, eramizga-cha 2000 yillarda qadimgi Vavilon taxtachalarida, eramizgacha 3 asrda Diofant ishlarida, ayniqsa IX-XV asrlarda Muxammad Muso al-Xorazmiy asarlarida, Umar Xayyom, Ibn Sino kabi ko'plab buyuk allomalarning ilmiy meroslarida tenglamalar o'rganilgan.

Tenglama tushunchasi algebraning yetakchi tushunchalaridan biri bo'lganligi uchun bu tushuncha maktab matematika kursida uch yo'nalishda o'qitiladi.

1-yo'nalish. Tadbiqiy yo'nalish;

2-yo'nalish. Nazariy-matematik yo'nalish;

3-yo'nalish. Matematika kursining qolgan bo'limlari bilan aloqalarni o'rnatish yo'nalishi:

a) Sonlar o'qi bilan bog'lash;

b) Funksiyalar bilan bog'lash;

c) Ayniy almashtirishlar bilan bog'lash;

d) Turli algoritmlar bilan bog'lash.

Maktabda erta yoshdan boshlab tenglamalar va tengsizliklar hamda ularning sistemalarini o'qitish an'anasi mavjud. Ushbu an'ana zamonaviy dasturlarda ham



o'z aksini topgan. Maktab matematika kursida tenglama tushunchasi asosan 3 bosqichda o'rgatiladi:

I bosqich (propedevtik)

a) 1-4 sinflar: Tenglamalar haqida elementar tushunchalar berish. Tenglamani yeshishning asosiy usuli no'malum komponentani topish (intuitiv-amaliy bosqich)

b) 5-6 sinflar: Tenglamani o'z tarkibida noma'lum son (o'zgaruvchi) qatnashgan tenglik sifatida qaraladi. Chiziqli tenglamalar yecxiladi, matnli masalalar uchun tenglamalar tuziladi.

II bosqich

a) 7-sinf:

Tenglamaning aniq ta'rifi beriladi;

Tenglamaning xossalari nazariy jihatdan asoslanadi;

Tenglamani yechish jarayoni deduktiv asoslanadi;

Tenglamalar sistemasi yecxiladi:

b) 8-sinf:

Tengsizlik tushunchasi kiritiladi;

Tengsizlik xossalari nazariy asoslanadi;

Bir ozgaruvcxili chiziqli tengsizliklar sistemasi yecxiladi;

Kvadrat tenglama va tengsizliklar;

Ratsional tenglama va tengsizliklar;

c) 9-sinf:

Tenglama va uning ildizlari;

Uchinchi va tortinchi darajali tenglamalar;

Ikki o'zgaruvchili tenglama va uning grafigi;

Ikki o'zgaruvchili ikkinchi darajali tenglamalar sistemasi

III bosqich (yakunlovchi)

10-11 sinflar:

Trigonometrik tenglama;

Sodda trigonometrik tengsizlik;

Ko'rsatkichli tenglama, tengsizlik va ularning sistemalari;

Logarifmik tenglama va tengsizlik, ularning sistemalari;

Ratsional tenglama va tengsizlik, ularning sistemalari;

Irratsional tenglama va tengsizlik, ularning sistemalari o'qitiladi.

Tenglamalar haqida nazariy ma'lumotlarni taqdim etish maktab algebra kursining boshqa mavzularining mazmuni va tartibiga qarab amalga oshiriladi: haqiqiy ildizli tenglamalar, ifodalar va funksiyalarning muvozanatli o'zgarishi, matematik tahlilning boshlanishi.

O'rta maktabda ularning turiga qarab, tenglamalar va tengsizliklarni tavsiflash uchun turli xil ko'rsatmalar mavjud va ba'zida tenglamalar va tengsizliklarni parallel ravishda o'rgatish bo'yicha takliflar mavjud.

Tenglamaning quyidagi ta'riflari metodik adabiyotlarda keltirilgan.

1. Tenglama, bu ikki algebraik ifoda harflarining har qanday qiymatida bir xil miqdordagi qiymatni qabul qiladigan tenglikdir.

2. Bitta noma'lumli tenglama quyidagicha yoziladi:

$$f(x)=\varphi(x).$$

Agar $x_0$ soni birinchi navbatda $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar aniqlanish doirasiga tushsa, ikkinchidan, agar quyidagi tenglik

$$f(x_0)=\varphi(x_0)$$

o'rinli bo'lsa, $x_0$ soni tenglamaning ildizi deb nomlanadi. Tenglamani yechish uning barcha ildizlarini topishni anglatadi.

3. Bir o'zgaruvchili tenglamada 1 ta o'zgaruvchi bo'lib, ushbu o'zgaruvchi orqali tenglama bir o'zgaruvchili tenglama deyiladi. Tenglamadagi o'zgaruvchi odatda noma'lum miqdor deyiladi.

4. Noma'lum qatnashgan tenglikka tenglama deyiladi.

## 2. Maktabdagi tenglamalarni yechishning umumiy usullari

O'rta maktabda tenglamalar mavzusi bilan bog'liq quyidagi asosiy masalalar ko'rib chiqiladi.



Bir yoki bir nechta noma'lum qatnashgan tenglikka tenglama deyiladi. Bitta yoki $n$ ta o'zgaruvchi qatnashgan tenglama odatda quyidagicha yoziladi:

$$f(x)=0;\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0.$$

$f(x)$ yoki $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyalar aniqlanish sohasi tenglamaning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasi deyiladi.

Masalan: $\sqrt{x-2}=\sqrt{3-x}$ tenglamaning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasi: $x\in[2;3]$.

Tenglamaning ildizlari berilgan tenglamani to'g'ri sonli tenglikka o'zgartiradigan qiymatlaridir.

Masalan: $x^2-4=0$ tenglamaning ildizlari $x_1=-2$, $x_2=2$. Ular tenglama yechimi topilganligini anglatadi. $x^2+4=0$ tenglamaning yechimi yo'q va uning ildizlari yo'q.

Har qanday murakkab tenglamani chiziqli yoki kvadratik tenglamaga yoki oddiy irratsional, trigonometrik, ko'rsatkichli, logarifmik tenglamalardan biriga aylantirish mumkin.

Ratsional, irratsional, ko'rsatkichli va boshqa tenglamalarning ayrim turlarini yechishning mustaqil usullari mavjud bo'lsa ham, barcha tenglamalarni yechishning uchta keng tarqalgan umumiy usullari mavjud:

1) Tenglamani ayniy shakl almashtirish orqali yechish usuli;

2) Tenglamani yechish uchun yangi noma'lumni kiritish usuli;

3) Tenglamani yechishning funksional-grafik usuli.

**3. Tenglamalarni ko'paytuvchilarga ajratish usuli bilan yechish usuli**

Aytaylik, $f(x)=0$ tenglamani yechish kerak bo'lsin, bu yerda

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)f_3(x)$$

bo'lsin. $f(x)=0$ tenglamani oddiy tenglamalar sistemasi bilan almashtirish mumkin: $f_1(x)=0;\ f_2(x)=0;\ f_3(x)=0$.

Keyin u tenglamalarning ildizlari topiladi. Shuning uchun $f(x)=0$ tenglamani yechish uchun tenglamaning chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratish kerak.

Maktab matematikasi kursida $f(x)$ funksiyani ko'paytuvchilarga ajratishning quyidagi usullari o'rganiladi:

1) Qavslar ichidagi umumiy ko'paytuvchilarni guruhlash va ajratish;

2) Qisqa ko'payish formulalaridan foydalanish, masalan,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

3) Kvadrat uchhadni ko'paytuvchilarga ajratish

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Bu yerda $x_1, x_2$ lar kvadrat uchhadning ildizlari.

1-misol. $x^3 - 3x - 2 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $-3x$ ni $-3x = -x - 2x$ kabi yozamiz.U holda

$$x^3 - x - 2x - 2 = 0;$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x+1) = 0;$$

$$(x+1)(x^2 - x - 2) = 0.$$

1. $x+1 = 0, x_1 = -1$.

2. $x^2 - x - 1 = 0$, keyin $x_2 = -1, x_3 = 2$.

Javob: $-1; 2$.

2-misol. Tenglamani yeching: $x^3(x^2-7)^2 - 36x = 0$.

Umumiy ko'paytuvchi qavsdan tashqariga chiqariladi va o'ng tomonini qisqa ko'paytirish formulalaridan foydalanib,

$$\begin{aligned} x^3(x^2-7)^2 - 36x &= x(x^2(x^2-7)^2 - 36) \\ &= x(x(x^2-7) - 6)(x(x^2-7) + 6) \\ &= x\big((x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6)\big) \\ &= x(x^3 + 1 - 7x - 7)(x^3 - 1 - 7x + 7) \\ &= x(x+1)(x-1)(x^2 - x - 6)(x^2 + x - 6) \\ &= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

Ya'ni, $x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2) = 0$

Bundan $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = -2, x_6 = -3, x_7 = 2$.

Javob: $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$.



3-misol. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $5x^2 = x^2 + 4x^2$ ni tenglamaning chap tomoniga qo'ygandan so'ng biz umumiylarini qavslar bo'yicha guruhlaymiz:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5 &= x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x^2 + 4x - 5 \\ &= (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 5 \end{aligned}$$

Endi $x^2 + x = y$ almashtirishni amalga oshirsak, biz

$$y^2 + 4y - 5$$

kvadrat uchhadni olamiz. Kvadrat uchhadning ildizlari $y_1 = 1, y_2 = -5$

U holda

$$y^2 + 4y - 5 = (y-1)(y+5)$$

bo'ladi. Bundan

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5 = (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 5) = 0$$

hosil bo'ladi. Har bir ko'paytuvchini alohida-alohida nolga tenglaymiz:

$$x^2 + x - 1 = 0, \qquad x^2 + x + 5 = 0$$

Birinchi tenglamaning ildizlari

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ikkinchi tenglamani haqiqiy sonlar to'plamida yechimi yo'q.

Javob: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ratsional ko'paytmalarni butun son koeffitsiyentlari bilan tasniflashda bo'linuvchilarni hisobga oladigan maxsus usul mavjud.

**Teorema.** Agar p(x) butun koeffitsiyentli ko'phad bo'lib uning ildizi bo'lsa, u holda ildiz ko'phad ozod hadining bo'luvchilaridir.

Ushbu teoremaga asoslanib, tenglamalarni ko'paytuvchilarga ajratish usulidan foydalanib, $p(x)=0$ butun son koeffitsiyentli tenglama quyidagi tartibda olingan:

1. $p(x)$ ko'phadning barcha $k$ bo'luvchilari yoziladi.

2. Bo'linuvchilardan $p(x)$ ko'paytmaning ildizi bo'lgan son tanlanadi.

3. $k$ ta ko'paytma ko'paytuvchilar bo'yicha tasniflanadi.

4. $P(x)=0$ tenglama $g(x)=0$ ga aylantiriladi, avval $g(x)=0$, so'ngra $P(x)=0$ tenglama hal qilinadi.

4-misol. $6x^3+13x^2-9x-12=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Ozod hadni barcha ko'paytuvchilarini topamiz, ya'ni

$$-12: \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12..$$

1. $p(x_i)$ ni topish uchun $x_i$ larning qiymatlarini ketma-ket qo'yib hisoblaymiz:

$$p(1)=6+13-19-12\neq0;$$
$$p(-1)=-6+13+19-12\neq0;$$
$$p(2)=48+52-38-12\neq0;$$
$$p(-2)=-48+52+38-12\neq0;$$
$$p(3)=162+117-57-12\neq0;$$
$$p(-3)=-162+117+57-12=0.$$

Demak, $x=-3$.

2. Berilgan tenglamaning o'ng tomonidan $(x+3)$ ko'payuvchini ajratamiz:

$$p(x)=6x^3+13x^2-19x-12=(6x^3+18x^2)+(-5x^2-15x)+(-4x-12)=$$
$$=6x^2(x+3)-5x(x+3)-4(x+3)=(x+3)(6x^2-5x-4).$$

3. Berilgan tenglama quyidagi shaklda

$$(x+3)(6x^2-5x-4)=0$$

yoziladi, bundan $(x+3)=0$; $\quad 6x^2-5x-4=0$.

Birinchi tenglikdan $x_1=-3$, ikkinchisidan $x_2=-\frac{1}{2}; x_3=\frac{4}{3}$.

natijani olamiz.

Javob: $\frac{1}{2}; \frac{4}{3}$.



Yechimni topishda ko'phadni $(x+3)$ ga bo'lish orqali ham tasniflash mumkin edi.

**4. Tenglamalarni yechish uchun yangi o'zgaruvchini kiritish usuli**

Agar $f(x)=0$ tenglamani $p(g(x))=0$ tenglama shaklda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda $u=g(x)$ o'zgaruvchi kiritiladi va $p(u)=0$ tenglama hosil bo'ladi. Agar $P(u=0$ tenglama ildizlari $u_1, u_2, ..., u_n$ bo'lib, u $g(x)=u_1, g(x)=u_2, ..., g(x)=u_n$ tenglamalar yechimlarini topishga keltiriladi.

Yangi o'zgaruvchini kiritish tenglamani yechishni ancha osonlash-tiradi. Shu sababli, tenglamani yechish uchun yangi o'zgaruvchini tanlash qobiliyati maktab o'quvchilarining matematik madaniyatining muhim qismidir.

Tenglamani yechish uchun o'quvchilarga uni zudlik bilan o'zgartirishga shosxiltirmaslik kerak, balki masalani hal qilishni osonlashtirish uchun qanday yangi o'zgaruvchilar kiritilishi mumkinligi haqida o'ylash kerak. Agar yangi o'zgaruvchini kiritish tenglama shartidan darhol aniq bo'lmasa, yangi o'zgaruvchini kiritish imkoniyatiga qanday o'zgartirishlar kiritish mumkinligini ko'rib chiqish kerak.

Shu sababli, yangi o'zgaruvchining kiritilishi tenglamani yechishning boshida yoki ba'zi o'zgartirishlardan so'ng paydo bo'lishi mumkin va ba'zida bitta emas, ikkita yangi o'zgaruvchini kiritish kerak bo'ladi.

1-misol. Tenglamani yeching:

$$\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}.$$

Yeshish. Quyidagi shaklda o'zgaruvchini almashtiramiz:

$$x^2-x=y$$
$$\sqrt{y+2}+\sqrt{y+7}=\sqrt{2y+21}$$
$$(\sqrt{y+2}+\sqrt{y+7})^2=\sqrt{2y+21}^2$$
$$y+2+2\sqrt{(y+2)(y+7}+y+7=2y+21$$
$$2\sqrt{(y+2)(y+7}=21-9$$

$$\sqrt{y^2+9y+14}=6;$$
$$y^2+9y+14=36;$$
$$y^2+9y-22=0$$
$$y_1=2, y_2=-11.$$

Endi $x^2-x=2$; $x^2-x=-11$ tenglamalarni yechish qoladi. Birinchi tenglamaning ildizlari $x_1=2,\ x_2=-1$, ikkinchi tenglamaning esa ildizi yo'q.

Javob: 2; -1.

Ta'kidlash mumkinki, tenglamani yechish uchun $x^2-x+2=y$ kabi o'zgartirish kiritish ham mumkin edi.

2-misol. $\lg^2 x^3+\log_{0,1}10x-7=0$ tenglamani yeching.

Yeshish. Tenglamadagi tarkibiy qismlarni alohida-alohida o'zgartiramiz:

$$\lg^2 x^3=(\lg x^3)^2=(3\lg x)^2=9\lg^2 x;$$
$$\log_{0,1}10x=-\lg 10x=-(\lg x+\lg 10)=-\lg x-1.$$

Berilgan tenglama quyidagicha yoziladi:

$$9\lg^2 x-\lg x-8=0$$

$\lg x=y$ deb belgilasak:

$$9y^2-y-8=0$$

deb yozish mumkin. Bundan $y_1=1; y_2=-\frac{8}{9}$.

Endi biz quyidagi ikkita tenglamani yechamiz:

$$\lg x=1, \lg=-\frac{8}{9},$$

Oxirgidan $x_1=10; x_2=10^{-\frac{8}{9}}$.

Javob: 10 ; $10^{-\frac{8}{9}}$.

3-misol. $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$ tenglamani yeching.



Yeshish. Tenglamani yechish uchun yangi noma'lumni qanday kiritish kerakligi ma'lum emas. Biroq, bunday tenglamalar o'z nomlariga ega. O'rtadagi haddan boshlab teng uzoqlikdagi koeffitsiyentlari teng bo'lgan tenglamalar simmetrik (takroriy) tenglamalar deyiladi. Berilgan tenglama simmetrik tenglamadir, uni $x^2$ ga bo'lamiz:

$$2x^2-7x+9-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}=0,$$

Birinchi va oxirgi hadlarni, ikkinchi va to'rtinchi hadlarni guruhlaymiz:

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-7(x+\frac{1}{x})+9=0$$

yangi o'zgaruvchi kiritamiz: $x+\frac{1}{x}=y$ va $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ bo'ladi. Yuqoridagi tenglama ushbu tenglamaga keladi:

$$2(y^2-2)-7y+9=0 \text{ yoki } 2y^2-7y+5=0.$$

Uning ildizlari: $y_1=1; y_2=\frac{5}{2}$.

Endi tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$x+\frac{1}{x}=1;\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

Javob: 2; $\frac{1}{2}$.

### 5. Tenglamalarni yechishning funksional-grafik usuli

Funksional-grafik usul bilan $f(x)=g(x)$ tenglamani yechish uchun:

1) $y=f(x)$, $y=g(x)$ funksiyalar grafiklari chiziladi;

2) grafiklarning kesishish nuqtasi topiladi.

Grafiklarning kesishish nuqtasining abssissasi tenglamaning ildizidir.

Agar $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalarning grafiklari kesishmasa, tenglama yechimi topilmaydi.

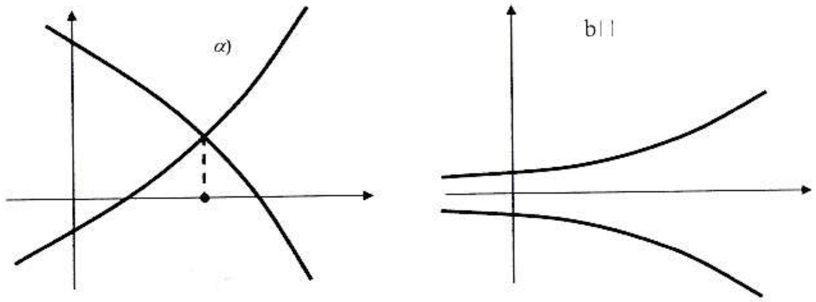
Ushbu usul tenglamaning ildizlarini aniq yoki taxminiy aniqlashga imkon beradi.

Agar oraliqda $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalardan biri o'suvchi va ikkinchisi kamayuvchi bo'lsa, $f(x) = g(x)$ tenglama bu intervalda bitta ildizga ega (1-rasm, *a*) yoki ildizi yo'q (1-rasm, *b*).

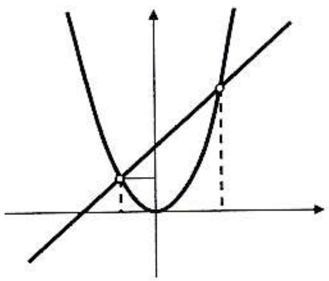
**1-misol.** $x^2 - x - 2 = 0$ tenglamaning yeching.

Yeshish. Berilgan tenglamani $x^2 = x + 2$ deb yozamiz.

1. $y = x^2$ va $y = x + 2$ grafiklarini chizamiz;
2. Ushbu grafiklarning kesishish nuqtalari (-1; 1), (2; 4) (2-rasm).




1-rasm.



2- rasm

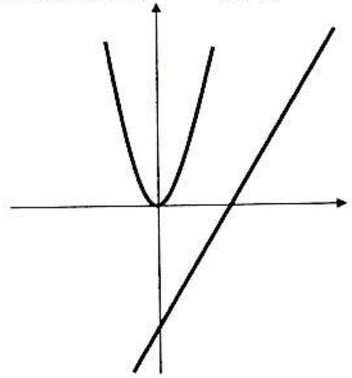
Javob: 1; 2.

2-misol. $x^4 - 8x + 63 = 0$ tenglamani yeching.



Yeshish. Tenglamani yechish uchun tenglamani ikkita funksiya sifatida yozsak va $y = x^4$ va $y = 8x - 63$ funksiyalarning grafigini hech bo'lmaganda sxema bo'yicha chizsak, ular kesishmasligini ko'rishimiz mumkin (3-rasm).

Agar biror oraliqda $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalardan biri o'ssa, ikkinchisi esa kamayuvchi bo'lsa va tenglamaning bitta ildizini aniqlasak, tenglama to'liq yechilgan bo'ladi, chunki, bu tenglamaning yagona ildizidir.



3- rasm.

3-misol. Tenglamani yeching: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$

Yechish: $x = 1$ tenglamaning bitta ildizi ekanligini aniqlash qiyin emas.

$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$ funksiya kamayuvchi funksiya, $y = 2^x$ funksiya o'suvchi funksiya. 1-funksiya kamayib bormoqda va 2-funksiya o'sib bormoqda, shuning uchun tenglamaning $x = 1$ dan boshqa ildizlari yo'q.

Javob: $x = 1$.

Agar biror intervaldagi $y = f(x)$ funksiyaning maksimal qiymati A bo'lsa, va $y = g(x)$ funksiyaning minimal qiymati ham A ga teng bo'lsa, bu intervalda $f(x) = g(x)$ bo'ladi. U $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A \end{cases}$ tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

4-misol. $\sqrt{2+sin^2 4x} = sinx - cosx$ tenglamani yeching.

Yechish: $f(x) = \sqrt{2+\sin^2 4x}$ bo'lsin, u holda $f(x) \geq \sqrt{2}$

$g(x)$=sin$x$ +cos$x$ desak,

$$g(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

Bundan $g(x) \leq \sqrt{2}$.

$f_{min} = g_{max}$

ekanligidan $f(x) = g(x)$ tenglamaning yechimi

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2}, \\ g(x) = \sqrt{2}. \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} \sqrt{2+\sin^2 4x} = \sqrt{2}, \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

ga teng kuchli. Tenglamalardan birinchisini yechamiz:

$$\sin 4x = 0,\ 4x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{4}.$$

Ikkinchisini yechib $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ni hosil qilamiz.

Javob: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

### 6. Ekvivalent tenglamalar

Tenglamalarni yechishda turli xil o'zgarishlar amalga oshiriladi va oldingisiga nisbatan soddalashtiriladi. Ekvivalent tenglamalar tushun-chasi ketma-ket o'zgarishlar natijasida yakuniy tenglamaning yechimlari berilgan tenglamaning ildizlari ekanligini anglatadi. Yot ildizlar qayerdan kelib chiqqanligi yoki tenglama ildizlarining yo'qolishi nima sabablar natijasida yuzaga keladi? degan savollar tug'ilishi asoslidir. Qanday tenglamalar ekvivalent deyiladi, qanday tenglamalar ekvivalent o'zgarishlar, qanday hollarda ular ekvivalent emas, buni qanday bilish mumkin, bu masalalarni o'quvchilar ongli ravishda o'zlashtirishlari kerak.



Sinonimik konversiya tushunchasi maktab matematikasi kursida o'quvchilar ushbu tushunchaga muhtoj bo'lib, u ma'lum tajribaga ega bo'lganda asta-sekin joriy etiladi. O'quvchi matematik tilda har qanday yangi atamaning paydo bo'lishi faqat zarurat tug'ilganda kiritilishini tushunishi kerak.

Chiziqli tenglamalar va kvadrat tenglamalarni o'rganayotganda ekvivalent tenglamalar va ekvivalent transformatsiyalar haqida savol tug'ilmaydi. Ekvivalent bo'lmagan transformatsiya mavjud bo'lmagan-ligi sababli, ekvivalent tenglama atamasini kiritishga hojat yo'q.

Algebraik funksiyalarni o'rganish bilan bog'liq holda, masalan, ratsional tenglamalarda mahrajdagi ifodadan xalos bo'lganda tashqi ildizlar paydo bo'ladi. Bu holda birinchi marta ekvivalent tenglama atamasi kiritiladi. Bu yerda ekvivalent tenglamalar tushunchasini kiritishga ehtiyoj tug'iladi va tajriba to'planadi.

Bir xil ildizga ega bo'lgan ikkita tenglama o'zaro ekvivalent tenglama deyiladi. Agar bitta tenglamaning har bir ildizi ikkinchi tenglamani qanoatlantirsa va aksincha, agar ikkinchi tenglamaning har qanday ildizi birinchi tenglamani ham qanoatlantirsa, u holda ular ekvivalent yoki ekvivalent tenglamalar deyiladi. Xususan, ildizlarga ega bo'lmagan barcha tenglamalar bir-biriga ekvivalentdir. Masalan, quyidagi tenglamalar ekvivalentdir:

1. $x$-2=0 va $2^x = 4$,
2. sin$x$=2 va $\sqrt{x}$=-1.

Agar $f_1(x) = g_1(x)$ tenglamaning har bir ildizi, $f_2(x) = g_2(x)$ tenglamaning ham ildizlari bo'lsa, bu tenglamalar aynan teng tenglamalar deyiladi.

$x^2 - 8x = 0$ tenglamani

$$(x^2 - 8x)(x^2 + 5) = 0$$

tenglama bilan teng kuchli deb ko'rsatish uchun $x^2 - 8x = 0$ tenglamaning har bir ildizi

$$(x^2 - 8x)(x^2 + 5) = 0$$

tenglama ildizi bo'lishiga ishonch hosil qilish kerak.

Agar ikkita tenglamadan biri ikkinchisining natijasi bo'lsa va aksincha bo'lsa, u holda bu ikkila tenglama tengdir.

Bir tenglamadan ikkinchisiga mos keladigan o'zgarishni ko'rib chiqish talab qilinsin.

Quyidagi uchta teoremani qanoatlantiradigan transformatsiyani amalga oshirayotganda, har safar bitta tenglamadan ikkinchisiga o'tish sinonimik o'zgarishdir.

1-teorema. Agar tenglamadagi ifodalardan biri tenglamaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga teskari ishora bilan olib o'tilsa, natijada olingan tenglama berilgan tenglamaga tengdir.

2-teorema. Agar tenglamaning ikkala tomonini bir xil asos bo'yicha darajaga ko'tarilsa, natijada olingan tenglama berilgan tenglamaga teng bo'ladi.

3-teorema. Agar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ bo'lsa (bu yerda $a>0,\ a\neq 1$ ), u holda u

$$f(x) = g(x)$$

tenglamaga tengdir.

Ushbu teoremalar qo'llanilganda, chetki ildiz hosil bo'lmaydi va ildiz yo'qolmaydi. Shuningdek, quyidagi teoremalar faqat ma'lum shartlar bajarilganda ishlaydi, ya'ni ularni qo'llashda ehtiyotkorlik talab etiladi.

4-teorema. Agar $f(x)=g(x)$ tenglama ikkala tomoniga $h(x)$ ko'paytirilib, berilgan tenglamaning hamma joyida amal qiladigan va u biron bir joyida nolga aylanmaydigan qiymat bo'lsa, u holda

$$f(x)\, h(x) = g(x)\, h(x)$$

tenglama paydo bo'ladi.

Ushbu teorema bilan ishlashda $h(x)$ funksiya tenglamaning har ikki tomoniga ko'paytiriladi:

1) berilgan tenglamaning aniqlanish sohasidagi ma'nosi o'zgarmasa;

2) berilgan tenglama aniqlanish sohasida nolga teng bo'lmasa.



4-teoremani quyidagicha sharhlash mumkin: tenglama har ikki tomonini noldan farqli ko'paytuvchiga ko'paytirilsa, u holda tenglamaga teng kuchli tenglama hosil qilinadi.

5-teorema. Agar $f(x)=g(x)$ tenglamaning aniqlanish sohasi manfiy bo'lmasa, tenglamaning ikkala tomonini ham bir xil darajaga ko'tarishdan so'ng hosil bo'lgan tenglama berilgan tenglamaga tengdir:

$$(f(x))^n = (g(x))^n$$

$f(x)=g(x)$ tenglamaning ikkala tomonini juft darajaga ko'tarish uchun $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$ shartlar tenglamaning aniqlanish sohasida bajarilishi kerak.

6-teorema. $f(x)>0$ va $g(x)>0$, shuningdek $a>0, a\neq 1$ bo'lsa, u holda $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ tenglama $f(x)=g(x)$ tenglamaga teng kuchlidir.

Ushbu teoremaga ko'ra, $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0, a\neq 1)$ tenglamadan $f(x)=g(x$ tenglamaga o'tish uchun $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi o'rinli bo'lishi kerak.

Agar tenglamani yechish jarayonida 4,5,6-teoremaning cheklovlaridan birining bajarilishini tekshirmasdan faqat teoremaning natijalaridan foydalansak, teoremadan salbiy oqibatlarni olamiz. Buning asosiy sababi – berilgan tenglamaning aniqlanish sohasini topishdir.

Agar tenglamani yechishning ma'lum bir bosqichida biz tenglamaning ikkala tomonini ba'zi bir ifodaga ko'paytirsak (albatta, bu ifoda tenglamaning aniqlanish sohasida ma'noga ega bo'lishi kerak) yoki tenglamaning har ikki tomonini darajaga oshirish yoki logarifmni tenglamaning har ikki tomonida qo'llasak, ya'ni almashtirishlarni bajarsak, unda barcha topilgan ildizlarni tekshirish kerak.

Boshqacha qilib aytganda, agar tenglamani o'zgartirish jarayonining ma'lum bir bosqichida tenglama aniqlanish sohasining kengayishi sodir bo'lgan bo'lsa, unda barcha topilgan ildizlarni tekshirish kerak.

Tenglama aniqlanish sohasini kengaytirish uchun maktab matematika kursi darajasida qanday o'zgarishlarni amalga oshirish mumkin degan savol tug'iladi.

Tenglama aniqlanish sohasini kengaytirishning uchta usuli mavjud:

1. Agar tenglamaning mahrajida $g(x)$ bo'lsa, unda tenglamaning har ikki tomonini $g(x)\neq 0$ ifodasi bilan ko'paytirish yoki kasrning mahrajini olib tashlash yo'li bilan amalga oshiriladi.

2. Logarifmni "tushirish" yoli bilan. Xuddi shu asosda logarifm belgisi ostidagi tenglamadan logarifmsiz tenglamaga o'tish uning aniqlanish sohasini kengaytiradi. Buning sababi, logarifm ostidagi ifodalar musbatliligidadir.

3. $n$ juft sonlar uchun $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = f(x)$ formuladan foydalanish. Aslida, $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2$ ning aniqlanish sohasi $f(x)\geq 0$ tengzlik bilan beriladi. Agar $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2$ ifoda $f(x)$ ifodasi bilan almashtirilsa, $f(x)$ ning aniqlanish sohasidagi cheklov olib tashlanadi, ya'ni aniqlanish sohasi kengayadi. Tenglamaning ildizini tekshirish ikki usulda amalga oshiriladi:

1) Berilgan tenglamadagi barcha ildizlarni tekshirganda, tenglamani qanoatlantiradiganlari (to'g'ri sonli tenglikka aylantiradi-ganlari) tenglamaning ildizlari sifatida olinadi, qanoatlantirmaydiganlar esa chet ildizlardir.

2) Topilgan ildizlarning berilgan tenglama aniqlanish sohasiga tegishliligi tekshiriladi. Agar ildiz aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa, u berilgan tenglamaning ildizidir, agar ildiz aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmasa, u chet ildizdir.

Aniqlanish sohasidagi tenglamaning ildizlarini tekshirish usuli. Bitta tenglamadan ikkinchisiga o'tishda faqat o'ziga xos bo'lgan o'zgarishlar aniqlanish sohasini kengaytirishdan tashqari bo'lmagan taqdirdagina samarali bo'ladi. Bu logarifmik tenglamalarni yechishda to'g'ridir.

Masalan, irratsional tenglamalarni yechish murakkabdir: tenglamaning topilgan ildizlarini aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa ham, ularda chet ildizlar bo'lishi mumkin.



Endi tenglamaning ildizlari yo'qolgan holatlarni qaraylik. Maktab matematika kursi doirasida tenglama ildizining yo'qolishining asosan ikkita sababi bor:

1) tenglik ikkala tomoni bir xil $h(x)$ ga bo'lgan holda ($h(x)\neq 0$);

2) bitta tenglamadan ikkinchisiga o'tish paytida tenglama aniqlanish sohasining kichiklashishi hisobiga ildiz yo'qoladi.

Birinchi holning kamchiliklarini tuzatish qiyin emas: agar ifoda nolga teng emasligi oldindan ma'lum bo'lmasa, uni tenglamaning ikkala tomoniga bo'lish ta'qiqlanadi.

O'quvchilarni $f(x)h(x)=g(x)h(x)$ tenglamani yechishda

$$f(x)h(x)-g(x)h(x)=0,$$

$$h(x)\left(f(x)-g(x)\right)=0, \quad h(x)=0 \quad , f(x)-g(x)=0$$

kabilarni qarashga o'rgatish kerak.

Ikkinchi vaziyat murakkab. Bu yerda tenglamani yechish jarayonida formulalarni noto'g'ri qo'llash natijasida ildizlarning yo'qolishi ro'y beradi:

1. $\log_a\left(f(x)\right)^{2n} = 2n\log_a|f(x)|$ yozish o'rniga

$\log_a\left(f(x)\right)^{2n} = 2n\log_a f(x)$ deb xato qiladilar.

2. $\log_a f(x)g(x) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$ yozish o'rniga

$\log_a f(x)g(x) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$ deb xato qiladilar.

3. $\sqrt[2n]{f(x)g(x)} = \sqrt[2n]{|f(x)|}\sqrt[2n]{|g(x)|}$ yozish o'rniga

$\sqrt[2n]{f(x)g(x)} = \sqrt[2n]{f(x)}\sqrt[2n]{g(x)}$ deb xato qiladilar.

Trigonometrik tenglamalarni yechishda ildizlarning yo'qolishiga olib keladigan trigonometrik formulalar mavjud.

1. $ctgx = \dfrac{1}{tgx}$ tenglamaning chap tomonidagi funksiyaning aniqlanish sohasi $x\neq \pi n$ bo'lsa, o'ng tomonidagi funksiyaning aniqlanish sohasi $tgx\neq 0$, ya'ni; $\cos x\neq 0$; ya'ni $x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n$, natijada, ildizni yo'qotib qo'yish mumkin.

2. $tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$ tenglamaning chap tomoni uchun aniqlanish sohasi: $cos2x \neq 0$, ya'ni $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ yoki $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ bo'ladi. Tenglamaning o'ng tomoni uchun aniqlanish sohasi: $tg^2x \neq 1$, ya'ni $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, yana $cosx \neq 0$ yoki $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ qiymatlarini tekshirish zarur.

3. $tg(x+\alpha) = \frac{tgx + tg\alpha}{1 - tgxtg\alpha}$ tenglamani yeching.

Tenglamaning chap tomonini o'ng tomonga almashtirishda

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ cheklash mavjud.

4. $tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ tenglamani yeshing.

$tg\frac{x}{2}$ uchun $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, ya'ni, $x \neq \pi + 2\pi n$ va $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ uchun $x \neq \pi n$ va aniqlanish sohasida $x \neq \pi n$ qo'shimcha cheklash bo'ladi. Ushbu formulaga o'xshash

$$tg\frac{x}{2} \neq \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

formulasidan foydalanilganda aniqlanish sohasida hech qanday cheklash yo'q. Tenglamaning chap va o'ng tomonlarini aniqlanish sohalari bir xil: $x \neq \pi + 2\pi n$.

5. $$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Bunday almashtirishlar bilan yecxilgan tenglamaning $x = \pi + 2\pi n$ ildizlari yo'qolishi mumkin. Ushbu qiymatlarni asl tenglamaga qo'yish orqali tekshirish kerak. Chunki ildiz yo'qolishi mumkin.

Misol. $sinx - cosx = 1$ tenglamani yeching.

Yeshish: Tenglamani yechish uchun



$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

formulalar qo'llaniladi. $tg\frac{x}{2} = u$ almashtirish bajaramiz, ya'ni uning aniqlanish sohasi: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, ya'ni $x \neq \pi + 2\pi n$.

Yangi o'zgaruvchilar yordamida tenglama

$$\frac{u}{1+u} - \frac{1-u}{1+u^2} = 1$$

tenglamaga keladi. Oxirgi tenglama yechimi $u=1$, ya'ni

$$tg\frac{x}{2} = 1, \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Biroq, berilgan tenglama $x = \pi + 2\pi n$ qiymatlarni ham qanoatlantiradi. Tenglama ildizlari yo'qolishi ayniy almastırısga bog'liq.

Javob: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$.

## 3.2-§ Tenglamalar yechishni o'rganish

REJA:

1. Chiziqli tenglamalarni yechish.
2. Ikkita noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.
3. Kvadrat uchhaddan to'liq kvadrat ajratish.
4. Irratsional tenglamalar.

### 1. Chiziqli tenglamalarni yechish

Chiziqli tenglamani yechish elementar matematikani o'qitishdan boshlanadi.

Quyidagi chiziqli tenglamaning yechimi boshlang'ich maktabda ko'rib chiqiladi:

$$7+x=10;\quad x-3=10+5;\quad x(17-10)=70;\quad x:2+10=30$$

va boshqalar. Tenglamaning ildizi avval noma'lum o'rniga sonni tanlab, uni qo'yish orqali topiladi. Keyin, tenglamaning ildizini topish uchun arifmetik amallarning tarkibiy qismlari va natijalari o'rtasidagi bog'liqlik asosida topish o'rgatiladi. Masalan, birinchi tenglamani yechishda o'quvchilar shunday deb o'ylashadi: "Noma'lumni aniqlash uchun biz ma'lumni yig'indidan ayirihimiz kerak: $x=10-7$, $x=3$".

Tenglamalar bilan tanishish qolgan tushunchalarga uzviy ravishda amalga oshiriladi. Masalan, quyidagi masalani ko'rib chiqaylik: "Noma'lum songa 3 qo'sxilsa, 8 hosil bo'ladi. Noma'lum sonni toping. "U quyidagicha umumlashtiriladi: ?+ 3 = 8. So'roq belgisini harf bilan almashtirish va sonni tanlash usuli bilan aniqlanadi. Noma'lum sonni $x$ bilan belgilash va quyidagicha yozish mumkinligi aytiladi: $x+3=8$.

Boshlang'ich sinflarda tengsizliklarni o'rgatish ham tanlab hal qilinadi, ko'pincha cheklanmagan miqdordagi tengsizlik yechimlari topiladi.

3-5 sinfda tenglamalar, shuningdek, arifmetik amallar natijalari va tarkibiy qismlari o'rtasidagi bog'liqlik bilan hal qilinadi, ko'pincha dastlabki ifodalar soddalashtiriladi. Masalan,

$$13899+x=2716+13899.$$

O'quvchilar $4x+4x=424$ ko'paytirishning qo'shish usuliga nisbatan mutanosiblik qonunidan foydalanadi: $15a-8a=714$ va hokazo tenglamalarni yechadi. O'nli kasrlar mavzularini o'tishda quyidagi tenglamalar yecxiladi:

$$8{,}6-(x+2{,}75)=1{,}85;$$

$$x+2{,}8=3{,}72+0{,}38;$$

$$45{,}7x+0{,}3x-2{,}4=89{,}6.$$

Ushbu tenglamalarning yechimi ham arifmetik amallar natijalari va ularning xossalariga asoslanadi.



6-sinfda musbat va manfiy sonlarni o'qitishda chiziqli tenglamalarning yangi namunalari, ba'zi chiziqli tenglamalar kombinatsiyalari ko'rib chiqiladi. Qarama-qarshi sonlarni aniqlashga asoslanib, quyidagi tenglamalar $-x=607$. $a=-30{,}04$ yechimlari aniqlanadi. $|x|=5$; $|y|=20$; $|a|=0$; $|b|=-3$ tenglamalarning yechimlari esa modulning ta'rifi asosida topiladi. 6-sinfda "ochiladigan qavslar" ning ekvivalent o'zgarishi bilan tanishgandan so'ng,

$$7{,}2-(6{,}2-x)=2{,}2;$$

$$-5+(a-25)=-4$$

tenglamalarni yechish usuli o'rgatiladi. Ifoda nolga teng bo'lish shartini bajargandan so'ng, quyidagi tenglamalar qaraladi:

$$4(x-5)=0,\ (3x-6)2{,}4=0;\ (x+3)(x+4)=0$$

va boshqalar. O'quvchilarni tenglamalarni yechish usuli bilan tanishtirishning yangi bosqichi tarkibiy qismlarni tenglamaning bir tomonidan boshqasiga o'tkazish qoidasidir. Ushbu qoida asosida ular quyidagi tenglamani yechadilar:

$$15y-8=-6y+4{,}6;$$

$$6x-12=5x+4$$

Keyin (6-sinf oxirida yoki 7-sinf) chiziqli tenglamani yechish bilan bog'liq ma'lumotlar, bilimlar sistemalashtiriladi. Ba'zi darsliklarda birinchi darajali tenglamalar va chiziqli tenglamalar o'rtasidagi farq ko'rib chiqiladi. Birinchi darajali tenglama chiziqli tenglamaning xususiy holi deyiladi.

Odatda, chiziqli tenglama $ax+b=0$ bilan ifodalanadi, bu yerda $a$ noma'lum oldidagi koeffitsiyent, $b$ esa ozod had deyiladi. Noma'lum qatnashgan chiziqli tenglamani yechishning xususiy hollarini ko'rsatish samarali bo'ladi:

$$1^0.\ a\neq 0;\quad 2^0.\ a\neq 0,\ b\neq 0;\quad 3^0.\ a=0,\ b=0.$$

O'quvchilarga tenglamani yechishning bir necha usullarini o'rgatish foydalidir.

Masalan, $-x=0{,}5$ tenglamani quyidagi yo'llar bilan yechish mumkin:

1) avval ushbu tenglamani quyidagicha yozamiz: $0-x=0{,}5$. Ma'lum bo'lgan farq va noma'lum o'rtasidagi bog'liqlik asosida biz quyidagini topamiz:

$$x=0-0{,}5;\ x=-0{,}5;$$

2) qarama-qarshi sonlarning ta'rifiga ko'ra, noma'lum $x$ soni 0,5 soniga qarama-qarshi. Shuning uchun $x=-0{,}5$.

3) qarama-qarshi sonlarni ko'paytirish

$$(-x)(-1)=0{,}5(-1)$$

$$x=-0{,}5.$$

Matematikani o'qitishning psixologik jihatlaridan biri yangi o'quv materialini o'rgatish sabablarini asoslashdir. Matematika o'qitish metodikasida teskari tushuncha mavjud. Ushbu tushunchani tushuntirib beraylik. Biz $x$, $y$ va $z$ o'zgaruvchilar haqida gaplashamiz, bu yerda $x$ va $y$ o'zgaruvchilarning qiymatlari berilgan va $z$ – istalgan o'zgaruvchi. Endi quyidagi masalani ko'rib chiqamiz, masalan, $x$ va $z$ o'zgaruvchilar bo'lsin, $y$ qidirilayotgan o'zgaruvchi bo'lsin. O'zgaruvchilar o'rtasidagi munosabatlar doimiy bo'lib qolsin. Bu ikki masala teskari masalalar deb ataladi. Teskari masalalarni hal qilish uchun turli xil tenglamalar qo'llaniladi. Shu sababli, teskari masalalarni yechish va qurish yangi tenglamalarni asoslash uchun foydali uslubiy asosdir. Misollar keltiramiz:

1) $\frac{1}{2}$ songa qandaydir bir son qo'shsangiz, songa teskari sonni hosil qilasiz. Bu son qaysi?

2) Har qanday musbat songa 1,5 ni qo'shsangiz, birinchi songa teskari son hosil bo'ladi. Bu sonni toping.

3) Dastlab omborda $\frac{1}{5}$ tonna yog' bor edi. Bir yangi yog' tushirilgandan so'ng, bu zahiradagi jami yog'ning miqdoriga teskari son hosil bo'ldi. Omborga necha tonna yog' keltirildi?

4) Omborda ma'lum miqdordagi yog' bor edi. Omborga 1,5 tonna yangi yog' yetkazib berilgandan so'ng, ularning miqdori birinchi sonning teskari qiymatida aks ettirildi. Boshida qancha yog' bor edi?

Birinchi masalaning yechimi quyidagi chiziqli tenglamaga keltiriladi:



$\frac{1}{2}+x=2$, keyin $x=1{,}5$.

Ikkinchi masalaning yechimini topish uchun $x+1{,}5=\frac{1}{x}$ tenglama yoki

$$x^2+1{,}5x-1=0$$

kvadrat tenglama tuziladi.Bundan tashqari, ular bu masalani yeshishlari uchun

$$ax^2+bx+c=0$$

kvadrat tenglamani yechish usullarini bilishlari zarur.

Tenglamalarni yechish usullarining soni ortib borar ekan, o'quvchilar ularni tanlashlari qiyinlashmoqda. Shu munosabat bilan tenglamani yechish usullarini aniqlash uchun maxsus vazifalarni ko'rib chiqish foydalidir. Bunday vazifalarni ikki bosqichda bajarish samarali bo'ladi:

1) faqat berilgan tenglama uchun yechim yo'llarini ko'rsating;

2) tenglamani yeching.

Darslikda tenglamalar va tengsizliklar turlicha tasvirlangan.

Harf bilan belgilangan noma'lum (o'zgaruvchi) ni o'z ichiga olgan tenglikka tenglama deyiladi.

Masalan, $5x+8=18$; $6x+7=-5$; $3(x+7)=15$. Bunday tenglamalar bitta noma'lumli yoki bitta o'zgaruvchili tenglama deyiladi.

Tenglamaning o'ng va chap tomonlari bor. Misol uchun, $4x+7=19$ tenglamada $4x+7$ tenglamani chap tomonida va 19 tenglamaning o'ng tomonidadir Tenglamadagi algebraik ifodalarning har birining atamasi bor $4x$; 7; 19 tenglama qo'shiluvchilari, bu yerda $4x$ – noma'lum qo'sxiluvchi, 7, 19 – ma'lum qo'shiluvchi.

Tenglama bilan bog'liq misollar va masalalarni yechishda harfda berilgan noma'lum yoki o'zgaruvchining sonli qiymatini topamiz.

Tenglamani tenglikka aylantiradigan noma'lumning yoki o'zgaruvchining qiymati tenglamaning ildizi deb nomlanadi.

Tenglamani yechish uning ildizini topish yoki uning ildizi yo'qligini isbotlash demakdir. Tenglamalarni yechishda ba'zida bir xil ildizlarga ega bo'lgan tenglamalar mavjud. Xuddi shu ildizga ega bo'lgan tenglamalar ekvivalent tenglamalar deyiladi. Masalan, $3x=15$ va $3x-x=2,5\times4$ tenglamalar $2x=10$ tenglamaga ekvivalentdir. Chunki ularning ildizlari bir xil: $x=5$. E'tibor bering, ba'zida tenglamaning ildizi bo'lmaydi. Ildizi bo'lmagan tenglamalar ham ekvivalent tenglamalardir.

Tenglamalarni ekvivalentiga aylantirishda quyidagi xossalardan foydalaniladi:

1. Tenglamaning ikkala tomoniga bir xil son yoki harf ifodasini qo'shish (ayirish) da tenglama ekvivalent tenglamaga aylanadi.

2. Tenglamadagi tarkibiy qismlarini qarama-qarshi tomonga o'zgartirganda va uni tenglamaning bir tomonidan boshqasiga o'tkazganda, tenglamaga ekvivalent tenglama hosil bo'ladi.

3. Tenglamaning ikkala tomoni songa ko'paytirilsa yoki noldan boshqa songa bo'lganda tenglama ekvivalent tenglamaga aylanadi.

Bitta o'zgaruvchiga ega $ax=b$ tenglamani yechishning xususiy hollari quyidagicha bo'ladi:

1. Agar $a'0$ bo'lsa, tenglama faqat bitta ildizga ega: $x=\frac{b}{a}$

Masalan, $4(x+3)-15=2x+7,$

$4x-2x=7+15-12,$

$2x=10,$

$x=\frac{10}{2}=5,\ x=5.$

2. Agar $a=0$, $b'0$ bo'lsa, tenglama ildizga ega emas.

Masalan, $3x-2(x+6)=x+17,$

$3x-2x-12=x+17,$

$x-x=17+12,$

$0\cdot x=29,$

Bu tenglama ildizga ega emas.

3. Agar $a=0$, $b=0$ bo'lsa, tenglama ildizi cheksiz ko'p.



Masalan, $7x-3(2x-5)=15+x,$

$7x-6x+15=15+x,$

$x+15=15+x,$

$x-x=15-15,$

$0=0.$

tenglamaning ildizi har qanday son, ya'ni cheksiz ko'p ildizga ega.

**2. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi**

Ikkita noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasi tushunchasini o'qitish usuliga to'xtalamiz. Bu konsepsiyaning erta kiritilishi tufayli induktiv usul bilan izohlanadi.

Ikki o'zgaruvchili tenglamalar sistemasi tushunchasini o'qitishning quyidagi uslubiy sxemasi taklif etiladi:

1) Matnli masala ko'rib chiqiladi: "Ikkita savatda 12 kg olma bor, birinchi savatda ikkinchi savatdagiga qaraganda 2 kg ko'proq olma. Har bir savatda necha kg dan olma bor?"

Yechish. Avvalo $x$ va $y$ o'zgaruvchilarni kiritamiz: birinchi savatda $x$ kg olma va ikkinchisida esa y kg olma bo'lsın. Ikkala savatdagi olma 12 kg, ya'ni 2 ta savatga $x+y=12$ olma bo'r. Birinchi savatda ikkinchisiga qaraganda 2 kg ko'proq olma bor, shuning uchun $x-y=2$. Masalani hal qilish uchun ushbu yozilgan tenglamalarning ikkalasini ham qanoatlantiradigan $x$ va $y$ qiymatlarni topish kerak.

Ikkita noma'lum bo'lgan ikkita tenglamalar sistemasi va sistema yechimlari tushunchasi kiritiladi: Agar $x+y=12$ va $x-y=2$ tenglamalarning har birini to'g'ri tenglikka aylantiradigan yechimlarni topish kerak bo'lsa, unda berilgan tenglamalar tenglamalar sistemasini hosil qilgan deyiladi. Tenglamalar sistemasi figurali qavslar bilan belgilanadi: $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2. \end{cases}$

Ushbu tenglamalarning har birini to'g'ri tenglikka aylantiradigan noma'lumlarning qiymatlari juftliklari tenglamalar sistemasining yechimi deyiladi.

Kiritilgan konsepsiya aniqlandi. Bitta versiya: "$x$=2, $y$=10 sonlarining ikkita juftligini olamiz. Bu sonlar jufti birinchi tenglamaning yechimi bo'ladi, ammo ikkinchi tenglamaning yechimi bo'lmaydi. $x = 7$, $y = 5$ sonlarining yana bir juftligini olaylik. Shuningdek $x$ =3, $y$ =9 sonlarining yana bir juftligini olamiz va shu savollarga javob beramiz. Nimaga $x$=7, $y$=5 sonlari juftligi sistema yechimi ekanligini tushuntiring. Matnli masala javobi aytiladi.

Ish natijasi: ikkita noma'lum bo'lgan ikkita tenglamalar sistemasi berilgan masalaning yechimini topishga imkon beradi. O'quvchilarga topshiriq sifatida boshqa tenglamalar sistemasini ko'rib chiqing va ularni tanlab yoki grafik asosida yeching kabi topshiriqlarni berish mumkin.

$ax + by = c$ shaklidagi tenglama ikkita o'zgaruvchiga ega chiziqli tenglama, bu yerda $a$, $b$, $c$ sonlar, $x$ va $y$ o'zgaruvchilar.

Masalan, $8x+4y= 48$ ikkita o'zgaruvchili chiziqli tenglamani yechaylik.

Biz bitta o'zgaruvchini boshqasi bilan ifodalaymiz:

$$4y= 48-8x \text{ yo'ki } y= 12-2x.$$

O'quvchilar $x$ ga har xil sonli qiymatlarni berishlari mumkin:

Agar $x$=0, $y$ =12-2·0, $y$=12, ya'ni (0;12);

Agar $x$=2, $y$=12-2·2, $y$=8, ya'ni(2;8);

agar $x$=-3, $y$=12-2·(-3), $y$= 18, ya'ni (-3; 18).

Shunday qilib, $x$ o'zgaruvchiga ba'zi sonli qiymatlarni tayinlash va $y$ o'zgaruvchining tegishli sonli qiymatini topish mumkin ekan.

Quyidagi qaysi fikrlar to'g'ri?

1) ikki o'zgaruvchili bitta chiziqli tenglamaning bitta yechimi mavjud;

2) Ikki o'zgaruvchi bitta chiziqli tenglama cheksiz ko'p yechimga ega.

O'quvchilar ikki o'zgaruvchili bitta chiziqli tenglama cheksiz ko'p yechimi bor degan xulosaga kelishadi.

Ikkita o'zgaruvchili chiziqli tenglamalarning yechimi qavslar ichiga joylashtirilgan, birinchi o'rinda $x$ qiymati, ikkinchi o'rinda $y$ qiymati yo'ziladi.



Agar ikkita o'zgaruvchili bitta chiziqli tenglamaning yechimlari ikkinchisiga yechim bo'lsa, bunday tenglamalar ekvivalent tenglamalar deyiladi.

Masalan, $4x+3y$=12 tenglama $3y$=12-$4x$ tenglamaga ekvivalent tenglamadir. E'tibor bering, ikki o'zgaruvchili yechimlari mavjud bo'lmagan tenglamalar ham ekvivalentdir.

O'quvchilarga ikki o'zgaruvchili chiziqli tenglamalarning xossalari bitta o'zgaruvchiga ega bo'lgan tenglamaning xossalari bilan bir xil ekanligini ta'kidlab, ekvivalent transformatsiyalarning xususiyatlarini takrorlash foydalidir. Masalan, $9x+3y$= 54.

1-xossadan foydalanib, $3y$= 54-$9x$ tenglamani olamiz.

2- xossadan foydalanib $y$= 18-$3x$ ni hosil qilamiz.

$ax+by=c$ tenglamaning grafigi to'g'ri chiziq. Chunki $ax+by=c$ tenglama $y=kx+c$ chiziqli funksiyaning bir ko'rinishi, xususiy holidir. Iikki o'zgaruvchili $ax+by=c$ funksiya grafigi xususiy hollari:

1-hol. $ax+by=c$ tenglamada $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.

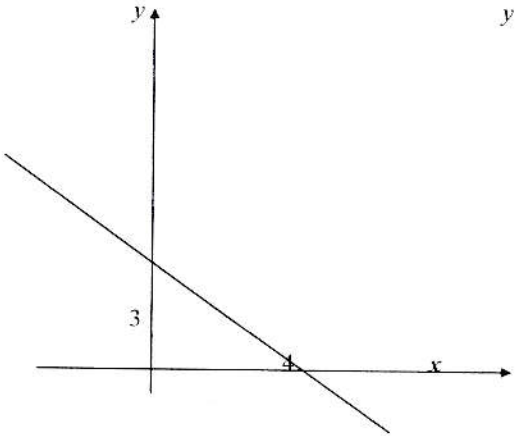
Uning grafigi to'g'ri chiziq bo'ladi. Misol uchun,

$$3x+4y=12$$

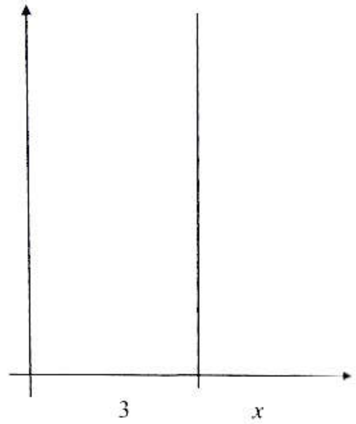
Ikki o'zgaruvchili chiziqli tenglama grafigini yasash uchun abssissa va ordinata o'qlarini kesib o'tadigan nuqtalarni topamiz. Agar $x$ = 0 bo'lsa, $y$=3 va $y$=0 bo'lsa, $x$=4, ya'ni, $A(0;3)$ va $B(4;0)$nuqtalar grafikka tegishli bo'ladi (4- rasm).

2-hol. $ax+by=c$ tenglamada $x$ yoki $y$ lardan bittasining koeffitsiyenti nolga teng bolsin: $b$=0 bo'sin, ya'ni $2x+0\cdot y$=6: $2x$=6 yoki $x$=3. Tenglamaning grafigini ko'rib chiqaylik.Tenglamani yechamiz: $y$ ning har qanday qiymatida ham $x$= 3. Uning grafigi $Oy$ o'qiga parallel $E(3;0)$ bo'ladi (5-rasm).

Agar $a$ =0; $b \neq 0$ bo'lsa, $y=m$ grafigi $0x$ o'qiga parallel $(o;\ m)$ nuqtadan o'tadi.



4-rasm.



5-rasm.

3-hol. $y=0$ bo‘lsa, – $Ox$ o‘qi; $x=0$ bo‘lsa, – $Oy$ o‘qi

4-hol. Ikki o‘zgaruvchili ikkita chiziqli tenglama sistemasidagi tenglamalar grafiklari uch xil holatda joylashgan. Shuning uchun ikkita o‘zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasi:

1) yagona yechimga ega;

2) yechimga ega emas;

3) cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

1).Tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

Masalan, $\begin{cases} x+2y=8. \\ x-y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=4-\frac{1}{2}x, \\ y=x-2 \end{cases}$

tenglamalar sistemasida nechta yechim borligini bilib olamiz.

$y$=4-0,5$x$ va $y$=$x$-2 tenglamalarning grafiklari bo‘lgan chiziqlar $A(4;2)$ nuqtada kesishadi. (4;2) – bu berilgan juftlik tenglamalar sistemasining yechimidir.

2).Tenglamalar sistemasining umumiy yechimlari yo‘q. Masalan,

$$\begin{cases} y=0,5x+2, \\ y=0,5x-1. \end{cases}$$



Ikkala tenglamadagi $x$ koeffitsiyentlari bir xil bo‘lganligi sababli ularning grafiklari parallel chiziqlardir. Keyin y = 0,5x + 2 tenglamaning grafigi va y=0,5x-1 tenglama grafigi bilan kesishmaydi. Shuning uchun, bu holda berilgan tenglamalar sistemasining yechimlari yo‘q.

4) Tenglamalar sistemasini cheksiz ko‘p yechimlari mavjud. Masalan,

$$\begin{cases} -2x+3y=6, \\ -4x+6y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+3y=6, \\ -2x+3y=6 \end{cases}$$

Bunday holda, sistemadagi ikkita tenglamaning grafiklari bir-biri bilan ustma-yst tushadi va bitta chiziq hosil qiladi. Shuning uchun berilgan tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimlarga ega.

O‘quvchilarga mavzuni tushuntirgandan so‘ng, tenglamalar sistemasini grafik usulda yechishda, agar sistemadagi tenglamalar grafiklari kesishgan bo‘lsa, bitta yechim bor, agar ular parallel bo‘lsa, yechimlar yo‘q, agar ular ustma-ust tushsa, cheksiz ko‘p yechim bor, degan xulosaga kelishlari mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini almashtirish orqali yechish izohlanadi. Masalan,

$$\begin{cases} 2x+y=11, \\ 5x-2y=5, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=11-2x, \\ 5x-2(11-2x)=5, \end{cases}$$

$$5x-2(11-2x)=5; \quad 5x-22+4x=5; \quad 9x=27; \quad x=3.$$

$$\text{va } y=11-2\cdot 3, \quad y=5$$

Javob: (3;5).

Tenglamalar sistemasini ekvivalent tenglamaga almashtirish ikkita o‘zgaruvchili tenglamalar sistemasini qo‘shib yechishni tushuntirish uchun ishlatiladi. Ikkita o‘zgaruvchili tenglamalar sistemasini qo‘shib yechishda uch xil vaziyat mavjud.

1-hol. Tenglamalar sistemasidagi o‘zgaruvchilardan birining koeffitsiyentlari teng, ammo qarama-qarshi ishorali. Bu holda, ikki tenglama qo‘shiladi. Masalan,

$$\begin{cases}5x-2y=5, \\ 3x+2y=19,\end{cases} \rightarrow \begin{cases}8x=24, & (1) \\ 3x+2y=19 & (2)\end{cases}$$

tenglamalar sistemasida 1-tenglamadan $8x=24$, yoki $x=3$ ni boshqa (ikkinchi) tenglamaga qo'yib, bir o'zgaruvchili tenglama hosil qilamiz:

$$3x+2y=19; \ \ 3\cdot3+2y=19; \ \ 2y=10; \ \ y=5.$$

Javob: (3; 5).

2-hol. Tenglamalar sistemasidagi o'zgaruvchilardan birining koeffitsiyentlari tengdir. Masalan,

$$\begin{cases}7x+2y=13, \\ 3x+2y=9.\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish uchun sistemadagi tenglamalardan faqat bittasining ikkala tomonini -1 ga ko'paytirish, sistemadagi tenglamalarni qo'shish yoki tenglamalarni biridan boshqasini ayirish kerak. Keyin berilgan tenglamalar sistemasi ekvivalent tenglamalar sistemasiga aylantiriladi:

$$-\begin{cases}7x+2y=13, \\ 3x+2y=9\end{cases} \ \ yoki \ \ +\begin{cases}7x+2y=13, \\ -3x-2y=-9\end{cases}$$

$4x=4$; ya'ni $x=1$ hosil bo'ladi, topilgan $x$ ning qiymatini tenglamaga qo'yib:

$$7\cdot1+2y=13; \ 2y=6; \ y=3$$

ni hosil qilamiz.

Javob: (1; 3).

3-hol. Tenglamalar sistemasidagi o'zgaruvchilarning koeffitsiyent-lari teng emas. Masalan,

$$\begin{cases}4x+7y=15, \\ 3x+5y=11.\end{cases}$$

O'zgaruvchilardan bittasining koeffitsiyentlari qarama-qarshi sonlar bo'lishi uchun tenglamalarning ikkala tomonini songa ko'paytirib, ulardagi o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab olamiz, tenglamalar sistemasidagi tenglamalarni quyidagicha qo'shamiz:



$$\begin{cases}4x+7y=15 \\ 3x+5y=11\end{cases}\begin{vmatrix}\times 3 \\ \times(-4)\end{vmatrix} \rightarrow +\begin{cases}12x+21y=45, \\ -12x-20y=-44\end{cases}$$

$$y=1;$$

$$12x+21y=45; \ 12x+21\cdot1=45; \ 12x=24, \ x=2.$$

Javob: (2; 1).

### 3. Kvadrat uchhaddan to'liq kvadrat ajratish

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Yuqoridagi ishlar bajarilgandan so'ng kvadrat tenglama va uning yechimlari haqida tushunchalar beriladi:

$$ax^2+bx+c=0, \ \ a\neq0$$

1. Diskriminant $D=b^2-4ac>0$ bo'lsa, kvadrat tenglama ikkita ildizga ega bo'ladi:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

2. $D=b^2-4ac=0$ bo'lsa, kvadrat tenglama ikkita o'zaro teng ildizga ega:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

3. $D=b^2-4ac<0$ bo'lsa, kvadrat tenglamaning haqiqiy ildizlari bo'lmaydi.

Kvadrat tenglamaning ildizlari uchun formula:

$$ax^2+bx+c=0; \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x^2+px+q=0;\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};\qquad ax^2+2kx+c=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a};$$

To‘liq bo‘lmagan kvadrat tenglama

1. $ax^2+bx=0,\ b\neq 0.$

Bu tenglama har doim ikki ildizga ega bo‘ladi:

$$(ax+b)\cdot x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-\frac{b}{a}, \end{array}\right.$$

a) Agar $a$ va $c$ sonlar bir xil bo‘lsa, tenglamaning ildizi yo‘q;

b) Agar $a$ va $c$ qarama-qarshi sonlar bo‘lsa, tenglamaning ikkita ildizi bor:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2. $ax^2=0$ tenglama birgina ildizga ega; $x_1=0$.

Viyet teoremasi

1. $x^2+px+q=0$ keltirilgan kvadrat tenglama uchun Viyet teoremasi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

bu yerda $x_1$ va $x_2$ keltirilgan kvadrat tenglamaning ildizlari.

2. Agar $x_1$ va $x_2$ – kvadrat tenglama $ax^2+bx+c=0$ ning ildizlari bo‘lsa, u holda $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$ tengliklar bajariladi.

Viet teoremasining teskari tomoni. Agar $x_1$ va $x_2$ sonlari uchun

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$



o‘rinli bo‘lsa, u holda ular $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari bo‘ladi.

Kvadrat tenglamaga keltiriladigan tenglamar

$$af^2(x)+bf(x)+c=0$$

tenglamani $t=f(x)$ almashtirish orqali ushbu tenglamani kvadrat tenglamaga keltirish mumkin:

$$at^2+bt+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=t_1, \\ f(x)=t_2. \end{array}\right.$$

### 4. Irratsional tenglamalar

Noma’lumlari radikallar ishorasi ostida bo‘lgan tenglamalarga irratsional tenglamalar deyiladi. O‘rta maktabda irratsional tenglamani o‘rganish natijasida ular quyidagi turlarga bo‘linadi:

1. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0, \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right. \end{cases}$

4. $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Irratsional tenglamalarni maktab matematika kursida o‘rganishda ularni yechish asosan ikki xil usul bilan amalga oshiriladi. Birinchi usulda radikallardan qutilish, ikkinchi usul o‘zgaruvchini almashtirishdir. Bu usullardan har birini o‘quvchilarga tushuntirish va ularga doir misollar yechish zarur.

### 5. Ko‘rsatkichli tenglamalarni yechish

Ko'rsatkichli tenglamalarni o'rta maktabda o'zlashtirish jarayonida o'quvchilar quyidagi qiyinchiliklarga uchraydilar:

ko'rsatkichli tenglamalarni yechishning algoritmini bilmaslik;

ko'rsatkichli tenglamalarni yechishda bajarilgan almashtirish berilgan boshlang'ich tenglamaga ekvivalent emasligi;

ko'rsatkichli tenglamalarni yechishda yangi o'zgaruvchi orqali javob yozib, eski o'zgaruvchiga qaytishni esdan chiqarish.

Bu kabi kamchiliklarni oldini olish uchun ko'rsatkichli tenglamalarni yechishda quyidagi metodlardan foydalanish maqsadga mufofiq:

a) daraja ko'rsatkichlarini tenglash usuli;

b) yangi o'zgaruvchini kiritish usuli;

c) umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish usuli;

d) funksional-grafik usuli.

Ko'rsatkichli tenglamalarni yechish o'quvchilarda qiziqish uyg'otadi. Ularni yechish jarayonida o'quvchilarning bilimlari sistemalashtiriladi, to'g'ri yechimni topish mantiqiy fikrlashlarini rivojlantiradi, aqliy va ijodiy qobiliyatlarini o'sishiga yordam beradi. Buning uchun o'qutuvchilar har bir darsni tushunarli qilib, ko'rgazmali qurollardan, slaydlar namoyishini qo'llagan holda o'tishlari maqsadga mufofiq.

Quyidagi oddiy ko'rsatkichli tenglamalarni o'rta maktab matematika kursida o'rganiladi:

1. $a^{f(x)}=a^b,\ a>0,\ a\neq 1 \Leftrightarrow f(x)=b$

2. $a^{f(x)}=1,\ a>0,\ a\neq 1 \Leftrightarrow f(x)=0;$

3. $f(a^x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^x>0, \\ f(t)=0. \end{cases}$

4. $a^{f(x)}=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0 \Leftrightarrow f(x)=\log_a b;$

5. $\alpha\cdot a^{f(x)}+\beta\cdot b^{f(x)}+\gamma\cdot c^{f(x)}=0,\quad \alpha\neq 0,$



$$\beta,\gamma\in R,\ b^2=ac \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t_1, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t_2. \end{array}\right.$$

bu yerda $t_1$ va $t_2$ lar $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari.

6. $\alpha a^{f(x)}+\beta\cdot b^{f(x)}+c=0,\ c\in R,(ab=1) \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{f(x)}>0, \\ \alpha t^2+ct+\beta=0 \end{cases}$

Misol. Tenglamani yeching: $\left|-4^x+2^{x+5}-150\right|=150$

Yechish:

$2^x=t, t>0$

$$\left|-t^2+32t-150\right|=150 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -t^2+32t-150=150 \\ -t^2+32t-150=-150 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2-32t+300=0 \\ t^2-32t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ t=32\rightarrow x=5. \end{array}\right.$$

Javob: $x=5$

## 6. Logarifmik tenglamalarni yechish usullari

Maktab kursida logarifmik tenglamalarning quyidagi ko'rinishlari ko'rib chiqiladi.

1. $\log_a f(x)=b;\ a>0,\ a\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)=a^b \end{cases}$

2. $\log_x A=b,\ A>0 \Leftrightarrow x=A^{\frac{1}{b}},\quad x\neq 1$

a) $a\neq 1,\ b\neq 0$ bo'lganda tenglamaning faqat bitta ildizi bor: $x=A^{\frac{1}{b}}$.

b) $a=1,\ b=1$ bo'lganda logarifm ta'rifi buziladi va yechim yo'q;

c) $a=1,\ b\neq 0$ va $a\neq 1,\ b=0$ bo'lsa, tenglamani ildizi yo'q.

3. $f(\log_a x)=0,\quad a>0,\quad a\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_a x \\ f(t)=0 \end{cases}$

4. $f(\log_x A)=0, a>0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_x A \\ f(t)=0 \end{cases}$

5. $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

6. $\log_{f(x)} A=\log_{g(x)} A, A>0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\neq 1 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

7. $\log_{g(x)} f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\neq 1 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

### 7. Modulli tenglamalarni yechish usullari

Maktab matematika kursida noma'lum qiymati modul ishorasi ostida bo'lgan quyidagi tenglamalar mavjud:

1. $f(|x|)=g(x) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ f(-x)=g(x) \end{cases} \end{array} \right.$

2. $|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)=g(x) \end{cases} \end{array} \right.$

3. $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2=(g(x))^2$

4. $|f(x)|=-f(x) \Leftrightarrow f(x)\leq 0;$



5. $|f(x)|=f(x) \Leftrightarrow f(x)\geq 0;$

6. $|f_1(x)|+|f_2(x)|+...+|f_n(x)|=g(x)$

$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,...,f_n(x)=0$ tenglamalarning ildizlari quyidagicha $x_1<x_2<...<x_n$ bo'lsin. Tenglamani

$$x\leq x_1,\ x_1<x\leq x_2,...,\ x\geq x_n$$

shartlarda alohida-alohida yeching. Ushbulardan foydalanib modulli tenglamalarga ba'zi misollar keltiramiz:

№1. $\dfrac{x^2-5|x|+6}{x^2-9}=2$

Yechish

$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0; (|x|=x) \\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0; (|x|=-x) \\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}=2 \end{cases} \end{array} \right.;\ \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=2 \end{cases} \end{array} \right.;\ \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 3 \\ x-2=2(x+3) \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x+2=2(x-3) \\ x\neq -3 \end{cases} \end{array} \right.;\ \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ x=-8 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x=8 \end{cases} \end{array} \right.;\varnothing$

Javob: $\varnothing$

№2. $|3-6x|=4-2x$

Yechish:

$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} 3-6x\geq 0 \\ 3-6x=4-2x \end{cases} \\ \begin{cases} 3-6x<0 \\ 6x-3=4-2x \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x\leq \frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x=\frac{7}{8} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} x=-\frac{1}{4} \\ x=\frac{7}{8} \end{array} \right.$

Javob: $\left\{-\frac{1}{4};\frac{7}{8}\right\}$

№3. $|x+3|=x^2+x-6.$

Yechish:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}-x-3=x^2+x-6\\ x+3<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+3=x^2+x-6\\ x+3\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\begin{cases}-x-3=x^2+x-6\\ x<-3\end{cases}\\ \begin{cases}x+3=x^2+x-6\\ x\ge -3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x=1,x=-3\\ x<-3\\ x=\pm 3\\ x\ge -3\end{cases}$$

Javob: $x=3$; $x=-3$.

$|f(x)| = g(x)$ |f(x)| = g(x) tenglamani quyidagicha hal qilish mumkin:

$$|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{cases}$$

№4. $\left|2-\frac{x+7}{x+2}\right|=\frac{21-5x}{6}$

Yechish:

$$\begin{cases}\frac{21-5x}{6}\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}2-\frac{x+7}{x+2}=\frac{21-5x}{6}\\ 2-\frac{x+7}{x+2}=\frac{5x-21}{6}\end{array}\right.\end{cases} \begin{cases}x<\frac{21}{5}\\ \left[\begin{array}{l}\frac{12x+24-6x-42-(21-5x)(x+2)}{6(x+2)}=0\\ \frac{12x+24-6x-42-(5x-21)(x+2)}{6(x+2)}=0\end{array}\right.\end{cases} \begin{cases}x\le\frac{21}{5}\\ \left[\begin{array}{l}x^2-x-12=0\\ 5x^2-17x-24=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le\frac{21}{5}\\ \left[\begin{array}{l}x_1=-3\\ x_2=4\\ x_{3/4}=\frac{17\pm\sqrt{769}}{10}\end{array}\right.\end{cases}$$

Javob: $\left\{-3;4;\frac{17-\sqrt{769}}{10}\right\}$

№5. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|=1$



Yechish:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=1\\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=-1\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\frac{2x^2+4}{x^2+3x+2}=0\\ \frac{-6x}{x^2+3x+2}=0\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x\ne -1, x\ne 2\\ 2x^2+4\ne 0\\ x=0\end{array}\right.$$

Javob: 0

№6. $\left||x+4|-2\right|=1$

$$\left[\begin{array}{l}|x+4|-2=1\\ |x+4|-2=-1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}|x+4|=3\\ |x+4|=1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x+4=3\\ x+4=-3\\ x+4=1\\ x+4=-1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-7\\ x=-3\\ x=-5\end{array}\right.$$

Javob: $\{-7;-5;-3;-1\}$

№ 7. $\frac{x-2}{x-1}=2\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$

Yechish:

$$\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2-4\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0 \qquad \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2-4\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2=0$$

$$\left(\frac{x-2}{x-1}-\frac{2(x+1)}{x+2}\right)\left(\frac{x-2}{x-1}-\frac{2(x+1)}{x+2}\right)=0$$

$$\frac{(x^2-4-2x^2+2)(x^2-4-2x^2-2)}{(x-1)^2(x+2)^2}=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2=0\\ 3x^2=6\end{array}\right.\\ x\ne 1\\ x\ne -2\end{cases} \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_{1/2}=\pm\sqrt{2}\\ x=2\end{array}\right.\\ x\ne 1\\ x\ne -2\end{cases}$$

Javob: $x=\pm\sqrt{2}$

№8 $|x-|4-x||=4+2x$

Yechish:

$$1.\begin{cases} 4+2x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-|4-x||=4+2x \\ |x-|4-x||=-(4+2x) \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} |4-x|=-x-4 \\ |4-x|=3x+4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x\ge 0 \\ 4-x=-x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x<0 \\ x-4=-x-4 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 4 \\ x=\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} x>4 \\ x=0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Javob: $x=0$

№9. $3|x+2|+x|3x-1|+x+2=0$

$$|x+2|+x|3x-1|+x+2=0$$

Yechish:

$$\begin{cases} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases} 6\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -2\le x<\dfrac{1}{3} \\ x\ge\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$1)\begin{cases} x<-2 \\ -3(x+2)-x(3x-1)+x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ -3x^2-x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x=\varnothing \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -2\le x<\dfrac{1}{3} \\ 3(x+2)-x(3x-1)+x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\le x<\dfrac{1}{3} \\ -3x^2+5x+8=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x=-1 \\ x=\dfrac{8}{3} \end{array}\right.\right.$$

$$3)\begin{cases} x\ge\dfrac{1}{3} \\ 3(x+2)+x(3x-1)+x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{1}{3} \\ 3x^2+3x+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{1}{3} \\ x=\varnothing \end{cases}$$

Javob: $x=-1$



## 3.3-§. Masalalarni yechish uchun tenglamalarni tuzish usullari

REJA:

1. Matnli masalalarini hal qilish usullari.
2. Tenglamalarni tuzish usullari.

Matnli masalalarni hal qilish o'quvchilarning fikrlash qobiliyat-larini rivojlantirish, funksional bog'lanish g'oyalarini chuqur anglash, hisoblash madaniyatining o'sishi uchun qulay shart-sharoitlar yaratadi. Bunday masalalarni hal qilish natijasida o'quvchilar haqiqiy ob'ektlar va hodisalarni modellashtirish qobiliyatlarini hosil qiladi va bu qobiliyat-larini rivojlantiradi.

5-9 sinflar uchun matematika kursida matnli masalalarni hal qilishning ikkita asosiy usuli mavjud: arifmetik va algebraik. Arifmetik usul kerakli miqdordagi qiymatlarni to'g'ridan-to'g'ri sonli ifoda (sonli formula) yaratib, natijani hisoblash orqali aniqlanadi. Algebraik usul tenglamalarni va ularning sistemalarini yechishda foydalanishga asoslangan.

Tenglamalarni tuzish orqali masalalarni hal qilish maktabdagi algebra kursining asosiy masalalaridan biridir. O'quvchilar bitta noma'lum bilan birinchi tartibli tenglamalarni yechish texnikasini osonlikcha o'zlashtiradilar, ammo tajribadan ma'lumki, o'quvchilarga masalalarni, shu jumladan tenglamalarni tuzish orqali masalalarni yechish qiyin. Bunga asosiy sabab quyidagicha:

Boshlang'ich sinf o'quvchilari masalalardagi miqdorlar o'rtasidagi munosabatni tushunish, ulardan masalalarni hal qilishda foydalanish ko'nikmalariga ega emaslar. Shuning uchun, yuqori sinflarda masalaning shartlarini to'liq tushunish va tahlil qilishga qiynaladilar.

Dasturga ko'ra, o'quvchilar 5-sinfdan boshlab tenglamalarni yechishlari kerak. Ammo, maktab amaliyoti bilan solishtirganda, o'quvchilar tenglamalarga misollar keltirsalar ham, kamroq matnli masalalarni keltirib chiqaradilar va ba'zi o'qituvchilar xatto matnli masalalarni hal qilishga to'g'richa e'tibor bermaydilar.

Ilg'or o'qituvchilarning tajribasi shuni ko'rsatadiki, masalalarni yechish uchun tenglamalarni tuzish quyidagi bosqichlarga bo'linadi:

1. Masala shartlarini tahlil qilish.
2. Noma'lumlarni aniqlash, ma'lumlar va noma'lumlar o'rtasidagi bog'lanishni topish.
3. Tenglama tuzish.
4. Tenglamani yechish.
5. Tenglama yechimlarini o'rganish va tekshirish.
6. Masala shartlariga yechimlari mosligini tekshirish.
7. Masalaning javobini yozish.

Masalani yeshish uchun tenglama tuzish jarayonining bosqichlari har birini o'rgatish, o'quvchilar uchun turli treninglarni amalga oshirish zarur.

Endi masalani yechish uchun tenglama tuzishning bosqichlarini qarab chiqaylik.

1. Masala shartlarini tahlil qilish. O'quvchilar tenglama tuzishdan oldin masalani o'rgatish, ya'ni masalaning asosiy shartlarini o'rganishlari – noma'lum qaysi, ma'lum qaysi, ular o'rtasidagi bog'liqlikni tahlil qila bilishlari, aytish imkoniyatiga ega bo'lishlari zarur. Masalaning shartlarini to'liq anglamasdan, tasavvur qilmasdan masalani yechush mumkin emas.

2. O'quvchilarning aksariyati masala shartida bayon qilingan ma'lumotlarni to'la tushunmaydi, ularni taqdim eta olmaydi, ma'lumlar va noma'lumlar o'rtasidagi bog'lanishni ko'rmaydilar. Bunday o'quvchilarning masalani hal qilish bo'yicha bilimlari yuzaki va rasmiydir. Shuning uchun, o'qituvchi oldida turgan vazifa bu darajada bo'lgan o'quvchilar bilan ko'p mashqlar, masalalarni osondan qiyinga qarab borish tamoyiliga ko'ra ish olib borishdir. O'quvchilar birinchi savolga quyidagicha javob berishlari kerak: ular ma'lum miqdorni va uning qiymatini bilishlari kerak.



Noma'lum miqdorlardan qaysi biri $x$ harfi bilan belgilanishi kerakligini aniqlashlari va boshqa noma'lum miqdorlarni masala shartida ma'lum bo'lgan qiymatlar bilan ifodalashlari zarur. Quyidagi uchta holatlardan biri noma'lum qiymatni harf bilan belgilashda, ya'ni qaysi qiymat noma'lum qiymat sifatida qabul qilinishi kerakligini belgilashda ro'y beradi.

a) masala shartlari bo'yicha qidirilayotgan miqdor (masalada izlanayotgan miqdor) noma'lum miqdor uchun olinadi;

b) masala shartlari bo'yicha qidirilayotgan bir nechta noma'lum qiymatlardan biri (masalaning savollaridan biri) noma'lum miqdor deb olinadi;

b) noma'lum qiymat uchun masalada bo'lmagan boshqa qiymat olinadi.

1-topshiriq. "Ma'lum gektar yerni haydashga 14 kun rejalashtirilgan edi. Traktorchi kunlik rejani 20 gektarga ko'p haydaganligi uchun ishni o'n kunda bajardi. Traktorchi kunlik rejada qancha gektar yer haydashi kerak edi va u kuniga necha gektar yer haydagan"?

O'quvchilar masala shartini o'qishlari, mazmuni bo'yicha masalani tushuntirishlari kerak:

1. Masalada qanday shartlar qayd etilgan?
2. Ushbu qiymatlarning qaysi biri o'zgaradi va qaysi biri o'zgarmaydi?
3. Masalada qaysi ma'lum va qaysi miqdorlar noma'lum?

Quyidagi ma'lumotlar bizga ma'lum: 14 kunda tasdiqlangan rejani amalga oshirish, amaldagi vaqt 10 kun, 20 gektar - bu amaldagi kunlik me'yor va rejalashtirilgan kunlik me'yor o'rtasidagi farq. O'quvchilar darhol javob berishga qiynaladilar. Shuning uchun, masala shartiga mos tenglama tuzish kerak. Ular quyidagilardan iborat:

1. Masala shartlarini takrorlang.

2. Ikki miqdorni nomlang va ulardan birining qiymatini topish uchun qaysi usuldan foydalanish mumkinligini aniqlang, buning uchun masala shartidan foydalaning.

Ushbu masala shartidan jami yer maydoni noma'lum, uni $x$ orqali belgilaymiz. Maydon 14 kunda haydalishi kerak edi, u holda kuniga $\frac{x}{14}$ yer reja bo'yicha haydalishi kerak edi. Amalda esa kuniga $\frac{x}{10}$ yer haydaldi. Shartga ko'ra u 20 gektarga ko'p. Demak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{x}{14} + 20 = \frac{x}{10}.$$

Hosil bo'lgan tenglamani yechish uchun 14 va 10 sonlariga umumiy mahraj 70 ekanligidan foydalanib

$$5x + 20 = 7x$$

sodda tenglamani hosil qilamiz va uni yechib, yer maydoni $x$=700 ekanligini, reja bo'yicha kuniga 700:14=50 gertar, amalda esa 700:10=70 gektar yer haydalganligini topamiz.

3. Topilganlar masala shartini qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz.

2-topshiriq. "Kema ikki pristan o'rtasida oqim bo'yicha 4 soat va oqimga qarshi 5 soat suzdi. Daryo oqimining tezligi soatiga 2 km. Ikkala pristan orasidagi masofani toping.

O'quvchilarga masala shartini qanoatlantiradigan tenglamani tuzish va yechishning ikkinchi bosqichini o'zlashtirishga yordam berish uchun avval quyidagi mashqlarni bajarish yaxshi bo'ladi.

Ma'lumki, masalani yechush uchun noma'lun miqdor kemaning tezligi va uni $x$ bilan belgilasak, kema oqim bo'yicha harakatlanganda uning tezligiga oqim tezligi qo'sxilganligi uchun uni $x$+2 deb, oqimga qarshi esa $x$-2 deb olamiz va masala shartidan foydalanib

$$5(x-2) = 4(x+2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib

$$5(x-2) = 4(x+2)$$

$$5x - 10 = 4x + 8$$

$$5x - 4x = 10 + 8$$



$$x = 18$$

ni topamiz, ya'ni kema tezligi 18 km/s ekanligini topdik. Endi ikki pristan orasidagi masofani topamiz: 5(18-2)=80 (km). Olingan natija masala shartini qanoatlantirishini tekshiramiz:

Oqim bo'yicha kema $\frac{80}{18+2} = \frac{80}{20} = 4$ soat va oqimga qarshi $\frac{80}{18-2} = \frac{80}{16} = 5$ soat suzdi. Bu esa masala shartiga mos. Demak, masala to'g'ri yecxildi.

Javob: 80 km.

Quyidagi mashqlar ham juda foydalidir.

a) Bitta maktabda $x$ ta o'quvchilar bor, ikkinchi maktabda o'quvchilar soni birinchi maktabdagi o'quvchilar sonidan 4 taga ortiq. maktabda qancha o'quvchi borligini qanday topish mumkin? Agar ikkinchi maktabda o'quvchilar soni birinchi maktab o'quvchilarining soniga teng bo'lsa, nima bo'ladi? Ushbu ikki savolning javoblari o'rtasidagi farq qanday bo'lishi kerak?

b) $x$ ga teng bir soat narhi 20% ga kamaytirildi. Soat qancha turadi?

c) jamoa bitta yer uchastkasidan $x$ kg bug'doy olgan. Keyingi yili agrotexnik tadbirlar amalga oshirilganidan so'ng bug'doy yetishtirish 30 foizga oshdi. Keyingi yilda jamoa necha tonna bug'doy yig'ib olgan?

d) Xodim 12 soat ichida tayinlangan ishni bajargan. Bir soat ichida u qancha ishni bajargan? 8-soatdachi?

e) Agar aravaning g'ildiragi $x$ metrda 5 marta aylansa, aylananing uzunligi qancha? Agar g'ildirak 18 marta aylansa nima bo'ladi?

i) Shaharda $x$ odam bor. Agar shahar aholisi har yili 10 foizga ko'payib borayotgan bo'lsa, bir yilda shaharda qancha odam bo'lishi kerak?

Mashqlarning mazmuni qisqa doskaga yoziladi.Bunday mashqlar sinfda ko'p vaqt talab qilmaydi. Shuning uchun uni o'qituvchi osongina tushunushi va darsning tartibiga qarab har qanday joyda amalga oshirilishi mumkin. Bizning ko'p yillik maktab tajribamiz bilan taqqoslaganda, bunday mashqlar qanchalik ko'p bajarilsa, o'quvchilar tezroq tenglamalarni yechishni o'rganadilar va tushunadilar. Bunday o'quvchilarning bilimi puxta va sifatli bo'ladi.

Shu bilan birga, tajribali o'qituvchilar darsga tayyorgarlik ko'rish, yangi mavzuni tushuntirish yoki masala berish kabi nafaqat hozirgi mavzuni, balki kelajakdagi mavzularni va xatto kelajak darslari uchun mavzularni ham birlashtirganligini ta'kidlash kerak. O'quvchilarni mavzularni tezda o'zlashtirishga tayyorlaydi. Maktabdagi ish tajribasida va turli xil o'quv qo'llanmalarida quyidagi holat kuzatiladi. Hozirgi vaqtda o'qituvchilar matnli masalalarni (qisqasi: noma'lum miqdorlar, ma'lum miqdorlar va ular o'rtasidagi bog'lanishni aniqlash) uchun masala shartining qisqa yozuvi usulidan foydalanadi. Albatta, masala yozuvning qaysi shaklidan foydalanishda emas, balki o'quvchilar (qanday yozmasin) to'g'ri va sifatli yozishni tushunishi muhim. Biz har bir o'qituvchiga masala sharti va yechimini yozish orqali tushuntirib beramiz va ushbu bosqichda qaysi yozuv turini tanlashni o'qituvchilarga qoldiramiz.

3-topshiriq. "Bir guruh o'quvchilar qayiqqa o'tirib, 4 soatdan keyin qaytib kelish uchun daryoga tushib ketishdi. Daryo oqimining tezligi soatiga 2 km, qayiqning turg'un suvdagi tezligi soatiga 8 km. Agar o'quvchilar qaytib kelishdan oldin ikki soat davomida qirg'oqda tursalar, ular qancha masofa suzgan?

Yo'l harakati to'g'risidagi masala. Unda qayiqning yo'li, vaqti va tezligi haqida aytilgan. Qayiqning tezligi oqim bo'ylab 10 km/soat, daryo oqimiga qarshi tezligi 6 km/soat va oqimga qarshi suzganda vaqt o'zgaradi va masofa o'zgarmaydi. Masalada aytilishicha, qayiqning yo'nalishi va vaqti noma'lum, uning tezligi ma'lum.

Ushbu masalani uchta noma'lum miqdordagi ifodalarni ishlatib, yechamiz:

1-usul.

1) Qayiq daryoda jami $x$ km suzdi.

2) daryoda oqim bo'ylab suzish vaqti $\frac{x}{10}$ soat.

3) daryo oqimiga qarshi suzish vaqti $\frac{x}{6}$ soat.



2 soat o'quvchilar daryo bo'yida dam oldilar, yo'lga faqat 2 soat ajratildi:

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{6}=2.$$

2-usul. Masala shartiga asosan ushbu jadvalni tuzamiz

| | yo'l (km) | Tezlik | vaqt (soatiga) |
|---|---|---|---|
| Daryo oqimi bo'yicha suzayotganda | $x$ | 10 | $\frac{x}{10}$ |
| daryoning oqimiga qarshi suzganda | $x$ | 6 | $\frac{x}{6}$ |

Jadval tuzgandan keyin quyidagilarga e'tibor beramiz: Safar atigi 2 soat davom etganligi sababli:

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{6}=2$$

Odatda, masala shartidan jadval tuzish juda kamdan-kam hollarda ishlatiladi, jadval shaklida yozish masala yechishga o'rgatishning dastlabki bosqichlarida foydalidir.

### 3. Tenglamalarni tuzish usullari

Masala mazmunini hisobga olgan holda ma'lumlar va noma'lumlar o'rtasidagi munosabatlarni aniqlash zarur. Masalan,

a) Bir maktabdagi o'quvchilar soni $x$ ga teng bo'lsin, ikkiinsi maktabdagi o'quvchilari soni esa $(x+60)$ bo'lsin va uchinchi maktabdagi o'quvchilar soni esa $(x-45)$ ga teng bo'lsin. Uchchala maktabdagi o'quvchilar soni nechta?

b) Birinchi kun do'kon $x$ kg un, ikkinchi kun $2x$ kg, uchinchi kun $(2x-40)$ kg un sotdi. Masalani qanday davom ettirish kerak? (Uch kunda qancha un sotilgan?)

c) Kater oqim bo'ylab va oqimga qarshi $14\frac{1}{2}$ soat suzdi. Masalani davom ettiring? (Motorli qayiq oqim bo'ylab suzgan vaqti va oqimga qarshi suzgan vaqtini solishtiring).

d) Uchburchak ichki burchaklari $x, x-20^0, 2x$. Masalani davom ettiring (Uchburchak ichki burchaklarini toping).

2. Ikkita miqdor bir xil narsani ifoda etsa ular tengdir (Masalan, paroxod bir pristandan 2-pristanga borib qaytsa, masofa 2 pristan orasidagi masofa teng.).

4-topshiriq. Mashina ishlab chiqaruvchi zavod topshiriqni 15 kunda bajarishni rejalashtirgan edi. Biroq zavod rejani 2 kun avval bajardi va 6 ta mashinani rejadan tashqari ishlab chiqardi. Zavod hammasi bo'lib qancha mashina ishlab chiqargan?

Masalani yeshish uchun o'quvchilar bilan birgalikda quyidagicha fiklaymiz:

1) Rejaga muvofiq, zavodda jami $x$ ta mashinalar ishlab chiqarilishi kerak edi.

2) Rejaga ko'ra, bir kunda zavod $\frac{x}{15}$ mashina ishlab chiqarishi kerak edi.

3) Aslida, zavod bir kunda $\frac{x+6}{13}$ mashina ishlab chiqardi.Masala shartiga ko'ra, zavod har kuni rejadan tashqari ikkita avtomobil ishlab chiqaradi. Shuning uchun, quyidagi uch xil tenglama tuzish mumkin:

$$\frac{x+6}{13}-\frac{x}{15}=2; \quad \frac{x+6}{13}-2=\frac{x}{15}; \quad \frac{x}{15}+2=\frac{x+6}{13}.$$

Tenglama tuzilgandan keyin u tenglamani hal qilish zarur. Tenglamalarni yechgandan so'ng, o'quvchilar barcha javoblar bir xil ekanligini ko'radilar ($x$ 150).

Biroq, o'quvchilar tenglama tuzishda "marta ortiq" va "ga ortiq" tushunchalarini ajratishda xatolarga yo'l qo'yadilar. Bunday xatoliklarni oldini olish uchun mashqlar bajarilishi kerak. Masalan, $m$ soni $n$ sonidan 6 marta ko'pni



$\left(\frac{m}{n}=6\right)$ yoki $\left(\frac{m}{6}=n; \ m=6n\right)$kabi ifodalansa, $m$ soni $n$ sonidan 6 ga ko'p esa $m-n=6; \quad m=n+6; \quad m-6=n$ kabi tengliklar bilan ifodalanadi.

O'quvchilarga bu kabi masalalar mustaqil yechish uchun beriladi. Masalan:

5-topshiriq. Bir qopda 60 kg, ikkinchisida esa 80 kg shakar bor. Ikkinchi qopdan birinchisiga qaraganda 3 barobar ko'proq shakar olindi va birinchi qopda ikkinchisidagidan 2 barobar ko'p shakar qoldi. Har bir qopdan necha kilogramm shakar olindi?

Har bir qopda qancha shakar borligi ma'lum, ammo har bir qopdan qancha miqdorda olinganligi ma'lum emas.

Agar birinchi qopdan olingan shakarni $x$ kg desak, ikkinchi qopdan olingan shakar $3x$ kg bo'ladi. So'ngra birinchi qopdagi shakar (60-$x$) kg, ikkinchisida (80-$3x$) kg shakar qoladi.

Masala shartiga ko'ra, birinchi qopdagi shakar ikkinchisiga qaraganda 2 barobar ko'p ekanligidan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$60-x=2\,(80-3x)$$

6-topshiriq. Temir va misning birgalikdagi og'irligi 373 g va temir hajmi mis hajmidan 5 $sm^3$ ko'proq. Temirning solishtirma og'irligi 7,8 $g/sm^3$, misning solishtirma og'irligi 8,9 $g/sm^3$ ga teng. Har bir bo'lakning hajmini toping.

Ma'lumki, $p = dV$. Masalada temir va misning solishtirma og'irligi ma'lum bo'lganligi sababli, ularning hajmi $x$ bilan belgilanadi va og'irliklari esa quyidagicha ifodalanadi.

| | Hajmi ($sm^3$) | Og'irligi (gramm ) |
|---|---|---|
| Bir parcha temir | $x$ | $7{,}8x$ |
| Bir parcha mis | $x$-5 | 8,9 ($x$-5) |

Ikki qism birgalikda 373 gramm og'irlikda bo'lganligi sababli quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$7{,}8x+8{,}9\,(x-5) = 373.$$

7-topshiriq. Dengiz suvi yuzasida bir katta muz bor edi. Uning suv yuzasidagi qismining hajmi 2000 $m^3$, dengiz suvining solishtirma og'irligi 1,03 g/$sm^3$ va muzning solishtirma og'irligi 0,9 g/$sm^3$ bo'lsa, muzning kattaligi qanday?

Agar barcha muz hajmini $x$ $м^3$ desak, u holda muzning suv ichidagi (ko'rinmay turgan qismi) hajmi ($x$-2000) $м^3$, og'irligi ($x$-2000)×1,03, barcha muz og'irligi esa $x$×0,9 ga teng.

Arximed qonuniga ko'ra: Suyuqlikka tik tashlangan jism o'zining solishtirma og'irligiga teng miqdordagi suyiqlikni idishdan chiqarib tashlaydi. Shuning uchun, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(x-2000)\times 1{,}03 = 0{,}9x$$

8-topshiriq. Ikki idishda har xil temperaturali suv bor. Agar birinchi idishdan 240 gramm suv va ikkinchi idishdan 260 gramm suv olib aralashtirilsa, aralashmaning harorati $52^0$ bo'ladi. Agar birinchi idishdan 180 gramm va ikkinchi idishdan 120 gramm suv olib aralashtirilsa, uning temperaturasi $46^0$ ga teng bo'ladi. Har bir idishdagi suvning temperaturasini toping.

Bu kabi masalalarda duch keladigan miqdorlarda suv litrda, og'irlik ($m$), harorat ($T$) va issiqlik miqdori ($Q$) deb qaraladi. Fizikadan ma'lumki, ularning o'zaro bog'liqligi $Q=mt$ formula bilan ifodalanadi va suvning o'ziga xos issiqligi 1 ga teng. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$x^0$- birinchi idishdagi suvning temperaturasi;

$y^0$- ikkinchi idishdagi suvning temperaturasi;

240$x$ kal - birinchi idishdagi suvning issiqlik miqdori;

260y kal - ikkinchi idishdagi suvning issiqlik miqdori;

(240 + 260) 52 kal. - aralashmaning issiqlik miqdori.

Shunday qilib, birinchi tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$240x+260y= 500\times 52.$$

Endi biz sistemaning ikkinchi tenglamasini tuzamiz:



180$x$ kal - birinchi idishda idishdagi suvning issiqlik miqdori;

120y kal - ikkinchi idishda idishdagi suvning issiqlik miqdori;

(180 + 120) 46 kal. - aralashmadagi issiqlik miqdori.

Ikkinchi tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$180x+120y= 300\times 46$$

va tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} 240x+260y=26000, \\ 180x+120y=13800. \end{cases}$$

Boshqa masalani ko'rib chiqaylik.

9-topshiriq. Aravaning old g'ildiragi orqa g'ildirakka qaraganda 15 marta ko'proq aylanadi. Old g'ildirakning usunligi 2,5m, orqa g'ildirak-ning usunligi esa 4 m. Har bir g'ildirak necha marta aylanadi va arava qancha masofani bosib o'tadi?

Bunda hisob-kitoblarda uchraydigan qiymatlar quyidagilardan iborat: aravaning yurgan masofasi ($S$), g'ildirak uzunligi ($C$) va aylanishlar soni ($n$). Ularning o'zaro munosabati quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$S = C\times n, \text{ ya'ni } C = \frac{S}{n}, \quad n = \frac{S}{C}.$$

Masalada ikkita savol mavjud bo'lganligi sababli, belgilashning ikki xil usuli mavjud va ikkita turli xil tenglamalar tuziladi.

a) Oldingi g'ildirak aylanishlar sonini $x$ bilan belgilasak:

1) Orqa g'ildirakning aylanishlar soni – $x$-15 bo'ladi.

2) Old g'ildirak tomonidan bosib o'tilgan masofa 2,5 $x$ km.

3) orqa g'ildirakning bosib o'tgan masofasi – (x-15)×4 km.

Oldingi va orqa g'ildiraklar bosib o'tgan yo'llar teng ekanligidan, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$2{,}5x= (x-15)\times 4$$

Ikkinchi usul bilan tenglama tuzamiz:

b) agar yo'lni $x$ bilan belgilasak:

$x$m - arava bosib o'tgan masofa.

$\frac{x}{2,5}$ - old g'ildirakning aylanishlari soni.

$\frac{x}{4}$ - orqa g'ildirakning aylanishlari soni.

Masala shartiga ko'ra old g'ildirakning aylanishlari soni orqa g'ildirakning aylanishlari sonidan 15 ga ortiq degan masala shartiga binoan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x}{2,5}-\frac{x}{4}=15$$

10-topshiriq. Avtomobil shahar va qishloq o'rtasida soatiga 60 km tezlikda harakatlanib ketdi. U qaytayotganda yo'lning 75% ni shu tezlik bilan va qolgan yo'lda soatiga 40 km tezlik bilan yurdi. Qaytishda shahardan qishloqqa borishga qaraganda 10 daqiqa ko'proq vaqt sarfladi. Shahar va qishloq orasidagi masofani toping.

Bu yerda – bu masalada hisob avtomobil, vaqt va tezlik haqida bormoqda. Shu bilan birga, masalada foizlar mavjud bo'lganligi sababli, o'quvchilarga foizlarning asosiy masalalarini takrorlashni va berilgan sonning foizini topishni eslatish kerak.

Misol uchun, sonning $p\%$ ini aniqlash uchun avval uning 1% ni topib va keyin $p\%$ ini topish kerak. Quyidagilar ma'lum:

$x$ km – bu shahardan qishloqgacha bo'lgan masofa;

$\frac{x}{60}$ – bu masofani bosib o'tish vaqti.

$\frac{x\cdot 75}{100}=\frac{3x}{4}$ км - qaytib kelgan yo'l .

$\frac{\frac{3x}{4}}{60}=\frac{3x}{240}$ – bu vaqt.

$x-\frac{3x}{4}=\frac{x}{4}$ km – qolgan yo'l.



$\frac{\frac{x}{4}}{40}=\frac{x}{160}$ - yo'lning qolgan qismiga ketgan vaqt.

Mashina qaytib kelganida (qishloqdan shahargacha ketgan vaqt 10 daqiqa$=\frac{1}{6}$ soat bo'lganligi sababli):

$$\frac{3x}{240}+\frac{x}{160}-\frac{x}{60}=\frac{1}{6}$$

Bu yerda o'quvchilarning e'tiborini avtomobilning tezligi soatlarda, vaqt farqi daqiqalarda berilganligiga qaratishga to'g'ri keladi. Bunday holda, ular ikkalasi ham bir xil o'lchov bilan ifodalash kerakligini o'quvchilar bilishlari kerak. Ma'lumki, bunday holatda o'quvchilar turli xil o'lchovlar tomonidan berilganligini sezmasdan xato qilishadi.

Birinchi darajali tenglamalar sistemasini tuzishga oid masalalar qatorida qo'shimcha ma'lumotsiz kiritilishi mumkin bo'lgan bir qator masalalar mavjud. Maktabda matematika o'qitish tajribasidan ma'lumki, o'quvchilar ushbu masalalarni hal qilishda qiynalishadi va ba'zan ularni hal qila olmaydilar. Shunday qilib, bu xatolardan qanday qutulish kerakligini ko'rsatamiz.

11-topshiriq. Parohod oqim bo'ylab 100 km va oqimga qarshi 64 km suzdi, bu 9 soat davom etdi. Ikkinchi holatda, u oqimga qarshi 80 km va oqim bo'ylab, ham 80 km masofani shu vaqt davomida suzib o'tdi. Parohodning turg'un suvdagi tezligini va daryoning tezligini toping.

Harakat haqida masala bo'lgani kabi, parohodning yo'nalishi, qancha vaqt va uning tezligi haqida ma'lumot beradi. Parohod oqayotgan suvda bo'lgani uchun, agar biz uning suvdagi tezligini va daryoning tezligini aniqlasak, uning tezligini oqim bo'ylab va oqimga qarshi hollarini alohida qarab chiqishimiz kerak. Parohodning yo'nalishi masalada ma'lum, shuning uchun tenglama tuzish uchun endi uning vaqtini aniqlash kerak bo'ladi.

Agar biz parohodning turg'un suvdagi tezligini $x$ km/soat va daryoning tezligini y km/soat deb belgilasak, unda parohodning oqim bo'yicha tezligi $(x+y)$

km/soat, oqimga qarshi tezligi ($x$-$y$) km/soat ga teng bo'ladi. Parohod ja'mi 9 soat suzganligidan

$$\frac{100}{x+y}+\frac{64}{x-y}=9\cdot$$

tenglama hosil bo'ladi. Ikkinchi holda, agar biz parohodning oqim bo'yicha $\frac{80}{x+y}$ soat, oqimga qarshi $\frac{80}{x-y}$ soat yurganini va yo'lga ja'mi 9 soat sarflaganini hisobga olsak, quyidagi tenglama hosil boladi:

$$\frac{80}{x+y}+\frac{80}{x-y}=9$$

Agar ushbu tenglamalarini umumlashtirsak, ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. O'quvchilar hali ham bunday ishlarni bajara olmaydilar. Shuning uchun bunday qo'shimcha noaniqliklar birinchi tartibli ikkita tenglamalar sistemaiga keltiriladi. Shunday qilib, quyidagi ikki noma'lumli tenglamalar sistemasi xosul bo'ladi:

$$\begin{cases}\dfrac{100}{x+y}+\dfrac{64}{x-y}=9,\\[2mm] \dfrac{80}{x+y}+\dfrac{80}{x-y}=9.\end{cases}$$

Hosil qilingan tenglamalar sistemasini yechish uchun

$$\frac{1}{x+y}=u \quad \frac{1}{x-y}=v$$

Noma'lumlarni kiritsak, $u$ va $v$ bilan belgilasak, birinchi darajali ikkita tenglamani hosil qilamiz:

$$\begin{cases}100u+64v=9,\\ 80u+80v=9.\end{cases}$$

Uni yechib

$$u=\frac{1}{20},\ v=\frac{1}{16}$$

va $x,y$ o'zgaruvchilarga qaytamiz:



$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{20},\quad \frac{1}{x-y}=\frac{1}{16}$$

hosil bo'ladi. Shuning uchun

$$\begin{cases}x+y=20\\ x-y=16\end{cases}$$

Keyin $x$=18, $y$=2, ya'ni parohodning turg'un suvdagi tezligi soatiga 18 km, daryo oqimining tezligi esa 2 km/soat ekanini aniqlaymiz.

Tenglama tuzishda o'quvchilar e'tiborini masala bayonida ishlatilgan ma'lumotlarga jalb qilish kerak. Har qanday masalada keraksiz ma'lumotlar berilmasligiga alohida e'tibor berish kerak, agar ma'lumot ishlatilmasa, u masala shartida berilmaydi va agar u masala shartida berilsa, undan foydalanish kerak.

Tenglama tuzilgandan so'ng, o'quvchilar uchun uni hal qilish odatda qiyin bo'lmaydi. Shuning uchun, tenglamalarni tuzishda masalalarni hal qilishning 4-bosqichida to'xtamasdan, keyingi bosqichga o'tamiz.

5. Tenglamaning yechimini o'rganish

Sonli ma'lumotlar bilan masalaning yechimini o'rganish bu tenglamaning (sonli qiymat) topilgan ildizi masalani qanoatlantiradimi yoki yo'qligini aniqlashdir. Bu ish asosan og'zaki amalga oshiriladi.

Masalan, agar biz yuqoridagi 3-topshiriqni olsak, o'quvchilar quyidagicha javob berishlari kerak: "Zavod rejaga muvofiq ishlab chiqaradigan mashinalar soni faqat musbat butun son bo'lishi kerak (natural sonlar). Shuning uchun, javob (150 ta mashina) masala shartlariga mos keladi. O'quvchilarga avtoulovlar soni kasr bo'lmasligi kerakligi haqida ogohlantiriladi.

O'quvchilar qila oladigan va ko'p vaqt talab qilmaydigan bunday tekshirishlarni har doim amalga oshirilishi kerak. Axir, bu yuqori sinflarda tenglamalarni o'rganishga tayyorgarlikdir va o'quvchilarni masalaning javoblariga tanqidiy qarashga o'rgatadi.

6. Masalani tekshirish. Tenglamani qurish uchun masalaning yechimini tekshirish bilan yakunlanishi ma'lum. Ba'zi o'qituvchilar tenglamani

tekshirishdan qochadilar, bu albatta noto'g'ri. Taqdim etilgan masalaning yechimini tekshirish kerak. Masalani tekshirishning bir necha yo'li mavjud. Masala o'z shartlari bo'yicha yoki masalani tahlil qilish orqali tekshirilishi mumkin. Teskari masalalar, berilgan masaladagi ma'lumotlarning hajmiga qarab, har xil shakllantirilishi mumkin. Buning uchun, masalada berilgan har qanday son noma'lum va topilgan son ma'lum son deb hisoblanadi, yangi masala tuziladi va u qayta hisoblab chiqiladi deb faraz qilinadi. Buning uchun, yuqorida 4-masalaga teskari masala tuzamiz.

Masalada topilgan 150 ta mashina ma'lum va taxmin qilingan kunlar soni (2 kun) noma'lum deb faraz qilsak, quyidagi masala hosil bo'ladi: «Zavod avtomobil uchun buyurtmani rejaga muvofiq 15 kun ichida bajarishi kerak edi. Biroq, zavod muddatidan bir necha kun oldin rejani bajargan va yana 6 ta avtomobil ishlab chiqargan, chunki zavod har kuni rejadan tashqari 2 ta avtomobil ishlab chiqargan. Agar zavod 150 ta mashina ishlab chiqarishi kerak bo'lsa, u necha kun avval rejani muddatidan oldin bajaradi? "

Yechish: 1) Zavod kuniga rejaga muvofiq qancha mashina ishlab chiqarishi kerak edi? 150 mash.: 15 = 10 mash.

2) Zavod aslida bir kunda qancha mashina ishlab chiqargan?

*10* mash. + *2* mash. = *12* mash.

3) Zavod rejani aslida necha kunda bajargan?

*(150 + 6)* mash.: 12 mash.=13 (kun).

4) Zavod necha kunda rejani muddatidan oldin bajardi?

15 kun-13 kun = 2 kun.

Masaladani yechgandan so'ng, o'quvchilar topilgan son (2 kun) noma'lum ekanligini ko'rishadi. Shuning uchun, tenglamani qurish uchun berilgan savolga javob ham to'g'ri (150 ta mashina).

Agar ushbu masalada biz rejaga muvofiq (15 kun) bajarilish muddatini ko'rsatmasak, unda masala quyidagicha tuzilishi mumkin:



"Rejaga ko'ra, zavod bir necha kun ichida mashinalarni ishlab chiqarish bo'yicha buyurtmani bajarishi kerak edi. Ammo zavod 13 kun ichida rejani bajardi va yana 6 ta mashina ishlab chiqardi, chunki zavod har kuni rejadan tashqari 2 ta avtomobil ishlab chiqaradi. Agar zavod jami 150 ta mashina ishlab chiqargan bo'lsa, buyurtmani reja bo'yicha necha kunda bajarishi kerak edi?

Yechish:

1) Zavod aslida kuniga qancha mashina ishlab chiqaradi?

(150 + 6) mash.: 13 = 12 mash.

2) Rejaga muvofiq zavod kuniga qancha mashina ishlab chiqarishi kerak edi?

12 mash. - 2 mash.= 10 mash.

3) Rejaga muvofiq, zavod buyurtmani necha kun bajarishi kerak edi?

150 mash.: 10 mash.= 15 (kun).

Bunday masalada berilgan har qanday son noma'lum bo'lishi mumkin va teskari masalani yaratish orqali topilishi mumkin.

Albatta, tenglamani tuzish masalasini teskari hisoblash orqali tekshirish qiyin va uzoq vaqt talab etiladi. Biroq bu o'quvchilarga masalalarni hal qilishni o'rganishga yordam beradi. Shuning uchun o'quvchilar bunday yondashuvni bilishlari kerak. Sinfda ko'p vaqt sarflamaslik uchun bunday topshiriqlarni ko'pincha uyda bajarishlari kerak va sinfda uni faqat yaxshi o'qigan o'quvchilarga berish mumkin.

Qoida tariqasida tenglamalarni qurish bilan bog'liq masalalar sinfda ularning shartlariga qarab tekshiriladi. Bu, albatta, o'quvchilar uchun yangilikdir. Masalan, o'quvchilar yuqoridagi 4-topshiriqni tekshirishlari kerak. Rejaga ko'ra zavodda jami 150 ta mashina ishlab chiqariladi. Shuning uchun, u kuniga 10 ta mashina ishlab chiqarishi kerak (150: 15 = 10). Aslida zavod 12 mashina ishlab chiqardi. Shunday qilib, har kuni 2 ta rejadan tashqari mashina (12-10 = 2) ishlab chiqilgan. Shuning uchun topilgan son (150 ta mashina) masalaning shartini qondiradi. Endi o'quvchilarga to'liq tenglamani qanday yozishni ko'rsatamiz.

12-topshiriq. Har kuni soat 12 da kater kemasi daryoda $A$ pristandan $B$ pristanga o'tadi. Kater $A$ pristandan $B$ pristanga soatiga 12 km tezlikda yurdi. U $B$ pristan oldida 2,5 soat davomida to'xtaydi va keyin orqaga qaytadi, to'xtamasdan soatiga 15 km tezlikda barcha yo'lni bosib o'tib, o'sha kuni soat $19^{00}$ da $A$ pristanga keladi. $A$ dan $B$ gacha bo'lgan masofani toping.

Yechish: Agar biz ikki pristan orasidagi masofani $x$ desak, $A$ dan $B$ gacha bo'lgan masofada kemaning suzish vaqti $\frac{x}{12}$ soat, qaytish vaqti esa $\frac{x}{15}$ soatni tashkil qiladi.

Kema yo'lga 4,5 soat sarf etgan (19 soat-12 soat-2,5 soat = 4,5 soat) ligidan quyidagi tenglamani tuzish mumkin:

$$\frac{x}{12}+\frac{x}{15}=4{,}5;\ x=30.$$

Ish og'zaki ravishda amalga oshiriladi. Yo'l butun yoki kasr (aralash) son bo'lishi mumkin, ammo hisob-kitoblarga ko'ra, u musbat son bo'lishi kerak. Shuning uchun, javob masalaning shartini qanoatlantiradi.

Tekshirish. Agar ikki pristan orasidagi masofa 30 km bo'lsa, unda $A$ dan $B$ gacha bo'lgan sayoxat vaqti 2,5 soatni (30: 12 = 2,5), yurish vaqti esa 2 soatni tashkil qiladi (30: 15 = 2). Keyin yo'lga ketgan vaqt

2,5 soat + 2 soat = 4,5 soat.

Shuning uchun (30 km) natija masala shartlariga to'liq mos keladi.

Javob:Ikki pristan orasidagi masofa 30 km bo'lgan.

## Bob bo'yicha mustahkamlash uchun savollar

1. Maktabda tenglamalarni muntazam o'qitish qaysi sinfdan boshlanadi?
2. Tenglama nima?
3. Tenglamaning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasini qanday topish mumkin?
4. Tenglamaning ildizi nimada?



5. Tenglamani yechishning umumiy usullarini aytib bering.
6. $\sqrt{x-2}=\sqrt{3-x}$ tenglamaning. $x$ o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari oralig'ini toping.
7. Tenglamani ko'paytirish orqali yechishning ma'nosini tushuntiring.
8. $x^3-3x-2=0$ tenglamani yeching.
9. $6x^3+13x^2-9x-12=0$ tenglamani yeching.
10. Yangi o'zgaruvchi kiritish orqali tenglamalarni yechishning mohiyati nimada?
11. $\lg^2 x^3+\log_{0,1}10x-7=0$ tenglamani yeching.
12. Tenglamani yeching: $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$
13. Funksional-grafik usulda tenglamani qanday yechish kerak?
14. Tenglamani yeching: $\left||x+4|-2\right|=1$
15. Qanday tenglamalar ekvivalent deyiladi?
16. Qanday hollarda begona ildiz paydo bo'ladi?
17. Qanday holatda bitta tenglamadan ikkinchisiga mos keladigan transformatsiya mavjud?
18. Tenglamalarni o'zgartirishda aniqlanish sohasini kengayish holatini tushuntiring.
19. Tenglamalarni o'zgartirganda aniqlanish sohasini qaysi holatda torayish mumkinligini tushuntiring.
20. Qaysi holda tenglamaning ildizlari yo'qoladi?
21. Boshlang'ich sinfda tenglamalarni qanday hal qilish kerak?
22. 5-sinfda chiziqli tenglamani qanday yechish kerak?
23. Chiziqli tenglamalarni yechish mavzusini sistemalashtirish haqida gapirib bering.
24. Ikkita noma'lumli ikki tenglamalar sistemasi tushunchasini qanday kiritish mumkin?

25. Ikkita noma'lumli ikki chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning grafik usuliga misol keltiring.

26. Ikkita noma'lumli ikki chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari qanday? Misollar keltiring.

27. Kvadrat uchadning butun sonli yechimlarini topishga misollar keltiring.

28. Kvadrat tenglamalar turlari va ularni yechish usullarini yozing.

29. Irrasional tenglamalarni yechish uchun formulalar yozing. Misol bilan tushuntiring.

30. Ko'rsatkichli tenglamalarni yechish uchun formulalar yozing. Misol bilan tushuntiring.

31. Logarifmik tenglamalarni yechish uchun formulalar yozing. Misol bilan tushuntiring.

32. $$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

formulaning to'g'riligini ko'rsating.

33. $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ formulani isbotlang.

34. Matnli masalalarni yechishning ahamiyati nimada?

35. Arifmetik matnli masalalarini yechishning ma'nosi nima?

36. Matn bilan bog'liq masalalarni algebraik tarzda qanday hal qilish kerak?

37. Tenglamalarni tuzish orqali masalalarni yechish bosqichlarini aytib bering.

38. Masala matnidagi qiymatlar o'rtasidagi bog'liqlikni aniqlash uchun qanday mashqlar bajariladi?

39. "Rejaga ko'ra, ekish 14 kun ichida amalga oshirilishi kerak edi. Ishlab chiqarish jamoasi ekish tezligini kuniga 20 gektarga oshirdi va o'n kun



ichida ekishni tugatdi. Ishlab chiqarish jamoasi har kuni necha gektar yerga ekin ekdi va jami necha gektar yerga ekdi"?. Masalaning mazmunini o'qib bo'lgach, qanday savollarga javob berish kerak?

40. Qiymatlar orasidagi o'sish, kamayish, ko'paytirish va boshqalar o'rtasidagi bog'liqlikni o'zlashtirish uchun qanday mashqlar mavjud?

41. Noma'lum qiymatni topish uchun qanday shartlar mavjud?

42. Matnli masalalarni yechish uchun tenglamalar tuzishga tayyorgarlik jarayonida qanday mashqlar bajariladi?

43. Paroxod oqim bo'ylab 100 km va oqimga qarshi 64 km yurdi va bu 9 soat davom etdi. Ikkinchi holatda, bu vaqt ichida u oqim bo'ylab 80 km va oqimga qarshi ham 80 km masofani bosib o'tdi. Paroxodning turg'un suvdagi tezligini va daryo oqimining tezligini toping.

44. Matnli masala yechimini qanday tekshirish mumkin?

# IV BOB. TENGSIZLIK TUSHUNCHASINI O'QITISH USULLARI

## 4.1-§. Tengsizliklarni o'qitishning umumiy masalalari

REJA:

1. Tengsizlikka oid tushunchalar.
2. Tengsizliklar mavzusini o'qitishning asosiy maqsadi.
3. Bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilish usullari.
4. Tengsizliklarning ekvivalentligi tushunchasi.

### 1. Tengsizlikka oid tushunchalar

Maktabda tengsizliklar va ularning sistemalari bir necha bosqichlarda o'rganiladi: sonli tengsizliklar, bitta noma'lum qatnashgan chiziqli tengsizliklar va chiziqli tengsizliklar sistemalari, ikkinchi darajali tengsizliklar va tengsizliklar sistemalari, ratsional tengsizliklar va tengsizliklar sistemalari, tengsizliklarni intervallar usuli bilan hal qilish, ko'rsatkichli va logarifmik tengsizliklarning yechimlari kabilar ko'rib chiqiladi.

Tengsizliklar haqida nazariy ma'lumotlar maktabda algebra kursi mavzularining mazmuni va tartibiga, haqiqiy sonlar, ifodalar va funksiyalarga, mutanosib o'zgarishlarga, matematik tahlilning boshlanishiga qarab amalga oshiriladi.

Tengsizlikka oid quyidagi tushunchalar o'rta maktabda ko'rib chiqiladi.

Tengsizlik deb quyidagi turdagi ifodalarga aytiladi:

$$a \le b,\ a \ge b,\ a > b,\ a < b,$$

bu yerda, $a$ va $b$ sonlar yoki sonli iboralar yoki funksiyalardir. "<" yoki ">" tengsizliklar qat'iy tengsizliklar va "≥" va "≤" tengsizliklar qat'iy bo'lmagan tengsizliklar deyiladi. Tengsizliklar ikki turga bo'linadi: sonli yoki o'zgaruvchili tengsizliklar. Masalan:



1. $5 < 10$ - sonli tengsizlik,

2. $2x > 3$-bir o'zgaruvchili tengsizlik.

3. $2x < 5y$- ikki o'zgaruvchili tengsizlik.

Tengsizlikning yechimlari - bu tengsizlikdagi o'zgaruvchining barcha qiymatlarida berilgan tengsizlikni to'g'ri tengsizlikka aylantiruvchi o'zgaruvchining qiymatlari.

Tengsizliklarni quyidagicha sinflash mumkin:


Tengsizlikni yechish uning barcha yechimlarini topish yoki yechimlar yo'qligini ko'rsatishni anglatadi. Masalan:

$1.\ x^2 + 5 > 0 \leftrightarrow x \in R;$

$2.\ x^2 - 4 \le 4 \leftrightarrow x \in [-2; 2]$

$3.\ x^2 < 0 \leftrightarrow x \in \emptyset.$

## 2. Tengsizliklar mavzusini o'qitishning asosiy maqsadi

Tengsizliklar mavzusini o'qitishning asosiy maqsadi tengsizlik-larni hal qilishni o'rganish yoki tengsizliklarni isbotlashdir. Tengsizliklarni hal qilish ushbu tengsizliklarning yechimlarini ifoda etish qobiliyatini talab qiladi. Shuning uchun, birinchi navbatda, biz o'quvchilarni tengsizliklar yechimini koordinata chizig'ida ifodalash qobiliyatiga e'tibor qaratamiz.

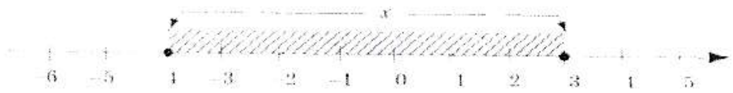
1) $2<x<7$ tengsizlikning yechimlarini ko'rib chiqing. Bunday tengsizlik ikki tomonlama tengsizlikdir.


1-rasm.

Berilgan tengsizlikning yechimlari $2<x<7$, koordinatalar chizig'ida koordinatalari 2 va 7 bo'lgan nuqtalar orasidagi nuqtalarning koordinatalariga to'g'ri keladi (1-rasm). Bu "2 dan 7 gacha" sonlar oralig'i yoki "oraliq" deb nomlanadi. Belgilanishi: (2; 7). O'qilishi: 2 dan 7 gacha.

$2<x<7$ tengsizlik bu qat'iy tengsizlikdir, uning yechimlari koordinatalari 2 va 7 bo'lgan nuqtalarni o'z ichiga olmaydi. Uni chizishda koordinata chizig'i (nuqta) bo'ylab rasmdagi kabi belgilanadi.

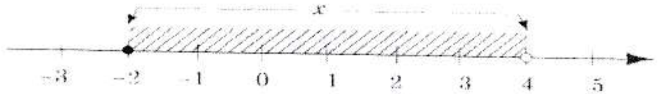
2) Qat'iy bo'lmagan $-4\leq x\leq 3$ tengsizlikni sonlar o'qida ko'rib chiqamiz. Qat'iy bo'lmagan tengsizliklarning yechimi sonlar oralig'ini ko'rsatadigan sonlarni o'z ichiga oladi (2-rasm). Bunday son oralig'i "segment" deb nomlanadi. Belgilanishi: [-4;3]. O'qilishi: "-4 dan 3 gacha bo'lgan interval, shu jumladan -4 va 3 sonlari ham bu segmentga kiradi". Koordinatalar chizig'ida sonlar qatorida yechim rasmdagi kabi ifodalanadi.




2-rasm.



3) $-2\leq x<4$ tengsizlikning yechimlari to'plami 3-rasmda ko'rsatilgandek koordinatalar chizig'ida yotadi. Berilgan tengsizlikning yechimlari 4 ni emas, balki -2 ni o'z ichiga oladi. Bunday holda, sonlar oralig'i "yarim oraliq" deb nomlanadi. Berilgan tengsizlikning yechimlari sonli interval bilan belgilanadi: [-2;4). O'qish: "-2 dan 4 gacha".



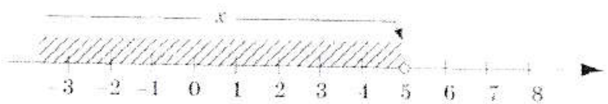

3-rasm.

4) $x\geq 8$ tengsizlikning yechimlari to'plami 4-rasmda ko'rsatilgandek koordinata chizig'i bo'ylab chizilgan.


4-rasm.

$x\geq 8$ tengsizligi qat'iy bo'lmagan tengsizlikdir, uning yechimlari koordinata chizig'ida 8 nuqtasidan boshlangan nur bilan ifodalanadi. Bunday sonli oraliq "nur" deb nomlanadi. Belgilanishi: [8; +∞). O'qish: "8 dan cheksizlikkacha, shu jumladan 8 ham".

5) $x<5$ tengsizlikning yechimlari diapazonini ko'raylik. $x<5$ tengsizlikning yechimlari to'plamini koordinata chizig'ida 5-rasmda ko'rsatilgan.




5-rasm.

Berilgan tengsizlik yechimlari minus cheksiz (-∞) dan 5 gacha bo'lgan sonlarni o'z ichiga oladi. 5 soni tengsizlik yechimiga kirmaydi. Shuning uchun bunday diapazon "ochiq nur" deb nomlanadi. Tengsizlikning sonli intervallardagi yechimlarini belgilash: $(-\infty; 5)$. O'qish: "minus cheksizlikdan 5 gacha bo'lgan sonlar oralig'i".

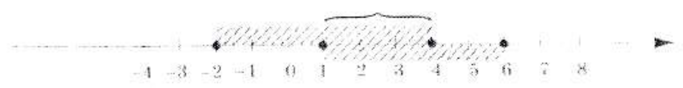
6) $-\infty<x<+\infty$ tengsizlikni yechimi bu barcha haqiqiy sonlardir. Haqiqiy sonlar to'plami koordinata chizig'i bo'ylab barcha nuqtalar bilan ifodalanadi.

**Izoh:** $(-\infty;+\infty)$. O'qish: "minus cheksizlikdan plyus cheksizlikgacha bo'lgan sonlar".

Ikkita sonli intervallarni bir-biri bilan "kesishadi", kesishma bo'sh to'plam yoki "qo'sxilish" dir.

Ikki sonli to'plamlarning kesishishi.

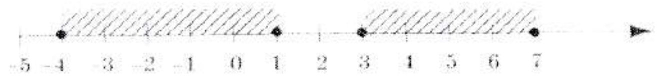
Masalan, [-2; 4] oraliq va [1; 6] oraliqning umumiy qismi [1; 4] bo'ladi. (6-rasm).




6-rasm.

Bunday holda, [-2;4] va [1;6] intervallar kesishadi. U quyidagicha belgilanadi: $[-2;4]\cap[1;6]=[1;4]$.

Ba'zi sonli intervallar kesishmaydi. Masalan, [-4;1] va [3;7] intervallari kesishmaydi (7-rasm) yoki ularning umumiy sonli intervallari yo'q. Agar shunday bo'lsa, [-4;1] va [3;7] intervallarning kesishishi "bo'sh" to'plamdir.




7-rasm.

Tengsizliklar sistemasining yechimini topish uchun to'plamlarning kesishishidan foydalaniladi.

Ikki son oralig'ining kombinatsiyasi.

[-2;6] intervalning har bir soni [-2;3] va [1;6] intervallarning biriga yoki ikkalasiga to'g'ri keladi (8-rasm).




8-rasm.

Bunday holda [-2;6] oraliq [-2;3] va [1;6] "qo'sxilish" deb nomlanadi.

Ishoralanishi: $[-2;3]\cup[1;6]=[-2;6]$.

Tengsizliklar yechimini topish uchun to'plamlarning kombinatsiyasi kerak.

### 3. Bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilish usullari

O'rta maktabda bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilishning quyidagi asosiy usullari qo'llaniladi:

1. Tengsizlikni grafik usul bilan yechish;
2. Tengsizlikni ayniy almashtirish orqali hal qilish;
3. Tengsizlikni intervallar usuli bilan yechish.

### 4. Tengsizliklarning ekvivalentligi tushunchasi

Tengsizlikni yechishda tenglik tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Agar $X$ to'plamga mos keladigan birinchi tengsizlikning har bir yechimi ikkinchisining yechimi bo'lsa va aksincha, X to'plamga mos keladigan ikkinchi tengsizlikning yechimi X to'plamdagi tengsizliklarning birinchisining yoki hech birining yechimi bo'lmasa, bu

$$f_1(x) > g_1(x)\ (1) \text{ va } f_2(x) > g_2(x)\ (2)$$

ikki tengsizlik $X$ to'plamda ekvivalent deyiladi. Shuning uchun agar ushbu tengsizliklarning yechimlari to'plami bir xil bo'lsa, ular ekvivalent deb ataladi. Bitta tengsizlikni mos keladigan tengsizlikka almashtirish *sinonim transformatsiya* deb ataladi va u $\Leftrightarrow$ kabi belgilanadi.

Masalan:

1. $x^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1$.

2. $\sqrt{4x+5} \le 2$ va $4x+5 \le 4$ tengsizliklar ekvivalent emas, chunki agar $4x+5<0$ bo'lsa, birinchi tengsizlikning yechimi yo'q, ikkinchisining esa yechimi bor: $x \le -\frac{1}{4}$.

Ba'zi adabiyotlarda ekvivalent tengsizliklarni aniqlashning yana bir usuli mavjud.

Agar bir tengsizlikning barcha yechimlari boshqa tengsizlikning ham yechimlari bo'lsa, unda birinchi tengsizlik ikkinchi tengsizlikning natijasi deyiladi.

U (1)$\Rightarrow$(2) deb yoziladi, bu yerda "$\Rightarrow$" mantiqiy implikatsiya yoki oqibat degan ma'noni anglatadi. (1)$\Rightarrow$(2): "(1) tengsizlik (2) tengsizlikka olib keladi" deb o'qiladi.

(1) va (2) tengsizliklar ekvivalent tengsizliklar deyiladi, agar (1) tengsizlikning yechimi (2) ning yechimi bo'lsa va agar (2) tengsizlikning yechimi (1) tengsizlikning yechimi bo'lsa yoki ikkala tengsizlikning yechimlari mavjud bo'lmasa.

Tenglamalarning ekvivalentligi quyidagicha umumlashtiriladi:

(1) $\Leftrightarrow$ (2), bu yerda " $\Leftrightarrow$ " – bu mantiqiy ekvivalentlik ishorasi.

Tengsizliklarni hal qilish uchun tengsizlikka ekvivalent o'zgarishlar amalga oshiriladi.

Ekvivalent tengsizliklarning asosiy xossalari quyidagilardan iborat:

1. $f(x) < g(x)$ va $g(x) > f(x)$ tengsizliklar o'zaro ekvinvalent.

2. $f(x) < g(x)$ va $f(x) - g(x) < 0$ tengsizliklar o'zaro ekvinvalent.

3. Agar $\varphi(x)$ funksiya $f(x) < g(x)$ tengsizlikning aniqlanish sohasida aniqlangan bo'lsa, u holda $f(x) < g(x)$ tengsizlik va $f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$ tengsizlikka ekvinvalent.

Isbot: $a$ soni $f(x) < g(x)$ tengsizlikning qandaydir bir yechimi bo'lsin, ya'ni, $f(a) < g(a)$ (3).

Endi tengsizlikning ikkala tomoniga $\varphi(a)$ sonini qo'shamiz. Tengsizlik sonli tengsizlikning xususiyatlariga ko'ra o'zgarmaydi:

$$f(a) + \varphi(a) < g(a) + \varphi(a) \qquad (4)$$



(4) tengsizlik $a$ sonining $f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$ tengsizlik yechimi ekanligini bildiradi.

Endi $b$ soni $f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$ tengsizlikning yechimi bo'lsin;

$$f(b) + \varphi(b) < g(b) + \varphi(b) \qquad (5)$$

Ushbu tengsizlikning ikkala tomoniga $-\varphi(b)$ sonini qo'shamiz:

$$f(b) + \varphi(b) - \varphi(b) < g(b) + \varphi(b) - \varphi(b)$$

Keyin

$$f(b) < g(b) \qquad (6)$$

hosil bo'ladi. (6) tengsizlik $x = b$ sonning $f(x) < g(x)$ tengsizlikning yechimi ekanligini ko'rsatadi. Shunday qilib, tengsizliklar bir-biriga o'zaro ekvivalent.

4. Agar $f(x) > \varphi(x)$ tengsizlikning ikkala tomonida tengsizlik aniqlanish sohasida aniqlangan ushbu $\psi(x) > 0$ funksiyaga ko'paytirsak, u berilgan tengsizlikka ekvivalent bo'ladi:

$$f(x)\psi(x) > \varphi(x)\psi(x).$$

5. Agar $f(x) > \varphi(x)$ tengsizlikning ikkala tomoniga ham ushbu tengsizlik doirasida aniqlangan $\psi(x) < 0$ funksiyani ko'paytirsak, u berilgan tengsizlikka ekvivalent bo'ladi:

$$f(x)\psi(x) < \varphi(x)\psi(x)$$

6. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ va $f(x) \cdot \varphi(x) > 0$ tengsizliklar o'zaro ekvivalent bo'ladi.

7. $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ va $f(x) > \varphi(x)$ lar $a$ ning $(1;+\infty)$ dagi har qanday qiymatida ekvivalent bo'ladi.

8. $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ va $f(x) < \varphi(x)$ lar $a$ ning $(0,1)$ orasidagi har qanday qiymatida o'zaro ekvivalent bo'ladi.

9. Agar A to'plamda $f(x), \varphi(x)$ funksiyalar manfiy bo'lmasa, u holda

$f(x) > \varphi(x)$ va $(f(x))^n > (\varphi(x))^n$ $(n \in N)$ tengsizliklar o'zaro ekvivalent bo'ladi.

10. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$ va $f(x) < \varphi(x)$ tengsizliklar o'zaro ekvivalent bo'ladi.

11. $f^{2n}(x) < \varphi^{2n}(x)$ va $|f(x)| < |\varphi(x)|$ tengsizliklar o'zaro ekvivalent bo'ladi.

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Tengsizlikka oid tushunchalarni sanab bering.
2. Tengsizliklar mavzusini o'qitishning asosiy maqsadi.
3. Bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilish usullari nechta?
4. Bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilishning birinchi usulini aytib bering.
5. Bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilishning ikkinchi usulini aytib bering.
6. Bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilishning uchinchi usulini aytib bering.

---

## 4.2-§. Tengsizliklarni hal qilishni o'rganish

REJA:

1. **Bitta noma'lumli chiziqli tengsizlik.**
2. **Bir noma'lumli chiziqli tengsizliklar sistemasi.**
3. **Ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarni o'rganish.**



### 1. Bitta noma'lumli chiziqli tengsizlik

Yangi dasturga ko'ra, o'quvchilarni tengsizliklarni hal qilishga sistemali ravishda kirish 6-sinfdan boshlanadi.

Masalan, $5x-2<8$; $x-5>0$; $3x+5>21-x$; $\frac{x+4}{2}<\frac{x+7}{3}$ – bitta o'zgaruvchili tengsizliklardir.

$ax>b$ yoki $ax<b$ shaklidagi tengsizliklar bitta o'zgaruvchili chiziqli tengsizlik deyiladi. Bu yerda $a$, $b$ – qandaydir sonlar, $x$ o'zgaruvchi.

Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarni yechish, bu tengsizlikni sonli tengsizlikka aylantiradigan sonli to'plamni topishdir. Tengsizlikni yechish uning barcha yechimlarini topish yoki yechimlar yo'qligini isbotlash demakdir. Bir xil yechimlarga ega tengsizliklar ekvivalent tengsizliklar deyiladi. Yechimsiz tengsizliklar ham teng tengsizliklardir.

Tengsizliklarni yechishda tengsizliklarni ekvivalent tengsizlikka aylantirishdan foydalaniladi.

Tengsizliklar ekvivalent tengsizlikka aylantiriladi, agar:

1) tengsizlikning bir qismidan ikkinchi qismiga qarama-qarshi ishora bilan olib o'tilsa;

2) tengsizlikning ikkala tomonini bitta musbat songa ko'paytirilsa yoki noldan farqli songa bo'linsa;

Bitta o'zgaruvchili tengsizliklarni yechish uchun:

1) agar tengsizlikda qavs bo'lsa, qavslarni ochish va tengsizlikda kasrlar bo'lsa, tengsizlikning ikkala tomonini kasrning mahrajini umumiy mahrajga ko'paytirish;

2) tengsizlikning noma'lum a'zolarini tengsizlikning chap qismida bo'lsa, ularni tengsizlikning o'ng qismiga teskari ishora bilan olib o'tish kerak;

3) tengsizlikdagi o'xshash hadlar ixchamlashtiriladi;

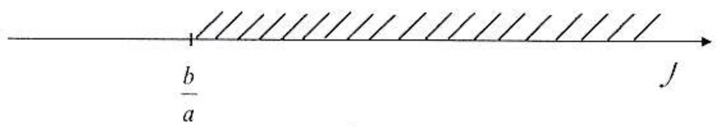
4) tengsizlikning ikkala tomonini noma'lum oldidagi koeffitsiyentga (agar u nolga teng bo'lmasa) bo'linadi;

5) tengsizlikning yechimi topiladi va kerak bo'lganda uni sonli diapazoni belgilanadi.

Bunday fikr-mulohazalardan so'ng, chiziqli tengsizlik uchun yechim axtariladi.

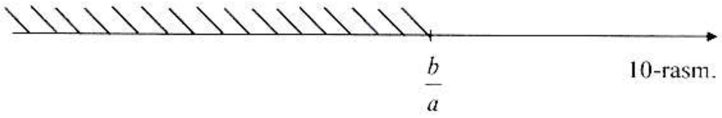
$ax>b$ tengsizlikda:

1) Agar $a>0$ bo'lsa, tengsizlikning yechimi mavjud: $x>\frac{b}{a}$. Uni $\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$ kabi ham yozish mumkin. Tengsizlik yechimlari to'plami koordinata chizig'ida ochiq nur shaklida berilgan (9-rasm).



9-rasm

2) agar $a<0$ bo'lsa, tengsizlikning yechimi mavjud $x<\frac{b}{a}$. Uni $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$ kabi yozish mumkin. Tengsizlik yechimlari to'plami koordinata chizig'ida ochiq nur shaklida berilgan (10-rasm).



10-rasm.

3) $a=0$ va $b>0$ bo'lsa, $0\ xx>b$ tengsizlikgning yechimi bo'lmaydi. Chunki $0$ soni har qanday musbat sondan katta emas.

4) $a=0$ va $b<0$, $0\ xx>b$ tengsizlik $x$ ning har qanday qiymatida ham o'rinli bo'ladi. Chunki har qanday manfiy son 0 gan kichik ($b<0$). Shuning uchun, tengsizlik yechimi $(-\infty;+\infty)$ bo'ladi.

## 2. Bir noma'lumli chiziqli tengsizliklar sistemasi



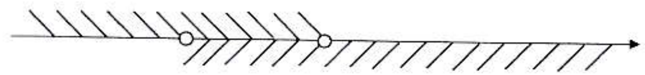
Noma'lum qatnashgan tengsizliklarni yechish tushunchasini kiritish uchun quyidagi masalani hal qilish maqsadga muvofiq bo'lishi mumkin.

1-masala. Asqar 3 chizg'ich sotib olish uchun 21 ming so'mdan kam pul sarfladi. Agar chizg'ichning narxi 2 mingga arsonlashtirilsa, u 9 mingdan ko'proq to'laydi. Chizg'ichning boshlang'ich narxi qancha?

Yechish: $x$ – chizg'ichning boshlang'ich narxi. Masala sharti bo'yicha:

$3x<21;$ $\quad 3(x-2)>9,$
$x<7;$ $\quad x-2>3,$ $\quad$ hosil bo'ladi.
$\quad x>5.$

Topilgan $x$ – qiymatlarini sonlar o'qida tasvirlaymiz (11-rasm).



11-rasm

Shunday qilib, berilgan tengsizlik yechimi

$$5<x<7.$$

Ya'ni $\begin{cases}3x<21\\3(x-2)>9\end{cases}$

tengsizliklar sistemasining yechimlari (5;7) oraliqda joylashgan.

Masala shartini ushbu oraliqdagi butun son qanoatlanti-radi. Shuning uchun chizg'ichning boshlang'ich narxi $x=6$ ming so'm ekan.

Javob: 6

Shuning uchun bitta o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasini yechish uchun berilgan tengsizliklarni to'g'ri sonli tengsizlikka o'zgartiradigan o'zgaruvchining qiymatlari to'plamini topish kerak.

## 3. Ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarni o'rganish

Ikki o'zgaruvchili tengsizlikni to'g'ri tengsizlikka o'zgartiradigan o'zgaruvchilarning qiymatlari uning yechimidir. Ikkita o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarning har bir yechimi koordinata tekisligidagi bitta nuqtaga to'g'ri keladi.

1. $2x+y-5>0$ tengsizlikning yechimini toping.

$2x+y-5>0$ tengsizlik $y>-2x+5$ tengsizlikka ekvivalent. Tekislikdagi koordinatalar sistemasida $y>-2x+5$ tengsizlik tekislikning $y=-2x+5$ to'g'ri chiziq bilan ajratilgan yarim tekislikdir (12-rasm).

$y=-2x+5$ chiziq tepasidagi yarim tekislikda joylashgan nuqtalarni olamiz. Masalan, $A$ (6;4), bu yerda $x=6$; $y=4$ qiymatlarini $y>-2x+5$ tengsizlikka qo'yib: $4>-2\cdot6+5$ ni topamiz, tengsizlikning to'g'riligini tekshiramiz: $4>-7$. Shuning uchun koordinatalari (6;4) bo'lgan $A$ (6;4) nuqta $y>-2x+5$ tengsizlikning yechimidir.

Xulosa:

$y>-2x+5$ tengsizlikning yechimlari $y=2x+5$ to'g'ri chiziqdan yuqorida joylashgan nuqtalarning koordinatalarini ifodalovchi sonlar juftlaridir.

2. Endi $2x+y-5<0$ tengsizlikning yechimini topaylik. $2x+y-5<0$ tengsizlik $y<-2x+5$ tengsizlikka ekvivalent va uning geometrik tasviri ochiq yarim tekisliklik bo'ladi (13-rasm).

Masalan, koordinatalari (2;-4) bo'lgan $B$ (2;-4) nuqta koordinatalari $y<-2x+5$ tengsizlikning yechimi bo'ladimi? Tekshiramiz: $-4<-2\cdot2+5$, $-4<1$ – to'g'ri tengsizlik hosil bo'ldi.

4. $2x-3>0$ tengsizlikning yechimini topaylik. $2x-3>0$ tengsizlik $2x>3$ tengsizlikka ekvivalent. Agar $2x>3$ bo'lsa, u holda $x>1{,}5$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

5. $2x-3<0$ tengsizlikning yechimlari koordinata tekisligidagi $Oy$ o'qiga parallel bo'lgan $x=1{,}5$ to'g'ri chiziqning chap tomonidagi ochiq yarim tekislikdagi nuqtalardir (15-rasm).

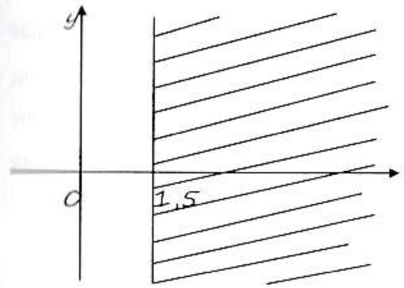
Ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimi sistemadagi barcha tengsizliklarga xosdir. Shu sababli, tengsizliklar sistemasining yechimini



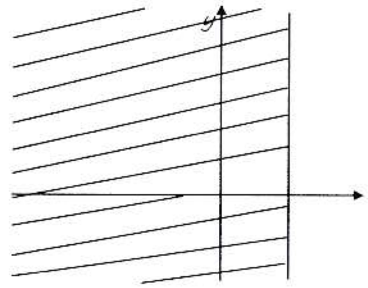
topish uchun sistemadagi barcha tengsizliklarning yechimlari to'plamini bitta koordinata tekisligida ifodalash va ularning umumiy yechimlarini topish kerak. Masalan,

$$\begin{cases} y \ge x-2, \\ y < -0{,}5x+2 \end{cases}$$

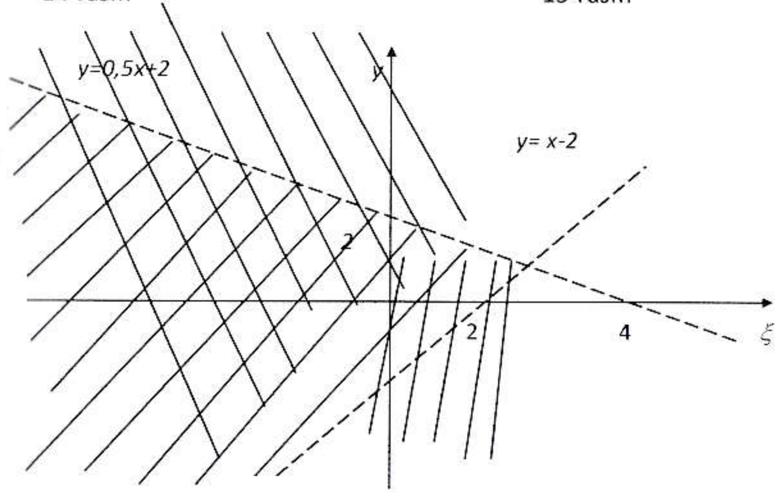
tengsizliklar sistemasining yechimlari to'plamini koordinata tekisligida ifodalaylik (16-rasm).




14-rasm




15-rasm




16-rasm

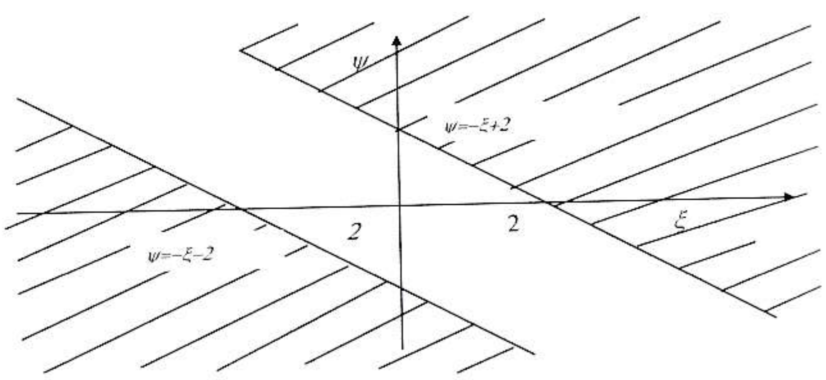
$y \geq x-2$ tengsizlik $y = x-2$ chiziqning yuqorisidagi nuqta koordinatalari bo'lgan sonlarning juftlari $y > x-2$ tengsizlikning yechimlari to'plami va $y < -0{,}5x + 2$ tengsizlik yechimlari to'plami $y = -0{,}5x + 2$ chiziq pastki qismida joylashgan ochiq yarim tekislikdagi nuqtalarning koordinatalari bo'lgan sonlar juftlaridir.

$$\begin{cases} y > x-2, \\ y < -0.5x+2 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasining yechimlari to'plamiga bu ikkita tengsizlikning har birining yechimlariga ko'rsatilgan tekisliklarning kesishish nuqtalarining koordinatalari bo'lgan sonlar juftlari kiradi.Agar tengsizliklar sistemasidagi har bir tenglamaning yechimlarini o'z ichiga olgan yarim tekisliklar kesishmasa, unda tengsizliklar sistemasining yechimi yo'q. Masalan,

$$\begin{cases} y > -x+2, \\ y < -x-2 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemaining yechimlari yo'q, chunki $y > -x+2$ tengsizlik-ning yechimi $y = -x-2$ chiziqning yuqori yarmida, $y < -x-2$ tengsizlikning yechimi esa $y = -x-2$ chiziqning pastki yarmida yotadi (17-rasm).




17-rasm

Koordinata tekisliklari tengsizliklar sistemasidagi yechimlar to'plamlari kesishmaydi (umumiy qism yo'q). Bunday tengsizliklar sistemasining yechimlari bo'sh to'plamdir.

Javob: Æ.

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Bitta noma'lumli chiziqli tengsizlik nima?
2. Ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarni o'rganish qanday olib boriladi?
3. Bitta o'zgaruvchili tengsizlikni hal qilish usullarini ayting.
4. Funksiya grafiklarini yasashda nimalarga e'tibor berish kerak?

## 4.3-§. O'rta maktabda o'rganiladigan tengsizlikning asosiy turlari

REJA:

1. Chiziqli tengsizliklarni hal qilish yo'llari.
2. Kvadrat tengsizliklarni yechish usullari
3. Tengsizliklarni intervallar usuli bilan yechish usuli.
4. Butun ratsional tengsizliklarni yechish usuli.
5. Ratsional tengsizliklar sistemasini intervallar usuli bilan yechish.

### 1. Chiziqli tengsizliklarni hal qilish yo'llari

$ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$ ko'rinishdagi tengsizlik-lar bir noma'lumli tengsizliklar deyiladi. Bu tengsizliklarning yechimlari quyidagicha yoziladi:

$ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$.

1. $a>0$, $ax+b>0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$;

$2. \ a < 0, \quad ax + b > 0 \leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right);$

$3. \ a = 0, \quad b > 0, \quad 0 \cdot x + b > 0 \leftrightarrow x \in R$

$4. \ a = 0, \quad b = 0, \quad 0 \cdot x + 0 > 0 \leftrightarrow x \epsilon \emptyset$

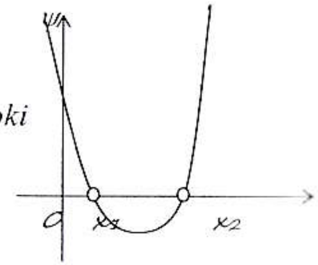
## 2. Kvadrat tengsizliklarni yechish yo'llari

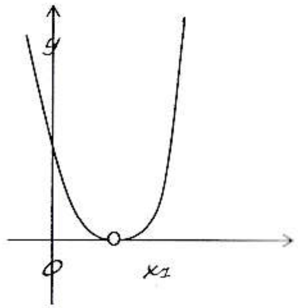
$ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\geq 0$; $ax^2+bx+c<0$; $ax^2+bx+c\leq 0$ ko'rinishdagi tengsizliklar kvadrat tengsizliklar deyiladi.Bu kabi kvadrat tengsizliklarning yechimi $x^2$ ning koeffitsiyenti $a$ ning ishorasiga va $D=b^2-4ac$ diskriminantga bog'liq bo'ladi. Agar $a<0$ bo'lsa, u holda tengsizlikning ikkala tomonini (-1) ga ko'paytiriladi va tengsizlikni qarama-qarshisiga almashtiriladi. Masalan, $-2x^2+3x-6<0$ $\Leftrightarrow$ $2x^2-3x+6>0$.

1. Agar $a>0$, $D=0$ bo'lsa, u holda

$$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty) \ yoki$$

$$\left[\begin{array}{l} x<x_1 \\ x>x_2 \end{array}\right. \quad yoki \quad x<x_1; x>x_2$$




2. Agar $a>0$, $D<0$ bo'lsa, u holda

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\infty)$;

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.



## 3. Tengsizliklarni intervallar usuli bilan yechish

$$f(x)><0 \Leftrightarrow (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)....(x-\alpha_n)><0, \ \alpha_i\in N, \ i=1,2,3...,n$$

$$x\in(\alpha_1;\alpha_2)\cup...\cup(\alpha_n;+\infty): \ f(x)>0,$$

$$x\in(-\infty;\alpha_1)\cup...\cup(\alpha_{n-1};\alpha_n): \ f(x)<0,$$

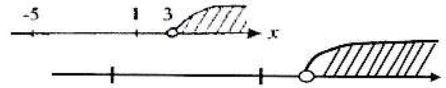
Intervalli usulning ma'nosi nima?

$y=f(x)$ funksiyani qandaydir ko'paytuvchilar ko'paytmasi shaklida yozish mumkin bo'lsin. Masalan, $f(x)=(x-3)(x+5)(x-1)$ sifatida berilgan bo'lsin. $x$ ning qandaydir qiymatlarida bu funksiya musbat, qandaydir qiymatlarida esa manfiy qiymatlar qabul qiladi. Bu qanday aniqlanadi? Buning uchun avval funksiya nolga teng bo'lgan $x$ ning qiymatlarini topamiz: Sonlar o'qida biz funksiyaning ildizlarini belgilaymiz. Ushbu sonlar son o'qini bir necha itervallarga ajratadi. Har bir

$$f(x)=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \\ x=1 \end{array}\right.$$

intervalda funksiyaning ishorasi qanday ekanligini aniqlaymiz.

*a)* $x>3$




$$\begin{cases} x-3>0, \\ X+5>0, \\ x-1>0, \end{cases} \rightarrow (x-3)(x+5)(x-1)>0$$

$f(x)>0$, shuning uchun ushbu intervaldagi funksiyaning ishorasi (+)

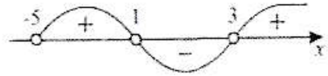

*b)* $1<x<3$

$$\begin{cases} x-3<0, \\ x-1>0 \\ x+5>0 \end{cases} \rightarrow (x-3)(x-1)(x+5)<0$$

Ushbu intervalda $f(x)<0$.

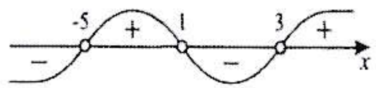
*c)* $-5<x<1$

$$\begin{cases} x-3<0, \\ x-1<0, \\ x+5>0 \end{cases} \rightarrow (x-3)(x-1)(x-5)>0$$



Ushbu intervalda $f(x)>0$.

*d)* $x<-5$



Shunday qilib,

$$\begin{cases} x-3<0, \\ x-1<0, \\ x+5<0. \end{cases} \rightarrow f(x)<0$$

Funksiya ishorasi o'zgartirildi. Quyidagi xulosaga olib keldi, bu oddiy kuzatish natijasi: qarama-qarshi ishoralar navbatlashib keladi.

Ushbu ketma-ketlikdan foydalanib, murakkab tengsizliklar tezda hal qilinishi mumkin. Quyidagi misolni ko'rib chiqaylik.

$$f(x)=(x+2{,}5)(x-2)(x-5)(x+1).$$

Masalan, $f(x)<0$ bo'lgan vaziyatni aniqlashimiz kerak. Oldingi misolda bo'lgani kabi, intervallarni ko'rib chiqishimiz va ushbu intervalda funksiyaning ishoralarini aniqlashimiz mumkin edi, ammo biz buni boshqacha qilamiz. Funksiyaning barcha ko'paytuvchilarida $x$ ning koeffitsiyentlari musbat sondir (ko'rib chiqilayotgan misolda u 1 ga teng). Bu shuni anglatadiki, funksiya eng o'ng oraliqda musbat qiymatga ega. Agar funksiya ildizdan o'tish paytida ishorani o'zgartirsa, tengsizlikni intuitiv ravishda yechish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak:

a) funksiyani kanonik ko'paytuvchilarga ajratish (bu holda $x$ ning barcha koeffitsiyentlari musbat ekanligiga ishonch hosil qiling);

b) funksiyaning barcha ildizlarini toping va ularni sonlar o'qida o'sish tartibida joylashtiring;



c) funksiyaning ishorasini o'ta o'ng diapazonda aniqlang va ishora (egri chiziq yoki to'lqin kabi) ni almashtiring, bunda funksiya ishorasi intervallarda ildizdan o'tib ketganda o'zgaradi;

№1. Tengsizlikni yeching: $(x+2{,}5)(x-2)(x-5)(x+1)<0$

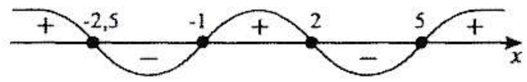
Tengsizlikning chap tomoni ko'paytuvchilardan iborat va o'zgaruvchining barcha koeffitsiyentlari musbatdir. Avval biz ildizlarni topamiz:

$$\left[\begin{array}{l} x+2{,}5=0 \\ x-2=0 \\ x-5=0 \\ x+1=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-2{,}5 \\ x=2 \\ x=5 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ularni son o'qida belgilaymiz:


to'lqin chiziq bilan intervallarni ajratamiz va o'ng yuqori intervalga + ni, qolganlariga esa – ni navbati bilan qo'yamiz:

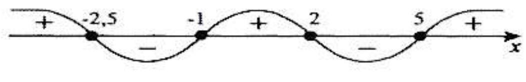


-2,5< x<-1; 2< x <5 oraliqlarda $f(x)<0$ bo'ladi.

Berilgan tengsizlik qat'iy tengsizlik bo'lganligi sababli, biz sonlar o'qidagi intervallar chetki nuqtalarini belgilamaymiz:

(-2,5;-1)∪(2;5)

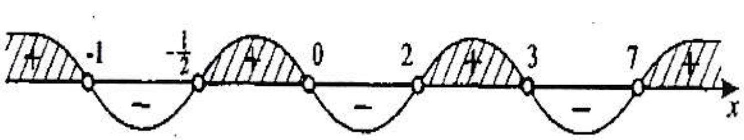
№2. Tengsizlikni yeching: $(x+2{,}5)(x-2)(x-5)(x+1)\geq 0$



Javob: $[-2{,}5;-1]\cup[2;5]$

№3. $(x+1)(x-3)(2x+1)(x-7)(x-2)x>0$ ni yeching.

Biz ildizlarni topamiz, ularni sonlar o'qida belgilaymiz va sonlar o'qining tepasidagi to'lqinning qismiga mos keladigan intervallarni yozamiz. Quyidagi intervallarni olish mumkin:



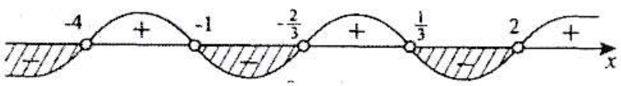

Javobni intervallar shaklida yozamiz:

Javob: $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(2;3)\cup(7;+\infty)$

№4. Tengsizlikni yeching:

$$(x+2/3)(3x-1)(x+4)(x-2)(x+1)<0$$

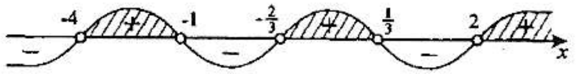
$f(x)<0$ bo'lganligi sababli, intervallarni manfiy ishora bilan ishoralaymiz va ularni javob sifatida yozamiz.




$$x<-4;\ \ -1<x<-2/3;\ \ 1/3<x<2$$

Javob: $(-\infty;-4)\cup\left(-1;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};2\right)$

№5. Tengsizlikni yeching: $(x+2/3)(3x-1)(x+4)(x-2)(x+1)>0$




$$-4<x<-1;\ \ -2/3<x<1/3;\ \ x>2.$$

Javob: $(-4;-1)\cup\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$



## 4. Butun ratsional tengsizliklarni yechish

Butun ratsional tengsizlik bu algebraik tengsizlikning quyidagi turi sanaladi:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n><0, \quad (4)$$

o'rta maktabda butun ratsional tengsizlikning xususiy hollari, ya'ni kvadratik, bikvadratik tengsizliklar o'rganiladi.

Odatda interval usuli butun sonli ratsional tengsizliklarni hal qilish uchun ishlatiladi. Buning uchun (4) tengsizlikning chap tomoni chiziqli ko'paytuvchilarga ajratiladi.

$$a_0(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot...\cdot(x-a_n)><0,$$

Keyin bu tengsizlikni hal qilish uchun interval usuli qo'llaniladi.

№1 .Tengsizlikni yeching: $(x^2-3x-4)x>0$

Ushbu misolga intervallar usulini qo'llash uchun tengsizlikning chap tomonidagi ifodani ko'paytuvchilarga ajratish kerak.

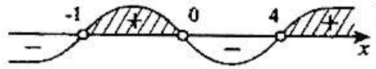
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, bu yerda $x_1$ va $x_2$ ildizlar.

$$\begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

$x^2-3x-4$ uchhadni ko'paytuvchilarga ajrataylik:

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

$$(x-4)(x+1)x>0.$$




Javob: (-1; 0) (4;+∞)

№2. Tengsizlikni yeching:

$(x^2-9)(x^2-4)<0$,

$(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)<0$

Javob: $(-3;-2)\cup(2;3)$

№3. Tengsizlikni yeching:

$$(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 2x - 8) > 0$$

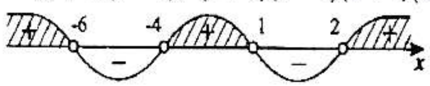
Uni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x^2 + 5x - 6) = (x + 6)(x - 1) \text{ va}$$

$$(x^2 + 2x - 8) = (x + 4)(x - 2)$$

$$(x + 6)(x - 1)(x + 4)(x - 2) > 0$$

$$= (x + 4)(x - 2), \ (x + 6)(x - 1)(x + 4)(x - 2) > 0.$$

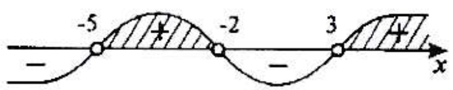



Javob: $(-\infty;-6) \cup (-4;1) \cup (2;+\infty)$

№4. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{(x + 5)(x - 3)}{x + 2} > 0$$

Ushbu intervallar usuli fraksion-ratsional tengsizliklarda ham qo'llaniladi. Aslida funksiya ishorasining o'zgarishi ko'paytma yoki bo'linganligiga bog'liq emas. Shuning uchun



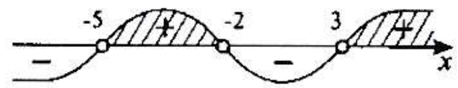

Javob: $(-5;-2) \cup (3;+\infty)$

№5. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{x - 2}{(x + 2)(x - 5)} \geq 0$$

Ushbu hisoblashda farq bor: Tengsizlik mahrajining va sur'atining ildizi tengsizlikning yechimi hisoblanadi, chunki tengsizlik qat'iy emas.

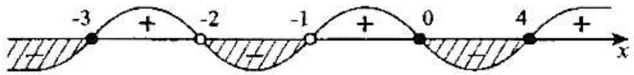





Javob: $(-2; 2] \cup (5; +\infty)$

№6. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{(x + 3)(x - 4)x}{(x + 1)(x + 2)} \leq 0$$

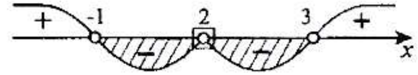



Javob: $(-\infty; -3] \cup (-2; -1) \cup [0; 4]$

№7. Tengsizlikni yeching:

$$(x - 2)^2(x + 1)(x - 3) < 0$$

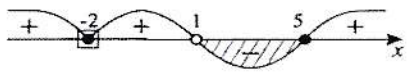
Ushbu misolda $x=2$ tengsizlikning ildizi ikki karralidir. Shuning uchun, bu nuqtadan o'tganda ifodaning ishorasi o'zgarmaydi. Aniqroq qilish uchun biz bunday ildizlarni kvadrat bilan ishoralaymiz.




Javob: $(-1; 2) \cup (2; 3)$

8.Tengsizlikni yeching:

$$\frac{(x - 5)(x + 2)^2}{x - 1} \leq 0$$




Javob: $(1; 5) \cup \{-2\}$

№9. Tengsizlikni yeching:

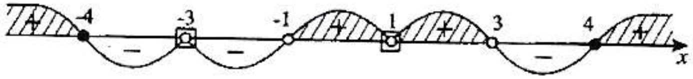
$$\frac{(x^2+2x-3)(x^2-16)}{(x^2-1)(x^2-9)} \ge 0$$

Yechish:

$$x^2+2x-3=0; \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right. \qquad x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

$$\frac{(x+3)(x-1)(x-4)(x+4)}{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)} \ge 0$$

Qat'iy bo'lmagan tengsizlik uchun agar $x=a$ sur'atning ham, mahrajning ham ildizi bo'lsa, u yechim oralig'iga kiritilmaydi. Ushbu masalada bunday ildizlar mavjud va ular 2 ta: $x=1$; $x=3$.




Javob: $(-\infty;-4] \cup (-1;1) \cup (1;3) \cup [4;+\infty)$

№10. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{4-x^2}{(x+7)x} \le 0$$

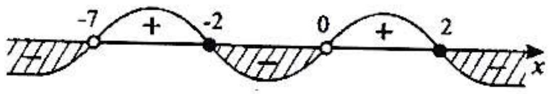
Ushbu misoldagi $x$ ning barcha koeffitsiyentlari ham musbat sonlar emas. Bu shuni anglatadiki, biz hozirgacha qilganimizdek, oraliq usulidan foydalana olmaymiz. Standart usuldan foydalanib, tengsizlik-ning ikkala tomonini (-1) ga ko'paytiramiz. Bunday holda tengsizlik ishorasi o'zgarishini yodda tuting. Tengsizlikni kanonik holga keltiraylik:

$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x+7)x} \le 0 \times 1 \leftrightarrow \frac{(x-2)(2+x)}{(x+7)x} \ge 0$$


Javob: $(-\infty;-7) \cup [-2;0) \cup [2;+\infty)$.



Biz ushbu misolni boshqacha tarzda yechishimiz mumkin. Aslida bu shuni anglatadiki, funksiya oxirgi o'ng oraliqda manfiy qiymatlarni oladi, bu yerda ishoralar bo'linishi pastki o'ngdan boshlanishi kerak.

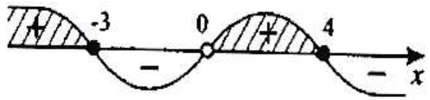



Javob: $(-\infty;-7) \cup [-2;0) \cup [2;+\infty)$

№11. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{12+x-x^2}{x} \ge 0$$

$$12+x-x^2=(x+3)(x-4)$$



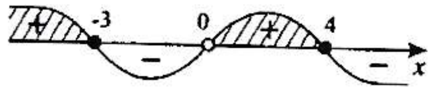

Javob: $(-\infty;-3] \cup (o;4]$

№12. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{(4-7x)(x^2+2)}{(x-3)(x+2)} > 0$$

Yechish: $x^2+2>0$ ifoda har qanday $x$ uchun musbat qiymatni oladi, shuning uchun berilgan tengsizlikni uning ekvivalent tengsizligi bilan almashtiramiz.

$$\frac{4-7x}{(x-3)(x+2)} > 0$$




Javob: $(-\infty;-2) \cup (\frac{4}{7};3)$

№13. Tengsizlikni yeching:

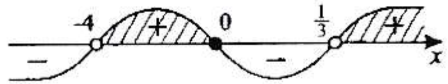
$$\frac{(x^2+3x+7)x}{(3x-1)(x+4)} \geq 0$$

Agar $y = ax^2 + bx + c$ uchun $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$ shart qondirilsa, har qanday $x$ uchun $y > 0$ bo'ladi. Demak, $ax^2 + bx + c > 0$.

Bu misolda, $D = 3^2 - 28 < 0$, ya'ni $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ D = -19 < 0 \end{cases}$

U holda, har qanday $x$ larda $x^2 + 3x + 7 > 0$ bo'ladi.

$$\frac{(x^2+3x+7)x}{(3x-1)(x+4)} \geq 0 \leftrightarrow \frac{x}{(3x-1)(x+4)} \geq 0$$




Javob: $(-4; 0] \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

№14. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{2+3x-2x^2}{(x^4-16)x} \geq 0$$

Yechish:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4};$$

$$x_1=2 \quad x_2=-1/2$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = -2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{-2(x-2)(x+\frac{1}{2})}{(x^2-4)(x^2+4)x} \geq 0 \leftrightarrow \frac{-2(x-2)(x+\frac{1}{2})}{(x+2)(x-2)x} \geq 0$$

Har qanday $x$ larda $x^2+4>0$. Tengsizlikning shakliga qarab, biz quyidagi turdagi intervalni quramiz:




Javob: $(-\infty; -2) \cup [-\frac{1}{2}; 0)$

№15. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{x^6-1}{x^6+1} \geq 0$$

Yechish:

$$\frac{(x^2)^3-1}{(x^2)^3+1} \geq 0$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

formulalardan foydalanamiz:

$$\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} \geq 0$$

Bu tengsizlikdagi barcha $x$ uchun

$x^4 + x^2 + 1 > 0$ (chunki $x^4 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $1>0$) barcha $x$ lar uchun $x^2 + 1 > 0$ va $x^4 + x^2 + 1 > 0$. Oxirgi tengsizlikda $x^2 = t$ belgilash kiritamiz va barcha $t$ lar uchun $t^2 - t + 1 > 0$, chunki $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ D = -3 < 0 \end{cases}$

Demak, berilgan tengsizlik $x^2 - 1 \geq 0$ tengsizlikka ekvivalentdir.

$$(x-1)(x+1) \geq 0$$


Javob: $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$

№16. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{21}{x-1} > 4$$

O'ng tomoni nolga teng bo'lmagan tengsizliklarni biz avval o'ng tomonni chapga olib o'tamiz. Uni umumiy mahrajga keltiramiz. Shu tarzda kasr-ratsional tengsizlikni hosil qilamiz va uni yechish uchun intervallar usulidan foydalanamiz:

$$\frac{21}{x-1} - 4 > 0;$$

$$\frac{21 - 4(x-1)}{x-1} > 0;$$

$$\frac{21 - 4x - 4}{x-1} > 0;$$

$$\frac{25 - 4x}{x-1} > 0.$$


Javob: $(1; 6\frac{1}{4})$

**№ 17.** Tengsizlikni yeching:

$$\frac{5}{x+2} < \frac{3}{x-3}$$

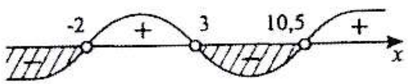
Yechish:

$$\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-3} < 0$$

$$\frac{5(x-3) - 3(x+2)}{(x+2)(x-3)} < 0;$$

$$\frac{5x - 15 - 3x - 6}{(x+2)(x-3)} < 0;$$

$$\frac{2x - 21}{(x+2)(x-3)} < 0.$$




Javob: $(-\infty; -2) \cup (3; 10{,}5)$

№18. Tengsizlikni yeching:



$$\frac{2}{x^2 - 3x - 4} \geq \frac{3}{x^2 + x - 6}$$

$$\frac{2}{x^2 - 3x - 4} - \frac{3}{x^2 + x - 6} \geq 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \left[\begin{matrix} x = 4 \\ x = -1 \end{matrix}\right.; \quad x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \left[\begin{matrix} x = -3 \\ x = 2 \end{matrix}\right.; \quad x^2 + x - 6 = (x+6)(x-2)$$

$$\frac{2(x^2 + x - 6) - 3(x^2 - 3x - 4)}{(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 6)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2 + 2x - 12 - 3x^2 + 9x + 12}{(x-4)(x+1)(x-2)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2 + 11x}{(x-4)(x+1)(x-2)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{-x(x \quad - 11)}{(x-4)(x+1)(x-2)(x+3)} \geq 0$$

Javob: $(-3; -1) \cup [0; 2) \cup (4; 11]$

№19. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{3 - x}{(x+2)(x-1)} \leq \frac{2(3-x)}{2x^2 - x - 1}$$

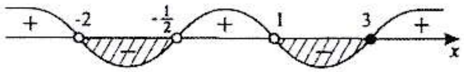
$$(3 - x)\left(\frac{1}{(x+2)(x-1)} - \frac{2}{2x^2 - x - 1}\right) \leq 0$$

$$(3 - x)\frac{2x^2 - x - 1 - 2(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(2x^2 - x - 1)} \leq 0.$$

$$\frac{(3 - x)(2x^2 - x - 1 - 2x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-1) \cdot 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

$$\frac{(3-x)(3-3x)}{(x+2)(x-1)\cdot 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \le 0$$

$$\frac{3(x-3)(x-1)}{2(x+2)(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)} \le 0$$




Javob: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 3]$

№20. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{x^4-2x^2-8}{x-3} \le \frac{x^4-16}{x+3}$$

Yechish: $x^4$-$2x^2$-$8$=$(x^2$-$4)(x^2+2)$=$(x$-$2)(x+2)(x^2+2)$;

$$\frac{(x^2-4)(x^2+2)}{x-3} - \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x+3} \le 0;$$

$$(x^2-4)\left(\frac{x^2+2}{x-3} - \frac{x^2+4}{x+3}\right) \le 0;$$

$$(x+2)(x-2)\cdot\frac{(x^2+2)(x+3)-(x-3)(x^2+4)}{(x-3)(x+3)} \le 0;$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x^3+3x^2+2x+6-x3+3x^2-4x+12)}{(x-3)(x+3)} \le 0;$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(6x^2-2x+18)}{(x-3)(x+3)} \le 0.$$

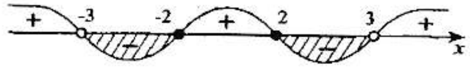
Sur'atdagi 3-qavsdagi $x$ lar uchun

$$\begin{cases} a = 6 > 0 \\ \frac{D}{4} = -107 < 0 \end{cases}$$

o'rinli bo'lganligidan $6x^2-2x+18>0$ o'rinlidir, uni hisobga olmaymiz:



$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)} \le 0$$




Javob: $(-3; -2] \cup [2; 3)$

№21. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} > \frac{5}{x}$$

Yechish:

$$\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} > 0$$

$$\frac{2-3x-5x^2}{x^3} > 0;$$

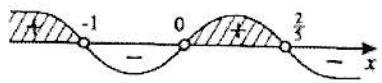
$$3-3x-5x^2 = -5(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right),$$

$$5x^2\text{-}3x\text{-}2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{10};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{2}{5} \end{array}\right.$$

$$\frac{-5(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right)}{x^3} > 0$$




Javob: $(-\infty; -1) \cup (0; \frac{2}{5})$

№22. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x-1} \le \frac{4}{2x-1}$$

Birinchi kasrning sur'atini chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz. Shunday qilib, avval tengsizlikning chap tomonini soddalashtiraylik:

$$2x^2\text{-}3x+1=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$2x^2\text{-}3x+1=(2x\text{-}1)(x\text{-}1)$$

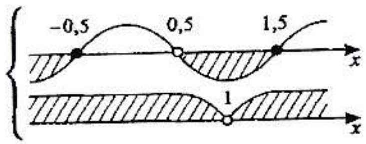
$$\frac{(2x-1)(x-1)}{x-1}\le\frac{4}{2x-1},$$

$$\begin{cases}2x-1\le\frac{4}{2x-1},\\ x\ne1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(2x-1)^2-4}{2x-1}\le0\\ x\ne1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(2x-1+2)(2x-1-2)}{2x-1},\\ x\ne1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(2x+1)(2x-3)}{2x-1}\le0\\ x\ne1\end{cases}$$




Javob: $(-\infty;-0{,}5]\cup(0{,}5;1)\cup(1;1{,}5]$

№ 23. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{x^2-1}{3x^4-4x^2+1}\ge\frac{3x^2-1}{9}$$

O'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib $x^2=t$ belgilash kiritamiz va oldingi misolda bo'lgani kabi tengsizlikning chap tomonini qisqartiramiz:



$$\frac{t-1}{3t^2-4t+1}\ge\frac{3t-1}{9};$$

$$3t^2\text{-}4t+1=(3t\text{-}1)(t\text{-}1)$$

$$3t^2\text{-}4t+1=0$$

$$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3};\qquad \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$$\frac{t-1}{(3t-1)(t-1)}\ge\frac{3t-1}{9};$$

$$\begin{cases}\frac{1}{3t-1}\ge\frac{3t-1}{9},\\ t\ne1\end{cases}$$

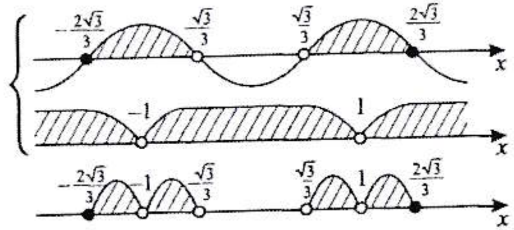
$$\begin{cases}\frac{9-(t-1)^2}{3t-1}\ge0,\\ t\ne1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(3-3t+1)(3+3t-1)}{3t-1}\ge0,\\ t\ne1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(4-3t)(2+3t)}{3t-1}\ge0,\\ t\ne1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(4-3x^2)(2+3x^2)}{3x^2-1}\\ x^2\ne1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{4-3x^2}{3x^2-1}\ge0,\\ x^2\ne1\end{cases}$$




Javob: $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3};-1\right)\cup\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1\right)\cup\left(1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

## 5. Ratsional tengsizliklar sistemasini intervallar usuli bilan yechish

№1. Sistemani yeshing:

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} - \dfrac{4-3x}{4} < \dfrac{1}{6} \\ 3x^2 + 7x - 6 \le 0 \end{cases}$$

Yechish: Birinchi tengsizlikni 12 ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} - \dfrac{4-3x}{4} < \dfrac{1}{6} \Bigg| \times 12 \\ 3x^2 + 7x - 6 \le 0 \end{cases}$$

2-tengsizlikni tenglamaga aylantirib, chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = -3 \end{array}\right.$$

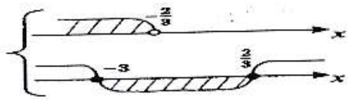
$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} - \dfrac{4-3x}{4} < \dfrac{1}{6}, \\ 3x^2 + 7x - 6 \le 0 \end{cases} \Bigg| \; 12$$

$$3x^2+7x-6=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{6} \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = -3 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 6(x+4) - 3(4-3x) < 2 \\ 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x+3) \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 10 < 0 \\ 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x+3) \le 0 \end{cases}$$




Javob: $\left[-3; -\frac{2}{3}\right)$

2. Tengsizliklar sistemasini yeching:



$$\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} \\ (5-x)^2 \le 4 \end{cases}$$

Yechish: $\alpha^2 < \beta^2 \quad \leftrightarrow \begin{cases} \alpha < |\beta| \\ \alpha > -|\beta| \end{cases}$ dan foydalanamiz

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+7) + (3x+1)(x-5)}{2(x-5)} \ge 0 \\ \begin{cases} 5 - x \le 2 \\ 5 - x \ge -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2 - 14x - 5 + 2x + 14}{2(x-5)} \ge 0 \\ \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 7 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2 - 12x + 9}{2(x-5)} \ge 0 \\ 3 \le x \le 7 \end{cases}$$

Javob: $(5; 7]) \cup \{3\}$

3. Tengsizliklar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 4) < 48 \\ (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 5) < 24 \end{cases}$$

Biz $x^2 + 3x + 2 = t$ almashtirishni birinchi tengsizlikka, $x^2 - 2x = z$ almashtirishni ikkinchi tengsizlikka qo‘llaymiz.

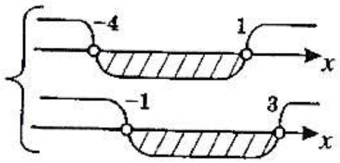
$$\begin{cases} t(t+2) < 48 \\ z(z+5) < 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 48 < 0 \\ z^2 + 5z - 24 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+8)(t-6) < 0 \\ (z+8)(z-3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 3x + 10)(x^2 + 3x - 4) < 0 \\ (x^2 - 2x + 8)(x^2 - 2x - 3) < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases}(x+4)(x-1)<0\\(x-3)(x+1)<0\end{cases}$$

Javob: (-1;1)

4. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+11}{x^2-x-2}+\dfrac{7}{x+1}\le 0\\[2mm]\dfrac{2x^2-14x+6}{x^2-4x+3}\ge\dfrac{3x-8}{x-3}\end{cases}$$

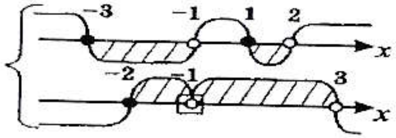
Yechish: $$\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+11+7(x-2)}{(x-2)(x+1)}\le 0\\[2mm]\dfrac{2x^2-14x+6-(3x-8)(x-1)}{(x-3)(x-1)}\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+1)}\le 0\\[2mm]\dfrac{2x-14x+6-3x^2+11x-8}{(x-3)(x+1)}\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+1)}\le 0\\[2mm]\dfrac{-x^2-3x-2}{(x-3)(x+1)}\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+3(x-1)}{(x-2)(x+1)}\le 0\\[2mm]\dfrac{-(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+1)}\ge 0\end{cases}$$





Javob: $(-2;-1)\cup[1;2)$

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqli tengsizliklarni hal qilishga misol keltiring.
2. Kvadrat tengsizliklarni yechish usullarini sanab bering.
3. Tengsizliklarni intervallar usuli bilan yechish algoritmini keltiring.
4. Butun ratsional tengsizliklarni yechishda nimalarga e'tibor berish kerak?
5. Ratsional tengsizliklar sistemaini intervallar usuli bilan yechishga misol keltiring.
6. Ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarni o'rganishda yangi pedagogik texnologiyalarni qanday qo'llash mumkin?

## 4.4-§. Ba'zi tengsizliklarni yechish usullari

REJA:

1. Modulli ratsional tengsizliklarni yechish usullari.
2. Irrasional tengsizliklarni hal qilish yo'llari.
3. Ko'rsatkichli tengsizliklarni yechish usullari.
4. Asosida ham, daraja ko'satkichida ham o'zgaruvchi bo'lgan tengsizliklar.
5. Logarifmik tengsizliklarni hal qilish yo'llari.
6. Modul belgisi bilan berilgan tengsizliklarni yechish.

Quvidagi modul qatnashgan tengsizliklarni ko'rib chiqaylik.

1-misol. Tengsizlikni yeching:

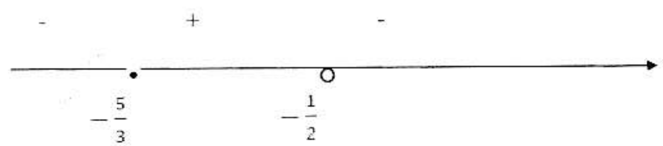
$$\left|\frac{x-3}{2x+1}\right| \le 2$$

Yechich: $\left|\frac{x-3}{2x+1}\right| \le 2$ ni tengsizliklar sistemalari bilan almashtiramiz:

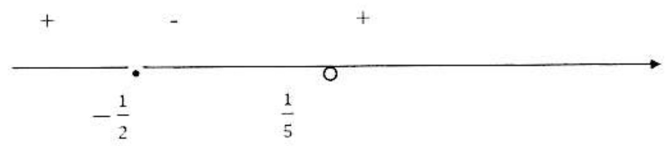
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2x+1} \le 2 \\ \frac{x-3}{2x+1} \ge -2 \end{cases}$$

uni soddalashtiramiz: $\begin{cases} \frac{x-3-4x-2}{2x+1} \le 0 \\ \frac{x-3+4x+2}{2x+1} \ge 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} \frac{-3x-5}{2x+1} \le 0 \\ \frac{5x-1}{2x+1} \ge 0 \end{cases}$ i

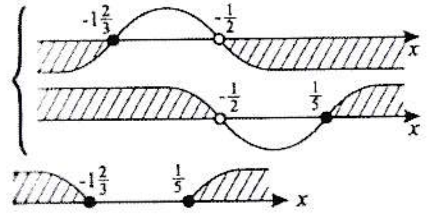
Sistemadagi 1-tengsizlikdan $\begin{cases} x \ne -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$




2-tengsizlikdan $\begin{cases} x \ne -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$






Javob: $\left[-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$

2-misol. Modul qatnashgan tengsizlikni yeching:

$$\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \ge 2x$$

Yechish: $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \ge 2x$ tengsizlikni unga ekvivalent bo'lgan tengsizliklar sistemalari bilan almashtiramiz:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \frac{x^2-x-12}{x-3} \ge 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x^2+x-12}{x-3} \ge 2x \end{cases}$$

Birinchi sistemani soddalashtiramiz va $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$ ni sistemaga qo'yib, $\frac{(x+4)(x-3)}{x-3} \ge 2x$ tengsizlikni $(x-3)$ ga qisqartiramiz:

$$\begin{matrix} x \ge 0 \\ \frac{x^2-x-12}{x-3} \ge 2x' \end{matrix}$$

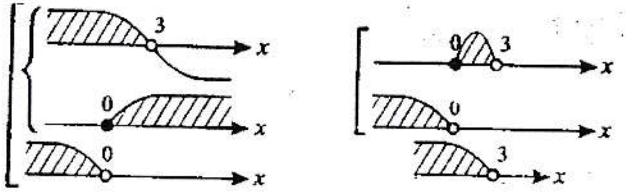
$$\begin{cases} x < 0 \\ x + 4 \ge 2x \\ x \ne 3 \end{cases}$$

va $\begin{cases} x \ge 0 \\ \frac{-x^2+5x-12}{x-3} \ge 2x \end{cases}$, $\begin{cases} x < 0 \\ x \le 4 \end{cases}$

lar kelib chiqadi. Oxirgilardan

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{-1}{x-3} \geq 0\,,\, x < 0 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz.



Javob: $(-\infty;3)$

### 2. Irrasional tengsizliklarni hal qilish

Ma'lumki noma'lumlari radikallar belgisi ostida bo'lgan tengsizliklarga irratsional tengsizlik deyiladi. Ularni yechish o'quvchilardan ma'lum bilim, ko'nikma va malakalarni talab qiladi. Avvalo o'quvchilarga irratsional tengsizliklarni yechishda zarur bo'ladigan quyidagi formulalarni berish, ularning mohiyatini tushuntirish kerak bo'ladi.

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}\,, n \in N \quad \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

2. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}\,, n \in N \quad \leftrightarrow f(x) < g(x)$

3. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)\,, n \in N \quad \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$



4. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x),\ n \in N \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x)$

5. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x),\ n \in N \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x). \end{cases} \end{array}\right.$

6. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x),\ n \in N \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x).$

Misollar.

1. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{6-x} < 3x-4$

Yechish:

$$\sqrt{6-x} < 3x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 3x-4 > 0 \\ 6-x < (3x-4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6 \leq 0 \\ 3x-4 > 0 \\ 9x^2-23x+10 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x > \frac{4}{3} \\ 9(x-\frac{5}{9})(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x > 4/3 \\ x < \frac{5}{9}, x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Javob: $(2;6]$

2. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{x^2-3x-10} > 8-x$

Yechish:

$$\sqrt{x^2-3x-10} > 8-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8-x < 0 \\ x^2-3x-10 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x^2-3x-10 > (8-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-8 > 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-8 \leq 0 \\ x^2-3x-10 > 64-16x+x^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 8 \\ x \leq -2, x \geq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 8, \\ x > 74/13 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 8 \\ \frac{74}{13} < x \leq 8 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{13} < x < +\infty.$$

Javob: $x = (\frac{74}{13};+\infty)$

3. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \le 0$$

Yechish: Berilgan tengsizlikning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases} 6-x-x^2 \ge 0 \\ x^2-1 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ x^2-1 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ x \ne -1 \\ x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$x \in [-3,-1) \cup (-1,1) \cup (1,2]$.

$$\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \le 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x=-3, x=2 \\ x \ne -1, x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x-x^2 > 0 \\ x^2-1 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 < x < 2 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in \{-3\} \cup (-1;1) \cup \{2\}$

Izoh. Odatda, o'quvchilar ushbu tengsizlikni (yoki shunga o'xshash tengsizliklarni) hal qilishda $x$=-3 va $x$=2 ildizlarni javob sifatida olmaydilar, tengsizlik yechimidan tashqarida qoldiradilar.

4. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{x^2-6x} < 8+2x$

Yechish: Aniqlanish sohasi:

$$\sqrt{x^2-6x} < 8+2x \Leftrightarrow \begin{cases} 8+2x > 0 \\ x^2-6x < (8+2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x^2-6x < 64+32x+4x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ 3x^2+38x+64 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ 3(x+2)(x+\frac{32}{3}) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \in (-\infty; \frac{-32}{3}) \cup (-2,+\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-2;+\infty)$$

Endi aniqlanish sohasini hisobga olgan holda

$$\Rightarrow x \in (-2;0] \cup [6;+\infty)$$

ni hosil qilamiz.



Javob: $(-2;0] \cup [6;+\infty)$.

Ba'zi hollarda irratsional tengsizlikdagi irratsional funksiyani o'zgaruvchini almashtirish orqali ratsional tengsizlikka keltirish mumkin. Quyidagi misolni ko'raylik.

5. Tengsizlikni yeching: $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \ge 0$

Yechish: $D(f): x \ge 0,\ y = \sqrt[4]{x},\ y \ge 0$

$$\begin{cases} -9y+y^2+18 \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-9y+18 \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le 3, y \ge 6 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ge 6 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{l} 0 \le \sqrt[4]{x} \le 3 \\ \sqrt[4]{x} \ge 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} 0 \le x \le 81 \\ x \ge 1296 \end{array} \right. \Rightarrow 0 \le x \le 81,\ x \ge 1296$$

Javob: $[0;81] \cup [1296;+\infty)$.

### 3. Ko'rsatkichli tengsizliklarni yechish usullari

Ko'rsatkichli tengsizliklarni yechish usullarini tushuntirishda ham kerakli quyidagi formulalarni keltiramiz

$$1.\ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

$$2.\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

3. Quyidagi turdagi ko'rsatkichli tengsizlik

$$\alpha_0 \cdot a^{mx+k_0} + \alpha_1 \cdot a^{mx+k_1} .... + \alpha_n \cdot a^{mx+k_n} >< \beta$$

qavslar tashqarisida umumiy ko'paytuvchini ( $a^{mx}$ ) chiqarish yo'li bilan hal qilinadi.

4. $f(a^x)><0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^x>0, \\ f(t)><0. \end{cases}$

5. $a^{f(x)}>b,\ a>1, b>0 \Leftrightarrow f(x)>\log_a b$

$$a^{f(x)}>b,\ 0<a<1,\quad b>0 \Leftrightarrow f(x)<\log_a b$$

6. Quyidagi turdagi ko'rsatkichli tengsizlik:

$$\alpha \cdot a^{f(x)}+\beta \cdot b^{f(x)}+\gamma \cdot c^{f(x)}><0,\ \alpha \neq \beta, \gamma \in R,\ b^2=ac$$

$a^{f(x)}$ yoki $c^{f(x)}$ ifodaga bo'lish orqali yechiladi.

7. $\alpha \cdot a^{f(x)}+\beta \cdot b^{f(x)}+\gamma><0,\ \alpha \neq 0,\ \beta,\gamma \in R, ab=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{f(x)}>0, \\ a\cdot t^2+\gamma t+\beta><0. \end{cases}$$

Yuqoridagi formulalarni tatbiq etishga doir misollar keltiramiz.

1. $\quad 2^{-x+0,5}-7\cdot 2^{-x}-4<0$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $2^{-x}=t$ deb belgilash kiritamiz.

$$\begin{cases} t>0 \\ 2t^2-7t-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ 2(t+\frac{1}{2})(t-4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<4 \Rightarrow$$

$$0<2^{-x}<4 \Rightarrow 2^{-x}<2^2 \Rightarrow -x<2 \Rightarrow x>-2$$

Javob: $X=(-2;+\infty)$

Ushbu misolni umumlashtirish sifatida quyidagi tengsizlikni keltiramiz:

$$Aa^{2x}+B\cdot a^x+c\leq 0,\ \text{bu yerda } A\neq 0, a>0, a\neq 1.$$

tengsizlikni hal qilish uchun $a^x=t$ almashtirish bajarib, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} t>0 \\ at^2+bt+c\leq 0 \end{cases}$$



$at^2+bt+c$ kvadrat uchhadning $D=b^2-4ac$ diskriminanti ishora-siga qarab quyidagi holatlar yuzaga kelishi mumkin:

1. Agar D<0 va $a$<0 bo'lsa, tengsizlik har qanday $t$ uchun to'g'ri bo'ladi. Shuning uchun, tengsizlik yechimi : $(-\infty;+\infty)$

2. Agar $D$<0 va $a$> 0 bo'lsa □$\Rightarrow X=\varnothing$.

3. Agar $D\geq 0$ va kvadratik uchhadning ildizlari $t_1\leq t_2$ bo'lsa, u holda

a) Agar $a$<0 va $t_2\leq 0$ bo'lsa, u holda $\Rightarrow X=(-\infty;+\infty)$

b) Agar $a$ <0, $t_1\leq 0$. va $t_2\geq 0$ bo'lsa, u holda $\Rightarrow a^x\geq t_2$

c) $a<0$ va $t_1\leq 0$ bo'lsa $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^x\leq t_1 \\ a^x\geq t_2 \end{array}\right.$

d) $a>0$ va $t_2\leq 0$ bo'lsa , $\Rightarrow X=\varnothing$

g) $a>0$ va $t_1\leq 0, t_2>0$ uchun $\Rightarrow a^x\leq t_2$

e) $a>0$ va $t_1>0$ uchun$\Rightarrow t_1\leq a^x\leq t_2 \Rightarrow \begin{cases} a^x\geq t_1 \\ a^x\leq t_2 \end{cases}$.

$\alpha\cdot a^{f(x)}+\beta\cdot b^{f(x)}+\gamma\cdot c^{f(x)}\geq 0$ shaklida tengsizliklar, bu yerda – $\alpha\neq 0,\beta,\gamma$ lar haqiqiy sonlar, – $f(x)$ har qanday funksiya va $a$, $b$, $c$ asoslar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$b^2=ac$, ya'ni asoslar geometrik progressiyaning uchta hadi bo'lsin.

Bu holni quyidagi misolda ko'ramiz.

Misol. Tengsizlikni yeching:

$$3\cdot 7^{2x}+37\cdot 140^x\leq 26\cdot 20^{2x}$$

Yechish: $\quad 3\cdot 49^x+37\cdot 140^x-26\cdot 400^x\leq 0$

Bu yerda $a=49, b=140, c=400 \Rightarrow 140^2=49\cdot 400, 19600=19600$.

Ya'ni daraja asoslari geometrik progressiyaning nechta hadi ekan.

$$b_1 = 49, b_2 = 140, b_3 = 400 \Rightarrow q = \frac{140}{49} = \frac{20}{7}.$$

Ya'ni hadlari $b^2 = ac$ shartni qanoatlantiradi. Bu sonlar geometrik progressiyani hosil qiladi, degan ma'noni anglatadi.

Oxirgi tengsizlikning ikkala tomonini $400^x$ ga bo'lamiz:

$$3\cdot\left(\frac{7}{200}\right)^{2x} + 37\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^x - 26 \le 0.$$

$\left(\frac{7}{20}\right)^x = d$ belgilash kiritsak:

$$3d^2 + 37d - 26 \le 0,\ D = 37^2 + 4\cdot 3\cdot 26 = 1369 + 312 = 1681$$

$$0 < d \le \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{7}{20}\right)^x \le \frac{2}{3} \Rightarrow x \ge \log_{\frac{7}{20}}\frac{2}{3}$$

Javob: $X = [\log_{\frac{7}{20}}\frac{2}{3}, +\infty)$

$$\alpha\cdot a^{f(x)} + \beta\cdot b^{f(x)} + \gamma \ge 0$$

shakldagi tengsizliklar, bu yerda – $\alpha \ne 0, \beta, \gamma$ har qanday haqiqiy sonlar, $a$ va b sonlar musbat o'zaro teskari sonlar, ya'ni $a\cdot b = 1$. Bu tengsizlikni yechish uchun $a^{f(x)} = t$ almashtirish bajariladi. Masalan,

$$(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x > 8$$

Yechish:

$$\sqrt{4+\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{4-\sqrt{15}}} = \frac{\sqrt{16-15}}{\sqrt{4-\sqrt{15}}} = \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{15}}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}.$$



$$(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = a,\ x > 0 \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{a} > 8 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 8a + 1 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a - 4 - \sqrt{15})(a - 4 + \sqrt{15}) > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 4 + \sqrt{15} \\ 0 < a < 4 - \sqrt{15} \end{cases}$$

Keyin

$$\begin{cases} (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x > 4 + \sqrt{15} \\ 0 < (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x < 4 - \sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}} > 4 + \sqrt{15} \\ (4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}} < (4+\sqrt{15})^{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} > 1 \\ \frac{x}{2} < -1 \end{cases}. \quad \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < +\infty \\ 1 - \infty < x < -2. \end{cases}$$

Javob: $X = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

**4. Asosida ham, daraja ko'satkichida ham o'zgaruvchi bo'lgan tengsizliklar**

1) $[f(x)]^{\varphi(x)} > 1 \Rightarrow [f(x)]^{\varphi(x)} > [f(x)]^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

2) $[f(x)]^{\varphi(x)} < 1 \Rightarrow [f(x)]^{\varphi(x)} < [f(x)]^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3) $[f(x)]^{\varphi(x)} < a$

shakldagi tengsizlikning aniqlanish sohasi topilgandan keyin ikkala tomonidan logarifm olish usuli bilan hal qilinadi. Agar logarifmning asosi $\alpha > 1$ bo'lsa, u holda tengsizlikning ma'nosi saqlanib qoladi, agar logarifmning asosi $0 < \alpha < 1$ bo'lsa, tengsizlik belgisi ma'nosi teskarisiga o'zgaradi. Masalan, Misol. Tengsizlikni yeching: $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1$

Yechish:

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1 \Rightarrow (3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < (3-x)^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 3-x < 1 \\ \dfrac{3x-5}{3-x} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3-x > 1 \\ \dfrac{3x-5}{3-x} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < -x < -2 \\ (x-\frac{5}{3})(x-3) < 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} -x > -2 \\ (x-\frac{5}{3})(x-3) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 < x < 3 \\ \frac{5}{3} < x < 3 \end{cases} \\ x < 2 \\ \begin{cases} x > 3 \\ x < \frac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ x < \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Javob: $X = (-\infty; \frac{5}{3}) \cup (2;3)$

### 5. Logarifmik tengsizliklarni hal qilish

Logarifmik tengsizliklarni hal qilishda quyidagi formulalardan foydalaniladi:

1. $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$



2. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

3. $\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

4. $\log_a f(x) < k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ 0 < f(x) < a^k, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > a^k. \end{cases} \end{array}\right.$

5. $f(\log_a x) >< 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a x, \\ f(t) >< 0. \end{cases}$

6. $\log_{f(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > 1. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

7. $\log_{f(x)} g(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < 1. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Endi yuqoridagi formulalarni misollarga tatbiqlarini ko'rib chiqamiz:

Misol. Tengsizlikni yeching:

$$\log_5 \log_4 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} (2x-1) > 0$$

Yechish:

$$\log_5 \log_4 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} (2x-1) > 0 \Rightarrow \log_4 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} (2x-1) > 5^0$$

$$\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (2x-1) > 4^1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (2x-1) > 3^4 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 < (\frac{1}{2})^{81} \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x < 1 + 2^{-81} \\ 2x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} + 2^{82} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + 2^{-82}$$

Javob: $X = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + 2^{-82})$.

Logarifmik funksiyalar xossalarini qo'llash va potensirlash usulidan foydalanishni bevosita misollarda ko'rsatamiz.

№1. Tengsizlikni yeching: $\lg 5 - \lg(x-3) \le 1 - \frac{1}{2}\lg(3x+1)$

Yechish:

$$\lg 5 - \lg(x-3) \le 1 - \frac{1}{2}\lg(3x+1) \Rightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ 3x+1>0 \\ 5/(x+3) \le 10/\sqrt{3x+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ 3x+1>0 \\ 5\sqrt{3x+1} \le 10(x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ 3x+1>0 \\ \sqrt{3x+1} \le 2(x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ 3x+1>0 \\ 3x+1 \le 4(x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ 3x+1>0 \\ 4x^2 - 27x + 35 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -\frac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \Rightarrow x \ge 5 \\ x \le \frac{7}{4} \end{array}\right. \end{cases}$$

Javob: $X = [5; +\infty)$

№2. Tengsizlikni yeching: $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \le 12$

Yechish:

$$6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \le 12 \Rightarrow (6^{\log_6 x})^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} \le 12 \Rightarrow$$

$$x^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} \le 12 \Rightarrow 2x^{\log_6 x} \le 12 \Rightarrow x^{\log_6 x} \le 6 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0, x \ne 1 \\ \log_6 x \cdot \log_6 x \le \log_6 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x \ne 1 \\ \log_6^2 x - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x \ne 1 \\ (\log_6 x + 1)(\log_6 x - 1) \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>0, x \ne 1 \\ -1 \le \log_6 x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x \ne 1 \\ \frac{1}{6} \le x \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} \le x < 1, \\ 1 < x \le 6 \end{cases}$$

Javob: $X = [\frac{1}{6}; 1) \cup (1; 6]$

№ 3. Tengsizlikni yeching: $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

Yechish:

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x>0, x \ne 1, x \ne \frac{1}{2} \\ \frac{\log_2 2}{\log_2 x} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 2x} \cdot \log_2 4x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0, x\neq 1, x\neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\log_2 4+\log_2 x}{\log_2 x(\log_2 2+\log_2 x)}>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x\neq 1, x\neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2+\log_2 x}{\log_2 x(1+\log_2 x)}>1, \quad \log_2 x=a \end{cases}$$

$$\frac{2+a}{a(1+a)}>1\Rightarrow \frac{2+a}{a(1+a)}-1>0\Rightarrow \frac{2-a^2}{a(1+a)}>0\Rightarrow \begin{cases} a\neq\{-1;0\} \\ a(a+1)(a^2-2)<0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a\neq\{-1,0\} \\ a(a+1)(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0 \end{cases}\Rightarrow(-\sqrt{2}<a<-1)\cup(0<a<\sqrt{2})$$

Shunday qilib,

$$\begin{cases} x\neq\{\dfrac{1}{2};1\} \\ -\sqrt{2}<\log_2 x<-1\Rightarrow \\ 0<\log_2 x<\sqrt{2} \end{cases} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}<x<\frac{1}{2} \\ &1<x<2^{\sqrt{2}} \end{aligned}\right.$$

Javob: $x=\left(\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;2^{\sqrt{2}}\right)\right)$.

Endi quyidagi formulalar va uarning tatbiqlarini ko'rib chiqamiz

1. $\log_{f(x)}\varphi(x)>0\Rightarrow\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ 0<\varphi(x)<1 \end{cases} \\ &\begin{cases} f(x)>1 \\ \varphi(x)>1 \end{cases} \end{aligned}\right.$

2. $\log_{f(x)}\varphi(x)<0\Rightarrow\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ \varphi(x)>1 \end{cases} \\ &\begin{cases} f(x)>1 \\ 0<\varphi(x)<1 \end{cases} \end{aligned}\right.$



3. $\log_{f(x)}\varphi(x)>\log_{f(x)}g(x)\Rightarrow\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ \varphi(x)>0 \\ \varphi(x)<g(x) \end{cases} \\ &\begin{cases} f(x)>1 \\ g(x)>0 \\ \varphi(x)>g(x) \end{cases} \end{aligned}\right.$

4. $\log_{f(x)}\varphi(x)<\log_{f(x)}g(x)\Rightarrow\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ g(x)>0 \\ \varphi(x)>g(x) \end{cases} \\ &\begin{cases} f(x)>1 \\ \varphi(x)>0 \\ \varphi(x)<g(x) \end{cases} \end{aligned}\right.$

Bu formulalarni misollarga qo'llaymiz.

№ 4. Tenglamani yeching: $\log_x\dfrac{3}{8-2x}\geq -2$.

Yechish: $\log_x\dfrac{3}{8-2x}\geq\log_x x^{-2}\Rightarrow\log_x\dfrac{3}{8-2x}\geq\log_x\dfrac{1}{x^2}$

$$\log_x\frac{3}{8-2x}\geq -2\Rightarrow\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<\dfrac{3}{8-2x}\leq\dfrac{1}{x^2}, \end{cases} \\ &\begin{cases} x>1, \\ \dfrac{3}{8-2x}\geq\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<\dfrac{3}{8-2x}\leq\dfrac{1}{x^2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0<x<1 \\ \dfrac{3}{8-2x}>0 \\ \dfrac{3x^2+2x-8}{2x-8}\geq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0<x<1 \\ x-4<0 \\ 3(x-\frac{4}{3})(x+2)(x-4)\geq 0 \end{cases}\Rightarrow(0<x<1)$$

$$\begin{cases} x>1 \\ \dfrac{3}{8-2x} \ge \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{3x^2+2x-8}{2x-8} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3(x-\frac{4}{3})(x+2)(x-4) \le 0 \Rightarrow \\ x \ne 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \le x < 4$$

Javob: $X = (0;1) \cup [\frac{4}{3};4)$

**6. Modul belgisi bilan berilgan tengsizliklarni yechish**

Modul belgisi bilan berilgan tengsizliklarni yechish uchun quyidagi formulalarga asoslanamiz:

1. $f(|x|) < g(x) < 0 \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ x \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(-x) < g(x) \\ x < 0 \end{cases}$$

Modul orqali berilgan tengsizliklarni yechishning 2-asosiy formulasi:

2. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

3. $|f(x)| < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a \\ -f(x) < a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a, \end{cases}$

4. $|f(x)| > g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$

1-misol. Tengsizlikni yeching: $|8x-5| < 11$

Yechish: $-11<8x-5<11$, ya'ni $-6<8x<16$ va $0,75<x<2$

2-misol. Tengsizlikni yeching: $|5-2x| < 3$

Yechish: $3>0$ bo'lganligi sababli, biz tengsizlikdan $-3<5-2x<3$ tengsizlikni olamiz. Bundan $1<x<4$

Javob: $(1;4)$

3-misol. Tengsizlikni yeching: $|5-2x| > 3$

Yechish: 2-misolga qarama-qarshi bo'lgan tengsizlik mavjud bo'lgani uchun, ushbu ikki tengsizlikning yechimlari bir-birini to'ldiradi. Ya'ni



$$x \le 1$$

$$x \ge 4$$

Javob: $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

4-misol. Tengsizlikni yeching: $x^2 + 5|x| - 24 > 0$.

Yechish: Tengsizlikni modulning xossalari bo'yicha yechamiz:

$$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 5x - 24 > 0, \\ x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x - 24 > 0, \\ x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Birinchi sistemaning yechimi $x>3$ va ikkinchi sistemaning yechimi $x<-3$ yoki


Javob: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

5-misol. Tengsizlikni yeching: $|2x+1| > 5$

Yechish:

$$|2x+1| > 5 = \left[ \begin{array}{l} 2x+1 > 5, \\ 2x+1 < -5, \end{array} \right. = \left[ \begin{array}{l} 2x > 4, \\ 2x < -6, \end{array} \right. = \left[ \begin{array}{l} x > 2, \\ x < -3. \end{array} \right.$$

Javob: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

6-misol. Tengsizlikni yeching: $|5x-4| > -6$.

Yechish: Har qanday haqiqiy son tengsizlikning yechimi bo'ladi:

$$-\infty < x < +\infty.$$

7-misol. Tengsizlikni yeching: $|x^2 - 5x| < 6$.

Yechish:

$$-6 < x^2 - 5x < 6 = \begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)(x-6) < 0, \\ (x-2)(x-3) > 0. \end{cases}$$

Javob: $x \in (-1; 2) \cup (3; 6)$ [3].

8-misol. Tengsizlikni yeching: $|x^2+4x+3|>x+3$

$$\left[\begin{array}{l}x^2+4x+3>x+3,\\ x^2+4x+3<-(x+3)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x+3>x+3,\\ x^2+4x+3<-x-3\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2+3x>0,\\ x^2+5x+6<0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x(x+3)>0,\\ (x+3)(x+2)<0\end{array}\right.$$

Javob: $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(0;+\infty)$.

9-misol. Tengsizlikni yeching: $|x^2-2x-8|>2x$.

Yechish:

$$|x^2-2x-8|>2x\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-8>2x,\\ x^2-2x-8<-2x\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x-8>0,\\ x^2-8<0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left[x-(2-2\sqrt{3})\right]\cdot\left[x-(2+2\sqrt{3})\right]>0,\\ (x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})<0.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x<2-2\sqrt{3}\cup x>2+2\sqrt{3},\\ -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ushbu $-2\sqrt{2}<2-2\sqrt{3}<2\sqrt{2}<2+2\sqrt{3}$ tengsizliklar to'g'ri ekanligini ko'rish qiyin emas. Shunday qilib, tengsizliklar soni ko'paymoqda.Ularni birlashtirish orqali yozilishi mumkin.

Javob: $(-\infty;2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{3};+\infty)$.

10-misol. Tengsizlikni yeching: $\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right|\geq 2$.

Yechish:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{2x-3}{x^2-1}\geq 2\\ \frac{2x-3}{x^2-1}\leq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2x^2-2x+1}{x^2-1}\leq 0,\\ \frac{2x^2-2x-5}{x^2-1}\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1,\\ \frac{1-\sqrt{11}}{2}\leq x\leq -1,\\ 1<x\leq\frac{1+\sqrt{11}}{2}.\end{array}\right.$$

Javob: $\left[\frac{1-\sqrt{11}}{2};-1)\cup(-1;1)\cup(1;\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right]$.

12-misol. Tengsizlikni yeching: $|x^2-3x+2|<2x-x^2$

Yechish:



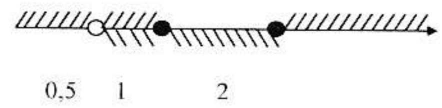
I-usul .Ushbu tengsizlik quyidagi tengsizliklar sistemasiga keltiriladi.

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geq 0\\ x^2-3x+2<2x-x^2\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2-3x+2<0\\ -(x^2-3x+2)<2x-x^2\end{cases}$$

Agar birinchi sistemasini yechsak,

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)\geq 0\\ 2(x-2)(x-0,5)<0\end{cases}\quad\text{undan}\quad 0,5<x\leq 1$$

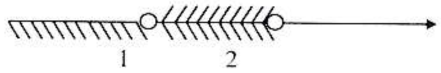
ni hosil qilamiz.




Ikkinchi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)<0\\ x<2\end{cases}\quad\text{oxirgidan}\quad 1<x<2$$

kelib chiqadi.




Tengsizliklar sistemalarining yechimlarini birlashtirish orqali

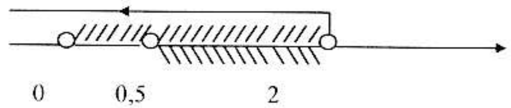
$$0,5<x<2$$

oraliqni topamiz.

II usul. Berilgan tengsizlik

$$\begin{cases}2x-x^2>0\\ x^2-3x+2<2x-x^2\\ x^2-3x+2>-(2x-x^2)\end{cases}\quad\text{yoki}\quad\begin{cases}x(x-2)<0\\ 2(x-2)(x-0,5)<0\\ x<2\end{cases}$$

tengsizliklar sistemalarini hosil qilamiz. So'ngra $0,5<x<2$ ni topamiz.




III usul. Berilgan tengsizlik

$$\begin{cases}2x-x^2>0\\ (x^2-3x+2)^2<(2x-x^2)^2\end{cases}$$

tengsizliklar sistemasiga keltiriladi. Ushbu sistemani soddalashtirib

$$\begin{cases} x(x-2) < 0 \\ (x^2-3x+2)^2-(2x-x^2)^2 < 0 \end{cases}$$

ga kelamiz. Uni yechish uchun

$$\begin{cases} x(x-2) < 0 \\ \left((x^2-3x+2)-(2x-x^2)\right)\left((x^2-3x+2)+(2x-x^2)\right) < 0 \end{cases}$$

dan $0{,}5 < x < 2$ kelib chiqadi.

13-misol. Tengsizlikni yeching: $|x^2-2x-3| < 3x-3$

Yechish:

$$|x^2-2x-3| < 3x-3 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 < 3x-3, \\ x^2-2x-3 > -(3x-3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-2x-3 < 3x-3, \\ x^2-2x-3 > 3-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x < 0, \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0, \\ (x+3)(x-2) > 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x < 5, \\ \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Javob: $(2;5)$.

14-misol. Interval (-3;5) yechimi bo'ladigan modul belgili tengsizlik tuzing.

Yechish: Albatta talaba bu muammoni hal qila olmasligi mumkin. O'ylab ko'radi va $|x-a| < b$ ni hal qilish algoritmini yozadi.

$$-b < x-a < b \Rightarrow -b+a < x < b+a$$

Shart bo'yicha $\qquad -3 < x < 5$

Demak, qidirilayotgan tengsizlik $\begin{cases} -b+a=-3 \\ b+a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$ ya'ni

$|x-1| < 4$ shaklda bo'ladi.

***Javob:*** $|x-1| < 4$



15-misol. Tengsizlikni yeching: $|x^2-x-1| < x-1$.

Yechish:

$$\begin{cases} x^2-x-1 < x-1 \\ x^2-x-1 > 1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x < 0, \\ x^2-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2) < 0, \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Javob: $x \in (\sqrt{2};2)$.

16-misol. Tengsizlikni yeching: $|x+8| < 3x-1$.

Yechish: $\begin{cases} x+8 < 3x-1, \\ x+8 > -3x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 9, \\ 4x > -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{2} \\ x > -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{9}{2}.$

Javob: $\left(\frac{9}{2};+\infty\right)$

17-misol. Tengsizlikni yeching: $x^2-|5x-3|-x < 2$

Yechish:

$$|5x-3| > x^2-x-2$$

ushbu tengsizlikni quyidagicha yozamiz:

$$\left[\begin{array}{l} 5x-3 > x^2-x-2 \\ 5x-3 < 2+x-x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+1 < 0 \\ x^2+4x-5 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} < x < 3+2\sqrt{2} \\ -5 < x < 1 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-5;3+2\sqrt{2})$$

Javob: $x \in (-5;3+2\sqrt{2})$.

18-misol. Tengsizlikni yeching:

$$|x^7+4x^5+x^2+2x-3| < x^7+4x^5-x^2-2x+3.$$

Yechish:

$$\begin{cases} x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3, \\ x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 > -(x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3), \end{cases}$$

yoki $\quad \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^5(x^2 + 4) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 < x < 1, \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 1.$

Javob: $0 < x < 1$

19-misol. Tengsizlikni yeching: $\big||x - 1| - 5\big| \leq 2$

Yechish:

$$\big||x - 1| - 5\big| \leq 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ \big||x - 1| - 5\big| \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0, \\ \big|-(x - 1) - 5\big| \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ |x - 6| \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ \big|-(x + 4)\big| \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. =$$

$$\Rightarrow \boxed{?} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ x - 6 \leq 2, \\ x - 6 \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ -(x + 4) \leq 2, \\ -(x + 4) \geq -2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 8, \\ x \geq 4. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x \geq -6, \\ x \leq -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 8, \\ -6 \leq x \leq -2 \end{cases} \quad \text{yoki}$$

$4 \leq x \leq 8, \quad x - 6 \leq x \leq -2 \Rightarrow x \in [-6; -2] \cup [4; 8].$

Javob: $x \in [-6; -2] \cup [4; 8]$.

20-misol. $\big|x - |2x - 3|\big| > 2$ tengsizlikni yeching.

Yechish:

$$\big|x - |2x - 3|\big| > 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - |2x - 3| > 2, \\ x - |2x - 3| < -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -|2x - 3| > 2 - x, \\ -|2x - 3| < -2 - x \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{?} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -(2x - 3) > 2 - x, \\ -(2x - 3) < -(2 - x) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -(2x - 3) < -2 - x, \\ -(2x - 3) > -(-2 - x) \end{array}\right. \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -2x + 3 > 2 - x, \\ -2x + 3 < -2 + x \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2x + 3 < -2 - x, \\ -2x + 3 > 2 + x \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{?} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -x > -1, \\ -3x < -5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -x < -5, \\ -3x > -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > \frac{5}{3}. \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < \frac{1}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Javob: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (5; +\infty)$.

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Modulli ratsional tengsizliklar yechish usullariga misol keltiring.
2. Irratsional tengsizliklarni hal qilishda nimalarga e'tibor berish kerak?
3. Ko'rsatkichli tengsizliklarni yechish usullari qachon qo'llaniladi?
4. Asosida ham daraja ko'satkichida ham o'zgaruvchi bo'lgan tengsizliklarni yechish algoritmini aytib bering.
5. Logarifmik tengsizliklarni hal qilish usullarini aytib bering.
6. Modul belgisi bilan berilgan tengsizliklarni yechishning o'ziga xos xususiyatlarini sanab bering.

## 4.5-§. O'rta maktabda tengsizlikni isbotlashning asosiy usullari

Reja

1. Tengsizlikni isbotlashga oid masalalar
2. Tengsizlikni isbotlashning sintetik usuli
3. Tengsizliklarni matematik induksiya usuli bilan isbotlash
4. Tengsizliklarning geometrik isbotlash usullari

### 1. Tengsizlikni isbotlashga oid masalalar

$a>b$ tengsizligini isbotlash o'rniga $a-b>0$ tengsizlikni berilgan tengsizlikning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari uchun isbotlash kifoya.

1-misol. $a \geq 0, b \geq 0$ o'rinli bo'lganda

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

tengsizlik o'rini ekanligini ko'rsatish kerak.

Isbot: Quyidagi

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$$

farqni ko'rib chiqamiz. Uni quyidagicha o'zgartirish mumkin:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$

va $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ bo'ladi. Shuning uchun,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$$

bo'ladi. Bu esa $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ekanligini bildiradi.

2-misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (a > 0, b > 0)$$

Isbot. Quyidagi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$$

farqni ko'rib chiqamiz. Shubhasiz, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

Keyin $(a - b)^2 > 0$ va $ab>0$ ekanligidan,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

bo'ladi. Tengsizlik isbotlandi.



### 2. Tengsizlikni isbotlashning sintetik usuli

Tengsizlikni isbotlash uchun sintetik usul ham keng qo'llaniladi. Ushbu usulning asosiy g'oyasi berilgan tengsizlikni to'g'riligi allaqachon isbotlangan yoki shubhali bo'lmagan tengsizlikni (berilgan tengsizlikning to'g'riligi isbotlangan) o'zgartirish orqali olishdir. Ba'zi misollarni ko'rib chiqaylik.

1-masala. To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kubi katetlari kublari yig'indisidan katta.

Isbot. To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasini $c$ bilan, katetlarini $a$, $b$ kabi belgilaymiz.Ma'lumki,

$$c > a, \ c > b$$

tengsizliklar o'rinli. Bu tengsizliklarni avval $a^2$ va so'ng $b^2$ ga ko'paytirib, so'ng bu tengsizliklarni qo'shamiz:

$$c \times (a^2 + b^2) > a^3 + b^3$$

Pifagor teoremasiga ko'ra, $c^2 = a^2 + b^2$ bo'lganligi sababli, oxirgi tengsizlikni quyidagicha yozilishi mumkin:

$$c^3 > a^3 + b^3.$$

Tengsizlik isbotlandi.

2-misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \qquad (a \geq 0, \ b \geq 0, \ c \geq 0)$$

Isbot. $a$ va $b$, $b$ va $c$, $a$ va $c$ sonlarining o'rta arifmetigi ularning o'rta geometrigidan kichik emasligidan foydalanib:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \ b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}$$

ni hosil qilamiz. Bu tengsizliklarni qo'shsak,

$$a + b + b + c + a + c \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}$$

Bundan

$$2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})$$

yoki

$$(a+b+c) \geq (\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})$$

kelib chiqadi.

**3. Tengsizliklarni matematik induksiya usuli bilan isbotlash**

Matematik masalalarni yechish va teoremalarni, turli tasdiqlarni isbotlashning yaxshi samara beradigan usullaridan biri matematik induksiya usulidir. Bu usul ayniyatlarni isbotlashda ham, natural sonlarning bo'linish alomatlarini isbotlashda ham, tengsizliklarni isbotlashda ham, rekkurent ko'rinishda berilgan ketma-ketlikning $n$-hadi uchun formulani isbotlashda ham keng qo'llaniladi.

Natural sonlarning bo'linish alomatlarini isbotlashga doir ba'zi misollarni ko'rib chiqaylik.

1-masala. Ixtiyoriy $n$ da $12^{2n-1}+11^{n+1}$ ning 133 ga qolqiqsiz bo'linishini isbotlang.

2-masala. Ixtiyoriy $n$ da $(a+1)^{2n-1}+a^{n+1}$ ning $a^2+a+1$ ga qolqiqsiz bo'linishini isbotlang.

3-masala. Ixtiyoriy $n$ da $11^n+4^{2n}+50n$ ning ....77 raqamlari bilan tugashini isbotlang.

4-masala. Ixtiyoriy $n \geq 0$ da $2^{3^n}+1$ ning $3^{n+1}$ soniga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

5-masala. Ixtiyoriy $n \geq 0$ da $x_n = 54\underbrace{22\ldots2}_{n\ ta}9$ ning 61 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

Bu masalalarning hammasini matematik induksiya usulidan foydalanib isbotlash mumkin. 1-masala 2-masalaning $a=11$ bo'lgan xususiy holidir. $a$ ning boshqa qiymatlarida ham 2-masalaning boshqa qiziqarli xususiy hollarini masala sifatida o'quvchilarga topshiriq sifatida berish mumkin. Masalan, 2-masalaning $a=8$ bo'lgan xususiy holini quyidagi masala sifatida berish mumkin:

6-masala. $9^{2n-1}+8^{n+1}$ ning 73 ga qolqiqsiz bo'linishini isbotlang.



Shuningdek, 3-masaladan quyidagi masalani hosil qilish mumkin.

7-masala. Ixtiyoriy $n$ da $11^n+4^{2n}+50n$-77 ning 100 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

Endi 4-masalani yechish usulini ko'rsataylik. Buning uchun matematik induksiya usulining mohiyati bian o'quvchilarni tanishtirish kerak.

Ma'lumki matematik induksiya bilan biror tasdiqning to'g'riligini tekshirish uchun quyidagi bosqichlarda ish olib boriladi:

1. Tasdiqning $n=0$ yoki $n=1$ da o'rinli ekanliligi ko'rsatiladi;
2. Tasdiqning $n=2$ , $n=3$ va hokazo qiymatlarida o'rinli ekanligi ko'rsatiladi;
3. Tasdiqni $n=k$ da o'rinli deb faraz qilib, uning $n=k+1$ da o'rinli ekanligi isbotlanadi.

Agar yuqoridagi shartlar o'rinli bo'lsa, u holda tasdiq ixtiyoriy $n$ da o'rinlidir.

4-masalani yuqoridagi algoritm yordamida tekshiraylik:

1. Tasdiqning $n=0$ yoki $n=1$ da o'rinli ekanliligi ko'rsatamiz:

$2^{3^0}+1=3$ soni $3^{0+1}=3$ ga qoldiqsiz bo'linadi;

$2^{3^1}+1=9$ soni $3^{1+1}=9$ ga qoldiqsiz bo'linadi;

2. Tasdiqning $n=2$, $n=3$ qiymatlarida o'rinli ekanliligi ko'rsatamiz:

$2^{3^2}+1=513$ soni $3^{2+1}=27$ ga qoldiqsiz bo'linadi;

$2^{3^3}+1=134217729$ soni $3^{3+1}=81$ ga qoldiqsiz bo'linadi.

3. Tasdiqni $n=k$ o'rinli deb faraz qilamiz, ya'ni aytaylik

$2^{3^k}+1$ soni $3^{k+1}$ ga qoldiqsiz bo'linsin. Tasdiqning $n=k+1$ da o'rinli

ekanligini isbotlaylik:

$$2^{3^{k+1}}+1 = 2^{3^n \times 3}+1 = (2^{3^n})^3+1$$
$$= (2^{3^n}+1)((2^{3^n})^2-2^{3^n}+1).$$

Farazga ko'ra $2^{3^k}+1$ soni $3^{k+1}$ ga qoldiqsiz bo'linganligidan oxirgi ifoda ham $3^{k+1}$ ga qoldiqsiz bo'linadi. Demak, ixtiyoriy $n$ da o'rinlidir.

Endi 5-masala yechimini qaraylik.

1. Tasdiqning $n$=1 yoki $n$=2 da o'rinli ekanligini ko'rsatamiz:

$$x_1 = 54\underbrace{22\ldots2}_{1\text{ ta}}9 = 5429:61 = 89,$$

$$x_2 = 54\underbrace{22\ldots2}_{2\text{ ta}}9 = 54229:61 = 889,$$

ya'ni tasdiq o'rinli.

2. Tasdiqning $n$=3 , $n$=4 da o'rinli ekanliligi ko'rsatamiz:

$$x_3 = 54\underbrace{22\ldots2}_{3\text{ ta}}9 = 542229:61 = 8889,$$

$$x_4 = 54\underbrace{22\ldots2}_{4\text{ ta}}9 = 5422229:61 = 88889.$$

3. Tasdiqni $n$=$k$ da o'rinli deb faraz qilamiz, ya'ni aytaylik

$x_k = 54\underbrace{22\ldots2}_{k\text{ ta}}9$ soni 61 ga qoldiqsiz bo'linsin. Tasdiqning $n$=$k$+1 da o'rinli ekanligini isbotlaylik:

$$x_k = 54\underbrace{22\ldots2}_{k+1\text{ ta}}9 = 54\underbrace{22\ldots2}_{k\text{ ta}}29 = 54\underbrace{22\ldots2}_{k\text{ ta}}90 - 61$$

Kamayuvchi farazga ko'ra, ayiriluvchi esa bo'luvchiga tengligi tufayli ayirma ham 61 ga qoldiqsiz bo'linadi. Demak, tasdiq ixtiyoriy $n$ da o'rinli.

1-masala. $n \geq 3$ da $2^n > 2n+1$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot. $n$ =3 bo'lganda, berilgan tengsizlik to'g'ri, chunki 8>7. Faraz qilaylik, ushbu tengsizlik $n$=$k$ da to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$2^k > 2k+1$$

o'rinli bo'lsin. Bu tengsizlikni $n$=$k$+1 uchun to'g'ri bo'lishini ko'rsataylik , ya'ni

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1 = 2k+3$$

tengsizlik to'g'riligini ko'rsatamiz.Biz oxirgi tengsizlikning to'g'riligini isbotlashda



$$2^k > 2k+1$$

tengsizlikning to'g'riligidan foydalanamiz.

$$2^k \times 2 > 2 \times (2k+1) = 4k+2 = (2k+3)+(2k-1)$$

Keyin $k$ >3 dan (2$k$ -1)>0 to'g'riligi kelib chiqadi, ulardan

$$2^k > 2k+1$$

tengsizlikning o'rinli ekani kelib chiqadi.

3-masala. $x \geq -1$ uchun har qanday natural $n$ soni uchun

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

ning o'rinli ekanligini isbotlang.

Isbot. Darhaqiqat, $n$ = 1 uchun tengsizlik (1) o'rinli.

Endi (1) tengsizlik $n = k$ uchun to'g'ri deb faraz qilib, ya'ni

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

deb, uning $n = k$+1 da to'g'riligini isbotlashimiz kerak, ya'ni quyidagi tengsizlik

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

o'rinliligini ko'rsataylik. Buning uchun

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

Keyin $(1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx)$

yoki

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$$

bo'ladi. Oxirgi tengsizlikda $kx^2$>0 va

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

tengsizning o'rinlil ekani isbotlandi.

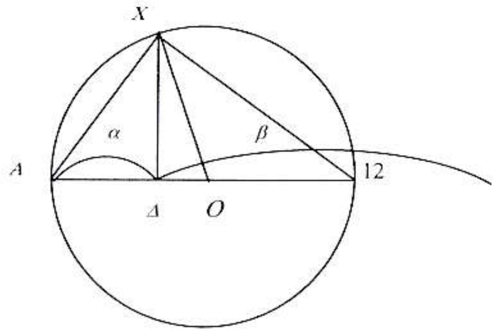
**4. Tengsizliklarni geometrik isbotlash usullari**

1-masala. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot. Bu tengsizlikni avval analitik usul bilan isbotlagan edik. Geometrik usulda isbotlash uchun diametri $a$ va $b$ kesmalarning yig'indisiga teng bo'lgan aylanani qaraymiz va diametrning $D$ nuqtasidan diametrga perpendikulyar chiqaramiz va perpendikulyar-ning aylana bilan kesishish nuqtasini $C$ orqali belgilaymiz, $ABC$ uchburchak hosil bo'ladi (18-rasm).

Keyin aylanada joylashgan nuqtadan diametrga tushirilgan perpendikulyar diametr kesmalarining o'rta proporsionali bo'lganligi uchun,

$CD = \sqrt{AD \times DB} = \sqrt{ab}$ bo'ladi va $CO = AO = OB = \frac{a+b}{2}$ .




18-rasm

$OCD$ uchburchakda gipotenuza katetlardan uzun ekanidan $CO>CD$. Shuning uchun

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Shunday qilib, berilgan tengsizlikning asosliligi isbotlandi.

## Bobni mustahkamlash uchun savollar

1. Maktab matematikasida tengsizlik mavzusini o'qitish tartibi qanday?
2. Tengsizlik nima?
3. Tengsizlikni isbotlash va tengsizlikni yechish o'rtasidagi farq nima?
4. Tengsizlik va uning yechimlarini tushuntiring.
5. Sonli tengsizliklarni yechishga misollar keltiring.
6. Tengsizliklarni yechishning eng keng tarqalgan usullari qanday?



7. Ekvivalent tengsizliklar qanday aniqlanadi?
8. Sinonimik konvertatsiya qanday holatda mumkin?
9. Qanday hollarda tengsizlikning yechimi bo'lmaydi?
10. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizlik tushunchasini qanday kiritish mumkin?
11. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasi tushunchasini kiritish haqida nima bilasiz?
12. Noma'lumi bo'lgan tengsizliklar sistemasini hal qilishning umumiy usullari qanday?
13. To'liq kvadrat tengsizliklarni qanday yechish mumkin?
14. Umumiy holda to'liq bo'lmagan kvadrat tengsizliklarni yechish ma'nosini tushuntiring.
15. Tengsizliklarni intervallar usuli bilan yechishning ma'nosini tushuntiring.
16. Tengsizlikni yeching: $(x + 2,5)(x - 2)(x - 5)(x + 1) < 0$
17. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{(x+5)(x-3)}{x+2} > 0$$

18. Darsliklarda "Sonli tengsizlik" mavzusini taqdim etish tartibi qanday?
19. Sonli tengsizlikning xossalari qanday?
20. Tengsizlikni isbotlash usullarini aytib bering.
21. Tengsizlikni isbotlang:

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$$

# V BOB. FUNKSIYALARINI O'QITISH METODIKASI

## 5.1-§. Matematikani o'qitishda funksiya va funksional bog'lanish tushunchalarining roli

REJA:

1. Funksiya yoki funksional bog'lanish tushunchasi.
2. Maktab darsliklarida funksiya tushunchasi.
3. Funksiya tushunchasini kiritishning umumiy uslubiy sxemasi.

### 1. Funksiya yoki funksional bog'lanish tushunchasi

Matematikadagi asosiy g'oyalardan biri miqdorlar o'rtasidagi o'zaro bog'liqlikdir. Bu funksiya yoki funksional bog'lanish tushunchasi bilan berilgan. Maktab matematikasida funksiya yoki funksional bog'lanish tushunchasi asosiy tushunchalardan biridir. Funksional bog'lanish tushunchasi matematikaning asosiy tushunchasidir, shuning uchun o'rta maktab bitiruvchilarining tayyorgarligi ko'pincha ushbu muhim tushunchaga qanchalik kuchli va to'liq ko'nikib qolganligi bilan o'lchanadi.

Shu bilan birga, funksional bog'lanish tushunchasi turli xil hodisalar va jarayonlarni o'rganish uchun boshqa fanlarda keng qo'llaniladi. Funksional bog'liqlik fizika, biologiya, kimyo, informatika kabi fanlarda ayniqsa muhimdir, chunki bu fanlarda hodisalar o'rtasidagi bog'liqlik o'rganiladi.

Matematika odatda "aniq" fan sifatida qaraladi, bu aniq fan tabiiy fanlarga oid materiallarga ehtiyoj sezadi. Ammo matematikani chuqur o'zlashtirish uchun har qanday fandan, shu jumladan fizika materiallarida matematikadan keng foydalanish kerak. Chunki:

matematikadan olingan bilimlarni birlashtirish, matematika darslarida materiallardan to'g'ri foydalangan holda matematik qoidalar va tushunchalarni aniqlashtirish va ishlab chiqish imkoniyati mavjud;



matematikada fizik hodisalar va qonuniyatlarni inobatga olgan holda, matematik tushunchalar mavhumdan realga o'tadi, shu bilan o'quvchilar bilimlarni umumlashtirishga imkon beradigan tushuncha-larni o'zlashtirishlarini osonlashtiradi;

Hodisalarni o'rganishda u matematikaga yangi vazifalarni qo'yadi, ularni matematik fikrlashning yangi usullarini topishga majbur qiladi. Masalan: statistik va spektral tahlil, maydonga yondashuv va boshqalar.

Fanlararo bog'liqliklar asosida funksional bog'lanishni o'rgatish-ning ba'zi usullari metodistlar A.Yusupova, M.Barakaev va boshqalar-ning asarlarida o'rganilgan.

A.Tojiev algebra darslarida funksional bog'liqlik tushunchalarini o'rganish uchun $y=kx$ va $y=k/x$ funksiyalarini kinematik jarayonlar uchun ishlatgan. Funksiya parametrlariga qarab, moddiy hodisalar xossalarini tushuntirishga intiladi. Shuningdek, ushbu funksiyani fizikada qo'llashda matematik tushunchalardan ba'zi farqlar mavjudligi qayd etilgan.

Funksional bog'lanish va uning xossalarini maktabda grafik o'zgarishlarni hal qilish, turli amaliy muammolarni hal qilish usullarini ko'rib chiqish maqsadga muvofiqdir. Ko'p yillik tajribalar funksional bog'liqlik konsepsiyasiga asoslangan fanlararo muammolarni hal qilish orqali o'quvchilar tomonidan matematika va fizika bo'yicha olgan bilimlarining sifati yuqori bo'lishini ko'rsatdi.

Ko'p yillik pedagogik ish tajribasi natijalaridan, maktab matematika va fizika fanining o'quv dasturidan kelib chiqib aytish mumkinki, funksional bog'lanish va tegishli tushunchalarni egallash ushbu uslubiy muammoning to'g'ri hal qilinishi bilan bevosita bog'liqdir.

Funksional bog'lanish tushunchasini o'zlashtirish uchun o'quvchilar uchun zarur bo'lgan konseptual bazani yaratish kerak. Ular:

moddiy hayotdagi hodisalarning o'zaro bog'liqligi tushunchasi;

o'zaro aloqalarni;

o'zgaruvchi tushunchasi;

miqdorlar o'rtasidagi munosabatni o'rnatish usullarini bilishlari kerak.

Ushbularni yaratgandan keyingina funksiya va boshqa tegishli tushunchalar to'plami ko'rib chiqiladi. Funksional bog'lanish tuchun-chasini o'rgatishga tayyorlash uch bosqichga bo'linadi:

Birinchi bosqich - tayyorgarlik bosqichi. U boshlang'ich sinflardan boshlanadi va beshinchi sinfda konseptual bazani yaratish bilan tugaydi.

Ikkinchi bosqich - 7-sinf (6-sinf) da boshlanadi va uning maqsadi funksiya tushunchasini kiritirishdir.

Uchinchi bosqich - 9-sinfdan boshlanadi. Uning asosiy maqsadi funksional bog'lanishning turli xususiy hollarini ko'rib chiqish va ularni ishlatish bo'lib, o'quvchilarda bu tushunchani paydo qilish va rivojlantirish yo'llarini taqdim etishdir.

Zamonaviy maktablarda qo'llaniladigan matematikaning o'quv dasturida ushbu bosqichlarni muvaffaqiyatli amalga oshirish uchun to'liq imkoniyat mavjud. O'quvchilar ko'z o'ngida funksional bog'lanish tushunchasining to'g'ri shakllanishi va keyingi rivojlanishi matematika va boshqa fanlarning tizimli bog'liqligiga bog'liq. Ushbu muloqot samarali bo'lishi uchun turli fan o'qituvchilari quyidagi ko'rsatmalarga amal qilishlari kerak:

fanlarni o'qitishda har bir funksional bog'liqlikni o'rganish vaqtini muvofiqlashtirish;

funksional bog'lanishni belgilaydigan tushunchalar, ta'riflar, atamalar, formulalarga bo'lgan talablarni o'zaro muvofiqlash-tirish;

funksional bog'lanishning har bir individual turi uchun vazifalar to'plamining mazmuni va hajmini, qiyinchilik darajasini, tayinlangan joyni o'zaro aniqlash.

fanlar bo'yicha ham funksional bog'lanish bilan bog'liq tushunchalar rivojlanishining uzluksizligini ta'minlash.



7-9-sinflar darsliklari va o'quv dasturlarini tahlil qilib, o'qituvchilar va o'quvchilar o'rtasida o'tkazilgan so'rovnomalar natijalariga ko'ra o'quv jarayonida kamchiliklar mavjudligi kuzatil-moqda. Ular:

funksional bog'lanishning 7-9 sinflarida vaqtni to'g'ri darajada emasligi, tizimli ravishda o'qitilmasligi;

matematik darsliklarda funksional bog'liqlikni o'zlashtirishga imkon beradigan amaliy topshiriqlardan to'liq foydalanmaslik;

fanlarni o'rganishda funksional bog'lanish xossalaridan hodisalar va voqeliklarni tahlil qilishda ishlatilmasligi;

o'quvchilarning funksional bog'liqlik bo'yicha bilim darajasini oshirish uchun algebra va tabiiy fan o'qituvchilari o'rtasida yaqin hamkorlikning yo'qligi;

funksional bog'lanish bilan bog'liq tushunchalarni aniqlash va belgilashda fanlar o'rtasida izchillik yo'qligi;

dars jarayonida o'quvchilar bilan funksional bog'liqlikni o'zlashtirish uchun juda ko'p ish olib borilganiga qaramay, konsepsiyani tushunishni yaxshilashga ko'p e'tibor berilmaydi.

Pedagogik va psixologik tadqiqotlar natijalariga ko'ra quyidagi didaktik shartlarni hisobga olgan holda o'quvchilarning funksional bog'lanish bo'yicha bilim, ko'nikma va malakalarini rivojlantirish tavsiya etiladi. Ular:

1. Sinfda funksional bog'lanishni o'rganishni oldindan rejalashtirilgan bosqichlar bilan tanishish.

2. O'qituvchi o'quvchilarning funksional bog'lanishni o'rganish jarayonida fikrlash jarayonlarining barcha turlarini to'g'ri tashkil etishi va boshqarishi kerak.

3. Funksional bog'lanishning fan ichidagi va fanlararo tushunchalar bilan bog'liqligini muntazam namoyish qilish.

4. Funksional bog'lanish xossalarini, funksiya frafigiga oid og'zaki va yozma bilimlarni amalda qo'llash ko'nikmalarini rivojlantirish.

5. Funksional bog'lanish bilan bog'liq tushunchalarni o'rganishda izchillikka rioya qilish. Buning uchun muntazam ravishda darslarni umumlashtirishni rejalashtirish.

6. Funksional bog'lanishni o'zlashtirish jarayonida vizual, og'zaki va amaliy aloqalar muvozanatini ta'minlash.

Yuqoridagi didaktik shartlarni hisobga olgan holda, o'quvchilarning funksional bog'lanish haqidagi tushunchalarini yaxshilash uchun quyidagi tadbirlarni muntazam ravishda rejalashtirish mumkin:

1. Matematikada va tabiiy fanlarda yangi mavzuni talqin qilishda fanlararo aloqaga asoslangan funksional bog'liqlikni o'zlashtirishga imkon beradigan qo'shimcha materiallardan tizimli foydalanish.

2. Muayyan mavzuni ko'rib chiqishda algebra va fizikani integratsiyalashgan holda o'qitish. Bunday holda, ikkita fan o'qituvchisi birgalikda dars rejasini ishlab chiqishadi. Ikki soat dars ichida materialni o'rgatish yaxshiroqdir.

3. Fizikaviy, kimyoviy, biologik va boshqa fanlardagi masalalarni funksiya tushunchasidan foydalanib yechish.

### 2. Maktab darsliklarida funksiya tushunchasi

Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri funksiya tushunchasidir. Maktab o'quv dasturida bu masalaga katta e'tibor beriladi. Ushbu tushunchani o'quvchilar tomonidan chuqur egallashlari ularning matematik bilimlari darajasini ko'rsatadi.

5-sinf matematikasida o'zgaruvchili ifodalarni o'rganish bu funksiyani o'rganishga tayyorgarlikdir. "Funksiya" atamasi bu yerga kiritilmagan, ammo, ushbu konsepsiyani rasmlashtirish yil davomida muntazam ravishda amalga oshiriladi. Funksiya tushunchasining rasmlanishi o'zgaruvchilar bilan arifmetik masalalarni yechishda yordam beradi. 5-sinfda funksional tushunchalarini rasmlantirish bo'yicha boshlangan ishlar 6-sinfda funksiya tushunchasini tanishtirishga imkon beradi, funksiya tushunchasining mazmuni aniqlanadi va



tegishli ta'rif beriladi. Funksiyalarni berish usullari (jadval, grafik, analitik) ko'rib chiqiladi.

$y=kx$ va $y=k/x$ funksiyalari o'rganiladi. Ularning jadvallari tuziladi. 7-sinfda o'quvchilar $y=ax^2$ va $y=ax^3$ funksiyalarning grafiklari bilan tanishadilar.

8-sinfda funksiya tushunchasi yanada davom ettiriladi. Masalan, butun darajalarni o'qitilayotganda $y=ax^{-1}$, $y=ax^{-2}$ rasmidagi funksiyalar grafiklari, kvadrat ildizlarni o'qitishshda $y = \sqrt{x}$ funksiya grafigi, kvadrat tenglamalarni o'qiyotganda kvadrat uchhadlarning grafiklari o'rgatiladi.

9-sinf algebra kursida funksiyalarni o'rganish davom etadi. U berilgan funksiyaga teskari funksiya tushunchasini o'z ichiga oladi, 8-sinf geometriyasida *sinx* va *cosx* funksiyalarining oddiy xossalari o'rganiladi. *tgx* funksiyasi *sinx/cosx* ikki funksiya nisbati sifatida kiritiladi. Trigonometrik funksiyalar asosan 10-sinfda o'qitiladi.

"Algebra va matematik analiz asoslari" kursida funksiya tushunchasi va uning xossalari, turlari, berilish usullari, funksiya grafiklari o'rganiladi. Funksiya umumiy tushunchasi, o'shish va kamayish oraliqlari, funksiya nollari, funksiya maksimal va minimal qiymatlari, oddiy almashtirishlar yordamida funksiyalar grafigini chizishni o'rganish kabilar kiritilgan.

Funksiyaning chegaralanganligi tushunchasi, funksiyaning nuqtada va segmentda uzluksizligi, ularning xossalari, funksiyaning boshqa xossalari bilan tanishib chiqadilar, funksiyalarni o'rganishda hosiladan foydalanishni o'rganadilar. Boshlang'ich funksiya, aniqmas va aniq integral, egri chiziqli trapetsiya yuzi, *n*-darajali ildizli, ratsional ko'rsatkichli daraja, ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar va ularning xossalari bilan tanishib chiqadilar. Irratsional tenglamalarni, ko'rsatkichli, logarifmik tenglamalar va tengsizliklar, ularning sistemalarini yechishda funksiya tushunchasini qo'llash, shuningdek tekis figuralarning yuzalarini integral orqali topishni o'rganadi.

### 3. Funksiya tushunchasini kiritishning umumiy uslubiy sxemasi

Maktab kursida o'rganiladigan funksiya tushunchasiga quyidagilar kiradi:

sonli funksiya;

funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari;

funksiyani berilish usullari;

funksiyaning grafigi;

funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlari;

funksiyalarning tengligi;

argument va funksiyaning orttirmalari;

funksiyaning davriyligi;

teskari funksiya va murakkab funksiya.

Funksiya tushunchasini kiritishi ikki yo'l bilan amalga oshirilishi mumkin:

I. *Real-amaliy kirish usulini joriy etish.*

Bu quyidagi sxema bo'yicha amalga oshiriladi:

1) funksiyani o'rganish bilan bog'liq tegishli masalalarni ko'rib chiqish;

2) tajriba materiallari asosida funksiyaning matematik ta'rifini rasmiylashtirish (formulani tasdiqlash);

3) funksiya qiymatlari jadvalini tuzish va "nuqtalar" yordamida funksiya grafigini chizish;

4) funksiya qiymatlari jadvaliga muvofiq uning asosiy xossalarini o'rganish;

5) ko'rib chiqilayotgan funksiyaning xossalarini qo'llash uchun misollar va mashqlarni bajarish.

Ushbu sxemaning o'ziga xos xususiyati funksiyalarni o'rganish vizual-geometrik usulga asoslanganidadir, funksiyalarni analitik usullar bilan o'rganish kam qo'llaniladi. Funksiyalarni vizual-geometrik va analitik usullar bilan o'rganish o'rtasidagi bog'liqlik o'quv materialini taqdim etishning qat'iy darajasini aniqlaydi. Funksiyani qat'iy o'qitish darajasi uning tahliliy tadqiqotlarining rolini asta-sekin kuchaytirish orqali amalga oshiriladi. Funksiyalarni o'rganishda vizual-geometrik va analitik usullarning uyg'unligi funksiyalarni o'qitishning asosiy usullaridan biridir. Funksiya



qiymatlari jadvalini yaratishda uni hisoblash uchun mikrokalkulyatordan foydalanish foydalidir.

II. *Funksiya tushunchasini abstrakt-deduktiv usulda kiritish.* Analitik usullar yordamida funksiyalarni o'rganish ahamiyati ortib borayotganligi sababli yuqori sinflarda funksiyalarni o'qitish sxemasini quyidagicha kiritish mumkin:

1) a) funksiya ta'rifini rasmiylashtirish;

b) tegishli masalalarni ko'rib chiqish.

2) funksiya xossalarini tahliliy o'rganish;

3) a) analitik tadqiqotlar natijalari asosida funksiya grafigini chizish;

b) funksiyani to'laroq aniqlash uchun funksiyaning "xulq-atvor" qiymatlarini topish;

c) funksiyaning grafigini chizish;

4) o'rganilgan funksiyaning xossalarini amalda qo'llash uchun misollar va mashqlarni bajarish, mos muammoni ko'rib chiqish.

Vizualizatsiya har doim ham har qanday matematik qonunlarga rioya qilishimizga imkon bermaydi. Misol uchun, koordinatalar sistemasida

$$y = x,\ \ y = x^2\ , y = x + x^2$$

kabi funksiyalar grafiklarini chizish. Funksiya grafigini chizishda quyidagi xossalarini o'rganish maqsadga muvofiq bo'ladi:

1) $f(x) = \varphi(x)$ tenglamaning $x_0$ ildizi $f(x)$ va $\varphi(x)$) funksiya-lar grafiklarining kesishish nuqtasining abssissasi bo'ladi;

2) $f(x)>0$, $f(x)<0$ tengsizlikning yechimlari $f(x)=0$ tenglamani ifodalovchi chiziqda yotuvchi nuqtalaridan yuqoridagi ($f(x)>0$) nuqtalardir, $f(x)<0$ yechimlari $f(x)=0$ funksiya grafigining ostidagi nuqtalaridir.

3) $f(x)>g(x)$ tengsizlikning yechimlari $f(x)$ funksiya grafigi $g(x)$ funksiya grafigining ustki qismi bo'lgan nuqtalar abssissalaridir;

4) funksiyaning grafigi o'ngga siljiganida, u yuqoriga ko'tarilsa, bu funksiyaning o'suvchi ekanligini anglatadi ;

5) juft funksiyaning grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik va toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrikdir;

6) teskari funksiyalar grafiklari $y=x$ chiziqqa nisbatan simmet-rikdir;

7) $g(x)=f(x)+C$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini ordinata o‘qida $C$ birlikka parallel ko‘chirish orqali hosil qilinadi;

8) $g(x)=kf(x)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini $k$ marta siqish yoki cho‘zish bilan hosil qilinadi. $g(x)=f(x-c)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini abssissa oqida $c$ birlik parallel ko‘chirish bilan hosil qilish mumkin.

O‘quvchilarning grafik tuchunchasini rivojlantirishga quyidagi mashqlar ta’sir qiladi: “Quyidagi vaziyatlarni aks ettiruvchi bir nechta grafiklarni chizing:

1) 2 soni $f(x)=g(x)$ tenglamaning ildizi;

2) $f(x)>0$ tengsizlik yechimlarini aniqlash;

3) $f(x)<0$ tengsizlik yechimlarini aniqlash;

4) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ funksiyalar $2 \leq x \leq 5$ segmentda o‘sadi;

5) juft funksiyalarni ko‘rsating.

O‘quvchilarda funksiya grafigi bo‘yicha bilim, ko‘nikma va malakalarini rivojlantirishning eng yaxshi usullaridan biri bu ikki funksiya grafiklarining nisbiy o‘rnini aniqlashga doir misollarni, masqlarni hal qilishdir (funksiya umumiy nuqtalarga ega bo‘ladimi, qancha kesishish nuqtasi bor, bu funksiyalarning qaysi birining grafigi boshqasidan yuqori (pastroq) joylashgan va hokazo).

Bunday topshiriqlarga quyidagi misollarni berish mumkin:

1) $y = x$ va $y = x^2$;

2) $y = x^2$ va $y = 1$ chiziqlar;

3) $y=2x+3$ va $x=5$;

4) $y = x^2$ va $y = x^2 - 11$ funksiyalar grafiklari o‘zaro joylashishini tasvirlab berish kabi topshiriqar.

Yangi dasturga ko‘ra, o‘quvchilar birinchi marta 6-sinfda funksiya tushunchasi bilan tanishadilar. Sh.Alimovning "Matematika- 6" darsligi-da



"Funksiya tushunchasi. Funksiyaning formulali namoyishi quyidagi masalalarni o‘z ichiga oladi:

funksiya rasmiga ko‘ra funksional bog‘lanishni yozish;

funksiyalarni yozish va o‘qish;

funksiyaning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi;

formuladan foydalanib mashqlarni bajarish.

Mavzuning mazmuni quyidagicha:

Texnikada, hayotda ko‘plab miqdorlar o‘zaro bog‘liq ravishda o‘zgaradi. Misol uchun, mahsulotni 1 kilogrammi 25 pul birigi bo‘lsa, u holda bu bog‘lanish $C=25x$ formula bilan ifodalanadi. Bu yerda $x$ - mahsulot og‘irligi (kg da ). $C=25x$ formulada $x$ va $C$ - o‘zgaruvchilar; $x$ - argument; $C$ esa $x$ ga bog‘liq bo‘lgan o‘zgaruvchi -funksiya. Umuman olganda funksional bog‘liqlikni $y=f(x)$ orqali belgilanadi. Masalan, $y=3x+1$ funksiyada $x=4$ bo‘lsa, $y=13$ bo‘ladi: $f$□(4) =13.

Argumentning qiymati ham, funksiya qiymati ham sonlar bilan berilgan funksiyaga sonli funksiya deyiladi. Biz sonli funksiyani ko‘rib chiqamiz va uni umumiy nom bilan funksiya deb ataymiz.

Erkli o‘zgaruvchi $x$ qabul qiladigan qiymatlar to‘plami-ga funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi.

Erksiz o‘zgaruvchi $y$ qabul qiladigan o‘zgaruvchining qiymatla-ri funksiyaning qiymatlari sohasi deyiladi.

Funksiya qiymatlari to‘plamiga funksiya qiymatlari diapazo-ni deyiladi.

1-misol. $y=2x+3$ funksiyaning -5□$x$□2 oraliqda qabul qiladigan qiymatlarini topaylik. Sonli tengsizliklar xossasiga ko‘ra:

-5□$x$□2; -10□2$x$□4; -7□2$x$+3□7.

Shuning uchun, $y=2x+3$ funksiya uchun argument qiymatlari -5□$x$□2 sohada bo‘lsa, uning qiymatlari [-7; 7] oralig‘ida bo‘ladi.

Chiziqli funksiya formulasini matematik mazmunini o‘quvchilarga tushuntirish uchun unga doir masalalarni ishlab chiqish kerak.

1-topshiriq. $A$ stansiyadan chiqqan poyezd $A$ stansiyadan 160 km masofadagi $B$ stansiyada turibdi. Agar poezd keyingi stansiyagacha 70 km/soat tezlik bilan yursa, posezd $t$ soatda $A$ stansiyadan qancha masofada bo'ladi?

Yechish: Bosib o'tilgan yolni S bilan belgilasak, u holda:

$S=160+70t$ bo'ladi, bu yerda $S$ -funksiya, $t>0$, $t$ -argument. Agar

$S = y$; $160 = l$; $70 = k$; $t = x$ desak, u holda bu bog'lanish $y=kx+l$ formula kabi yoziladi.

$y=kx+l$ - chiziqli funksiya, $y$ -funksiya; $x$- argument. $k$, $b$ va $l$ - lar qandaydir sonlar.

Agar $l = 0$ bo'lsa, chiziqli funksiya $y = kx$ formula bilan yoziladi.

$y = kx$ funksiya to'g'ri proporsionallik deyiladi.

Agar $k=0$ bo'lsa, chiziqli funksiya $y=l$ formula bilan beriladi. $y=l$ funksiya doimiy funksiya deb ataladi.

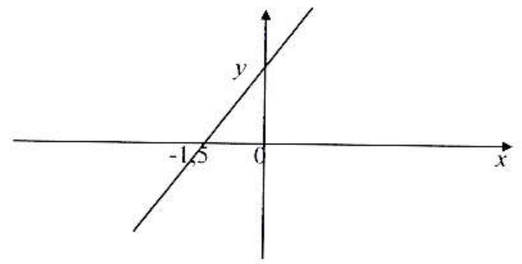
$y=kx+l$ funksiyaning grafigi to'g'ri chiziqdir. Agar $k$ □0, $l$□ 0 bo'l-sa, bu funksiya grafigi koordinata o'qlarini, ya'ni abssissalar va o'rdinatalar o'qini kesib o'tadi. Grafik ordinatalar o'qini $(0;l)$ nuqtada kesib o'tadi. Chunki $y=kx+1$ funksiyada $x=0$ bo'lsa: $y = k\,0+l$; $y=l$. $y=kx+l$ chiziq abssissalar oqini $x = -\frac{l}{k}$ da kesadi, chunki ordinatası $y = 0$ bo'lsa, $0 = kx + l$; $kx = -l$ va $x = -\frac{l}{k}$.

Binobarin, $y=kx+l$ funksiya abssissalar o'qini $\left(-\frac{l}{k};0\right)$ nuqtada kesib o'tadi. Chiziqli funksiya grafigi to'g'ri chiziq ekanligidan uni chizish uchun 2 ta nuqtasini topish kifoya. Birinchi nuqta sifatida $(0;l)$ ikkinchi nuqta sifatida $\left(-\frac{l}{k};0\right)$ nuqtani yoki $x$ ga qiymat berib, y ni topamiz.

Misol uchun, $y= 2x+ 3$ funksiya grafigini chizaylik Buning uchun jadval tuzamiz, jadvalga asosan f

unksiya grafigi bo'lgan to'g'ri chiziqni chizamiz:






1-rasm

| | | |
|---|---|---|
| $X$ | 0 | -2 |
| $Y$ | 3 | -1 |

1) $y=kx+l$ chiziqli funksiya formulasida: $l = 0$ va $k = 1$ bo'lsa, $y=kx$ funksiya to'g'ri proportsionallik deb ataladi. Bunda $x=0$ bo'lsa, $y=0$ bo'ladi. Binobarin, barcha $y=kx$ funksiyalar grafiklari $O(0;0)$ nuqta-dan o'tadi.

2) Ushbu xulosadan so'ng $y=kx$ funksiyaning grafigini chizish uchun $O$ $(0;0)$ nuqtadan tashqari ikkinchi nuqtani topish kifoya va ikkita nuqta orqali to'g'ri chiziq chizish kerak. Ikkinchi nuqta har qanday qiymatni $x$ ga berish va $y$ ning mos qiymatini hisoblash orqali topiladi. $y=kx$ funksiyani tuzish uchun bir nechta mashqlar bajariladi.

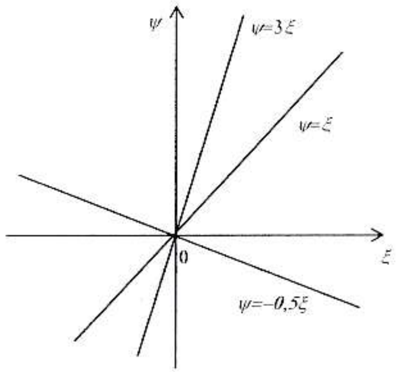
So'ngra o'quvchi $y=kx$ funksiya grafigini qurishda darslikda muallif tomonidan taqdim etilgan $y=kx+l$ funksiyasi grafigini ko'rish bilan cheklanmasdan, balki mustaqil funksiya grafigini yasay oladilar.

1) $y= kx$ to'g'ri proporsionallik grafigi $k>0$ bo'lganda I va III choraklardan otadi.

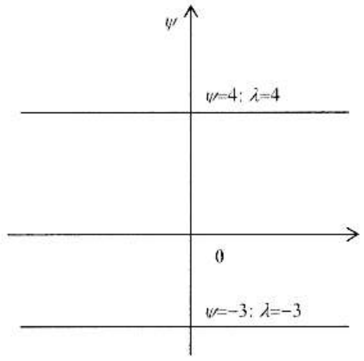
2) Agar $y= kx + l$ chiziqli funksiyada $k = 0$; $l>0$ bo'lsa, $y=l$ chiziqli funksiya abssissalar o'qiga parallel u $(0;l)$ nuqtadan o'tadi (3-rasm).

$y=kx$ funksiya grafigi yordamida $y=kx+l$ funksiya grafigini yasash uchun parallel ko'chirishdan foydalanish mumkin.

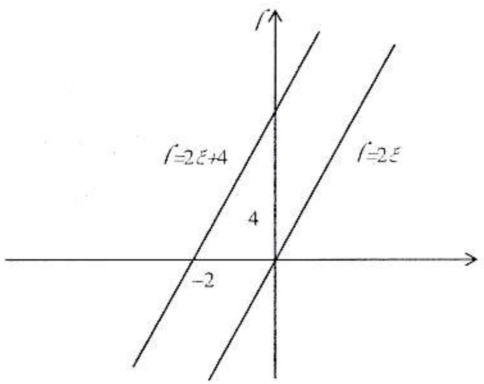
Misol. $y=0{,}5x+2$ va $y=-x+5$ funksiyalarning grafiklarini bitta koordinatalar sistemasida chizaylik (5-rasm).




2-rasm




3- rasm

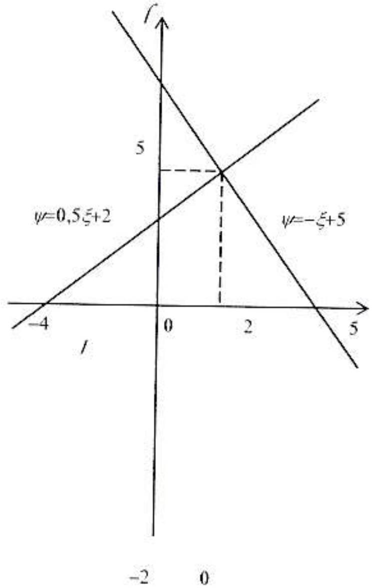



4-rasm

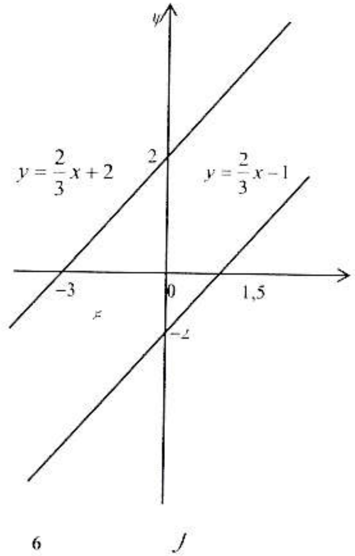
$y=0{,}5x+2$ va $y=x+5$ funksiyalarning grafiklari $A(2;3)$ nuqtada kesishadi, ya'ni argumentning $x=2$ qiymatida bu funksiyalar teng qiymatlarni qabul qiladi yoki aksincha, $0{,}5x+2=-x+5$ bo'lsin. Bu tenglikni yechsak, $1{,}5x=3$ yoki $x=2$ hosil bo'ladi. Argumentning bu qiymatida funksiyalar $y=0{,}5x+2=0{,}5\times2+2=3$ va $y=-x+5=-2+5=3$ teng qiymatlar qabul qiladi.

Endi $y=(2/3)x+2$ va $y=(2/3)x-1$ funksiyalarning grafiklarini bitta koordinatalar sistemasida chizaylik (6-rasm). Ular o'zaro parallel bo'ladi






5-rasm




6- rasm

Bu to'g'ri chiziqlarning parallelliklarini tekshiraylik. Buning uchun ularning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini tenglaymiz:

$$(2/3)x+2=(2/3)x-1 \text{ yoki } (2/3)x-(2/3)x=-1-2 \text{ yoki } 0=-4$$

Ya'ni ularning umumiy nuqtalari yo'q.

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiya yoki funksional bog'lanish tushunchasi qanday kiritiladi?
2. Funksiya tushunchasini kiritishga sabablarni ko'rsating.
3. Maktab darsliklarida funksiya tushunchasi qanday kiritiladi?
4. Funksiya tushunchasini kiritishning umumiy uslubiy sxemasi o'z ichiga nimalarni oladi?
5. Funksiya tushunchasini abstrakt-deduktiv usulda kiritishda nimalarga e'tibor beriladi?

6. Funksiyalarni vizual-geometrik va analitik usullar bilan o'rganish o'rtasida qanday bog'liqlik bor ?

---

## 5.2-§. Ba'zi elementar funksiyalarni o'qitish metodikasi

REJA:

1. Chiziqli funksiyalarni o'qitish metodikasi
2. Kvadratik funksiyalarni o'rganish.
3. $y = ax^3$ funksiyaning xossalari va grafigi.
4. $y = \frac{k}{x}$ funksiya, uning grafigi va xossalari.
5. $y = \sqrt{x}$ funksiya va uning grafigi.

1. Chiziqli funksiyaga keladigan masalalar ko'rib chiqiladi:

1) "Piyoda bir punktdan ikkinchisiga 5 km/soat tezlik bilan bormoqga. Agar punktlar orasidagi masofa 10 km bo'lsa, piyoda $t$ soatdan keyin ikkinchi punktdan qancha masofada bo'lishi $S = 10\text{-}5t$ formul bilan aniqlanadi.

2) "O'quvchi har bir sotib olingan daftar uchun 3 pul birligi va 1 ta qalam uchun 35 pul birligi to'ladi. Sotib olish narxi daftarlarning soniga bog'liq. Agar sotib olingan daftarlarning sonini $x$ ga va sotib olishga to'langan pulni $y$ desak, u holda $y=3x+35$. bu yerda $x$ - natural son.

Turli hodisalarni ifoda etuvchi $S=10\text{-}5t$ va $y=3x+35$ formulalarni matematik tuzilmalari bir xil, ular odatda $y=kx+b$ formulasi bilan ifodalanadi (bu yerda $x$ funksiyaning argumenti; $y$ – o'zgaruvchi yoki funksiya; $k$ va $b$ – ba'zi sonlar). Bu funksiya chiziqli funksiya deb ataladi. Keyin chiziqli funksiyaning ta'rifi beriladi:

$y=kx+b$ formula rasmida berilgan funksiya chiziqli funksiya deb ataladi (bu yerda $x$ erkli o'zgaruvchi: $k$ va $b$ sonlar).



Chiziqli funksiyaning xususiy hollari: $y = kx$ va $y = b$ .

Chiziqli funksiyaning xossalarini o'rgatishdan oldin o'quvchilarga "funksiya xossalari" so'zining ma'nosini tushuntirish kerak. Bu ularga quyidagi iboralarni maqsadli ravishda tushunishga imkon beradi. Funksiyadagi $x$ o'zgaruvchi o'zgarganda $y$ o'zgaruvchining unga bog'liq ravishda o'zgarishi (osishi, kamayishi, musbat qiymatlar qabul qilishi va hokazo)ni anglatadi. Masalan, 1-masala uchun $x$ ning qabul qiladigan qiymatlari $0 \leq x \leq 2$ bo'lsa; 2-masalada $y$ o'zgaruvchi $0 \leq y \leq 10$ oraliqda o'zgaradi; 3) $x$ o'zgaruvchining harbir qiymati chun $y$ o'zgaruvchining bitta qiymatiga to'g'ri keladi.

Chiziqli funksiyaning xossalari uning grafigi bilan tavsiflanadi. Shunday qilib, $y=0,5x\text{-}2$ funksiya ko'rib chiqiladi:

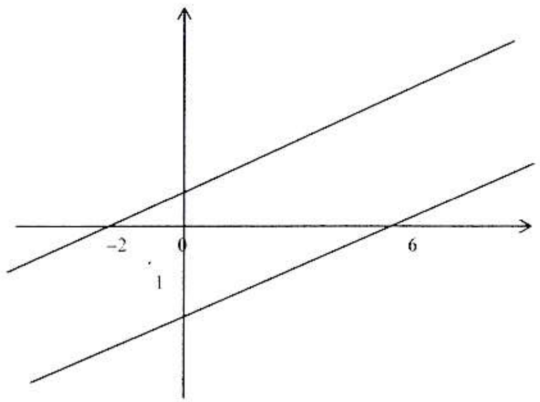
uning qiymatlari jadvali tuziladi;

ushbu jadvaldan foydalanib keltirilgan nuqtalar koordinata tekisligida chiziladi;

keyin nuqtalar bitta chiziqda yotishi ko'rsatiladi. $y=0,5x\text{-}2$ chiziqli funksiyaning grafigi to'g'ri chiziq ekanligi aniqlanadi.

Umumiy bayon quyidagicha: chiziqli funksiyaning grafigi to'g'ri chiziqdir. Ushbu xulosa boshqa chiziqli funksiyalarning grafiklarini chizish bilan tasdiqlanadi: $y=1,5x\text{-}1$, $y=\text{-}x\text{-}1$, $y=3x\text{-}1$, $y=2x+1$. Bu funksiyalarning grafiklarini chizish uchun bir nechta nuqtalardan ham foydalanish mumkin.

Chiziqli funksiyadagi $k$ va $b$ larning ahamiyatini ko'rsatish kerak. $k$ va $b$ sonlarining koordinata tekisligidagi chiziqli funksiya grafigiga ta'sirini aniqlashni maqsad qilaylik. Buning uchun $y=0,5x+1$ va $y=0,5x\text{-}3$ chiziqli funksiyalarni olamiz. Ularning grafiklarini bitta koordinata tekisligida chizamiz (8-rasm).




8-rasm.

8-rasm shuni ko‘rsatadiki, ushbu ikki funksiyaning grafiklari bir-biriga parallel. Buni isbotlash mumkin. Biz bu dalillarga qarshi chiqamiz. Aytaylik, ushbu funksiyalar grafiklari $A(m;n)$ nuqtada kesishsin. Ushbu ikki funksiyaning ikkalasi uchun quyidagi xulosa chiqariladi: agar $x=m$ bo‘lsa, u holda $y=n$.

Shuning uchun quyidagi tenglamalar $0{,}5m+1=n$ va $0{,}5m-3=n$ bo‘lishi kerak. Ammo $0{,}5\,m+1$ □$n$ va $0{,}5\,m-3$ □$n$. Ushbu qarama-qarshilik shuni ko‘rsatadiki, berilgan funksiyalarning grafiklari o‘zaro parallel. Parallel chiziqlarning xossalariga ko‘ra, ular abssissalar o‘qi bilan bir xil burchak hosil qiladi. Ushbu tuzilgan funksiyalar grafigiklgarini ko‘rib chiqilgan chiziqli funksiyalar bilan taqqoslasak, biz quyidagi ikkita qonuniyatni kuzatamiz:

1) agar chiziqli funksiyalar formulasida $k$ har xil qiymatlarni qabul qilsa, u holda bu funksiyalarning grafiklari kesishadi;

agar $k$ lar teng bo‘lsa, unda berilgan chiziqli funksiyalarning grafiklari parallel bo‘ladi.

2) agar $k$ chiziqli funksiyalar formulasida teng bo‘lsa, u holda funksiyalar grafiklari abssissalar o‘qi bilan teng burchakda kesishadi;

agar $k$ har xil qiymatlarni qabul qilsa, u holda funksiyalar grafiklari abssissalar o‘qi bilan har xil burchaklarda kesishadi.



Shunday qilib, $k$ soni va funksiya grafigining abssissaga egilish burchagi o‘rtasida bog‘liqlik mavjud. Shuning uchun $k$ soni $y=kx+b$ chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nomlanadi.

Keyin $b$ sonining geometrik ma’nosi tushuntiriladi: chiziqli funksiyaning grafigi $(0;b)$ nuqtada ordinatalar o‘qi bilan kesishadi. $Ox$ o‘qini qaysi nuqtada kesishishini topish uchun $y=0$, ya’ni $kx+b=0$ tenglama yechiladi. Bu chiziqli funksiyada abssissalar o‘qi bilan kesishish nuqtasi mavjud: $x=-\frac{b}{k}$.

Demak, chiziqli funksiyaning grafigini chizish uchun uning abssissa va ordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topish va shu ikki nuqta orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazish kifoya qiladi.

Chiziqli funksiyaning xossalarini chuqurroq ko‘rib chiqishning asosi grafik yondashuvdir:

1) funksiya grafigini chizish;

2) funksiyaning aniqlanish sohasini topish;

3) funksiya ortib borayotganligini, kamayganligini yoki doimiy-ligini aniqlash;

5) funksiyaning nollarini topish;

5) funksiya juft, toq yoki umumiy tarsda ekanligini aniqlash;

6) funksiyaning xarakterli nuqtalarini topish (masalan, koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari).

Ushbu sxemadan $y=0{,}5x+1$ funksiyasini o‘rganish uchun foydalanamiz.

1. $A\,(0;1)$ va $B\,(-2;0)$ nuqtalar orqali $y=0{,}5x+1$ funksiya grafigini chizamiz (8-rasm).

2. $y=0{,}5\,x+1$ formulada $x$ har qanday qiymatlarni qabul qila oladi. Shuning uchun berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi o‘quvchilarga ma’lum bo‘lgan barcha haqiqiy sonlar to‘plamidir. $Y$ o‘zgaruvchi ham funksiyaning grafigiga asosan biron bir qiymatga ega bo‘lganligi sababli, berilgan funksiyaning qiymatlar diapazoni barcha haqiqiy sonlar to‘plamidir.

3. Grafigi ordinata o'qiga simmetrik bo'lgan funksiya juft funksiya deb ataladi. Misol uchun, $y = b$ funksiya juft, chunki uning grafigi ordinata oqiga nisbatan simmetrik bo'ladi. $y = 0,5x + 1$ funksiya juft emas, chunki uning grafigi ordinata o'qiga simmetrik emas. Grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan funksiya toq funksiya deb ataladi. $y = kx$ shunday toq funksiya. $y = 0.5x + 1$ funksiya grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik emas, shuning uchun. $y = 0,5x + 1$ funksiya juft ham emas, toq ham emas.

4. Funksiyaning xarakterli nuqtalarini ko'rsatamiz: agar $x = -2$ bo'lsa, u holda $y = 0$, va $x = 0$ bo'lsa, u holda $y = 1$. Koordinatalari (-2; 0) va (0;1) bo'lgan nuqtalar funksiya grafigiga tegishli bo'ladi.

Endi funksiyani o'rganishni grafik usulda davom ettirish mumkin. Buning uchun funksiyaning xossalarini grafik jihatdan o'rganadigan ma'lumotlar bilan maxsus tayyorlangan jadvaldan foydalanish mumkin.

Grafik yondashuv yordamida o'quvchilar funksiyalarni o'rganish bilan bog'liq ba'zi bilimlarga ega bo'ladilar. Shuni ta'kidlash kerakki, o'z navbatida grafik yondashuv har doim ham funksiyaning ba'zi xossalarini aniq aniqlashga imkon bermaydi. Funksiyani o'rganishning eng aniq usuli bu tenglamalar va tengsizliklar, mutanosib o'zgarishlarga asoslangan analitik yondashuvdir. Chiziqli funksiyalarni analitik usullar bilan o'rganish yuqori sinfdagi chiziqli funksiyalarning xossalarini yakuniy ko'rib chiqishda foydalidir.

Chiziqli funksiyaning xarakterli xossalarini qat'iy ravishda ko'rib chiqish mumkin: chiziqli funksiyaning o'sishi uning argumentining o'sishiga mutanosibdir, chiziqli funksiyaning $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nisbati burchak koeffitsient $k$ ga teng. Bu yerda

$$\Delta x = x_2 - x_1 \ , f(x_1) = kx_1 + b \ , \ f(x_2) = kx_2 + b$$

bo'lsin. U holda

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$$

Keyin



$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{k(x_2 - x_1)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

Bu xossa faqat chiziqli funksiyaga xos, shuning uchun uni chiziqli funksiyaning xarakterli xossai deyiladi.

Funksiyani tahliliy o'rganish sxemasi quyidagicha:

1) funksiyani aniqlanish va qiymatlar sohalarini topish;

2) funksiyaning ortib boruvchi va kamayib boruvchi, doimiy qiymatlarni oladigan intervallarini topish:

agar $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya o'suvcni;

agar $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya kamayuvchi;

agar $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya qiymatlari doimiy bo'ladi;

3) $f(x) = 0$ tenglamani yechib, funksiyaning nollarini topamiz;

4) $f(x)>0$ va $f(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiyaning ishoralari bo'yicha intervallarini aniqlaymiz;

5) funksiyani juft yoki toq ekanligini aniqlashni o'rganish uchun (birinchi holda $f(-x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lishi, 2-holda funksiya aniqlanish sohasida $f(-x) = - f(x)$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak), uchinchi holda ikkala tenglik ham o'rinli bo'lmaydi;

6) $f(x)$ funksiyaning xarakterli qiymatlari topiladi.

### 2. Kvadratik funksiyalarni o'rganish

Kvadrat funksiyani tizimli o'rganishdan oldin quyidagi masalalar ko'rib chiqiladi. Ular quyidagilardan iborat:

kvadrat ildizni topish;

arifmetik kvadrat ildizning xossalari;

kvadrat tenglamalar va ularni yechish usullari;

funksiyalar va ularning xossalari (qiymatlari va diapazoni, grafiklari, o'sish va kamayish oraliqlari, funksiya nollari).

Ta'rif: $y = ax^2 + bx + c$ (bu yerda $x$ erkli o'zgaruvchi, $a, b$ va $c$ sonlar, $a \neq 0$) formula bilan berilishi mumkin bo'lgan funksiya kvadratik funksiya deb ataladi.

Kvadrat funksiyani o'rganish, ya'ni uning grafigini chizish orqali xossalarini aniqlash bosqichma-bosqich amalga oshiriladi.

$y = ax^2$ funksiya xossalari odatda quyidagicha o'rganiladi:

1. $y = ax^2$ funksiyasining grafigi $a$ $(a \neq 0)$ ning har qanday qiymatida parabola bo'ladi (9-rasm). $a > 0$ da parabola yoylari yuqoriga, $a < 0$ bo'lganda esa pastga yo'naltiriladi. Parabolaning uchi O(0;0) nuqtada joylashgan.

2. $a > 0$ da, ya'ni funksiyaning grafigi $Ox$ o'qidan yuqori yarim tekislikda va $a < 0$ bo'lsa, funksiyaning grafigi $Ox$ o'qining pastki yarmida bo'ladi.

3. $y = ax^2$ funksiyaning grafigi $Oy$ o'qiga nisbatan simmetrikdir.

4. $a>0$ bo'lganda, $y = ax^2$ funksiya $(-\infty; 0)$ oraliqda kamayadi va $(0; +\infty)$ intervalda o'sadi. $a<0$ bo'lganda, $y = ax^2$ funksiya $(-\infty; 0)$ oraliqda o'sadi va $(0; +\infty)$ intervalda kamayadi.

5. $a>0$ bo'lganda funksiya qiymatlari sohasi barcha haqiqiy manfiy bo'lmagan sonlar, ya'ni $y \in [0; +\infty)$ bo'lsa, $a<0$ bo'lganda, funksiya qiymatlari sohasi barcha haqiqiy musbat bo'lmagan sonlar, ya'ni $y \in [-\infty; 0)$ bo'ladi.

6. Agar $a>0$ bo'lsa, funksiyaning minimal qiymati $x=0$ nuqtada bo'ladi va uning katta qiymati yo'q. Agar $a<0$ bo'lsa, funksiyaning maksimal qiymati $x=0$ nuqtada bo'ladi va minimal qiymati yo'q.

7. $a>1$ bo'lganda $y = ax^2$ funksiya grafigini $y = x^2$ funksiya grafigini $a$ marta kengaytirish orqali, $0 < a < 1$ bo'lganda $y = ax^2$ funksiya grafigini $y = x^2$ funksiya grafigini $a$ marta siqish orqali hosil qilish mumkin.



$y = ax^2$ funksiyaning xossalari va parabolik egri chiziqlarga oid misollar (paraboloid oynalar, avtomobil faralari, yorug'lik chiroqlari, teleskoplar, ko'prik rasmlari va boshqalar) uchun masalalar yechiladi.

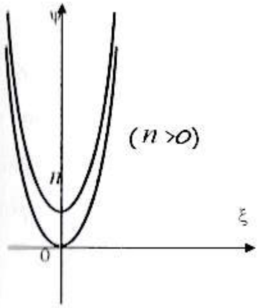
Kvadrat funksiyani o'rganish, ya'ni grafik chizish orqali xossalarni aniqlash bosqichma-bosqich amalga oshiriladi.

$y = ax^2 + n$ va $y = a(x - m)^2$ funksiyalarning grafiklari.

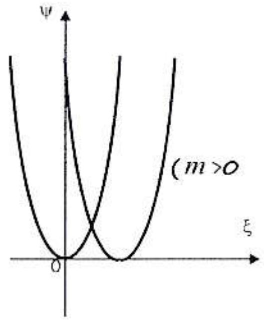
Ushbu funksiyalarning grafiklarini qurishda quyidagi qoidalarga rioya qilinadi:

1. $y = ax^2 + n$ funksiya grafigini yasash uchun $y = ax^2$ funksiya grafigini $Oy$ o'qi bo'yicha $n$ birlikka ($n>0$) yuqoriga va ($n<0$) da quyiga parallel ko'chirish bilan amalga oshiriladi (10-rasm).

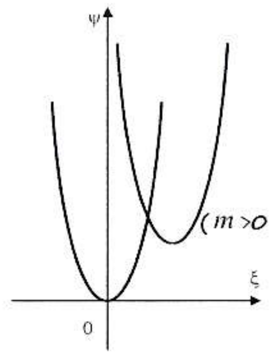
2. $y = a(x - m)^2$ funksiya grafigi $y = ax^2$ funksiya grafigini $Ox$ o'qi bo'ylab $m$ birlikka ($m>0$ bo'lganda o'ngga va $m<0$ da chapga) parallel ko'chiriladi (11-rasm).



10–rasm



11–rasm



12-rasm

3. $y = a(x - m)^2 + n$ funksiya grafigini hosil qilish uchun $y = ax^2$ funksiyaning grafigini ikki $Ox$ o'qi bo'ylab $m$ birlikka ($m>0$ bo'lsa o'ngga) va $Oy$ o'qi bo'ylab $n$ ($n>0$ bo'lsa yuqoriga ) ko'chirish yo'li bilan olinadi. (12-rasm).

Dastur bo'yicha birinchi navbatda $y = x^2$ va $y = ax^2$ funksiyalari, so'ngra $y = ax^2 + bx + c$ funksiyalari bo'yicha mashg'u-lotlar o'tkaziladi.

$y = ax^2 + bx + c$ funksiyani o'rganishda analitik yondashuvning ahamiyati ortadi. Biroq, bu usul grafik yondashuvni inkor etmaydi, ular o'zaro bir-birini to'ldiradi.

"Kvadrat funksiya grafigi" mavzusini o'rganish quyidagi muammoni hal qilish bilan boshlanishi mumkin:

$$y = 0,5x^2 - 8x + 35$$

funksiyaning grafigi nimani aniqlaydi?. O'quvchilardan funksiya grafigidagi bir nechta nuqtalarning koordinatalarini topishni so'rashlari mumkin. Odatda o'quvchilar $x$ o'zgaruvchining quyidagi 0,1,2,... qiymatlarini berishni boshlaydilar. Tegishli jadval quyidagicha yoziladi:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | ... |
| $y$ | 35 | 27,5 | 21 | ... |

Ushbu qiymatlar bo'yicha funksiya grafigini qurish qiyin ekanligini payqaydilar. Bu funksiya grafigini qurish uchun: $y = 0,5x^2 - 8x + 35$ kvadrat uchhadni $y = 0,5(x-8)^2 + 3$ kabi yozamiz. O'quvchilarga funksiya $x=8$ da $y$ minimal qiymatiga ega, ya'ni $y=3$ bolishini va shu nuqtaga yaqin bo'lgan nuqtalarda funksiya qiymatlari topiladi: $x=7$ va $x=9$ ; $x=6$ va $x=10$ va boshqalar uchun jadval tuziladi:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $y$ | 7,5 | 5 | 3,5 | 3 | 3,5 | 5 | 7,5 |

O'quvchilar bu jadvalni tahlil qilib, unga ko'ra, bu parabolaga tegishli, deb hulosa chiqaradilar (13-rasm). Parabola andozasi orqali $y = 0,5(x-8)^2$ funksiyaning grafigi $y = 0,5x^2$ funksiya grafigining uchini O(0;0) nuqtadan (3;8) nuqtaga ko'chirish va parabolani parallel ravishda ko'chirish orqali olish



mumkinligini bildiradi. Demak $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiya ko'rinishida berilgan bo'lsa, uning gfafigini chizish uchun berilgan funksiya

$$y = a(x-m)^2 + n$$

ko'rinishga keltiriladi, bu yerda

$$m = -\frac{b}{2a} \quad , \; n = \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Masalan, $y = -2x^2 + 12x - 19$ kvadratik funksiya berilgan bo'lsin. Uni $y = a(x-m)^2 + n$ ko'rinishda yo'zaylik. Bu misolda $a = -2,\; b = 12,\; c = -19$ ekanligidan

$$m = -\frac{12}{2\times(-2)} = 3, \quad n = \frac{12^2 - 4\times(-2)\times(-19)}{4\times(-2)} = -1$$

Kvadratik funksiya ko'rinishi $y = -2(x-3)^2 - 1$. U holda bu funksiya grafigini yasash uchun $y = -2x^2$ funksiya grafigi uchini O(0;0) nuqtadan (3;-1) nuqtaga parallel ko'chiriladi. Demak $y = ax^2 + bx + c$ funksiya grafigini hosil qilish uchun $y = ax^2$ funksiya grafigini ikki marta parallel ko'shirish kerak, ya'ni avval $Ox$ o'qi bo'ylab, so'ngra esa $Oy$ o'qi bo'ylab parallel ko'shiriladi. Shunda funksiya grafigining uchi $x=m$, $y=n$ koordinatali nuqtaga ko'chadi. Bu holda quyidagilarni yodda tutish kerak:

a) $Oy$ o'qiga parallel bo'lgan $x=m$ to'g'ri chiziq parabolaning simmetriya o'qi bo'ladi;

b) $a > 0$ bo'lganda parabola tarmoqlari yuqoriga, $a < 0$ bo'lganda parabola tarmoqlari pastga yo'naltirilgan bo'ladi;

c) $a > 0$ bo'lganda funksiya $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ oraliqda kamayadi va $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ oraliqda o'sadi. $a < 0$ bo'lganda funksiya $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ oraliqda o'sadi, $(-\frac{b}{2a}; \infty)$ oraliqda kamayadi.

$y = ax^2 + bx + c$ funksiya grafigini chizishning eng oddiy usuli – bu xarakterli nuqtalarni topish va ular orqali uni chizish. Bunday nuqtalarga quyidagilar kiradi:

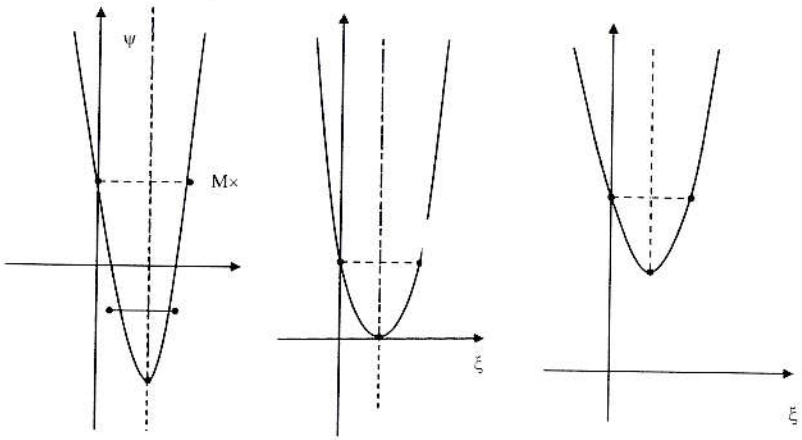
1) Funksiya grafigining abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtalari: $(x_1;0)$, $(x_2;0)$; bu yerda $x_1$ va $x_2$ lar $ax^2 + bx + c = 0$ – tenglamaning ildizlari;

2) Ordinata o'qini kesishish nuqtasi $x=0$ bo'lganda $y=c$ bo'ladigan $(0;c)$ nuqta;

3) $y = ax^2 + bx + c$ parabolaning uchi $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ yoki $\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ nuqtada bo'ladi;

4) Parabola $Oy$ o'qini $(0;c)$ nuqtada kesadi va $y = -\frac{b}{2a}$ to'g'ri chiziq parabolaning simmetriya o'qi bo'ladi.

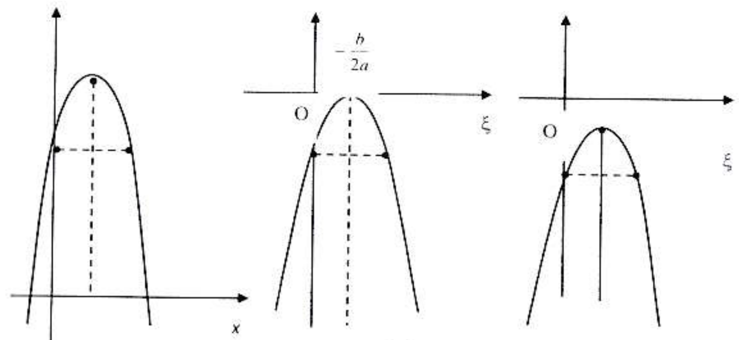
$1^0$ Agar $a>0$ bo'lsa, u holda




13-rasm



$2^0$ $a<0$ bo'lsa, u holda




14-rasm.

Masala: $y = 2x^2 + 8x + 2$ funksiya grafigini uning xossalaridan foydalanib chizing:

a) $x = -2; -0,5; 1,2$ bo'lganda $y$ ning qiymatlarini toping;

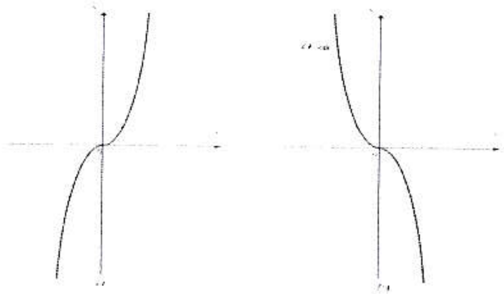
b) $y = -4; -1; 1,7$ bo'lganda $x$ ning qiymatlarini toping;

c) $y>0$, $y<0$ bo'ladigan argument qiymatlarini toping;

c) funksiyaning nollarini, o'sish va kamayish intervallari va minimal qiymatini toping.

Kvadrat funksiyalar kvadrat tenglamalarni, ikkinchi darajadagi tengsizliklarni va ikkinchi darajali bitta o'zgaruvchili tengsizliklarni yechishda keng qo'llaniladi.

### 3. $y = ax^3$ funksiyanign xossalari va grafigi



15-rasm.

$y = ax^3$ funksiya grafigi chiziladi va uning quyidagi xossalari yoziladi (15-rasm).

1. $a$ ($a \neq 0$) ning har qanday qiymatlarida $y = ax^3$ funksiya ning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi va uni kubik parabola deb ataladi (15-rasm).

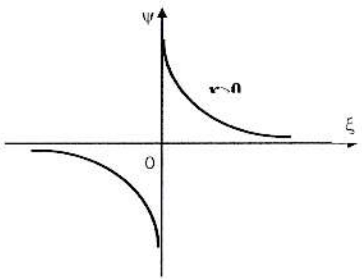
2. $a>0$ bo'lganda funksiyaning grafigi I va III choraklarda ($a$), $a<0$ bo'lganda funksiyaning grafigi II va IV choraklarda ($b$) yotadi.

3. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlari sohalari barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi, ya'ni $x \in (-\infty; \infty), y \in (-\infty; \infty)$.

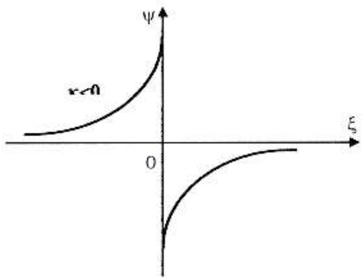
### 4. $y = \frac{k}{x}$ funksiya, uning grafigi va xossalari

Ta'rif: $y = \frac{k}{x}$ ko'rinishdagi formula bilan berilishi mumkin bo'lgan funksiya teskari proporsional funksiya deb nomlanadi, bu yerda $x$ erkli o'zgaruvchi, $k$ – nolga teng bo'lmagan son. Ushbu funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$ oralig'ida yotadi.
2. Funksiyaning qiymatlari sohasi $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$ oralig'ida yotadi.
3. Funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikdir (16-rasm), ya'ni k>0 bo'lganda u I va III koordinatalar choraklarida ($a$), k<0 bo'lganda esa u II va IV choraklarda (b) yotadi.




a)




b)

16-



4. $k>0$ bo'lsa, funksiya o'z aniqlanish sohasida kamayuvchi va k<0 bo'lganda, funksiya o'z aniqlanish sohasida o'suvchi bo'ladi.

Quyidagi masalalar yuqoridagi tushunchalarni mustahkamlaydi va malaka ko'nikmalarini rivojlantiradi.

1-topshiriq. $y = -\frac{6}{x}$ formulasi bilan berilgan funksiya grafigini jadvaldan foydalanib chizing:

a) funksiya musbat qiymatlarni, manfiy qiymatlarni qabul qiladigan oraliqlarni aniqlang;

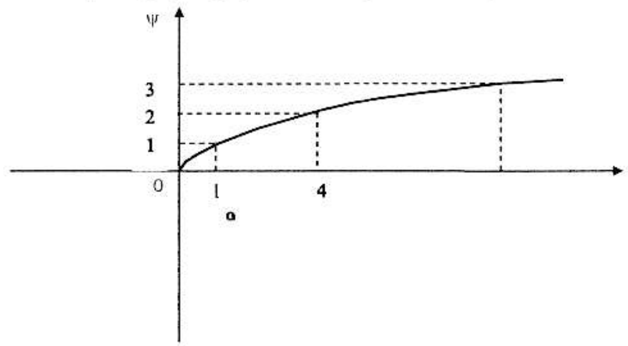
b) $x$ ning -3; 3, 1, 12 ga mos keladigan qiymatlarida $y$ ning qiymatlarini toping;

b) (2; -3); (2; 3); (0,5; -12) nuqtalar grafikka tegishli ekanligini ko'rsating.

2-topshiriq. Agar A (-2;4) nuqta teskari proporsionallik grafigiga to'g'ri kelishi ma'lum bo'lsa, funksiyaning analitik ifodasini yozing.

### 5. $y = \sqrt{x}$ funksiya va uning grafigi

$y = \sqrt{x}$ funksiyaga ta'rif berilmaydi, uning grafigi jadval yordamida chiziladi. $y = \sqrt{x}$ funksiyaning grafigi parabolaning bir tarmog'i bo'ladi (17-rasm).




17- rasm

$y = \sqrt{x}$ funksiyaning xossalari:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasi nomanfiy sonlar ($x \geq 0$) dir, qiymatlari sohasi ham nomanfiy sonlar ($y \geq 0$).

2. Agar $x=0$ bo'lsa, u holda $y=0$, demak funksiyaning grafigi koordinatalar boshidan o'tadi.

3. Agar $x>0$ bo'lsa, u holda $y>0$, grafik koordinata tekisligining birinchi choragiga to'g'ri keladi.

4. Funksiyaning katta qiymati argumentning katta qiymatiga to'g'ri keladi, ya'ni funksiya $(0; \infty)$ oralig'ida o'suvchi.

$y = x^2$ va $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning grafiklari $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik ekanligini unutmang.

### Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqli funksiyalarni o'qitish metodikasining o'ziga xos xususiyatlarini aytib bering.

2. Kvadratik funksiyalarni o'rganishda tadbiqiy masalalar qanday qo'llaniladi?

3. $y = ax^3$ funksiyaning xossalari va grafigini izohlang.

4. $y = \frac{k}{x}$ funksiya, uning grafigi va xossalariga misollar keltiring.

5. $y = \sqrt{x}$ funksiya grafigini chizing.



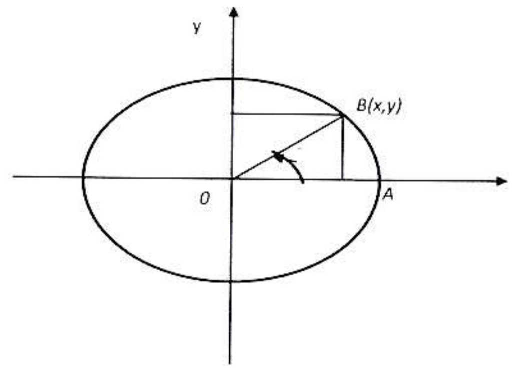
## 5.3-§. Ba'zi funksiyalarni o'qitish usullari

REJA:

1. Trigonometrik funksiyalar ta'riflarini o'qitish metodikasi.
2. Trigonometrik funksiyalarning asosiy xossalarini o'rgatish.

### 1. Trigonometrik funksiyalar ta'riflarini o'qitish metodikasi

Dasturda trigonometrik funksiyalar haqida ma'lumot berish quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi. Birinchidan, sinus, kosinus, tangens va kotangens aniqlanadi, bu quyidagicha izohlanadi. Faraz qilaylik, markazi O nuqtada bo'lgan birlik aylana berilgan bo'lib, uning OA radiusi soat strelkasiga qarshi aylantirilganda $A$ nuqta $B$ nuqtaga α burchak hosil qilib o'tadi (18-rasm).




18- rasm

B nuqta ordinatasining radius uzunligiga nisbati α burchakning sinusi deyiladi ($sin\alpha = \frac{y}{R}$);

B nuqta abssissasining radius uzunligiga nisbati α burchakning kosinusi deyiladi ($cos\alpha = \frac{x}{R}$);

B nuqta ordinatasining abssissa uzunligiga nisbati α burchakning tangensi deyiladi ( $tg\alpha = \frac{y}{x}$);

B nuqta abssissasining ordinata uzunligiga nisbati α burchakning kotangensi deyiladi ($ctg\alpha = \frac{x}{y}$).

Shunda ko'ra $sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ va $ctg\alpha$ lar faqat α burchakka bog'liq, ya'ni α burchakning mumkin bo'lgan har bir qiymati uchun $sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ va $ctg\alpha$ larning bitta qiymatiga to'g'ri keladi. Shuning uchun sinus, kosinus, tangens va kotangens burchak funksiyasi vazifasini bajaradi. Ular trigonometrik funksiyalar deb ataladi. Shuning uchun asosiy trigonometrik funksiyalar: $sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ va $ctg\alpha$. Trigonometrik funksiyalarning grafiklari 19-rasmda keltirilgan.

Trigonometrik funksiyalarning xossalarini ko'rib chiqishdan oldin har qanday funksiyani tavsiflovchi quyidagi ta'riflar esga olinadi.

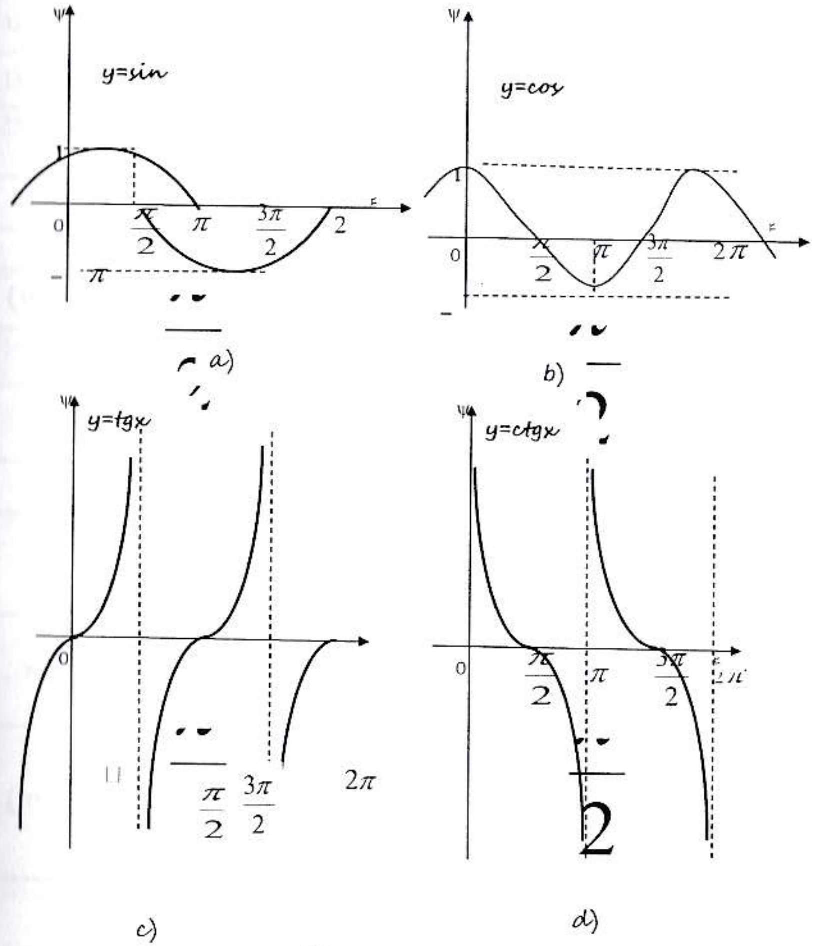
1-ta'rif. Agar $f(-x)=f(x)$ tenglik biron-bir oraliqda orinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya juft funksiya deb nomlanadi. Juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrikdir.

2-ta'rif. Agar $f(-x)=- f(x)$ tenglik biron-bir oraliqda o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya toq funksiya deb nomlanadi. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrikdir.

3-ta'rif. Agar funksiya aniqlangan sohadan olingan har qanday $x$ uchun $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaga davriy funksiya deyiladi.

4-ta'rif: Agar $x_o$ nuqtaning biror oraliqdagi barcha nuqtalar uchun $f(x) \geq f(x_0)(f(x) \leq f(x_0))$ o'rinli bo'lsa, u holda $x_0$ nuqta funksiyaning minimal (maksimal) nuqta (umumiy nom bilan - ekstremum nuqtalari) deyiladi.






19-rasm

Ushbu ta'riflar asosida trigonometrik funksiyalarning xossalari umumlashtirilishi va 1-jadvalda ko'rsatilishi mumkin.

1-jadval

2. **Trigonometrik funksiyalarning asosiy xossalarini o'rgatish**

| № | Funksiya-ning xossalari | Funksiyalar | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $sinx$ | $cosx$ | $tgx$ | $ctgx$ |
| 1 | Aniqlanish sohasi | R | R | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$ | $(\pi n;\ \pi+\pi n)$ |
| | Qiymatlar sohasi | [-1;1 ] | [-1;1 ] | R | R |
| 3 | Juft yoki toqligi | toq | juft | toq | toq |
| 4 | Eng kichik musbat davr | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ | $\pi$ |
| 5 | Grafikni Ox o'qi bilan kesishish nuqtalari | $\pi n$ | $\frac{\pi}{2}+\pi n$ | $\pi n$ | $\frac{\pi}{2}+\pi n$ |
| 6 | Grafikni Oy o'qi bilan kesishish nuqtalari | (0; 0) | (0.1) | (0; 0) | mavjud emas |
| 7 | Musbat qiymatlar qabul qiladigan oraliqlar | $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$ | $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n)$ | $(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$ | $(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$ |
| 8 | Manfiy qiymatlar qabul qiladigan oraliqlar | $-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$ | $(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{3\pi}{2}+\pi n)$ | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n)$ | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n)$ |
| 9 | o'sish interval-lari | $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n)$ | $[-\pi+\pi n;\ 2\pi n)$ | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$ | Bo'lmaydi |
| 10 | Kamayish oraliqlari | $(\frac{\pi}{2}-2\pi n;\frac{3\pi}{2}-2\pi n)$ | $[2\pi n;\ \pi+2\pi n)$ | Bo'lmaydi | $[\pi n;\pi+\pi n)$ |
| 11 | Minimum nuqtalari | | $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ | $\pi+2\pi n$ | Bo'lmaydi / Bo'lmaydi |
| 12 | Funksiyaning Minimumlari | - 1 | - 1 | Bo'lmaydi | Bo'lmaydi |
| 13 | Funksiyaning maksimum nuqtaqlari | $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ | $2\pi n$ | Bo'lmaydi | Bo'lmaydi |
| 14 | Funksiya maxi mumlari | 1 | 1 | Bo'lmaydi | Bo'lmaydi |



Trigonometrik funksiyalarning xossalarini o'rgangandan so'ng, bitta burchakning trigonometrik funksiyalari o'rtasidagi munosabatlarga e'tibor beriladi:

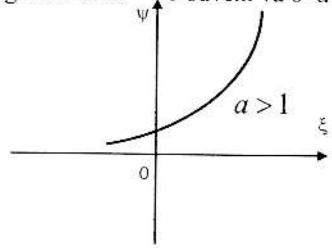
$$sin^2x+cos^2x=1\ ;\ tgx=\frac{sinx}{cosx}\quad ;ctgx=\frac{cosx}{sinx}\ ;$$

$$tgxctgx=1\ ;1+tg^2x=\frac{1}{cos^2x}$$

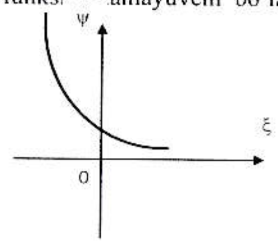
Qo'shish, ayirish va ko'paytirish formulalari umumlashtirilib, turli trigonometrik misol va masalalarni yechishda qo'llaniladi.

**3. Ko'rsatkichli funksiyalarni o'rganish**

$y=a^x\ (a>0\ ,a\neq 1)$ formula bilan berilgan funksiya asosi $a$ ga teng bo'lgan ko'rsatkichli funksiya deyiladi. Ko'rsatkichli funksiya $a$>1 bo'lgan holda funksiyaning grafigi 20-rasmda, o<$a$<1 bo'lgan holda funksiyaning grafigi 21-rasmda berilgan. Grafiklardan ko'rinib turibdiki, $a$>1 bo'lganda funksiya o'suvchi va o<$a$<1 bo'lganda funksiya kamayuvchi bo'ladi.




20-rasm




21–rasm

Ko'rsatkichli funksiya quyidagi asosiy xossalarga ega:

1. Aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to'plamidan iborat - $R$.
2. Qiymatlar sohasi R $_+$ barcha musbat haqiqiy sonlar to'plamidir.

3. $a>1$ bo'lsa, funksiya $R$ da o'sadi, $0<a<1$ bo'lsa, funksiya $R_+$ to'plamida kamayadi.

Ko'rsatkichli funksiyaning xossalari ko'rsatkichli tenglamalar va tengsizliklarni yechishda qo'llaniladi.

1-misol: $6^{x+1}+35\times 6^{x-1}=71$ tenglamani yeching.

Yechish: Uni yechish uchun

$$6^{x+1}=6^{2+x-1}=6^2 6^{x-1}=36\times 6^{x-1} \text{ desak,}$$

$$36\times 6^{x-1}+35\times 6^{x-1}=71\times 6^{x-1}$$

hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikdan

$$71\times 6^{x-1}=71\ ,\ 6^{x-1}=1,\ \ 6^{x-1}=6^0$$

shuning uchun $x-1=0\ ,\ x=1$

2-misol: $0,5^{7-3x}<4$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $5^{7-3x}<4$ ni $0,5^{7-3x}<0,5^{-2}$ kabi yozamiz.

Ko'rsatkichli funksiya $y=0,5^x$ kamayuvchi, chunki uning asosi birdan kichik. Demak, berilgan tengsizlik $7-3x>-2$ tengsizlikka teng kuchli, demak $x<3$.

Javobi: $(-\infty; 3)$

### 4. Logarifmik funksiyalarni o'qitish usullari

Ma'lumki $y=log_a x$ formula bilan berilgan funksiya asosi $a$ ga teng bo'lgan logarifmik funksiya deyiladi. Logarifmik funksiyaning grafigi $a>1$ bo'lganda 22-rasmda va $0<a<1$ bo'lganda 23-rasmda berilgan. Logarifmik funksiya $a>1$ bo'lganda o'sadi va $0<a<1$ bo'lganda kamayadi.

Logarifmik funksiyaning asosiy xossalari quyidagilardan iborat:

1. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi $R_+$, ya'ni barcha musbat haqiqiy sonlar to'plamidir.

2. Logarifmik funksiya qiymatlari diapazoni barcha haqiqiy sonlar to'plamidir.



3. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi $R_+$ da asos $a>1$ bo'lganda o'sadi, $0<a<1$ bo'lsa kamayadi.

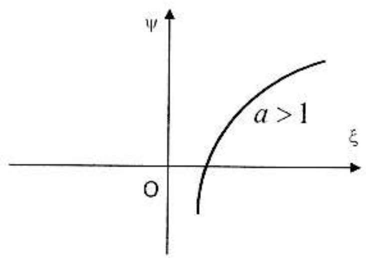
Logarifmik funksiyaning xossalari logarifmik tenglamalar va tengsizliklarni yechishda keng qo'llaniladi.

Misol. Tenglamani yeching: $log_2(x^2+4x+3)=0$.

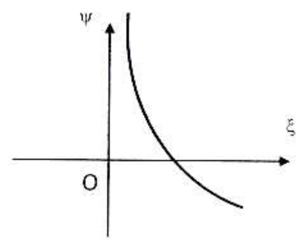
Logarifm ta'rifidan $x^2+4x+3=2^3$ kelib chiqadi. Demak

$$x^2+4x-5=0$$

Binobarin, . $x_1=1$ va $x_2=-5$. Javob: $x_1=1$, $x_2=-5$.




22-rasm




23– rasm

### 5. Darajali funksiya

$y=x^a$ formula bilan berilgan funksiya darajali funksiya deb ataladi (bunda daraja ko'rsatkishi $a$ ga teng). Darajali funksiyaning grafigi 24-rasmda $0<a<1$ bo'lganda, $a>1$ va $a<0$ bo'lgan hollar alohida keltirilgan.

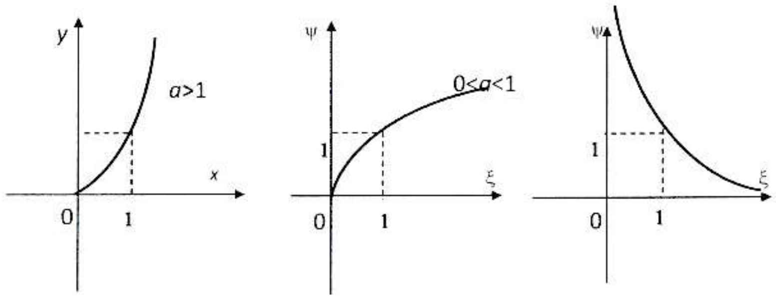
E'tibor bering:

1. $a=1$ da darajali funksiya $y=x$ kabi bo'ladi. Bu chiziqli funksiya.

2. $a=2$ da darajali funksiya $y=x^2$ kabi bo'ladi. Bu tanish kvadratik funksiya. Biz uning xossalari bilan tanishgan edik.

3. $a=3$ da darajali funksiya $y=x^3$ kabi bo'ladi. Bu kubik parabola.

Ushbu funksiyaning xossalari bilan tanishdik.




24-rasm.

Darajali funksiyanir     xossalarini ta'kidlash mumkin:

1. $a>0$ va $x=0$ da ham funksiya aniqlangan, chunki, $0^a = 0$. $a$ soni butun bo'lganda darajali funksiya $x<0$ uchun ham aniqlangan. Bu funksiya $a$ soni juft bo'lganda juft funksiya, $a$ soni toq bo'lganda toq funksiya bo'ladi. Shuning uchun funksiyani o'zgarish sohasi $(0; \infty)$ dan iborat.

2. $a>0$ bo'lganda darajali funksiya $(0;\infty)$ oralig'ida o'sadi.

## 5.4-§. Modul bilan berilgan funksiyalarning grafiklari

REJA:

1. Modul ta'rifi.
2. Modul bilan berilgan ba'zi funksiyalarning grafiklari.
3. Maktabda modul bilan berilgan funksiyani o'qitish usullari.

### 1. Modul ta'rifi

Modul – lotinchadan olingan so'z bo'lib, "miqdor" degan ma'noni bildiradi. Ba'zi hollarda u "modul" o'rniga mutlaq qiymat deb ham ataladi. Modul-ning ramzi 1841 yilda nemis matematigi Karl Veyershtrass (1815-1897) tomonidan kiritilgan.

Ta'rif. $a$ soni musbat bo'lganda $a$ ga teng bo'ladigan, $a$ soni manfiy bo'lganda $-a$ ga teng bo'ladigan songa $a$ sonining moduli deb ataladi, ya'ni



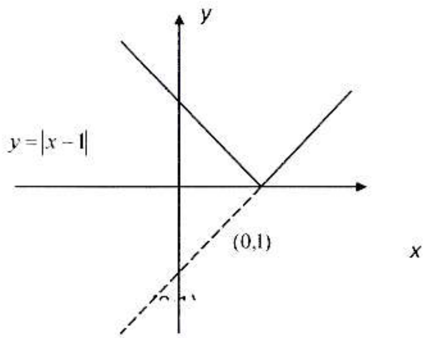
$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}.$$

$y = |f(x)|, y = f(|x|), y = |f(|x|)|$ funksiyalarning grafiklarini chizish mumkin.

1. $y = |f(x)|$ funksiyaning aniqlanish sohasi $y = f(x)$ funksiya aniqlanish sohasiga mos kelishi aniq. Agar ba'zi $x$ larda $|f(x)| = f(x)$, ba'zi $x$ larda $|f(x)| = -f(x)$ bo'lsa va bu ikki funksiyaning ordinatalari bir-biriga to'g'ri keladi, ya'ni grafiklarda umumiy nuqta mavjud. Modul ta'rifi bo'yicha $y=|f(x)|$ funksiya grafigi $y=f(x)$ funksiya grafigini $y<0$ bo'lganda $Ox$ o'qiga simmetrik qilib o'zgartiriladi.

### 2. Modul bilan berilgan funksiyalarning grafiklari

a) $y = |x-1|$ funksiya grafigini chizish uchun $y = x - 1$ funksiya grafigini $Ox$ o'qidan quyida joylashgan qismini $Ox$ o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish kerak (25-rasm).




25-rasm

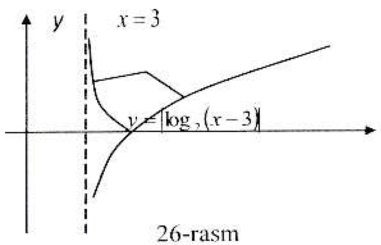
2. $y = f(|x|)$ grafigini chizish uchun $x \geq 0$ uchun $|x| = x$ ekanligini esga olamiz, ya'ni $x \geq 0$ uchun $f(|x|) = f(x)$ bo'ladi. Demak bu funksiya grafigi $Oy$ o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

$y = f(|x|)$ funksiyaning grafigini chizish uchun

$y = f(|x|) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ f(-x) \end{cases}$

lar bir xil.

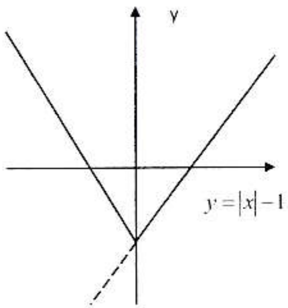
b) $y = |log_2(x-3)|$ funksiya grafigi 26-rasmda keltirilgan.




26-rasm

2) $y = f(|x|)$ funksiya grafigini chizish uchun, ya'ni $x \geq 0$ uchun $|x| = x$. tenglikning to'g'riligini eslaymiz, ya'ni $f(|x|) = f(x)$ bo'ladi. Shuning uchun tekislikning $0y$ o'qi bilan chegaralangan o'ng yarmida joylashgan funksiyaning nuqtalari ham funksiyaga mos keladi. Shuning uchun, grafik $Oy$ o'qiga simmetrik bo'ladi.

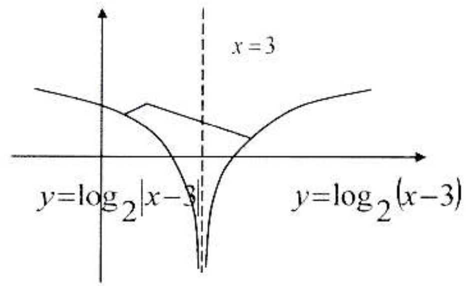
a) $y = |x| - 1$ funksiyaning grafigini chizish uchun $y = x - 1$ funksiyaning grafigiga asoslanamiz. $y = x - 1$ funksiyaning grafigini chizamiz. O'qning chap qismidagi bo'lagini olib tashlaymiz va uni o'q o'ng tomoniga simmetrik tarzda nusxa olamiz. Natijada $y = |x| - 1$ funksiyaning grafigi hosil bo'ladi (27-rasm).




27-rasm (0,-1)



b) $y = log_2|x-3|$ funksiya grafigi 28-rasmda keltirilgan.




28-rasm.

c) $y = \frac{1}{|x|-1}$ funksiya grafigini chizing.

Yechish:

1) Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. $x = -1$ va $x = 1$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptotalar bo'ladi.

2) 2) Berilgan funksiya juft $(y(-x) = y(x))$, shuning uchun $x \epsilon [0; 1] \cup (1; +\infty)$ da funksiya grafigini chizish kifoya qiladi, so'ng olingan grafikni $Oy$ o'qi bo'yicha simmetrik ko'chiramiz.

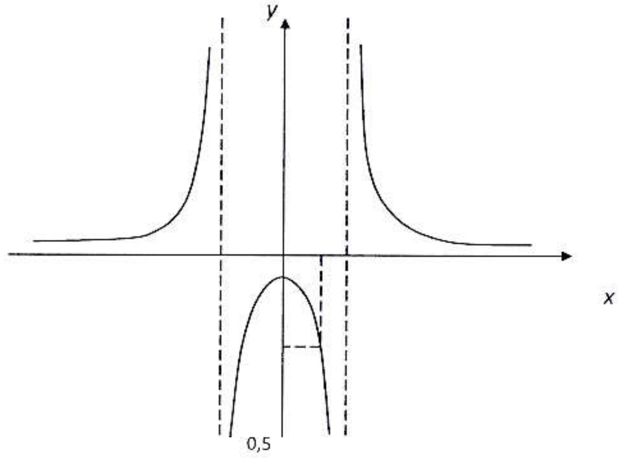
3) har qanday $x \in D(y)$ uchun $y \neq 0$, $y(0) = -1$.

4 ) $0 \leq x \leq 1$ da $y$<0 va $x$>1 da esa $y$>0.

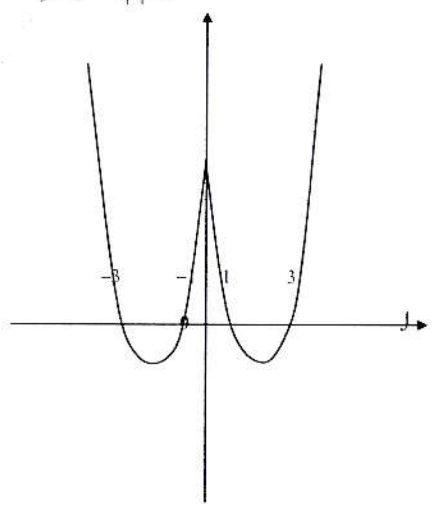
$$0 \leq x_1 < x_2 < 1$$

$x_1, x_2$ lar uchun $\frac{1}{x_1 - 1} < \frac{1}{x_2 - 1}$, bu (1;+∞) oraliqda funksiya kamayuvchi ekanligini ko'rsatadi.

5) $y(0{,}5) = -2$; $y(2) = 1$ bo'ladi. Ushbu funksiyaning grafigi 29-rasmda keltirilgan.




29-rasm



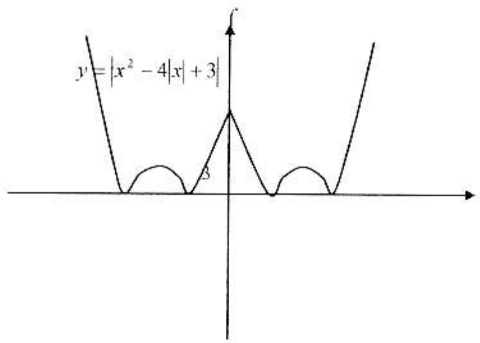

30-rasm

$y = x^2 - 4|x| + 3$ funksiyaning grafigi 30-rasmda keltirilgan.



3) $y = |f(|x|)|$ funksiya grafigini chizish uchun $y = f(x)$ funksiyaning grafigidan $y = f(|x|)$funksiyaning grafigiga o'tish kerak va bundan $y = |f(|x|)|$ funksiyaning grafigiga o'tamiz.

d) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ funksiya grafigi 31-rasmda keltirilgan.




31-rasm

4) $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + |f_3(x)| + ... + |f_n(x)|$ funksiya grafigi quyidagi tartibda chiziladi:

1) modul belgisi ostida ifodalarning nolga teng bo'lgan $x$ qiymatlarini topish;

2) topilgan qiymatlarni sonlar o'qida belgilash;

3) har bir son oralig'ida funksiyaning grafigi alohida-alohida chiziladi.

№1. $y = |x| - |x + 1| + 3|x + 2|$ funksiyaning grafigini chizish kerak (32-rasm). Berilgan funksiyada har bir modul ichidagi ifodalarni 0 ga tenglashtirish orqali $x$ ning qiymatlarini topamiz. 1) $x$=0, 2) $x$+1=0 , $x$=-1 3) $x$+2=0, $x$=-2

Ular sonlar o'qini to'rtta intervalga bo'ladi:

$(-\infty;-2), [-2;-1], (-1;0), [0;+\infty]$.

1-intervalda modullarni ochamiz:

$$(-x) - (-x - 1) - 3(x + 2) = -x + x + 1 - 3x - 6$$
$$= -3x - 5; \quad x\epsilon(-\infty; 2)$$

2-intervalda modullarni ochamiz:

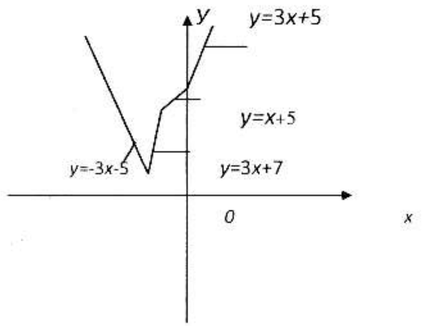
$$(-x)-(-x-1)+3(x+2)=-x+x+1+3x+6$$
$$=3x+7;\ x\epsilon[-2;-1])$$

3-intervalda modullarni ochamiz:

$$(-x)-(x+1)+3(x+2)=-x-x-1+3x+6$$
$$=x+5;\ x\epsilon(-1;0)$$

4-intervalda modullarni ochamiz:

$$(x)-(x+1)+3(x+2)=x-x-1+3x+6$$
$$=3x+5;\ x\epsilon[0;+\infty)$$




№2. $y=|2x-1|+|x|-|3+x|+2x-1$ funksiya grafigini chizing.

Yechish: modul nol qiymatlarni qabul qiladigan $x$ ning qiymatlarini topamiz: $x=-3$ ; $x=0$ ; $x=\frac{1}{2}$.

Bu sonlarni sonlar o'qida belgilaylik. Har bir intervalda modullarni ochaylik.

1-intervalda modullarni ochamiz:

$$-(2x-1)+(-x)-(-3-x)+2x-1$$
$$=-2x+1-x+3+x+2x-1=3;\ x\epsilon(-\infty;-3]$$

2-intervalda modullarni ochamiz:



$$-(2x-1)+(-x)-(3+x)+2x-1\ )$$
$$=-2x+1-x-3-x+2x-1$$
$$=-2x-3;\ x\epsilon(-2;0])$$

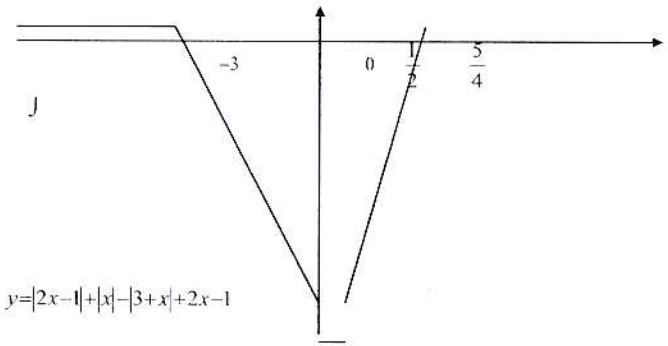
3-intervalda modullarni ochamiz:

$$-(2x-1)+(x)-(3+x)+2x-1\ )$$
$$=-2x+1+x-3-x+2x-1=-3;\ x\epsilon(0;0{,}5])$$

4-intervalda modullarni ochamiz:

$$(2x-1)+(x)-(3+x)+2x-1\ )$$
$$=2x-1+x-3-x+2x-1$$
$$=4x-5;\ x\epsilon(0{,}5;\infty)$$

Koordinatalar sistemasida olingan funksiyalarni tegishli intervallarda chizamiz (33-rasm).




33-rasm

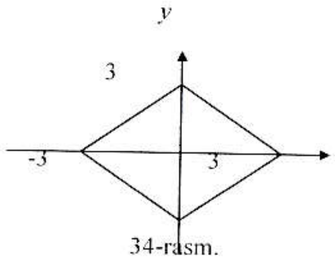
№ 4 . $|x|+|y|=3$ tenglamaning grafigini chizamiz.

Yechish: Birinchi usul. Sonning moduli ta'rifiga asoslangan holda:

$$a)\ \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y=3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x\geq 0 \\ y\leq 0 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 0 \\ -x + y = 3 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \\ -x - y = 3 \end{cases}$$

Tegishli choraklarda olingan chiziqlar grafigini chizamiz (34-rasm).

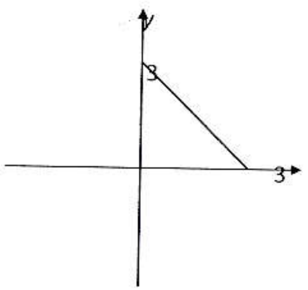



34-rasm.

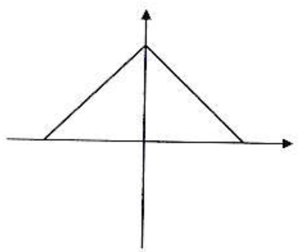
Ikkinchi usul - Berilgan tenglikda $|x|$ ni o'ng tomonga olib o'tsak:

$|y| = 3 - |x|$ hosil bo'ladi. Uni bir necha usulda grafigini chizish mumkin. Ushbu tenglamaning grafigi quyidagi ketma-ketlikda chizilishi mumkin.

$y = 3 - x$ (34a-rasm)




34a-rasm.



34b-rasm.

1) $|y| = 3 - |x|$ (34b-rasm).

**3. Maktabda modul bilan berilgan funksiyani o'qitish usullari**

O'rta maktab matematikasida modul belgisi bilan funksiyani o'rganishga, tuzishga kam e'tibor beriladi. Shuning uchun o'quvchilar ularni qurishda qiynaladi.



O'quvchilar birinchi marta 6-sinf matematikasida sonli modul bilan uchrashadi. Keyin 9-sinfgacha bu haqda hech narsa aytilmaydi va 10-sinf algebra va matematik analiz asoslari kursida bunday funksiyalar grafigini chizish uchun oz sonli topshiriqlar beriladi.

Shuning uchun analitik formulada modul belgisi bilan funksiyalar grafigini chizish ko'nikmalarini 7-8 sinf o'quvchilariga matematikadan yoki fakultativ darslarida o'rgatish mumkin.

"Chiziqli funksiya" va "To'g'ri proporsionallik" mavzularini o'rgangandan so'ng o'quvchilar $y = 2|x|$ kabi funksiya grafigini chizishlari mumkin (35-rasm). Buning uchun birinchi navbatda o'quvchilar $y = 2x$ to'g'ri proporsionallik funksiya grafigini chizishlari kerak va keyin o'quvchilar modul xossalarini eslab olib, $y = 2|x|$ funksiya grafigini $x \ge 0$ , $x < 0$ hollar uchun alohida-alohida chiziladi, keyin quyidagi savollarga javob berib, biriktirilgan grafiklarni taqqoslaymiz.

$y = 2|x|$ funksiya $x \ge 0$ , $x < 0$ uchun qanday qiymatlar olinadi?

$y = 2x$ va $y = 2|x|$ funksiyaning grafiklari o'rtasidagi o'xshashlik va farqlar qanday?

$y = 2|x|$ funksiya grafigini $y = 2x$ funksiyaning grafigidan hosil qilish mumkinmi?

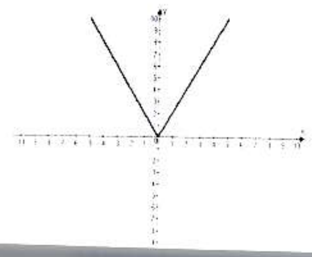
$y = 2x$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

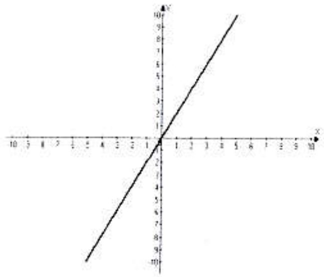
$y = 2|x|$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 6 | 4 | 2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

O'quvchilarga $y = 2|x|$ funksiyaning grafigini chizish uchun avval $y = 2x$



funksiyaning grafigini chizishingiz mumkin, so'ngra grafik o'ng qismini o'zgarishsiz qoldirishingiz mumkin va $x$ o'qi ($x<0$) chap qismini esa o'ng qismidan simmetrik qilib olishingiz mumkin. Tanlash uchun juda ko'p masalalar mavjud va iqtidorli o'quvchilar funksiya grafigini yasash bo'yicha olingan natijalardan foydalanib, $y = |x+1|$, $y = |2x+1|$ funksiyalar grafiklarini chizishlari mumkin (36-rasm).

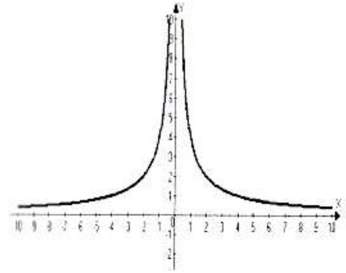


36-rasm.

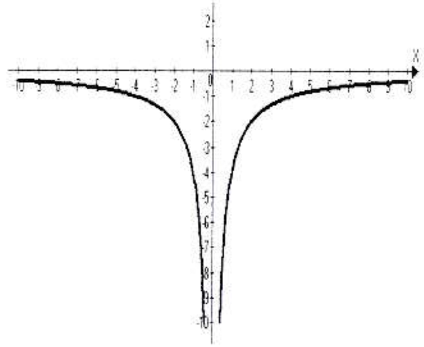
8-sinfda o'quvchilar teskari proporsional funksiyalar grafiklari bilan tanishadi va grafik chizish mahoratini rivojlantiradi. Iqtidorli o'quvchilar uchun $y = \frac{4}{|x|}$ va $y = \frac{-4}{|x|}$ funksiyalarning grafiklarini chizishni topshiriq sifatida berish mumkin (37-rasm).

9-sinf algebra kursida "Funksiya. Aniqlanish va o'zgarish sohalari" mavzusini o'rganishda o'quvchilar funksiya grafigi, uning aniqlanish va o'zgarish sohalari bilan tanishadilar.





$y = \frac{4}{|x|}$

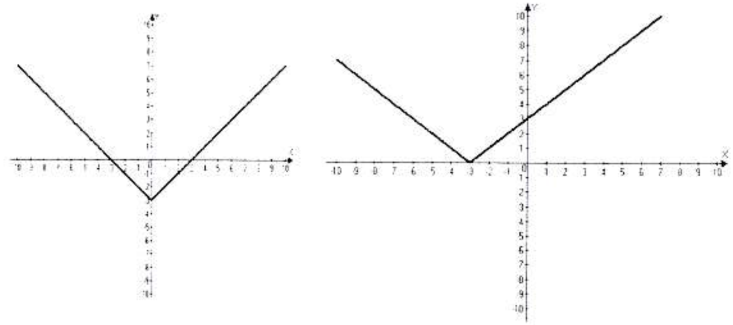


$y = \frac{-4}{|x|}$

37-rasm.

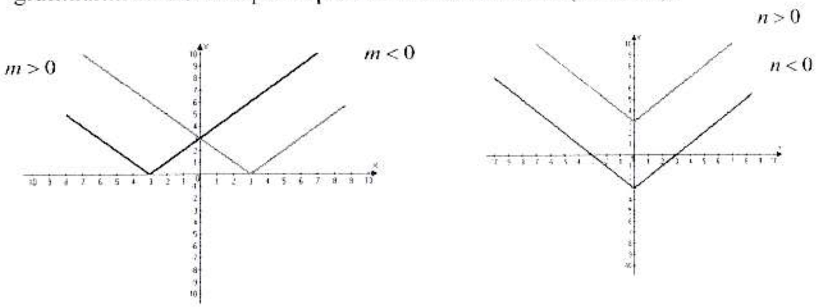
Topshiriqlar:

a) $y = |x| - 3$ ; b) $y = |x+3|$ funksiyalarning grafiklarini chizing (38-rasm).



38-rasm.

To'liqsiz kvadrat funksiyaning grafigini o'zlashtirishda olingan bilimlari modul bilan berilgan funksiyaning grafiklarini chizishda qo'llash mumkin, ya'ni $y = |x| - 3$ funksiya grafigini chizish uchun $y = |x|$ funksiyaning grafigini $Oy$ o'qi bo'ylab uch birlikka pastga tushiriladi va $y = |x+3|$ funksiyaning grafigini chizish uchun esa $y = |x|$ funksiyaning grafigini $Ox$ o'qi bo‘ylab uch birlikka chapga surish orqali olish mumkin . Shundan so‘ng siz iqtidorli o‘quvchilarga $y = |x| + n, y = |x - m|$ shakldagi funksiyalar grafiklarini chizishni topshiriq sifatida berish mumkin (39-rasm).




39-rasm

Shunday qilib, $y = |x - m|$ funksiyaning grafigini $y = x - m$ funksiyaning grafigi yordamida chizilishi mumkin, uning abssissa o‘qidan yuqori qismi o‘zgarishsiz qoladi va uning abssissa o‘qi ostidagi qismi simmetrik tarzda ko‘chiriladi.

Qobiliyatli o‘quvchilar kvadrat funksiyalarni tuzish bo‘yicha o‘z malakalarini oshirib, quyidagi funksiyalarni chizishga harakat qilishlari mumkin: $y = |x^2 - 1|$. Bu funksiyaning grafigini chizish uchun avval $y = x^2 - 1$ funksiyaning grafigini chizish kifoya qiladi va (-1;1) intervalda grafikning abssissa o‘qidan pastki qismini $Ox$ o‘qiga nisbatan simmetrik tarzda yuqoriga ko‘chiramiz, qolganlari o‘zgarishsiz qoldiriladi.

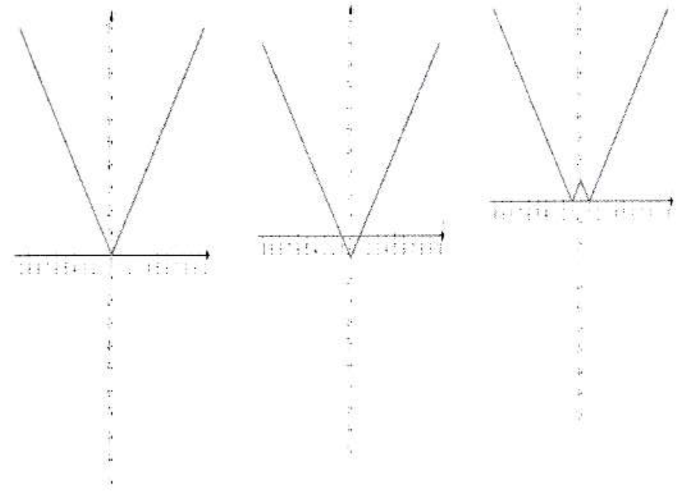
Tanlash uchun juda ko‘p o‘xshash masalalar mavjud, ammo ularni bajarganingizdan so‘ng, o‘quvchilar bilan $y = |f(x)|$ shakldagi topshiriqlarni bajarish to‘g‘risida xulosa chiqarish kerak.

Keyin $y = f(|x|)$ argumenti modul ostida bo‘lgan funksiyaning grafigini chizishni o‘rgatish zarurati tug‘iladi. $y = |f(|x|)|$ ko‘rinishdagi analitik ifoda ham, argument ham modul belgisi ostida olingan funksiyalar grafiklarini chizish



bilan olingan bilimlarni to‘ldirilishi kerak. O‘quvchilarga quyidagi funksiyaning grafiklarini chizishni topshirish kerak (40-rasm):

*a)* $y = |x|$ *b)* $y = |x| - 1$ $x| - 1|$



40-rasm

o‘quvchilar tomonidan *a) va b)* osonlikcha bajariladi, ammo *c)* dagi funksiya grafigini chizishda avvalo $y = f(|x|)$ ning grafigini chizamiz, so‘ng uni bitta o‘qqa parallel ravishda pastga siljitamiz va oxirida o‘qning pastki qismini ifodalaymiz.

Yakuniy $y = |f(|x|)|$ funksiyaning grafigini chizish uchun avval $y = f(|x|)$ funksiyaning grafigini chizamiz, so‘ngra abssissa o‘qi ustidagi grafikning qismini o‘zgarishsiz qoldiramiz va uning ostidagi qismi $Ox$ o‘qqa nisbatan simmetrik ko‘chiramiz. Grafiklar bilan ishlash o‘quvchilarning sonli modullar to‘g‘risidagi bilimlarini mustahkamlaydi va ularga oid masalalarni o‘rganishda, ularni tuzishda bilim va ko‘nikmalarni rivojlantiradi.

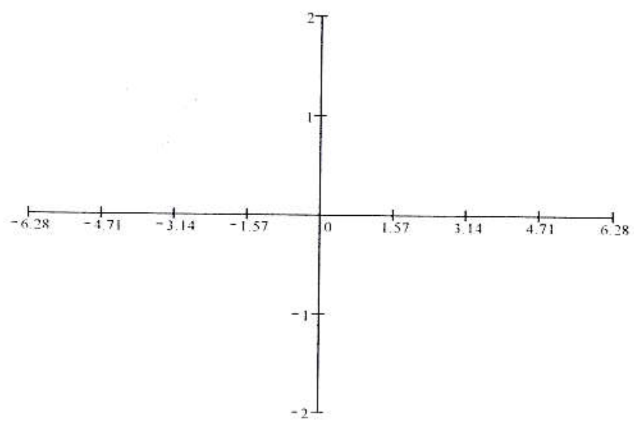
10-sinfda bu ishni davom ettirish kerak, chunki o‘quvchilar funksiyaning xossalari va uni o‘rganish bilan yanada to‘laroq tanishadi. 10-sinfda trigonometrik funksiyalar va ularning grafiklarini o'rganishga ko'p vaqt ajratiladi. Bu yerda quyidagi misollarni taklif qilish mumkin.

1) $y = cos|x|$ va $y = |cosx|$ funksiyalarning grafiklarini chizish.

Yechish:

*a)* $y = cos|x|$ va $\cos(-x) = cosx$. Shuning uchun berilgan funksiyaning grafigi $y = cosx$ funksiyaning grafigi bilan bir xil.

*b)* $cosx \geq o$ uchun $y = cosx$. Shuning uchun $cosx \geq o$ funksiyaning grafigi $y = cosx$ funksiyaning grafigi bilan bir xil. $cosx < o$ uchun $y = -cosx$ bo'ladi, ya'ni abssissa o'qi ostidagi funksiya grafigining qismi ushbu o'qqa nisbatan simmetrik tarzda yuqori yarim tekislikda joylashtiriladi (41-rasm).



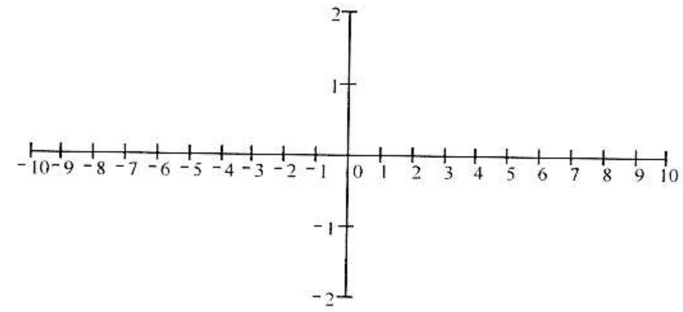

41-rasm.

**2)** $y = sin|x|$ **va** $y = |sinx|$ **funksiyalarning grafiklarini chizamiz.**

Yechish: $y = sin|x|$ funksiya grafigini chizish uchun $x>0$ larda bu funksiya grafigi $y = sinx$ funksiya grafigi kabi bo'ladi. Birinchi navbatda, bu funksiya

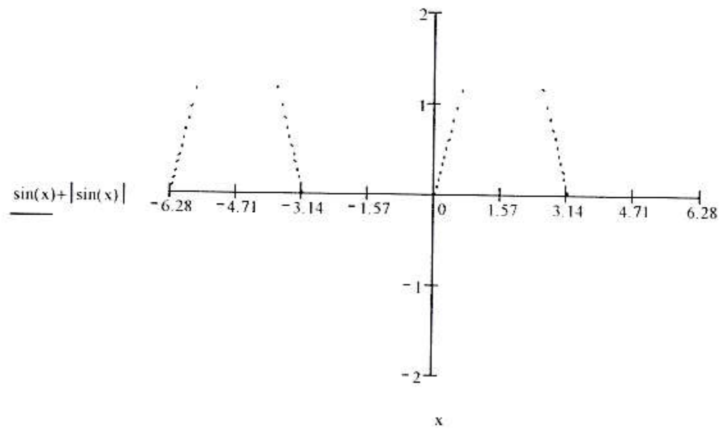


grafigini $Ox$ o'qi (42-rasm) yuqori qismi chiziladi, keyin $Ox$ o'qining quyi qismi bu o'qqa nisbatan simmetrik ko'chiriladi.




42-rasm

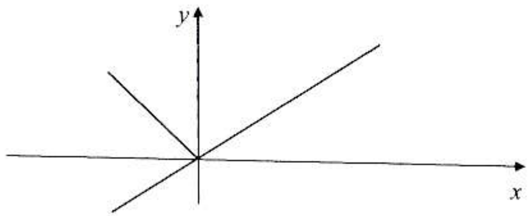
3) $y = sinx + |sinx|$ funksiyaning grafigini chizing (43-rasm).




43-rasm.

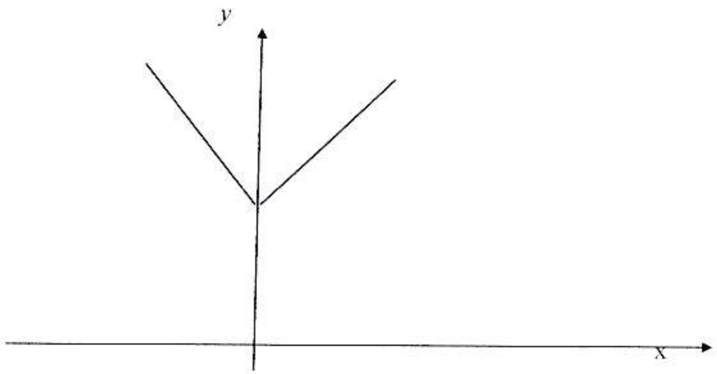
"Funksiya va uning grafigi" mavzusidagi yangi materialni o'rganishda grafiklarning turlari haqidagi bilimlar chuqurlashtiriladi, funksiya grafigi tushunchasi umumlashtiriladi. Buning uchun $y = |f(x)|$ va $y = f(|x|)$ funksiyalar grafiklarini qarab chiqamiz.

$a) y = |f(x)|$ funksiyaning grafigini chizishda $y = f(x)$ funksiya grafigidan foydalaniladi. Bunda $Ox$ o'qining yuqori qismida ularning grafiklari bir xil bo'ladi. $Ox$ o'qining quyi qismidagi funksiya grafigi $Ox$ o'qiga simmetrik ko'chiriladi (46-rasm).




46-rasm.

*b)* $y = f(|x|)$ funksiya grafigini chizish uchun $y = f(x)$ funksiya grafigidan foydalaniladi. $x \geq 0$ qiymatlarda ular ustma-ust tushadi va $x < 0$ qiymatlarda esa funksiya grafigi $Oy$ o'qqa nisbatan simmetrik ko'chiriladi (47-rasm).




47-rasm.

Trigonometrik funksiyalarni o'rganishda qo'shimcha vazifa sifatida eng yaxshi o'zlashtiradigan o'quvchilarga



$$y = 2 - sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$$

funksiyaning grafigini chizish to'pshirilishi mumkin.

Yechish: 1-usul. Avvalo $y = -sin|x|$ funksiya grafigini chizamiz.

Biz funksiyaning grafigini abssissalar o'qiga $+\frac{\pi}{3}$ ga, ordinatalar o'qi bo'ylab esa -2 ga suramiz (48-rasm).

2-usul. Funksiya grafigida ikkita tarmoq bor va ularning tenglamalari turlicha.

1) Agar $x + \frac{\pi}{3} \geq 0$, ya'ni $x \geq -\frac{\pi}{3}$ bo'lsa, u holda funksiya

$$y = 2 - \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

kabi bo'ladi.

2) Agar $x + \frac{\pi}{3} < 0$, ya'ni $x < -\frac{\pi}{3}$ bo'lsa, u holda funksiya

$$y = 2 - \sin\left(-\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2 + \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

kabi bo'ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Masala shartidan funksiyaning qiymatlari oralig'ini aniqlaymiz:

$$-1 \leq 2 - sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right| \leq 1$$

$$-1 + 2 \leq -sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right| \leq 1 + 2$$

$$1 \leq y \leq 3$$

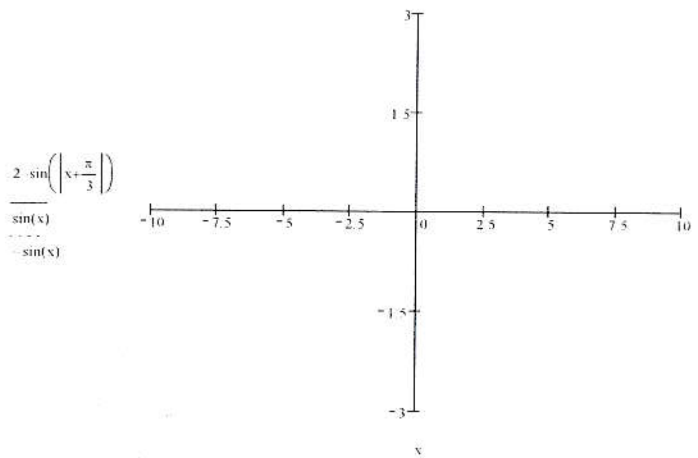
Grafikning koordinata o'qlaridan biri abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtasini topamiz : $x = -\frac{\pi}{3}$ , $y = -sin|0| + 2$ : $(-\frac{\pi}{3}; 2)$. .

Shuningdek o'quvchilarga

$y = arcsin|x|$ , $y = arcsin|x - 1|$ , $y = arccos|x|$, $y = arctg|x|$

kabi funksiyalar grafiklarini chizishni topshiriq qilib berish mumkin, ammo topshiriqni ushbu mavzuni eng yaxshi o'zlashtirgan va mavzuga qiziqqan o'quvchilar bajarishlari mumkin.

Bunday funksiyalarning grafiklarini yasashni o'rgangandan so'ng ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarning grafiklarini chizishga o'tish mumkin.




48-rasm.

## Bobni mustahkamlash uchun savollar

1. Maktab matematikasi kursida funksiya tushunchasining ro'lini aytib bering.
2. Funksional bog'lanish konsepsiyasini shakllantirish uchun qanday tizim zarur?
3. O'quvchilarning funksional bog'lanish haqidagi tushunchalarini rivojlantirish uchun muntazam ravishda qanday ishlarni bajarish kerak?
4. Maktabda funksiya tushunchasini o'qitish tartibi qanday?
5. Maktabda qanday funksiyalar o'rganiladi?



6. Funksiya tushunchasini mavhum-deduktiv usulda kiritish sxemasi qanday?
7. Funksiya tushunchasining kiritilishi maktab darsligida qanday tasvirlangan?
8. Chiziqli funksiyaga olib keladigan qanday masalalar bor?
9. Chiziqli funksiyaning xossalari uning grafigi bilan tavsiflanganligini tushuntiring.
10. O'quvchilarni chiziqli funksiyaning grafigini chizishga qanday o'rgatish kerak?
11. Chiziqli funksiyani analitik usulda qanday o'rganish kerak?
12. Maktabda kvadrat funksiyani o'qitish tartibi qanday?
13. $y = ax^2 + bx + c$ ni kiritishni qanday amalga oshirish mumkin?
14. $y = -2x^2 + 12x - 19$ funksiya grafigini chizing.
15. $y = |x - 1|$ funksiya grafigini chizishni qanday o'rgatish kerak?
16. $y = log_2|x - 3|$ funksiya grafigini chizish haqida tushuncha bering.
17. $y = \frac{1}{|x|-1}$ funksiya grafigini qanday chizish mumkin?
18. $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ funksiya grafigini chizing.
19. $y = |x| - |x + 1| + 3|x + 2|$ funksiya grafigini chizishni tushuntiring.
20. $y = |2x - 1| + |x| + 3|x + 2|$ funksiya grafigini chizing.
21. Maktab matematikasi kursida modul belgisi bilan funksiya grafigini chizishni tahlil qiling.
22. $y = sin|x|$ funksiya grafigini chizing.

# VI BOB. KETMA-KETLIKLARNI O‘QITISH USULLARI

## 6.1-§. Sonli ketma-ketliklarni o‘qitish usullari

REJA:

1. Sonli ketma-ketliklar.
2. Progressiyalarni o‘qitish usullari.
3. Arifmetik progressiyani o‘rganish.
4. Geometrik progressiyani o‘qitish usullari.

### 1. Sonli ketma-ketliklar

Ma’lumki maktab matematika kursida sonli ketma-ketliklar ikki xil usul bilan kiritiladi:

a) Algebraik usulda, ya’ni harfiy ifodalar yordamida kiritish;

b) Funksional usulda, ya’ni ketma-ketlikni natural sonlar to‘plamida aniqlangan funksiya sifatida qarash.

Maktab matematika kursida sonli ketma-ketliklar funksiyalar kabi to‘rt xil usul bilan beriladi:

1. $n$-hadi formulasi orqali
2. so‘z bilan ifodalash orqali
3. rekkurent formulalar bilan
4. grafik usul bilan.

Ketma-ketliklar maktab matematika kursida bir nechta bosqichda o‘rganiladi.

1-bosqich (intuitiv-amaliy bosqich).

a) boshlang‘ich sinflarda natural sonlar qatori

b) juft sonlar ketma-ketligi

c) toq sonlar ketma-ketligi:

5-8 sinflar

a) sonlarning kvadratlari ketma-ketligi, sonlarning kublari ketma-ketligi va hokazo.

b) 0,1 aniqlikda, 0,01 aniqlikda taqribiy sonlar ketma-ketligi va hokazo.

2-bosqich. (asosiy bosqich).

9-sinf. Ketma-ketlik tushunchasi bilan, uni berish usullari bilan. ketma-ketlikning hususiy holi bo'lgan progressiyalar bilan, progressiyalarning tatbiqlari bilan tanishadilar.

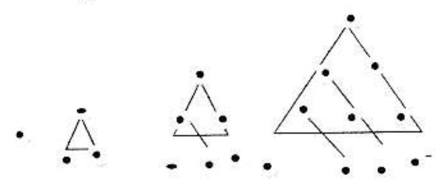
3-bosqich. (yakunlovchi bosqich).

10-sinf. Ketma-ketlik tushunchasi haqida tasavvurga ega bo'ladi. Ketma-ketlik tushunchasining geometrik, fizik, iqtisodiy va boshqa masalalarga tatbiqlarini o'rganadi.

Ketma-ketlik tushunchasini shakllantirish quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi:

1. Ketma-ketlik tushunchasiga olib keluvchi masalalar.
2. Sonli ketma-ketlik tushunchasi bilan bog'liq bo'lgan terminologiyani kiritish.
3. Ketma-ketlik tushunchasiga oid misollar keltirish.

Bu mavzuni tushuntirishda ham ko'rgazmalilik prinsipiga rioya qilish, masalan Pifagor sonlarini misol sifatida keltirish:



1; 3; 6; 10; ....

## 2. Progressiyalarni o'qitish usullari

O'rta maktab matematika kursida progressiyalar tuchunchasi muhim o'rin egallaydi. Progressiyalar tuchunchasini quyidagi sxemada tushuntirish maqsadga muvofiq:

1. Progressiya tushunchasiga olib keluvchi masalalar;



2. Progressiya tushunchasiga ta'rif berish va u bilan bog'liq bo'lgan terminologiyani kiritish;
3. Progressiyaga xos bo'lgan xususiyatlarni keltirish;
4. Progressiya xususiy hollari (arifmetik , geomertik) ni o'rganish;
5. Progressiyalarni ( $d$ va $q$ ga bog'liq) o'zgarishini tadqiq etish;
6. Progressiya umumiy hadi formulasini keltirib chiqarish;
7. Progressiya birinchi $n$ ta hadi yig'indisi uchun formulani keltirib chiqarish;
8. Ketma-ketlik tushunchasiga oid misollar keltirish va ularni yechish;
9. Progressiya tushunchasiga oid bilimlarni umumlashtirish va sistemalashtirish;
10. Davlat ta'lim standartlarida qo'yilgan talablarga muvofiq progressiya tushunchasiga oid bilim, ko'nikma va malakalarni nazorat qilish.

Usgbu sxemaga asoslanamiz:

1. Progressiya tushunchasiga olib keluvchi masalalar.

a) Ishchi 1-qatorga 3 ta plitka, 2-qatorga 5 ta plitka, 3-qatorga 7 ta plitka yotqisgan bo'lsa, u 10-qatorga nechta plitka yotqizadi?

b) Qulay muhitda 1 ta bakteriya 1 minutda 2 barobar ko'paysa, 7 minutdan so'ng ular soni nechta bo'ladi?

Progressiya tushunchasiga ta'rif berish va u bilan bog'liq bo'lgan terminologiyani kiritish.

Ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqangan funksiyaga sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Masalan:

$1, 2, 3, ..., n, ...$ (natural sonlar ketma-ketligi);

$2, 4, 6, ..., 2n, ...$ (juft sonlarning ketma-ketligi);

$1, 3, 5, ..., 2n+1, ...$ (toq sonlar ketma-ketligi);

$2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ (tub sonlar ketma-ketligi).

Ketma-ketlik a'zolari ketma-ketlik hadlari deb ataladi. Matematikada sonlar ketma-ketligi odatda quyidagicha yoziladi:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

$a_n$ ketma-ketlikning umumiy hadi yoki $n$-hadi deyiladi.

O'quvchilarga ketma-ketliklarning o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishini, ketma-ketlikni berish uchun uning umumiy hadini berish to'g'ri bo'lishini tushuntirish kerak. Masalan, juft sonlar ketma-ketligini uning $n$-hadi yordamida $a_n=2n$ shaklda berish mumkin. Shuningdek, ketma-ketliklar rekurrent formulalar yordamida ham beriladi. Bu yerda o'quvchilarga rekurrent formula haqida ham tushuncha berilishi zarur. Rekurrent formula deganda qandaydir hadidan boshlab ketma-ketlikning hadini o'zidan avval kelgan had bilan bog'lovchi formulani tushunamiz. (lotincha *recurro* – qaytish degan ma'noni anglatadi).

Masalan: $a_1 = 3$, $a_{n+1}=a_n^2$.

U quyidagicha yoziladi:

$$3, 9, 81, \ldots$$

Endi arifmetik progressiya bilan tanishamiz.

### 3. Arifmetik progressiyani o'rganish

Ta'rif. Ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi o'zidan oldingi haddan bir xil songa ortiq bo'lgan sonlar ketma-ketligiga arifmetik progressiya deyiladi.

Boshqacha so'z bilan aytganda, har qanday natural $n$ soni uchun

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $(a_n)$ ketma-ketlik arifmetik progressiya deb ataladi. Bu yerda $d = a_n - a_{n-1}$ ga arifmetik progressiyaning ayirmasi deyiladi. Agar $d>0$ bo'lsa, arifmetik progressiya o'suvchi va agar $d<0$ bo'lganda, arifmetik progressiya kamayuvchi deyiladi. Arifmetik progressiya quyidagicha aniqlanadi:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \text{ yoki } a_n = a_{n-1} + d.$$

Arifmetik progressiyani aniqlanishi bo'yicha

$$a_2 = a_1 + d,$$



$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

.................................................,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Demak, arifmetik progressiyaning $n$-hadi uchun formula quyidagicha:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Bu formula matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Arifmetik progressiya $n$-hadini boshqacha ko'rinishda quyidagi

$$a_n = dn + (a_1 - d)$$

formula shaklida yozish mumkin. Shuningdek,

$$a_n = kn + b$$

formula ham kerak bo'ladi. $a_n = kn + b$ formula bilan berilgan $(a_n)$ ketma-ketlik ham arifmetik progressiya bo'ladi ( bu yerda $k$ va $b$ - qandaydir sonlar).

Shuning uchun, arifmetik progressiyani natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiya sifatida ko'rish mumkin.

Faqat arifmetik progressiya uchun xos bo'lgan xossalari quyidagicha isbotlanadi:

Arifmetik progressiyani tarifi bo'yicha

$$a_{n+1} = a_n + d, \; a_{n-1} = a_n - d$$

Bundan

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \; n > 1.$$

kelib chiqadi, ya'ni uning hadi ikki qo'shni hadlarining arifmetik o'rtacha qiymatiga teng bo'ladi. Agar arifmetik progressiya birinchi hadi $a_1$ va arifmetik progressiyaning farqi $d$ ma'lum bo'lsa, uning qolgan hadlarini

$$a_{n+1} = a_n + d$$

rekkurent formula yordamida olish mumkin.

Arifmetik progressiya birinchi $n$ ta hadining yig'indisi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

uni quyidagi formula bilan ham yozish mumkin:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

### 4. Geometrik progressiyani o'qitish usullari

**Ta'rif.** Ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi o'zidan avvalgi hadni noldan farqli bir xil songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan sonlar ketma-ketligiga geometrik progressiya deyiladi.

Boshqacha aytganda, har qanday $n$ natural son uchun $b_n \neq 0$ va

$b_n = b_1 \times q$ shartlar bajarilsa, bu ketma-ketlikka geometrik progressiya deyiladi. Bu yerda $q$ qandaydir son bo'lib, uni geometrik progressiyaning mahraji deb ataladi va u

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

kabi aniqlanadi.

Matematik induksiya usuli bilan geometrik progressiyaning $n$-hadi quyidagi formula bilan aniqlanishi ko'rsatilgan:

$$b_2 = b_1 \times q,$$
$$b_3 = b_2 \times q = (b_1 \times q) \times q = b_1 \times q^2 .$$
$$b_4 = b_3 \times q = (b_1 \times q^2) \times q = b_1 \times q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$b_n = b_1 \times q^{n-1}$$

Bu formula to'g'riligini matematik induksiya usuli isbotladi.

$|q| > 1$ bo'lsa, geometrik progressiya o'suvchi va $|q| < 1$ da geometrik progressiya kamayuvchi deb ataladi.



Geometrik progressiyaning ta'rifiga ko'ra:

$$b_{n+1} = b_n \times q , \qquad b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi ikki tenglikdan esa

$$b_n^2 = b_{n-1} \times b_{n+1} , n > 1$$

kelib chiqadi.

Agar geometrik progressiyaning hadlari musbat bo'lsa, unda ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi har ikki qo'shni hadlarining geometrik o'rtacha qiymatiga teng: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \times b_{n+1}}$.

Geometrik progressiya quyidagicha belgilanadi:

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

$(b_n)$ geometrik progressiya berilgan bo'lsin. Uning birinchi $n$ ta hadi yig'indisini $S_n$ kabi belgilaymiz:

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Agar bu tenglikni ikkala tomononi $q$ ga ko'paytirsak:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + \cdots + b_n q$$ hosil bo'ladi.

Agar

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

larni hisobga olsak:

$$S_n q = b_2 + b_3 + \cdots + b_n + b_n q$$

kelib chiqadi. Ulardan esa

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + \cdots + b_n + b_n q) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= b_n q - b_1$$

ni keltirib chiqaramiz $q \neq 1$ desak, u holda

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

formulasi hosil bo'ladi.

$|q| < 1$ da cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi quyidagicha aniqlanadi:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1 q^n}{1 - q}$$

$|q| < 1$ va $n \to \infty$ da $q^n \to 0$ ni hisobga olsak:

$$\frac{b_1 q^n}{1 - q} \to 0$$

hosil bo'ladi. Demak $n \to \infty$ da:

$$S_1 = \frac{b_1}{1 - q}$$

Shunday qilib, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi yuqoridagi formula bilan aniqlanar ekan.

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi formulasidan davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirish uchun foydalanish mumkin.

0,(5) sof davriy o'nli kasr sonini quyidagicha yozish mumkinligi ma'lum:

$$0,(5) = 0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \cdots + \frac{5}{10^n} + \cdots$$
$$= 0,5 + 0,05 + 0,005 + \cdots$$

Buni cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi sifatida ko'rib chiqish mumkin, bunda birinchi hadi $a_1 = \frac{5}{10}$, progressiya mahraji $q = \frac{1}{10}$ deb olinadi:



$$0,(5) = 0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \cdots + \frac{5}{10^n} + \cdots =$$
$$= 0,5 + 0,05 + 0,005 + \cdots = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{5}{9}$$

Endi sof davrida $k$ ta raqam bo'lgan davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantiraylik. Buning uchun biz uni quyidagicha yozamiz:

$$0,(m_1 m_2 m_3 \ldots m_k) = \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^k} + \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^{2k}} + \ldots + \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^{nk}}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifodada

$$a_1 = \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^k} \text{ va } q = \frac{1}{10^k}$$

desak, uni cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya sifatida ko'rib chiqish mumkin. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi formulasidan

$$0,(m_1 m_2 m_3 \ldots m_k) = \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^k} + \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^{2k}} + \ldots + \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^{nk}} =$$

$$= \frac{\frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}} = \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{10^k - 1}$$

$10^k - 1 = 999\ldots9$ ni hisobga olib

$$0,(m_1 m_2 m_3 \ldots m_k) = \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_k}{999\ldots9}$$

to'g'ri ekanligi kelib chiqadi.

Binobarin, sof davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirishda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadan foydalanish mumkin ekan. Endi aralash davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantiraylik. Misol uchun, davrida $k$ ta raqamlarni va davrdan oldin $l$ ta raqami bor kasrni oddiy kasrga aylantirish kerak bo'lsin.

$$0, m_1 m_2 m_3 \ldots m_l(p_1 p_2 \ldots p_k) = \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_l}{10^l} + \frac{p_1 p_2 \ldots p_k}{10^{k+l}} + \frac{p_1 p_2 \ldots p_k}{10^{2k+l}} \ldots +$$
$$\frac{p_1 p_2 \ldots p_k}{10^{nk+l}} + \cdots$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi yig'indida ikkinchi qo'shiluvchidan boshlangan qo'shiluvchilar cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyani tashkil etganliklari uchun cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi formulasiga ko'ra

$$0,m_1m_2m_3\ldots m_l(p_1p_2\ldots p_k) = \frac{m_1m_2m_3\ldots m_l}{10^l} + \frac{\frac{p_1p_2\ldots p_k}{10^{k+l}}}{1-\frac{1}{10^k}} =$$

$$= \frac{m_1m_2m_3\ldots m_l}{10^l} + \frac{p_1p_2\ldots p_k \times 10^k}{10^{k+l}\times(10^k-1)}$$

$$= \frac{m_1m_2m_3\ldots m_l}{10^l} + \frac{p_1p_2\ldots p_k}{10^l\times(10^k-1)}$$

Shu sababli, aralash davriy o'nli kasrlarda davrdagi raqamlar va davrdan oldingi raqamlar o'rtasidagi farqqa teng, kasr mahrajidagi nollar soni davrdagi raqamlar soniga teng. Masalan:

$$0{,}15(3) = \frac{153-15}{900} = \frac{138}{900} = \frac{69}{450} = \frac{23}{150}$$

## Bobni mustahkamlash uchun savollar

1. Sonlar ketma-ketligi nima?
2. Ketma-ketliklarni berish usullari haqida aytib bering.
3. Qaysi formulaga rekkurent formula deyiladi?
4. Maktab matematika darslarida arifmetik progressiya tushunchasini qanday kiritish mumkin?
5. Arifmetik progressiyaning ta'rifini ayting.
6. Arifmetik progressiyaning xossalari qanday?
7. Arifmetik progressiyaning to'rtinchi hadi uchun formulani yozing
8. Matematik induksiya yordamida arifmetik progressiyaning $n$-hadi formulasini isbotlang.
9. Arifmetik progressiyaning birinchi $n$ ta hadi yig'indisi qaysi formula bo'yicha aniqlanadi?



10. Geometrik progressiya nima?
11. Geometrik progressiyaning mahraji nima?
12. Geometrik progressiyaning xossalarini ayting.
13. Geometrik progressiyaning $n$ -hadi uchun formulani yozing.
14. Geometrik progressiyaning birinchi $n$ ta hadlari yig'indisi uchun formulani yozing.
15. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya nima?
16. Cheklsiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi uchun formulani yozing.

# VII BOB. DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOB KURSI ELEMENTLARINI O'QITISH USULLARI

Matematik analiz elementlari har doim ham maktab matematika kursiga kiritilmagan. Keyingi yillarda ta'lim sohasidagi o'zgarishlar natijasida hosila va integral tushunchalari maktab matematika dasturlariga kiritildi. Ko'p hollarda funksiyaning hosilasi va funksiyadan olingan integral tushunchalarini o'rta maktab o'quvchilariga o'qitishda ma'lum qiyinchiliklarga uchraymiz. Bu tushunchalarni o'qitishning turli zamonaviy usullarini topish va ularni qo'llash matematika fani o'qituvchisi oldida turgan fazifalardan biridir. Hosila mavzusini o'qitishdan ko'riladigan maqsadlarga o'quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirish, hayotdagi boshqa fanlardagi muammolarni yechishda hosilani qo'llash, hosila yordamida turli bog'lanishlarni o'rganish, bu sohaga oid maxsus adabiyotlarni o'qiy olishni o'rgatishdan iboratdir. Hosila mavzusini o'rganishdan olingan bilim, ko'nikma va malakalar ayniqsa geometriya, fizika, informatika va boshqa fanlarni o'rganishda qo'l keladi. Asosiy elementar funksiyalarni o'rganish, ularning grafiklarini chizishda hosila tushunchasi ahamiyatini anglashlarida ularga yordam berish kerak. Odatda hosila tushunchasini kiritishning turli usullari mavjuddir. Akademik A.N.Kolmogorov g'oyasiga ko'ra, hosilani funksiya orttirmalari yordamida kiritishni taklif etgan bo'lsa, M.I.Bashmakov hosila tushunchasini kiritishda hosilaning geometrik, mexanik ma'nolari yordamida kiritishni taklif etgan. A.G.Mordkovich esa sonly ketma-ketlik limiti yordamida hosila tushunchasini kiritgan.



## 7.1-§. Hosilani o'qitish usullari

REJA:

1. Hosilani kiritish metodikasi.
2. Funksiyani o'rganishga hosilaning tatbiqi.

### 1. Hosilani kiritish metodikasi

Sh.A.Alimovning "Algebra va matematik analiz asoslari" darsligi "Hosila va uning geometrik ma'nosi" deb nomlangan VIII bobida hosila quyidagi tartibda o'rganiladi:

**1.** Hosila.

**2.** Darajali funksiya hosilasi.

**3.** Hosila olish qoidalari.

**4.** Ba'zi elementar funksiyalar hosilalari.

**5.** Hosilaning geometrik ma'nosi.

Hosilani kiritish metodikasi. Hosilani kiritishda bu tushunchaning ahamiyati, hosilaning keng tatbiqlarini tushuntirish zarur. Ko'p matematik tushunchalar kabi bu tushunchani ham o'quvchilarning ko'pchiligi qiyin tushuncha, keraksiz tushuncha, degan yanglish fikrdalar. Bu tushunchaning kerakligini, bu tushuncha juda ko'p tatbiqlarga ega ekanligini ularga singdirish zarur.

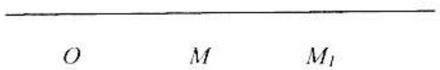
Hosila tushunchasini kiritishda ko'rgazmalilik prinsipidan foydalangan holda oniy tezlik so'ngra to'g'ri chiziqli harakat o'rganiladi. Bu jarajonda funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma tushunchasi zarurligi uqtiriladi. Shunday qilib, o'quvchilarda bu tushunchani o'rganishga motivatsiya uyg'otiladi.

Hosila tushunchasi fanlararo aloqani namoyon etishga juda qulay. Avval o'quvchilarga fizika fanidagi o'rtacha tezlik, oniy tezlik, tekis tezlanuvchan tezlik tushunchalari eslatiladi.

Shiningdek, quyidagi masalalarni ko'rish mumkin: isitilayotgan metall truba uzunligini o'zgartirish jarayonini ko'rib chiqing. Ushbu jarayon bir tekis emas: birinchi navbatda truba uzunligi biroz o'zgaradi, issiqlik ko'payishi bilan truba uzunligi tez isishni boshlaydi. Quyidagi misol: suyuqlik idishning pastki qismidagi teshikdan oqib chiqadi deylik. Oqayotgan suyuqlikning tezligi quyidagicha o'zgaradi: vaqt o'tishi bilan u pasaya boshlaydi. Agar bitta hujayrali organizmlarning bo'linishi jarayonini olsak, uning tezligi vaqt o'tgan sari tez o'sadi.

Jarayonning o'zgarish tezligini aniqlash ushbu jarayonni bosh-qarish zarurligini anglatadi. Ushbu muammolarning har birini hal qilishda biz o'rtacha tezlikni topish muammosiga duch kelamiz. Uni quyidagicha amalga oshirish mumkin. Faraz qilaylik tekis tezlanuvchan harakat $s = \frac{1}{2}jt^2$ berilgan bo'lsin. Aytaylik, vaqtning $t$ momentida harakatlanuvchi jism M nuqtada, vaqtning $t_1$ momentida harakatlanuvchi jism $M_1$ nuqtada bo'lsin. M nuqtadagi jismning tezligini topish talab qilingan bo'lsin. $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni topaylik. Buning uchun yo'l orttirmasi $MM_1=OM_1-OM$ (1-rasm) ni vaqt ortirmasiga nisbatini topamiz, u o'rtacha tezlikni ifodalaydi:

$$v_{o'r} = \frac{OM_1 - OM}{\Delta t}$$




1-rasm

Ammo $OM_1$ $t_1$ vaqt davomida jismning O nuqtadan $M_1$ nuqtagacha bosib o'tgan masofasidir, ya'ni

$$s_1 = \frac{1}{2}j(t + \Delta t)^2$$

OM esa $t$ vaqt davomida jismning O nuqtadan M nuqtagacha bosib o'tgan masofasidir, ya'ni



$$s = \frac{1}{2}jt^2.$$

U holda bosib o'tilgan masofaning orttirmasi:

$$\Delta s = \frac{1}{2}j(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}jt^2 = \frac{1}{2}j(2t\Delta t + \Delta t^2)$$

va o'rtacha tezlik:

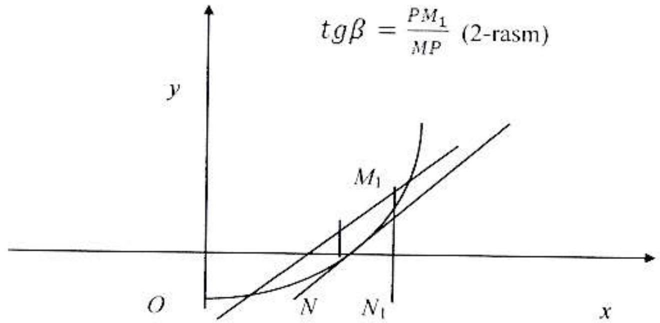
$$v_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}j(2t\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = jt + \frac{1}{2}\Delta t$$

O'rtacha tezlik $\Delta t$ vaqt o'zgarishi bilan o'zgaradi. Vaqt oralig'i $\Delta t$ qancha kichik bo'lsa, o'rtacha tezlik $t$ vaqtdagi tezlikdan shuncha kam farq qiladi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(jt + \frac{1}{2}j\Delta t\right) = jt$$

Bu masalani korib chiqqandan keyin egri chiziqqa o'tkazilgan urinma masalasini ko'ramiz. Avvalo urinma haqida o'quvchilarga ma'lumot berish kerak. Urinma tenglamasini tuzish uchun uning burchak koeffitsiyentini topish kerak. Buning uchun $y = ax^2$ egri chiziqqa $M(x;y)$ nuqtada o'tkasilgan urinma masalasini ko'raylik. Kesuvchining $Ox$ o'qi bilan hosil qilgan burchagi $\beta$ bo'sin, ya'ni

$$tg\beta = \frac{PM_1}{MP} \text{ (2-rasm)}$$




2-rasm.

Ammo $\Delta x = MP, PM_1 = N_1M_1 - N_1P = N_1M_1 - N$ $M_1$ nuqtaning ordinatasi $y_1 = a(x + \Delta x)^2$, $M$ nuqtaning ordinatasi $y_1 = ax^2$. Demak

$$tg\beta = \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = a(2x + \Delta x) = 2ax + a\Delta x$$

$\Delta x$ nolga intilganda β burchak α burchakka intiladi va

$$tg\alpha = 2ax.$$

Masala. $y = \frac{1}{5}x^2$ parabolaga $M(3;1{,}8)$ nuqtada o'tkazigan urinma burchak koeffitsiyenti topilsin. Bu paraboladagi (5;5) nuqtani olamiz va bu nuqtada parabolaga kesuvchi o'tkazamiz. Uning burchak koeffitsiyenti

$$tg\beta = \frac{5 - 1{,}8}{5 - 3} = 1{,}6 \;, \beta = 58^\circ$$

M nuqtani parabola bo'yicha siljitamiz va bu nuqtalarda o'tkazilgan burchak koeffitsiyentlari bo'yicha jadval tuzamiz:

| $x_n$ | $y_n$ | $tg\beta = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 1,6 | $58^0$ |
| 4 | 3,2 | 1,4 | $54^0 28'$ |
| 3,5 | 2,45 | 1,3 | $52^0 26'$ |
| 3,1 | 1,922 | 1,22 | $50^0 40'$ |
| 3,01 | 1,81202 | 1,202 | $50^0 15'$ |
| 3,001 | 1,8012002 | 1,2002 | $50^0 12'$ |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 3 | 1,8 | 1,2 | $50^0 12'$ |



Jadvaldan ko'rinib turibdiki, $M$ nuqta $M_0$ (3;1,8) nuqtaga intilganda

$$tg\beta = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

1,2 ga β burchak esa $50^0 12'$ ga intilmoqda.

Bunday mashqlardan so'ng $y = ax^2$ parabola ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini aniqlash mumkinligi kelib chiqadi.

Hosilaga olib keluvchi masalalar o'rganilgandan keyin hosila olish bosqichlari, hosila olish qoidalari, ba'zi elementar funksiyalar hosilalari keltiriladi.

**2. Funksiyani o'rganishga hosilaning tatbiqi**

"Funksiya hosilasi" va "Bir nuqtadagi funksiya hosilasi" o'rtasidagi farq tushuntiriladi. $x_0$ nuqtada berilgan funksiya hosilasining qiymati sondir, funksiya hosilasi esa funksiya.

Maktab matematika kursida hosilani hisoblash, geometriya, fizika, kabi qator fanlarda funksiyalarni o'rganishda keng qo'llaniladi. Ushbu mavzu o'quvchilarning dialektik nuqtai-nazarini, aniq materialni shakllantiradi.

O'quvchilarning ushbu mavzu bo'yicha funksiyalarni o'rganish bo'yicha bilimlari tizimlashtirilgan, funksiyalarni o'rganishning umumiy sxemasi batafsil ko'rib chiqilgan.

O'quvchilarga analitik funksiyani tekshirishning foydali tomonini tushuntirish juda muhim: funksiyani nuqta bilan chizish usuli har doim ham qulay emas va xatto bir nechta nuqtalarni topish va funksiyani chizish ham uning shakli va o'zgarishi haqida aniq ma'lumot bermaydi.

Hosiladan foydalanish, funksiyaning monotonlik intervallarini topish va ekstremumni o'rganish esa ko'p nuqtalarni topish, funksiya grafigini noto'g'ri chizishdan saqlaydi. Hosila funksiya grafigini aniqroq topishga, funksiyaning grafik turini to'g'ri tushunishga imkon beradi. Bunday hollarda funksiyani o'rganish va chizish uchun reja yoki sxema tuzish kerak:

1) funksiyaning aniqlash sohasini topish;

2) funksiyaning qiymatlari sohasini topish;

3) funksiya grafigini koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish;

4) funksiya hosilasini topish;

5) funksiyaning o'sish va kamayish oraiqlarini aniqlash;

6) funksiyaning ekstremal nuqtalarini va shu nuqtalardagi qiymatlarini topish.

Berilgan funksiyaning hosilasini hisoblab chiqqandan va ekstremal nuqtalarni topgandan so'ng, o'rganish natijalari to'g'risidagi ma'lumotlarni maxsus jadvalga kiritish foydali bo'ladi.

Misol. $f(x) = x^3 - 3x$ funksiya uchun quyidagicha jadval tuzish mumkin:

| $X$ | $(-\infty;-1)$ | -1 | $(-1;1)$ | 1 | $(1;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 2 | ↘ | -2 | ↗ |
| | | *max* | | *min* | |

Endi hosila yordamida funksiyani tekshiramiz va uning grafigini chizamiz.

1-misol.

$$y = x^4 - 2x^2 + 2$$

funksiyani to'la tekshiring va grafigini chizing.

Yechish: Sxema bo'yicha ish olib boramiz.

1. Funksiya aniqanish sohasi $x\epsilon(-\infty;\infty)$

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | -1 | $(-1;0)$ | 0 | $(0;1)$ | 1 | $(1;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 1 | ↗ | 2 | ↘ | 1 | ↗ |
| | | *min* | | *max* | | *min* | |



## 7.2-§. Integralni o'qitish metodikasi

REJA:

1. Integral tushunchasining kelib chiqish tarixi.
2. Integral tushunchasini kiritishdagi muammolar.
3. "Integral va uning tatbiqlari" bo'limini o'qitish metodikasi.
4. Nyuton-Leybnits formulasi.

### 1. Integral tushunchasining kelib chiqish tarixi

Integralning kelib chiqishi va rivojlanishi amaliy muammolarni hal qilish bilan chambarchas bog'liq bo'lgan matematik tushunchalar sirasiga kirib, mazkur tushuncha va uning asosida yaratilgan usul bugungi kunda insoniyatning ilmiy va amaliy faoliyatining turli sohalarida, jumladan fizika, kimyo, biologiya, iqtisodiyot, texnik fanlar va boshqalarda qo'llanilib kelinmoqda.

"Integral va uning tatbiqlari" bo'limi maktab o'quv dasturiga o'tgan asrning 60-yillarning oxiri, 70-yillari boshida o'tkazilgan ta'lim islohotlari (Sobiq sho'rolar davrida) munosabati bilan kiritilgan. Oradan ancha yillar o'tsa-da, maktab matematika kursida mazkur bo'limni o'qitish ko'p munozaralarga sabab bo'lib kelmoqda. U o'rta maktab matematika kursining eng qiyin bo'limlaridan biri hisoblanib, olimlar o'rta maktabda uni samarali o'qitish bo'yicha uning nazariy va didaktik tuzilishiga, mavzularini o'qitish metodlari va vositalariga oid juda ko'plab tadqiqotlarni amalga oshirishdi.

Shunday bo'lsa-da, izlanishlar va tajriba shuni ko'rsatadiki, ushbu mavzuni o'qitishda shunday sharoitda ham juda ko'plab muammolar mavjud. Chunki, mazkur mavzu bo'yicha o'rganiladigan juda ko'p ma'lumotlar rasmiy xarakterga ega bo'lib, integral tushunchasini shakllantirishda yuzaga keladigan muammolarni hal qilish uchun o'quvchilarda to'g'ri ko'nikmalar rivojlanmagan.

Mazkur muammo va qiyinchiliklarning asosiy sabablari quyidagilardan iborat:

uni o'rganishga xizmat qiluvchi ko'pgina tushunchalarning mavhumligi;

ta'riflarining mantiqiy tuzilishining murakkabligi;

to'la tushunish va o'zlashtirish uchun ajratilgan vaqtning to'g'ri emasligi va hokazo.

Shuning uchun "Integral va uning tatbiqlari" modulini samarali o'qitish uchun:

dastlab uni o'qitish maqsadlarini to'g'ri belgilab olish bilan bog'liq muammolarni hal qilish;

nazariy va didaktik materiallar hamda uslubiy materiallar tarkibini to'g'ri tanlash muhim hisoblanadi.

"Integral va uning tatbiqlari" bobini samarali o'qitishga xizmat qiladigan asosiy omillar quyidagilardan iborat: didaktikakaning ilmiylik, uzluksizlik, oddiydan murakkabga, nazariya bilan amaliyotning bog'liqligi kabi tamoyillari va uni taqdim etishning eng qulay yo'llarini o'zida mujassam etgan nazariy materialni tanlash kerak. To'g'ri maktab matematika kursida "Integral" tushunchasini o'rganishda ilmiylik tamoyilini to'la amalga oshirib bo'lmaydi, chunki unda o'quvchilar isbotlashi uchun zarur bo'lgan matematik formulalar, qoidalar va teoremalar yo'q. Lekin o'quv mashg'ulotlari (dars) jarayonida:

o'quvchilarda integratsiya jarayoni va uning qonunlari haqida to'g'ri tushunchani shakllantirish kerak;

o'quvchilarga nazariy materialni taqdim etishning eng qulay va samarali metodini tanlash;

nazariy materiallarni taqdim etishda sinfning va har bir o'quvchining individual, psixologik va yoshga bog'liq xususiyatlarini, ularning fikrlash qobiliyatini, matematik tayyorgarligining umumiy darajasini hisobga olish;

masala va topshiriqlar tizimi asosiy tushunchalar, formulalar va ularning xususiyatlarini: o'zlashtirish uchun eng qulay sharoitlarni yaratadigan, o'quvchilarda tanqidiy fikrlash va tahlil qilish qobiliyatini rivojlantirishga yo'naltirilgan bo'lishi (Bunga erishishda amaliy mazmundagi masala va misollar,



tadqiqot qilishga va isbotlashga doir topshiriqlardan foydalanish ko'zlangan maqsadga erishishda muhim hisoblanadi);

o'rganilayotgan nazariy materiallarni anglangan holda tushunib yetishlariga erishish uchun tushunish va yod olish, turli modellar, chizmalar, diagrammalar, grafiklar, jadvallar, zamonaviy ta'lim vositalaridan foydalanish kerak.

Ta'lim samaradorligi va amaliy yo'nalishini oshirishda amaliy hamda tatbiqiy mazmundagi masalalar muhim o'rin tutadi. Bunday mazmundagi masalalar o'quvchilarga matematik metodlarning boshqa fanlarni, xususan kimyo, fizika, biologiya kabi fanlarni o'rganishda muhim ekanligini ko'rsatishda asosiy o'rin tutadi.

### 2. Integral tushunchasini kiritishdagi muammolar

Maktab matematika kursida integral tushunchasi bilan o'quvchilarni tanishtirishda uning ta'rifi abstrakt ko'rinishda kiritiladi. Shuning uchun o'qituvchi oldida turgan asosiy muammo bu:

yangi matematik atamalar va ularning ta'riflarini konkret ko'rinishda ifodalash;

bunda fizik modullardan foydalanish;

mazkur bosqichda o'qituvchi tomonidan darsga tayyorgarlik davrida tanlab olingan masala va misolalardan to'g'ri va o'rinli foydalana olishi o'quv materiallarini puxta o'zlashtirishlarida muhim o'rin tutadi.

Maktab matematika kursida "Integral va uning tatbiqlari" bo'limini o'rganish:

o'quvchining fikrlashiga dialektik ta'sir ko'rsatadi;

rivojlanayotgan fan sifatida matematika haqidagi g'oyalarni shakllantirishga yordam beradi;

o'quvchilarga boshlang'ich matematika kursidan olgan bilimlarini umumlashtirishda va bundan keyin matematikani chuqur o'rganishi uchun imkoniyatlarni oshiradi.

Shunisi e'tiborga molikki, yuqoridagilarning barchasi hozirgi kunda har bir ma'lumotli shaxs uchun zarur bo'lgan va ta'limni modernizatsiya qilishning ijtimoiy talablariga javob beradigan fikrlash fazilatlarini shakllantirishga yordam beradi. Ammo, maktab amaliyoti shuni ko'rsatadiki, o'rta maktabda ushbu bo'limni o'qitishda juda ko'plab qiyinchilik o'z yechimini kutmoqda. Bu qiyinchiliklarning asosiy sababi mazkur bobda o'raganiladigan tushunchalar abstraksiyasining yuqori darajasi, ularning ta'riflarining murakkab mantiqiy tuzilishi va ularni o'rganish uchun vaqt byudjetining yetishmasligi.

Shuning uchun ham, o'quvchilar integral tushunchasi to'g'risida yaxlit tasavvurga ega bo'lmagan holda mazkur modul bo'yicha tarqoq, ko'p hollarda o'zaro bog'liq bo'lmagan ma'lumotlar bilan chegaralanib qolmoqda. Bu esa ularning matematik madaniyatining rivojlanishiga to'sqinlik qilmoqda.

Integral tushunchasi matematikadagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, ushbu modulni o'rganish bilan "Matematik analiz"ning maktab kursi yakunlanadi.

Mazkur bo'limni o'rganish orqali o'quvchilar:

differensial hisoblar bilan birgalikda integral maktab kursini mantiqiy muvofiqlashtiradi;

boshqa fanlarni o'rganish uchun matematikaning ahamiyatini ochib beradi;

maktab o'quvchilari o'rtasida dialektik materialistik dunyoqarashni shakllantirishga yordam beradi;

fizika va geometriyaning ba'zi muammolarini o'rganishga yordam beradi;

bo'limni to'g'ri darajada o'zlashtirish butun maktab matematika kursning ilmiy darajasini ko'rsatadi;

uni fanning hozirgi holatiga moslashtirishga yordam beradi;

maktab bitiruvchilarining matematik madaniyatini shakllanishi va rivojlanishini ta'minlaydi.

Umumiy o'rta ta'lim matematika kursida "Integral va uning tatbiqlari" modulini o'qitishning ta'limiy maqsadlari quyidagilardan iborat:



funksiya differensialini topish amaliga nisbatan teskari amal bo'lgan amal bilan o'quvchilarni tanishtirish;

amaliy mazmundagi geometrik masalalarni yechishda integral hisob usullarini qo'llanilishi bilan o'quvchilarni tanishtirish;

qator masalalar yechimida yangi yechish usulini kiritish (xususan figuralarning yuzalari va hajmlarini topishda);

matematik modellarning universalligini ko'rsatish;

matematika yordamida tatbiqiy masalalarni yechish bosqichlarini namoyish etish kabilarni o'z ichiga oladi.

Mazkur modulni o'rganishning tarbiyaviy va rivojlantiruvchi maqsadi esa quyidagilarni o'z ichiga oladi, ya'ni mazkur mavzuni o'rganish:

o'quvchilarda matematika va uning tabiati haqida, matematik abstraksiyaning mohiyati va kelib chiqishi haqida tasavvurlarini rivojlantiradi;

matematikaning fanlar tizimidagi o'rni;

matematik modellashtirishning ilmiy bilish va amaliyotdagi o'rni hamda ro'li haqidagi tushunchalarini kengaytiradi.

Ma'lumki, dastur bo'yicha "Integral va uning tatbiqlari" modulini o'rganishdan oldin "Hosila va uning tatbiqlari" moduli o'rganiladi. Bunday tartibda o'rganish:

birinchidan, differensiallash va integrallash amallari orasidagi bog'lanishni o'quvchilar anglangan holda tushunishlari;

o'quvchilarni funksiyaning differensial va integral hisobi metodining asosiy g'oyalari bilan tanishtirish, ya'ni agar funksiya ma'lum bo'lsa, argumentning o'zgarishi bilan funksiyaning unga mos kelgan o'zgarishini aniqlash va aksincha, funksiyani lokal o'zgarishini bilgan holda (ma'lum boshlang'ich shartlarda) funksiyani o'zini topish yoki funksiyalar sinfini topish mumkinligi to'g'risida anglangan bilimlar hosil qilishdan iborat.

ikkinchidan, hosila va integral matematik analizning eng asosiy tushunchalari ekanligi o'quvchilar tomonidan anglab yetilishiga erishish. Chunki, hosila va integral bir tomondan olamdagi ko'plab jarayonlarni ifodalovchi til sifatida namoyon bo'lsa, ikkinchi tomondan u bu hodisa va jarayonlarni o'rganuvchi instrument sanaladi.

### 3. "Integral va uning tatbiqlari" bo'limini o'qitish metodikasi

"Integral va uning tatbiqlari" modulini o'rganishda uning mazmunini ikki qismga bo'lib o'rganish maqsadga muvofiq hisoblanadi:

1. Boshlang'ich funksiya. 2. Integral.

Boshlang'ich funksiya tushunchasini o'rganishda dastlab bu tushunchaning ta'rifi, uning xossalari hamda integralning geometrik ma'nosini o'rganish maqsadga muvofiq hisoblanadi. Bu yerda shuni alohida ta'kidlash joizki, maktab matematika kursida mazkur mavzuni o'rganishda o'quvchilarda boshlang'ich funksiyani topish ko'nikmalarini hosil qilish asosiy maqsad hisoblanmaydi. Shuning uchun ham mavzuni o'rganishda foydalaniladigan misol va masalalar murakkab bo'lmasligi maqsadga muvofiq hisoblanadi (umumiy o'rta ta'lim matematika fani bo'yicha ishlab chiqilgan dasturlar butun ko'rsatkichli, darajali hamda sinus va kosinus funksiyalari uchun boshlang'ich funksiyalarni topa olishni o'rgatish-ni ko'zda tutadi).

Maktabda o'rganiladigan "Integral" tushunchasi bilan: "Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash", "integralni taqribiy hisoblash" tushunchalari va Nyuton-Leybnits formulasi uzviy bog'langan bo'lib, bunda integralni turli masalalarni yechishga tatbiqlariga doir misol va masalalar yechishda asosan egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash qaraladi. Shuningdek, aylanish jismlarining hajmi, jumladan shar va uning bo'laklari hajmini topish uchun umumiy formulalarida integral tushunchasidan foydalanish berilgan. Ammo, jismning hajmini topishga doir masalalar geometriya kursida alohida o'rganiladi.



Umuman, bu mavzuni o'rganishda asosiy e'tibor: birinchidan, boshlang'ich funksiyalarni topishga va integrallarni hisoblashga, ikkinchidan, egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblashga qaratiladi.

**Izoh.** Yana bir karra shuni alohida ta'kidlab o'tish joizki, maktab matematika kursi o'quvchilarda integrallash ko'nikmalarini hosil qilishni nazarda tutmaydi, balki faqat o'quvchilarni berilgan funksiyaning murakkab bo'lmagan integrallari bilan tanishtirishni va hosilaga qarama-qarshi amal ekanligini ko'rsatib berishni nazarda tutadi.

O'qituvchi "Integral va uning tatbiqlari" mavzusi bo'yicha o'quv materiallarini tahlil qilgan holda quyidagi bir nechta amaliy vazifalarni o'quvchilarga ajratib ko'rsatishi kerak:

1) "Integral va uning tatbiqlari" mavzusini o'rganishning asosiy vazifalari nimalardan iborat?

Bu savolga javob o'rta maktab kursida mavzuni o'qitish maqsadlaridan kelib chiqqan holda aniqlanib, u quyidagilardan iborat bo'ladi:

boshlang'ich funksiya va integral tushunchalarini kiritish;

o'quvchilarni boshlang'ich funksiyaning asosiy xossalari va boshlang'ich funksiyani topish qoidalari bilan tanishtirish;

integrallash amali ma'nosini ochib berish, ya'ni bu amal berilgan funksiya differensialini topish amaliga teskari amal ekanligini asoslash;

masalalar tiplarini ajratish (egri chiziqli trapetsiya yuzini topish, jism hajmini topish, fizik masalalar);

integral hisob usuli qanday tatbiq etilishini ko'rsatish.

Bunda masala yoki misolni yechish bosqichlariga ham e'tibor qaratiladi. Bu jarayonlarning barchasini matematik modellashtirish - deb qarash mumkin.

2) "Boshlang'ich funksiya va integral" mavzusini o'tishda asosiy nazariy material nimalardan iborat bo'lishi kerak?

Bu material quyidagilarni o'z ichiga olgan bo'lishi kerak:

boshlang'ich funksiya tushunchasi, boshlang'ich funksiyaning asosiy xossalari;

funksiya integrali tushunchasi;

boshlang'ich funksiya va aniq integral tushunchalari orasidagi bog'lanish, Nyuton-Leybnits formulasi;

Nyutona-Leybnits formulasi berilgan funksiyaning aniq integra-lini hisoblovchi apparat sifatida.

3) "Boshlang'ich funksiya va integral" mavzusini o'tishning asosiy xususiyatlari nimalardan iborat?

Mazkur savolga javob berishda, o'quvchilarga:

"Boshlang'ich funksiya va integral" mavzuning tub mohiyatini;

kiritiladigan yangi tushunchalar va ular orasidagi bog'lanish-larni;

kiritiladigan yangi tushunchalar va avvaldan ma'lum bo'lgan tushunchalar orasidagi uzviylikni ochib berish va hokazo.

Yuqoridagilarga erishishda, albatta o'qituvchi tomonidan mavzuni qay tarzda bayon etish hamda bayon etishning turli variantlarini oldindan tahlil qilish muhim hisoblanadi. Bunda hal etilishi zarur bo'lgan savollarga javoblarni mavzu materiallariga asoslangan holda o'qituvchi tomonidan puxta ishlab chiqilishi muhim hisoblanadi.

4) Boshlang'ich funksiya tushunchasi, boshlang'ich funksiyaning asosiy xossalari.

Bunda mavzuga tegishli bo'lgan o'quv materialini bayon qilishni quyidagi tarzda rejalashtirish maqsadga muvofiqdir:

*a*) Yangi tushuncha va uning xossalarini kiritishda o'quvchilar faolligini ta'minlash. Bunga erishish uchun asosiy e'tiborni quyidagi ikkita o'zaro teskari masalaga:

1) agar yo'l o'zgarishining qonuniyati ma'lum bo'lsa, vaqtning aniq momentidagi erkin tushayotgan jismning tezligi va tezlanishini topish.



2) qandaydir funksiyaning hosilasi ma'lum bo'lsa, shu hosilasiga ko'ra noma'lum funksiyani topish. Mazkur masalalarni hal etish orqali o'quvchilar uchun yangi bo'lgan amal – integrallash amali kiritiladi.

*b*) Integrallash amali, ya'ni berilgan hosilasiga ko'ra noma'lum funksiyani topish quyidagilar bilan uzviy bog'langan bo'ladi:

boshlang'ich funksiya tushunchasi;

boshlang'ich funksiyaning xossalari;

boshlang'ich funksiyani topish qoidalari.

Yuqoridagi mazmundagi masalalar deduktiv kiritiladi va bunda asosiy tushunchani kiritishning illyustrativ shaklidan foydalanish va uning xossalari yordamida konkret misollar qaralishi mavzuni samarali o'zlashtirilishi uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

Bunda o'quvchilar tomonidan mazkur mavzuni to'g'ri darajada o'zlashtirishlariga erishish uchun quyidagi ko'rinishdagi topshiriqlar berish maqsadga muvofiq:

"$F$ funksiya $f$ funksiya uchun berilgan oraliqda boshlang'ich funksiya bo'lishini isbotlang";

"Berilgan oraliqda berilgan funksiya uchun boshlang'ich funksiyani toping"; "Berilgan funksiya uchun shunday boshlang'ich funksiya topingki, uning grafigi berilgan nuqtadan o'tsin" va hokazo.

Mazkur mavzuni samarali o'qitishda o'qituvchidan quyidagilar talab etiladi:

1) Nazariy va amaliy jihatdan tayyorgarlik ko'rishi kerak, ya'ni u mavzuni o'rganishni qanday tashkil etish maqsadga muvofiq?

2) Uni o'rganishda oldindan o'rganilgan qaysi materiallardan foydalanish maqsadga muvofiq?

3) Mavzu bo'yicha darsni tashkil etishda qanday ta'lim metodlaridan foydalanish maqsadga muvofiq?

4) Qanday ta'lim vositalaridan foydalanish maqsadga muvofiq?

5) Qanday pedagogik texnologiyalardan foydalanish kerak? – kabi savollarga javob aniqlanishi va hokazo.

Masalan, mazkur mavzuni samarali o‘rgatishda funksiyalar uchun hosilalar jadvali, hosilaning geometrik va fizik ma’nosi, differensiallash qoidalari kabilarni dars jarayonida qayta esga tushirish hamda nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan masalalardan, shuningdek, boshlang‘ich funksiya va uning asosiy xossalarini o‘rganishdan oldin konkret masalalardan foydalanish samarali o‘qitishda muhim o‘rin tutadi.

Endi nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan masalalardan namunalar keltirib o‘tamiz.

1-masala. Jism to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $v = 2t$ tezlik bilan harakatlanmoqda. Vaqtga bog‘liq ravishda yo‘l formulasini toping.

2-masala. Urinmaning burchak koeffitsiyenti $f(x) = 3x^2$ bo‘lgan egri chiziq tenglamasini tuzing.

Bunday mazmundagi masalalarni yechishda o‘quvchilarning e’tiborini funksiyaning hosilasi ma’lum, lekin funksiyaning o‘zi noma’lum bo‘lishiga qaratish kerak.

Birinchi masalada hosilasi $2t$ ga teng bo‘lgan funksiyani topish kerak, ikkinchi masalada esa hosilasi $3x^2$ ga teng bo‘lgan funksiyani topish talab etiladi.

Bu ikki masala yechimini tahlil qilish natijasida quyidagi xulosalarga kelish mumkin: masala yechimi – hosilasi ma’lum bo‘lgan va hosilasiga ko‘ra funksiyaning o‘zini topish hisoblanib, bunday masala shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar cheksiz ko‘p.

Shunday qilib, yuqoridagilar yordamida boshlang‘ich funksiya tushunchasini kiritish uchun, integrallash amalining differensiallash amaliga teskari amal ekanligi to‘g‘risida xulosa chiqarishga, boshlang‘ich funksiyaning asosiy xossalarini ifodalovchi teoremani shakllantirishga va ularni isbotlashga asos bo‘lib xizmat qiladi.



Shundan so‘ng o‘quvchilar e’tiborini $F(x)+C$ yozuvga qaratish, ya’ni $C$ doimiy sonning ixtiyoriy qiymat qabul qila olishi va masala shartiga mos keladigan konkret $C$ ning qiymati mavjudligini esda saqlash kerak ekanligini uqtirish talab etiladi.

Yuqoridagi 1-masala uchun $S(t) = t^2 + C$ funksiyani, 2-masala uchun esa $F(x) = x^3 + C$ funksiyani olish mumkin. ( Bu yerda $S$ - ixtiyoriy o‘zgarmas son).

Ushbu masalalar yechimi xususiy hollarda qanday bo‘lishini va ular bir qiymatli bo‘lishini o‘quvchilarga ko‘rsatish muhim hisoblanadi. Bunda berilgan masalalar boshlang‘ich shartlarini boshlang‘ich funksiyani topishga keltiriladi. Mazkur masalalarni yechish jarayonida o‘quvchilar berilgan funksiya uchun konkret boshlang‘ich funksiyani topish mumkinligiga ishonch hosil qiladilar(bu kabi masalalar amaliyotda ko‘p uchrashini eslatish va namunalar keltirish muhim).

Yuqoridagilardan tashqari mazkur tipdagi masalalar boshlang‘ich funksiya asosiy xossasining geometrik ma’nosini hamda differensiyal-lash va integrallash o‘rtasidagi bog‘liqlikni ochib berish imkoniyatini yaratadi.

Masalan, uchinchi qoidani kiritish. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa (bunda $k\ (k \neq 0)$ va $b$ – o‘zgarmas son), u holda $\frac{1}{k}F(kx + b)$ funksiya $f(kx + b)$ funk-siya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

Mazkur qoidani kiritishdan oldin o‘quvchilar bilan hamkorlikda $sinx;\ sin5x;\ sin5x + 2, cosx;\ cos5x;\ cos5x + 2$ ko‘rinishdagi funk-siyalar hosilalarini topishga doir misollar yechish maqsadga muvofiq.

Bu misollar yechimlarining tahlilini, integrallash qoidalari yordamida boshlang‘ich funksiyani topish va ularni isbotlashni o‘quvchilarga mustaqil ish sifatida topshiriq qilib berish mumkin.

Umuman, integral tushunchasini kiritishni quyidagi tartibda amalga oshirish maqsadga muvofiq hisoblanadi:

a) Egri chiziqli trapetsiya haqida ma'lumot berish.

b) Egri chiziqli trapetsiya yuzi haqida ma'lumot berish.

s) Egri chiziqli trapetsiya yuzini integral yig'indilar ketma-ketligi sifatida qarashni tushuntirish.

d) Nyuton-Leybnits formulasini keltirib chiqarish (buning uchun ko'rgazmali qurollardan foydalanish maqsadga muvofiq).

Nazariy materiallarni o'rganishda quyidagi turdagi: egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish va integralni hisoblashga doir masalalarni berish ko'zlangan maqsadga erishishda asosiy ro'l o'ynaydi.

**Izoh.** Ma'lumki, nafaqat egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasi, shuningdek, kuchning bajargan ishi, berilgan vaqt oralig'ida o'tkazgichning ko'ndalang kesimidan o'tadigan elektr miqdori haqidagi masalalar ham integral tushunchasiga olib keladi.

### 4. Nyuton-Leybnits formulasi

"Integral" tushunchasini kiritish va uni hisoblash, o'quvchilarga integral va uning geometrik ma'nosini chuqur tushunish usullari bo'yicha yaratilgan o'quv qo'llanmalar tahlili quyidagi xulosalarni chiqarish imkonini beradi:

Nyuton-Leybnits formulasi integralning eng ko'p qo'llaniladigan xossalarini isbotlash imkonini beradi. Bu esa o'quvchilarga integral va uning geometrik ma'nosini yanada yaxshi tushunish imkonini beradi. Quyidagi misollar ya'ni tengliklarni isbotlashga tavsiya etish mumkin:

*a)* Agar $f$ funksiya $[a;b]$ kesmada boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (bunda $c$ — o'zgarmas son) bo'ladi;

*b)* Agar $f_1$ va $f_2$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f_1(x)\pm f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$



Bunday misollarni yechish jarayonida o'quvchilar:

differensiallash va integrallash amallari o'rtasidagi;

"hosila", "boshlang'ich funksiya" va "integral" tushunchalari o'rtasidagi aloqalarni anglangan holda tushunib yetadi.

**Eslatma.** O'qituvchi darslarni tashkil etishni rejalashtirish va unga tayyorgarlik davrida amaliy mazmundagi masala va misollarni tanlashi hamda ularni qanday usulda yechish samarali bo'lishiga aniqlik kiritishi kerak. Shuni ta'kidlash joizki, "aniq integral" va "boshlang'ich funksiya" tushunchalari orasidagi bog'lanishni to'g'ri darajada anglab yetishlariga erishish uchun asosiy e'tiborni integralning geometrik ma'nosiga qaratish zarur. Chunki, integralning geometrik ma'nosidan foydalanilsa, integrallarni oson hisoblash imkoniyatiga ega bo'linadi. Demak, yuqoridagilardan ko'rinadiki:

1. Maktab matematika kursida integral hisob usullarini o'quvchilarga to'liq o'rgatishni maqsad qilib qo'yilmaydi. O'quvchilar integrallash usullari bilan tanishtirish, integral hisobni masalalar yechishga illyustrativ ravishda qo'llashga o'rgatish to'g'ri.

2. Mavzuning maqsadlariga erishish uchun, ayniqsa rivojlantiruvchi maqsadlariga erishishi uchun yassi figuralarning yuzini topish masalalariga e'tibor qaratish zarur.

3. "Boshlang'ich funksiya va integral" mavzusiga dars rejasi va dars loyihasi tuzishda quyidagilarga e'tibor qaratish zarur:

har bir darsning maqsad va konkret vazifalarini ifodalash;

mavzuni o'rganish uchun o'quv (ham nazariy, ham amaliy) materiallarini to'g'ri tanlash;

fan ichidagi aloqani ifodalovchi aniq masalalarni tanlash, ya'ni o'tiladigan yangi mavzu bilan oldindan o'rganib bo'lingan mavzular orasidagi bog'liqlikni ta'minlashga erishish;

fanlararo aloqani ta'minlashga erishishi talab etiladi.

"Integral va uning tatbiqlari" mavzusini o'rganishni yuqorida keltirilgan tavsiyalar asosida tashkil etish mazkur mavzuni anglangan holda tushunish imkonyatlarini oshiradi va kelgusida matematikani chuqurroq o'rganishga bo'lgan intilishlarni rag'batlantiradi.

Boshlang'ich funksiyani o'qitishning uslubiy sxemasi quyidagicha:

1) o'zaro teskari operatsiyalarga misollar ko'rib chiqish;

2) differensiatsiya usuliga teskari usul sifatida integralni kiritish va integratsiya usuli natijasida boshlang'ich funksiyani ko'rib chiqish;

3) quyidagi turdagi mashqlarni bajaring: $F(x)$ funksiya boshqa $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekanligini namoyish qilish, $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich $F(x)$ funksiyani topishda muammolarni hal qilish;

4) o'quvchilarni boshlang'ich funksiyaning asosiy xossalari bilan tanishtirish;

5) boshlang'ich funksiyalar jadvalini tuzish;

6) o'quvchilarni boshlang'ich funksiyalarni topish qoidalari bilan tanishtirish;

7) boshlang'ich funksiya yordamida masalalarni hal qilish.

Boshlang'ich funksiya tushunchasi bilan tanishtirish uchun o'quvchilarga tanish bo'lgan o'zaro teskari amallarga oid misollar ko'rib chiqiladi. Qo'shish usuli ikkita berilgan raqamlarning yig'indisidan iborat bo'lgan uchinchi raqamni topishga imkon beradi: 2+3=5. Agar bitta qo'shiluvchi va yig'indi ma'lum bo'lsa va ikkinchi boshlang'ich noma'lum bo'lsa, unda ikkinchi boshlang'ichni topish mumkin: 5-2=3; ya'ni ayirish operatsiyasini bajarish to'g'ri. Shunday qilib, ayirish amali qo'shish amalining teskari usuli hisoblanadi. Ushbu misolda teskari yondashuv bir xil natijaga olib keladi. Bu har doim ham o'rinli emas.

Masalan, agar biz 3 sonini kvadratga ko'tarsak, 9 ni olamiz. Endi 9 qandaydir son $x$ ning kvadrati bo'lsin $x^2=9$. Unda $x$ nimaga teng? Bu savolga javob berish uchun, teskari usulni, kvadrat ildizni topish usulini bajaramiz. Shu bilan birga 9 sonining kvadrat ildizida ikkita qiymat mavjud: 3 va -3.



Farqlash usulini davom ettiraylik. $F(x) = x^3$ funksiyasidan hosila olsak, $f(x) = F'(x) = 3x^2$ bo'ladi, bu esa $F(x) = x^3$ funksiyaning $f(x) = 3x^2$ funksiyaga boshlang'ich funksiyasi ekanligini ko'ramiz.

$$F(x) = x^3 + 1;\ F(x) = x^3 - 2\ ; F(x) = x^3 + \sqrt{3}1\ ....$$

funksiyalar ham $f(x) = 3x^2$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya hisoblanadi. Bunday funksiyalarni topish integrallash amali deyiladi.

Ta'rif. Agar berilgan oraliqdagi barcha $x$ uchun $F'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda ushbu intervaldagi $F$ funksiya $f$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya deb ataladi.

Yuqoridagi misolda berilganidek, berilgan $f(x)$ funksiya uchun cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarni topishimiz mumkin.

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish haqidagi teorema bu mavzuni o'rganishda eng muhimdir. Faraz qilaylik, $f$ funksiya $[a; b]$ segmentdagi uzluksiz va manfiy bo'lmagan funksiya, $S$ esa egri chiziqli trapetsiya bilan chegaralangan to'rtburchak yuzi (5-rasm) bo'lsin. $F$ funksiya kesmadagi $f$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsin. U holda

$$S = F(b) - F(a)$$

bo'ladi.

Teoremani qisqacha yozaylik:

$$S = F(b) - F(a)\ .$$

Bu teorema Nyuton-Leibniz teoremasi deb ataladi.

Bunga olib keladigan tayyorgarlik masalalarni hisobga olgan holda integral tushunchasidan boshlash foydalidir.

## Bobni mustahkamlash uchun savollar

1. Maktabda differensial va integrallarni o'qitish asoslari qanday?
2. Maktab matematika kursiga boshlang'ich funksiya va integrallarni kiritish usullari qanday?
3. O'rta maktabda differensial tushunchasini o'qitish tartibi qanday?
4. Maktab darsliklarida hosila tushunchasini kiritish usullarini tahlil qiling.
5. Matematikada differensial va integral tushunchasi nima?
6. Nega maktab matematikasida integral tushunchasini kiritishda chegaralar aniq ishlatilmaydi?
7. Hosila tushunchasi qanday tartibda kiritiladi?
8. Orttirma tushunchasini aniqlang.
9. "Funksiya hosilasi" va "Nuqtadagi funksiya hosilasi" o'rtasidagi farq nima?
10. Maktab darsliklarida hosilani taqribiy hisob-kitoblarda qo'llash qanday tavsiflanadi?
11. Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma burchak koeffitsiyentini izohlang.
12. Maktab matematika kursida hosulani fizikada qo'llash haqida gapirib bering.
13. Maktab matematikasini o'qitish jarayonida hosilani funksiyalarni o'rganishda qo'llash uchun qanday teoremalardan foydalaniladi?
14. Maktab matematika kursida funksiyalarni o'rganishda uning hosilasini qo'llash sxemasi qanday?
15. $y = x^3 - 3x$ funksiya va uning grafigi haqida nimalarni bilasiz.
16. Tezlikni hisoblash orqali hosila tushunchasiga qanday kelinadi?
17. Boshlang'ich funksiyani o'qitishning uslubiy sxemasi qanday?



18. Boshlang'ich funksiyani kiritish uchun o'quvchilarga tanish bo'lgan hosila tushunchasidan foydalanishning o'zaro ta'sirlarning qaysi misollari ko'rib chiqilgan?
19. Boshlang'ich funksiya tushunchasi qanday aniqlanadi?
20. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topishga oid teoremaga qanday tayyorgarlik ko'rish kerak?
21. Egri chiziqli trapetsiyaning yuziga oid teoremani isbotlang 22. Integral tushunchasini kiritishda qanday uslubiy sxema bo'lishi mumkin?
23. Integral tushunchasiga olib keladigan qanday tayyorgarlik masalalari yechiladi?
24. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi va uning integral tushunchasi bilan bog'liqligi qanday?

# VIII BOB. TRIGONOMETRYA ELEMENTLARINI O'QITISH

## 8.1-§. Trigonometriya elementlarini o'rganishning birinchi bosqichi

REJA:

1. Trigonometrik funksiyalar.
2. $0^0$ dan $180^0$ gacha burchaklarning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi.
3. Haqiqiy argumentning trigonometrik funksiyalarini o'qitish.
4. Burchaklar va yoylarni o'lchashni o'rganish.
5. Ba'zi burchaklarning trigonometrik funksiyalari qiymatlari.
6. Keltirish formulalari.

### 1. Trigonometrik funksiyalar

Trigonometrik funksiyalar birinchi transsendent funksiyalar bo'lib hisoblanadi. Ular nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Birinchidan ular planimetrik va stereometrik masalalarni yechishda qulay apparat bo'lsa, ikkinchidan ular funksiyalarning muhim xossalarini (juft-toqligi, davriyligi, chegaralanganligi, monotonligini) ko'rgazmali, sodda ifoda etuvchidir. Matematikada trigonometrik funksiyalar ko'pincha analitik jihatdan aniqlanadi: darajali qatorlar bo'yicha, differensial tenglamaning yechimi sifatida, integral sifatida aniqlanishi mumkin.

Trigonometrik funksiyalar geometrik usullar bilan ham aniqlanadi. Maktab matematikasida trigonometrik funksiyalarni sodda, tushunarli va vizual aniqlanishi tufayli geometrik usul qo'llani-ladi. Maktab matematikasi kursida trigonometriya elementlarini tavsif-lashning turli xil usullari mavjud. Ular koordinata sistemasidan, vektorlardan, geometrik o'zgarishlardan foydalanishga asoslangan.

Trigonometriyani o'rganishning uslubiy sxemasi sifatida quyidagilar olinadi:

1) birinchi navbatda to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchagi trigonometrik funksiyalari aniqlanadi;

2) kiritilgan tushunchalar $0^0$ dan $180^0$ gacha umumlashtiriladi;

3) trigonometrik funksiyalar har qanday kattalik va haqiqiy sonlar uchun aniqlanadi.

Shuningdek, metodik adabiyotlarda qisqacha metodologik sxema mavjud bo'lib, u darhol trigonometrik funksiyalarni 2 punktdan boshlaydi.

Mavjud maktab o'quv rejasi va darsliklari yuqoridagi sxemaga asoslanadi. Dastlabki ikki bosqich geometriya, uchinchi bosqichda algebra va matematik tahlil asoslarini o'qitish jarayonida ko'rib chiqiladi.

Trigonometrik funksiyalar – bu algebra kursida emas, balki geometrik jihatdan aniqlangan va geometriya kursida o'qitiladigan yagona funksiya.

Geometriya uchun trigonometrik funksiyalarning "umumiy funksional xossalari" (aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi, davriyligi, juft-toqligi va boshqalar) juda muhim emas, ammo ularning geometriyaning amaliy tomoni (to'g'ri uchburchaklar yechimi, ba'zi trigonometrik tenglamalarni qo'llash, kosinuslar va sinuslar teoremalari, har qanday uchburchakni yechish va boshqalar. Shu sababli, A.V.Pogorelovning 7-11 sinflar uchun geometriya



darsligida "trigonometrik funksiyalar" atamasi mavjud emas, buning o'rniga "burchak kosinusi", "burchak sinusi", "burchak tangensi" iboralari ishlatilgan.

A.V.Pogorelov darsligida sinus, kosinus va tangens har qanday burchakning trigonometrik funksiyalari emas, balki "to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchaklari" uchun belgilangan. Misol uchun, burchak kosinusi sifatida to'g'ri burchakli uchburchak burchagiga yopishgan katet uzunligining gipotenuza uzunligiga nisbatidir. To'g'ri burchakli uchburchak o'tkir burchagining kosinusi quyidagicha belgilanadi: cosA. U nega kerak?

Uning zarurligini o'quvchilarga quyidagicha tushuntirish mumkin: Ta'rifga asosan $\cos 37^0$ ning qiymatini topaylik. Topshiriqni bir nechta o'quvchilar mustaqil ravishda bajaradilar. $\mathrm{Cos}37^0$ ning qiymatini topish uchun har bir o'quvchi o'tkir burchagi $37^0$ teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak chizadilar. $37^0$ burchakka yopishgan tomon va gipotenuzani o'lchaydi, so'ngra $37^0$ burchakka yopishgan tomonning gipotenuzaga nisbatini topadi. Olingan son $\cos 37^0$ ning qiymatidir.

Har bir o'quvchi to'g'ri burchakli uchburchakni chizadi, burchakka yopishgan tomonning uzunligi va gipotenuzaning qiymatlarini oladi.

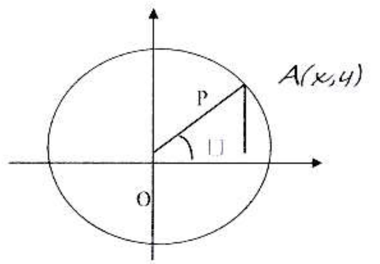
Shunday qilib, qidirilayotgan munosabatlar har bir o'quvchi uchun har xil bo'lishi mumkinmi? Agar to'g'ri burchakli uchburchakdan boshqa to'g'ri burchakli uchburchakka o'tish paytida $\cos 37^0$ ning qiymati o'zgargan bo'lsa, unda matematikada bu tushuncha ahamiyatsiz bo'lar edi.

O'tkir burchakning kosinusi to'g'ri burchakli uchburchakni tanlashga bog'liq emasligini, u faqat burchakning kattaligiga bog'liqligini anglatadi.

**2. $0^0$ dan $180^0$ gacha burchaklarning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi**

$0^0$ dan $180^0$ gacha burchaklarning sinusi, kosinusi, tangensi va boshqalari turlicha aniqlanadi. Ushbu trigonometrik funksiyalarning qiymatlarini topish uchun hisoblash ishlarini bajarish kerak. A.V.Pogorelov darsligida shunday deyilgan: "Ilgari sinus, kosinus va tangensning qiymatlari faqat o'tkir burchak uchun aniqlangan. Endi ularni $0^0$ dan $180^0$ gacha bo'lgan har qanday burchak uchun aniqlaymiz.

Markazi sonlar o'qining boshida va radiusi $R$ bo'lgan aylana olamiz (1-rasm).




Aytaylik, A nuqtaning koordinatalari $x$ va $y$ bo'lsin. burchak trigonometrik funksiyalarini A nuqtaning koordinatalari yordamida quvidagicha aniqlanadi:

$$sin\alpha = \frac{y}{R}, \qquad cos\alpha = \frac{x}{R}, tg\alpha = \frac{y}{x}, ctg\alpha = \frac{x}{y}.$$

Endi bu formulalardan foydalanib burchakning har qanday qiymatida, ya'ni $0^0$ dan $180^0$ gacha bo'lgan qiymatlari uchun bu trigonometrik funksiyalar qiymatlarini topish mumkin (tg =$90^0$ burhak uchun aniqlanmagan).

3. **Haqiqiy argumentning trigonometrik funksiyalarini o'qitish**

Algebra va matematik tahlil asoslarini o'rganish jarayonida trigonometrik funksiyalarni o'qitishning oxirgi bosqichi o'tkaziladi. Bularga quyidagilar kiradi:

1) burchaklarning radian o'lchovlarini kiritish, burchaklarni gradus o'lchovlaridan radian o'lchovlariga o'tkazish va aksincha;

2) $360^0$ dan katta burchaklarni chizish;

3) musbat va manfiy gradusli burchaklarni ko'rsatish;

4) ushbu burchaklarning gradus o'lchovidan radian o'lchoviga o'tish (musbat va manfiy ishorali sonlar);

5) $sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ (trigonometrik funksiyalarni shakllanishiga funksional yondashuv, ularning aniqlanish va o'zgarish sohalarini, funksiya grafigini chizish, monotonlik oraliqlarini aniqlash;



5) ma'lum formulalarni takrorlash, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ (ikkita argumentlar yig'indisi uchun formula va boshqalar), trigonometrik formulalardan stereometrik masalalarni hal qilishda foydalanish.

4. **Burchaklar va yoylarni o'lchashni o'rganish**

Maktabda trigonometriyani o'qitishda eng qiyin mavzulardan biri bu burchak va yoylarni o'lchashdir.

Ushbu masalani o'quvchilarga quyidagicha tushuntirish kerak:

Burchaklarni o'lchash tushunchasi geometriyadan ma'lum. Burchaklarni o'lchash uchun o'lchov birligi sifatida ma'lum bir burchak ishlatiladi, uning yordamida keyingi barcha burchaklar o'lchanadi.

Har qanday burchak o'lchov birligi sifatida olinishi mumkin.

O'lchov birligi sifatida to'liq aylananing $\frac{1}{360}$ qismi o'linib, u o'lchov gradusi deb ataladi. Amalda burchak ko'pincha graduslarda o'lchanadi. Yuqori aniqlikdagi hisoblagichlar uchun gradus 60 ta teng qismga bo'linadi – uni minut deb; minutlar 60 ta teng qismga bo'linadi – ular sekund deb ataladi.

Ba'zan geometriyada o'lchov birligi sifatida to'g'ri burchak olinadi va burchaklarni uning yordamida o'lchanadi.

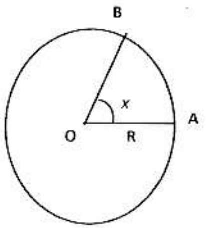
Muhandislikda burchaklarni o'lchash birligi sifatida ko'pincha bitta to'liq aylanish olinadi.

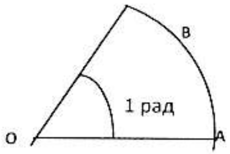
Mashina g'ildiragi yoki samolyot pervanelining aylanishi odatda aylanishlar soni bilan o'lchanadi. Artilleriyada burchaklarni o'lchash birligi sifatida to'liq aylananing $\frac{1}{60}$ qismi, ya'ni $\frac{360^0}{60} = 6^0$ olinadi. Burchaklarni aniqroq o'lchash uchun uni 100 ta teng qismga bo'linadi. $\frac{6^0}{100} = 3'36''$ va u burchak o'lchash asbobining bo'linmasi deb ataladi.

Matematikada soat yo'nalishiga teskari yo'nalishda o'lchangan burchaklar musbat, soat yo'nalishi bo'yicha o'lchangan burchaklar esa manfiy deb hisoblanadi.

Amalda bunga qo'shimcha ravishda radian deb nomlangan burchaklarni o'lchash birligi ham qo'llaniladi.

Burchakning radian o'lchovi – markaziy burchakda joylashgan yoy uzunligining doira radiusiga nisbati va radian burchagi aylananing radiusiga teng bo'lgan yoyga mos keladigan markaziy burchakdir. 2-rasmda 1 radianga teng burchak ko'rsatilgan.




$$x = \frac{\breve{AB}}{R}$$

2- rasm

Shunday qilib, burchaklarni radian bilan o'lchashda yoy uzunligi radiusga teng to'g'ri markaziy burchak o'lchov birligi qilib olingan. Bu burchakka radian deyiladi.

Radian va gradus o'lchovlari o'rtasidagi bog'liqlikni aniqlaylik.

Buning uchun dastlab $360^0$ ga teng aylanaga to'g'ri keladigan radianni topamiz. $360^0 = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Endi $A^0$ burchakka mos radian burchagini aniqlash uchun quyidagi proporsiyani tuzamiz:

$360^0 \qquad 2\pi$

$A^0 \qquad \alpha$

Proporsiyani yechib: $\alpha = \frac{\pi A^0}{180^0}$ ni hosil qilamiz. Oxirgi formuladan foydalanib $A^0$ ning o'rniga $30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0$ larni qo'yib ularning radian o'lchovlarini topamiz:

$$30^0 = \frac{\pi}{180} \times 30^0 = \frac{\pi}{6}, 90^0 = \frac{\pi}{180} \times 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

$$45^0 = \frac{\pi}{180} \times 45^0 = \frac{\pi}{4}, 270^0 = \frac{\pi}{180} \times 270^0 = \frac{3\pi}{2}$$



$$60^0 = \frac{\pi}{180} \times 60^0 = \frac{\pi}{3}, \quad 360^0 = \frac{\pi}{180} \times 360^0 = 2\pi.$$

Bu formulalardan foydalanib radian o'lchovlardan gradus o'lchovlarga o'tish mumkin. Shuningdek 1 radianni necha gradusga teng ekanligini topamiz:

$$1\ rad = \frac{180^0}{\pi} \approx 57{,}295^0 \approx 57^0 17' 45''$$

**5. Ba'zi burchaklarning trigonometrik funksiyalari qiymatlari**

Trigonometrik formulani soddalashtirishda, tenglamaning to'g'riligini isbotlash, tenglamalar va boshqa masalalarni yechishda ba'zi burchaklarning trigonometrik funksiyalari qiymatlarini bilish kerak bo'ladi. Endi bu qiymatlar nima uchun teng ekanligini bilib olaylik.

Radiusi $R$ ga teng aylanada $OA$ radiusni $\alpha$ burchakka burish orqali uning vaziyati $OB$ radius bo'ladi (3-rasm). Keyin BOC uchburchakda:

$$sin\alpha = \frac{BC}{R} \ , cos\alpha = \frac{OC}{R}.$$

Ma'lum burchaklarning trigonometrik funksiyalari qiymatlarini topish uchun biz bir xil argument bilan trigonometrik funksiyalar o'rtasidagi bog'liqlikni ko'rsatadigan formulalardan foydalanamiz.

1) Agar $\alpha$ =0 bo'lsa, u holda BC = 0, OC = OA = R bo'ladi.

Demak,

$$sin0^0 = \frac{BC}{R} = \frac{0}{R} = 0,$$

$$cos0^0 = \frac{OC}{R} = \frac{R}{R} = 1$$

$$tg0^0 = \frac{sin0^0}{cos0^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$ctg0^0 = \frac{cos0^0}{sin0^0} = \frac{1}{0} = \infty$$

2) Agar burchak $\alpha = 30^0$ bo'lsa, u holda $30^0$ burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng ekanligidan, ya'ni

$$BC = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$$

Demak,

$$sin30^0 = \frac{BC}{R} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}; \quad cos30^0 = \sqrt{1 - sin^2 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}:$$

$$tg30^0 = \frac{sin30^0}{cos30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$ctg30^0 = \frac{cos30^0}{sin30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

2) Bundan tashqari, agar burchak $45^0$ga teng bo'lsa, u holda BOC uchburchak teng yonli bo'ladi: BC=OC. Demak,

$$sin45^0 = \frac{BC}{R}, \quad cos45^0 = \frac{OC}{R} = \frac{BC}{R}, \quad sin45^0 = cos45^0$$

Ma'lumki, $tg45^0 = \frac{sin45^0}{cos45^0} = 1$, $tg45^0 = \frac{cos45^0}{sin45^0} = 1$ bo'ladi.

$$cos45^0 = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin45^0 = cos45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Endi $60^0$, $90^0$, $180^0$ va $360^0$li burchaklar uchun trigonometrik funksiyalarning qiymatlarini quyidagi usullar yordamida topamiz:

$$sin60^0 = \sin(2 \times 30^0) = 2sin30^0cos30^0 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$cos60^0 = \cos(2 \times 30^0) = cos^2 30^0 - sin^2 30^0 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg60^0 = \frac{sin60^0}{cos60^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad ctg60^0 = \frac{1}{tg60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



5) $sin90^0 = \sin(2 \times 45^0) = 2sin45^0cos45^0 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$$cos90^0 = \cos(2 \times 45^0) = cos^2 45^0 - sin^2 45^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

6) Yuqoridagilardagi kabi

$$sin180^0 = \sin(2 \times 90^0) = 2sin90^0cos90^0 = 2 \times 1 \times 0 = 0;$$

$$cos180^0 = \cos(2 \times 90^0) = cos^2 90^0 - sin^2 90^0 = 0 - 1 = -1$$

$$tg180^0 = \frac{sin180^0}{cos180^0} = \frac{0}{-1} = -1 \quad ctg180^0 = \frac{1}{tg180^0} = -\infty$$

7)

$$sin270^0 = \sin(90^0 + 180^0) = sin90^0cos180^0 + sin180^0cos90^0 = -1 + 0 = -1$$

;

$$cos270^0 = \cos(90^0 + 180^0) = cos90^0cos180^0 - sin180^0sin90^0 = 0 - 0 = 0$$

;

$$tg270^0 = \frac{sin270^0}{cos270^0} = \frac{-1}{0} = \infty, \quad ctg270^0 = \frac{cos270^0}{sin270^0} = \frac{0}{-1} = 0.$$

8)

$$.sin360^0 = \sin(2 \times 180^0) = 2sin180^0cos180^0 = 2 \times 0 \times (-1) = 0$$

$$cos360^0 = \cos(2 \times 180^0) = cos^2 180^0 - sin^2 180^0 = (-1)^2 - 0^0 = 1$$

$$tg360^0 = \frac{sin360^0}{cos360^0} = \frac{0}{1} = 0 \quad ctg360^0 = \frac{1}{tg360^0} = \infty.$$

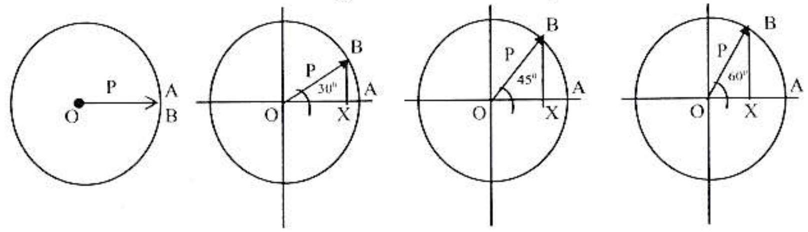
| Funksiya | $\alpha$ argument | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $sin\ \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $cos\ \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $tg\ \propto$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | 0 | $+\infty$ | 0 |
| $ctg\ \propto$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ |

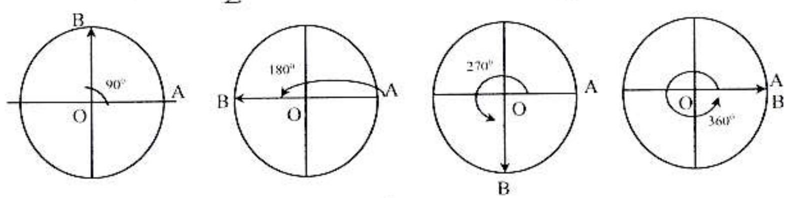
Yuqoridagilarni birlik doirada ifodalaymiz:

4-rasm.

$=0$ $\qquad \alpha = 30^0 \cong \frac{\pi}{6}$ $\qquad \alpha = 45^0 \cong \frac{\pi}{4}$ $\qquad \alpha = 60^0 \cong \frac{\pi}{3}$




$\alpha = 90^0 \cong \frac{\pi}{2}$ $\qquad \alpha = 180^0 \cong \pi$ $\qquad \alpha = 270^0 \cong \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \alpha = 360^0 \cong 2\pi$




5 –rasm.

**Keltirish formulalari**

Ba'zan berilgan trigonometrik ifodalarning qiymatini minimallashtirish yoki hisoblashlarda qisqartirish formulalarini ishlatish, trigonometrik tengliklarning to'g'riligini isbotlash, trigonometrik tengsizlik va tenglamalarni yechish kerak bo'ladi.

O'quvchilar ushbu mavzuni ongli ravishda o'zlashtirishi uchun trigonometrik funksiyalar va ularning ishoralari, o'sish va kamayish intervallari,



ba'zi burchaklarning trigonometrik funksiyalari va qo'shimcha teoremalarning ta'riflari takrorlanadi.

Argumentlari $-\alpha,\ \frac{\pi}{2} \pm \alpha,\ \pi \pm \alpha,\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha,\ 2\pi \pm \alpha$ bo'lgan trigonometrik funksiyalarni argumenti $\alpha$ ga teng funksiyalar bilan ifodalash keltirish formulalari deb nomlanishini bilamiz.

1. Keltirish formulalarining birinchi guruhi trigonometrik funksiyalarning juft va toq ekanligini aniqlashga imkon beradi, ya'ni kosinus funksiya juft va sinus, tangens va kotangents funksiyalar esa toq funksiyalardir:

$$\cos(-x) = \cos x\ ,\ \sin(-x) = -\sin x,\quad tg(-x) = -tgx,$$
$$ctg(-x) = -ctgx$$

Misollar:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\text{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -ctg\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

2. $\frac{\pi}{2} \pm \alpha\ (90^0 \pm \alpha)$ burchaklar uchun keltirish formulalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha\ ,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha\ ,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\ ,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha\ ,\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg\alpha,$$
$$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha\ ,\ ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\alpha$$

Bu keltirish formulalaridan quyidagi hulosalarni chiqaramiz:

Ikki burchar yig'indisi $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'sin, ya'ni $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ bo'lsin. U holda quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\cos\beta = \sin\alpha, \cos\alpha = \sin\beta.$$

Isbot. Bu tengliklarni isbotlash uchun ikki argument ayirmasining kosinusi formulasidan foydalanamiz:

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha,$$

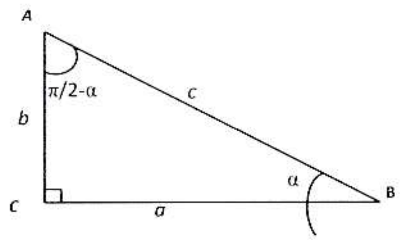
Shunga o'xshash

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta$$

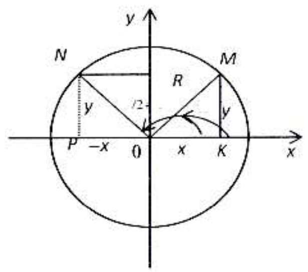
hosil bo'ladi.

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

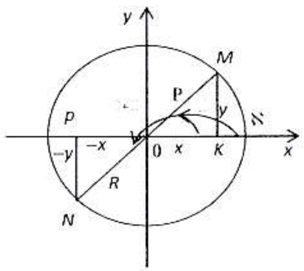
formulalarning to'g'riligi kelib chiqadi. Uni to'g'ri burchakli uchburchakka ko'ra olamiz (7-rasm).




7-rasm




8-rasm




9–rasm



Ya'ni:
$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{c} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{c} \end{cases} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{b}{c} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{b}{c} \end{cases} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$\frac{\pi}{2} + \alpha$ $(90^0 + \alpha)$ burchaklarga keltirish formulalarini isbotlash uchun ikki burchak yig'indisi sinusi, kosinusi formulalaridan foydalanamiz. 8-rasmda esa ularning geometrik isbotlari keltirilgan.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \cos\alpha$$

8-rasmdagi $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalarini $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ desak, u holda $N(x;y)$ nuqtasining koordinatalari

$$-x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

bo'ladi va

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

Misollar.

$$\sin 120^0 = \sin(90^0 + 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$$

$$tg 120^0 = tg(90^0 + 30^0) = -ctg 30^0 = -\sqrt{3}$$

$$ctg 120^0 = ctg(90^0 + 30^0) = -tg 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. $\pi \pm \alpha$ $(180^0 \pm \alpha)$ burchaklar uchun keltirish formulalari quyidagicha:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \ \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -cos\alpha\ ,\quad \cos(\pi+\alpha) = -cos\alpha,$$

$$tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha\ ,\quad tg\,(\pi+\alpha) \quad = tg\alpha,$$

$$ctg(\pi-\alpha) = -ctg\alpha\ ,\quad ctg\,(\pi+\alpha) \quad = ctg\alpha$$

Ushbu formulalarning to‘g‘riligini isbotlash uchun ikki burcharlarni qo‘shish va ayirish uchun sinus va kosinus teoremalari yordamida, analitik yoki trigonometrik birlik aylana yordamida yoki geometrik usulda ham isbotlash mumkin (9-rasm).

Masalan:

$$\cos(\pi+\alpha) = cos\pi cos\alpha - sin\pi sin\alpha = -cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta OMK:&\ \tfrac{x}{R} = cos\alpha,\\ \Delta ONP:&\ -\tfrac{x}{R} = \cos(\pi+\alpha)\end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \cos(\pi+\alpha) = -cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta OMK:&\ \tfrac{y}{R} = sin\alpha,\\ \Delta ONP:&\ -\tfrac{y}{R} = sin(\pi+\alpha)\end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \sin(\pi+\alpha) = -sin\alpha$$

Misollar: $sin150^0 = \sin(180^0 - 30^0) = sin30^0 = \frac{1}{2}$

$$cos150^0 = \cos(180^0 - 30^0) = -cos30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg150^0 = tg(180^0 - 30^0) = -tg30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg150^0 = ctg(180^0 - 30^0) = -ctg30^0 = -\sqrt{3}$$

4. $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\ (270^\circ \pm \alpha)$ burchaklar uchun keltirish formulalari quyidagicha:

$$\sin\left(\tfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -cos\alpha\ ,\ \sin\left(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -cos\alpha$$

$$cos\left(\tfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -sin\alpha\ ,\ cos\left(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = sin\alpha$$



$$tg\left(\tfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha\ ,\ tg\left(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg\alpha$$

$$ctg\left(\tfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha\ ,\ ctg\left(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\alpha$$

Ushbu formulalarning to‘g‘riligini kosinus va sinuslar uchun qo‘shish va ayirish teoremalari, analitik usulda yoki 10-rasm yordamida geometrik ravishda isbotlash mumkin.

Masalan:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = sin\frac{3\pi}{2}cos\alpha + cos\frac{3\pi}{2}sin\alpha = -cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta OMK:&\ \tfrac{x}{R} = cos\alpha,\\ \Delta ONP:&\ -\tfrac{x}{R} = sin(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha)\end{aligned}\right\} \quad \rightarrow sin(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha) \quad = -cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta OMK:&\ \tfrac{y}{R} = sin\alpha,\\ \Delta ONP:&\ -\tfrac{y}{R} = cos(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha)\end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \cos\left(\tfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = sin\alpha$$

Misollar:

$$sin240^\circ = sin(270^\circ - 30^\circ) = -cos30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos240^\circ = \cos(270^\circ - 30^\circ) = -sin30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$tg240^\circ = tg(270^\circ - 30^\circ) = ctg30^\circ = \sqrt{3}$$

$$ctg240^\circ = ctg(270^\circ - 30^\circ) = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. $2\pi \pm \alpha\ (360^0 \pm \alpha)$ burchaklar uchun keltirish formulalari quyidagicha:

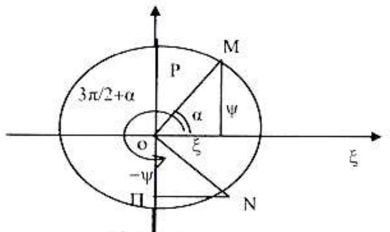
$$\sin(2\pi - \alpha) = -sin\alpha\ ,\quad \sin(2\pi + \alpha) = -sin\alpha,$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = cos\alpha\ ,\quad \cos(2\pi + \alpha) = cos\alpha.$$

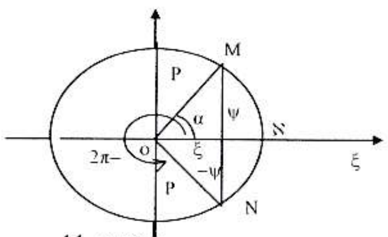
$$tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha\ ,\quad tg\,(2\pi+\alpha)\quad = tg\alpha,$$

$$ctg(2\pi-\alpha)=-ctg\alpha\ ,\quad ctg\,(2\pi+\alpha)\quad = ctg\alpha$$

Ushbu formulalarning to'g'riligini isbotlash uchun ikki burchaklarni qo'shish va ayirish uchun sinus va kosinus teoremalari yordamida, analitik yoki trigonometrik birlik aylana yordamida yoki geometrik usulda ham isbotlash mumkin (11-rasm).




10-rasm




11-rasm.

Masalan:

$$\sin(2\pi+\alpha)=sin2\pi cos\alpha-cos2\pi sin\alpha=sin\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta OMK\ &: \frac{x}{R}=cos\alpha,\\ \Delta ONP\ &: -\frac{x}{R}=\cos(2\pi-\alpha)\end{aligned}\right\}\ \rightarrow \cos(2\pi-\alpha)=cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta OMK\ &: \frac{y}{R}=sin\alpha,\\ \Delta ONP\ &: -\frac{y}{R}=sin(2\pi-\alpha)\end{aligned}\right\}\ \rightarrow \sin(2\pi-\alpha)=-sin\alpha$$

Misollar: $sin300^{\circ}=\sin(360^{\circ}-60^{\circ})=-sin60^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$cos300^{\circ}=cos(360^{\circ}-60^{\circ})=-cos60^{\circ}=\frac{1}{2}$$

$$tg300^{\circ}=tg(360^{\circ}-60^{\circ})=-tg60^{\circ}=-\sqrt{3}$$

$$ctg300^{\circ}=c\,tg(360^{\circ}-60^{\circ})=-ctg60^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Keltirish formulalarini ishlatishda quyidagi qoidaga amal qilish mumkin.

**Qoidalar.** Agar $\alpha$ burchakni gorizontal diametrdan boshlab $-\alpha;\ \pi\pm\alpha, 2\pi\pm\alpha$ burchaklarga burilsa, unda:

tenglikning ikkala tomonidagi funksiyalarning nomlari bir xil bo'ladi;

agar burchak vertikal diametrdan $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ burchaklarga burilsa, unda tenglikning ikkala tomonidagi funksiyalarning nomlari ikki xil bo'ladi (sinus kosinusga, tangens kotangensga o'tadi va hokazo).

Tenglikning o'ng tomonidagi trigonometrik funksiya oldidagi belgini aniqlash uchun burchakni o'tkir burchak sifatida ko'rib chiqing va tenglikning chap tomonidagi izlanayotgan belgini aniqlang.

Yuqoridagi keltirish formulalari quyidagi jadval shaklida yozilishi mumkin:

| Funk Siya | $t$ argument | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $2\pi-\alpha$ |
| $sin\ t$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $sin\ \alpha$ | $-sin\ \alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-sin\ \alpha$ |
| $cos\ t$ | $sin\ \alpha$ | $-sin\ \alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-sin\ \alpha$ | $sin\ \alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $tg\ t$ | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ |
| $ctg\ t$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ |

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Trigonometrik funksiyalar qanday kiritiladi?

2. $0^0$ dan $180^0$ gacha burchaklarning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi qanday aniqlanadi?

3. Haqiqiy argumentning trigonometrik funksiyalarini o'qitishda nimalarga e'tibor berish kerak?

4. Burchaklar va yoylarni o'lchash qanday o'rganiladi?

5. Ba'zi burchaklarning trigonometrik funksiyalari qiymatlarini topish usullarini aytib bering.

6. Keltirish formulalarini keltirib chiqaring.

## 8.2-§. Oddiy trigonometrik tenglamalarni o'rganish

REJA:

1. Oddiy trigonometrik tenglamalar.
2. Trigonometrik tenglamalarni yechishning asosiy usullari.

### 1. Oddiy trigonometrik tenglamalar

O'zgaruvchilari trigonometrik funksiyalar belgisi ostida berilgan tenglamalarga trigonometrik tenglamalar deyiladi. Tenglamani qondiradigan o'zgaruvchilar qiymatlari trigonometrik tenglamaning yechimlari hisoblanadi. Trigonometrik tenglamalar sistemasining yechimi $x$ va $y$ ikkita noma'lum bo'lgan har bir trigonometrik tenglamani qanoatlantiradigan $(x;y)$ juftlikning qiymatini topishdir. $(x;y)$ juftliklar sistemaning yechimi deyiladi.

Trigonometrik tenglamalar va ularning sistemalarini yechish uchun noma'lumning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamini aniqlash kerak. Aniqlanish sohasi $sinx$ va $cosx$ funksiyalari uchun $x$ ning har qanday haqiqiy qiymatlaridir, ammo, $tgx$ va $ctgx$ funksiyalari uchun unday emas. $tgx$ funksiyasi uchun aniqlanish sohasi $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ va $ctgx$ funksiyasi uchun aniqlanish sohasi $x \neq n\pi\ , n \in Z$ bo'ladi. Bundan tashqari, aniqlanish sohasini topish uchun trigonometrik funksiyalarni kasr mahrajida, ildiz belgisi ostida, logaritmik funksiyaning argumentlarida va hokazolarda bo'lsa, kerakli shartlar asosida



aniqlanish sohasini topish mumkin. Holatlar hisobga olinishi kerak. Odatda, har qanday trigonometrik tenglamani yechishda ularni oddiy trigonometrik tenglamalar deb nomlangan quyidagi

$$sinx = m, \qquad cosx = m, \qquad tgx = m, \qquad ctgx = m$$

tenglamalarga aylantiriladi va so'ng ular yechiladi (bu yerda $m$ - berilgan son).

Bu kabi trigonometrik tenglamaning yechimi deb trigonometrik tenglamani $m$ ning barcha qiymatlarida tenglamani to'g'ri tenglikka aylantiradigan x o'zgaruvchining qiymatlariga aytiladi. Endi ushbu tenglamalarni yechish usullarini ko'rib chiqamiz.

1. $sinx=m$ tenglama berilgan, bunda $|m| \leq 1$ ya'ni $-1 \leq m \leq 1$. Tenglama yechimlari birlik trigonometrik doirada $Oy$ o'qiga nisbatan simmetrik va ordinataları $m$ ga teng bo'lgan $A$ va $B$ nuqtalar abssissalaridir (12-rasm), $A$ nuqtaning abssissalari $m + 2k\pi\ k\epsilon Z$ kabi, $B$ nuqtaga mos keladigan $x$ lar $\pi - arcsinm + 2k\pi, k\epsilon Z$ shaklida yozilgan bo'lishi mumkin.

Shunday qilib,

$$x = \begin{cases} arcsin\, m + 2k\pi \\ \pi - arcsinm + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} arcsin\, m + 2k\pi \\ -arcsin\, m + (2k+1)\pi \end{cases} \quad (1)$$

Ushbu umumiy yechimni bitta formulada umumlashtirish mumkin:

$$x = (-1)^n \arcsin m + n\pi\ ; n\epsilon Z$$

Agar $n$ juft son bo'lsa, ya'ni $n=2k$ bo'lsa, u holda (1) formulaning birinchi satri, $n$ toq son bo'lsa, ya'ni $n=2k+1$ bo'lsa, ikkinchi satri bo'ladi.

Ushbu tenglamani yechishda quyidagi xususiy hollar ro'y berishi mumkin.

1. Agar $m=-1$ bo'lsa, unda $sinx = -1$, u holda
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi\ , n\epsilon Z;$$
2. Agar $m = 0$ , $sinx = 0$ bo'lsa, u holda $x = n\pi\ , n\epsilon Z$
3. Agar $m = 1$ bo'lsa, unda $sinx = 1$ bo'lsa, u holda

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \, , n\epsilon Z$$

Agar $|m| > 1$ bo'lsa, unda tenglamaning yechimi yo'q.

4. $sinx = -m \; (0 < m < 1)$ bo'lsa, unda tenglamaning yechimi:

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin m + n\pi \, ; n\epsilon Z$$

Ikki argumentning sinuslari tengligi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$(sinf = sin\varphi) \longrightarrow \begin{cases} f + \varphi = (2k+1)\pi, \; k\epsilon Z \\ f - \varphi = 2n\pi, \; n\epsilon Z \end{cases}$$

2. $cosx = m$ shaklidagi tenglamani yechish kerak bo'lsin. Agar $|m| \leq 1$ , ya'ni $-1 \leq m \leq 1$ bo'lsa tenglama yechimga ega. Uning yechimlari abssissa o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi:

$arccosm$ va -$arccosm$ (13- rasm ).

$A$ nuqtaning abssissasi

$$arccosm + 2k\pi \, , k\epsilon Z$$

sifatida yozilishi mumkin. $B$ nuqtaning abssissasi

$$-arccosm + 2k\pi \, , k\epsilon Z.$$

Shuning uchun ushbu tenglamaning umumiy yechimi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\pm arccosm + 2k\pi \, , k\epsilon Z$$

Bu tenglamaning xususiy hollarining yechimlari quyidagicha aniqlanadi:

1) $m = -1; cosx = -1$ bo'lsa, uning yechimi:

$$x = \pi + 2n\pi \, , n\epsilon Z \, ;$$

2) $m = 0; cosx = 0$ bo'lsa, uning yechimi



$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \, , n\epsilon Z$$

3) $m = 1; cosx = 1$ bo'lsa, uning yechimi:

$$x = 2n\pi \, , n\epsilon Z \, ;$$

4) $|m| > 1; cosx = m$ bo'lsa, uning yechimi yo'q.

5) $cosx = -m \; (0 < m < 1)$ bo'lsa, uning yechimi:

$$x = \pm(\pi - arccosm) + 2n\pi, n \in Z,$$

3. $tg\,x = m$ tenglamani yeching.

Uzunligi $\pi$ ga teng bo'lgan, ya'ni tangensning davriga teng bo'lgan $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ intervalda $m$ ga mos bo'lgan yagona $arctgm$ bor. Topilgan ildizga birlik aylana diametridagi qarama-qarshi ikki nuqta ( $B$ va $C$ ) bo'lishi mumkin (14 -rasm). Barcha mumkin bolgan ildizlarni quyidagi formulada umumlashtiramiz:

$$x = arctgm + n\pi \, , n\epsilon Z$$

Bu yeshimning xususiy hollari quyidagicha aniqlanadi:

1) $m = -1 \, ; \; tgx = -1 \, ; \; x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \, , \; n\epsilon Z \, ;$

2) $m = 0 \; ; \; tgx = 0 \; ; \; x = n\pi \, , n\epsilon Z \, ;$

3) $m = 1 \, ; \; tgx = 1 \; ; \; x = \frac{\pi}{4} + n\pi \, , n\epsilon Z \, ;$

4) $tgx = -m \; ; \; x = -arctgm + n\pi \, , n\epsilon Z \, ;$

5) $(tgf = tg\varphi) : f(-\varphi) = n\pi, n\epsilon Z.$

4. $ctgx = m$ tenglamani yeching.

Uzunligi $\pi$ ga teng bo'lgan, ya'ni kotangens funksiyaning davriga teng bo'lgan $(0; \pi)$ intervalda $m$ ga mos bo'lgan yagona $arcctgm$ bor. Topilgan ildizga birlik aylana diametridagi qarama-qarshi ikki nuqta (*B* va *C*) bo'lishi mumkin(15-rasm). Barcha mumkin bo'lgan ildizlarni quyidagi formulada umumlash-tiramiz:

$$x = arcctg\, m + n \quad , n \quad Z$$

Oxirgi formulaning xususiy hollarida ushbu tenglamaning umumiy yechimlari quyidagicha aniqlanadi:

$$1)\ m = -1\ ;\ ctgx = -1\ ;\ x = \frac{3\pi}{4} + n\pi\ , n\epsilon Z\ ;$$

$$2)\ m = 0\ ;\ ctgx = 0\ ;\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi\ , n\epsilon Z\ ;$$

$$3)\ m = 1\ ;\ tgx = 1\ ;\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi\ , n\epsilon Z\ ;$$

$$4)\ ctgx = -m\ ;\ x = \pi - arcctgm + n\pi\ , n\epsilon Z\ ;$$

$$5)\ (ctgf = ctg\varphi) : f(-\varphi) = n\pi, n\epsilon Z.$$

**2. Trigonometrik tenglamalarni yechishning asosiy usullari**

Har qanday trigonometrik tenglamani yechishning universal usuli yo'q. Masala va nisollar turlarining ko'pligi bunday yondashuvlarni aniqlashga imkon bermaydi. Biroq, har bir trigonometrik tenglamaning o'zgarishi natijasida uni oddiy trigonometrik tenglamaga keltirishning bir necha yo'li mavjud. Amaliyotda eng keng tarqalgan ba'zi usullar quyida keltirilgan.

Misol. $sin2x + cos2x = 0$ tenglamani yeching.

Bu tenglamani hal qilishni bir necha yo'li bo'lishi mumkin.

a) $cos2x = 0$ ning yechimi berilgan tenglamaning yechimi emasligi sababli, tenglamaning ikkala tomonini ham $cos2x$ ga bo'lish mumkin . Keyin $tg2x + 1 = 0$ yoki $tg2x = -1$ bo'ladi. Bundan,

$$2x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n\epsilon Z, \text{ yoki } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n\epsilon Z$$

yechimni topamiz.



b) $sin2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$ tenglikdan foydalanib, so'ngra trigonometrik funksiyalar yig'indisini ko'paytmaga aylantirish formulasi yordamida yechilishi mumkin. Bu boshqa misollarni hal etishda maxsus usul bo'ladi.

c) $sin2x = 2sinxcosx\ , cos2x = cos^2x - sin^2x$ formulalaridan foydalanish bu tenglamani

$$2sinxcosx + cos^2x - sin^2x = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglikning ikkala tomonini $cos^2x \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$2tgx + 1 - tg^2x = 0$$

va $tgx = y$ belgilash kiritsak,

$$y^2 - 2y - 1 = 0\ , \text{ uni yechib}$$

$$y_1 = 1 - \sqrt{2}\ , y_1 = 1 - \sqrt{2}\ , \text{ ni hosil qilamiz.}$$

Ya'ni

$$x_1 = arctg\left(1 - \sqrt{2}\right) + n\pi\ , n\epsilon Z\ ,\ \ x_2 = arctg\left(1 + \sqrt{2}\right) + n\pi\ , n\epsilon Z$$

d) Bu tenglama yordamchi burchak joriy etish yo'li bilan hal qilinishi mumkin. Buning uchun tenglamaning ikkala tomonini $\frac{\sqrt{2}}{2}$ songa ko'paytiramiz:

$$sin\frac{\pi}{4} \times sin2x + cos\frac{\pi}{4} \times cos2x = 0$$

Uni yig'indi formulasiga qo'ysak:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Oxirgi tenglikdan

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + n\pi, x = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2},\ \ n\epsilon Z$$ hosil bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, oxirgi tenglama nafaqat kosinusga, balki sinusga ham o'zgarishi mumkin.

$$cos\frac{\pi}{4}\times sin2x + sin\frac{\pi}{4}\times cos2x = 0 \text{ yoki}$$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Oxirgidan

$$2x+\frac{\pi}{4}=n\pi, 2x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}, \qquad n\epsilon Z$$

hosil bo'ladi.

Agar $asinx + bcosx = c$ ko'rinishdagi tenglamani yechimini tipish talab qilingan bo'lsa va $a^2+b^2\geq c^2$ shart bajarilsa, u holga tenglama yechimga ega bo'ladi. Bu yechimni topish uchun tenglamani ikkala tomonini $\sqrt{a^2+b^2}$ ga bo'lamiz:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$$

ekanligidan qavs ichidagilardan birini $sin\varphi$ bilan belgilashimiz mumkin bo'lganligi sababli, boshqasini $cos\varphi$ bilan belgilashimiz mumkin, ya'ni

$$cos\varphi sinx + sin\varphi cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

oxirgidan

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Hosil bo'lgan tenglama yechimga ega bo'lishi uchun

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$$

shart bajarilishi kerak, ya'ni $a^2+b^2\geq c^2$ shartlarda tenglamaning yechimini quyidagicha topamiz:



$$\varphi+x=(-1)^n arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+n\pi, \ n\epsilon Z.$$

Bu yerdan $\varphi$ ning qiymatini aniqlaymiz:

$$tg\varphi=\frac{sin\varphi}{cos\varphi}=\frac{a}{b}\ ;\ \varphi=arctg\frac{a}{b}$$

Shunday qilib, boshlang'ich tenglamaning umumiy yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$x=-arctg\frac{b}{a}+(-1)^n arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+n\pi, \ \ n\epsilon Z.$$

e) Yuqoridagi usullar bilan yechib bo'lmaydigan tenglamalar mavjud. Bunday holda universal usuldan foydalanish kerak. Bunday hollarda quyidagi formulalarni ishlatish foydalidir.

$$sinx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\ ;\quad cosx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};\ tgx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}};\ ctgx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}.$$

Yuqorida yechilgan tenglamada $a=b=1$ va $c=0$ bo'lgan holda uni yechamiz:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=0,\ \ 2tg\frac{x}{2}+\ 1-tg^2\frac{x}{2}=0$$

Bu yerda tangens ikkinchi darajada qatnashmoqda. Bu kabi tenglamani yechish yo'llari keyingi paragrafda keltirilgan.

**3. Yangi o'zgaruvchini kiritish orqali yechiladigan tenglamalar**

1-misol. Tenglamani yeching: $2sin^2 3x-5sin3x+4=0$

Yechish: $sin3x=y$ o'zgaruvchini kiritishsh mumkin. U holda ı tenglama

$$y^2-5y+4=0\ ,$$

ko'rinishga keladi, uni yechib $y_1=1, y_2=1$ ni topamiz. Demak, *sin3x*=1 va *sin3x*=4. Birinchi tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \qquad n\epsilon Z.$$

$sin3x=4$ ning yechimi yoq.

Javob: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n\epsilon Z$.

Endi

$$a(sinx + cosx) + bsin2x = c$$

ko'rinishdagi tenglamani yechish uchun $sinx + cosx = t$ almashtirish bajaramiz.

Ba'zi hollarda $sinx \pm cosx = t$ almashtirish maqsadga mufofiq bo'ladi. Misol keltiramiz.

2-misol. Tenglamani yeching: $sinx - cosx = 1 - sin2x$

Yechish: $sinx - cosx = t$ belgilash kiritamiz va uni kvadratga ko'tarib,

$$1 - 2sinx\ cosx = t^2$$

va $sin2x = 2sinxcosx$ ekanligini esga olsak, berilgan tenglama

$t(t-1) = 0$ ko'rinishga keladi. Uni yechib $t_1 = 0, t_2 = 0$ ni hosil qilamiz. Bundan

1) $sinx - cosx = 0$, $sinx = cosx$, $tgx = 1$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, n\epsilon Z$.

2) $sinx - cosx = 1$

Bu tenglamani yechishning bir nechta usullari bor. Ulardan birini qo'llash uchun tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshiramiz:

$$1 - 2sinxcosx = 1\ , -sin2x = 0\ ,$$

$$2x = k\pi, \quad x_2 = \frac{k\pi}{2}\ , k\epsilon Z.$$

Shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimlari quyidagilardan iborat:



Javob: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n\epsilon Z$ ; $\frac{k\pi}{2}$ , $k\epsilon Z$.

**4. Trigonometrik funksiyalarning xossalaridan foydalanib yechiladigan tenglamalar**

Ba'zi trigonometrik tenglamalarni yechishda quyidagi holatlarga e'tibor berish kerak. Buning uchun kosinuzlar, sinuslar, tangens va kotangenslarning tengligi uchun zarur va to'g'ri shartlardan foydalaniladi:

$$(cosf = cos\varphi) \leftrightarrow \begin{cases} f + \varphi = 2k\pi, k\epsilon Z; \\ f - \varphi = 2n\pi, n\epsilon Z \end{cases}$$

$$(sinf = sin\varphi) \leftrightarrow \begin{cases} f + \varphi = (2k+1)\pi, k\epsilon Z; \\ f - \varphi = 2n\pi, n\epsilon Z \end{cases}$$

$$(tgf = tg\varphi) \leftrightarrow \begin{cases} f - \varphi = n\pi, n\epsilon Z; \\ \varphi \neq k\pi, k\epsilon Z \end{cases}$$

$$(ctgf = ctg\varphi) \leftrightarrow \begin{cases} f - \varphi = k\pi, k\epsilon Z; \\ \varphi \neq= k\pi, k\epsilon Z \end{cases}$$

Bu formulalardan foydalanib, trigonometrik tenglamani yechishga misollar keltiramiz.

1-misol. Tenglamani yeching: $sin5x = cos2x$ .

Yechish:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = cos2x \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 5x + 2x = 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} - 5x - 2x = 2n\pi \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}\ , k\epsilon Z; \\ 2)\ x = \frac{\pi}{14} - \frac{2k\pi}{7}\ , k\epsilon Z \end{cases}$$

Javob: $x_1 = -\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\ , k\epsilon Z;\ x_2 = -\frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{14}\ , k\epsilon Z$

2-misol. Tenglamani yeching: $tg3x = tgx$ .

Yechish: Ikki argument tangensining tengligi shartidan foydalanamiz:

$$3x - x = k\pi$$

Bundan $x = \frac{k\pi}{2}$ , $k \epsilon Z$. Agar $k$ juft son bo'lsa, ya'ni ,$k = 2n$ bo'lsa, u holda $x = n\pi$ bo'ladi va $tg3x = 0$ va $tgx = 0$.

Keyin $tg3x = tgx$ bo'ladi . Shunday qilib, berilgan tenglamaning yechimi $x = n\pi, n\epsilon Z$ formuladan aniqlanadi.

Javob: $n\pi, n\epsilon Z$

Agar tenglamada noma'lumning turli xil trigonometrik funksiyalari qatnashsa, unda bu funksiyalarning barchasi bitta funksiya bilan ifodalanishi mumkin va tenglamada tegishli almashtirishni amalga oshirish orqali faqat bitta funksiya qatnashgan noma'lum shakliga yozish mumkin.

Radikallar tenglamada ishtirok etgan bo'lsa, radikalning tenglamaga kiritilmasligi uchun ularni (agar mumkin bo'lsa) almashtirish tavsiya etiladi.

3-misol. Quyidagi tenglamani yechng:

$$2cos^2x + 3sinx = 0$$

Yechish: $cos^2x = 1 - sin^2x$ almashtirish bajaramiz

$$2(1 - sin^2x) + 3sinx = 0$$

yoki

$$2 - 2sin^2x + 3sinx = 0$$

yoki

$$2sin^2x - 3sinx - 2 = 0$$

bo'ladi. Uni yechib, $sinx = -\frac{1}{2}$ , $sinx = 2$ ni hosil qilamiz.

Birinchi tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi, n\epsilon Z.$$

Ikkinchi tenglamaning yechishi yo'q.



Bu yerda agar biz $sinx = \pm\sqrt{1 - cos^2x}$ tenglikdan foydalansak, radikal tenglamani olamiz. Shuning uchun, ushbu tenglamani hal qilganda, sinusni kosinus orqali emas, balki sinus orqali ifoda etish yaxshiroqdir.

Javob: $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi, n\epsilon Z$.

4-misol. Ushbu tenglamani yeching:

$$sinx + cosx = 1 \qquad (1)$$

Yechish: Agar biz $cosx = \pm\sqrt{1 - sin^2x}$ tenglikdan foydalansak, $sinx \pm \sqrt{1 - sin^2x} = 1$ yoki $\pm\sqrt{1 - sin^2x} = 1 - sinx$ tenglamani hosil qilamiz.

Endi bu tenglama ikki qismini kvadratga ko'taramiz va soddalashtiramiz:

$$sin^2x - sinx = 0$$

bundan $sinx = 1$ va $sinx = 0$ tenglamalar hosil bo'ladi. Ularni yechib:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon Z \text{ va } x = 2n\pi, n\epsilon Z \text{ ni hosil qilamiz.}$$

Tekshirish: Birinchi yechimlar to'plami tenglamani qanoatlantiradi:$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$.

Ikkinchi yechimlar to'plami uchun

$$sinn\pi{=}0,\ \cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1, & agar\ n\ juft\ bo'lsa; \\ -1, & agar\ n\ toq\ bo'lsa \end{cases}$$

$n = 2k$ bo'lganda yechim tenglamani qanoatlantiradi. $n = 2k + 1$ bo'lganda ikkinchi yechimlar to'plami tenglamani qanoatlantiradi.

Tenglamani umumiy yechimi:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n\epsilon Z \text{ va } x = 2k\pi, k\epsilon Z$$

Javob : $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n\epsilon Z$ va $x = 2k\pi, k\epsilon Z$.

Agar tenglamaning chap tomoniga barcha tarkibiy qismlardan nusha ko'chirgandan so'ng, uni ko'paytuvchilarga ajratish mumkin bo'lsa, unda tenglama chap tomoni nolga teng bo'ladi. Keyin ushbu ko'paytuvchilarning har birini alohida hal qilish va barcha topilgan yechimlarni bitta to'plamga birlashtirish kerak.

5-misol. sin5x - cos3x = sinx tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamaning chap tomonidagi ifodani o'ng tomonga olib o'tamiz va ularni ko'paytuvchilarga ajratamiz, so'ngra quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$(sin5x - sinx) - cos3x = 0, \quad 2sin2xcos3x - cos3x = 0$$

$$cos3x(2sin2x - 1) = 0;$$

tenglama chap tomonidagi ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglay-miz:

$$2sin2x - 1 = 0 \text{ yoki } cos3x = 0.$$

Avval qavs ichini yechamiz:

$$sin2x = \frac{1}{2}; 2x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$$

Ikkinchi tenglamani yechamiz:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k\epsilon Z$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi ikkita seriyadan iborat:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \qquad n\epsilon Z, x = \frac{2k+1}{6}\pi, k\epsilon Z$$

Javob: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \qquad n\epsilon Z, x = \frac{2k+1}{6}\pi, k\epsilon Z$

Agar biron bir noma'lum qiymatlarda ko'paytuvchilarning kamida bittasi nolga aylansa, boshqalari esa hech bo'lmaganda ma'nosini yo'qotsa, u holda tenglama yechimini yo'qotadi' noma'lumning bunday qiymatlari berilgan tenglamaning yechimi bo'lolmaydi.

6-misol. $sin2xtgx=0$ tenglamani yeching.



Yechish: Agar berilgan tenglamaning chap qismidagi ko'paytuvchilarni nolga tenglasak, quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi: $sin2x = 0$ va $tgx = 0$. Ularni yechimini topamiz:

$$x = \frac{n\pi}{2}, n\epsilon Z$$

Ikkinchi ko'paytuvchini nolga tenglab, $tgx = 0$ va uni yechib, $x = k\pi, k\epsilon Z$ ni hosil qilamiz:

Ikkinchi ko'paytuvchi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, n\epsilon Z$ qiymatlarda ma'noga ega emas. Shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi: $x = k\pi, \ k\epsilon Z.$

Javob: $x = k\pi, \ k\epsilon Z.$

Ba'zi trigonometrik tenglamalar yechimlarini topishda trigonometrik funksiyalarni tangens funksiyasining yarim burchagi bilan ifodalash kerak bo'ladi.

Ushbu usul ba'zan ratsional usul yordamida trigonometrik tenglamalarni yechimini topish deb ataladi.

Ratsionalizatsiya usulining ma'nosi shundaki, yordamchi noma'lum o'zgaruvchi vaqtincha kiritiladi, shuning uchun almashtirishdan keyin ushbu yordamchi uchun ratsional tenglamani hosil qilish kerak.

Misol sifatida quyidagi tenglamani yechamiz:

$$asinx + bcosx = c \quad \text{bunda } a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

Yechish: $cosx, sinx$ larni $tg\frac{x}{2}$ orqali ifodalaymiz va $t = tg\frac{x}{2}$ belgilash kiritamiz:

$$cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

O'zgarishdan keyin tenglama quyidagi shaklni oladi: $-\frac{t^2(b+c)-2at+c-b}{1+t^2} = 0$ tenglikni $(1+t^2)$ (bu ifoda $t$ ning ixtiyoriy qiymatida 0 ga teng emas) ga ko'paytirib,

$$t^2(b+c) - 2at + c - b = 0$$

kelib chiqadi. Agar $b \neq c$ bo'lsa, u holda

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2}}{b+c}$$

bo'ladi.

Agar $a^2 + b^2 \geq c^2$ bo'lsa, t ning qiymati haqiqiydir.

Agar $b=-c$ bo'lsa, unda tenglama birinchi darajali tenglamaga aylanadi, undan quyidagini topamiz:

$$t = tg\frac{x}{2} = -\frac{b}{c}, \quad \frac{x}{2} = arctg\left(-\frac{b}{a}\right) + k\pi \qquad (5)$$

Ya'ni $x = (2k+1)\pi, \ k\epsilon Z$.

Endi hulosa chiqaramiz.

1) Agar $a^2 + b^2 < c^2$ bo'lsa, unda tenglama yechimlarini topib bo'lmaydi.

2) Agar $a^2 + b^2 > c^2$ , $c \neq -b$ bo'lsa:

$$x = 2\left(\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2}}{b+c} + k\pi\right), k\epsilon Z$$

3) Agar $c = -b$ bo'lsa, unda tenglamani ikki xil yechimlari mavjud:

$$x = (2k+1)\pi, k\epsilon Z \qquad \text{va } x = 2arctg\left(-\frac{b}{c}\right) + 2n\pi, n\epsilon Z$$

7-misol. Tenglamani yeching: $3tg\frac{x}{2} + ctgx = \frac{5}{sinx}$

Yechish: *ctgx* va *sinx* larni $tg\frac{x}{2}$ bilan ifodalaymiz:



$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad ctgx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}$$

Agar bularni berilgan tenglamaga qo'ysak:

$$3tg\frac{x}{2} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}} = \frac{5(1+tg^2\frac{x}{2})}{2tg\frac{x}{2}}$$

bo'ladi.Agar $tg\frac{x}{2} = t$ deb belgilash kiritsak:

$$3t + \frac{1-t^2}{2t} = \frac{5(1+t^2)}{2t}$$

$-4 \neq 0$, demak bu tenglama yechimga ega emas.

Javob: □

8-misol. $sin^2x + sinx - 2cos^2x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglikning ikki tomonini $cos^2x \neq 0$ ga bo'lamiz va quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$tg^2x + tgx - 2 = 0$$

Ushbu tenglama *tgx* ga nisbatan kvadrat tenglamadir. Uni yechib:

$$(tg)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Endi tenglama ikki ildizi $tgx = -2, tgx = 1$.

Birinchi tenglamaning umumiy yechimi: $x = -arctg2 + n\pi, \epsilon Z$;

tenglamaning umumiy yechimi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k\epsilon Z$ bo'ladi.

Javob: $= -arctg2 + n$Ikkinchi $\pi, \epsilon Z$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

9-misol. $3sin^2x + 2sinxcosx = 2$ tenglamani yeching.

Yechish: $sin^2x + cos^2x = 1$ ni hisobga olib tenglamani quyidagi shaklda yozamiz:

$$3sin^2x + 2sinxcosx = 2(sin^2x + cos^2x) \quad \text{yoki}$$

$$sin^2x + 2sinxcosx - 2cos^2x = 0$$

Uni yechish uchun tenglamaning ikkala tomonini $cos^2x \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$tg^2x + 2tgx = 2 \text{ dan}$$

$$tgx = -1 \pm \sqrt{3}\ , x = arctg(-1 \pm \sqrt{3}) + n\pi, n\epsilon Z\ .$$

Javob: $x = arctg(-1 \pm \sqrt{3}) + n\pi, n\epsilon Z$ .

10-misol. $4sinx + 5cosx = 6$ tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko'taramiz:

$$(4sinx + 5cosx)^2 = 6^2$$

$$16sin^2x + 40sinxcosx + 25cos^2x = 36$$

Bundan esa

$$16tg^2x + 40tgx + 25 = \frac{36}{cos^2x}$$

yoki

$$16tg^2x + 40tgx + 25 = 36(1 + tg^2x).$$

Uni soddalashtirib

$$20tg^2x - 40tgx + 11 = 0$$

Oxirgi tenglamani tangensga nisbatan yechib,

$$(tg)_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 220}}{20} = \frac{20 \pm \sqrt{180}}{20} = \frac{10 \pm 3\sqrt{5}}{10}$$

va $x = arctg\frac{10\pm3\sqrt{5}}{10} + n\pi\ , n\epsilon Z$ ni hosil qilamiz.

Javob: $x = arctg\frac{10\pm3\sqrt{5}}{10} + n\pi\ , n\epsilon Z$

Ba'zi tenglamalar trigonometrik funksiyalar yig'indisini ko'paytmaga keltirish orqali yechiladi. Bu formulalar quyidagilardan iborat:

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$



$$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ ;$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{cos\alpha cos\beta}\ ; ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{sin\alpha sin\beta}$$

Ba'zi misollarni ko'rib chiqaylik.

11-misol. $cos2x + cos4x = 2cos3x$ tenglamani yeching.

Yechish:

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha + \beta}{2}cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

formulani qo'llab:

$$2cos3xcosx = 2cos3x,\ cos3x(cosx - 1) = 0 \quad \text{Bundan}$$

$$1)\ cos3x = 0, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + n\pi, x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\ , n\epsilon Z;$$

$$2)\ cosx - 1 = 0\ , cosx = 1\ , x = 2k\pi, k\epsilon Z$$

Javob: $x = \frac{\pi}{6}(2n + 1), n\epsilon Z\ ;\ 2k\pi, k\epsilon Z$

12-misol. $sinx + sin3x = 2sin2x$ tenglamani yeching.

Yechish: $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ formuladan foydalanib berilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$2sin2xcosx = 2sin2x\ , \quad sin2x(cosx - 1) = 0$$

Bundan

1) $sin2x = 0, 2x = n\pi\ , x = \frac{n\pi}{2}, n\epsilon Z;$

2) $cosx - 1 = 0\ , cosx = 1,\ x = 2k\pi\ , k\epsilon Z$

Javob: $x = \frac{n\pi}{2}, n\epsilon Z;\ x = 2k\pi\ , k\epsilon Z$

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Oddiy trigonometrik tenglamalarga qanday tenglamalar kiradi?
2. Trigonometrik tenglamalarni yechishning asosiy usullarini izohlang.
3. Yangi o'zgaruvchini kiritish orqali yechiladigan tenglamalarga misol keltiring.
4. $4\sin x + 5\cos x = 6$ tenglamani yeching.
5. $sin^2x + sinx - 2cos^2x = 0$ tenglamani yeching.

---

## 8.3-§. Trigonometrik tengsizliklarni yechish

REJA:

1. Trigonometrik tengsizliklar.
2. Modul qatnashgan tengsizliklar.

### 1. Trigonometrik tengsizliklar

Tarkibida trigonometrik funksiyalar bo'lgan tengsizliklarga trigonometrik tengsizliklar deb ataladi. Masalan,

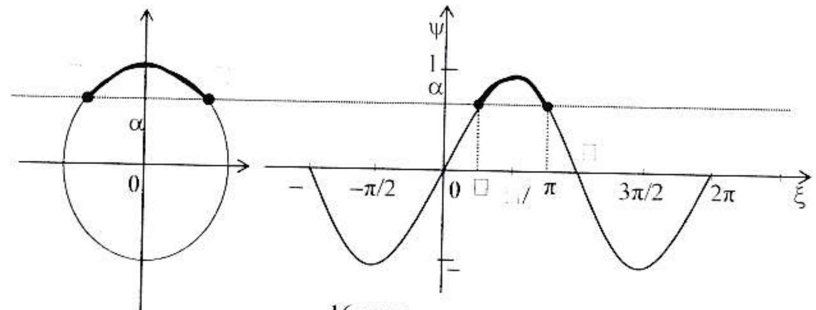
1) $tg^2x > 0$ tengsizlik $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n\epsilon Z$ dan boshqa barcha $x$ larda o'rinli.

2) $|sinx| \leq 1$ tengsizlik barcha $x$ larda o'rinli.

3) $sinx \geq \frac{1}{2}$ tengsizlik $\left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right]$, $n\epsilon Z$ larda o'rinli.

4) $cosx \leq 0$ tengsizlik $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n\epsilon Z$ larda o'rinli






16-rasm.

Eng sodda trigonometrik tengsizliklarni ko'rib chiqamiz:

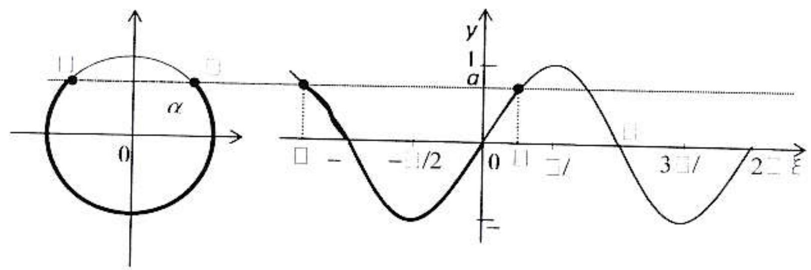
$$sinx > a, \quad sinx \geq a, \quad sinx < a, \quad sinx \leq a$$

Trigonometrik tengsizliklar yechimga ega bo'lishini o'rganaylik. Birinchi tengsizlik yechimga ega bo'lishi uchun $|a| < 1$ , $-1 < a < 1$ shart bajarilishi kerak.

$$sinx > a \leftrightarrow arcsina + 2n\pi < x < \pi - arcsina + 2n\pi, n\epsilon Z \text{ (17-rasm)}$$

$$\alpha = arcsina; \ \beta = \pi - arcsina$$

$$sinx < a \leftrightarrow -\pi - arcsina + 2n\pi < x < arcsina + 2n\pi, n\epsilon Z.$$



17-rasm.

Bu tenglasizliklarning xususiy hollarini qarab chiqamiz:

$$a = -1 , sinx < -1$$

bu tengsizlikning yechimi yo'q.

$$a = 1 , \quad sinx < 1$$

bu tengsizlikning yechimi $x \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n\epsilon Z$

$$sinx \leq -1$$

bu tengsizlikning yechimi $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n\epsilon Z$

$$sinx \leq 1$$

bu tengsizlikning yechimi $x\epsilon R$

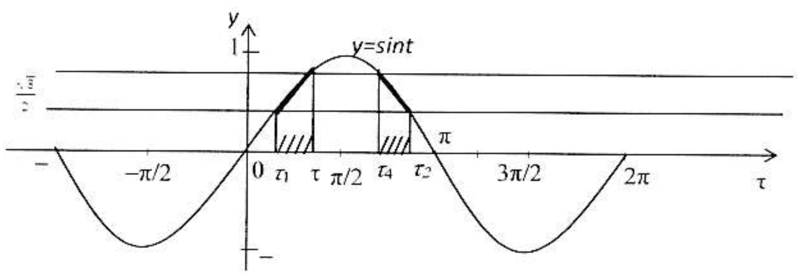
$$sinx \leq -1$$

bu tengsizlikning yechimi $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n\epsilon Z$

Misol. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{1}{2} < sint \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Yechish: Tengsizlikni grafik usulda yechish uchun




22-rasm.

$y = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = sinx$ funksiyalar grafiklarini chizamiz (22-rasm).



Funksiya grafigi berilgan tengsizlik yechimini yozish imkonini beradi, ya'ni tengsizlik yechimi $t_1 < t \leq t_3$ va $t_4 < t \leq t_2$ oraliqlarda bo'lishini ko'rsatadi. Endi bu nuqtalar koordinatalarini topaylik:

$$sint = \frac{1}{2}; \quad t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n\epsilon Z .$$

Tengsizlikning $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ segmentda hal qilish samarali bo'ladi. Funksiya grafigi berilgan tengsizlik yechimi

$$-\frac{\pi}{2} < t \leq t_1 \text{ va } t_2 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

oraliqlarda bo'lishini ko'rsatadi. Endi bu nuqtalar koordinatalarini topaylik.Buning uchun

$$cost = \frac{1}{2}$$

tenglamani yechamiz.

$$t = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n\epsilon Z.$$

Bu yechimda $n$=0 bo'lganda $t_1 = -\frac{\pi}{3}, t_2 = \frac{\pi}{3}$ bolib, berilgan tengsizlikning yechimi quyidagicha bo'ladi:

Javob: $(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; -\frac{\pi}{3} + 2n\pi) \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), n\epsilon Z$

**2. Modul qatnashgan tengsizliklar**

1-misol. Modul qatnashgan tengsizlikni yeching:

$$|sint| \leq \frac{1}{2}$$

Yechish: Bu tengsizlik $-\frac{1}{2} \leq sint \leq \frac{1}{2}$ qo'sh tengsizlikka tengkuchli. Tengsizlikni grafik usulida hal qilamiz. Funksiya grafigidan ko'rinadiki, berilgan tengsizlik

$$t_1 \leq t \leq t_3 \text{ va } t_4 \leq t \leq t_2$$

oraliqlarda yechimga ega.

$sint = -\frac{1}{2}$ va $sint = \frac{1}{2}$ tenglamalarni yechib $t_1$ va $t_2$ larni topish mumkin:

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n\epsilon Z; \; t = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k\epsilon Z$$

Modulli tengsizlik yechimi ordinataar o'qiga simmetrik ekanligidan,

$$-\frac{\pi}{6} + n\pi \le t \le \frac{\pi}{6} + n\pi, n\epsilon Z$$

yechimni hosil qilamiz.

2-misol. Tengsizlikni yeching: $|tgx| > 1$

Yechish: Berilgan tengsizlik quyidagi tengsizliklarga mos keladi:

$$|tgx| > 1 \leftrightarrow \begin{cases} tgx > 1 \\ tgx < -1 \end{cases}$$

Bu shartni qanoatlantiradigan $x$ larni topish uchun birlik aylanaga murojaat etamiz. So'ngra,

$$\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi, -\frac{\pi}{2} + n\pi < x < -\frac{\pi}{4} + n\pi, n\epsilon Z$$

ni hosil qilamiz.

Javob: $(\frac{\pi}{4} + n\pi \,; \frac{\pi}{2} + n\pi) \cup (-\frac{\pi}{2} + n\pi; -\frac{\pi}{4} + n\pi)\, n\epsilon Z$

3-misol. Tengsizlikni yeching: $|ctgx| < 1$

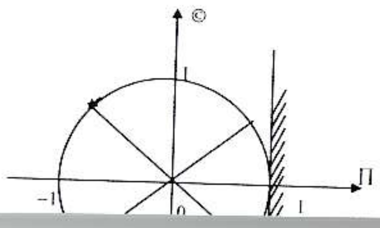
Yechish: Ushbu tengsizlik quyidagi qo'sh tengsizlikka mos keladi:

$$|ctgx| < 1 \leftrightarrow -1 < ctgx < 1$$

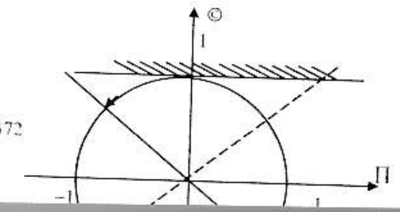
Bu shartni qanoatlantiradigan $x$ larni topish uchun birlik aylanaga murojaat etamiz. So'ngra

$$\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + n\pi, n\epsilon Z$$

kelib chiqadi.






Javob: $(\frac{\pi}{4} + n\pi; \frac{3\pi}{4} + n\pi), n\epsilon Z$

## Mustahkamlash uchun savollar

1. Maktabda trigonometrik funksiyalar qanday tartibda o'qitiladi?
2. Burchaklar va yoylarni o'lchashni qanday o'rgatishni tushuntiring.
3. Trigonometrik funksiyalarning qiymatlarini qanday topish mumkin?
4. $sin30^\circ = \frac{1}{2}$; $cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; $ctg30^\circ = \sqrt{3}$ ekanligini qanday tushuntirish maqsadga mufofiq?
5. $sin180^\circ = 0$; $cos180^\circ = -1$; $tg180^\circ = 0$ ; $ctg180^\circ = -\infty$ ekanligi qanday o'rgatiladi?
6. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $cos(-\alpha) = cos\alpha; tg(-\alpha) = -tg\alpha \,; ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$ ekanligini qanday isbotlash mumkin?
7. $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(90^\circ \pm \alpha)$ burchaklar uchun keltirish formulalarini umumlashtiring.
8. $\pi \pm \alpha$ $(180^\circ \pm \alpha)$ burchaklar uchun keltirish formulalari qanday?
9. Keltirish formulalaridan foydalanganda qanday shartlarga rioya qilinadi?

10. $sinx = m$ tenglamani yechish formulasini keltirib chiqaring.

11. $cosx=m$ shakldagi tenglamani yechish formulasini keltirib chiqaribng.

12. $sin2x + cos2x = 0$ tenglamani qanday yechish mumkin?

13. $2sin^2 3x + 5sin3x + 4 = 0$ tenglamani yeching.

14. $sin5x - cos3x = sinx$ tenglamani yeching.

15. $3tg\frac{x}{2} + ctgx = \frac{5}{sinx}$ tenglamani yeching.

16. $3sin^2 x + 2sinxcosx = 2$ tenglamani yeching.

17. $cos5xcosx = cos4x$ tenglamani yeching.

18. $cos2x + cos4x = 2cos3x$ tenglamani yeching.

19. $1 - sinx = sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ tenglamani yeching.

20. $cos\frac{3x}{4} + cos2x = 2$ tenglamani yeching

21. Tengsizlikni yeching: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le sint \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

22. Tengsizlikni yeching: $cos2x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

23. Tengsizlikni yeching: $|tgx| > 1$

24. Tengsizlikni yeching: $|tgx| \le 1$



# IX BOB. KOMBINATORIKA ELEMENTLARINI O'QITISH METODIKASI

## 9.1-§. Kombinatorika elementlarini o'qitish

REJA:

1. Qisqacha tarixiy ma'lumotlar.
2. Maktab matematika kursida uchraydigan kombinatorika masalalari.
3. Kombinatorika masalalarini yechishga o'rgatish metodikasi.

### 1. Qisqacha tarixiy ma'lumotlar

Matematika va uning tatbiqlarida turlicha to'plamlar va bu to'plamlar elementlari o'rtasidagi turlicha aloqalarni o'rganishga to'g'ri keladi. Bunga o'xshash masalalarda ob'ektlarning turli kombinatsiyalari bilan ish ko'riladi. Matematikaning bu kabi masalalarni o'rganadigan bo'limiga kombinatorika deb ataladi. Kombinatorika va uning elementlari turli sohalarda keng qo'llaniladi.

Kombinatorika – matematikaning bir bo'limi bo'lib, u narsa va predmetlarning turli o'rin almashtirishlari va kombinatsiyalarini, shuningdek kombinatorika barsha mumkin bo'lgan variantlarini ko'rib chiqishni o'rganadi. Kombinatorika XVII asrda vujudga kelgan. Uzoq vaqt davomida kombinatorika matematikaning bo'limi bo'lib sanalmagan. Kombinatorika masalalari bilan ovchilar o'ljalarni ovlayotganlarida, harbiylar o'z taktikalarini rejalashtirayotganlarida, ishchilar o'z instrumentlarini qo'llashda foydalanganlar. Shuningdek qiziqarli kombinatorik masalalar ham keng tarqalgan. Kombinatorika bo'yicha birinchi tadqiqotlarni italiyalik olimlar Dj.Kardano, N.Tarta'lye (1499-1557), G.Galiley (1564-1642), fransuz olimi B.Paskal (1623-1662) kabilar olib bo'rganlar. G.Leybnits birinchi marta kombinatorikani matematikaning mustaqil bo'limi sifatida o'rgangan va u 1666 yilda "Kombinatorika san'ati haqida" nomli asarini yozgan va bu asarida birinchi marta "kombinatorika" terminini ishlatgan.

Matematika kursida ko'ngilochar tabiatli qiziqarli masalalar mavjud: matematik fokuslar, gugurt muammolari, jumboq, kombinatorial masalalar va boshqalar. Ularni asosiy kursning barcha mavzularini va albatta, darsdan tashqari mashg'ulotlarda sinchkovlik bilan o'rganishgan. Maktab o'quvchilarining matematikaga qiziqishini oshirish, ularning matematik qobiliyatini rivojlantirish, o'quv jarayonida tezkor topshiriqlar, hazil vazifalar, matematik nayranglar, didaktik o'yinlar, she'rlar, ertaklar, topishmoqlar va boshqalarni ishlatmasdan mumkin emas. Matematika darslarida oqilona o'yinlar katta pedagogik ahamiyatga ega.

O'quv jarayonida maktab o'quvchilarining tafakkurini rivojlantirish uchun katta imkoniyatlar matematikaga xosdir, ammo ular o'z-o'zidan amalga oshirilmaydi, lekin professional uslubiy yechimni talab qiladi, ya'ni matematik qobiliyatlarni rivojlantirish bo'yicha mashg'ulotlarni tashkil etish maqsadga muvofiq. Shuning uchun matematika kursiga kombinatorial masalalarni kiritish juda muhim va dolzarbdir.

Matematika mantiqiy fikrlashni rivojlantirish uchun haqiqiy shart-sharoitlarni ta'minlaydi. Kombinatorikaviy masalalarni matematika kursiga kiritish intuitiv, fazoviy, konstruktiv, ramziy tafakkurning rivojlanishiga, o'quvchilarning matematik qobiliyatlarini rivojlantirish-ga, shuningdek, yosh o'quvchilarga qiziqishni tarbiyalashga ta'sir qiladi. Kombinatorik masalalar o'quvchilarni amaliy hayot muammolarini hal qilishga tayyorlash, bu vaziyatda:

eng yaxshi qaror qabul qilishga o'rgatish uchun katta imkoniyatlarga ega;

o'quvchilarning boshlang'ich tadqiqotlari va ijodiy faoliyatini tashkil etish;

aqliy faoliyatni faollashtirish va intellektual qobiliyatlarni shakllantirishga xizmat qiladi.

Psixologik, pedagogik va metodik adabiyotlar tahlili asosida kombinatorika bo'limining nazariy asoslari va matematika darslarida kombinatorika masalalarini yechishda ijodiy yondashish, maktab matematika darslarida kombinatorika



masalalarini yechish metodikasi bo'yicha taniqli o'qituvchilarning tajribasidan namuna olishni tavsiya etamiz.

Yuqoridagi fikrlarga asoslanib, biz matematik ta'limni rivojlantirish ta'lim va rivojlanishning organik birlashuvini o'z ichiga olishini, bunda ta'lim o'z-o'zidan emas, balki holatlarning rivojlanish shartidir. Bunday mashg'ulotlar bilan maktab o'quvchilari mustaqil ravishda bilimga ega bo'ladilar, harakatlar usullari bilan tanishadilar, o'zlari bilgan muammolarni hal qilish usullarini qayta yaratadilar va yangilarini kashf etadilar.

Afsuski, aksariyat hollarda o'qituvchi bolalarning tafakkurini cheklash, tayyor stereotiplarga muvofiq fikrlash istagi bilan kurashishga majbur. O'quvchilar aqliy muammoni hal qilishning faqat bitta usulini takrorlaydilar, bir nechta yechimlarning imkoniyatlarini ko'rmaydilar, samarasiz usullarni qanday o'zgartirish kerakligini bilishmaydi. Psixologlar intellektual faoliyatning bunday xususiyatlarini turli xil vazifalarni hal qilish uchun tayyor shablonlarni ishlatish natijalari bilan bog'lashadi. Bunday ta'limning rivojlanayotgan bolaga ta'siri ahamiyatsizdir.

Muammolarni kombinatorik yechish usullari bo'yicha olib borilgan tadqiqotlar tahlili bizga quyidagi jihatlarni ajratishga imkon berdi: o'qitishning rivojlanish usullari kombinatorika masalalarini hal qilish uchun tayyor sxemalarni topshirishga asoslanmagan, balki o'quvchilarni samarali ijodiy fikrlashni shakllantirishni ta'minlaydigan bunday faoliyatni tashkil etishga asoslangan bo'lib, turli xil narsalarni hisobga oladigan nostandart masalalarni hal qilishga yordam beradi. Vaziyatga qarab ob'ektning belgilarini ajrata olishni o'rgatadi.

Psixologik va pedagogik adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, o'qituvchilar va psixologlar o'quv vazifasi nafaqat o'quvchilarni o'rganilayotgan narsalarni tushunishga, balki ular o'rtasidagi aloqalar tizimini yaratishga olib kelishi kerak, degan fikrga qo'shiladilar va shu bilan o'quv mashg'ulotlarini nafaqat yuqori intellektual salohiyatli, rivojlanayotgan bolalar bilan ishlashda ishlatilishi mumkin, shuningdek, o'rtacha aql darajasidagi bolalar bilan ham olib borilishi shart.

O'quvchilarni ijodiy yondashuvni talab qiladigan vazifalarda, ularni amalga oshirishning muvaffaqiyati o'qituvchining ma'lum yordami bilan ta'minlanadi, chunki o'quv jarayonida o'quvchilarning haqiqiy ijodiy faoliyati va ijodi biroz boshqacha. Shuningdek, o'quv jarayonini rivojlantirishda qo'llaniladigan ba'zi vazifalarning muvaffaqiyatli bajarilishiga o'qituvchining ma'lum bir metodik yordami qo'l keladi, chunki o'quv jarayonida o'quvchilarning haqiqiy ijodiy faoliyati va ijodi bir-biridan farq qiladi. Shuningdek, mashg'ulotlarni olib borish jarayonida ishlatiladigan ba'zi masalalarning muvaffaqiyatli bajarilishi ularning o'yin shakli bilan ta'minlanadi.

Rivojlanish vazifalarining muvaffaqiyati kuchli hissiy hodisalarni, shu jumladan "aqliy quvonch" deb ataladigan tuyg'ularni keltirib chiqaradi. Qayta-qayta takrorlangan muvaffaqiyat va u bilan bog'liq ijobiy his-tuyg'ular o'quv va bilim faoliyati uchun yangi motivni shakllantiradi – "aqliy xursandchilik" ni kutish.

Matematik ta'limni rivojlantirish samaradorligini oshirish omillaridan biri bu qanday vazifalarni hal qilish kerakligi, ularning didaktik imkoniyatlari qanday va ular bilan ishlash metodikasi qanchalik samarali ekanligi bilan bog'liq. Shu ma'noda bir emas, balki bir nechta yechimlarni topishga imkon beradigan masalalar e'tiborga loyiqdir. Bu turli xil yechimlar-javoblarning mavjudligi va ularni qidirishni anglatadi. Ushbu masalalarning o'ziga xos xususiyati shundaki, ularning yechimlari odatdagi sxema doirasiga mos kelmaydi. Bunday masalalar bolalarni bitta yechimning qat'iy doirasi bilan cheklamaydi, aksincha ularda izlanish va fikr yuritish uchun imkoniyatlar eshigini ochadi. Kombinator masalalarining murakkabligi shundan iboratki, uni hal qilishda barcha (kombinatsiyani takrorlamasdan) holatlar ko'rib chiqilganiga to'la ishonch hosil qiladigan faqat konstruktiv qidiruv tizimini tanlash kerak.

Matematika mashg'ulotlarida to'plangan tajriba o'quvchining muammoga bo'lgan qiziqishini, uni hal qilish istagini va shu jumladan nostandart masala, uni shablondan uzoqlashishiga yordam beradi, aniq vaziyatlar va sharoitlarni har



tomonlama tahlil qilishga o'rgatadi, qiyin vazifalarni hal qilish uchun "vosita" beradi.

Maktab matematika kursida kombinatorika masalalarini yechishda tizimli metodologiyaning samaradorligini eksperimental o'rganish yuzaga kelgan muammolarni hal qilishda yaxshi natijalarni ko'rsatadi.

Shunday qilib, kombinatorika muammolarini hal qilish uchun ishlarni tashkil qilishda metodik usullardan foydalanish bo'yicha quyidagi tavsiyalarni berishga imkon berdi: harakatlar usullari "tayyor shaklda" berilmaydi va bolalar o'zlari kashfiyot qilib, tajriba orttirishadi. Diqqat markazda – kombinatorik masalani yechishda tasodifiy qidiruv variantlardan o'tish va keyin o'qituvchi yordamida tizimli faoliyat olib borishdir. Ushbu uslubiyot amaliyotda bir necha bor isbotlangan va kombinatorika masalalariga matematik formulalarni qo'llash zarurligi to'g'risida xulosalar chiqariladi, eng muhimi, ular ushbu fan bo'yicha o'quv yutuqlari sonining ko'payishiga, maktab o'quvchilarining matematik tafakkurining umumiy rivojlanishiga ta'sir qiladi.

**Kuzatish, taqqoslash, umumlashtirish kabi aqliy operatsiyalar-dan foydalanish bilan bog'liq muammolarni hal qilishning turli xil usullarini berishimiz mumkinligini ta'kidlaymiz, shuning uchun albatta kombinatorika masalalari o'quvchilarni rivojlantirish uchun yaxshi vositadir.** O'qituvchi uchun faqat yechish usulini mahorat bilan bajarish to'g'ri emas. Shuningdek, u yechilgan masala bo'yicha quyidagi savollarga javob berishga qodir:

"Barcha variantlar ko'rib chiqilganmi?";

boshqacha qilib aytganda, kombinatorika masalalarining xususiyat-lari va ularni hal qilish usullari o'qituvchidan ma'lum bir matematik tayyorgarlikni talab qiladi.

Avvalo, u kombinatorikaning asosiy qoidalarini bilishi kerak. Bundan tashqari, u ba'zi kombinatsion birikmalar turlari va ularning sonini hisoblash qoidalari haqida aniq ma'lumotga ega bo'lishi kerak. Ushbu bilimlarga asoslanib, o'qituvchi yosh o'quvchilarga taklif qilingan kombinatorika masalalarini nafaqat tez va to‘g‘ri hal qilishga, balki ularni bolalarning tayyorgarlik darajasini hisobga olgan holda tuzishga va bolalar yo‘l qo‘yishi mumkin bo‘lgan xatolarini tushuntirish-ga qodir bo‘lishi kerak.

Shunday qilib, maktab o‘qituvchisi oldida turgan eng muhim vazifalardan biri o‘quvchining mustaqil fikrlash, mantiqiy o‘ylashni rivojlantirish bo‘lib, u bolalarga mantiqqa bog‘liq bo‘lgan xulosalar chiqarish, dalillar, bayonotlar berish imkonini beradi; o‘z xulosalarini asoslash va oxir-oqibat mustaqil ravishda bilim olishga o‘rgatadi.

**2. Maktab matematika kursida uchraydigan kombinatorik masalalar**

Endi maktab matematika kursida uchraydigan kombinatorik masalalarni ko‘rib chiqamiz.

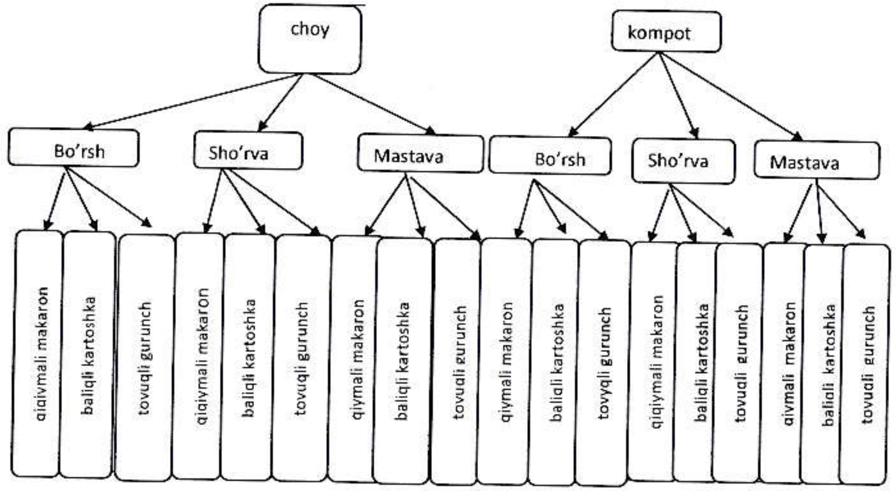
1. Maktab oshxonasida birinchi ovqatga bo‘rsh, sho‘rva, mastavani, ikkinchi ovqatga esa qiymali makaron, baliqli kartoshka, tovuqli gurunch, uchunchisiga esa choy yoki kompotni olish mumkin. Yuqorida nomlanganlardan necha xil turda tushlik o‘lish mumkin?

Yechish: 1-usul. Barcha mumkin bo‘lgan variantlarni jadval ko‘rinishida yo‘zamiz:

| choy(ch) kompot (к) | qiymali makaron (q.m) | baliqli kartoshka ( (b.k) | tovuqli gurunch (t.g) |
|---|---|---|---|
| borsh (b) | b;q.m;ch/ b;q.m;k | b;b.k;ch/ b;b.k;k | b;t.g;ch/ b;t.g;k |
| Sho‘rva(sh) | Sh;k.m;ch/ Sh;k.m;k | Sh;b.k;ch/sh;b.k;k | Sh;t.g;ch/sh;t.g;k |
| Mastava(m) | m;k.m;ch/m;k.m;k | M;k.m;ch/m;b.k;k | M;t.g;ch/m;t.g;k |

2-usul. Imkoniyatar daraxtidan foydalanamiz.






1-rasm.

3-usul. Ko‘paytirish qoidasidan foydalanib topamiz: $3\times3\times2=18$.

2-masala. Gulnoraga tug‘ilgan kunida 4 ta qog‘irchoq, 2 ta koptok, 5 ta shar sovg‘a qilishdi. Gulnoraning onasi bu sovg‘alarni katta qutuga solib qo‘ydi. Gulnora 1 ta qo‘g‘irchoq, 1 ta ko‘ptok, 1 ta sharni necha xil usul bilan olishi mumkin?

Yechish: 1-usul. Qog‘irchoqni *q* orqali, koptokni *k* orqali va sharni *sh* orqali belgilaymiz va barcha mumkin bo‘lgan variantlarni yozamiz:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| K1-Q1-Sh1, | K1-Q1-Sh2, | K1-Q1-Sh3, | K1-Q1-Sh4, | K1-Q1-Sh5, |
| K1-Q2-Sh1, | K1-Q2-Sh2, | K1-Q2-Sh3, | K1-Q2-Sh4, | K1-Q2-Sh5, |
| K1-Q3-Sh1, | K1-Q3-Sh2, | K1-Q3-Sh3, | K1-Q3-Sh4, | K1-Q3-Sh5, |
| K1-Q4-Sh1, | K1-Q4-Sh2, | K1-Q4-Sh3, | K1-Q4-Sh4, | K1-Q4-Sh5 |
| K2-Q1-Sh1, | K2-Q1-Sh2, | K2-Q1-Sh3 | K2-Q1-Sh4, | K2-Q1-Sh5, |
| K2-Q2-Sh1, | K2-Q2-Sh2, | K2-Q2-Sh3, | K2-Q2-Sh4, | K2-Q2-Sh5, |
| K2-Q3-Sh1, | K2-Q3-Sh2, | K2-Q3-Sh3, | K2-Q3-Sh4, | K2-Q3-Sh5, |
| K2-Q4-Sh1, | K2-Q4-Sh2, | K2-Q4-Sh3, | K2-Q4-Sh4, | K2-Q4-Sh5 |

Javob: 40 ta variant.

2-usul. Ko‘paytirish qoidasini qo‘llab: $2\times4\times5=40$ ni topamiz.

Javob: 40 ta variant.

3-masala. 0, 2, 3, 6, 7, 9 raqamlaridan nechta ikki xonali juft son tizish mumkin?

1-usul. Barcha mumkin bo'lgan variantlarni tanlaymiz. Buning uchun jadval tuzamiz:

| | 0 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|
| 2 | 20 | 22 | 26 |
| 3 | 30 | 32 | 36 |
| 6 | 60 | 62 | 66 |
| 7 | 70 | 72 | 76 |
| 9 | 90 | 92 | 96 |

2-usul. O'nliklar xonasiga 2;3;6;7; 9 raqamlarini qo'ya olamiz. Birliklar xonasiga esa bu son juft bo'lishini ta'minlovchi 0;2;6 raqamlarini qo'ya olamiz. Demak, o'nliklar xonasiga raqam qo'yish 5 ta imkoniyat va birliklar xonasi uchun 3 ta imkoniyat bor. Demak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra: $5\times3=15$ ta ikki xonali juft son hosil qilish mumkin ekan.

Sh.A.Alimov, O.R.Xolmuhamedov, M.A.Mirzaahmedovlarning "Algebra" 7-sinf uchun darsligi (qayta ishlangan va to'ldirilgan 5-nashri „O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi Toshkent - 2017) darsligida quyidagi masalalar keltirilgan.

547-masala. Doskada 12 ta ot, 8 ta fe'l va 7 ta sifat yozilgan. Gap tuzish uchun har bir so'z turkumidan bittadan olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

Yechish: Demak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra: $12\times8\times7=672$ xil usul bilan doskada yozilgan 12 ta ot, 8 ta fe'l va 7 ta sifatdan har bir so'z turkumidan bittadan olib gap tuzish mumkin.



545-masala. 4 ta turli xatni 4 ta turli konvertga necha xil usulda joylash mumkin?

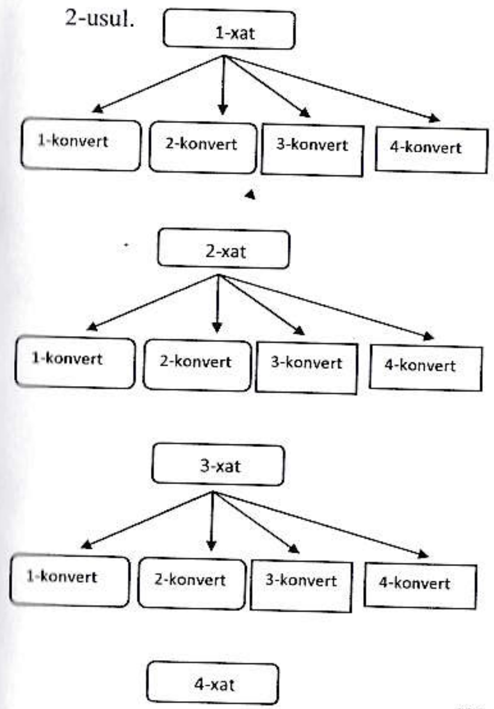
Yechish: Jadvaldagi 1-son xat nomerini, 2-son esa konvert nomerini bildiradi.

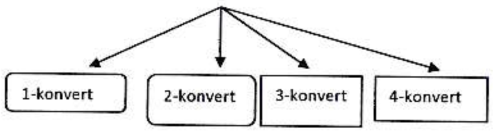
| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 |
| 21 | 22 | 23 | 24 |
| 31 | 32 | 33 | 34 |
| 41 | 42 | 43 | 44 |

Jadvaldan ko'rinadiki, 4 ta turli xatni 4 ta turli konvertga 16 xil usulda joylash mumkin ekan.

2-usul.

2-usul.






2-rasm.

2-rasmdan ko'rinib turibdiki, 4 ta xatni 4 ta konvertga 16 xil usulda joylash mumkin.

3-usul. 1-xatni 4 ta konvertga, 2-xatni 4 ta konvertga, 3-xatni 4 ta konvertga, 4-xatni 4 ta konvertga joylash mumkin. Demak, 16 xil usul.

546-masala. 5 nafar o'quvchidan 2 nafarini „Bilimlar bellashuvi" da qatnashish uchun tanlab olish kerak. Buni necha xil usulda bajarish mumkin?

Yechish: 1-usul. Bu masalani yechish uchun guruxlash

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

formulasidan foydalanamiz. Masala shartiga ko'ra $n$=5, $k$=2 bo'lganligidan

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times1\times2\times3} = 10$$

5 nafar o'quvchidan 2 nafarini „Bilimlar bellashuvi" da qatnashish uchun 10 xil usul bilan tanlab olish mumkin.

2-usul. Oquvchilarni 1;2;3;4;5 raqamlar bilan belgilaylik. Ikkitadan qilib

| | |
|---|---|
| 12; 13; 14; 15 | – 4 ta |
| 23; 24; 25 | – 3 ta |
| 34; 35 | – 2 ta |
| 45 | – 1 ta |

olish mumkin ekan. 5 nafar o'quvchidan 2 nafarini „Bilimlar bellashuvi" da qatnashish uchun 10 xil usul bilan tanlab olish mumkin degan xulosaga kelamiz.

$n$ ta: 1-, 2-, ..., $n$ - o'ringa $n$ ta $a_1$ , $a_2$ , ... , $a_n$ elementlarni bir o'ringa bittadan qilib joylashtirish $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlardan tuzilgan o'rin almashtirish deyiladi. $n$ ta elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni $P_n$ bilan belgilanadi.



Yuqoridagi misolda elementlar soni 3 ta edi, $n$ = 3 va $P_3$= 3·2·1= 3! ekanini ko'rdik. Quyidagi masalalarni esa o'quvchilarga mustaqil yechishga tavsiya etish mumkin:

1-masala. Matematika to'garagida faol qatnashuvchi 10 ta o'quvchidan 4 tasini Xalqaro matematika olimpiadasiga yuborish uchun ularni necha xil usulda tanlasa bo'ladi?

A) 210; B) 200; C) 40; D) 104.

2-masala. Bir o'quvchida qiziqarli matematikaga oid 7 ta kitob, ikkinchi o'quvchida esa 9 ta badiiy kitob bor. Ular necha xil usul bilan birining bitta kitobini ikkinchisining bitta kitobiga ayirboshlashlari mumkin?

A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.

3-masala. Otabekning tug'ilgan kuniga uni tabriklash uchun 9 ta do'sti keldi. Otabek ularning hammasi bilan do'stlari ham o'zaro qo'l berib ko'rishishdi. Jami qo'l berib ko'rishishlar soni nechta?

Bu kabi masalalarni yechishda o'qutuvchi o'rinlashtirish, o'rniga qo'yish va guruxlashda qachon qaysi formulani qo'llashga e'tiborni qaratishi, har bir masala shartiga ko'ra formulani tanlay bilishni o'quvchilarga o'rgatishi kerak.

### 3. Kombinatorika masalalarini yechishga o'rgatish metodikasi

Matematika fanida va uning tatbiqlarida ko'p hollarda turli to'plamlar va ularning to'plam ostilari bilan ish ko'rishga to'gri keladi. Bu to'plamlar va ularning to'plam ostilari sonini aniqlash zaruriyati tug'iladi. Amaliyotda mobil aloqalar uchun kommunikatsiyalarning optimal sonini, genetik kodlarni aniqlashda, lingvistik masalalarni yechishda, boshqarishning avtomatik tizimida, shuningdek extimollar nazariyasi va matematik statistikaning ko'plab masalalarini yechishda bu kabi kombinatorika formulalarini qo'llash zarurdir.

Kombinatorika – predmetlarni o'rnini almashtirish va kombinatsiya-larini tuzish bilan shugullanuvchi matematikaning bir bo'limidir. U XII asrda paydo bo'lgan, u vaqtlarda uni matematika fanlari sifatida qaramaganlar.

Kombinatorika masalalarining o‘quvchilar fikrlashini rivojlanti-ruvchi imkoniyatlari juda katta. Bundan tashqari kombinatorika masalalarini yechishga o‘rgatish jarayonida o‘quvchida masala haqidagi, bu masala yechimi haqidagi bilimlari kengayadi, u hayotiy masala va muammolarni yechishga tayyorlanadi, muayyan sharoitda optimal yechimni qabul qilishni o‘rganadi, elementar tadqiqot va ijodiy ishlar qilishga o‘rganadi.

Kombinatorika masalalarini yechish jarayonida o‘quvchilar avvalo mumkin bo‘lgan variantlarni xaotik ravishda tanlaydilar, so‘ngra to‘g‘ri yechimni sistematik to‘g‘ri tanlay oladigan bo‘ladilar.

6-7-8 sinflarda kombinatorika masalalarini yechishga o‘rgatishni uch bosqichga bo‘lish mumkin:

1. Tayyorgarlik bosqichi.
2. Yechimida mumkin bo‘lgan variantlari soni katta bo‘lmagan masalalarni yechish bosqichi.
3. Grafik vositalar bilan ishlash bosqichi.

Tayyorgarlik bosqichida kombinatorika masalalarini yechish uchun zarur bo‘ladigan fikriy operatsiya (analiz, sintez, solishtirish) larni mukammallashtirish ustida ish olib boriladi. Bunda solishtirish elementlar soniga nisbatan, tarkibiga nisbatan, ob’ektdagi elementlar joylashish tartibiga nisbatan ham olib borilishi mumkin.

Masalan, quyidagi topshiriqlar berilishi mumkin:

1. Tushurilib qoldirilgan sonlarni toping:

**1)** 24 , 21, 19, 18, 15, 13, ...., ...., 7, 6 (12 , 9)

**2)** 1, 4 , 9, 16, ....., ....., 49, 64, 81, 100 (25, 36)

**3)** 16, 17, 15, 18, 14, 19, (13, 40)

**4)** 2 5 9 (2+4):2=3

4 7 5 (7+5):2=6

3 6 ? (9+5):2=7

**5)** 12(56) 16(12+16)×2=56



17 21 (21+17)×2=76

2. Masalani yeching. Zamira 86 sonini yozdi, so‘ngra hech qanday arifmetik amal bajarmasdan bu sonni 12 ga oshirdi. U buni qanday amalga oshirdi? (uni aylantirdi 98).

Ikkinchi bosqichda esa kombinatorik masalalardagi turli xil variantlarni topishni o‘rganadilar. Bunda avvalo variantlar soni katta bo‘lmagan hollar qaraladi. Qanday qilib o‘quvchilarni xaotik ravishda variantlarni sanashdan tizimli tanlovga o‘tishlarini tashkil etish mumkin?

Buning uchun quyidagi masalalarni taklif etish mumkin. Ali, Vali va Soli tezyurar poyezdda ketmoqda. Ular zerikarli bo‘lmasligi uchun poyezd har safar to‘xtaganda o‘tirgan o‘rindiqlarini almashtirishga qaror qildilar. Agar ular 8 to‘xtash joyidan o‘tadigan bo‘lsalar, har safar ular turlicha holatlarda bo‘ladilarmi?

Bu masalani yechish uchun o‘quvchilar barcha variantlarni yozib chiqdilar. 6 ta variantni ko‘rib chiqqanlaridan so‘ng, yana yangi variant axtardilar, ammo topa olmadilar. Bu holda ular nega 7-variantni topa olmadilar, degan savol tug‘iladi. So‘ngra o‘quvchilar topilgan variantlar tahlil qilinadi va variantlar soni 6 tadan ko‘p bo‘lmasligini aniqlaydilar:

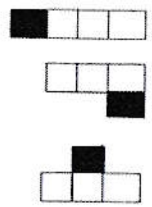
A) Ali, Vali , Soli B) Ali, Soli, Vali S) Vali, Ali, Soli

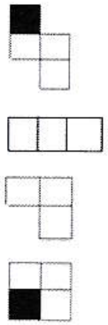
D) Vali, Soli, Ali. E) Soli, Ali, Vali , YO) Soli, Vali, Ali.

Shuningdek o‘quvchilarga quyidagicha masalani taklif etish mumkin:

“Tekislikda to‘rtta bir xil kvadratdan bu kvadratlarning tomonlari urinadigan nechta figura yasash mumkin?”

Yechish:





Bu masalani yechish jarayonida o'quvchilar mumkin bo'lgan turli xil variantlarni o'z ko'zlari bilan ko'radilar. Bu masalani yechib bo'lgandan so'ng murakkablik darajasi turlicha bo'lgan quyidagi masalalar taklif etilishi mumkin.

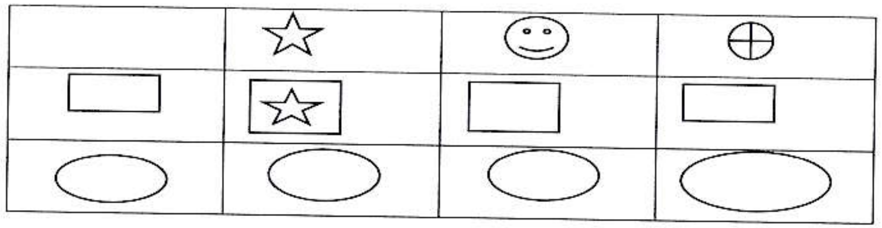
1. Kombinatorika masalalarini yechishda o'quvchilar ba'zi qiyinchiliklarga duch keladi. Bu qiyinchiliklar birlashmalarni tuzish, bu birlashmalarning bir-biridan farqlarini aniqlash jarayonida duch keladi. Kombinatorik birlashmalarni tuzishda ularni qandaydir belgilar bilan belgilash va bu birlashmalarni yozib chiqish zaruriyati tug'iladi. Bunda shartli belgilashlardan foydalanish mumkin. Shuningdek birlashmalarni tuzishda graflardan va jadvallardan foydalanish yaxshi natija beradi. Bu kombinatorik masalalarni yechishning uchinchi bosqich – grafik vositalar bilan ishlash bosqichidir.

"4, 5 va 9 raqamlardan nechta ikki xonali son tuzish mumkin?" degan masalani yechish uchun quyidagi jadvalni tuzish mumkin:



| birlik / o' nli | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|
| 4 | 44 | 45 | 47 |
| 5 | 54 | 55 | 57 |
| 7 | 74 | 75 | 77 |

Yoki quyidagi jadvallarni tuzish mumkin:



| | *a* | *o* | *u* | *i* |
|---|---|---|---|---|
| *b* | *ba* | *bo* | *bu* | *bi* |
| *k* | *ka* | *ko* | *ku* | *ki* |
| *l* | *la* | *lo* | *lu* | *li* |
| *m* | *ma* | *mo* | *mu* | *mi* |

Shuningdek, bu kabi jadvallarni to'ldirish yo'llarini o'rganish uchun quyidagicha topshiriq berish mumkin: 57, 75, 44, 47, 55, 77,47 sonlari uchun yuqoridagi kabi jadval tuzing. Yoki quyidagi jadval to'g'ri tuzilganmi :

| o'nli / birlik | | 3 |
|---|---|---|
| 9 | 91 | 39 |
| 4 | 41 | 34 |

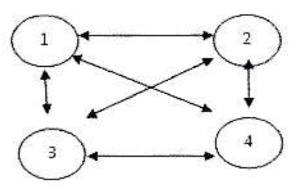
| 7 | 71 | 37 |
|---|---|---|

O‘quvchilar bu kabi jadvallarni tuza olganlaridan so‘ng kombinatorika masalalarini ushbu jadvallardan foydalangan holda yechishlari mumkin. Bu jadvallarni to‘ldirishga o‘quvchilarning ko‘p vaqtlari ketmasligi uchun o‘qituvchilar tomonidan quyidagi ko‘rinishdagi jadval blankalarini avvaldan tayyorlanib o‘quvchilarga taqdim etishlari mumkin:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Shuningdek, kombinatorika masalalarini yechishda graflardan ham foydalanish mumkin. Quyidagi masala berilgan bo‘lsin: 1, 2 , 3 , 4 raqamlaridan foydalanib nechta ikki xonali son tuzish mumkin ?

Ushbu masalani yechish quyidagi orientirlangan grafdan ham foydalanish mumkin:




2-masala. Likopchada 4 xil konfetlar bor. Agar har bir bola 2 tadan konfet olgan bo‘lsa va har bir boladagi konfetlar turlicha bo‘lsa, nechta bola konfet olgan?

3-masala. 30, 25, 17 va 9 sonlaridan nechta ayirma tuzish mumkin, ular orasida nechtasi bir-biriga teng bo‘ladi?

4-masala. To‘rtta dugona telefon orqali bir martadan gaplashgan bo‘lsalar, ja’mi nechta telefon orqali gaplashganlar?



5-masala. O‘quvchida qizil va zangori rangli qog‘ozlar bor. U bu qog‘ozlardan aylana, kvadrat va uchburchaklarni katta o‘lchamda va kichik o‘lchamda yasamoqda. U necha xil variantda figuralar hosil qiladi?

6-masala. Sherlok Xolms seyfni ochishi kerak, buning uchun esa u seyf kodini topishi kerak. Agar kod uch xonali son va u 400 dan katta va 1, 2, 3, va 4 raqamlaridan tuzilgan bo‘lsa, uni toping.

Kombinatorika masalalarini yechish metodikasi va bu bo‘limni o‘qitish metodikasi ushbu mavzularni o‘tishda matematika o‘qituvchi-siga yordam bo‘ladi, degan umid bildiramiz.

Har bir kombinatorikф masalalarini yechishda o‘quvchilar formula tanlashga qiynaladi. Bunday hollarda ushbu jadval yordam beradi.

1-jadval

| | Kombinatsiya turlari | | Formula |
|---|---|---|---|
| | Kombinatorika «tilida» | To‘plamlar nazariyasi «tilida» | |
| 1 | $k$ elementdan $t$ elementli o‘rin-lashtirishlar (ele-mentlar takroran qatnashishlari mumkin ) | $k$-elementli to‘plamdan $m$ elementli, ya’ni uzunligi $m$ ga teng bo‘lgan kortejlar (bunda elementlar tartibi muhim, elementlar takroran qatnashishlari mumkin) | $A_k^m = k^m$ |
| 2 | $k$ elementdan $t$ elementli o‘rin-lashtirishlar (ele-mentlar takroran qatnashmaydilar) | $k$-elementli to‘plamdan $m$ ele-mentli ,ya’ni uzunligi $m$ ga teng bo‘lgan kortejlar (bunda elementlar tartibi muhim, elementlar takroran qatnash-maydilar) | $A_k^m = \frac{k!}{(k-m)!}$ $A_k^m = k\cdot(k-1)\cdot...\cdot(k-m+1)$ |
| | $k$ elementdan $t$ ele- | $n$ elementli, ya’ni uzunligi | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | mentli o'rin almashtirishlar (elementlar takroran qatnashishlari mumkin) | $n$ ga teng bo'lgan kortejlar (bunda elementlar tartibi muhim, elementlar takroran qatnashishlari mumkin) | $P(n_1,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$ |
| 4 | $k$ elementdan $k$ elementli o'rin almashtirishlar (elementlar takroran qatnashmaydi) | $k$ elementdan $k$ elementli o'rin almashtirishlar (elementlar tartibi muhim) | $R_k = k\,!$ |
| 5 | $k$ elementdan $m$ elementli guruxlashlar (elementlar takroran qatnashmaydi) | $k$ elementli to'plamdan $m$ elementli to'plam ostilar (elementlar tartibi muhim emas) | $C_k^m = \frac{k!}{(k-m)!}$ |
| 6 | $n$ elementdan $m$ elementli guruxlashlar (elementlar takroran qatnashadi) | $n$ elementli to'plamdan $m$ elementli to'plam ostilar (elementlar tartibi muhim emas, elementlar takroran qatnashadi) | $\overline{C}_k^m = C_{k-m-1}^m$ |

O'rin almashtirishlar – bu $n$ elementli tanlanma (kombinatsiyalar), bo'lib, ular bir-biridan elementlar tartibi bilan farqlanadi. O'rin almashtirishlar soni $P_n$ deb belgilanadi va u

$$R_n = n! \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi. Bu yerda $n!$ birdan $n$ gacha bo'lgan natural sonlar ko'paytmasiga teng:

$$n!=1\times2\times3\ldots\times n$$

1. Ikki elementli to'plamdan nechta o'rin almashtirishlar tuzish mumkin?



$$R_2 = 2!=2.$$

Haqiqatdan ham: $(a,b), (b,a)$.

Uch elementli to'plamdan nechta o'rin almashtirishlar tuzish mumkin? degan savolga javob:

$$R_3=3!=6:$$

$$(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).$$

2. 5 ta kitobni kitob polkaga necha xil usul bilan qo'yish mumkin?

Javob: $R_5=5!=120$.

Agar $n$ ta elementdan turli o'rin almashtirishlar olinsa va bunda 1-element $n_1$ marta takrorlansa, 2-element $n_2$ marta takrorlansa, $k$-element - $n_k$ marta takrorlansa va $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ o'rinli bo'lsa, u holda bu kabi o'rin almashtirishlar elementlari takrorlanadigan o'rin almashtirishlar deb ataladi va u

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \qquad (2)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-masala. 8 raqami 3 marta, 7 va 9 raqamlari bir martadan takrorlansa, 7,8,9 raqamlardan nechta 5 xonali son tuzish mumkin?

Yechish: Har bir besh xonali son boshqalaridan raqamlarining tartibi bilan farqlansa va $n_1=1$, $n_2=3$, a $n_3=1$ o'rinli bo'lsa, masala yechimini topish uchun (3) formuladan foydalansak

$$P_5(1,3,1) = \frac{5!}{1!\cdot3!\cdot1!} = 20.$$

ni hosil qilamiz.

2-masala. Kartochkalarda M,A,T,E,M,A,T,I,K,A harflari yozilgan. Bu kartochkalardan foydalanib nechta 10 ta harfli turlicha «so'z»lar tuzish mumkin (bu yerda «so'z» deganda harflarning turlicha ketma-ketligi tushuniladi)?

Yechish: Ikkita M harfini o'rin almashtirishlari soni $R_2=2$ ta, uchta A harfining o'rin almashtirishlar soni $R_3=3!=6$, ikkita T harfini o'rin almashtirishlari soni $R_2=2$ ta va natijaviy javob

$$P_{10}(2,3,2)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=151200$$ ta so'zga teng bo'ladi.

3-masala. 10-sinf o'quvchilari 10 ta turli fanlarni o'rganadi. Agar dushanba kuni 5 soat dars rejalashtirilgan bo'lsa, bu kungi dars jadvalini necha xil usul bilan tuzish mumkin?

Yechish: Dars jadvalini 10 elementdan 5 tadan o'rinlashtirish kabi qarash mumkin:

$$A_{10}^{5}=\frac{10!}{(10-5)!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30240.$$

4-masala. 9 ta mutaxassisdan 4 ta turli davlatlarga jo'natish uchun 4 nomzodni necha xil usulda tanlash mumkin?

Yechish:

$$A_{9}^{4}=\frac{9!}{(9-4)!}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024.$$

Yuqoridagi jadvalga ko'ra $k$ elementdan $t$ elementli o'rinlashti-rishlar (elementlar takroran qatnashishlari mumkin) soni

$$\overline{A}_{n}^{k}=n^{k} \quad (3)$$

formula bo'yicha topiladi.

Masala.. 10-sinf o'quvchilari orasida "Eng aqlli", "Eng tezkor", "Eng dovyurak " va "Eng ixtirochi" nominatsiyalari bo'yicha konkurs o'tkazildi. Har bir nominatsiyaga sovgalar belgilangan bo'lsa, bu nominatsiyalarni taqsimlashlar umumiy soni nechta?

Yechish: Har bir qatnashchi 4 ta nominatsiya bir nechtasini olish imkoniyati bo'lganligi uchun, bu masalani yechishda (6) formulani qo'l-laymiz :

$$\overline{A}_{15}^{4}=15^{4}=50625.$$



Masala. 3,4,5 raqamlaridan foydalanib, nechta 6 xonali son tuzish mumkin?

Yechish:

$$\overline{A}_{3}^{6}=3^{6}=729.$$

Bu masalani ko'paytirish qoidasini qo'llab ham topish mumkin. Har bir o'rindagi raqamni 3 xil usulda tanlash mumkin, ya'ni

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=729$$

hosil bo'ladi.

Jadvalga ko'ra $n$ elementli to'plamdan $m$ elementli to'plam ostilar (elementlar tartibi muhim emas) soni

$$C_{n}^{m}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} \quad (7).$$

formula bilan hisoblanadi.

Masala. 35 ta o'quvchidan 3 ta navbatchini necha xil usulda tan-lash mumkin?

Yechish: Bunda tanlab olingan 3 navbatchida tartib muhim emas va guruhlashlar formulasiga asosan:

$$C_{35}^{3}=\frac{35!}{3!\cdot(35-3)!}=6545$$

ga teng.

«36 tadan 5 ta» sportlotoda barcha variantlar soni

$$C_{36}^{5}=\frac{36!}{5!\cdot 31!}=376992.$$

Jadvalga asosan: $n$ elementdan $m$ elementli guruhlashlar (elementlar takroran qatnashadi) soni

$$\overline{C_{n}^{m}}=\frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}=C_{m+n-1}^{m} \quad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

Masala. $\{a, a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, c\}$ – 3 element $\{a, b, c\}$ dan ikkidan (elementlar takroran qatnashadi) guruhlashlar soni 6 ga teng ekan.

Masala. Qandolatchilik do'konida 5 xil turdagi shirinliklar bo'lsa, bu do'kondan 4 ta shirinlikni necha xil usulda tanlash mumkin?

Yechish: 4 ta shirinlikni tanlashda ba'zi shirinliklar takroran olinishi mumkin ekanligidan

$$\overline{C_5^4} = \frac{(4+5-1)!}{4!\cdot(5-1)!} = 70$$

tanlashlarning umumiy soni.

3-masala. 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan raqamlar kamayadigan tartibda bo'ladigan nechta son tuzish mumkin?

Yechish: Bu masalani yechishda avvalo 5 raqamdan bitta, ikkita, uchta, to'rtta va beshta guruhlashlar sonini topamiz:

$$\overline{C_5^1} = \frac{(1+5-1)!}{1!\cdot(5-1)!} = 5; \quad \overline{C_5^2} = \frac{(2+5-1)!}{2!\cdot(5-1)!} = 15; \quad \overline{C_5^3} = \frac{(3+5-1)!}{3!\cdot(5-1)!} = 35;$$

$$\overline{C_5^4} = \frac{(4+5-1)!}{4!\cdot(5-1)!} = 70; \quad \overline{C_5^5} = \frac{(5+5-1)!}{5!\cdot(5-1)!} = 126$$

va qo'shish qoidasiga ko'ra:

$$5+15+35+70+126=251$$

ni topish mumkin.

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, ko'pchilik o'quvchilar guruhlash va o'rinlashtirishlarni chalkashtiradi. Bunday xatoliklarga yo'l qo'ymasliklari uchun guruhlash va o'rinlashtirishlar o'rtasidagi umumiylik va farqlarni ko'rsatish kerak. Ular o'rtasidagi umumiylik quyidagilardan iborar:

Guruhlash va o'rinlashtirishlar – bu $n$-elementli to'plamdan $m$ elementli to'plam ostilari soni.



Ular o'rtasidagi farq: o'rinlashtirishlarda elementlar tartibi muhim guruhlashtirishlarda elementlar tartibi muhim emas.

2-jadval

| Guruhlashlar | O'rinlashtirishlar |
|---|---|
| Agar 6 ta odam qo'l berib so'rashsa, ja'mi qo'l berishlar sonini hisoblashda {Dilshod, Anvar}={Anvar, Dilshod}– bitta, demak tartib muhim emas: $C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6\cdot5}{2} = 15$ | Agar 6 ta odam o'z fotokartochkalari bilan o'zaro almashsalar, ja'mi o'zaro almashlar sonini hisoblashda {Dilshod, Anvar }□{Anvar, Dilshod } – tartib muhim: $A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 5\cdot6 = 30$ |
| 5 ta o'quvchidan 3 ta navbatchini necha xil usulda tanlash mumkin? Bu yerda tartib muhim emas: $C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{4\cdot5}{2} = 10$ | 5 ta o'quvchidan 3 ta o'quvchini, ya'ni guruh sardori, "Yoshlar kelajagi yetakchisi"ni va sport yetakchisini necha xil usulda tanlash mumkin? Bu yerda tartib muhim: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3\cdot4\cdot5 = 60$ |

B

**Bobni mustahkamlash uchun savollar**

1. Doskada 12 ta ot, 8 ta fe'l va 7 ta sifat yozilgan. Gap tuzish uchun har bir so'z turkumidan bittadan olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

2. Kombinatorika nimani o'rgatadi?

3. Kombinatorika qachon vujudga kelgan?

4. 2, 3, 6, 7, 9 raqamlaridan nechta ikki xonali juft son tizish mumkin?

5. $k$ elementdan $t$ elementli o'rinlashtirishlar (elementlar takroran qatnashishlari mumkin) formulasi qanday o'rgatiladi?

6. $k$ elementdan $t$ elementli o'rinlashtirishlar (elementlar takroran qatnashmaydilar) formulasi qanday o'rgatiladi?

7. $k$ elementdan $m$ elementli guruhlashlar (elementlar takroran qatnashmaydi) formulasi qanday o'rgatiladi?



## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR


1. "Педагогик таълим", "Халқ таълими", "Таълим муаммолари", "Узлуксиз таълим", "Педагогик маҳорат" ва бошқа журналлар.

2. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. - М.: Просвещение, 1977 г..

3. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. - М.: Просвещение, 1977 г.

4. Kusherov A.J. Algebra va fizika o'rtasidagi tizimli bog'liqlik asosida o'quvchilarning funksional bog'liqlik haqidagi tushunchalarini takomillashtirish yo'llari. Pedagogika fanlari nomzodi ilmiy daraja uchun dissertatsiya. Chimkent, 2002. 124 bet.

5. Mukashev A.K. 5-6 sinflarda matematikani o'qitish uslubining ba'zi muammolari. Olmaota: Rauan, 1991. - 144 b.

6. Rahimbek D. Matematik iboralarning muvozanat o'zgarishi: Darslik.- Chimkent: M.Auezov nomidagi SKDU, 2008. - 98 b.

7. Razymbek D., Duisebaeva P.S., Kadeev I., Seitjanova K.B. Elementar matematika: algebraik va trigonometrik ifodalarni o'zgartirish. Darslik.- Chimkent: O'g'irlik videosi, 2013. - 240 b.

8. Taubaev T. O'rta maktabda tenglamalarni o'rganish.- Noks, Qoraqalpog'iston, 1965. - 96 b.

9. Tolimbekova K.E., Xasenova R.J. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar va tengsizliklar. Uslubiy qo'llanma. – Almati: Rauan, 1995. - 128 b.

10. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики - М.: Просвещение, 1990. - 224 с.

11. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учится математике. - М: Просвещение, 1990.-128с.

12. Лебеденцев К.Ф.Изучение алгебры и начала анализа. - Киев: школа Рад, 1984. - 248 с.

13. Махмудова Д.М. Талабаларда мустақил ижодий фаолиятни ривожлантириш жараёнларида муаммоли масалалардан фойдаланиш. Педагогика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) илмий даражасини олиш учун ёзган диссертацияси. Тошкент, 2018.

14. Сиддиқов З.Х. Олий математикани ўқитишда математик моделлаштириш орқали талабаларнинг ўқув кўникмаларини шакллантириш методикаси. Педагогика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) илмий даражасини олиш учун ёзган диссертацияси. Тошкент, 2020.

15. Скобелев Р.Н.Контроль на уроках математики - Минск: Нарасвета, 1986. –104 с.

16. Слепкан З.И. Методика преподавания алгебры и начала анализа. - Киев: Высшая школа, 1978. - 224 с.

17. Столяр А.А. Педагогика математики.- Минск: Высшая школа, 1986. - 414 с.

18. Тожиев М., Баракаев М., Хуррамов А. Математика ўқитиш методикаси. -Т. 2017.

19. Умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей, касб-хунар коллежлари учун математика фанлари дастурлари.

20. Умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей, касб-хунар коллежлари учун математика фанидан ўкув адабиётлар.

21. Усаров Ж.А., Д.М.Махмудова, А.К.Юсупова, З.Х.Сиддиқов, И.А.Эшмаматов. Математика ўқитиш методикаси (умумий методика) ўқув қўлланма. Тошкент, 2020.

22. Фарберман Б.Л. ва бошқалар. Олий ўқув юртларида ўқитишнинг замонавий усуллари. – Тошкент. 2003 й.




## MUNDARIJA


| | | |
|---|---|---|
| | **SO'Z BOSHI** | 3 |
| **I BOB** | **MAKTABDA SONLAR TO'PLAMLARINI O'RGANISH** | 6 |
| 1.1 | Maktab matematikasida son haqida tushuncha berish usullari | 6 |
| 1.2 | Natural sonlar xossalarini o'rganish ......................... | 12 |
| 1.3 | Natural sonlarni tub sonlar ko'paytmasi sifatida tas-niflash, EKUK va EKUB | 23 |
| 1.4 | Oddiy kasrlarni o'rgatish uslubiyoti…………………. | 27 |
| 1.5 | Oddiy kasrlarni qo'shish va ayirish…………………. | 33 |
| 1.6 | O'nli kasrlarni o'qitish uslubiyoti………………….. | 41 |
| 1.7 | Manfiy sonlarni o'rganish metodikasi ……............ | 45 |
| 1.8 | Ratsional sonlarni o'rgatish………………………….. | 49 |
| 1.9 | Irratsional sonlarni kiritish usullari………………….. | 55 |
| 1.10 | Taqribiy hisob-kitoblarni o'qitish usullari………….. | 60 |
| **II BOB** | **MATEMATIK AYNIY ALMASHTIRISHLARNI O'QITISH USLUBIYOTI** | 65 |
| 2.1 | Ayniy almashtirishlar ……………………………...... | 65 |
| 2.2 | Ratsional ifodali tengliklarni o'rganish ……………... | 72 |
| 2.3 | Irratsional ifodali tenglamalarni o'rganish…………. | 78 |
| 2.4 | Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar va ularning xossalarini o'rganish………………………………… | 85 |
| 2.5 | O'rta maktabda tenglamali almashtirishlarni o'rgatish | 92 |
| 2.6 | Ayniy shakl almashtirishlarni o'tish metodikasi…... | 102 |
| **III BOB** | **TENGLAMA VA TENGSIZLIK TUSHUNCHALARINI O'QITISH USULLARI** | 111 |
| 3.1 | Maktabda tenglamalarni yechish usullari…………… | 111 |
| 3.2 | Tenglamalar yechishni o'rganish…………………… | 130 |

| | | |
|---|---|---|
| 3.3 | Masalalarni yechish uchun tenglamalarni tuzish usullari…… | 152 |
| **IV BOB** | **TENGSIZLIK TUSHUNCHASINI O'QITISH USULLARI** | 173 |
| 4.1 | Tengsizliklarni o'qitishning umumiy masalalari……. | 173 |
| 4.2 | Tengsizliklarni hal qilishni o'rganish……………….. | 181 |
| 4.3 | O'rta maktabda o'rganiladigan tengsizliklarning asosiy turlari………………………………………… | 188 |
| 4.4 | Ba'zi tengsizliklarni yechish usullari…………........... | 210 |
| 4.5 | O'rta maktabda tengsizlikni isbotlashning asosiy usullari….. | 233 |
| **V BOB** | **FUNKSIYALARINI O'QITISH METODIKASI** | 243 |
| 5.1 | Matematikani o'qitishda funksiya va funksional bo'g'lanish tushunchalarining roli………………….. | 243 |
| 5.2 | Ba'zi elementar funksiyalarni o'qitish metodikasi….. | 257 |
| 5.3 | Ba'zi funksiyalarni o'qitish usullari………………... | 272 |
| 5.4 | Modul bilan berilgan funksiyalarning grafiklari.......... | 279 |
| **VI BOB** | **KETMA-KETLIKLARNI O'QITISH USULLARI** | 299 |
| 6.1. | Sonli ketma-ketliklarni o'qitish usullar...................... | 299 |
| **VII BOB** | **DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOB KURSI ELEMENTLARINI O'QITISH USULLARI** | 309 |
| 7.1 | Hosilani o'qitish usullari……………………………. | 311 |
| 7.2. | Integralni o'qitish metodikasi……………………….. | 317 |
| **VIII BOB** | **TRIGONOMETRIYA ELEMENTLARINI O'QITISH** | 333 |
| 8.1 | Trigonometriya elementlarini o'rganishning birinchi bosqichi……………………………………………… | 333 |
| 8.2 | Oddiy trigonometrik tenglamalarni o'rganish ............ | 350 |
| 8.3 | Trigonometrik tengsizliklarni yechish……………… | 368 |
| **VII BOB** | **KOMBINATORIKA ELEMENTLARINI O'QITISH METODIKASI** | 375 |





| | | |
|---|---|---|
| 9.1 | Kombinatorika elementlarini o'qitish……………….. | 375 |
| | **FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR** | 399 |

**D.M.Maxmudova, I.Q.Xaydarova, A.R. Qutlimurotov, Z.X.Siddiqov, N.Y.Toshboyeva, F.Xasanov**

# MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI

## O'QUV QO'LLANMA

Muharrir: X.Taxirov

Texnik muharrir: S.Meliqo`ziyeva

Musahhih: M.Yunusova

Sahifalovchi: A.Ziyamuxamedov

**Nashriyot litsenziyasi № 2044, 25.08.2020 y. Bichimi 60x84 1/16. "Times new roman" garniturasi, kegli 14. Offset bosma usulida bosildi. Shartli bosma tabog`i 7. Adadi 100 dona. Buyurtma №804152**

**Yangi chirchiq prints MCHJda chop etildi.**



ꝏ