4-mavzu.Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer qoidasi. Gauss usuli.

Adabiyotlar:

- **Jane S Paterson, Dorothy A Watson “SQA Advanced Higher Mathematics” pp.171-182**
- **Martyn R. Dixon, Leonid Kurdachenko, IgorYa.Subbotin 209-217.**

Dars rejasi:

4.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.

4.2. Gauss usuli.

4.3. Kramer qoidasi.

4.1.Chiziqli tenglamalar sistemasi

Ushbu ko'rinishidagi tenglamaga ***chiziqli tenglama*** deyiladi, bunda , , va - berilgan sonlar va o'z navbatida lar tenglamaning koeffitsientlari, esa uning ozod hadi deb ataladi, - noma'lumlar.

Agar $b = 0$ bo'lsa, u holda chiziqli tenglama ***bir jinsli*** deyiladi. Aks holda u ***bir jinsli bo'lmagan tenglama*** deyiladi.

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

ko'rinishidagi sistemaga ***chiziqli tenglamalar sistemasi*** deyiladi, bu yerda , - sonlar, , . Jumladan, lar sistemaning koeffitsientlari, lar esa ozod hadlari deb ataladi, - noma'lumlar, *n*- noma'lumlar soni, *m*- tenglamalar soni.

- Agar $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sonlar to'plamini mos ravishda tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga qo'yilganda sistemadagi har bir tenglama to'g'ri tenglikka aylansa, u holda bunday sonlar to'plamiga ***chiziqlitenglamalarsistemasining yechimi*** deyiladi.
- Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo'lmaganda bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bu ***sistema birgalikda***, agar birorta ham yechimga ega bo'lmasa bunday ***sistema birgalikda emas*** deyiladi.
- Agar birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, u holda bunday ***sistema aniqlangan***, agar bittadan ko'p yechimga ega bo'lsa, u ***aniqlanmagan sistema*** deyiladi.

4.2. Gauss usuli

(4.1) sistemada $m = n$ va bo'lsin (tenglamalarning o'rinlarini almashtirish bilan bunga har doim erishish mumkin). Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikkala tomonini ga bo'lamiz va uni avval ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamadan, keyin ga ko'paytirib, uchinchi tenglamadan va hokazo, so'ng uni ga ko'paytirib, oxirgi tenglamadan ayiramiz. Ravshanki, hosil bo'lgan yangi sistema dastlabki sistemaga teng kuchli. Yangi sistemaning barcha tenglamalarida noma'lum oldidagi koeffitsientlar ikkinchi tenglamadan boshlab 0 ga aylanadi, yani sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \ldots\ldots\ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \ldots\ldots\ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + \tilde{a}_{n3}x_3 \ldots\ldots\ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases} .$$

Agar bu sistemada (ikkinchi tenglamadan boshlab qaraganda) noma'lum oldidagi koeffitsientlarning birortasi 0 ga teng bo'lmasa, masalan, , u holda avvalgi usul yordamida uchinchi tenglamadan boshlab barcha tenglamalarda noma'lum oldidagi koeffitsientlarni 0 ga aylantirish mumkin.

Keyingi noma'lumlar uchun ham bu amalni davom ettirib, sistemani (agar u yagona yechimga ega bo'lsa) quyidagi uchburchak ko'rinishiga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \qquad x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \bar{b}_n\,. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Bu yerda belgilar bilan almashtirishlar natijasida o’zgarib boruvchi sonli koeffitsientlar va ozod hadlar belgilangan.

Oxirgi (4.2) tenglamalar sistemasidan yagona ravishda, keyin esa ketma-ket o’rinlarga qo’yish bilan qolgan noma’lumlar aniqlanadi.

1- misol. Quyidagi sistemani Gauss usuli bilanyeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Yechish: Gauss usuli tenglamalar sistemasidagi noma’lumlarni ketma-ket yo’qotishdan iborat.

Ikkinchi va uchinchi tenglamalardan noma’lumni yo’qotamiz. Buning uchun ikkinchi tenglamaga -2 ga ko’paytirilgan birinchi tenglamani, keyin uchinchi tenglamaga -4 ga ko’paytirilgan birinchi tenglamani qo’shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ \quad -3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

Endi uchinchi tenglamadan noma'lumni yo'qotamiz. Buning uchun uchinchi tenlamaga -1 ga ko'paytirilgan ikkinchi tenglamani qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ \qquad\qquad -2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Hosil qilingan sistemaning oxirgi tenglamasini yechib, $x_3 = -2$ ni topamiz. Bu qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, x_2 ni hisoblaymiz:

$$-3x_2 - 2\cdot(-2) = -2 \Rightarrow \quad -3x_2 = -6 \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

So'ng topilgan qiymatlarni birinchi tenglamaga qo'yib, x_1 ni topamiz: $x_1 + 2 + 2\cdot(-2) = -1 \Rightarrow x_1 = 1$.

Shunday qilib, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

4.3. Kramer usuli

Noma’lumlar soni tenglamalar soniga teng bo’lgan chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \,. \end{cases}$$

Noma’lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan determinantga sistemaning ***asosiy determinanti*** deyiladi, yani:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.4)$$

Δ_{x_j} orqali x_j noma’lum oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan ustunni ozod hadlar ustuniga almashtirish yo’li bilan (4.4) dan hosil bo’ladigan determinantni belgilaymiz. U holda “Kramer qoidasi” deb ataluvchi quyidagi tasdiq o’rinli:

1) agar $\Delta \neq 0$ bo’lsa, (4.4) sistema yagona yechimga ega bo’ladi va bu yechim ushbu

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

formulalar orqali aniqlanadi;

2) agar $\Delta = 0$ va barcha $j = 1, 2, \ldots, n$ lar uchun bo'lsa, u holda (4.3) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi;

3) agar $\Delta = 0$ bo'lib, Δ_{x_j} lardan hech bo'lmaganda bittasi 0 ga teng bo'lmasa, u holda (4.3) sistema yechimga ega emas.

2- misol. Quyidagi sistemani Kramer qoidasi yordamidayeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Yechish: Avval asosiy determinantnihisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$$

Demak, berilgan sistema yagona yechimga ega. Endi Δ_{x_1} , Δ_{x_2} va Δ_{x_3} larnitopamiz:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60.$$

Bundan: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{180}{60} = 3$ $\quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1$ $\quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1$

4.4Matritsa va chiziqli tenglamalar

O’quv maqsadi – Tenglamalar sistemasini ifodalash uchun matritsalarni hosil qilish.

Matritsalar ko’plab vaziyatlarda qo’llaniladi.Ushbu mavzu doirasida matritsalardan chiziqli tenglamalar yechish usullarining sistematik yo’li sifatida foydalaniladi.

Quyidagi ikki noma’lumli tenglamalarni sistema tarzida yechish usuli orqali yuqoridagi fikrlarimizni ifodalaymiz.

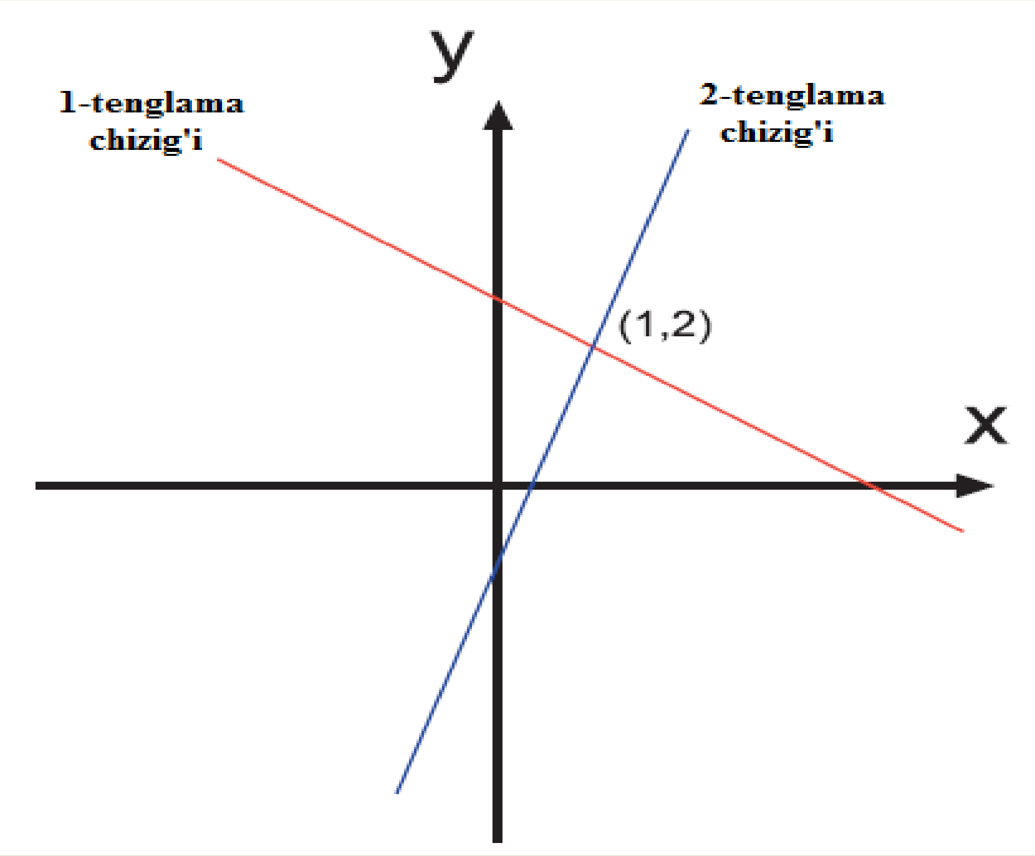
Misol: $2x+3y=8$ va $3x-y=1$ ikki noma'lumli sistemalarni bir vaqtni o'zida yeching.

Javob: $\begin{cases} 2x+3y=8 & (1) \\ 3x-y=1 & (2) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=8 & (1) & \\ 9x-3y=3 & (3) & 3\times(2) \end{cases}$

(1) va (3) larni qo'shib $11x=11$ ni hosil qilamiz.Bu yerdan $x=1$ ekanligini aniqlaymiz.(1) tenglamadagi x ni o'rniga 1 ni qo'ysak, quyidagi natijani olamiz :

$2x+3y=8$ --- $2+3y=8$ --- $y=2$

Geometrik jihatdan (1) va (2) tenglamalar ikkita chiziqni ifodalaydi. Ushbu tenglamar sistemasini yechib, ikki chiziqlarning kesishish nuqtasi (1; 2) ekanligi aniqlanadi.



Algebraik jihatdan quyidagi usullar ushbu tenglamalarni yechishda qo’llanildi :

Tenglamaning ikki tomonini ham biror o’zgarmas songa ko’paytirish yoki bo’lish;

Ikkala tenglamalarni ham biror o’zgarmas songa qo’shish yoki ayirish ;

Matritsalardan ushbu usullarni sistematik yondashuv sifatida rivojlantirgan holda chiziqli tenglamalarning ko’p noma’lumli kattaroq sistemalarini yechishda qo’llash mumkin.

Matritsa tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar oldidagi koeffitsientlar orqali shakllantiriladi.

Namuna:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ 5x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

Quyiq rangda ko'rsatilgan koeffitsientlarni olib

$$\begin{aligned} \mathbf{3}x + \mathbf{4}y &= 10 \\ \mathbf{5}x - \mathbf{3}y &= 7 \end{aligned}$$

Quyidagi matritsa shakllantiriladi:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Matritsa hosil qilish

Quyida 3 noma'lumli tenglamalar sistemasining matritsasini hosil qilish ko'rsatib o'tilgan.

Misol: 3 (x,y,z)noma'lumli tenglamalar sistemasini tasavvur qiling:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= 2 \\ 2x + y + 4z &= -3 \end{aligned}$$

Chap tomondagi faqatgina koeffitsientlarni oling va ulardan matritsa tuzing

$$\begin{aligned} \mathbf{2}x \ \mathbf{-1}y \ \mathbf{+1}z &= 5 \\ \mathbf{1}x \ \mathbf{-}\ \mathbf{3}y \ \mathbf{+}\ \mathbf{2}z &= 2 \\ \mathbf{2}x \ \mathbf{+1}y \ \mathbf{+}\ \mathbf{4}z &= -3 \end{aligned}$$

U koeffitsient matritsasi deb ataladi.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- X,Y va Z noma'lumlarini ustun ko'rinishidagi matritsaga qo'yiladi.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Tenglamalarning o'ng tomonidagi sonlarni boshqa austunga yozing:

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Endi ushbu 3 noma'lumli tenglamar sistemasi quyidagi yaxlit matritsa tenglamasi ko'rinishida yozilishi mumkin.

  AX=B

- Ushbu ko'rinishdagi tenglamalar matritsalarga doir keyingi mavzularda batafsil yoritiladi.
- Yana bir qulay matritsa konstruksiyalaridan biri bu kengaytirilgan (boyitilgan) matritsa deb ataladi. Ushbu matritsa A matritsasining koeffitsientlari yoniga B matritsa ustunini qo'yish orqali hosil qilinadi. Quyidagicha ifodalanadi:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Kengaytirilgan matritsani hosil qilish

Quyida kengaytirilgan matritsasini hosil qilish ko’rsatib o’tilgan.

Namuna:

Tenglamalar sistemasi uchun koeffitsient matritsasi va kengaytirilgan matritsani tuzing.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 12 \\ 2x - z &= 6 \\ y + z &= 3 \end{aligned}$$

Javob: Yuqoridagi tenglamalar sistemasidagi ikkinchi tenglamada “y” yo’q. Shu kabi holatlarda matritsa tuzilayotganda, “y” o’rniga 0 koeffitsienti yoziladi.

Koeffitsient matritsasi: Kengaytirilgan matritsa:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 12 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Matritsaga oid mashqlar:

Savol-9: Uch noma’lumli tenglamalar sistemasi uchun koeffitsient matritsasi va kengaytirilgan matritsani tuzing.

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &= -1 \\ 2x + y + 3z &= 7 \\ x + 4y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

Savol-10: Uch noma’lumli tenglamalar sistemasi uchun koeffitsient matritsasi va kengaytirilgan matritsani tuzing.

$$\begin{aligned} 3x + z &= 11 \\ 2x - y + z &= 6 \\ x + 4y &= 14 \end{aligned}$$

5.5 Elementar qator amallari

O’quv maqsadi – Matritsalar ustida elementar qatorlar amallarini bajarish.

Yuqorida ko’rsatib o’tilgan tenglamalar sistemasi:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= 2 \\ 2x + y + 4z &= -3 \end{aligned}$$

Ushbu tenglamalar sistemasi quyidagi kengaytirilgan matritsaga ega edi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Agar e’tibor bergan bo’lsangiz, matrisaning har bir qatori tenglamalar sistemasidagi tenglamalarni koeffisientlari orqali ifodalayapti.

Sistemadagi tenglamalar o’rni va kengaytirilgan matritsa qatorlari tenglamalar sistemasini o’zgartirmagan holda almashtirish mumkin.

Bir chiziqli tenglamalarda tilga olib o’tilgan algebraik va geometrik yechish usullariga yana bir yangi usul qo’shildi. Ushbu yangi usul uch xil

Elementar qator amallari:

Tenglamalar sistemasini yechish uchun matritsasini ushbu yangi uch xil usulda yechish elementar qator amallari deyiladi. Ular:

- Qatorlar o'rnini almashtirish
- Bir qatorni o'zgarmas bir songa ko'paytirish
- Bir qatorni boshqa qatorga qo'shish orqali

Namunalar:

1. Qatorlar o'rnini almashtirish

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} r1 \\ r2 \\ r3 \end{array} \quad \begin{array}{c} r1 \leftrightarrow r2 \\ \rightarrow \\ r3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} r1 \\ r2 \\ r3 \end{array}$$

Bir qatorni o'zgarmas bir songa ko'paytirish

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ r3 \end{array} \to \begin{array}{r} r1 \\ r2 \\ 3r3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 12 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ r3 \end{array}$$

Bir qatorni boshqa qatorga qo'shish orqali

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ r3 \end{array} \to \begin{array}{c} r1 \\ r2+2r3 \\ r3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 10 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ r3 \end{array}$$

5.6 Yuqori uchburchakli matritsalari

O’quv maqsadi – matritsani yuqori uchburchakli ko’rinishiga o’tkazish.

Ma’lum bir kvadrat matritsalar o’ziga xos xususiyatga ega. Ushbu xususiyatga ega matritsalar yuqori uchburchakli matritsalari deb ataladi.

Yuqori uchburchakli matritsalari

Agar asosiy diagonaldan pastdagi ko’rsatkichlar nol bo’lsa, kvadrat matritsa yuqori uchburchakli bo’ladi.

Eslatma: asosiy diagonal yuqori chap burchakdan pastki o’ng burchakka o’tuvchi diagonaldir.

Namunalar:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ushbu matritsa yuqori uchbarchakli matritsasi hisoblanadi. Asosiy diagonaldan pastdagi barcha sonlar noldan iborat. Asosiy diagonal esa 1, 7, va 2 sonlari ustidan o'tadi.

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ushbu matritsa esa yuqori uchburchakli matritsa emas. Asosiy diagonaldan pastdagi sonlar orasida noldan tashqari 1 ham bor.

Elementar qatorlar amallaridan foydalanib kvadrat matritsa endi yuqori uchburchak matritsasiga aylantirilishi mumkin.

Namunalar:

1. Quyidagi matritsani yuqori uchburchak matritsasiga aylantiring. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Javob: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2}r1 \\ r2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} r1 \\ r2 - 3r1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \end{matrix}$

2. Quyidagi matritsani yuqori uchburchak matritsasiga aylantiring. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Javob:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} r3 \\ r2 \\ r1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{matrix}$$

Qatorlar o'rnini almashtirayotganda, $a_{11} \neq 0$ **ni e'tiborga oling**

$$\begin{matrix} r1 \\ r2 - 4r1 \\ r3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} r1 \\ r2 \\ r3 + r2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{matrix}$$