G'.X.DJUMABAYEV
M.M.SAYDAMATOV
A.R.KUTLIMUROTOV
I.Q.XAYDAROV

MATEMATIK ANALIZ I

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

G'.X.DJUMABAYEV

M.M.SAYDAMATOV

A.R.KUTLIMUROTOV

I.Q.XAYDAROV

MATEMATIK ANALIZ I

O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi tomonidan o'quv qo'llanma sifatida chop etishga ruxsat berildi (2023-yil 17-iyuldagi 314-sonli qarori)

CHIRCHIQ – 2023

UO‘K 517
KBK 22.1
D-13

G‘.X.Djumabayev, M.M.Saydamatov, A.R.Kutlimurotov, I.Q.Xaydarov, / Matematik analiz I / O‘quv-qo‘llanma - Chirchiq: **«Yangi chirchiq prints»**, 2023. – 160 bet.

Ushbu o‘quv qo‘llanma oliy ta‘lim muassasalarining talabalariga "Matematik analiz" fanini o‘zlashtirishlariga yordam berish maqsadida tayyorlandi.

O‘quv qo‘llanmada bakalavriyat talabalari uchun rejalashtirilgan o‘quv soatiga mos mavzular kiritilgan. O‘quv qo‘llanmaning har bir mavzusi zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o‘qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan bo‘lib, har bir mavzu bo‘yicha nazariy tushunchalar bayon etilib, namunaviy misol va masalalar yechib ko‘rsatilgan hamda dars jarayonida, mustaqil ishlash uchun misol masalalar keltirilgan.

O‘quv qo‘llanma oliy ta‘lim muassasalarining talabalari uchun mo‘ljallangan.

Taqrizchilar: 1. E.M. Maxkamov-Chirchiq davlat pedagogika universiteti Algebra va matematik analiz kafedrasi dotsenti, f-m.f.f.d.
2. J.K.Adashev-O‘zFA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti yetakchi ilmiy xodimi, f-m.f.d.

Mazkur o‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim fan va innovatsiyalar vazirligining 2023 yil 17-iyuldagi 314-sonli buyrug‘iga asosan nashr etilgan

ISBN 978-9910-751-25-7

SO‘Z BOSHI

Oliy ta‘lim muassasalarida Matematik analiz fani turli hajmda tayyorlanadigan mutaxassislikka qarab, ma‘lum dastur asosida o‘qitiladi.

Matematik analizni o‘qitishdan ko‘zlangan maqsad quyidagilardan iboratdir: talabalarni mantiqiy fikrlashga, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga qo‘llashga jumladan, matematik, informatik, fizik, texnik, iqtisodiy va mexanik masalalarning matematik modellarini qurishga o‘rgatishdan iborat, talabalarni matematik ma‘lumotlar majmuasi bilan tanishtirish, uning turli uslublarini o‘rganish, ular orasidagi bog‘lanishlarni bildirish.

Ravshanki, o‘quv jarayonida darsliklar, o‘quv qo‘llanmalarining ahamiyati katta. Matematik analiz turli hajmda, matemetika, matematika va informatika sohalariga mo‘ljallab yozilgan kitoblar bor. Ayni paytda, jamiyatda barcha sohalarning shiddat bilan rivojlanayotganligi ularga mos keladigan kitoblarning yozilishini taqozo etmoqda. Shuni e‘tiborga olib, mualliflar matematik analizdan bilimlariga, shuningdek oliy ta’lim muassasalarida "Matematik analiz" dan o‘tkazilgan darslardan hosil bo‘lgan tajribaga tayangan holda ushbu "Matematik analiz I" nomli o‘quv qo‘llanmani yozdilar.

Mazkur "Matematik analiz I" nomli o‘quv qo‘llanma "Matematika va informatika" ta’lim yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallangan.

O‘quv qo‘llanmada mavzularning muayyan ketma-ketlikda va o‘zaro uzviy bog‘lanishda bo‘lishiga, ma‘lumotlarni qisqa va ravon bayon etilishiga, amaliy masalalarni yechishda matematik usullardan unumli foydalanishga alohida e’tibor qaratilgan.

O‘quv qo‘llanma haqidagi tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan barcha kitobxonlarga mualliflar oldindan o‘z tashakkurlarini bildiradi.

1-BOB. FUNKSIYA

Funksiya matematikaning muhim, ayni paytda asosiy tushunchalaridan hisoblanadi. U o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi vosita sifatida tushuniladi. Funksiya yordamida ko'pincha hodisa va jarayonlar ifodalanib o'rganiladi.

1-§. Funksiya tushunchasi

1^0. Funksiyaning ta'rifi

Biz tabiatni kuzatish va o'rganish jarayonida, shuningdek fan va texnikaning turli sohalarida turli (har xil) miqdorlarga (masalan, uzunlik, vaqt, harorat, massa, uchburchaklarning perimetrlari, uchburchak burchaklari va h.k.) duch kelamiz. Bunda ayrim miqdor (vaziyatga qarab) turli sonlar qiymatlarini qabul qilsa, ayrimlari esa faqat bitta son qiymatga teng bo'ladi.

Masalan, uchburchaklarning perimetrlari turli son qiymatlarga teng bo'lib, perimetr turli miqdorlarni qabul qilaoladigan miqdor, uchburchak ichki burchaklar yig'indisini ifodalovchi miqdor esa faqat bitta o'zgarmas songa (u 180^0) teng bo'ladi. Birinchi holda, yani uchburchak perimetri o'zgaruvchi miqdor ikkinchi holda, ya'ni uchburchak ichki burchaklar yig'indisini ifodalovchi miqdor esa o'zgarmas miqdor bo'ladi.

Odatda, o'zgaruvchi miqdorlar harflar bilan belgilanadi. Masalan, x, y, z. Bu o'zgaruvchilarning qabul qiladigan qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi.

Agar o'zgaruvchining qabul qila oladigan qiymatlari to'plami ma'lum bo'lsa, o'zgaruvchi berilgan hisoblanadi.

Aytaylik, x va y o'zgaruvchilar bo'lib, ularning o'zgarish sohalari (to'plamlari) mos ravishta X va Y bo'lsin: $x \in X$, $y \in Y$.

Ta'rif. *Agar X to'plamdan olingan har bir x songa $(x \in X)$ biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan olingan bitta y son $(y \in Y)$ mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya aniqlangan (berilgan) deyiladi.*

Bunda: X to'plam funksiyaning aniqlanish (berilish) sohasi, x –erkli o'zgaruvchi funksiya argumenti, y –erksiz o'zgaruvchi, x ning funksiyasi, f –har bir x ga bitta y ni mos qo'yuvchi qoida deyiladi.

Ta'rifdagi x, y va f larni birlashtirib, y o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyilishini

$$y = f(x)$$

kabi yoziladi va "igrik teng ef iks" deb o'qiladi.

Odatda

$$y = f(x)$$

funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ kabi, har bir $x \in D(f)$ ga mos qo'yilgan y ning qiymatlaridan iborat to'plam $E(f)$ kabi belgilanib, y funksiya qiymatlari to'plami (sohasi) deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifda x o'zgaruvchining har bir qiymatiga y o'zgaruvchining bitta qiymatini mos qo'yadigan muayyan qoida berilishi muhim. Ko'pincha, amaliyotda funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ ham shu qoidaga ko'ra, ya'ni funksional bog'lanishning xarakteriga ko'ra topiladi.

Ushbu munosabatlar

$$y = 3x + 6\,, \qquad y = \sqrt{x-2}\,, \qquad y = \frac{x^2+1}{x-3}$$

funksiyalarga misollar bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

funksiyaning aniqlash sohasi topilsin.

◅ Ravshanki, berilgan ifoda (tenglik) ma'noga ega bo'lishi uchun

$$4 - x^2 \geq 0$$

bo'lishi kerak. Keyingi tengsizlikni yechib topamiz:

$$x^2 - 4 \leq 0,$$
$$(x-2)(x+2) \leq 0$$
$$-2 \leq x \leq 2.$$

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = [-2, 2]$ bo'ladi.▻

Misol. Ushbu

$$y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

funksiyaning aniqlash va o'zgarish sohalarini toping.

◅ Ravshanki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D(f) = (-\infty, +\infty) = R$$

bo'ladi, chunki ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da $y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ifoda ma'noga ega.

Ravshanki, $y = 0$ da $x = 0$ bo'ladi.

Endi $y \neq 0$ deb $y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ tenglikni quyidagicha yozib olimiz:

$$y \cdot (1 + x^2) = x \text{ yoki } yx^2 - x + y = 0$$

keyingi tenglama x ga nisbatan kvadrat tenglama bo'lib, uning yechimlari

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

bo'ladi. Berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi ushbu

$$1 - 4y^2 \geq 0$$

tengsizlikni yechish bilan topiladi:

$$(2y + 1)(2y - 1) \leq 0,$$

$$4\left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) \leq 0, \qquad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Demak, funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ bo'ladi. ⊳

2^0. Funksiyaning berilish usullari

Funksiya ta'rifidagi mos qo'yuvchi qoida turlicha bo'lishi mumkin.

a) Analitik usul. Bu usulda x o'zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati muayyan formulalar, tenglamalar yordamida topiladi. Masalan,

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

Funksiyaning analitik usulda berilishida funksiya bir necha formulalar yordamida ham aniqlanishi mumkin. Masalan,

$$y = \begin{cases} x^2, & agar\ x \geq 0, \\ -x^2, & agar\ x < 0. \end{cases}$$

b) Jadval usuli. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida bo'ladi. Bu holda funksiya argumenti x ning bir necha tayin

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlariga mos keladigan y ning qiymatlari

$$y_2, y_2, \dots, y_n$$

jadval shaklida ifodalanadi.

v) Grafik usul. Bu usulda bog'lanish egri chiziq (grafik) yordamida bo'ladi. Funksiyaning grafik usulidan ko'pincha tajriba

bilan bog'liq ishlarda, ayniqsa o'zi yozar apparatlardan foydalanishda qo'llaniladi.

Aytaylik,

$$y = f(x)$$

funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Bu to'plamdan biror x_0 sonni (elementni) olamiz: $x_0 \in X$. Modomiki $y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan ekan, unda x_0 ga f qoida bo'yicha bitta y_0 son mos qo'yiladi.

$$f: x_0 \longrightarrow y_0.$$

Bu y_0 son $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va

$$f(x_0) = y_0$$

kabi yoziladi.

Masalan,

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$$

funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi xususiy qiymati

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1^2 + 1}{1^4 + 1} = 1$$

bo'ladi.

3^0. Funksiyaning grafigi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X to'plamda $(X \subset R)$ aniqlangan bo'lib, argument x ning X to'plamdan olingan har bir qiymatiga mos keladigan funksiya qiymati y $(f(x) = y)$ bo'lsin. Bu x va y lar (x, y) juftlikni tashkil etadi. Ma'lumki, (x, y) juftlik tekislikda nuqtani tasvirlaydi.

Tekislikning bunday nuqtalari to'plami

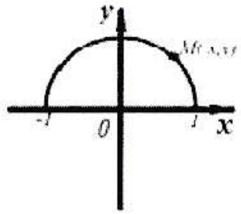
$$\Gamma = \{(x, y): x \in X, y = f(x)\}$$

(nuqtalarning geometrik o'rni) $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

funksiyaning grafigi, markazi $(0, 0)$ nuqtada, radiusi $R = 1$ bo'lgan yuqori yarim aylana bo'ladi. (1-chizma).



1-chizma

Dastlab funksiya grafigini “nuqtalar” bo‘yicha tasvirlashni keltiramiz. Keyinchanik funksiya grafigini batafsil o‘rganamiz.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X $(X \subset R)$ to‘plamda (sohada) aniqlangan bo‘lsin. x argumentning X to‘plamdan bir nechta bir-biriga yaqinroq bo‘lgan

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

qiymatlarini olib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlarini topamiz:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

$$(y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_3 = f(x_3), \dots, y_n = f(x_n)).$$

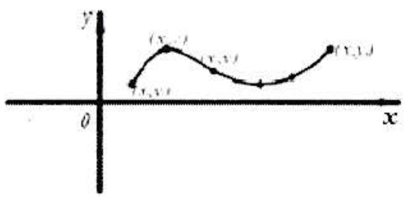
Natijada

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

jadval hosil bo‘ladi. Bu jadvaldan foydalanib

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

juftliklarni tuzamiz. So‘ng bu juftliklarni tekislikda nuqtalar sifatida tasvirlaymiz.



2-chizma

Bu nuqtalarni o‘zaro tutashtirishdan hosil bo‘lgan chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (taxminiy grafigi) bo‘ladi.

2-§. Turli xususiyatli funksiyalar

1⁰. Funksiyaning chegaralanganligi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X $(X \subset R)$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Agar shunday o‘zgarmas M soni topilsinki, X to‘plamdagi har bir x son uchun

$$f(x) \le M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda yuqoridan chegaralangan deyiladi.

Agar shunday o‘zgarmas m son topilsaki, X to‘plamdagi har bir x son uchun

$$f(x) \ge m$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda quyidan chegaralangan deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya X to‘plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, funksiya X to‘plamda chegaralangan deyiladi.

Funksiya chegaralanganligini quyidagicha ham ta’riflash mumkin.

Agar shunday $M > 0$ topilsaki, X to‘plamning har bir x soni uchun

$$|f(x)| \le M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda chegaralangan deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

funksiyani $E = [0, +\infty)$ to‘plamda qaraylik. Bu funksiyaning E to‘plamda chegaralanganligini ko‘rsatamiz.

◅ Ixtiyoriy $x \in E$ son uchun

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \ge 0$$

bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya E da quyidan chegaralangan.

Ravshanki,

$$0 \le (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$
$$2x \le 1 + x^2,$$
$$\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}.$$

Demak, ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}$$

bo'lib, undan funksiyaning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan funksiya $E = [0, +\infty)$ da ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan. Demak, berilgan funksiya $E = [0, +\infty)$ da chegaralangan. ▻

Misol. Ushbu

$$y = f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$$

funksiyaning $E = R\backslash\{0\}$ to'plamda quyidan chegaralanganligini isbotlaymiz.

Ma'lumki, $a > 0$ va $b > 0$ sonlari uchun

$\frac{a+b}{2}$ – o'rta arifmetik qiymati,

$\sqrt{ab}$ –o'rta geometrik qiymati

deyilib, ular uchun

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shu ma'lumotdan foydalanib topamiz:

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2.$$

Demak, barcha $x \in R\backslash\{0\}$ uchun

$$f(x) \ge 2$$

bo'ladi. Bu esa berilgan funksiyaning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

2⁰. Monoton funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X $(X \subset R)$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar argument x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ $\big(f(x_1) < f(x_2)\big)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.

Agar argument x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ tengsizlik bajarilsa,

$f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi. O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

funksiyaning $X = [1, +\infty)$ to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

◅ $X = [1, +\infty)$ to'plamda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1 \cdot x_2^2 - x_2 - x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} =$$
$$= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2(x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0, \qquad 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo'lishini etiborga olib

$$f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

ya'ni

$$f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya $[1, +\infty)$ to'plamda kamayuvchi.

3⁰. Juft va toq funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X $(X \subset R)$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar X to'plamning ixtiyoriy x $(x \in X)$ elementi uchun

1) $-x \in X$,

2) $f(-x) = f(x)$

shartlar bajarilsa, $f(x)$ juft funksiya deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

juft funksiyalar bo'ladi. Chunki bu funksiyalar uchun $X = (-\infty, +\infty)$ to'plamning ixtiyoriy $x \in X$ soni uchun, $-x \in X$ bo'lib,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = g(x)$$

bo'ladi.

Juft funksiyaning grafigi OY o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi, chunki bunday funksiyalar uchun $(x;\ f(x))$ nuqta funksiya grafigida yotsa, $(-x,\ f(x))$ nuqta ham funksiya grafigida yotadi.

Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi, chunki bunday funksiya uchun $(x,\ f(x))$ nuqta bilan birga har doim $(-x; -f(x))$ nuqta ham shu grafikda yotadi.

4⁰. Davriy funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $X\ (X \subset R)$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar shunday o'zgarmas $T\ (T > 0)$ son topilsaki, X to'plamdan olingan ixtiyoriy x son $(x \in X)$ uchun $x + T \in X$ bo'lib,

$$f(x+T) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya deyilib, T son $f(x)$ funksiyaning davri deyiladi.

Agar T son $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, unda

$$n \cdot T \quad (n = \pm 1,\ \pm 2, \dots)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

Demak, davriy funksiyaning davrlari ko'p bo'ladi. Ular ichida eng kichik musbat bo'lgani (agar y mavjud bo'lsa) funksiyaning asosiy davri deyiladi.

5⁰. Teskari funksiya

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $X\ (X \subset R)$ to'plamda berilgan bo'lib, uning qiymatlari to'plami Y bo'lsin.

$$Y = \{y:\ y = f(x), x \in X\}$$

Agar Y to'plamdan olingan har bir y qiymatga X to'plamdagi yagona $x\ (x \in X)$ qiymat mos qo'yilsa unda

$$x = \varphi(y)$$

funksiya yuzaga keladi. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plami) Y bo'lib, qiymatlar to'plami esa X bo'ladi.

Odatda $\varphi(y)$ funksiya $f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$x = \varphi(y) = f^{-1}(y).$$

$y = f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiyani, ko'pincha

$$f(x) = y$$

tenglamani x ga nisbatan yechish bilan topiladi.

Masalan, $y = 2x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x = \frac{1}{2}y$ bo'lagi.

$y = f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofida 180^0 ga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

6⁰. Murakkab funksiya

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $X\ (X \subset R)$ to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f)$ bo'lsin:

$$F(f) = \{y;\ \ f(x) = y, x \in X\}.$$

Endi $F(f)$ to'plamda

$$u = \varphi(y)$$

funksiya berilgan bo'lsin. Unda X to'plamdan olingan har bir x songa $(x \in X)$ bitta y son (f –qoidaga ko'ra) va $F(f)$ to'plamdagi bunday y songa bitta u son (φ –qoidaga ko'ra) mos qo'yilib funksiya aniqlanadi:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} u$$

uni murakkab funksiya deyilib

$$u = \varphi\big(f(x)\big)$$

kabi belgilanadi.

Demak, murakkab funksiya funksiyalar yordamida hosil bo'ladi.

Masalan,

$$u = \sqrt{x^2+1}$$

murakkab funksiya bo'lib, u

$$u = \sqrt{y},\ \ y = x^2 + 1$$

funksiyalar yordamida hosil bo'lgan.

7⁰. Asosiy elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari, grafigi.

1. $y = C$ -o'zgarmas(konstanta) funksiya, bunda C –o'zgarmas son.

2. $y = x^n$ -darajali funksiya, bunda n noldan farqli son.

3. $y = a^x$ -ko'rsatkichli funksiya $(a > 0,\ a \neq 1)$.

4. $y = \ell og_a x$ -logarifmik funksiya $(a > 0,\ a \neq 1)$.

5. *y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx* -trigonometrik funksiyalar.

6. *y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx* -teskari trigonometrik funksiyalar.

Bu funksiyalar *asosiy elementar funksiyalar* deb ataladi. Shu funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalarini hamda grafiklari bilan tanishamiz.

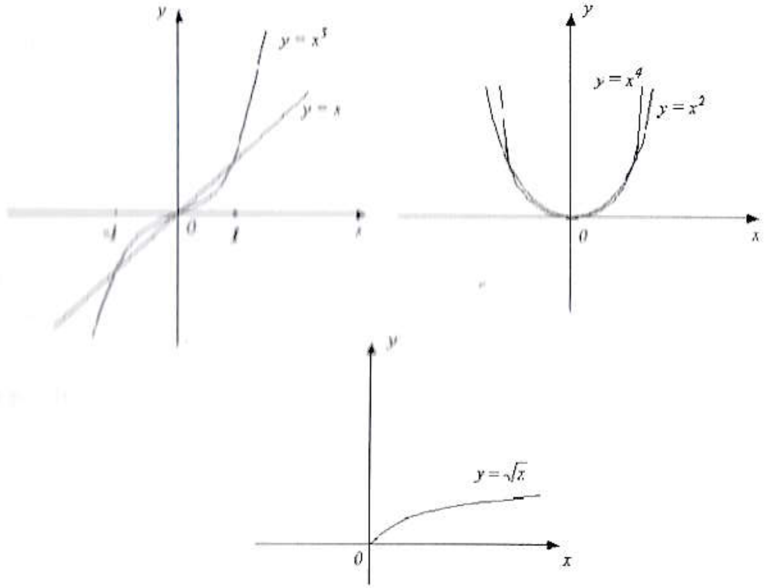
1. $y = C$-o'zgarmas funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lib uning qiymatlari sohasi birgina C sondan iborat, ya'ni $D(C) = (-\infty;+\infty)$, $E(C) = C$. Bu funksiyaning grafigi *OX* o'qiga parallel to'g'ri chiziqdan iborat ekanligi aytib o'tilgan edi.

2. $y = x^n$ -darajali funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari hamda grafigi

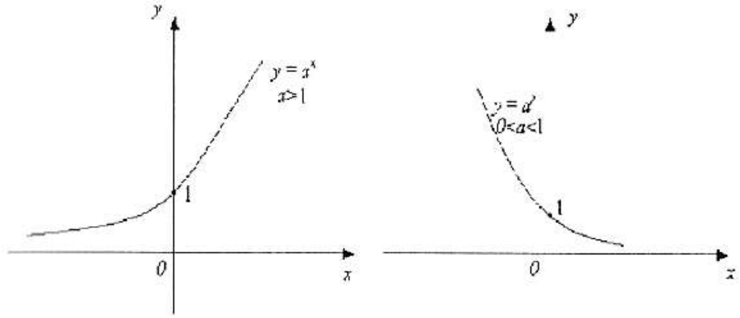
n ko'rsatkichga bog'liq. Masalan, $D(x) = D(x^2) = D(x^3) = (-\infty;+\infty)$, $E(x) = (-\infty;+\infty)$, $E(x^2) = [0;+\infty)$, $D(\sqrt{x}) = [0;+\infty)$, $E(\sqrt{x}) = [0;+\infty)$

Ba'zi bir darajali funksiyalarning grafiklari 1-chizmada keltirilgan.

3. $y = a^x$ ko'rsatkichli funksiya $(a > 0,\ a \neq 1)$ uchun: $D(a^x) = (-\infty;+\infty)$, $E(a^x) = (0;+\infty)$. Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi 2-chizmada tasvirlangan.

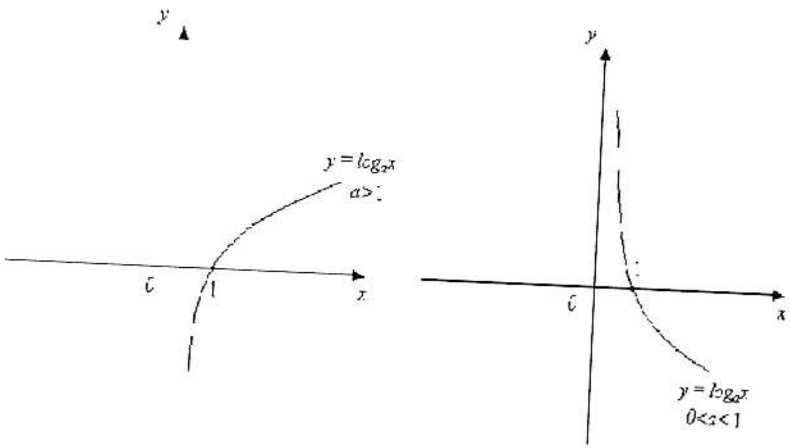


1-chizma.

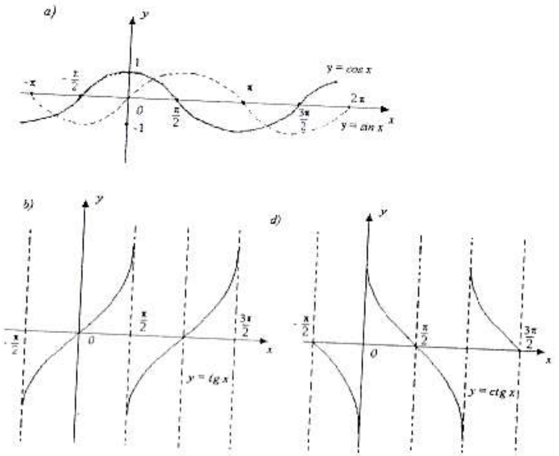


2-chizma.

4. $y = \ell og_a x$ logarifmik funksiya $(a > 0,\ a \neq 1)$ uchun: $D(\ell og_a x) = (0;+\infty)$, $E(\ell og_a x) = (-\infty;+\infty)$. Logarifmik funksiyaning grafigi chizmada tasvirlangan.



3-chizma.



4-chizma.

5. *y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx*-trigonometrik funksiyalar uchun: $D(\sin x)=D(\cos x)=(-\infty;+\infty)$, $E(\sin x)=E(\cos x)=[-1;1]$. $y=tgx$ funksiya son o'qining $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ko'rinishdagi nuqtalaridan farqli, $y=ctgx$ funksiya

esa son o'qining $x=k\pi$ (*k*-butun son) ko'rinishdagi nuqtalaridan farqli barcha nuqtalarida aniqlangan. $E(tgx)=E(ctgx)=(-\infty;+\infty)$. Trigonometrik funksiyalarning grafiklari chizmada tasvirlangan.

6. *y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx* -teskari trigonometrik funksiyalarning aniqlanish, o'zgarish sohalari hamda ularning grafiklari bilan keyinroq tanishamiz.

Asosiy elementar funksiyalar va murakkab funksiya tushunchalaridan foydalanib *elementar funksiya* tushunchasiga ta'rif beramiz.

4-Ta'rif. *Elementar funksiya* deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar va ulardan olingan murakkab funksiyalardan tuzilgan funksiyaga aytiladi. Asosiy elementar funksiyalarning o'zlari ham elementar funksiyalar sinfiga tegishli.

Yuqorida berilgan nazariyaga asosan elementar funksiyalarga misollar keltiramiz:

Masalan:

1) $y=\ell g(1+\sin^2 x)$, $y=3^{tg(\sin x)}$, $y=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+3}$, $y=\sin^2 3^x$ funksiyalarning barchasi elementar funksiyalardir.

2) *y=x*, $y=x^3$, *y=sinx* funksiyalar toq $y=x^2, y=x^4$, *y=cosx* funksiyalar juft funksiyalardir. $y=a^x, y=\ell og_a x$ funksiyalar juft ham emas toq ham emas.

Ko'rinib turibdiki, juft funksiyaning ham, toq funksiyaning ham aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

3) *y=sinx, y=cosx* funksiyalar davri 2π ga teng davriy funksiyalar, *y=tgx, y=ctgx* funksiyalar esa davri π ga teng davriy funksiyalardir.

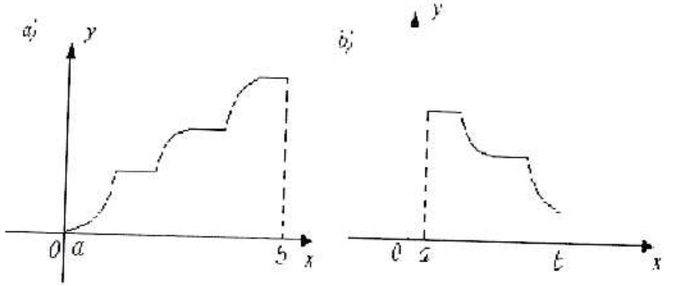
4) $y=\sqrt{x}$ (1-chizma) funksiya $[0;+\infty)$ da, $y=a^x$ $(a>1)$ (2-chizma) funksiya $(-\infty;+\infty)$da, $y=\ell og_a x$ $(a>1)$ (3(a)-chizma) funksiya

$(0;+\infty)$ da, $y=sinx$ (4-chizma) funksiya $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada, $y=cosx$ (4-chizma) funksiya $[-\pi;0]$ kesmada o'suvchi.

Argumentning katta qiymatiga funksiyaning kichik qiymati mos kelganda funksiya kamayuvchi deyilar ekan.

5) $y=x^2$, $y=x^4$ funksiyalar (1-chizma) $(-\infty;0)$ oraliqda, $y=a^x$ $(0<a<1)$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda, $y=\ell og_a x$ $(0<a<1)$ (3-chizma) funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda, $y=cosx$ (4-chizma) funksiya $[0;\pi]$ kesmada kamayuvchi.

Masalan, 5(a)-chizmada kamaymaydigan, 5(b)-chizmada o'smaydigan funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



5-chizma.

Auditoriyada tahlil qilinadigan misollar .

1. $f(x)=x^2-3x+4$ funksiya berilgan. $f(1), f(0), f(-1)$, topilsin.

JAVOBI: *f(1)=2, f(0)=4, f(-1)=8.*

2. $f(x)=x^2+4$ funksiya berilgan.

Quyidagi qiymatlar topilsin: a) $f(5)$ b) $f(\sqrt{3})$ d) $f(a+1)$ e) $f(a^2)$ f) $f(2a)$.

JAVOBI:

$a) f(5)=29, b) f(\sqrt{3})=7, d) f(a+1)=a^2+2a+5, e) f(a^2)=a^4+4, f) f(2a)=4(a^2+1)$ 3.

$f(x)=\frac{x+1}{2+3x}$ bo'lsa $\frac{1}{f(x)}$ topilsin.

JAVOBI: $\frac{1}{f(x)}=\frac{2+3x}{x+1}$

4. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

a) $\sqrt{9-x^2}$, b) $\sqrt{x+a}-\sqrt{b-x}$, c) $\frac{x^2+3x+1}{x+1}$, f) $\ell g(x^2+5x+6)$, g) $y=4^x$

JAVOBI: a) $9-x^2\geq 0$, $|x|\leq 3$; $b)$ $x\in(-\infty;+\infty)$; $c)$ $x+1\neq 0$,

$x\neq -1$; $f)$ $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;\infty)$; $g)$ $x\in(-\infty;+\infty)$

5. Quyidagi funksiyalarning grafiklari yasalsin.

a) $y=2x-3$, b) $y=\frac{1}{4}x^2-1$, c) $y=x-x^2$, d) $y=x^2+2x-3$, e) $y=\ell og_2\frac{1}{x}$

6. a) $y=8$, b) $y=x^2$, d) $y=\sin x$, e) $y=\cos 5x^2$, f) $y=7^x$, g), $y=\ell gx$ funksiyalardan qaysi biri murakkab funksiya.

JAVOBI: e

7. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari juft funksiya. a) $y=x^2-2x+1$, b) $y=x^3-1$, d) $y=\sin^2x+\cos x$, e) $y=\sqrt{x}$, f) $y=\frac{x^2-1}{1+x^4}$, g) $y=2^x+2^{-x}$, h) $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

JAVOBI: d), f), g).

8. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri toq funksiya. a) $y=\sin^3x$, b) $y=tgx-x$, d) $y=x^3-x+1$, e) $y=\sqrt{x^3+1}$, f) $y=\frac{x^3-1}{1+x^5}$, g) $y=3^x-3^{-x}$, h) $y=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

JAVOBI: a)

9. Quyidagi funksiyalardan davriy bo'lmaganini toping.

a) $y=\sin x\cdot\cos x$, b) $y=|\cos x|$, d) $y=tg^3x$, e) $y=\sin x+4$.

JAVOBI: a)

10. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda o'sadi.

a) $y=tgx$, b) $y=ctgx$, d) $y=\sin x$, e) $y=\cos x$, f) $y=x^2$, g) $y=\frac{1}{x}$

JAVOBI: a), d), f).

11. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari $(-3;0)$ oraliqda kamayadi.

a) $y=x^2$, b) $y=\frac{1}{x^2}$, d) $y=3^{-x}$, e) $y=\ell g\frac{1}{x}$.

JAVOBI: a), d).

13. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari $(0;1)$ intervalda chegaralangan.

a) $y=x^3$, b) $y=\sin x$, c) $y=3^{-x}$, e) $y=ctgx$, f) $y=\frac{1}{1-x}$, g) $y=\frac{1}{\sin x}$,

h) $y=\ell g(1-x)$.

JAVOBI: b), f), h).

14. Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

15. $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$

JAVOBI: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;\infty)$

16. $g(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$

JAVOBI: $x\in(-\infty;+\infty)$

17. $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x^2-1}$

JAVOBI: $x\in(-\infty;-1]\cup[1;-4]$

18. $y=x^3$

JAVOBI: $x\in(-\infty;+\infty)$

19. $y=(x-2)^3+3$

JAVOBI: $x\in(-\infty;+\infty)$;

20. $y=4-x^2$

JAVOBI: $x\in(-\infty;+\infty)$

21. $y=\sqrt{x}$

JAVOBI: $x\in[0;\infty)$

22. $y=2\sqrt{x}$

JAVOBI: $x\in[0;\infty)$

23. $y=-2^x$

JAVOBI: $x\in(-\infty;+\infty)$

24. $f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\le 0\\ 2x+1, x>0\end{cases}$

JAVOBI: $x\in(-\infty;+\infty)$

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

Funksiyaning juft va toqligi, davriyligini tekshiring.

1.1. $y=\frac{2x^3}{(x-2)^2}$ 1.2. $y=\frac{2x^3}{x^2-2}$ 1.3. $y=\frac{2x^2+1}{x-2}$

1.4. $y=\frac{2x^5}{x^4-16}$ 1.5. $y=\frac{x^2-1}{x-3}$. 1.6. $y=\frac{2x^3}{x^2-x+1}$

1.7. $y=x+\frac{x^3}{x^2-x-1}$ 1.8. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ 1.9. $y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$

1.10. $y=\frac{x^3}{x^2-9}$ 1.11. $y=\frac{x^5-8}{x^4}$ 1.12. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$

1.13. $y=\frac{x^2+4x+4}{x-2}$ 1.14. $y=x+\frac{2x^2}{x-2}$ 1.15. $y=x+\frac{x^2}{x-4}$

2-BOB

FUNKSIYA LIMITI

Funksiya limiti oliy matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Bu tushuncha yordamida matematika va uning tadbiqlarida ko'p foydalaniladigan funksiya hosilasi tushunchasi kiritiladi.

Avvalo, soddalik uchun natural argumentli funksiya (sonlar ketma-ketligi) va uning limitini keltiramiz. Keyinchalik ixtiyoriy argumentli funksiya limitini bayon etamiz.

1-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi

Aytaylik, barcha natural sonlar to'plami

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \{n\}$$

ning har bir n elementiga (natural songa) biror f qoidaga ko'ra bitta tayin x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin. Bu holda argumentli n bo'lgan funksiya hosil bo'ladi. Uni natural argumentli funksiya deyiladi. Demak,

$$x_n = f(n).$$

Bu funksiya qiymatlari

$$x_1 = f(1), \qquad x_2 = f(2), \dots, \qquad x_n = f(n), \dots$$

lardan tashkil topgan ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \tag{1}$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi.

(1) ketma-ketlikni tashkil etgan

$$x_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

sonlar ketma-ketlik hadlari deyiladi: x_1 –birinchi had, x_2 –ikkinchi had va hokazo, $x_n - n$ –had (yoki umumiy had). (1) ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ko'pincha ketma-ketliklar umumiy hadlari orqali belgilanadi. Masalan:

1). $x_n = \frac{1}{n}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

2). $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}: \quad 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots$

3). $x_n = (-1)^n: \ -1, +1, \ -1, +1, \dots$

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \tag{1}$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar bu (1) ketma-ketlikning hadlari quyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \le \dots \quad (x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots)$$

qanoatlantirsa, ya'ni

ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \le x_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari quyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \dots \ge x_n \ge \dots \quad (x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots)$$

qanoatlantirsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \ge x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = n: \ 1, 2, 3, \dots$$

qat'iy o'suvchi,

$$x_n = \frac{1}{n}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

qat'iy kamayuvchi ketma-ketliklar bo'ladi.

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi, (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas M sondan kichik yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \le M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2}: \ \frac{2}{1}, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \dots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \le 2$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas m sonidan katta yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \ge m$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ quyidan chegalangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

ketma-ketlik quyidan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegalangan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$m \le x_n \le M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ chegalangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{4+n^2}: \ \frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{13}, \dots$$

ketma-ketlik chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$$

bo'ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning quyidan chegalanganligini bildiradi.

Ma'lumki,

$$0 \le (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

bo'lib, undan $4n \le n^2 + 4$, ya'ni

$$\frac{n}{4+n^2} \le \frac{1}{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegalanganligini bildiradi.

Demak, berilgan ketma-ketlik chegalangan.

2⁰. Ketma-ketliklar ustida amallar

Aytaylik, ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin:

$$\{x_n\}: \ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$
$$\{y_n\}: \ y_1, y_2, y_2, \dots, y_n, \dots.$$

Quyidagi

$$x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \quad x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n, \dots,$$
$$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, \quad x_3 - y_3, \dots x_n - y_n, \dots,$$
$$x_1 \cdot y_1, \quad x_2 \cdot y_2, \quad x_3 \cdot y_3, \dots x_n \cdot y_n, \dots,$$
$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots, \qquad (y_n \ne 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi hamda nisbati deyiladi va ular

$$\{x_n + y_n\}, \qquad \{x_n - y_n\}, \qquad \{x_n \cdot y_n\}, \qquad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

3⁰. Ketma-ketlikning limiti

Biror a nuqta (haqiqiy son) hamda ixtiyoriy musbat ε soni berilgan bo'lsin. Ushbu

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in R: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

interval a nuqtaning atrofi (ε −atrofi) deyiladi (1-chizma).

1-chizma

Ravshanki, ε soni turli qiymatlarga teng bo'lganda a nuqtaning turli atroflari hosil bo'ladi.

Masalan, $a = 1$ nuqtaning $\varepsilon = \frac{1}{3}$ atrofi

$$\left(1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right), \text{ ya'ni } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

intervaldan;

$$a = 0 \text{ nuqtaning} \quad \varepsilon = \frac{1}{10} \text{ atrofi}$$

$$\left(0 - \frac{1}{10}, \ 0 + \frac{1}{10}\right) \text{ ya'ni } \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

intervaldan iborat bo'ladi.

Biror

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik hamda a son (nuqta) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. *Agar a nuqtaning ixtiyoriy*

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

atrofi (ε −ixtiyoriy musbat son) olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi "$\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ atrofiga tegishli" deyilishini quyidagicha aytish mumkin.

Ixtiyoriy musbat ε son olinganda ham, shunday natural n_0 topilib, barcha $n > n_0$ uchun

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

yoki

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \text{ya'ni } |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu mulohazalarga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflash mumkin bo'ladi.

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural son n_0 topilsaki barcha $n > n_0$ uchun*

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{n}:\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'ladi, chunki ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni olib, unga ko'ra $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ni topib, so'ng

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

deyilsa, unda barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \le \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ushbu

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

ketma-ketlik limitga ega bo'lmaydi, chunki har qanday a son, jumladan $a = \frac{1}{2}$ deyilsa, unda, ravshanki berilgan ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari $a = \frac{1}{2}$ nuqtaning $\varepsilon = \frac{1}{2}$ atrofiga tegishli bo'lmaydi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ –cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Tasdiq. $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lishi uchun

$$\alpha_n = x_n - a$$

ning cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va yetarli.

Bu tasdiqning isboti yuqorida keltirilgan ketma-ketlik limiti hamda cheksiz kikichik miqdor ta'riflaridan kelib chiqadi.

Keltirilgan tasdiqdan

$$x_n = a + \alpha_n$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n}{n+1}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

ketma-ketlik uchun

$$x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

bo'lib,

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1}.$$

Cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

bo'ladi.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham shunday n_0 natural son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n| > M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti "∞" deyiladi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Aytaylik,

$$x_n = n;\ \ 1, 2, 3, 4, \dots n, \dots$$

bo'lsin. Bu ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Biror $\{x_n\}$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik:

1) chekli limitga ega bo'lishi mumkin,
2) limiti cheksiz bo'lishi mumkin,
3) limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Agar ketma-ketlik chekli limitiga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

2) va 3) hollarda ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

4⁰. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qator xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1). Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagona bo'ladi.

2). Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

3). O'zgarmas sonning limiti o'ziga teng.

4). Agar $\{x_n\}$ va$\{ y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

bo'lsa, u holda

$$\{c\cdot x_n\}, \{x_n \pm y_n\}, \{x_n\cdot y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, (y_n \neq 0)$$

ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'lib,

a). $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n \pm y_n\}, = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b,$

b). $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\cdot y_n\} =, \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\cdot b,$

$$\lim_{n\to\infty}\{c\cdot x_n\} = c\cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c\cdot a \quad (c - const)$$

c). $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b\neq 0,\ y_n \neq 0)$

bo'ladi.

5) Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, ixtiyoriy n natural son uchun

$$x_n \le y_n \ \ (x_n \ge y_n)$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \ \left(\lim_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

bo'ladi.

6). Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

bo'lib, ixtiyoriy n natural son uchun

$$x_n \le z_n \le y_n$$

bo'lsa, $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

bo'ladi. Bu xossaga "ikki mirshab haqidagi teorema" ham deb ataladi.

5⁰. Ketma-ketlik limitining mavjudligi. e −soni.

Biz yuqorida yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning qator xossalarini keltirdik. Bu xossalar ketma-ketliklarning chekli limitga ega bo'lishi bilan bog'liq.

Ketma-ketlikning qachon chekli limitga ega bo'lishi haqidagi masala limitlar nazariyasining muhim masalalaridan hisoblanadi.

Ketma-ketlik limitining mavjudligini ifodalovchi teoremalar maxsus adabiyotlarda keltiriladi.

Biz quyida mavjudlik teoremalarining ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. *Agar* $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, $\{x_n\}$ *ketma-ketlik chekli limitga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.*

2-teorema. *Agar* $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa ,$\{x_n\}$ *ketma-ketlik chekli limitiga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.*

e −soni. Matematikada e deb ataluvchi son muhum rol o'ynaydi. U maxsus ketma-ketlikning limiti sifatida ta'riflanadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy $\alpha > -1$ va ixtiyoriy natural $n \ge 2$ sonlar uchun

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\cdot\alpha \qquad (*)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Uni Bernulli tengsizligi deyiladi.

Ehdi ushbu

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n:$$

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

sonlar ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlikning o'suvchi hamda yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

a). Ketma-ketlikning o'suvchiligi

Qaralayotgan

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi bo'lishini ko'rsatish uchun uning

$$x_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

hadlarining nisbatini qaraymiz:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n : \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}.$$

Bu tenglikdagi

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1}$$

ifodaga Bernulli tengsizlikni qo'llab topamiz:

$$\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1} > 1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Natijada

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1} >$$

$$> \frac{n+1}{n} \cdot \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{1}{n^3} > 1$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1$$

keyingi tengsizlikdan $x_{n-1} < x_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi ekanligini bildiradi.

b). Ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi

Qaratilayotgan ketma-ketlikning umumiy hadi

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ni bohalaymiz:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n} <$$

$$< \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}.$$

Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{2n}\right)^n > 1+n\cdot\frac{-1}{2n} =$$

$$= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Natijada

$$x_n < \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 4$$

bo'lib, undan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ketma-ketlik o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan.

Unda 1-teoremaga ko‘ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘ladi.

Ta’rif. *Ushbu*

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bunda e lotincha exponentis - “ko‘rsatkich” so‘zining dastlabki harfini ifodalaydi.

e- irratsional son bo‘lib uning taqribiy qiymati $e \approx 2{,}7182$ ga teng.

Odatda asosi e bolgan logarifm natural logarifm deyilib $lnA = \log_e A$ kabi belgilanadi.

Yuqoridagi nazariyaga ba’zi bir misollar keltiramiz:

Ketma-ketlikning umumiy hadi ma’lum bo‘lsa u berilgan hisoblanadi.

Masalan:

1) $x_n = \frac{1}{2^n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right\}$ ketma-ketlikni beradi.

2) $x_n = 2n$ funksiya $\{x_n\} = \{2n\} = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ ketma-ketlikni beradi.

3) $x_n = 1 + (-1)^n$ funksiya $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = \{0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots\}$ ketma-ketlikni beradi.

4) $x_n = \frac{1}{n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ ketma-ketlikni beradi.

Barcha misollarda n natural son, ya‘ni $n \in N$.

Ketma-ketliklar o‘suvchi yoki kamayuvchi, yuqoridan yoki quyidan chegaralangan bo‘lishi, yoki aniq biror qiymatga intilishi mumkin.

Masalan:

1) $\{x_n\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$ -o‘suvchi, quyidan chegaralangan ketma-ketlik.

2) $\{x_n\} = \{1 - 2n\} = \{-1, -3, -5, \dots\}$ -kamayuvchi, yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik.

3) $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$ -o‘suvchi, chegaralangan ketma-ketlik.

4). $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning limiti 1 ga teng ekanligi ko‘rsatilsin.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib $|x_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ yoki $\left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ tengsizlikni tuzamiz. Biroq *n>0*, shuning uchun $\frac{1}{n} < \varepsilon$ yoki $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Bundan ko‘rinadiki, $N = N(\varepsilon)$ sifatida $\frac{1}{\varepsilon}$ natural bo‘lganda shu sonni o‘zini, u natural son bo‘lmaganda $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ sonni (*[x]- x* ning butun qismi) olinsa, u holda n ning $n > N(\varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlari uchun

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ yoki $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ ekanini bildiradi.

2-§. Funksiya limiti

1⁰. Sonlar to‘plamining limit nuqtasi

Aytaylik, biror haqiqiy sonlar to‘plami X va x_0 nuqta (haqiqiy son) berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. *Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy*

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$$

atrofida X to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalari bo‘lsa, x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalan:

1). $X = [0,\ 1]$ to'plamning (segmentining) har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2). $X = (0,\ 1)$ to'plamning (intervalning) har bir nuqtasi va $x = 0,\ x = 1$ nuqtalar shu to'plamning limit nuqtalari bo'ladi.

3). $X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

Tasdiq. Agar x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ topiladiki:

1). Ixtiyoriy natural n da

$$x_n \in X, \qquad x_n \neq x_0,$$

2). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, tasdiqning shartlarini qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar istalgancha bo'ladi.

2⁰. Funksiya limitining ta'riflari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. *Agar X to'plam nuqtalaridan tuzilgan va x_0 ga intiluvchi (yaqinlashuvchi) har qanday*

$$\{x_n\}:\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan iborat

$$\{f(x_n)\}:\ f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

ketma-ketlik yagona A ga (chekli yoki cheksiz) intilsa shu A ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi (x ning x_0 ga intilgandagi) limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = 2x - 1$$

funksiyaning $x_0 = 3$ nuqtadagi limitini topamiz.

Har bir hadi 3 dan farqli bo'lgan, 3 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3 \qquad (x_n \neq 3, n = 1, 2, 3, \dots).$$

U holda berilgan funksiyaning qiymatlari

$$f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

bo'lib ulardan tuzulgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n)\} = \{2x_n - 1\}$$

bo'ladi. Bu sonlar ketma-ketligining limiti

$$\lim_{x_n\to 3} f(x_n) = \lim_{x_n\to 3}(2x_n - 1) = 2\cdot 3 - 1 = 5$$

bo'ladi. Demak, ta'rifga ko'ra $f(x_n) = 2x_n - 1$ funksiyaning $x_n \to 3$ dagi limiti 5 ga teng bo'ladi:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x - 1) = 5.$$

Ikkita $\varepsilon > 0$ va $\delta > 0$ (yetarlicha kichik) sonlarni olaylik.

Ma'lumki, x_0 nuqtaning δ-atrofi

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

intervaldan, A sonining ε —atrofi

$$(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

intervaldan iborat bo'ladi.

$f(x)$ funksiya argumenti x ning $x \neq x_0$ bo'lib, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ atrofga tegishli ekanligini, ya'ni

$$x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta), \qquad x \neq x_0$$

bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \qquad x \neq x_0, \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Shuningdek, $f(x)$ funksiya mos qiymatlarining $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$ atrofga tegishliligi, ya'ni

$$f(x) \in (A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$$

bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

u holda bu ifodalardan foydalanib, funksiya limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning*

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ($x \to x_0$ dagi) limiti deyiladi va yuqoridagidek

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Odatda, $(x_0 - \delta,\ x_0)$ va $(x_0,\ x_0 + \delta)$ intervallar ($\delta > 0$) x_0 nuqtaning mos ravishda chap va o'ng atrofi deyiladi.

Agar funksiya limiti ta'rifida funksiya argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning chap atrofida bo'lsa, funksiya limiti chap limit deyiladi va

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Agar funksiya limiti ta'rifida funksiya argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning o'ng atrofida bo'lsa, funksiyaning limiti o'ng limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari uning bir tamonli limitlari deyiladi.

Masalan:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & agar\ x > 0 \\ x^3, & agar\ x \le 0 \end{cases}$$

funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o'ng limiti

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (x+2) = 2,$$

chap limiti

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} x^3 = 0$$

bo'ladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $M > 0$ son topilsinki,*

$$|x| > M$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

3⁰. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda $(X \subset R)$ berilgan bo'lib, x_0 shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti cheksiz:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ cheksiz katta funksiya deyiladi.

Masalan:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad (x \ne 2)$$

Funksiya $x \to 2$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti 0 ga teng

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan:

$$f(x) = x^2$$

funksiya $x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. *Agar $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya $(\alpha(x) \ne 0)$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.*

Agar $\beta(x)$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'lsa u holda $\frac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti A ga teng,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

bo'lsa, u holda

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

bo'ladi, bunda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya $(x \to x_0)$ va aksincha.

Tasdiq. Agar $x \to x_0$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalar bo'lsa, u holda

$$\alpha(x) + \beta(x), \quad \alpha(x) - \beta(x), \quad \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar bo'ladi.

3-§. Limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalari

Chekli limitiga ega bo'lgan funksiyalar qator xossalarga ega. Keyinchalik bu xossalar ko'p, ayniqsa funksiyalarning limitlarini hisoblashda foydalaniladi. Xossalarning asosiylarini teoremalar sifatida keltiramiz.

Teoremalarda keltiriladigan funksiyalar shartlari:

a). X to'plamda $(X \subset R)$ aniqlangan, x_0 nuqta esa shu to'plamning limit nuqtasi.

b). $x \to x_0$ da chekli limitga ega deb qaraladi.

1-teorema. Ikki funksiya yig'indisining limiti, bu funksiyalar limitlarining yig'indisiga teng:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$\lhd$ Aytaylik,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

bo'lsin. Unda

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad g(x) = B + \beta(x)$$

bo'lib, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalar $(x \to x_0)$ da bo'ladi. Bu tengliklardan

$$f(x) + g(x) = A + B + [\alpha(x) + \beta(x)]$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, $x \to x_0$ da $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$f(x) + g(x) = A + B + \gamma(x).$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = [A + B]$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

bo'lishini bildiradi. $\rhd$

Xuddi shunga o'xshash

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

bo'lishi isbotlanadi.

Natija. *Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti A bo'lsa, u yagona bo'ladi.*

$\lhd$ Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti ikkita bo'lsin:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = B$$

U holda bir tomondan

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x)] = \lim_{x \to x_0} 0 = 0,$$

ikkinchi tomondan

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = A - B$$

bo'ladi. Keyingi ikki tenglikdan

$$A - B = 0, \text{ ya'ni } A = B$$

bo'lishi kelib chiqadi.$\rhd$

2-teorema. *Ikki funksiya ko'paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$\lhd$ Aytaylik,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

bo'sin. Unda

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x)$$

bo'ladi, bunda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $(x \to x_0\, da)$ cheksiz kichik funksiyalar.

Ravshanli,

$$f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) =$$
$$= AB + [A \cdot \alpha(x) + B \cdot \beta(x)] + \alpha(x) \cdot \beta(x).$$

Ayni paytda

$$\gamma(x) = [A \cdot \alpha(x) + B \cdot \beta(x)] + \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

ifoda $x \to x_0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Demak,

$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + \gamma(x).$$

Bundan

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Natija. *O'zgarmas (son) ko'payuvchini limit ishorasi tashqarisiga chiqarish mumkin:*

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x). \quad c = const.$$

3-Teorema. *Ikki funksiya nisbatining limiti surat limitini maxraj limitiga bo'linganiga teng:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \qquad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

$\lhd$ Aytaylik,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B\,, \quad B \neq 0$$

bo'lsin.

Unda

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad g(x) = B + \beta(x)$$

bo'lib,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \left[\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right] = \frac{A}{B} + \frac{B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x)}{B^2 + B\cdot\beta(x)}$$

bo'ladi. Ravshanki, $x \to x_0$ da

$$\frac{B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x)}{B^2 + B\cdot\beta(x)}$$

cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,, \quad \text{ya'ni} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

bo'ladi.▻

Misollar:

1. Ushbu

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 5x + 6x)$$

limit hisoblansin.

◅ Yuqorida keltirilgan teoremalardan ifodalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 5x + 6) = \lim_{x\to 1}x^2 - \lim_{x\to 1}5x + \lim_{x\to 1}6 =$$
$$= \lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x - 5\lim_{x\to 1}x + 6 = 1\cdot 1 - 5\cdot 1 + 6 =$$
$$= 2.\ ▻$$

2. Ushbu

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 10 + 21}$$

limit hisoblansin.

◅ Ravshanki,

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1),$$
$$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7).$$

Unda

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 10x + 21} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-7)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-7} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-7)} = \frac{3+1}{3-7} = -\frac{4}{4} = -1$$

bo'ladi.▻

4-§. Funksiya limitining mavjudligi

Har qanday funksiya ham limitga ega bo'lavermaydi. Masalan,

$$y = x^2 + 1$$

funksiya $x \to 0$ da limitga ega bo'lsa,

$$y = sinx$$

funksiya $x \to \infty$ da limitga ega bo'lmaydi.

Tabiiy ravishda savol tug'uladi. Qachon funksiyaning limiti mavjud bo'ladi?

Funksiyaning limitini mavjud bo'lishi haqida teoremalar bor. Ular asosan maxsus adabiyotlarda bayon etilgan.

Ushbu paragrafda funksiya limiti mavjudligi haqidagi dastlabki ma'lumotlarni keltirish bilan kifoyalanamiz.

1-teorema. *Aytaylik, $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar X to'plamda ($X \subset R$) berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.*

Agar bu funksiyalar uchun:

1). x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta)$ atrofida $(\delta > 0)$

$$f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x),$$

2). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A\,,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$

bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $g(x)$ funksiya ham limitga ega bo'lib,

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A$$

bo'ladi.

2-teorema. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) berilgan, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lib,*

$$(x_0 - b\,, x_0) \subset X \ (b > 0)$$

bo'lsin. Agar

1) $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi,

2) $f(x)$ funksiya X da yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $x \to x_0 - 0$

(ya'ni $x \to x_0$, $x < x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'ladi.

3-teorema. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) berilgan, x_0 nuqta X ning limit nuqtasi bo'lib,*

$$(x_0, x_0 + b) \subset X \quad (b > 0)$$

bo'lsin. Agar

1) $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi,

2) $f(x)$ funksiya X da quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda $x \to x_0 - 0$, $(x \to x_0,\ x > x_0)$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'ladi.

5-§. Muhim (ajoyib) limitlar

Funksiyaning limitlarini hisoblashda quyida keltirililadigan limitlardan ko'p foydalaniladi. Odatda ular muhim limitlar deyiladi.

1^0. Ushbu

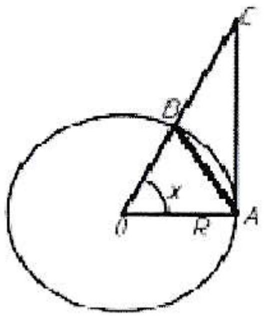
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

munosabat o'rinli. Shuni isbotlaymiz.

Avvalo x o'zgaruvchining $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

$$\sin x < x < tgx \qquad (1)$$

tengsizliklarning bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun tekislikda markazi $(0; 0)$ nuqtada, radiusi R ga teng bo'lgan doirani olamiz (1-chizma).



1-chizma

Bu chizmadan ko'rinadiki, $\triangle\ AOB$ yuzi

$$S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin x\,,$$

AOB sektorning yuzi

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 x\,,$$

$\triangle\ AOC$ ning yuzi

$$S_3 = \frac{1}{2} R^2 \cdot tg\, x\,,$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$S_1 < S_2 < S_3.$$

Demak,

$$\frac{1}{2} R^2 sinx < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot tgx.$$

Bu tengsizliklarning hamma tomonlarini $\frac{1}{2} R^2$ ga bo'lib topamiz:

$$\sin x < x < tgx.$$

Keyingi tengsizliklarning hamma tomonlarini $sinx$ ga $(o < x < \frac{\pi}{2})$ bo'lish natijasida

$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$$

kelib chiqadi. Bu tengsizliklarni, avvalo

$$1 > \frac{sinx}{x} > cosx$$

ko'rinishida, so'ng

$$0 < 1 - \frac{sinx}{x} < 1 - cosx$$

ko'rinishida yozib. Agar

$$1 - cosx = 2sin^2 \frac{x}{2} < 2sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

munosabatni e'tiborga olsak, unda

$$\left| \frac{sinx}{x} - 1 \right| < |x|$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta > 0$ sonni (uni olingan $\varepsilon > 0$ va $\frac{\pi}{2}$ sonlardan kichik qilib) olinsa, u holda

$$|x - 0| = |x| < \delta$$

bo'lganda

$$\left| \frac{sinx}{x} - 1 \right| < |x| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

bo'lishini bildiradi.

2^0. Ushbu

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

tenglik isbotlansin.

$\lhd$ Ma'lumki

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ketma-ketlik limitga ega bo'lib, uning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e. \text{ Endi } f(x) = \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x$$

funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti e, ya'ni

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

bo'lishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $x > 1$ bo'lsin. Agar x ning butun qismini n desak, unda

$$n \le x < n+1$$

bo'lib,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$$

bo'ladi. Keyingi ikki munosabatdan

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} =$$

$$= e \cdot 1 = e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Unda

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x < -1$ bo'lsin. Agar $x = -t$ deyilsa, $x \to -\infty$ da $t \to +\infty$ bo'lib,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) =$$

$$= e \cdot 1 = e$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \quad \rhd$$

Yuqoridagi nazariyada aytilgan qonun va qoidalarga ba'zi bir misollar ko'rib chiqamiz:

Misollar:

1) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-5x} = 2$ ekanini tarifdan foydalanib isbotlang.

$f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyani x=5 nuqtaning biror atrofida, masalan $(4;6)$ intervalda qaraylik. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib $|f(x)-b| < \varepsilon$ ni $x \ne 5$ deb quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right| = \left|\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)}-2\right| = \left|\frac{x+5}{x}-2\right| = \left|\frac{5-x}{x}\right| = \frac{|5-x|}{|x|}.$$

$x>4$ ekanini hisobga olsak $|x|=x>4$ bo'lib $\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\frac{|5-x|}{4}$ kelib chiqadi. Bundan ko'rinib turibdiki, $\delta=4\varepsilon$ deb olsak, u holda $0<|x-5|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x\in(4;6)$ uchun

$$\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\frac{\delta}{4}=\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan 2 soni $f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyaning x=5 nuqtadagi limiti bo'lishi kelib chiqadi.

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$ ekani isbotlansin.

$f(x)=\frac{1}{x-2}$ funksiyani qaraylik. Ixtiyoriy $M>0$ sonni olsak, $|f(x)|=\left|\frac{1}{x-2}\right|>M$ tengsizlik $|x-2|<\frac{1}{M}$ bo'lganda bajarilishi ko'rinib turibdi. Agar $\delta=\frac{1}{M}$ deb olinsa, $|x-2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $\left|\frac{1}{x-2}\right|>\frac{1}{\delta}=M$ yoki $\left|\frac{1}{x-2}\right|>M$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $x\to 2$ da $f(x)=\frac{1}{x-2}$ funksiya cheksizlikka intilishini bildiradi, ya'ni $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ ekani isbotlansin.

$f(x)=\frac{x+1}{x}$ funksiyani qaraylik. Istalgan $\varepsilon<0$ sonni olsak $|f(x)-b|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{x+1-x}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$ bo'lib $N=\frac{2}{\varepsilon}$ desak, barcha $|x|>N$ uchun $\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\frac{2}{N}=\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan 1 soni $f(x)=\frac{x+1}{x}$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti bo'lishi ayon bo'ladi.

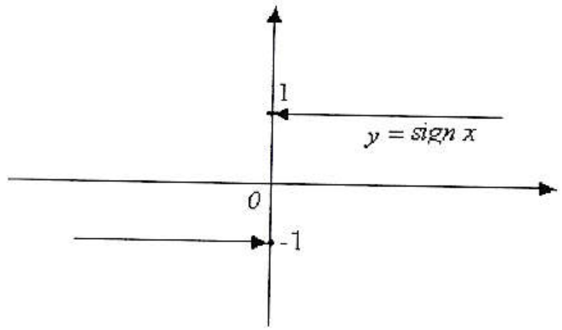
4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$ ekani isbotlansin.

$f(x)=x^2$ funksiyani qaraylik. Istalgan $M>0$ sonni olib $|f(x)|>M$ tengsizlikni tuzamiz. $x^2>M$, bundan $|x|>\sqrt{M}$ kelib chiqadi. $N=\sqrt{M}$ deb

olinsa, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $x^2>N^2=M$ tengsizlik bajariladi. Bu $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$ ekanini bildiradi.

5) $f(x)=signx=\begin{cases}1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa,\\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa,\\ -1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa\end{cases}$

funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega emas, chunki $f(-0)$=-1, $f(+0)$=1 va $f(-0)\neq f(+0)$ (7-chizma). Bu funksiya *0* dan farqli istalgan nuqtada limitga ega.



7-chizma.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=$

$$\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=2+2=4.$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=1-0=0.$

8) $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)(x-4)=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)\lim\limits_{x\to 2}(x-4)=$

$$\left[\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3\right]\cdot\left[\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 4\right] = (2+3)(2-4) = -10$$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right) = (1-0)(2+0) = 2$

10) $\lim\limits_{x\to -1} 7x^2 = 7\lim\limits_{x\to -1} x^2 = 7\cdot(-1)^2 = 7$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+1}$ ni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1) = 3\cdot 2 + 1 = 7 \neq 0$. Shuning uchun:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)} = \frac{2\cdot 2+3}{3\cdot 2+1} = \frac{7}{7} = 1$$

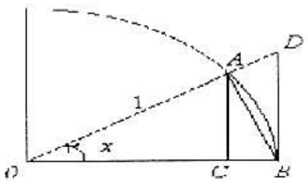
12) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}$ ni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 3-3 = 0$ bo'lgani uchun teoremani qo'llab bo'lmaydi. Suratning limiti $\lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 3+1 = 4 \neq 0$ bo'lgani uchun berilgan ifodaning teskarisining limitini topamiz: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)} = \frac{3-3}{3+1} = \frac{0}{4} = 0$

Bundan $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3} = \infty$ kelib chiqadi, chunki cheksiz kichik funksiyaga teskari funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

13) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ isbotlansin.

Radiusi 1 ga teng aylanani qaraymiz. 8-chizmadan: $x>0$ bo'lsa $\frac{AC}{OA} = \sin x$; $AC = \sin x$, $\breve{AB} = x$ (markaziy burchak o'zi tiralgan yoy bilan o'lchanadi), $AC < \breve{AB}$ yoki $\sin x < x$ ekani ayon bo'ladi. $x<0$ bo'lganda $|\sin x| < |x|$ bo'lishi ravshan.



8-chizma.

Shunday qilib $x>0$ uchun $0<\sin x<x$ va $x<0$ uchun $0<|\sin x|<|x|$ tengsizliklarga ega bo'ldik. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ekanligini hisobga olsak $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ekanligi kelib chiqadi.

14). $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 0$ isbotlansin.

$0 < \left|\sin\frac{x}{2}\right| < |\sin x|$ ekani ravshan. $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0}|\sin x| = 0$ bo'lgani uchun teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to 0}\left|\sin\frac{x}{2}\right| = 0$ yoki $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 0$ kelib chiqadi.

15). $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ ekanligi isbotlansin.

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$ yoki $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ ekanligini e`tiborga olsak

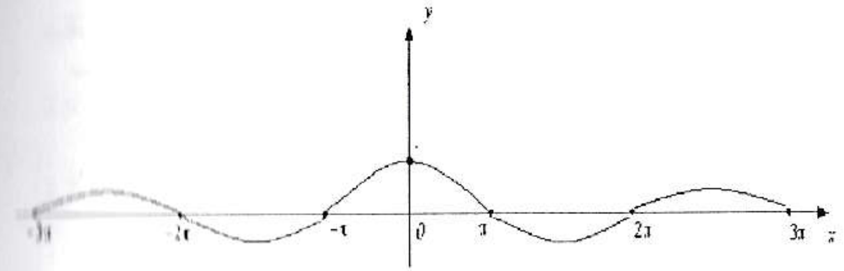
$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot 0^2 = 1$$

hosil bo'ladi. Isbot bo'ldi.

$\frac{\sin x}{x}$ funksiya faqat $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, chunki bu nuqtada kasrning surati ham, maxraji ham 0 ga aylanadi, ya'ni $\frac{0}{0}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Shu funksiyaning $x\to 0$ dagi limitini topamiz. Bu limit *birinchi ajoyib limit* deb ataladi.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$y = \frac{\sin x}{x}$ funksiyaning grafigi 9-chizmada tasvirlangan.



9-chizma

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}m\cdot\frac{\sin mx}{mx}=m\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=m\cdot 1=m.$ (m-o'zgarmas son).

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\alpha x}{x}}{\frac{\sin\beta x}{x}}=\frac{\alpha}{\beta}.$

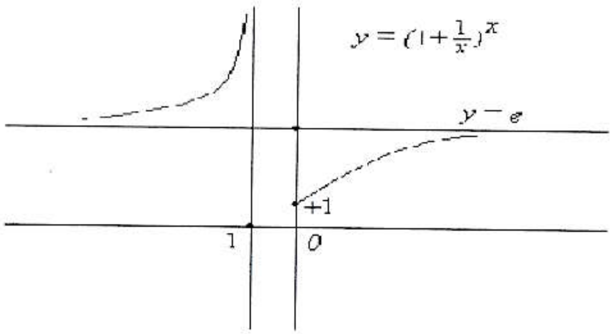
Quyidagi limit *ikkinchi ajoyib limit* deb yuritiladi.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

Agar bu tenglikda $\frac{1}{x}=\alpha$ deb faraz qilinsa, u holda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ $(\alpha\neq 0)$ va

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikkinchi ajoyib limitning yana bir ko'rinishi $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiyaning grafigi 10-chizmada tasvirlangan.



10-chizma

Masalan:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+8}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})^8=$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^8=e(1+0)^8=e$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$ topilsin.

Yechish. $x=3t$ desak, $x\to\infty$ da $t\to\infty$ va

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{3t}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t(1+\frac{1}{t})^t(1+\frac{1}{t})^t=$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e\cdot e\cdot e=e^3$$

bo'ladi.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+4}{x+1})^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1+3}{x+1})^{x+1+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x+1})^{(x+1)+1}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{y})^{y+1}=\lim\limits_{y\to\infty}(1+\frac{3}{y})^y\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{y}\right)=e^3\cdot 1=e^3$

1) 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

Limitlarni hisoblang.

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-6}{2x^3-7x+2}$ 2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-4x-6}{2x^4-3x^2+x}$

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+7x+2}$ 2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-5}{x^3+5x+2}$

2.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+x}{4x^3+3x-5}$ 2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+5}{2x^2-x+4}$

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-2x+1}{2x^2-7x+2}$ 2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x+4}{2x^2-5x+2}$

2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+4x-6}{2x^4+7x+2}$

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-x}{2x^4-4x+2}$

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+4x}{7x^2-7x+2}$

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+4x^2-6x}{2x^4-7x^3+2x}$

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+x^4}{2x^6-7x+2}$

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+6}{5x^3-7x+2}$

2.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x+2}{2x^4-7x+2}$

2.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+5}{6x^3+7x+2}$

2.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+4x^2-6}{2x^4-7x^3+2}$

2.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-7x+6}{2x^2+7x+2}$

2.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7+4x^5-6}{2x^7-7x^5+2}$

2.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x-1}{2x^2+7x+2}$

2.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^6-2}{2x^6-7x+2}$

2.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-6}{2x^3-7x+2}$

2.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-6}{2x^3-7x+2}$

2.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+4x^2-6}{x^4-7x^3+2}$

2.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+4x-6}{3x^3-7x+2}$

2.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-6}{5x^3-7x-8}$

2.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x+5}{2x^4+2}$

2.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+4x+2}{5x^3+7x^2+2}$

2.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5+4x+7}{5x^5-7x+2}$

2.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-2}{3x^3-x+2}$

2.31. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{7x^2+4x-3}{5x^2+4x-1}$

2.32. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-6x-45}{x^2-2x-15}$

2.33. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-12x+20}{x^2+x-6}$

2.34. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-7x-6}{6+x-x^2}$

2.35. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+x-2}$

2.36. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+3x-1}$

2.37. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-9x+10}$

2.38. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

2.39. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-3x-4}$

2.40. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2+x-x^2}{x^3-3x^2-2}$

2.41. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-15}$

2.42. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}{x^2+5x-14}$

2.43. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{8-x}-\sqrt{4-5x}}$

2.44. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-7x-15}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}}$

2.45. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{7+x}}{x^2+4x-5}$

2.46. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2-x-21}{\sqrt{7+x}-\sqrt{1-x}}$

2.47. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}$

2.48. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-3x+2}$

2.49. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-3x-1}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}$

2.50. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{5x+1}-4}$

2.51. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos x}{2x^2}$

2.52. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-\sin x}{4x}$

2.53. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2x}{x\cdot tgx}$

2.55. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x-\sin2x}{x^2}$

2.56. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin x+\sin7x}$

2.57. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2x-\cos^22x}{x^2}$

2.58. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg4x}{3\sin3x}$

2.59. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3xx}{\sin5x}$

2.60. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}\right)$

261. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$

2.62. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+x^2+1}\right)$

2.63. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-x+4}\right)$

2.64. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2+1}-x^2\right)$

2.65. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+2}\right)$

2.66. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$

2.67. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-2}\right)$

2.68. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\right)$

2.69. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x(x-1)}\right)$

2.70. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x^3+1)(x^2-3)}-\sqrt{x(x^4+2)}\right)$

2.71. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+8}\left(\sqrt{x^3-2}-\sqrt{x^3-1}\right)$

2.72. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+5)}-x\right)$

2.73. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

2.74. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}\right)$

2.75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x\right)$

2.76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

2.77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

2.78. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{4-x^3}\right)$

2.79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^5-8}-x\sqrt{x(x^2+5)}\right)$

2.80. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$

2.81. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x^2+1)(x^2-4)}-\sqrt{x^4-9}\right)$

2.82. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-5}\right)$

2.83. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right)$

2.84. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-16}}{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x+4}}$

2.85. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x-6}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

2.86. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{2-3x}-\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

2.87. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x-5}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1}}$

2.88. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{2x+9}-\sqrt{3x+1}}$

2.89. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}$

2.90. $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5-x}}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$

2.91. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}+x}-\sqrt[3]{2x-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3x-2}}$

2.92. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{2x-7}}{\sqrt{1+2x}-3}$

2.93. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt[3]{10+3x}}{\sqrt{2-x}-2}$

2.95. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x^2+2\sqrt[3]{x}}$

2.96. $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}$

2.97. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{2-3x}-\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

2.98. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+25}}{\sqrt[3]{x^3}+2}$

2.99. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$

2.100. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1-2x}}$

3-BOB
FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Funksiya limiti tushunchasi bilan uzviy bog'langan funksiyaning uzluksizligini qaraymiz.

1-§. Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan va x_0 nuqta shu intervalga tegishli nuqta bo'lsin: $x_0\in(a,b)$.

Ta'rif. *Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, bu limit funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng,*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya uzluksizligining bu ta'rifi quyidagi ikki shartning biryo'la bajarilishini taqozo etadi:

1). $x=x_0$ da $f(x)$ funksiya limitining chekli bo'lishini,

2). bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lishini

Masalan,

$$f(x)=\sqrt{x^2+5}$$

funksiya $x_0=2$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki birinchidan $x\to2$ da

$$f(x)=\sqrt{x^2+5}$$

funksiyaning limiti chekli:

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\sqrt{x^2+5}=\sqrt{4+5}=3$$

ikkinchidan, bu limit berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtadagi qiymatiga teng:

$$f(2)=\sqrt{2^2+5}=3,$$

Demak,

$$\lim_{x\to2}f(x)=f(2).$$

Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, agar\ x\neq0,\\ 0, agar\ x=0\end{cases}$$

funksiya $x_0=2$ nuqtada uzluksiz bo'lmaydi, chunki

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

bo'lib, berilgan funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0) = f(0) = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Funksiya limiti ta'rifidagi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

munosabatni quyidagicha

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

yozish mumkin.

Odatda $x - x_0$ ayirma argument orttirmasi,

$$f(x) - f(x_0)$$

ayirma esa x_0 nuqtadagi funksiya orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

keyingi tengliklardan

$$x = x_0 + \Delta x, \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada

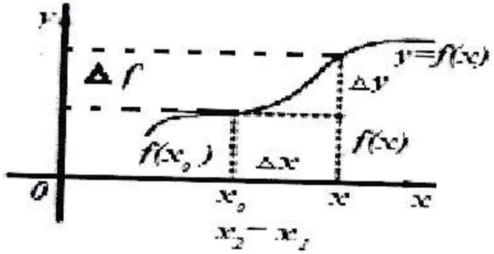
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishga keladi.

Demak, (2) munosabat funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta'rifi sifatida qabul qilinishi mumkin, ya'ni agar argument x ning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δx nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning orttirmasi Δf ham nolga intilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi (1-chizma).



1-chizma

Masalan, $y = f(x) = c$ (c –o'zgarmas son) funksiya ixtiyoriy $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki bu funksiya uchun

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$$

bo'ladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda berilgan bo'lsin.

Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya (a, b) intervalda uzluksiz deyiladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin.

Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda uzluksiz bo'lib,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz deyiladi.

2-§. Funksiyaning uzilishi

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, ya'ni funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lish shartlarini bajarmasa, funksiya x_0 nuqtada uziladi (uzilishga ega) deyiladi. Bunda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

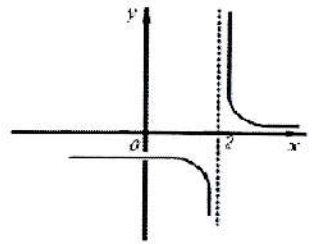
Agar x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lsa, unda bu nuqtada funksiya uzluksizlik ta'rifidagi shartlarni bajarmaydi. Ular quyidagicha bo'lishi mumkin:

1^0. Funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'ladi.

Masalan,

$$y = f(x) = \frac{1}{x-2}$$

funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan (2-chizma)



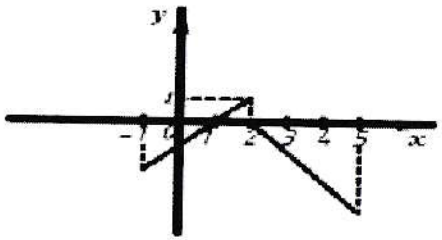
2-chizma

2^0. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan, biroq $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases} x-1, agar -1 \le x < 2 \\ 2-x, agar\ 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlangan ($f(2)=0$) ammo bu funksiya $x \to x_0 = 2$ da limitga ega emas. (3-chizma)



3-chizma

3^0. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan hamda $x \to x_0$ da funksiya limitga ega

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

ammo bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0).$$

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{sinx}{x}, agar\ x \ne 0, \\ 2, agar\ x = 0 \end{cases}$$

Bunda $x_0 = 0$ nuqta bu funksiyaning uzilish nuqtasi, chunki

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1,$$

ammo $f(x_0) = f(0) = 2$.

3-§. Uzluksiz funksiyalar haqida asosiy teoremalar. Sodda funksiyalarning uzluksizligi

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu intervalga tegishli nuqta bo'lsin: $x_0 \in (a,b)$.

1-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

a). $c \cdot f(x), c = const,$

b). $f(x) \pm g(x),$

c). $f(x) \cdot g(x),$

d). $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \ne 0)$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◅ Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz. Unda ta'rifga binoan

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

bo'ladi.

Shu munosabatlardan hamda limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to x_0}\left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = c \cdot f(x_0), \qquad c - const$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Keyingi munosabatlardan

$$c \cdot f(x), \qquad f(x) \pm g(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad (g(x) \ne 0)$$

funksiyalarning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqagi.▻

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $u = \varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada $\left(y_0 = f(x_0)\right)$ uzluksiz bo'lsa,

$$u = \varphi\left(f(x)\right)$$

murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◅ Shartga ko'ra $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Unda ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$$

bo'ladi. Shuningdek, $u = \varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = \varphi(f(x_0)).$$

Bu esa $\varphi(f(x))$ murakkab funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi. ▻

Mazkur kitobda sodda funksiyalar va ularning xossalari bayon etilgan edi. Endi bu funksiyalarning uzluksizlik haqidagi tasdiqlarni keltiramiz.

3-teorema. *Barcha sodda funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida (to'plamlarida) uzluksiz bo'ladi.*

◅ Bu teoremani isbotlashda funksiya uzluksizligi ta'rifi hamda yuqorida keltirilgan teoremalardan foydalaniladi.

Quyida sodda funksiyalarning ayrimlarining uzluksizligini isbotlash bilangina kifoyalanamiz.

1) Aytaylik, $y = f(x) = x$ bo'lsin. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan. Bu oraliqda ixtiyoriy x nuqtani olamiz $x_0 \in (-\infty, +\infty)$,

Unga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Unda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

bo'ladi. Demak, $f(x) = x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzliksiz.

2) Aytaylik, $y = f(x) = x^n$ (n- natural son). Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Ma'lumki,

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ ta}}$$

Unda uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$y = x^n$$

funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

4-§. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. *Agar X to'plamda shunday x^* nuqta topilsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun*

$$f(x) \le f(x^*)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x^* nuqtada eng katta qiymatga erishadi deyiladi va uning eng katta qiymati

$$f(x^*) = \max_X f(x)$$

kabi belgilanadi.

Agar X to'plamda shunday x_* nuqta topilsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$f(x) \ge f(x_*)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_* nuqtada eng kichik qiymatga erishadi deyiladi va uning eng kichik qiymati

$$f(x_*) = \min_X f(x)$$

kabi belgilanadi.

Endi segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalarini keltiramiz. Ular teoremalar orqali ifodalanadi.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a, b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi.*

2-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'ladi.*

3-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralangan bo'lib, segmentning chetki nuqtalari a va b larda turli ishorali qiymatlarga ega bo'lsa u holda (a, b) da shunday c nuqta topiladiki, $(a < c < b)$*

$$f(c) = 0$$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan nazariyadagi qonun qoidalarga ba'zi bir misollar ko'rib chiqamiz:

Masalan:

1) $y = x^2$ funksiya istalgan $\boldsymbol{x}$ nuqtada uzluksiz va shuning uchun $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$, $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$.

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 4^{\sin x}$ topilsin.

Yechish. $4^{\sin x}$ murakkab funksiya $x=\frac{\pi}{2}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 4^{\sin x} = 4^{\sin\frac{\pi}{2}} = 4^1 = 4$$

bo'ladi.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $a^x-1=t$ almashtirish qilamiz. U holda $a^x=1+t$, $x=\log_a(1+t)$ bo'lib $x\to 0$ da $t\to 0$ da va

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a=\ln a$$

bo'ladi.

Xususiy holda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1$ kelib chiqadi, ya'ni $x\to 0$ да $e^x-1\sim x$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\frac{0}{0}$ aniqmaslikka egamiz. $(1+x)^p-1=y$ almashtirish olamiz. U holda $(1+x)^p=1+y$, yoki buni e asosga ko'ra logarifmlasak $p\ln(1+x)=\ln(1+y)$ bo'ladi. $x\to 0$ da $y\to 0$ bo'lgani uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{p\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{y}{\ln(1+y)}=p\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}==p\cdot 1\cdot 1=p.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$ formulaga ega bo'ldik.

Endi asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarining chetlaridagi limitlari hamda ajoyib limitlar jadvalini keltiramiz.

1) $x=a$ nuqtada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ bo'ladi.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

3) $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ bo'ladi.

4) $0<a<1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ bo'ladi.

5) $a>0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty$, $\alpha<0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=0$ bo'ladi;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$.

6) $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=-\infty$.

7) $0<a<1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} tg\,x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} tg\,x=-\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\,x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\,x=-\frac{\pi}{2}$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

11) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

4-BOB
FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALI
1 §. Funksiya hosilasining ta'riflari.

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan va x_0 nuqta shu intervalning biror nuqtasi bo'lsin ($x_0 \in (a, b)$).

Quyidagi amallarni bajaramiz:

1) funksiya argumenti x_0 ga Δx orttirma beramiz, bunda $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ va $\Delta x \neq 0$ bo'lsin.

2) bu orttirmaga mos funksiya orttirmasi Δf (Δy) ni topamiz:
$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

3) funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini olamiz:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (\Delta x \neq 0).$$

Ravshanki, bu nisbat muayyan $f(x)$ va muayyan Δx ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. $y = f(x)$ *funksiya orttirmasi* Δy *ning argument orttirmasi* Δx *ga nisbatining* $\Delta x \to 0$ *dagi limiti*
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va
$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad y'_{x_0}$$
kabi belgilanadi.

Demak,
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Agar (1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli, (1) limit cheksiz bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lsa, bu $f'(x)$ hosila x ning funksiyasi bo'ladi.

Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi sonni ifodalaydi.

Ta'rif. *Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning ixtiyoriy nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda differensiallanuvi deyiladi.*

Odatda funksiyaning hosilasini topish amali, differensiallash amali deyiladi.

Agar,
$$x_0 + \Delta x = x$$
deyilsa, unda
$$\Delta x = x - x_0$$
bo'lib,
$$\Delta x \to 0 \text{ da } x \to x_0 \text{ bo'ladi.}$$

Natijada yuqoridagi (1) ifoda quyidagicha ifodalanadi
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Demak, funksiya hosilasini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Ushbu
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (2)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap hosilalari quyidagicha ta'riflanadi:
$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$
$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Misol. Ushbu
$$y = f(x) = x^2$$
funksiyaning hosilasi topilsin.

a) argument x ga Δx orttirma beramiz:
$$x+\Delta x;$$

b) funksiyaning mos orttirmasi Δy ni topamiz:
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2;$$

v) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

g) bu nisbatni $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x.$$

Demak, berilgan funksiyaning hosilasi

$$y' = (x^2)' = 2x$$

bo'ladi. ▻

2-§. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari

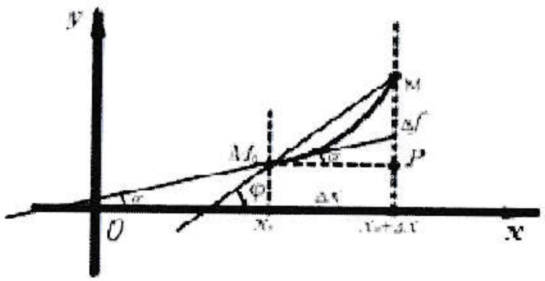
Aytaylik, *f(x)* funksiya *(a, b)* intervalda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu intervalning x_0 nuqtasida $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin.

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi.

Aytaylik, *f(x)* funksiyaning grafigi *Γ* chiziqni (egri chiziqni) tasvirlasin (1-chizma).



1-chizma

Endi Γ chiziqqa uning $M_0 = M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish masalasini qaraymiz. Γ chiziqda M_0 nuqtasidan farqli

$$M = M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$

nuqtani olib, bu nuqtalar orqali *l* kesuvchini o'tkazamiz. *l* kesuvchining *OX* o'qi bilan tashkil etgan burchakni φ bilan belgilaymiz.

Ravshanki, φ burchak Δx ga bog'liq bo'ladi:

$$\varphi = \varphi(\Delta x).$$

Agar M nuqta Γ chiziq bo'ylab, M_0 ga intilganda (ya'ni Δx→0 da) kesuvchining limit holati mavjud bo'lsa, kesuvchining bu limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi. Urinma to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Demak, *f(x)* funksiya grafigiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

limitning mavjud bo'lishini ko'rsatish yetarli. Bunda α–urinmaning *OX* o'qi bilan tashkil etgan burchagi.

Uchburchak MM_0P dan

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

va undan

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishini topamiz.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta x \to 0$ da $\varphi(\Delta x)$ ning limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$$

mavjud va *y*

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x_0)$$

ga teng bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud.

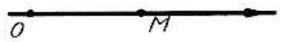
Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ esa bu urinmaning burchak koeffitsientini ifodalydi. Urinmaning tenglamasi ushbu

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi hosilaning mexanik ma'nosini keltiramiz.

Ataylik, moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab (bu to'g'ri chiziqni *OX* o'qi deylik) harakat qilib, *M* nuqtaga kelganda bosib o'tilgan yo'l *S* bo'lsin: *OM=S* (2-chizma).



2-chizma

Ravshanki, bu yo'l vaqtga bog'liq bo'lib, uning funksiyasi bo'ladi:

$$S = S(t). \tag{3}$$

Odatda (3) tenglama moddiy nuqtaning harakat qonuni deyiladi.

Agar nuqta t vaqt oralig'ida $S(t)$ masofani, $t+\Delta t$ vaqt oralig'ida esa $S(t+\Delta t)$ masofani bosib o'tgan bo'lsa, unda Δt vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'l

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

nisbat esa moddiy nuqtaning t hamda $t+\Delta t$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Agar Δt nolga intila borsa o'rtacha tezlik moddiy nuqtaning t paytdagi (momentdagi) oniy tezlikni aniqroq ifodalay boradi. Demak, t paytdagi tezlik

$$V(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$V(t) = S'(t) \tag{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, moddiy nuqtaning harakat qonuni $S=S(t)$ bo'lganda funksiyaning t nuqtadagi hosilasi $S'(t)$ uning t paytdagi harakat (oniy) tezligini ifodalaydi.

3-§. Funksiya hosilasini hisoblash qoidalari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, ular shu intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

1^0. Ikki funksiya yig'indisi va ayirmasining hosilalari

Teorema. *Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar yig'indisi va ayirmasining hosilalari bu funksiyalar hosilalarining mos ravishda yig'indisi va ayirmasiga teng bo'ladi:*

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x).$$

◅ Quyidagi belgilashni ko'ramiz:

$$F(x) = f(x)\pm g(x),$$

hosila ta'rifi va funksiya limiti haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x_0+\Delta x)\pm g(x_0+\Delta x)] - [f(x_0)\pm g(x_0)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\pm\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x)\pm g'(x).$$

Demak,

$$F'(x) = [f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x). \ ▻$$

Masalan,

$$y = x^2 + x$$

funksiyaning hosilasi

$$y' = (x^2+x)' = (x^2)' + (x)' = 2x+1$$

bo'ladi.

2^0. Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

bo'ladi.

◅ Aytaylik,

$$\Phi(x) = f(x)\cdot g(x)$$

bo'lsin. Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib topamiz.

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

Ma'lumki,

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x),$$
$$\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x).$$

Bu munosabatlardan

$$f(x+\Delta x)=\Delta f(x)+f(x),$$
$$g(x+\Delta x)=\Delta g(x)+g(x).$$
bo'lishi kelib chiqadi. Unda yuqoridagi (5) ifoda ushbu
$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x)+\Delta f(x)]\cdot[g(x)+\Delta g(x)]-f(x)\,g(x)}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)+\Delta f(x)\cdot\Delta g(x)-f(x)\,g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}+\Delta g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]$$
ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikdan
$$\Phi'(x)=g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+$$
$$+f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=$$
$$=g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x).$$
Demak,
$$\Phi'(x)=[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).\ \rhd$$
3^0. Ikki funksiya nisbatining hosilasi

Teorema. *Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(g(x)\neq 0)$ nisbatining hosilasi uchun*
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
bo'ladi.

$\lhd$ Aytaylik,
$$P(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$
bo'lsin.

Funksiya hosilasi ta'rifi hamda limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:
$$P'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)+\Delta f(x)}{g(x)+\Delta g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x[g(x)+\Delta g(x)]\cdot g(x)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot\Delta f(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x[g^2(x)+g(x)\cdot\Delta g(x)]}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\cdot\Delta g(x)}=$$
$$=\frac{g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g(x)}$$
$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$
Demak,
$$P'(x)=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

4^0. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ funksiyalar berilgan bo'lib, ular yordamida
$$y=f(\varphi(x))$$
murakkab funksiya hosil qilingan bo'lsin.

Teorema. *Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x nuqtada $u'=\varphi'(x)$ hosilaga ega bo'lib, y=f(u) funksiya u nuqtada $(u=\varphi(x))$ $f'(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va $y'_x=f'(u)\cdot u'_x$, ya'ni $y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ bo'ladi.*

$\lhd$ Aytaylik, $\varphi(x)\neq const$ bo'lsin. Bu holda, $\Delta x\neq 0$ bo'lganda
$$\Delta u=\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$$
bo'ladi. Ayni paytda
$$\Delta y=\Delta f(u)=f(u+\Delta u)-f(u)$$
bo'lib,
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ da (bunda Δu ham nolga intiladi) limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Demak,

$$f'=\left(f(\varphi(x))\right)'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Masalan,

$$y=(x^2-3x+2)^3$$

funksiya uchun

$$u(x)=x^2-3x+2, \qquad f(u)=u^3$$

bo'lib, teoremaga ko'ra

$$[f(u(x))]'=f'(u)\cdot u'(x)$$

ya'ni

$$[(x^2-3x+2)^3]'=3\cdot(x^2-3x+2)^2\cdot(2x-3)$$

bo'ladi.

5^0. Teskari funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) va $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x)\neq 0$ bo'lsin.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(y)$ teskari funksiyaga ega bo'lib,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

bo'ladi.

◁ Aytaylik, $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiya $x=\varphi(y)$ bo'lsin.

$x=\varphi(y)$ funksiya argumentiga $\Delta y(\Delta y\neq 0)$ orttirma beramiz. Unda $x=\varphi(y)$ funksiya ham Δx orttirmaga ega bo'lib, $y=f(x)$ funksiya qat'iy monoton bo'lganligi uchun $\Delta x\neq 0$ bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Agar $\Delta y\to 0$ bo'lsa, unda Δx ham nolga intiladi. $\Delta x\to 0$ (funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun).

Ma'lumki,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=f'(x), \qquad (f'(x)\neq 0).$$

Bu munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Demak,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Masalan,

$$y=\sqrt{x}$$

funksiyaga teskari funksiya $x=y^2$ bo'lib

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{(y^2)'}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bo'ladi.

4-§. Sodda funksiyalarning hosilalari. Hosilalar jadvali

Funksiya hosilasi ta'rifi hamda hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib sodda funksiyalarning hosilalarini topamiz.

1^0. Darajali $y=x^n$ $(n\in N)$ funksiyaning hosilasi.

$y=x^n$ funksiya argumenti x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n.$$

Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=$$

$$=\left(x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\dots+(\Delta x)^n\right)-x^n=$$

$$=nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\dots+(\Delta x)^n$$

bo'ladi.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\dots+(\Delta x)^n}{\Delta x}=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x+\dots+(\Delta x)^{n-1}.$$

So'ng $\Delta x\to 0$ bu nisbatning limitini

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x+\dots+(\Delta x)^{n-1}\right]=$$

$$=n\cdot x^{n-1}.$$

Demak,

$$y' = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

2^0. Ko'rsatkichli funksiya $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ ning hosilasi

Avvalo $y = e^x$ funksuyaning hosilasini topamiz. Funksiya argument x ga Δx orttirma berib funksiya orttirmasini

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1),$$

so'ng uni Δx ga bo'lib, ushbu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

nisbatni topamiz. Endi,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

limitni hisoblaymiz. Bu limitni hisoblashda $\Delta x \to 0$ da $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ bo'lishidan foydalanamiz.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x.$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x, \text{ ya'ni } y' = (e^x)' = e^x$$

Endi $y = a^x$ funksiyani qaraymiz. Ma'lumki,

$$a^x = e^{x \ln a}$$

bo'ladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasidan foydalanib topamiz.

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} (\ln a) = \left(e^{\ln a}\right)^x \cdot \ln a = $$
$$= a^x \cdot \ln a.$$

Demak,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (a > 0, \qquad a \neq 1).$$

3^0. Logarifmik funksiya $y = \log_a x$ $(a > 0, \ a \neq 1)$ ning hosilasi

Avvalo $y = \ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz: Ravshanki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Ma'lumki, $\Delta x \to 0$ da

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Demak,

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Endi

$$y = \log_a x$$

funksiyani qaraymiz. Ravshanki,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Unda

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

bo'ladi. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

4^0. Trigonometrik

$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = tg x, \quad y = ctg x$

funksiyalarlarning hosilalari.

Ushbu

$$y = \sin x$$

funksiya argument x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasi

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

ning Δx ga nisbatini qaraymiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

So'ng $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib, bunda

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=1\cdot\cos x.$$

Demak,

$$y'=(\sin x)'=\cos x.$$

bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $y=\cos x$ funksiyaning hosilasi

$$y'=(\cos x)'=-\sin x$$

bo'lishi topiladi.

Endi $y=tgx$ va $y=ctgx$ funksiyalarning hosilalarini topamiz. Bunda ikki funksiya nisbatining hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanamiz:

$$y'=(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak,

$$y'=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shuningdek,

$$y'=(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

bo'ladi.

Demak,

$$y'=(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5^0. Teskari trigonometrik $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arc}\,tgx$, $y=\mathrm{arc}\,ctgx$ funksiyalarning hosilalari.

Aytaylik,

$$y=\arcsin x$$

bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$x=\sin y,\qquad \left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi. Ravshanki, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ da

$$x'=\cos y\qquad (\cos y\neq 0)$$

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demak,

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$y=\arccos x$$

funksiyaning hosilasi

$$y'=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

Endi

$$y=\mathrm{arc}\,tgx$$

funksiyaning hosilasini topamiz.

Ma'lumki, $y=\mathrm{arc\,tg}x$ funksiya

$$x=tgy\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(\mathrm{arc}\,tg\,x)'=\frac{1}{(tg\,y)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Demak,

$$y'=(\mathrm{arc}\,tg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$y=\mathrm{arc}\,ctg\,x$$

funksiyaning hosilasi

$$y' = (arc\, ctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

Sodda funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval sifatida keltiramiz (bunda $u=u(x)$).

1. $(c)' = 0, \quad c = const,$
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u',$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',$
4. $(e^x)' = e^x, \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x}\log_a e, \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$;
6. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
7. $(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
8. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
9. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
10. $(arc \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (arc \sin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(arc \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (arc \cos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
12. $(arc\, tg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (arc\, tg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(arc\, ctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (arc\, ctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

5-§. Funksiyaning differensiali. Differensial hisobning asosiy teoremalari

1^0. Funksiya differensiali

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, x_0 nuqtada $(x_0 \in (a, b))$ differensiallanuvchi, ya'ni chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin.

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bunda Δx-argument orttirmasi, $\Delta f(x_0)$ esa funksiya orttirmasi.

Limitning xossalaridan foydalanib bu tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(\Delta x) \to 0$. Keyingi tenglikdan

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\, \Delta x + \alpha(\Delta x)\, \Delta x \quad (6)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega $f'(x_0) \neq 0$ bo'lsa, bu funksiyaning orttirmasi $\Delta f(x_0)$ ikki qo'shiluvchidan iborat bo'ladi.

Qo'shiluvchilardan birinchisi Δx ga nisbatan chiziqli ($f'(x_0)\, \Delta x$) bo'lib, $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi, qo'shiluvchilardan ikkinchisi $\alpha(\Delta x)\, \Delta x$ esa, $\Delta x \to 0$ da yuqori tartibli cheksiz kichik bo'ladi.

Ta'rif. *(6) ifodadagi $f'(x_0)\, \Delta x$ ko'paytma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi.*

Demak, ta'rifga ko'ra

$$df(x_0) = f'(x_0)\, \Delta x$$

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) itervalning har bir x nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, unda

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

deb olinadi, bunda Δx funksiya argumentining ixtiyoriy x nuqtadagi orttirmasi.

Xususan, $f(x) = x$ bo'lganda bu funksiyaning differensiali

$$df(x) = f'(x)\Delta x = (x)'\Delta x = 1\, \Delta x = \Delta x$$

bo'lib,

$$dx = \Delta x$$

bo'ladi. Bu hol o'zgaruvchi (argument) x ning orttirmasi Δx ni uning differensiali dx bilan almashtirilish mumkinligini ko'rsatadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensialini

$$df(x) = f'(x)\, dx$$

ko'rinishida ifodalash mumkinligini bildiradi.

Funksiya differensialining bu ifodasi hamda hosilalar jadvalidan foydalanib sodda funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1. $d(x^\alpha) = \alpha\, x^{\alpha-1} dx,$
2. $d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx,$
3. $d(e^x) = e^x \cdot dx,$

4. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e \cdot dx,$

5. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx,$

6. $d(\sin x) = \cos x dx,$

7. $d(\cos x) = -\sin x dx,$

8. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx,$

9. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx,$

10. $d(arc\ sinx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

11. $d(arc\ cosx) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$

12. $d(arc\ tgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx,$

13. $d(arc\ ctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx.$

2°. Differensiallashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyalarning differensiali

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda

1) $d(c \cdot f(x)) = c \cdot df(x), \quad c = const,$

2) $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x),$

3) $d[f(x) \cdot g(x)] = g(x) \cdot df(x) + f(x) \cdot dg(x),$

4) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \qquad (g(x) \neq 0).$

Bu qoidalar sodda isbotlanadi. Ulardan birini masalan 2)-ni isbotlaymiz.

Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi, ya'ni $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega.

Aytaylik, $F(x) = f(x) + g(x)$ bo'lsin. Unda

$$F'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikning ikki tamonini dx ga ko'paytirib

$$F'(x)dx = f'(x)dx + g'(x)dx$$

ya'ni

$$dF(x) = df(x) + dg(x)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x).$$

Aytaylik, $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ funksiyalar yordamida $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosil qilingan bo'lsin. Bu $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar hosilalarga ega deylik. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$y' = (f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$y'dx = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx.$$

Unda

$$dy = f'(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x)$$
$$(dy = f'(u)\ du)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiya murakkab bo'lgan holda ham funksiya differensiali funksiya hosilasi $f'(u)$ bilan argument differensiali ko'paytmasidan iborat bo'ladi.

Ikkala holda:

$$1)\ y = f(x),$$
$$2)\ y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

ya'ni

$$y = f(\varphi(u))$$

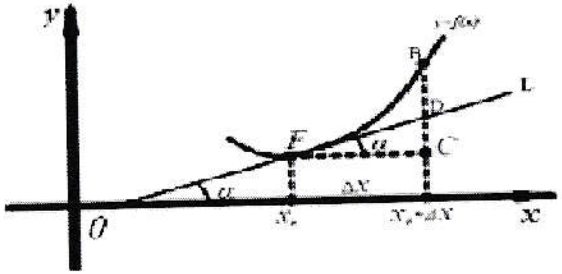
funksiya differensiali:

$$1)\ dy = f'(x)dx,$$
$$2)\ dy = f'(u)du$$

bir xil ko'rinishga ega. Odatda, bu differensial ko'rinishining invariantligi deyiladi.

3°. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 3-chizmada ko'rsatilgan egri chiziqni tasvirlasin.



3-chizma

Endi egri chiziqning $(x, f(x))$ va $(x+\Delta x, f(x))$ nuqtalarni mos ravishda F va B bilan belgilaymiz. Unga

$$FC = \Delta x, \qquad BC = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun u shu nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya grafigiga uning $F = F(x, f(x))$ nuqtasiga o'tkazilgan L urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti

$$tg\alpha = f'(x)$$

bo'ladi.

Urinmaning BC bilan kesishgan nuqtasini D bilan belgilaylik. FDC uchburchakdan topamiz:

$$\frac{DC}{FC} = tg\alpha.$$

Keyingi tengliklardan

$$DC = tg\alpha \cdot FC = f'(x) \cdot \Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtasidagi differensiali

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

funksiya grafigida $F = F(x, f(x))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalaydi.

Bu funksiya differensiallining geometrik ma'nosidir.

4°. Funksiya differensiali va taqribiy formula

Nazariy va ayniqsa amaliy masalalarni yechishda tegishli funksiyalarning nuqtadagi qiymatlarini hisoblash zaruriyati tug'iladi. Ko'pincha, bunday funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qiyin bo'ladi. Bu hol funksiyaning

nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash (ularni hisoblash uchun taqribiy formulalar topish) masalasi yuzaga keladi.

Funksiyalarning differensiali esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega va $f'(x) \neq 0$ bo'lsin, u holda

$$\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x = df + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

bo'ladi.

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{f'(x) \cdot \Delta x} = 1 + \frac{\alpha(x)}{f'(x)}$$

bo'ladi, bunda $\Delta x \to 0$ va $\alpha(\Delta x) \to 0$. Keyingi tenglikdan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik ushbu

$$\Delta y \approx dy$$

munosabatga (taqribiy tenlikka) olib keladi.

Ravshanki, Δx ning qancha kichik bo'lishi bu taqribiy tenglamaning aniqligini shuncha oshiradi.

Yuqoridagi taqribiy formulani quyidagicha

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \qquad (7)$$

ko'rinishida yozsa ham bo'ladi. (7) formuladan taqribiy hisoblashlarda foydalaniladi.

6-§. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan va $x_0 \in (a,b)$ bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a,b)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_o) \quad (f(x) \geq f(x_o))$$

bo'lsa, $f(x_o)$ miqdor $f(x)$ funksiyaning (a,b) dagi eng katta (eng kichik) qiymati deyiladi.

Teorema. ***(Ferma teoremasi).*** *Agar $y = f(x)$ funksiya c nuqtada ($c \in (a,b)$) o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishib, bu nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda*

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishsin:

$$f(x) \leq f(c) \qquad (8)$$

Endi c nuqtaga shunday orttirma beramizki, $c + \Delta x$ shu (a, b) intervalga tegishli bo'lsin:

$$c + \Delta x \in (a, b).$$

Unda (8)

$$f(c + \Delta x) \leq f(c)$$

bo'lib

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$$

bo'ladi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bo'ladi.

Agar $\Delta x > 0$ bo'lsa, unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

bo'lib,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \qquad (9)$$

bo'ladi.

Agar $\Delta x < 0$ bo'lsa, unda

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \qquad (10)$$

bo'ladi.

Yuqoridagi (9) va (10) munosabatlardan

$$f'(c)=0$$

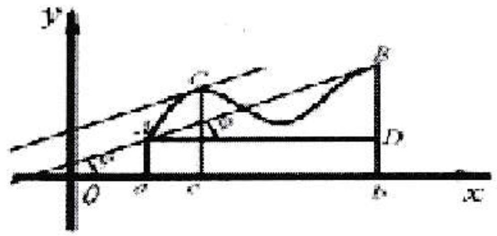
bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema. (Lagranj teoremasi). *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzliksiz bo'lib, (a, b) intervalda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa,u holda a bilan b orasida shunday c nuqta $(a < c < b)$ topiladiki,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, uning grafigi 1-chizmada tasvirlangan AB egri chiziqni ifodalasin.



1-chizma

A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ deylik.Unda bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini $tg\varphi$ bo'ladi.

AB egri chiziqdan shunday C nuqta bo'lishini tasavvur etish mumkinki, egri chiziqqa shu nuqtada o'tkazilgan L urinma AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. Bu L urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini α deylik. Uning ham burchak koeffitsienti $tg\alpha$ bo'ladi.

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma'nosi

$$tg\alpha = f'(c) \qquad (11)$$

bo'ladi, bunda C nuqta AB egri chiziqdagi C nuqtani abssissasi.

AB to'ri chiziq bilan L urinma parallel bo'lgani uchun

$$tg\varphi = tg\alpha \qquad (12)$$

bo'ladi.

Chizmada keltirilgan ADB to'g'ri burchakli uchburchakda

$$AD = b - a, \quad BD = f(b) - f(a), \qquad \angle A = \varphi.$$

Shu uchburchakdan

$$tg\varphi = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (13)$$

bo'lishini topamiz.

Yuqoridagi (11), (12), (13) munosabatlardan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Natija. *Agar $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi hosilasi nolga teng*

$$f'(x) = 0, \quad x \in (a, b)$$

bo'lsa, u holda funksiya (a, b) *da o'zgarmas bo'ladi:*

$$f(x) = C, \quad C = const.$$

Natija. *Aytaylik,* $y = f(x)$ *funksiya uchun Lagranj teoremasining shartlari bajarilib,*

$$f(a) = f(b)$$

bo'lsin. U holda a va b lar orasida shunday c nuqta $(a < c < b)$ *topiladiki,*

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. (Koshi teoremasi). *Aytaylik,* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar.*

1) $[a, b]$ *segmentda uzliksiz,*

2) (a, b) *intervalda* $f'(x)$ *va* $g'(x)$ *hosilalarga ega,*

3) (a, b) *da* $g'(x) \neq 0$ *bo'lsin.*

U holda a bilan b lar orasida shunday c nuqta $(a < c < b)$ *topiladiki,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan nazariyadagi qonun qoidalarga ba'zi bir misollar ko'rib chiqamiz:

Masalan, tekis harakatda o'tilgan yo'lning shu yo'lni o'tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o'zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko'pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir.

Masalan, og'ir moddiy nuqtaning bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushushi masalasini qaraylik. Fizikadan ma'lumki, bo'shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2}t^2 \qquad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu erda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o'tgan yo'l, g erkin tushish tezlanishi,

$g \approx 9{,}81 м/сек^2$. Bu harakat notekisdir. Notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo'ladi. Ya'ni vaqtning har bir momentidagi oniy tezlik haqida gapirish kerak bo'ladi. Oniy tezlikni hisoblash uchun quyidagi ko'rinishdagi limitni hisoblash kerak bo'ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (2)$$

Umuman, o'zgaruvchi miqdor ning o'zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Masalan: 1) $y=x^2$ funksiya hosilasi hisoblansin. x ga Δx orttirma berib Δy ni topamiz:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$y' = (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Shunday qilib, $(x^2)' = 2x$ ekan.

2). Hosila ta'rifidan foydalanib $y = \frac{2x}{3x+1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy Δx orttirma uchun funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = \frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{2x}{3x+1} = \frac{6x^2 + 6x\Delta x + 2x + 2\Delta x - 6x^2 - 6x\Delta x - 2x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}$$

Tenglikning ikkala tomonini Δx ga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}$$

Bu nisbatning $\Delta x \to 0$ da limitini hisoblaymiz:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \frac{2}{(3x+1)^2}.$$

Shunday qilib,

$$y' = \left(\frac{2x}{3x+1}\right)' = \frac{2}{(3x+1)^2}.$$

3) $f(x)=x^2$ funksiyaning $x=1$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $x_0=1, y_0=f(x_0)=1^2=1, M_0(1;1)$. Ma'lumki $f'(x)=(x^2)'=2x$

$$f'(x_0)=f'(1)=2\bullet 1=2$$

Urinma tenglamasi:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-1=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x-1$$

Javob: $y=2x-1$

$S'(t)=v$ tezlik, S yo'ldan t vaqt bo'yicha olingan hosiladir. Shu xulosani hosilaning mexanik ma'nosi deyiladi.

4) Moddiy nuqta $S=f(t)=\frac{1}{(1+t)}$ qonun bo'yicha harakatlanadi. Nuqta harakatining $t=2c$ dagi tezligini toping.

Yechish.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+(2+h)}-\frac{1}{1+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{3(3+h)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{3(3+h)}=-\frac{1}{9}$$

$$|f'(2)|=\left|-\frac{1}{9}\right|=\frac{1}{9};$$

5) $y=(x^3+3x-1)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y'=((x^3+3x-1)^4)'=4(x^3+3x-1)^{4-1}(x^3+3x-1)'=4(x^3+3x-1)^3(3x^2+3).$

6) $y=\frac{\sin^2 x}{x^3+1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish.

$$y'=\frac{(\sin^2 x)'(x^3+1)-\sin^2 x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{2\sin^{2-1}x\cdot(\sin x)'(x^3+1)-\sin^2 x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=$$

$$=\frac{2\sin x\cdot\cos x(x^3+1)-3x^2\cdot\sin^2 x}{(x^3+1)^2}=\frac{\sin 2x\cdot(x^3+1)-3x^2\cdot\sin^2 x}{(x^3+1)^2}.$$

7) $y=(10+3x^2)^7$;

Yechish: $y'=7(10+3x^2)^6(10+3x^2)'=42x(10+3x^2)^6$

8) $y=(3x^2-1)^{10}$; $y'=10(3x^2-1)^9(3x^2-1)'=10(3x^2-1)^9 6x=60x(3x^2-1)^9$

Murakkab ko'rsatkichli, trigonometrik, teskaritrigonometrik funksiyalarning hosilalari va Roll, Koshi teoremalariga misollar ko'ramiz.

1) Ko'rsatkichli funksiyalarning hosilalari

a) $y=a^x$, $\ln y=x\ln a$, $\frac{y'_x}{y}=\ln a$, $y'_x=y\ln a=a^x\cdot\ln a$.

б) $y=e^x$, $y'=e^x$.

в) $y=a^u$, $u=u(x)$, $y'=a^u\cdot\ln a\cdot u'_x$

2) Trigonometrik funksiyalarning hosilalari

a) $y=\sin x$, $y'=\cos x$, $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$

б) $y=\cos x$, $y'=-\sin x$, $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$

в) $y=tgx$, $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $(tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 x}$

г) $y=ctgx$, $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $(ctgu)'=-\frac{u'}{\sin^2 x}$

Misol.

$y=\arcsin x$, $y'=?$

$$x=\sin y\Rightarrow y'_x=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ da $\cos y\geq 0$ bo'lganligi uchun «+» ishora olindi.

Shunday qilib $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

demak, $(\arcsin x)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $u=u(x)$. Shunga o'xshash:

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(arctg\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(arcctg\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Quyidagi ko'rinishdagi $y=(\cos x)^{x^2}, y=x^{\cos x}, y=x^x, y=(\log_a x)^x$ va shunga o'xshash funksiyalar murakkab ko'rsatkichli funksiyalardir. Bunday funksiyalarning hosilasini topishda berilgan funksiya logarifmining hosilasini topishdan iborat bo'lgan usulni qo'llash ko'pincha hosilani birmuncha soddalashtiradi.

Masalan. 1) $y=u^v$ funksiyani logarifmlab hosilasini topishdan quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$y' = u^v \ln u\cdot v' + vu^{v-1}\cdot u',$$

bunda $u=u(x)$ va $v=v(x)$.

2) $y=(\sin 4x)^{x^3}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Tenglamani ikkala tomonini logarifmlaymiz:

$$\ln y = x^3\ln\sin 4x.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini x bo'yicha differensiallaymiz:

$$(\ln y)' = (x^3)'\cdot\ln\sin 4x + x^3(\ln\sin 4x)'$$

Bundan

$$\frac{y'}{y} = 3x^2\ln\sin 4x + 4x^3\cdot\frac{1}{\sin 4x}\cos 4x.$$

Soddalashtiramiz:

$$y' = (\sin 4x)^{x^3}(3x^2\ln\sin 4x + 4x^3 ctg 4x).$$

3) Ellips tenglamasi.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctg t$$

4) $[1;5]$ kesmada $f(x)=x^2-6x+100$ funksiya uchun Roll teoremasi bajariladimi.

Yechish. $f(x)$ funksiya x ning barcha qiymatlarida uzluksiz va $(1;5)$ oraliqda differensiallanuvchi hamda $[1;5]$ kesmaning chetki qiymatlarida $f(1)=f(5)=95$ teng, shuning uchun Roll teoremasi shu kesmada bajariladi.

5) $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar uchun Koshi formulasi yozilsin va c topilsin.

Yechish. $f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2x$, $f(b)=b^3$, $f(a)=a^3$, $g(b)=b^2$, $g(a)=a^2$, $f'(c)=3c^2$, $g'(c)=2c$ bo'lgani uchun $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Koshi formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{3c^2}{2c};\quad \frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{(b-a)(b+a)}=\frac{3}{2}c.$$

Bundan, $c=\frac{2(b^2+ba+a^2)}{3(b+a)}$.

7-§. Yuqori tartibli hosilalar

1°. Funksiyaning yuqori tartibli hosilasi tushunchasi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) itervalda aniqlangan bo'lib, uning ixtiyoriy nuqtasida $x\in(a,b)$, $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$

funksiyani ($f'(x)$ ham x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi) $g(x)$ funksiya orqali belgilaylik:

$$g(x) = f'(x), \qquad (x \in (a,b)),$$

Ta'rif. *Agar $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $g(x)$ funksiya $g'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa,bu hosila $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi* va $f''(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uning birinchi tartibli hosilasining hosilasi bo'ladi:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning 3-tartibli, $f'''(x)$, 4-tartibli $f^{IV}(x)$ va h.k. tartibli hosilalari ta'riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi $f^{(n)}(x)$ dan olingan hosila $f(x)$ funksiyaning $(n+1)$-tartibli hosilasi deyiladi va $f^{(n+1)}(x)$ kabi belgilanadi:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'.$$

Odatda, $f(x)$ funksiyaning

$$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \ldots\ldots$$

hosilalar uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Eslatma. $f(x)$ funksiyaning x nuqtada $(x \in (a,b))$, n –tartibli hosilasining mavjud bo'lishida bu funksiyaning shu nuqta atrofida $1,2,\ldots,(n-1)$ tartibli hosilalarining mavjud bo'lishi talab etiladi.

Funksiyaning yuqori tartibli, masalan n-tartibli $(n \geq 2)$ hosilasini topish uchun, hamma oldingi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo'ladi.

Ayrim funksiyalarining yuqori tartibli hosilalarini bir yo'la topish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi-bir sodda funksiyalarning n –tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y = x^\alpha \qquad (x > 0, \alpha \in R)$. Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y' = (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$
$$y'' = (y')' = (\alpha \cdot x^{\alpha-1})' = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2},$$
$$y''' = (y'')' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot x^{\alpha-3}.$$

Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun ushbu

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1) \cdot x^{\alpha-n}$$

formula o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatish qiyin emas.

Xususan, $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ funksiyaning n –tartibli hosilasi.

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

bo'ladi.

2. $y = \ln x \quad (x > o)$ funksiyaning n –tartibli hosilasini topamiz. Ravshanki,

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Unda yuqoridagi munosabatlarga ko'ra

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}, \quad (x > 0)$$

bo'ladi.

3. $y = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$ bo'lsa. Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y' = a^x \ln a,$$
$$y'' = (y')' = (a^x \cdot \ln a)' =$$
$$= a^x \cdot \ln a \cdot \ln a = a^x ln^2 a,$$
$$y''' = (y'')' = (a^x ln^2 a)' = a^x ln^3 a.$$

Bu munosabatlarga qarab $y = a^x$ funksiyaning n –tartibli hosilasi uchun ushbu,

$$y^{(n)} = a^x \cdot ln^n a$$

formulani yozamiz. Uning to'g'riligi matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi. Demak,

$$y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \cdot ln^n a$$

xususan, $(e^x)^{(n)} = e^x$ bo'ladi.

4. $y = \sin x$ bo'lsin. Ma'lumki,

$$y' = \cos x$$

bo'ladi. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

So'ng $y = \sin x$ funksiyaning keying tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2})$$
$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y^{(IV)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + 4 \cdot \tfrac{\pi}{2}).$$

Bu ifodadan esa $y = \sin x$ funksiyaning n-tartibli hosila uchun

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

formula kelib chiqadi. Uning to‘g‘riligi matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Demak,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}).$$

Xuddi shunga o‘xshash

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

bo‘ladi.

2°. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi

Aytaylik, moddiy nuqta M to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $S = f(t)$ qonun bilan harakatlansin, bunda t –vaqt, S esa o‘tilgan yo‘l.

Ma’lumki, bu harakat qonuning t vaqtdagi oniy tezligi

$$S'(t) = f'(t) = v(t)$$

bo‘ladi.

Aytaylik, t vaqtda moddiy nuqtaning tezligi $t + \Delta t$ vaqtdagi tezlik esa

$$v(t) + \Delta v$$

bo‘lsin, ya’ni moddiy nuqta tezligi Δt vaqt oralig‘ida Δv ga o‘zgarsin. Unda ushbu

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

nisbat Δt vaqt oralig‘dagi o‘rtacha tezlanishini ifodalaydi. Bu nisbatning $\Delta t \to 0$ dagi limiti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

t vaqtdagi moddiy nuqta harakatining tezlanishi deyiladi va u a bilan belgilanadi.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a.$$

Ravshanki

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Agar $v = S'(t)$ ekanligini e’tiborga olsak, unda

$$v'(t) = \left(S'(t)\right)' = S''(t)$$

bo‘lishini topamiz. Demak,

$$a = S''(t),$$

ya’ni $S = S(t)$ harakat qonunining ikkinchi tartibli hosilasi harakatning tezlanishini ifodalaydi. Bu ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosidir.

3°. Sodda qoidalar. Leybnits formulasi

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da aniqlangan bo‘lib, $x \in (a, b)$ nuqtada n –tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

1. $[c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = const,$

2. $[f(x) + g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),$

3. $[f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) +$
$+C_n^2 f^{(n-2)} \cdot g''(x) + \dots + C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \dots + f(x) \cdot g^{(n)}(x)$

bo‘ladi, bunda

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \dots \dots (n-k-1)}{k!}.$$

Yuqoridagi nazariyadagi qonun va qoidalarga ba’zi bir visollar ko’ramiz:

Masalan.

1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish. Dastlab hosilalar jadvalidan foydalanib birinchi tartibli hosilasini topamiz:

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Hosil bo‘lgan natijadan yana hosila olamiz:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)' = \left((x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$

2) $S(t)=2t^3-3t^2+5$ (m) qonun bilan to‘g‘ri chiziqli harakat qilayotgan jismning $t=2$ sek momentdagi tezlanishini toping.

Yechish. $S'(t)=6t^2-6t$, $S''(t)=12t-6$

$S''(2)=12\cdot 2-6=18$ Javob: 18 m/sek²

3) a) $y=0,5x^4$, $y'''=?$ b) $y=e^{kx}$, $y^{(n)}=?$ k-const

$y'=2x^3$, $y'=ke^{kx}$

$y''=6x$ $y''=k^2e^{kx}$

$y'''=12x$ $y^{(n)}=k^ne^{kx}$

4) $y=\sin x$ funksiyaning n- tartibli hosilasini toping.

$$y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

Yechish. $y''' = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$

....

$$y^{(n)} = \cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2}) = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

5) Oshkormas holda

$$x^2+y^2=64$$

tenglama bilan berilgan y funksiyaning y' va y'' hosilalarini toping.

Yechish. y o‘zgaruvchi x ning funksiyasi deb hisoblab, berilgan tenglamani ikkala qismini x bo‘yicha differensiallaymiz:

$$2x+2yy'=0.$$

Bundan $y'=-\frac{x}{y}$. Topilgan birinchi y' hosilani yana x bo‘yicha differensiallaymiz:

$$y''=(y')'=-\frac{y-xy'}{y^2}.$$

Endi $y'=-\frac{x}{y}$ ekanini hisobga olib,

$$y''=-\frac{y-x(-\frac{x}{y})}{y^2}$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $y''=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$ *yoki* $y''=-\frac{64}{y^3}$, chunki shartga ko‘ra $x^2+y^2=64$.

6) $y=tg^4 2x$ funksiya differensialini toping.

Yechish. Oldin berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$y'=8tg^3 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}=8tg^3 2x\sec^2 2x.$$

U holda

$$dy=8tg^3 2x\cdot\sec^2 2x dx.$$

7) $y=\sin 3x$, $dy=?$

$$dy=(\sin 3x)'dx=3\cos 3x dx$$

Oxirgi tenglikdan $y'=f'(x)=dy/dx$ ekanligi kelib chiqadi.

8) $y=x(\ln x-1)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini toping.

Yechish.Berilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$y' = \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x,\ y'' = \frac{1}{x}.$$

Demak,

$$dy = \ln x dx, d^2x = \frac{dx^2}{x}.$$

9) $y=\cos x$, $d^2y=?$

$dy=-\sin x dx$, $d^2y=-\cos x dx^2$

Agar $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$ bo'lsa d^2y qanday hisoblanishini ko'rib chiqamiz:

$dy= y' dx$, bunda $dx=\varphi'(t)dt$

$d^2y=d(dy)=d(y' dx)=d(y') dx+ y' d(dx)= y'' dxdx+ y' d^2x= y'' dx^2+ y'$ d^2x

10) $y=\cos x$, $x=\ln t$ bo'lsa, $d^2y=?$

Yechish. $dy= y' dx=-\frac{\sin x dt}{t}t=- \sin x dx$

$$d^2y = -\cos x\left(\frac{dt}{t}\right)^2 + \sin x \cdot \frac{dt^2}{t^2} = -\cos x dx^2 - \sin x d^2x, \text{ chunki } \frac{dt^2}{t^2} = -d^2x.$$

Auditoriyada tahlil qilinadigan misollar .

1 – 8. Hosila ta'rifidan foydalanib funksiyani hosilasini toping.

1. $f(x) = 5x+3$ JAVOBI: 5 ; 2. $f(x) = 5-4x+3x^2$ JAVOBI: $6x-4$;

3. $f = x^3 - x^2 + 2x$ JAVOBI: $3x^2-2x+2$; 4. $f(x) = x + \sqrt{x}$ JAVOBI: $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $g(x) = \sqrt{1+2x}$ JAVOBI: $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ 6. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ JAVOBI: $-\frac{2}{(x-1)^2}$

7. $g(x) = \frac{4-3x}{2+x}$ JAVOBI: $-\frac{10}{(2+x)^2}$; 8. $g(x) = \frac{1}{x^2}$ JAVOBI: $-\frac{2}{x^3}$;

Quyidagi funksiyalar uchun: a) Hosila ta'rifidan foydalanib funksiyani hosilasini toping. b) f va f' funksiyalarning grafigi yasalsin.

9. $f'(x) = 3x^2 - 1$ JAVOBI: $6x$; 10. $f(x) = \sqrt{x-1}$ JAVOBI: $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

11. $y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ hosila ta'rifidan foydalanib funksiyani hosilasini toping.

JAVOBI: $27x^2 - 4x + 3$

Jadval asosida funksiya hosilasi olinsin.

12. $f(x) = x^4$ JAVOBI: $4x^3$; 13. $f(x) = x^6$ JAVOBI: $6x^5$;

14. $y = x^4 - 6x^2 + 4$ JAVOBI: $4x^3 - 12x$; 15. $f(r) = r^{\frac{1}{4}}$ JAVOBI: $\frac{1}{4}r$;

16. $f(x) = 3x^4$ JAVOBI: $12x^3$; 17. $f(x) = x^{1000}$ JAVOBI: $1000x^{999}$

18. $F(x) = (6x^3)(7x^4)$ JAVOBI: $294x^6$; 19. $y = \frac{x^2+x-2}{x^3}$ JAVOBI: $\frac{6-2x-x^2}{x^4}$

20. $y = 1/x$ JAVOBI: $-\frac{1}{x^2}$ 21. $y = \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)}$ JAVOBI: $\frac{(1-3x^2)\sqrt{x}}{2x(1+x^2)^2}$

22. $g(s) = (s^2+s+1)(s^2+2)$ JAVOBI: $4s^3 + 3s^2 + 6s + 2$

23. $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}$ JAVOBI: $\frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2} + 6x + \frac{10}{x^6}$

24. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^8} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}$ JAVOBI: $10x - \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{12}{x^4} - 5\ln|x|$ $+5/x^2$

25. $y=7x+\frac{5}{x^2}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{6}{x}$ JAVOBI: $7-\frac{10}{x^4}-\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}+6\ln|x|$ $-6/x^2$

26. $y=3x^5-\frac{3}{x}\sqrt{x^3}+\frac{10}{x^2}$ JAVOBI: $15x^4-\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{20}{x^3}$

27. $y=x^2-8x+9$ parabolaga $(3;-6)$ nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin. JAVOBI: $y=-2x$

28. $y=\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)}$ funksiyaga $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin. JAVOBI: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

29. $y=x^3+2x-2$ egri chiziqqa abssissasi $x_o=1$ bo'lgan nuqtadan o'tkazilgan urinma va normalning tenglamasi tuzilsin. JAVOBI: $y=5x-4; y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$

30. $y=3tg2x+1$ egri chiziqqa abssissasi $x=\frac{\pi}{2}$ bo'lgan nuqtadan o'tkazilgan normalning tenglamasini yozing. JAVOBI: $y=-\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{12}+1$

31. Moddiy nuqtaning t vaqt ichida bosib o'tgan masofasi $S=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+2t+1$ ga teng. Berilgan nuqtaning tezligini toping. JAVOBI: $V=t^3-t^2+2$

32. *OY* o'qi bo'yicha ikkita moddiy nuqta $x_1=\frac{t^2}{3}-4$ va $x_2=\frac{7}{2}t^2-12t+3$ qonun bo'yicha harakatlanadi. Qanday vaqtdan keyin ularning tezligi teng bo'ladi. JAVOBI: $t=2$

33. Moddiy nuqta $S=t^4-3t^2+2t-4$ qonun bo'yicha harakatlanadi. Nuqta harakatining *t=2sek.* dagi tezligini toping. JAVOBI: 22

34. Moddiy nuqta $S=4t^3-2t+11$ qonun bo'yicha harakatlanadi. Necha sekunddan keyin uning tezligi *190 m/c* ga teng bo'ladi. JAVOBI: $t=16\,s$

Murakkab funksiyaning hosilasi topilsin.

35. $y=\frac{2\lg(4x+5)}{(x+6)}$ 36. JAVOBI: $\frac{8(x+6)-2(4x+5)\ln(4x+5)}{(4x+5)(x+6)^2}$

$y=\frac{\log_5(3x-7)}{ctg7x^3}$ JAVOBI: $\frac{3\cos 7x^3+42x^2\ln(4x+5)}{(3x-7)\ln 5\cos^2 7x^3 ctg^2 7x^3}$

37. $f(x)=\sin x$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=\cos x$ ekanligi isbotlansin.

38. $[0;8]$ kesmada $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ funksiya uchun Roll teoremasi bajariladimi.

JAVOBI: Bajariladi.

39. Roll teoremasini $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga $[-1,1]$ kesmada tadbiq qilish mumkinmi?

JAVOBI: Tatbiq qilib bo'lmaydi, chunki *x=o* bo'lganda hosila mavjud emas.

40. $f(x)=x^2-6x+100$ funksiya uchun $[1,5]$ oraliqda Roll teoremasi o'rinlimi?

JAVOBI: O'rinli

41. $[-1;0]$ va $[0;1]$ kesmada $f(x)=x-x^3$ funksiya uchun Roll teoremasi o'rinlimi?

x ning qanday qiymatida o'rinli bo'ladi?

JAVOBI: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

42. $f(x)=\sqrt[3]{(x-8)^2}$ funksiya uchun $[0;10]$ kesmada Logranj teoremasi o'rinlimi?

JAVOBI: O'rinli emas.

43. $f(x)=x^3$ va $\varphi(x)=x^2$ funksiyalar uchun Koshi formulasini yoying va c nuqtani toping.

Parametrik ko'rinishdagi funksiyaning birinchi tartibli hosilasi topilsin.

44. $\begin{cases} y=t^3+t^2-1 \\ x=t^2+t+1 \end{cases}$ JAVOBI: $\frac{3t^2+2t}{2t+1}$ 45. $\begin{cases} y=2\sin^3 t \\ x=2\cos^3 t \end{cases}$ JAVOBI: $-tgt$

46. $\begin{cases} y=t^3+t^2+1 \\ x=1/t \end{cases}$ JAVOBI: $-t^3(3t+2)$ 47. $\begin{cases} y=t^3+t \\ x=t^2-2t \end{cases}$ JAVOBI: $\frac{3t^2+1}{2t-2}$

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

Hosila ta'rifidan foydalanib funksiyani hosilasini toping

4.1. $y=2x^3+5x^2-7x-4$

4.3. $y=\sqrt{x}$

45. $y=\frac{1}{x^2}$

4.7. $y=x^3$

4.2. $y=x^4$

4.4. $y=\sqrt{x}$

4.6. $y=x^2+4x$

4.8. $y=x^2-2x+5$

Funksiyalarning urinma tenglamasi va normal tenglamasini tuzing :

4.9. $y=x^3-5x^2+7x-2$ egri chiziqning $(1;1)$ nuqtasida o'tkazilgan normalning tenglamasini yozing.

4.10. $y=x^2-6x+2$ egri chiziqqa abssissasi *x=2* nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.11. $y=\frac{x^2}{4}-x+5$ egri chiziqqa abssissasi x=4 nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

4.12. $y=\frac{x^4}{4}-27x+60$ egri chiziqqa abssissasi *x=2* nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

4.13. $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$ egri chiziqqa abssissasi *x=1* nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.14. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$ egri chiziqqa *M(-9;-8)* nuqtada o'tkazilgan urinmaning tenglamasi tuzilsin.

4.15. $y=\frac{8}{4+x^2}$ lokonga (zulfga) *x=2* nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.($y=-\frac{x}{2}+2$)

4.16. $y=\frac{x^3}{3}$ egri chiziqqa abssissasi *x*=-2 nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.17. $y^2=x^3$ egri chiziqqa abssissasi *x=0 va x=1* nuqtalarda o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.18. $y=\sin x$ sinusoidaga $x=\pi$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.19. $y=\frac{4}{x}$ giperbolaga *x=1 va x=-4* nuqtalarda o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.20. $y=4x-x^2$ funksiyaga *Ox* o'qi bilan kesishgan nuqtalarida o'tkazilgan urinmalarning tenglamasi tuzilsin.

4.21. $y^2=4-x$ funksiyaga *Oy* o'qi bilan kesishgan nuqtalarida o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.22. $y=x^2-4x+5$ parabolaga *Oy* o'qi bilan kesishgan nuqtalarida o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.23. $y=\frac{x^2}{4}$ parabolaga abssissasi *x=2* nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

4.24. $y=x^3-5x^2+7x-2$ egri chiziqning $(1;1)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

4.25. $y=x^2-6x+2$ egri chiziqqa abssissasi $x=2$ nuqtada o'tkazilgan normal tenglamasi tuzilsin.

4.26. $y=\frac{x^2}{4}-x+5$ egri chiziqqa abssissasi $x=4$ nuqtada o'tkazilgan normal tenglamasini yozing.

4.27. $y=\frac{x^4}{4}-27x+60$ egri chiziqqa abssissasi $x=2$ nuqtada o'tkazilgan normal tenglamasini yozing.

4.28. $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$ egri chiziqqa abssissasi $x=1$ nuqtada o'tkazilgan normal tenglamasi tuzilsin.

Funksiya hosilasini jadval asosida toping.

4.29. $y=2x^3-5x^2+7x+4$; 4.30. $y=x^3 arctgx$; 4.31. $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$;

4.32. $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; 4.33. $y=\frac{\arcsin x}{x}$; 4.34. $y=\frac{1}{2}x^3e^x$;

4.35. $y=tg^6 x$ 9. $y=\cos^2 x$; 4.36. $y=\sin(2x+3)$; 4.37. $y=\lg\ln x$;

4.38. $y=\sin^3\frac{x}{3}$; 4.39. $y=\ln(x^2+5)$; 4.40. $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$;

4.41. $y=\frac{7}{x^3}$; 4.42. $y=\ln(2x^3+3x^2)$; 4.43. $y=\sqrt{1-3x^2}$;

4.44. $y=2x^3-1$ egri chiziqning qaysi nuqtasidan o'tkazilgan urinma o'qi bilan $\frac{\pi}{4}$ burchak tashkil etishini aniqlang.

4.45. Moddiy nuqta $f(t)=t^2-6t-5$ qonun bo'yicha harakatlanadi. Nuqta harakatining $t=2cek$. dagi tezligini toping.

4.46. Moddiy nuqta $f(t)=2t^2-t+1$ qonun bo'yicha harakatlanadi. Nuqta harakatining $t=2cek$. dagi tezligini toping.

Teskari funksiyalarning hosilalasini toping.

4.47. $y=(x-4)^5 arcctg 3x^2$

4.49. $y=\frac{\arcsin^2 4x}{arctg(5x-3)}$

4.51. $y=arctg^2 5x(\ln(x-4))$

4.53. $y=(x-3)^4\arccos 5x^3$

4.55. $y=\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{x+5}}$

4.57. $y=(x-2)^4\arcsin 5x^4$

4.59. $y=\frac{8arctg(2x+3)}{(x+1)^3}$

4.61. $y=\frac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$

4.63. $y=\frac{7arctg(4x+1)}{(x-4)^2}$

4.65. $y=5^{-x^2}\arccos 5x$

4.67. $y=\frac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$

4.50. $y=4(x-7)^6\arcsin 3x^5$

4.52. $y=(x+5)^2\arccos^3 5x$

4.54. $y=\arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$

4.56. $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}$

4.58. $y=arktg\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

4.60. $y=arctg\frac{1-\sqrt{x}}{x}$

4.62. $y=\arcsin\frac{2x^3 1+x^6}{}$

4.64. $y=xarcccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$

4.66. $y = arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

4.68. $y = \arcsin\sqrt{1-0{,}2x^2}$

Murakkab funksiya hosilasini toping. 4.69. $y = 3^{x^2}$

4.71. $y = x^3 tg^3 x$

4.73. $y = x^2 \sin 2x$

4.75. $y = x^{\frac{2}{x}}$

4.77. $y = x^{e^x}$

4.70. $y == x^{\arcsin x}$

4.72. $y = (\cos x)^{\cos x}$

4.74. $y = (\ln x)^x$

4.76. $y = 2x^{\sqrt{x}}$

4.78. $y = (\cos x)^{x^2}$

4.79. $y = (\sin x)^{\cos x}$

4.81. $y = x^{\arccos x}$

4.83. $y = x^{tgx}$

4.85. $y = \left(\sqrt{3x+2}\right)^x$

4.87. $y = (\cos 5x)^{arctgx}$

4.89. $y = (tg3x)^{x^2}$

4.91. $y = (ctg5x)^{x^3-1}$

4.93. $y = (\ln(x+7))^{ctg2x}$

4.95. $y = (ctg(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$

4.80. $y = (\cos 7x)^{x^2}$

482. $y = x^{x^2}$

4.84. $y = (\ln x)^x$

4.86. $y = (\cos x\ )^{x^2}$

4.88. $y = \left(\sqrt{5x+3}\right)^{4x}$

4.90. $y = (\sin 5x)^{arctgx}$

4.92. $y = (tg5x)^{\sqrt{x+1}}$

4.94. $y = \left(ctgx^2\right)^x$

4.96. $y = (tgx)^{\sqrt{x+2}}$

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi olinsin.

4.97. $\begin{cases} x = \ln\cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

4.99. $\begin{cases} x = x - \ell^{3t} \\ y = \frac{1}{3}\left(\ell^{\ 3t}\right) \end{cases}$

4.101. $\begin{cases} x = \frac{1-t}{t^2} \\ y = \frac{1+t}{t^2} \end{cases}$

4.103. $\begin{cases} x = \sin^3 4t \\ y = \frac{1}{2}\cos^3 4t \end{cases}$

4.105. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t \\ y = \ln\left(t^2+1\right) \end{cases}$

4.98. $\begin{cases} x = tgt \\ y = \frac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

4.100. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

4.102. $\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{1+\sin t} \\ y = \dfrac{\cos t}{1+\sin t} \end{cases}$

4.104. $\begin{cases} x = 4 - \ell^{-2t} \\ y = \dfrac{3}{\ell^{2t}+1} \end{cases}$

4.106. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

4.107. $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = t \cos t \end{cases}$

4.109. $\begin{cases} x = \cos \dfrac{t}{2} \\ y = t - \sin t \end{cases}$

4.111. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

4.113. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t \end{cases}$

4.115. $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 3t \end{cases}$

4.117. $\begin{cases} x = \sin \dfrac{t}{2} \\ y = \cos t \end{cases}$

4.119. $\begin{cases} x = \ell^{2t} \\ y = \cos t \end{cases}$

4.121. $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \ell^{t^3} \end{cases}$ 1

4.123. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

4.108. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

4.110. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

4.112. $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 8t + 1 \end{cases}$

4.114. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + t \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$

4116. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

4.118. $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$

4.120. $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

4.122. $\left\{ x = \dfrac{2-t}{2+t^2} \right.$

4.124. $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$ Oshkormas funksiyaning birinchi tartibli hosilasini toping.4.125. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 4.126. $arctgy = 4x + 5y$

4.127. $y^2 - x = \cos x$ 4.128. $3x + \sin y = 5y$

4.129. $tgy = 3x + 5y$ 4.130. $xy = ctgy$

4.131. $y = \ell^y + 4x$ 4.132. $\ln y - \dfrac{y}{x} = 7$

4.133. $\ell^y = 4x - 7y$ 4.134. $4\sin(x+y) = x$

4.135. $\sin y = 7x + 3y$ 4.136. $y^2 + x^2 = \sin y$

4.137. $tgy = 4y - 5x$ 4.138. $y = 7x - ctgy$

4.139. $xy = 6 + \cos y$

4.140. $3y = 7 + xy^3$

Oshkormas va parametric ko‘rinishdagi funksiyalardan ikkinchi tartibli hosila olinsin.

4.141. $x^3 + 3xy + 3y = 7$; 4.142. $e^{y-1} = \cos x$; 4.143. $\cos^2 x + \cos^2 y = \frac{2}{3}$;

4.144. $x^6 + y^5 = 6x$; 4.145. $xy = y^5$; 4.146. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^4 t \end{cases}$;

4.147. $\begin{cases} x = e^{\sin t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$; 4.148. $\begin{cases} \sqrt[3]{(t+1)} \\ y = \sqrt{t+1} \end{cases}$; 4.149. $\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = t - \ln t \end{cases}$;

Funksiyalarning birinchi tartibli differensialini toping4.150. $f(x) = 5x - 1$

4.152. $f(x) = -4x^{10}$

4.154. $f(x) = x^2 + 3x - 4$

4.155. $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$

4.157. $v(t) = 6t^{-9}$

4.151. $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

4.153. $r(t) = 5t^{-\frac{3}{5}}$

4.156. $y = 4\pi^2$

4.158. $r(x) = \frac{\sqrt{10}}{x^7}$ Ikkinchi tartibli differensiali topilsin.

4.159. $y = (x^2 + 4x + 6)^2$

4.160. $y = \cos(tgx)$

4.161. $y = \sqrt{\sin x}$

4.162. $y = tg3x$

5-BOB
FUNKSIYA HOSILASINING TADBIQLARI

1-§. Funksiyaning monotonlik oralig‘ini aniqlash

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

Ma’lumki, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi), $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda kamayuvchi (qat’iy kamayuvchi) deyiladi.

Odatda $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lsa,

$f(x)$ funksiya (a, b) intervalda monoton, (a, b) interval esa $f(x)$ funksiyaning monotonlik intervali deyiladi.

Endi funksiyaning hosilasidan foydalanib, uning berilgan intervalda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lishini topamiz.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da*

$$f'(x) \geq 0$$

bo‘lsa, u holda funksiya (a, b) intervalda o‘suvchi bo‘ladi.

◅ Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib,

$$f'(x) \geq 0$$

bo‘lsin.

(a, b) intervalda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo‘lsin deylik. Ravshanki, $[x_1, x_2]$ segment (a, b) intervalga tegishli bo‘ladi:

$$[x_1, x_2] \in (a, b).$$

Bu $[x_1, x_2]$ segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Unda shu teoremaga ko‘ra shunday c nuqta $(x_1 < c < x_2)$ topiladiki,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad \text{ya’ni}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

bo‘ladi. Shartga ko‘ra

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{va} \quad x_2 - x_1 > 0,$$

unda keying tenglikdan

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0, \text{ ya’ni } f(x_1) \leq f(x_2)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda o'suvchi bo'lishini bildiradi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a,b) intervalda o'suvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x) \ge 0$ bo'ladi.

$\lhd$ (a,b) intervalda ixtiyoriy x nuqtani olib, unga shunday Δx orttirma beramizki, $x + \Delta x$ nuqta ham shu (a,b) intervalga tegishli bo'lsin. Shartga ko'ra, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi. Unda $\Delta x > 0$ bo'lganda $f(x) \le f(x + \Delta x)$ bo'lib,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$$

bo'ladi. Demak,

$$\Delta x > 0 \text{ da } f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$$
$$\Delta x < 0 \text{ da } f(x + \Delta x) - f(x) \le 0.$$

Ikkala hol uchun ham

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0$$

bo'ladi. Hosila ta'rifiga binoan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Keyingi ikki munosabatdan (a,b) intervalda $f'(x) \ge 0$ bo'lishi kelib chiqadi.$\rhd$

Natijada (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda o'suvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in (a,b)$ da

$$f'(x) \ge 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqorida keltirilgan teoremalarga o'xshash quyidagi teoremalar ham isbotlanadi.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a,b)$ da*

$$f'(x) \le 0$$

bo'lsa u holda funksiya (a,b) da kamayuvchi bo'ladi.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a,b) intervalda kamayuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in (a,b)$ nuqtada*

$$f'(x) \le 0$$

bo'ladi.

Natijada, (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda kamayuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in (a,b)$ da

$$f'(x) \le 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

2-§. Funksiyaning ekstremumlari

1°.Funksiya ekstremumlari tushunchalari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan $x_0 \in (a,b)$ va shu nuqtaning atrofi

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) =$$
$$= \{x \in R:\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

$(\delta > 0)$ ham (a,b) intervalga tegishli

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset (a,b)$$

bo'lsin.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ bilan shu funksiyaning

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

atrofdagi qiymatlarini solishtirish funksiya ekstremumi tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ uchun*

$$f(x) \le f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga erishadi deyiladi, x_0 funksiyaning maksimum nuqtasi, $f(x_0)$ esa funksiyaning maksimum qiymati deyiladi.

Funksiyaning maksimum qiymati

$$max\{f(x)\}$$

kabi belgilanadi, ya'ni

$$f(x_0) = max\{f(x)\}$$

Ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ uchun*

$$f(x) \ge f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga erishadi deyiladi, x_0 funksiyaning minimum nuqtasi, $f(x_0)$ esa funksiyaning minimum qiymati deyiladi. Funksiyaning minimum qiymati

$$min\{f(x)\}$$

kabi belgilanadi, ya'ni

$$f(x_0) = min\{f(x)\}.$$

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning ekstremumlari deyiladi.

Eslatma $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir nechta maksimum va minimumlarga ega bo'lishi mumkin.

2°. Funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa,u holda*

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi.

◁ $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada maksimumga erishib, $f'(x_0)$ mavjud bo'lsin. U holda ta'rifga binoan ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in (a,b)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0)$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, bu holda, $f(x_0)$ qaralayorgan funksiyaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dagi eng katta qiymati bo'ladi. Unda ma'lum Ferma teoremasiga binoan

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi.▷

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada minimumga erishib, $f'(x_0)$ mavjud bo'lganda ham

$$f'(x_0) = 0$$

bo'lishi isbotlanadi.

Eslatma. *$f(x)$ funksiyaning biror $x^* \in (a,b)$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lib, $f(x^*) = 0$ bo'lishidan, uning x^* nuqtada ekstremumiga erishishi har doim kelib chiqavermaydi.*

Masalan,

$$f(x) = x^3$$

funksiya uchun

$$f'(x) = 3x^2$$

va $x = 0$ nuqtada

$$f'(x_0) = 0$$

bo'lsa ham bu funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi (ma'lumki, funksiya qat'iy o'suvchi).

Demak, yuqorida keltirilgan teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Eslatma. *Hosilaga ega bo'lmagan nuqtada ham funksiya ekstremumga erishishi mumkin.* Masalan,

$$f(x) = |x|$$

funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo u shu nuqtada minimumga erishadi.

Odatda funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyasining statsionar nuqtalari deyiladi.

$f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalar:

1. Funksiyaning statsionar nuqtalar.
2. Funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar.
3.

3°.Funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, uning har bir nuqtasida hosilaga ega va $x_0 \in (a,b)$ nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng:

$$f'(x_0) = 0.$$

x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofini olamizki,

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$$

bo'lsin.

a) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) > 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) < 0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani "o'sishida" ishorasini "+" dan "−" ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning $(x_0 - \delta, x_0)$ da hosilasi musbat $f'(x) > 0$.

Demak, funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ da o'suvchi. Unda

$$(x_0 - \delta, x_0) \text{ da}$$

$$f(x_0) \geq f(x)$$

tengsizlik bajariladi. $f(x)$ funksiyaning hosilasi $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da manfiy $f'(x) < 0$. Demak, funksiya $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da kamayuvchi. Unda

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } f(x_0) \geq f(x)$$

tengsizlik bajariladi. Demak, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da

$$f(x) \leq f(x_0)$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

b) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) < 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) > 0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani "o'sishda" ishorasini "$-$" dan "$+$" ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning hosilasi $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) < 0$. Demak, funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ da kamayuvchi.

Unda $(x_0 - \delta, x_0)$ da

$$f(x) \geq f(x_0)$$

tengsizlik bajariladi.

$f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasi $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) > 0$.

Demak, funksiya $(x_0, x_0 + \delta)$ da o'suvchi. Unda $[x_0, x_0 + \delta]$ da

$$f(x) \geq f(x_0)$$

tenglik bajariladi. Demak, ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da

$$f(x) \geq f(x_0)$$

bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishini bildiradi.

c) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) > 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) > 0$, yoki ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) < 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) < 0$ bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan "o'tishda" ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumiga erishmaydi. Chunki bu holda funksiya $(x_0$-$\delta, x_0 + \delta)$ da o'suvchi yoki kamayuvchi bo'ladi.

Natijada $f(x)$ funksiya ekstremumini topishda quyidagi qoidaga kelamiz:

1) Funksiya hosilasi $f'(x)$ topiladi.

2) $f'(x) = 0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamaning yechimlaridan biri x_0 bo'lsin $f'(x_0) = 0$.

3) x_0 nuqtaning chap atrofi $(x_0 - \delta, x_0)$ va o'ng atrofi $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x)$ hosilaning ishorasi aniqlanadi va yuqorida keltirilgan a) va b) tasdiqlar tadbiq etilib ekstremum topiladi.

$f'(x_0)$	$f'(x_0 - \delta)$	$f'(x_0 + \delta)$	$f(x_0)$

0 yoki mavjud emas	+ -	- +	Maksimum Minimum
0 yoki mavjud emas	+ -	+ -	Ekstremum mavjud emas

4°. Funksiya ekstremumini topishda yuqori tartibli hosilalardan foydalanish. Yuqorida keltirilgan ekstremumning yetarli sharti sanaladigan nuqtaning o'ng va chap tomonlaridagi nuqtalarida funksiya hosilasi $f(x)$ ning ishorasini aniqlash bilan bog'liq. Ko'pincha x_0 nuqtaning atrofida $f'(x)$ ning ishorasini aniqlash qiyin bo'ladi.

Qaralayotgan funksiya x_0 nuqtada yuqori tartibli hosilalarga ega bo'lsa, hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatining ishorasiga qarab funksiyaning ekstremumini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x \in (a, b)$ bo'lsin.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0$-$\delta, x_0 + \delta)$ atrofida $((x_0$-$\delta, x_0 + \delta) \subset (a, b))$ birinchi va ikkinchi tartibli $f'(x), f''(x)$ hosilalarga ega bo'lib,*

1) $f'(x_0) = 0$

2) x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ uzluksiz va $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsin, u holda

a) $f''(x_0) > 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

b) $f''(x_0) < 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $((x_0$-$\delta, x_0 + \delta) \subset (a, b))$ n-tartibli $f^{(n)}(x)$ hosilaga ega bo'lib,*

1) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lganda, n –juft son bo'lsa funksiya ekstremumga ega bo'ladi va $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga, $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

2) n —toq son bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

5°. Funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va u shu segmentda differensiallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'ladi. Unda ma'lum teoremaga ko'ra funksiya $[a,b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni $[a,b]$ segmentning shunday qiymatlari topiladiki, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari eng katta (eng kichik) bo'ladi.

Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi. Funksiyaning barcha maksimum qiymatlari to'plami

$$\{max f(x)\}$$

bo'lsin.

2) Funksiyaning $[a,b]$ segmenti chegaralaridagi, ya'ni $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$ va $f(b)$ hisoblanadi.

So'ngra

$$\{max f(x)\}$$

to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida (orasida) eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta qiymati bo'ladi.

Shunga o'xshash funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng kichik qiymati topiladi.

6°.Hosilaning funksiya limitini topishga tadbiqlari. Lopital qoidalari

Biz oldingi boblarda, ma'lum shartlar bajarilganda funksiyalarning limitini hisoblashni bayon etdik.

Bazi hollarda bunday shartlar bajarilmaganda, ya'ni.

1) $x \to x_0$ da $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi);

2) $x \to x_0$ da $f(x) = +\infty$, $g(x) = +\infty$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi) ni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko'ra hisoblash mumkin bo'ladi.

Bunday usul bilan funksiya limitini toppish Lopital qoidalari deyiladi.

1°. $x \to x_0$ da $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti

Teorema. *Aytaylik, $f(x)$, va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:*

1).

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

2). Ixtiyoriy $x \in (a,b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud.

3). Ixtiyoriy $x \in (a,b)$ da $g'(x) \neq 0$.

4). Ushbu

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \in R)$$

mavjud. U holda

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

bo'ladi.

$f(x)$ hamda $g(x)$ funksiyalarning $x=a$ nuqtadagi qiymati nolga teng, ya'ni

$$f(a) = 0, g(a) = 0$$

deb olsak, natijada

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = f(a),$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 = g(a)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz bo'ladi. Ixtiyoriy $x \in (a,b)$ nuqta olib, $[a,x]$ segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni qaraymiz. Koshi teoremasiga ko'ra a bilan x orasida shunday $c(a < c < x)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki $x \to a$ da $x \to c$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A.$$

2°. $x\to x_0$ da $(x)\to\infty, g(x)\to\infty$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti

Teorema. *Aytaylik, $f(x)$, va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib,quyidagi shartlarni bajarsin:*

1) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty,$

2) *Ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da , $f'(x)$, va $g'(x)$ hosilalar mavjud va* $g'(x)\neq 0.$

3) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$

U holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

bo'ladi.

Yuqoridagi nazariyalar asosida ba'zi bir misollarni ko'rib chiqamiz:

Misollar. 1) $y=2x^2-\ln x$ funksiyaning monotonlik intervallari va kritik nuqtalarini toping.

Yechish. Berilgan funksiya *x>0* da aniqlangan. Uning hosilasini topamiz:

$$y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$$

$$y'=0, 4x^2-1=0, \textit{ bundan } x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$$

$x_2=-\frac{1}{2}$ kritik nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmagani uchun uni tashlab yuboramiz. Topilgan $x_1=\frac{1}{2}$ kritik nuqta funksiyaning aniqlanish sohasini $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ *va* $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ intervallarga bo'ladi. Bu intervallarda y' hosilaning ishorasini aniqlaymiz.

a) $\left(o;\frac{1}{2}\right)$ *da* $y'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}<0$ *b)* $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ *da* $y'(1)=3>0$

Bu esa birinchi intervalda funksiya kamayuvchi, ikkinchi intervalda o'suvchi ekanini bildiradi.

2) $y=(x+2)^3$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz.

$$y'=3(x+2)^3, \quad y'=0, \ x_1=-2$$

$x_1=-2$ nuqtada berilgan funksiya ekstremumga ega emas, chunki *x*>-*2* da $y=(x+2)^3>0, x<-2 \ da \ y=(x+2)^3<o, x=-2 \ da \ y=(x+2)^3=0$

Demak, funksiyaning hosilasini nolga aylantiradigan nuqtaning mavjud bo'lishi funksiyaning ekstremumi mavjud bo'ladi, deyish noto'g'ri ekan.

3) $y=x^2$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

Yechish. y' hosilani topamiz: $y'=2x$. $x<0$ da $y'<0$ va funksiya $(-\infty;0)$ intervalda kamayadi; $x>0$ da $y'>0$ va funksiya $(0;+\infty)$ intervalda o'sadi;

4) $y=4x+\sin x$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

Yechish. y' hosilani topamiz: $y'=4+\cos x$. Barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ uchun $y'>0$ bo'lganligi sababli berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda o'sadi.

5) $y=1-\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaning hosilasi $y'=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ *x*=0 nuqtada cheksizlikka aylanadi. Funksiya *x*=0 nuqtada maksimumga ega.

6). $y=2x^3-9x^2+12x+1$ funksiyaning monotonlik intervallarini va ekstremumini toping.

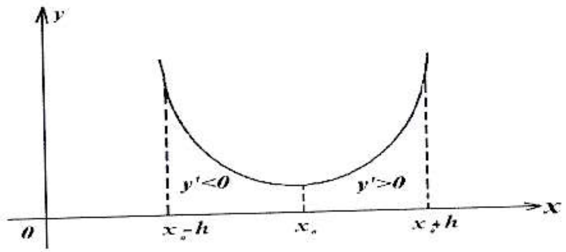
Yechish. **a)** Berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi.

b) Funksiyaning hosilasini topamiz: $y'=6x^2-18x+12$.

v) Kritik nuqtalarini topamiz: $6x^2-18x+12=0$; $x^2-3x+2=0$;

$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$; $x_1=1$, $x_2=2$-kritik nuqtalar.

$y'=6(x-1)(x-2)$ hosilaning ishorasini intervallar usulidan foydalanib tekshiramiz.



2-chizma

Demak, $(-\infty;1)$ va $(2;+\infty)$ intervallarda $y'>0$ bo'lgani uchun bu intervallarda funksiya o'sadi, $(1;2)$ intervalda $y'<0$ bo'lgani uchun bu intervalda funksiya kamayadi. x=1 kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirganligi uchun x=1 kritik nuqtada funksiya maksimumga ega. x=2 kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirganligi uchun bu kritik nuqtada funksiya minimumga ega (2-chizma).

$$y_{max}=y(1)=6,\ y_{min}=y(2)=5.$$

7) $f(x)=2x^3-21x^2+72x+6$ funksiyaning $[2;5]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. a) Funksiyaning $[2;5]$ kesmadagi kritik nuqtalarini topamiz va bu nuqta-larda $f'(x)$ hosilani hisoblaymiz. $f'(x)=6x^2-42x+72$. $f'(x)=0$ tenglamani yechamiz:

$6x^2-42x+72=0$; $x^2-7x+12=0$; $x_1=3$, $x_2=4$-kritik nuqtalar. Kritik nuqta-larning har ikkalasi berilgan kesmaga tegishli. Funksiyaning $x_1=3$ va $x_2=4$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(3)=2\cdot3^3-21\cdot3^2+72\cdot3+6=87,\ f(4)=2\cdot4^3-21\cdot4^2+72\cdot4+6=80.$$

b). Funksiyaning $[2;5]$ kesmaning oxirlari $x=2$ va $x=5$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(2)=2\cdot2^3-21\cdot2^2+72\cdot2+6=82,\ f(5)=2\cdot5^3-21\cdot5^2+72\cdot5+6=91.$$

Topilgan qiymatlar 82, 87, 80, 91 dan eng kichigi 80 berilgan funksiyaning $[2;5]$ kesmadagi eng kichik qiymati, ulardan eng kattasi 91 uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

Endi 2-tartibli hosila yordamida ekstremumini topishga misol keltiramiz:

8) $y=x+2\cos x$ funksiyaning $[0;2\pi]$ kesmadagi ekstremumini toping.

Yechish. a) Birinchi tartibli hosilani topamiz: $y'=1-2\sin x$.

b). $(0;2\pi)$ intervalga tegishli kritik nuqtalarni topamiz: $1-2\sin x=0$; $\sin x=\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$.

v) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y''=-2\cos x$.

g) Ikkinchi tartibli hosilaning $x_1=\frac{\pi}{6}$ ва $x_2=\frac{5\pi}{6}$ kritik nuqtalardagi ishoralarini aniqlaymiz.

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0,\ f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}>0$$

Demak berilgan funksiya $x_1=\frac{\pi}{6}$ nuqtada maksimumga va $x_2=\frac{5\pi}{6}$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

$$y_{max}=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3{,}14}{6}+\sqrt{3}\approx2{,}23,$$

$$y_{min}=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+2\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx1{,}78.$$

9) $f(x)=x^4$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan va differensiallanuvchi.

a) Birinchi tartibli hosilani topamiz: $f'(x)=4x^3$.

b) Hosilani nolga tenglashtirib uning ildizlarini topamiz: $f'(x)=0$; $4x^3=0$; $x=0$-kritik nuqta.

v) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $f''(x)=12x^2$.

Kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila nolga teng, ya'ni $f''(0)=12\cdot0^2=0$. Demak, qaralayotgan hol uchun ikkinchi yetarlilik sharti bajarilmaydi. Birinchi yetarlilik shartiga murojaat etib topamiz: $x<0$ da $f'(x)<0$ va $x>0$ da $f'(x)>0$. Shunday qilib, $x=0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirganligi sababli $x=0$ nuqtada funksiya minimumga ega.

Demak, kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lib u noldan farqli bo'lgandagina ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanish mumkin ekan. Agar kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanib bo'lmaydi.

Shunday qilib, differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning ekstremumini quyidagi sxema asosida izlash maqsadga muvofiqdir.

1. Funksiyaning hosilasi $f'(x)$ topiladi.
2. Kritik nuqtalar topiladi:
 a) $f'(x)=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari topiladi.
 b) x ning $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmagan yoki cheksizlikka aylanadigan qiymatlari topiladi.
3. Yetarlilik shartlarining birortasidan foydalanib topilgan kritik nuqtalarning har birida funksiyaning maksimum yoki minimumga ega ekanligi yoki ekstremumning mavjud emasligi aniqlanadi.
4. $f(x)$ funksiyaning ekstremumi mavjud kritik nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblab uning ekstremumi topiladi.

3-§. Ekstremumlar nazariyasining masalalar yechishga tadbiqi.

Ekstremumlar nazariyasi yordamida geometriya, mexanika va hokazolarga doir ko'pgina masalalar yechiladi. Shunday masalalarning ba'zilarini yechish usuli bilan tanishamiz.

1-Masala. Uzunligi 120 metrlik panjara bilan bir tomondan uy bilan chegaralangan eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak

shaklidagi maydon o'rab olinishi kerak. To'g'ri to'rtburchakli maydonning o'lchovlari (bo'yi va eni) aniqlansin.

Yechish. Maydonning uzunligini x, enini y, yuzini S orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzini topish formulasiga ko'ra maydonning yuzi $S=xy$ bo'ladi.

S yuz hozircha ikkita erkli o'zgaruvchilar x va y ga bog'liq. Ulardan birortasini ikkinchisi orqali ifodalash uchun masalaning shartidan foydalanamiz. Shartga ko'ra maydonning bir tomoni tayyor uy (devor) bilan, qolgan uch tomoni uzunligi $120m$ panjara bilan chegaralanishi lozim, ya'ni $x+2y=120$. Bundan $x=120-2y$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini S yuzni topish formulasiga qo'yamiz. U holda $S=(120-2y)y=120y-2y^2$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi hosil bo'ladi. Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(y)=120-4y,\ S''(y)=(120-4y)'=-4,$$

$S'(y)=0$ yoki $120-4y=0$ dan $4y=120;\ y=30$ yagona kritik nuqta kelib chiqadi.

$S''(30)=-4<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartga ko'ra x=30 qiymatda funksiya maksimumga ega. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib bir tomoni uy bilan qolgan uch tomoni 120 m uzunlikdagi panjara bilan chegaralangan to'rtburchak shaklidagi maydonlar orasida eni y=30*м*, bo'yi (uzunligi) $x=120-2\cdot30=60m$ bo'lgan maydon eng katta $S=60\cdot30m^2=1800m^2$ yuzga ega bo'lar ekan.

2-Masala. 180 soni ko'paytmasi eng katta va ulardan ikkitasi $1:2$ nisbatda bo'lgan uchta qo'shiluvchiga ajratilsin.

Yechish. Faraz qilaylik $180=x+y+z$ ko'rinishda tasvirlansin. Shartga ko'ra x,y,z sonlardan ikkitasi, masalan x,y $1:2$ nisbatda, ya'ni $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, $y=2x$ bo'lishi lozim. U holda $180=x+2x+z$ yoki $180=3x+z$, $z=180-3x$ hosil bo'ladi. Demak $180=x+2x+(180-3x)$ ko'rinishdagi uchta x, $2x$, $180-3x$ qo'shiluvchilarga ajratildi. Shularning ko'paytmasi $y=x\cdot2x\cdot(180-3x)=360x^2-6x^3$ ifodaning eng katta qiymatini topishimiz kerak.

$y'(x)=720x-18x^2$; $y''(x)=720-36x$; $y'(x)=0$ yoki $720x-18x^2=0$; dan $x\cdot(720-18x)=0$; $x\neq 0$ bo'lgani uchun $720-18x=0$; $x=\frac{720}{18}=40$ kritik qiymat kelib chiqadi. $y''(40)=720-36\cdot 40<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan x=40 qiymatda $y=x\cdot 2x\cdot(180-3x)$ funksiya eng katta qiymatga ega bo'ladi.

Demak, $y=2x=2\cdot 40=80$, $z=180-3x=180-3\cdot 40=60$. Shunday qilib, 180 soni 40, 80, 60 sonlarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlanganda qo'shiluvchilardan ikkitasi $1:2$ nisbatda bo'lib, qo'shiluvchilarning ko'paytmasi eng katta bo'lar ekan, ya'ni $y_{max}=40\cdot 80\cdot 60=192000$.

3-Masala. Marvaridni bahosi uning massasi kvadratiga proporsional. Ishlov berish vaqtida marvarid ikki bo'lakka ajralib ketdi va natijada eng ko'p qiymatini (bahosini) yo'qotdi. Bo'laklarning massalari topilsin.

Yechish. Marvaridning massasini *m*, bahosini *z*, bo'laklarning massalarini $m_1, m_2 (m_1+m_2=m)$ va ularning baholarini mos ravishda z_1, z_2 orqali belgilaymiz. U holda butun marvaridning bahosi $z=\alpha\cdot m^2$ bo'laklarning baholari esa $z_1=\alpha\cdot m_1^2, z_2=\alpha\cdot m_2^2$ bo'ladi, bunda $\alpha>0$- proporsionallik koeffitsienti. Shartga ko'ra, butun marvaridning bahosi $z=\alpha\cdot m^2$ bilan siniq ikki bo'lak marvaridning bahosi $\alpha\cdot m_1^2+\alpha\cdot m_2^2$ orasidagi farq $y=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot(m_1^2+m_2^2)$ eng katta ekanligi bizga ma'lum, $m=m_1+m_2$ yoki $m_2=m-m_1$ ekanini hisobga olsak

$$y=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot(m_1^2+m_2^2)=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot m_1^2-\alpha\cdot(m-m_1)^2=$$
$$=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot m_1^2-\alpha\cdot m^2+2\alpha\cdot m\cdot m_1-\alpha\cdot m_1^2=2\alpha\cdot(m\cdot m_1-m_1^2)$$

kelib chiqadi. Bu yerda α, m o'zgarmas miqdorlar, m_1 эса o'zgaruvchi miqdordir. Endi $y(m_1)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. $y'=2\alpha(m-2m_1); y''=-4\alpha$. $y'(m_1)=0$ yoki $m-2m_1=0$ dan $m_1=\frac{m}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $y''\left(\frac{m}{2}\right)=-4\alpha<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $y=2\alpha(mm_1-2m_1^2)$ funksiya $m_1=\frac{m}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Demak, marvarid teng $\left(m_1=m_2=\frac{m}{2}\right)$ ikki bo'lakka bo'linganda o'zining eng ko'p bahosini yo'qotar ekan.

4-Masala. Jism $v_0=60\,m/sek$ tezlik bilan tik yo'nalishda yuqoriga otilgan. Jismning eng yuqori ko'tarilish balandligi topilsin.

Yechish. Fizika kursidan ma'lumki tik yo'nalishda yuqoriga v_0 boshlang'ich tezlik bilan otilgan jismning harakat tenglamasi $H=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ bo'ladi. Bunda *H*-otilgan jismning yerdan balandligi, $g\approx 10\,m/sek^2$ erkin tushish tezlanishi, *t* esa sarflangan vaqt. Masalaning shartiga asosan $v_0=60\,m/sek$ va binobarin, $H=60t-5t^2$ Endi shu $H(t)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. $H'(t)=60-10t$; $H''(t)=-10$.

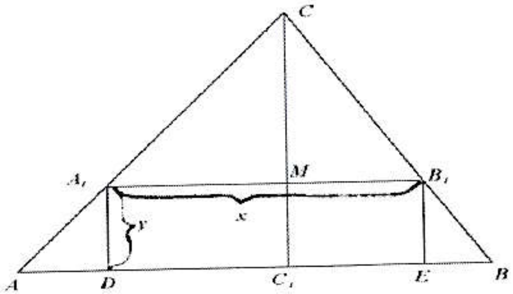
$H'(t)=0$ yoki $60-10t=0$ dan $10t=60$, $t=6$ kritik nuqta kelib chiqadi. $H''(6)=-10<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $t=6$ qiymatda $H=60t-5t^2$ funksiya maksimumga ega bo'ladi. Demak, $H_{max}=H(6)=60\cdot 6-5\cdot 6^2=180\ (m)$.

Shunday qilib $v_0=60\,м/сек$ tezlik bilan yuqoriga tik otilgan jism taqriban 6 sek.dan so'ng eng yuqori *H*=180*m* balandlikka ko'tarilar ekan.

5-Masala. Asosi *a* va balandligi *h* bo'lgan uchburchakka eng katta yuzli to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. To'g'ri to'rtburchakning yuzi aniqlansin.

Yechish. *ABC*(4-chizma) uchburchakka ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlarini *x* va *y* orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S=xy$ bo'ladi. *ABC* va A_1B_1C uchburchaklarning o'xshashligidan

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{CM}{CC_1} \qquad (1)$$



4-chizma.

proporsiya kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko'ra $AB = a, CC_1 = h$. Belgilashimizga asosan $A_1B_1 = x,\ B_1E = MC_1 = y,\ CM = CC_1 - CM = h - y$ bo'lgani uchun (1) munosabat quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h},$$

bundan $x = \frac{a}{h}(h - y)$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini $S = xy$ ga qo'yib

$S = \frac{a}{h}(h - y)y = \frac{a}{h}(hy - y^2)$ bir o'zgaruvchining funksiyasiga ega bo'lamiz.

Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(y) = \frac{a}{h}(h - 2y),\ S''(y) = -\frac{2a}{h}.$$

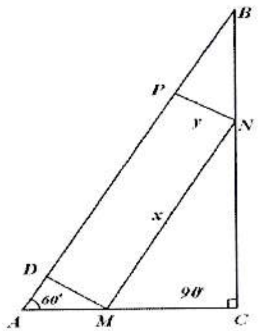
$S'(y) = 0$ yoki $\frac{a}{h}(h - 2y) = 0$ dan $h - 2y = 0,\ y = \frac{h}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi.

$S''\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{2a}{h} < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $S(y)$ funksiya $y = \frac{h}{2}$ da maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib uchburchakka ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchaklardan asosi $x = \frac{a}{h}(h - y) = \frac{a}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{a}{2}$

va balandligi $y = \frac{h}{2}$ bo'lgan to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lar ekan. Bu to'rtburchakning yuzi esa $S = \frac{ah}{4}$ bo'ladi.

6-Masala. Gipotenuzasi 24 sm, burchagi 60° to'g'ri burchakli uchburchakka asosi gipotenuzada bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. Shu to'g'ri to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lishi uchun uning tomonlari qanday bo'lishi kerak?

Yechish. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini x va y orqali belgilaymiz. U holda uning yuzi $S = xy$ bo'ladi. Endi y ni x orqali ifodalaymiz(5-chizma).



5-chizma.

Shartga ko'ra $\angle A = 60^\circ, \angle C = 90^\circ$. Demak $\angle B = 30^\circ$. Ma'lumki to'g'ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisidagi tomoni gipotenuzaning yarmiga teng. Shuning uchun $AC = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12(sm)$. To'g'ri burchakli uchburchak *MNC* ning 30° li burchagi qarshisidagi *MC* tomoni uning gipotenuzasi x ning yarmiga teng, ya'ni $MC = \frac{x}{2}$. Demak $AM = AC - MC = 12 - \frac{x}{2}$. ΔADM dan $AD = \frac{AM}{2}$. Pifagor teoremasiga ko'ra $y^2 = DM^2 = AM^2 - AD^2 = AM^2 - \left(\frac{AM}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AM^2$ yoki

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}AM=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(12-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\left(6-\frac{x}{4}\right)$ bo'ladi.

Demak, to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S=xy=x\sqrt{3}\left(6-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}\left(6x-\frac{x^2}{4}\right)$ bo'ladi.

Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$S'(x)=\sqrt{3}\left(6-\frac{2x}{4}\right)$, $S''(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $S'(x)=0$ yoki $6-\frac{x}{2}=0$ dan x=12 kritik qiymat kelib chiqadi. $S''(12)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra

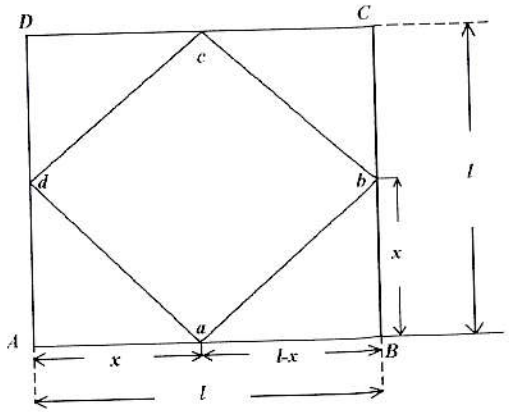
$S(x)=\sqrt{3}\left(6x-\frac{x^2}{4}\right)=\sqrt{3}\left(6-\frac{x}{4}\right)x$ funksiya x=12 qiymatda maksimumga ega bo'ladi.

Shunday qilib, uchburchakka ichki chizilgan va bir tomoni uning 24 sm li gipotenuzasida bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tomonlari x=12, $y=\sqrt{3}\left(6-\frac{12}{4}\right)=3\sqrt{3}$ ga teng bo'lgani eng katta yuzga ega bo'lib, $S_{\max}=12\cdot 3\sqrt{3}=36\sqrt{3}\ (sm^2)$ ga teng ekan.

7-Masala. *ABCD* kvadrat berilgan. Uning uchlaridan bir xil *Aa, Bb, Cc, Dd* kesmalar ajratilgan va *a, b, c, d* nuqtalarni birlashtirib kvadrat hosil qilingan. *Aa* ning qanday qiymatida *abcd* kvadratning yuzi eng kichik bo'ladi.(6-chizma).

Yechish. $Aa=x$, $AB=\ell$ deb belgilasak, $aB=\ell-x$ va Pifagor teoremasiga ko'ra $ab^2=x^2+(\ell-x)^2=x^2+\ell^2-2\ell x+x^2=2x^2-2\ell x+\ell^2$ bo'ladi. Tomoni *ab* ga teng *abcd* kvadratning yuzi $S=ab^2$ ga teng. Demak, $S=2x^2-2\ell x+\ell^2$. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz. $S'(x)=4x-2\ell$, $S''(x)=4$. $S'(x)=0$ yoki $4x-2\ell=0$ dan $x=\frac{\ell}{2}=\frac{AB}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $S'\left(\frac{\ell}{2}\right)=4>0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan $S=2x^2-2\ell x+\ell^2$ funksiya $x=\frac{\ell}{2}$ qiymatda eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, *ABCD* kvadratga masalaning

shartida ko'rsatilgandek qilib ichki chizilgan kvadratlardan *ABCD* kvadrat tomonlarini o'rtasini birlashtirib hosil qilingan kvadrat eng kichik yuzga ega bo'lar ekan. (6-chizma).



6-chizma.

8-Masala. Tagi kvadrat shaklidagi, hajmi 108 m^3 ga teng ochiq hovuzning o'lchovlari shunday aniqlansinki, uning devorlari bilan tagini qoplash uchun mumkin qadar oz material sarf etilsin. Hovuzning o'lchovlari deganda uning tagini tomonlari va balandligi (chuqurligi) tushuniladi.

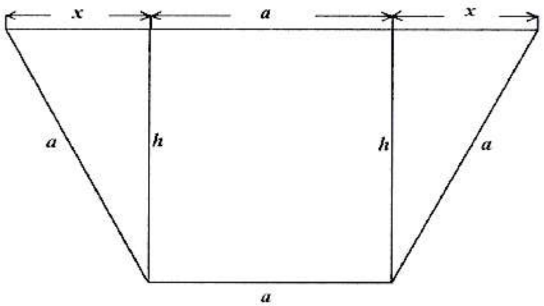
Yechish. Hovuz tagini tomoni x orqali va hovuz balandligini h orqali belgilaymiz. U holda hovuz parallelepiped shaklida bo'lgani uchun uning hajmi $v=x^2h$ bo'ladi. Shartga ko'ra $x^2h=108$. Hovuz tagi x^2, devori $4xh$ yuzga ega bo'lgani uchun jami $S=x^2+4xh$ yuzni material bilan qoplash lozim. S yuzni birgina erkli o'zgaruvchining funksiyasi sifatida ifodalash uchun $x^2h=108$ tenglikdan topilgan $h=\frac{108}{x^2}$ qiymatni unga qo'yamiz. U holda $S=x^2+4x\frac{108}{x^2}=x^2+\frac{432}{x}$ kelib chiqadi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$S'(x)=2x-\frac{432}{x^2};\ S''(x)=2+\frac{864}{x^3}\ (x>0).$$

$S'(x)=2x-\frac{432}{x^2}=0$ dan $2x^3-432=0;\ x^3=216,\ x=6$ kritik nuqta kelib chiqadi. Ikkinchi hosila $S''(6)=2+\frac{864}{216}>0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $x=6$ qiymatda $S(x)=x^2+\frac{432}{x}$ funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi.

Demak, hajmi 108 м³ ga teng ochiq hovuzning tagi 6*m* kvadratdan iborat, balandligi $h=\frac{108}{36}=3\ m$ bo'lgandagina uning devorlariga ishlov berish uchun eng kam material sarflanar ekan. Ya'ni hovuzning o'lchovlari $6m\times 6m\times 3m$ bo'lishi lozim ekan.

9-Masala. Trapetsiyaning kichik asosi va yon tomonlarining har biri *a* ga teng. Uning katta asosi shunday aniqlansinki, trapetsiyaning yuzi eng katta bo'lsin(7-chizma).



7-chizma

Yechish. Chizmaga binoan trapetsiyaning katta asosi 2*x*+*a* ga teng. Trapetsiyaning balandligini *h* orqali belgilaymiz. Ma'lumki trapetsiyaning yuzi asoslari yig'indisining yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\frac{2x+a+a}{2}h=(x+a)h$$

Pifagor teoremasiga ko'ra chizmadan $h=\sqrt{a^2-x^2}$ bo'lgani uchun trapetsiyaning yuzi $S=(x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ bo'ladi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

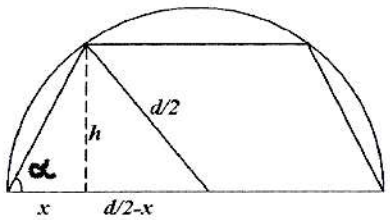
$$S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}+(x+a)\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2-x^2-x(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$S'(x)=0$ yoki $-2x^2-ax+a^2=0$ dan $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4\cdot 2\cdot a^2}}{-4}=\frac{a\pm 3a}{-4}$;

$x_1=\frac{a}{2};\ x_2=-a$ kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko'ra $x>0$ bo'lgani uchun $x=\frac{a}{2}$ kritik qiymatga ega bo'lamiz. Hosilani

$S'(x)=\frac{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ko'rinishda tasvirlasak $x<\frac{a}{2}$ bo'lganda $x-\frac{a}{2}<0$ va $S'(x)>0$ ekani kelib chiqadi. Xuddi shuningdek $x>\frac{a}{2}$ bo'lganda $S'(x)<0$ ekani kelib chiqadi. $S'(x)$ hosila $x=\frac{a}{2}$ kritik qiymatning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tganda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartiradi. Shuning uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra $S=(x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya $x=\frac{a}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib trapetsiyaning katta asosi $2x+a=2\frac{a}{2}+a=2a$ bo'lganda u eng katta yuzga ega bo'lar ekan.

10-Masala. Yarim doiraga asosi yarim doira diametridan iborat bo'lgan trapetsiya ichki chizilgan. Trapetsiyaning asosiga yopishgan burchagi qanday bo'lganda trapetsiyaning yuzi eng katta bo'ladi(8-chizma).



8-chizma

Yechish. Doiraning diametrini *d*, trapetsiyaning balandligini *h*, trapetsiya yon tomonining katta asosidagi proeksiyasini *x*, shu tomon bilan asos orasidagi burchakni α deb olamiz. U holda trapetsiyaning kichik asosi *d*-2*x*, balandligi $h = xtg\alpha$ va yuzi $S = \frac{d+d-2x}{2}h = (d-x)xtg\alpha$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan chizmadan Pifagor teoremasiga ko'ra

$h^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 = dx - x^2$ ga ega bo'lamiz. Bunga $h = xtg\alpha$ qiymatni qo'ysak

$$x^2tg^2\alpha = d\cdot x - x^2;\ x^2tg^2\alpha + x^2 = d\cdot x;\ x^2(1+tg^2\alpha) = d\cdot x;\ x\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = d;\ x = d\cos^2\alpha$$

kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$S = (d-x)xtg\alpha = (d - d\cos^2\alpha)d\cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = d(1-\cos^2\alpha)d\cos\alpha\cdot\sin\alpha = d^2\sin^3\alpha\cos\alpha$$

bo'ladi.

Endi $S(\alpha) = d^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

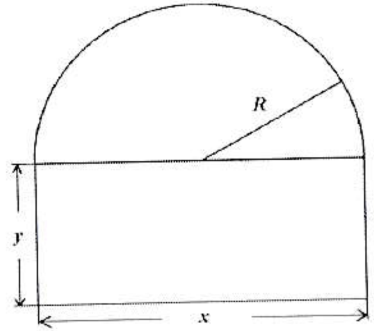
$$S'(\alpha) = d^2(\sin^3\alpha\cos\alpha)' = d^2(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha) = d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(3 - tg^2\alpha).$$

$S'(\alpha) = 0$ yoki $d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(3 - tg^2\alpha) = 0$ dan $\sin^2\alpha\cos^2\alpha \neq 0$ bo'lgani uchun $3 - tg^2\alpha = 0;\ tg^2\alpha = 3,\ tg\alpha = \pm\sqrt{3}$ kelib chiqadi. Shartga ko'ra $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bo'lgani sababli $tg\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^0$ kritik qiymatga ega

bo'lamiz. $0 < \alpha < 60^0$ bo`lsa $tg\alpha < tg60^0 = \sqrt{3},\ tg^2\alpha < 3,\ 3 - tg^2\alpha > 0$ va $S'(\alpha) = d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(3 - tg^2\alpha) > 0$ bo'ladi.

$60^0 < \alpha < 90^0$ bo'lganda $tg60^0 < tg\alpha;\ \sqrt{3} < tg\alpha;\ 3 < tg^2\alpha;\ 3 - tg^2\alpha < 0$ bo'lib, $S'(\alpha) < 0$ bo'ladi, chunki $y = tgx$ funksiya o'suvchi. $S(\alpha)$ funksiyaning hosilasi $\alpha = 60^0$ kritik qiymatning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga binoan funksiya $\alpha = 60^0$ bo'lganda uning yuzi eng katta bo'lar ekan.

11-Masala. Tunnelning ko'ndalang kesimi bir tomoni yarim doiradan iborat to'g'ri to'rtburchak shakliga ega. Kesim perimetri 25*m*. Yarim doira radiusi qanday bo'lsa, kesim yuzi eng katta bo'ladi(9-chizma).



9-chizma

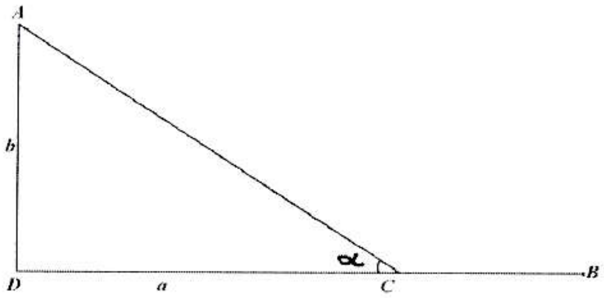
Yechish. Aylana uzunligini topish formulasi ($\ell = 2\pi R$) ga binoan yarim doiraning uzunligi πR (*R*-yarim doiraning radiusi). To'g'ri to'rtburchakning asosini *x*, balandligini *y* orqali belgilasak kesimning perimetri shartga ko'ra (α) bo'ladi. Kesimning yuzi to'g'ri to'rtburchak yuzi bilan yarim doira yuzining yig'indisidan iborat, ya'ni $S = xy + \frac{1}{2}\pi R^2$ (β) bo'ladi. $x = 2R$ bo'lgani uchun (α) dan $2R + 2y + \pi R = 25;\ y = 12{,}5 - \frac{\pi+2}{2}R$ kelib chiqadi. *y* ning topilgan qiymatini (β) ga qo'yamiz. U holda $S = 2R\left(12{,}5 - \frac{\pi+2}{2}R\right) + \frac{1}{2}\pi R^2 =$

$= 25R - (\pi + 2)R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2$ bir o'zgaruvchi R ning funksiyasi kelib chiqadi. Endi shu $S(R)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$S'(R) = 25 - 2(\pi + 2)R + \pi R$; $S''(R) = -2(\pi + 2) + \pi = -\pi - 4 = -(\pi + 4)$; $S'(R) = 0$ yoki $25 - 2(\pi + 2)R + \pi R = 0$ dan $25 - \pi R - 4R = 0$; $R = \frac{25}{\pi + 4} \approx 3{,}5$ kelib chiqadi.

$S''(R) = -(\pi + 4) < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan funksiya *R=3,5m* bo'lganda tunnel kesimining yuzi eng katta bo'lar ekan.

12-Masala. *A* zavodga yaqin bo'lgan joydan berilgan to'g'ri chiziq bo'yicha *B* shaharga qarab temir yo'l o'tkazilgan. Agar bir tonna yukni bir km ga tosh yo'l bo'yicha tashish temir yo'l bo'yicha tashishga qaraganda *m* marta qimmatroq bo'lsa, *A* dan *B* ga yuk tashish eng arzon bo'lishi uchun, *A* zavoddan temir yo'lgacha tosh yo'lni temir yo'lga nisbatan qanday α burchak ostida o'tkazish kerak?(10-chizma).



10-chizma

Yechish. *A* zavoddan temir yo'lgacha masofani *b* (*AD=b*), *D* dan *B* gacha masofani *a*, tosh yo'l bilan temir yo'l orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz.

1 tonna yukni tosh yo'lda 1 *km* ga tashish uchun *d* so'm sarf bo'lsin. U holda 1 tonna yukni temir yo'lda 1 km ga tashish uchun $\frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. Yuk *A* dan *B* gacha *AC km* tosh yo'lda, *CB km* temir

yo'lda tashiladi. ΔACD dan trigonometrik funksiyalarning ta'rifiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz. $\frac{AD}{AC} = \sin\alpha$, $AC = \frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha}$, $\frac{DC}{AD} = ctg\alpha$; $DC = ADctg\alpha = bctg\alpha$.

Demak $CB = DB - DC = a - bctg\alpha$. Shunday qilib tashilgan yuk *A* dan *B* gacha $AC = \frac{b}{\sin\alpha}$ km.ni tosh yo'lda o'tib uni tashishga $\frac{bd}{\sin\alpha}$ so'mni *CB=(a-bctg*α*)* km.ni temir yo'lda o'tib uni tashishga $(a - bctg\alpha)\frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. U holda yukni tashish uchun hammasi bo'lib $f(\alpha) = \frac{bd}{\sin\alpha} + (a - bctg\alpha)\frac{d}{m}$ so'm pul sarflanadi. Endi *a, b, d, m* larni o'zgarmas hisoblab $f(\alpha)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$f'(\alpha) = \frac{bd\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{bd}{m\sin^2\alpha} = bd\frac{1 - m\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = mbd\frac{\frac{1}{m} - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$. $f'(\alpha) = 0$ yoki $\frac{1}{m} - \cos\alpha = 0$ dan $\cos\alpha = \frac{1}{m}$; $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$ kritik qiymat kelib chiqadi.

$\cos\alpha$ funksiya $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ da kamayuvchi ekanini hisobga olsak

$\alpha < \arccos\frac{1}{m}$ bo'lganda $\cos\alpha > \frac{1}{m}$;

$\frac{1}{m} - \cos\alpha < 0$, $f'(\alpha) = mbd\frac{\frac{1}{m} - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} < 0$ va $\alpha > \arccos\frac{1}{m}$ bo'lganda $\cos\alpha < \frac{1}{m}$;

$\frac{1}{m} - \cos\alpha > 0$, $f'(\alpha) > 0$ kelib chiqadi. Hosila $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$ kritik nuqtaning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini "-" dan "+"ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra funksiya shu qiymatda minimumga ega bo'ladi.

Shunday qilib yukni *A* zavoddan *B* shaharga tashish eng arzon bo'lishi uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$ burchak ostida qurish lozim ekan.

Hususiy holda yukni tosh yo'lda tashish temir yo'ldagiga qaraganda 5 marta qimmat bo'lganda eng kam xarajat qilish uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha = \arccos\frac{1}{5} \approx 78^0$ burchak ostida o'tkazish kerak ekan.

Endi Lopital qoidasiga misollar ko'raylik:

Misollar. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(4x)'} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{4} = \frac{3}{4}.$

2) 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{1} = 0$

1) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} =$
$= \lim\limits_{x\to 0+} x = 0$

3)

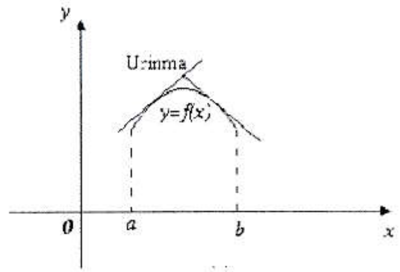
2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{2\cos\ln tgx} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2\ln tgx}{1/\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\ln tgx}{1/\cos x}} = e^{2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{tg^2 x}} =$
$e^{2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x\cdot tgx}{2tgx\sec^2 x}} = e^{2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x} = e^0 = 1$

Eslatma. *0•∞, ∞-∞, 0^0* va ∞^0 ko'rinishdagi limitlarni hisoblash uchun ularni avval $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltirib, so'ngra Lopital qoidasi qo'llaniladi

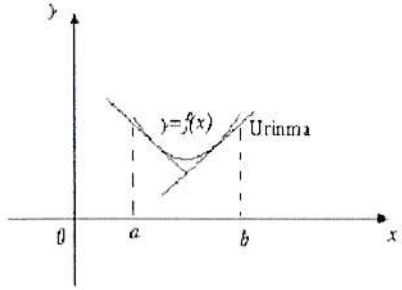
4-§. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqta.

$(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini qaraymiz. $y = f(x)$ funksiya grafigining $(a;\ b)$ intervaldagi urinmasi deyilganda grafikning abssissasi $(a;\ b)$ intervalga tegishli istalgan nuqtalaridan grafikka o'tkazilgan urinmalar tushuniladi.

1-Ta'rif. Agar funksiyaning grafigi uning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan pastda (yuqorida) joylashgan bo'lsa, $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigi shu $(a;\ b)$ intervalda ***qavariq*** (*botiq*) deyiladi (1,2-chizmalar).

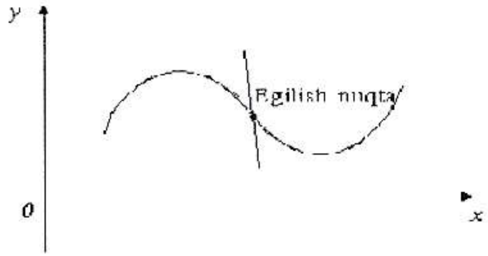


1-chizma



2-chizma

3-Ta'rif. Uzluksiz funksiya grafigining qavariq qismini botiq qismidan ajratuvchi nuqtasi grafikning ***egilish nuqtasi*** deyiladi. (3-chizma).



3-chizma

Funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik intervallari hamda grafikning egilish nuqtalarini aniqlash funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasidan foydalanib amalga oshiriladi.

1-Teorema. Agar $(a;\ b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x) < 0$ bo'lsa, u holda $(a;\ b)$ intervalda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

2-Teorema. Agar $(a;\ b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $(a;\ b)$ intervalda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi botiq bo'ladi.

3- **Teorema.** (Burilish nuqtasi mavjud bo'lisining yetarli sharti). Agar funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x_0) = 0$ bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa va x_0 nuqtadan o'tayotganda $f''(x)$ o'z ishorasini o'zgartirsa, $x = x_0$ absisali nuqta $y = f(x)$ egri chiziqning burilish nuqtasi bo'ladi.

Masalan. 1) $y = x^3 - 9x^2 + 5x + 43$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. Ikkinchi tartibli hosilani topamiz:

$y' = 3x^2 - 18x + 5$, $y'' = 6x - 18$. Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib hosil bo'lgan tenglamani yechamiz: $y'' = 0$, $6x - 18 = 0$, $x = 3$.

$x < 3$ da $y'' = 6(x-3) < 0$ bo'lganligi sababli $(-\infty; 3)$ intervalda funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

$x > 3$ da $y'' = 6(x-3) > 0$ bo'lganligi sababli $(3, +\infty)$ intervalda grafik botiq bo'ladi. $y(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 43 = 4$ ekanligini hisobga olsak $M_0(3; 4)$ nuqta grafikning egilish nuqtasi ekanligi kelib chiqadi.

2) $y = \ln x$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. $y = \ln x$ funksiya $(0, +\infty)$ intervalda aniqlangan. Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ Ikkinchi tartibli hosila $(0, +\infty)$ intervalda manfiy bo'lganligi sababli $y = \ln x$ funksiyaning grafigi bu intervalda qavariq bo'ladi. Grafik egilish nuqtaga ega emas.

5-§. Egri chiziqning asimptotalari

4-Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigining o'zgaruvchi nuqtasi grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining ***asimptotasi*** deb ataladi.

Boshqach aytganda , egri chiziq ***asimptotasi*** deb shunday to'g'ri chiziqqa aytiladiki, egri chiziqda yotuvchi M nuqta egri chiziq bo'ylab

xarakat qilib koordinata boshidan cheksiz uzoqlashgani sari M nuqtaning bu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasi nolga intiladi.

Asimptotalar gorizontal, vertikal (ya'ni OY o'qqa parallel) hamda og'ma (ya'ni OY oqqa paralel bo'lmagan) asimptotalarga ajratilib o'rganiladi.

Agar $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ yoki $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ limitlardan hech bo'lmaganda bittasi cheksiz ($+\infty$ *yoki* $-\infty$) bo'lsa, $x = x_0$ to'g'ri chiziqqa $y = f(x)$ funksiya grafigining ***vertical*** asimptotasi deyiladi.

Agar shunday k va b sonlari mavjud bo'lib, $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ da $f(x)$ funksiya $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$ ko'rinishda ifodalansa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziqqa y=*f*(x) funksiya grafigining ***og'ma*** asimptotasi deyiladi. Bu yerda

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

Xususan, agar k=0 bo'lsa, $y = b$ to'g'ri chiziqqa *f*(x) funksiya grafigining gorizontal asimptotasi deyiladi.

Izoh. $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotalari $x \to +\infty$ da va $x \to -\infty$ xar xil bo'lishi mumkin. Shu sababli k va b ni aniqlashda $x \to +\infty$ va $x \to -\infty$ hollarini alohida qarash lozim.

a).Vertikal asimptotalar. Vertikal asimptotaning ta'rifidan, agar $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$ yoki $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$ yoki $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ bo'lsa, u holda $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi ekanligi kelib chiqadi; va aksincha, agar $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotasi bo'lsa, u holda yozilgan tengliklardan biri albatta bajariladi.

Demak, $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotalarini topish uchun argument x ning $f(x)$ funksiyani cheksizlikka aylantiradigan qiymatlarini topish kerak ekan

(4-chizma).

Masalan. 1) $y = x - \frac{2}{x+3}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

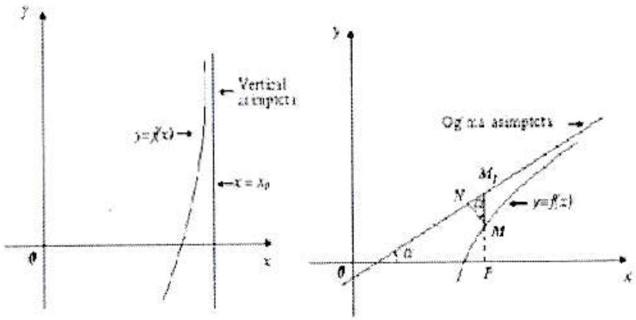
Yechish. $\lim\limits_{x\to-3}\left(x - \frac{2}{x+3}\right) = \infty$, shu sababli x= - 3 to'g'ri chiziq grafikning vertikal asimptotasidir.

2) $y = ctgx$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to\pi} ctgx = \infty$, bo'lganligi sababli funksiyaning grafigi cheksiz ko'p vertikal asimptotalarga ega: $x = 0,\ x = \pm\pi,\ x = \pm 2\pi,\ x = \pm 3\pi, \ldots$

b) Og'ma asimptotalar. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $0Y$ o'qqa parallel bo'lmagan asimptotalarga ega bo'lsin. U holda bu asimptotaning tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishga ega bo'lishi ravshan. Xususiy holda $k = 0$ bo'lganda $0X$ o'qqa parallel gorizontal asimptota hosil bo'ladi. k va b parametrlarni aniqlashga kirishamiz. Grafikning M nuqtasidan asimptotaga MN perpendikulyar o'tkazamiz(4-chizma). Asimptotaning ta'rifidan $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$ ekani kelib chiqadi.

ΔM_1MN dan $\frac{MN}{M_1M} = \cos\alpha$ yoki bundan $M_1M = \frac{MN}{\cos\alpha}$ hosil bo'ladi. α $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ o'zgarmasligini hisobga olsak $\lim\limits_{x\to+\infty} M_1M = \frac{1}{\cos\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$ bo'ladi.



4-chizma

Shu sababli

$$M_1M = y_{asimptota} - y_{графика} = (kx + b) - f(x) \text{ ва}$$

$$\lim_{x\to\infty} M_1M = \lim_{x\to\infty}\big(kx + b - f(x)\big) = 0$$

Bundan $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x}\right) = 0.$

Ma'lumki ikki ifodaning ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun kamida ulardan biri nolga teng bo'lishi lozim. Shuning uchun oxirgi tenglikda $x \to +\infty$, shu sababli $\lim\limits_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x}\right) = 0$ bo'ladi. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$ ekanini hisobga olsak

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(k - - \frac{f(x)}{x}\right) = 0$ yoki bundan $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ hosil bo'ladi, tenglikdan $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$ ga ega bo'lamiz. Bunga k ning topilgan qiymatini qoysak b topiladi.

Masalan. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+1}{x+1} = \infty$, bo'lganligi sababli $x=-1$ to'g'ri chiziq grafikning vertikal asimptotasidir. $y = kx + b$ og'ma asimptotani izlaymiz.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(x+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x^2})}{(x+\frac{1}{x})} = \frac{1+0}{1+0} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

Demak, $y = x - 1$ to'g'ri chiziq grafikning og'ma asimptotasidir.

6-§. Funksiyani hosila yordamida to'la tekshirish va grafigini chizish.

Funksiyani hosila yordamida to'la tekshirish deyilganda quyidagilar nazarda tutiladi.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasi, juft yoki toqligi, davriyligi tekshiriladi.

2. Funksiyaning uzilish nuqtalari, uning grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi.

3. Funksiyaning monotonligi va ekstremumlari tekshiriladi.

a) y' birinchi tartibli hosilasi topiladi;

b) birinch tartibli hosilani nolga tenglab, mavjud bo'lmagan va kritik nuqtalar aniqlanadi;

v) har bir kritik nuqtadan chap va o'ng tomonda $f'(x)$ ning ishorasi aniqlanadi; funksiya x_1,x_2 va x_3 kritik nuqtalarga ega bo'lsa:

1) agar x_1 kritik nuqtaning chap tomonida hosilaning ishorasi musbat, o'ng tomonida manfiy bo'lsa, bu nuqtada *f(x)* funksiya lokal maksimumga ega;

2) agar x_2 kritik nuqtaning chap tomonida hosilaning ishorasi manfiy, o'ng tomonida musbat bo'lsa, bu nuqtada *f(x)* funksiya lokal minimumga ega;

3) Agar x_3 kritik nuqtaning chap va o'ng tomonida hosilaning ishorasi bir xil bo'lsa, bu nuqtada funksiya ekstremumga erishmaydi.

4. Qavariq va botiqlilik intervallari, burilish nuqtasi aniqlanadi;

a) birinch va ikkinchi tartibli hosila olinadi;

b) ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglab ildizlarni topamiz. Shu nuqtalar atrofida ikkinch tartibli hosila ishorasining o'zgarish qonunini aniqlaymiz:

1) intervallarda $y''>0$ ishora musbat bo'lsa egri chiziq- botiq;

2)) intervallarda $y''<0$ ishora manfiy bo'lsa egri chiziq -qavariq;

5. Funksiyaning asimptotalari topiladi;

a) funksiya ikkinchi tur uzilishga ega bo'lsa; $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$

b) $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$ limitlar mavjud va chekli bo'lsa, u holda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq egri chiziqning og'ma asimptotasi bo'ladi;

v) $y=kx+b$ og'ma asimptota tenglamasini aniqlashda $k=0$ bo'lsa, u holda $y=b$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota bo'ladi;

6. Bu ma'lumotlar grafikni chizish uchun kamlik qilsa, qo'shimcha zarur bo'lgan hisoblashlarni bajarish kerak;

7. Yuqoridagi ma'lumotlarga ko'ra funksiya grafigi yasaladi.

Eslatma. Grafikni yasashda uning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish foydalidir.

Eslatma. Grafikni yasash oldidan funksiyaning juft yoki toqligini aniqlash foydalidir.

Masalan. $y=e^{-x^2}$ funksiyaning grafigi chizilsin.

Yechish. 1. Funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan.

2. Funksiya butun son o'qida uzluksiz.

3. $y'=\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\cdot\left(-x^2\right)'=-2x\cdot e^{-x^2}$.

$e^{-x^2}>0$ bo'lganligi sababli $x<0$ da $y'>0$ va $x>0$ da $y'<0$ bo'ladi. Demak funksiya $(-\infty;0)$ intervalda o'sadi, $(0;+\infty)$ intervalda esa kamayadi.

4. Funksiyaning hosilasini nolga tenglashtirib, hosil bo'lgan tenglamani yechib funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlaymiz:

$y'=-2x\cdot e^{-x^2}=0$. Demak, $x=0$ kritik nuqta.

Bu kritik nuqtaning chapidan o'ngiga o'tganda hosila ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirganligi uchun $x=0$ nuqtada funksiya maksimumga ega. $y_{\max}=y(0)=e^0=1$.

5. Ikkinchi tartibli hosilani topamiz:
$y''=\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)'=-2\cdot e^{-x^2}-2x\cdot e^{-x^2}\left(-x^2\right)'=-2\cdot e^{-x^2}+4x^2\cdot e^{-x^2}=2\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-x^2}$.

Buni nolga tenglashtirib yechsak grafikning egilish nuqtalarining abssissalari hosil bo'ladi.

$e^{-x^2} \neq 0$ bo'lganligi uchun $2(2x^2-1)\cdot e^{-x^2}=0$ tenglamadan $2x^2-1=0$, $x^2=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ga ega bo'lamiz. Demak grafikning $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ va $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ abssissali $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ nuqtalari uning egilish nuqtalaridir.

$\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ oraliqlarda $y''>0$ bo'lgani uchun grafik bu oraliqlarda botiq, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraliqda $y''<0$ bo'lgani uchun bu oraliqda grafik qavariq.

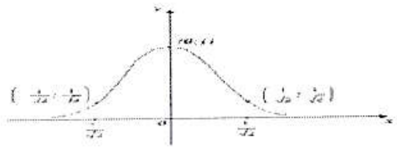
6. Funksiya x ning barcha qiymatlarida aniqlanganligi uchun uning grafigi vertikal asimptotalarga ega emas. Grafikning og'ma asimptotalarini aniqlaymiz.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{x^2}}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$$

Demak, $y=0$, ya'ni $0x$ o'q grafikning asimptotasidir.

$y=e^{-x^2}$ funksiyaning grafigi ***Gauss egri chizig'i*** deb ataladi.

U 5-chizmada tasvirlangan.



5-chizma

Auditoriyada tahlil qilinadigan misollar .

1. Berilgan S yuzga ega barcha to'g'ri to'rtburchaklardan kvadrat eng kichik perimetrga ega ekanligi isbotlansin.

Ko'rsatma. To'g'ri to'rtburchakning bir tomonini x desak, ikkinchi tomonini $y=\frac{S}{x}$, perimetri $P=2\cdot\left(x+\frac{S}{x}\right)$ bo'ladi. JAVOBI: $x=\sqrt{S};\ y=\sqrt{S}$

2. P perimetrli barcha to'g'ri to'rtburchaklar orasidan kvadrat eng katta yuzga ega ekanligi isbotlansin.

Ko'rsatma. To'g'ri to'rtburchakning bir tomonini x, ikkinchi tomonini $y=\frac{P}{2}-x$, yuzi $S=x\cdot\left(\frac{P}{2}-x\right)$ bo'ladi. JAVOBI: $x=\frac{P}{4};\ y=\frac{P}{4}$

3. Uchburchakning asosi a ga, perimetri esa P ga teng. Uchburchakning qolgan ikki tomoni shunday aniqlansinki, uning yuzi eng katta bo'lsin.

Ko'rsatma. Uchburchakning ikkinchi tomoni $b=x$ desak, uchinchi tomoni $c=P-a-x$ bo'ladi. Geron formulasiga ko'ra uchburchakning yuzi $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ yoki, belgilashimizga binoan,

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-x)(a+x)},\ (0<x<P)$$

bo'ladi. S yuzning eng katta qiymatini topish kerak. Buning uchun $f(x)=(P-x)(a+x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topish yetarli.

JAVOBI: $b=c=\frac{P-a}{2}$, ya'ni uchburchak teng yonli bo'lishi kerak.

4. Uchburchakning bir tomoni a ga va uning qarshisidagi burchagi α ga teng. Uchburchakning qolgan ikki burchagi shunday aniqlansinki, uning yuzi eng katta bo'lsin. JAVOBI: $x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha);\ y=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$, uchburchak teng yonli bo'ladi.

5. v hajmga ega yopiq silindrik idish(bak) tayyorlash talab etiladi. Idishni tayyorlashga eng kam material sarflanishi uchun uning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak? JAVOBI: $R=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},\ H=2R,\ H:R=2,$ bunda R silindr radiusi H esa balandligi.

6. S to'la sirtga ega silindrning hajmi eng katta bo'lishi uchun uning (radiusi R va balandligi H) o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

JAVOBI: $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}},\ H=2R,\ H:R=2.$

7. Berilgan hajmga ega to'g'ri doiraviy konusning yon sirti $r^2:h^2:\ell^2=1:2:3$ munosabat bajarilgandagina eng kichik bo'lishi isbotlansin. Bu yerda $r-$konus asosining radiusi, $h-$konusning balandligi, $\ell-$konusning yasovchisi.

JAVOBI: $r=\sqrt[3]{\frac{3v}{\sqrt{2}\pi}},\ h=\sqrt[3]{\frac{6v}{\pi}},\ \ell=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{3v}{\sqrt{2}\pi}}$; $r^2:h^2:\ell^2=1:2:3$.

8. O'lchovlari 80sm×50sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli tunuka berilgan. Tunukaning to'rtta uchidan kattaligi bir xil kvadratlar kesib olinib, qolgan qismdan qopqoqsiz to'g'ri to'rtburchakli quti yasalgan. Qutining hajmi eng katta bo'lishi uchun kesib tashlangan kvadratning tomoni qanday bo'lishi kerak? J:10 sm.

9. Berilgan doiraga eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak ichki chizilsin.

JAVOBI: tomoni $R\sqrt{2}$ bo'lgan kvadrat, bunda R doiraning radiusi

10. Berilgan sharga yon sirti eng katta bo'lgan tsilindr ichki chizilsin.

JAVOBI: $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R,\ h=\sqrt{2}R$, bunda r doiraninng radiusi h esa uning balandligi.

Lopital qoidasini qo'llab limitni toping.

11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$; 12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ell^x-\ell^{-x}}{\ln(1+x)}$; 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ell^x}{x^3}$;

14. $\lim\limits_{x\to1}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; 15. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$; 16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$;

17. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}$; 18. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$; 19. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ell^{5x}-1}{\sin 3x}$

Quyidagi egri chiziqlarning egilish nuqtalari hamda botiqlik va qavariqlik intervallari aniqlansin.

20. $y=x^7$. JAVOBI: $(-\infty;0)$ intervalda grafik qavariq, $(0;+\infty)$ intervalda grafik botiq, $(0;0)$ grafikning egilish nuqtasi.

21. $y=4-x^2$. JAVOBI: $(-\infty;+\infty)$ intervalda grafik qavariq.

22. $y=x^3-3x^2-9x+9$. JAVOBI: $(-\infty;1)$ intervalda grafik qavariq, $(1;+\infty)$ intervalda grafik botiq, $(1;-2)$ grafikning egilish nuqtasi.

23. $y=x^4$. JAVOBI: Grafik hamma yerda botiq.

24. $y=tgx$. Javob: $(n\pi;0)$ grafikning egilish nuqtalari.

Quyidagi egri chiziqlarning asimptotalari topilsin.

25. $y=\frac{3}{x-2}$. JAVOBI: $x=2,\ y=0$.

26. $y=e^{\frac{1}{x}}-1$. JAVOBI: $x=0,\ y=0$.

27. $y=\ell nx$. JAVOBI: $x=0$.

28. $y^3=6x^2+x^3$. JAVOBI: $y=x+2$.

29. $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$. JAVOBI: $x=b,\ y=c$.

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

Funksiyani birinchi va ikkinch tartibli hosila yordamida ekstremumlarini tekshiring.

5.1 $y=3\left(\frac{x^4}{2}-x^2\right)$ 5.2. $y=x^3-9x^2+24x-15$

5.3 $y=x^5-\frac{5}{3}x^3$

5.4. $y=2x^3+3x^2-12x-5$

5.5. $y=(x-3)^2(x-2)$

5.6. $y=x^4-8x^3+16x^2$

5.7. $y=x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{x^4}{4}$

5.8. $y=\frac{1}{10}(2x^3-6x^2-18x+15)$

5.9. $y=x^5-x^3-2x$

5.10. $y=1-x^2-\frac{x^4}{8}$

5.11. $y=-4x+x^3$

5.12. $y=(x+1)(x-2)^2$

5.13. $y=x^3-3x^2+4$

5.14. $y=x^3-9x^2+24x-7$

5.15. $y=x^4-8x^2+16$

5.16. $y=x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+2$

5.17. $y=-4x^3+6x^2-3x-\frac{1}{2}$

5.18. $y=\frac{1}{10}(x^4-12x)$

5.19. $y=x^4-2x^2+3$

5.20. $y=(x+2)(x-1)^2$

5.21. $y=x^3-3x^2+2$

5.22. $y=8+2x^2-4x^4$

5.23. $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$

5.24. $y=2x^3-15x^2+36x$

Berilgan *y=f(x)* funksiyaning *[a;b]* kesmadagi eng kata va eng kichik qiymatlarini toping.

5.25. $y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$; $[-1;1]$

5.26. $y=\frac{(x+1)^3}{x^3}$; $[1;2]$

5.27. $y=\sqrt{x-x^3}$; $[-2;2]$

5.28. $y=4-e^{-x^2}$; $[0;1]$

5.29. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$; $[1;2]$

5.30. $y=xe^x$; $[-2;0]$

5.31. $y=(x-x^2)e^x$; $[-2;1]$

5.32. $y=(x-1)e^{-x}$; $[0;3]$

5.33. $y=\frac{x}{9-x^2}$; $[-2;2]$

5.34. $y=\frac{1+\ln x}{x}$; $\left[\frac{1}{e};e\right]$

5.35. $y=e^{4x-x^2}$; $[1;3]$

5.36. $y=\frac{x^5-8}{x^4}$; $[-3;1]$

5.37. $y=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$; $[-1;2]$

5.38. $y=x\ln x$; $\left[\frac{1}{e^2};1\right]$

5.39. $y=x^3e^{x+1}$; $[-4;0]$

5.40. $y=x^2-2x+\frac{2}{x-1}$; $[-1;3]$

5.41. $y=(x+1)\sqrt{x}$; $\left[-\frac{4}{3};3\right]$

542. $y=e^{6x-x^2}$; $[-3;3]$

5.43. $y=\frac{\ln x}{x}$; $[1;4]$

5.44. $y=3x^4-16x^3+2$; $[-3;1]$

5.45. $y=x^5-5x^4+5x32+1$; $[-1;2]$

5.46. $y=(3-x)e^{-x}$; $[0;5]$

5.47. $y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x$; $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

5.48. $y=108x-x^4$; $[-1;4]$

5.49. $y=\frac{x^4}{49}-6x^3+7$; $[16;20]$

5.50. $y=x^3+3x^2-12x+1$; $[-1;5]$

Quyidagi funksiyalarni qavariq, botiq va egilish nuqtalarini toping.

5.51. $y=x^4-2x+10$.

5.52. $y=\frac{x}{1+x^2}$

5.53. $y=\frac{x^2}{1+x^4}$

5.54. $y=\frac{x}{1+x}$

5.55. $y=1+3x^2-x^4$

5.56. $y=1+3x^3-x^5$

5.57. $y=\frac{1}{2+x}$

5.58. $y=(x-1)^3$

5.59. $y=2+x^2-\frac{x^4}{2}$

5.60. $y=5-\frac{2}{x}-x^2$

5.61. $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$

5.62. $y=\frac{3}{2+x}-\frac{3}{x-2}-1$

5.63. $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

5.64. $y=x^3-3x+2$

5.65. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-9}$

5.66. $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{x^2+x-6}$

5.67. $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$

5.68. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1};$

5.69. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2};$

5.70. $y=\dfrac{x}{3-x^2};$

5.71. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x};$

5.72. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2};$

5.73. $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}.$

5.74. $y=\dfrac{x^2+1}{x};$

5.75. $y=x+\dfrac{4}{x+2}.$

Funksiyalarni hosila yordamida to'liq tekshiring va grafigini yasang.

5.76 $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x};$

5.77. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2};$

578. $y=\dfrac{2x^2}{4x^2-1};$

5.79. $y=\dfrac{2x+1}{x^2};$

5.80. $y=\dfrac{1}{x^2-9};$

5.81 $y=\dfrac{4x^2}{x^2-1};$

5.82. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1};$

5.83. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x};$

5.84. $y=\dfrac{(x-3)^2}{(x-1)};$

5.85. $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2};$

5.86. $y=\dfrac{x^2+16}{4x};$

5.87. $y=\dfrac{3x}{x^2+1};$

5.88. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2};$

5.89. $y=\dfrac{5x^2}{x^2-25};$

5.90. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2};$

5.91. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2};$

5.92. $y=\dfrac{1}{1-x^2};$

5.93. $y=\dfrac{2}{x^2+x+1};$

5.94. $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2};$

5.95. $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2;$

5.96. $y=\dfrac{x^3+16}{x^2-2x};$

5.97. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2};$

5.98. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1};$

5.99. $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3};$

5.100. $y=x-\ell n(x+1).$

5.101. $y=\dfrac{6x}{1+x^2}.$

5.102 . $y=\dfrac{x^2-x-6}{2-x}$

5.103. $y=x^2+6x+4$

5.104. $y=x^3e^x$

5.105. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$

5.106. $y=\ln(x^2-2x+2)$

5.107. $y=x+arctgx$

5.108. $y=2x-\arcsin x$

5.109. $y=\dfrac{x}{16+x^2}$

5.110. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+5x}}$

5.101. $f(x)=\dfrac{x+1}{1+\dfrac{1}{x+1}}$

ADABIYOTLAR

Asosiy adabiyotlar

1.Mathematical Analyis 1, Claudio Canuto-Anita Tabacco, Milano, Italiya, 2015.

2.Gerd Baumann. Mathematics for Engineers I. Minchen. 2010.

3.G'.X.Djumabayev. „Oliy matematika". Darslik. „Impress media" nashriyoti, 2021. -395 b.

4.Q.Sh.Ro'zmetov, G'.X.Djumabayev. „Matematika". Darslik. „O'zbekiston xalqaro islom akademiyasi" nashriyoti, 2020. -452 b.

5.Q.Sh.Ro'zmetov, G'.X.Djumabayev. „Matematika". Darslik. „O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati" nashriyoti, 2018. -452 b.

6.Ё.Соатов, "Олий математика". Дарслик. 1, 2, 3-жилд.- Т.:"Ўзбекистон", 1996 й. - 640 б.

7.Sh.I.Tojiev, "Oliy matematikadan masalalar yechish". Darslik. T.:"O'zbekiston", 2002 y. - 512 b.

8.N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S.Axmedova, "Oliy matematika", O'quv qo'llanma, Qarshi Davlat Universiteti, 1-,2-jild, 2010 y.

9.P.E.Danko, "Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami". Darslik. T.:"O'zbekiston", 2007 й. - 248 b.

10.Высщая математика для экономистов. «Экзамен» Москва. 2009 г.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Saydamatov M.M., Atadjanova M.A., Nalibayeva Z.A. Matematikadan misol va masalalar to'plami. O'quv qo'llanma. Toshkent, 2017y.

2.В.П.Минорский, "Олий математикадан масалалар тўплами" Т.:"Ўқитувчи", 1990 й.

3.Т.Жўраев, Г.Худойберганов, Х.Мансуров, А.Ворисов. "Олий математика асослари". Дарслик. Т.:"Ўзбекистон", 1998 й. 303 б.

4.Ф.Усмонов, Р.Исмоилов, Б.Хўжаев. Математикадан қўлланма. Т.:"Янги аср авлоди", 2006 й. 464 б.

MUNDARIJA

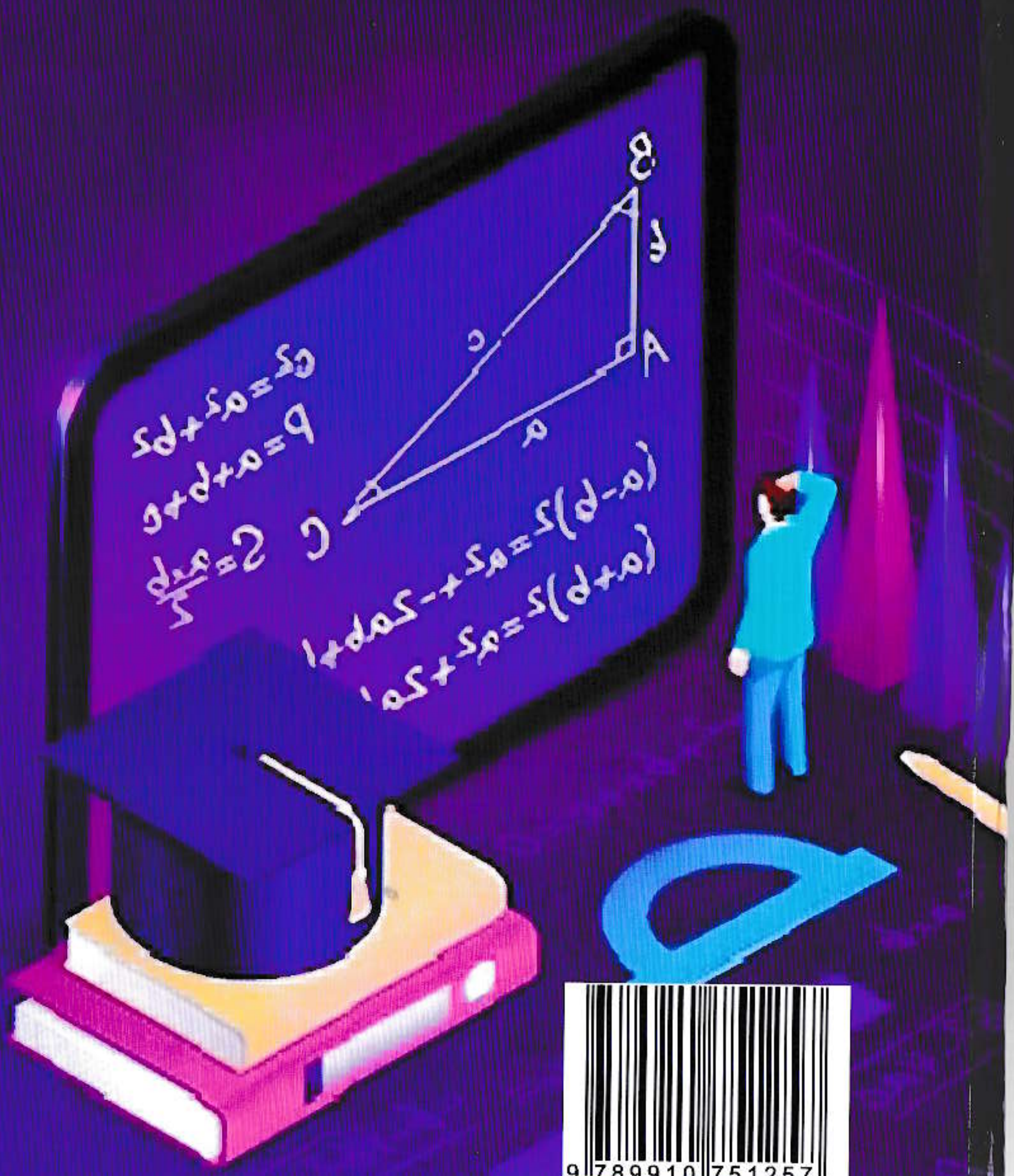
G'.X.DJUMABAYEV, M.M.SAYDAMATOV, A.R.QUTLIMUROTOV, I.Q.XAYDAROV

MATEMATIK ANALIZI

Muharrir:	X. Taxirov
Tehnik muharrir:	S. Melikuziva
Musahhih:	M. Yunusova
Sahifalovchi:	A.Ziyamuhamedov

Nashriyot litsenziya № 2044,.2023 й
Bichimi 60x84¹/16. "Cambria" garniturasi, kegli 16.
Offset bosma usulida bosildi. Shartli bosma tabog'i 10. Adadi 160 dona. Buyurtma № 1814182

Yangi chirchiq prints MCHJda chop etildi.



9 789910 751257