5-mavzu. Matritsa va ular ustida amallar.

Reja.

1.Matrisa tushunchasi.

2. Matritsalar ustida amallar.

3.Kvadrat matritsa determinanti . Matritsa normasi

4. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari

Main literature:

- Jane S Paterson,Dorothy A Watson“SQA Advanced Higher Mathematics” pp.173-182

a_{ik} haqiqiy sonlar n ta satr va m ta ustunda joylashgan quyidagi to`g`ri to`rtburchak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

shaklidagi jadvalga n x m o`lchamli **matritsa** deyiladi.

Jane S Paterson,Dorothy A Watson"SQA Advanced Higher Mathematics" pp.173

a_{ik} haqiqiy sonlar matritsa elementlari deb ataladi.

1 x m o`lchamli matritsaga **satr matritsa**, n x 1 o`lchamli matritsaga **ustun matritsa** deyiladi. **Nol matritsa** deb, har bir elementi nolga teng bo`lgan matritsaga aytiladi.

n x m o`lchamli $A = (a_{iк})$ va $B = (b_{iк})$ matritsalar berilgan bo`lsin. Agar matritsalarning barcha mos elementlari o`zaro teng bo`lsa, matritsalar o`zaro teng deyiladi va $A = B$ ko`rinishda yoziladi.

2. Matritsalar ustida amallar.

O`lchamlari aynan teng A va B matritsalarni qo`shganda, ularning mos elementlari qo`shiladi: $A + B = (a_{i\kappa}) + (b_{i\kappa}) = (a_{i\kappa} + b_{i\kappa})$.

Haqiqiy son matritsaga ko`paytirilganda, matritsaning har bir elementi shu songa ko`paytiriladi: $k\,(a_{i\kappa}) = (k\,a_{i\kappa})$.

Misol. Amallarni bajaring:

$$2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Matritsalarniqo`shishvasongako`paytirishamallariquyidagixossalargabo`ysinadi:

1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$; 3) $k(A + B) = kA + kB$;

4) $k(nA) = (kn)A$; 5) $(k + n)A = kA + nA$.

Agar A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo`lsa, A va B matritsalar **o`zaro zanjirlangan matritsalar** deyiladi. O`zaro zanjirlangan matritsalarni ko`paytirish mumkin.

n x m o`lchamli $A = (a_{ik})$ matritsani m x p o`lchamli $B = (b_{ik})$ matritsaga ko`paytmasi n x p o`lchamli $C = (c_{ik})$ matritsaga teng bo`lib, uning c_{ik}elementlari quyidagicha aniqlanadi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

ya`ni $c_{ik}$ element A matritsa i-satri elementlarining B matritsa k-ustuni mos elementlariga ko`paytmalarining yig`indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matritsalarni ko`paytirish quyidagi xossalarga bo`ysinadi:

1. $(kA)B = k(AB)$; 2. $(A + B)C = AC + BC$;

3. $A(B + C) = AB + AC$; 4. $A(BC) = (AB)C$.

Matritsalarning ko`paytmasi ko`paytuvchi matritsalar nolmas bo`li-shiga qaramasdan, nol matritsani berishi ham mumkin.

A va B matritsalarning ko`paytmasi hardoim o`rinalmashtirish qonuniga bo`ysinavermaydi , ya`ni umumanolganda $AB \neq BA$. $AB = BA$ tenglikni qanoatlantiruvchi A va B matritsalarga **o`rin almashinuvchi** matritsalar deyiladi.

Berilgan n x m o`lchamli A matritsaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa, hosil bo`lgan m x n o`lchamli matritsaga A matritsaning **transponirlangan matritsa**si deyiladi va $A^T$ ko`rinishda belgilanadi.

Matritsalar ko`paytmasi transponirlangani uchun quyidagi formula o`rinli: $(AB)^T = B^T A^T$.

Satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo`lgan matritsaga n–tartibli **kvadratik matritsa** deyiladi. Kvadratik matritsaning quyidagi xususiy ko`rinishlari bir-biridan farqlaniladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ **– yuqori uchburchakli matritsa;**

Jane S Paterson,Dorothy A Watson“SQA Advanced Higher Mathematics” pp.179-180

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ **– quyi uchburchakli matritsa;**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ **– diagonal matritsa;**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$ **- birlik matritsa.**

Matritsalar o`zlarining quyidagi sonli xarakteristikalari bo`yicha taqqoslanadi:

1) kvadratik matritsa determinanti;

2) normasi;

3) rangi.

3. Kvadrat matritsa determinanti. Matritsa normasi

Berilgan n - tartibli $A = (a_{ik})$ **kvadratik matritsaning determinan-ti yo**ki **aniqlovchisi** deb,

n – tartibli $|a_{ik}|$ determinantga aytiladi va det (A) ko`rinishda yoziladi.

Kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi uning asosiy sonli xarakteristikasi hisoblanadi. Yuqori, quyi uchburchakli va diagonal matritsalarning determinanti bosh diagonal elementlarining ko`paytma-siga teng bo`lsa, birlik matritsaning determinanti birga teng.

Ikki teng o`lchovli kvadrat matritsalar ko`paytmasining determinanti alohida matritsalar determinantlari ko`paytmasiga teng: det(AB) = det(A) det(B).

Berilgan n x m o`lchamli A = ($a_{i\kappa}$) **matritsaning normasi** deb, unga mos qo`yiluvchi quyidagi nomanfiy

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{2}}$$ songa aytiladi.

Masalan, $$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -9 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$ matritsaning normasi

$$N = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2 + (-9)^2 + 8^2 + 1^2} = 14$$

4. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari

n x m o`lchamli A = $(a_{i\kappa})$ matritsa berilgan bo`lib, p matritsaning satrlari soni n va ustunlari soni m larning kichigidan katta bo`lmagan son bo`lsin. Matritsaning ixtiyoriy p ta satrini va ixtiyoriy p ta ustunini o`chiramiz. O`chirilgan elementlar p- tartibli kvadratik matritsani tashkil etadi va unga o`z navbatida p-tartibli determinant yoki minorni mos qo`yish mumkin.

A **matritsaning rangi** deb, noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va rang(A) ko`rinishida ifodalanadi.

1-masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

Berilgan matritsa 3 x 2 o`lchamli bo`lgani uchun satrlari va ustun-lari sonini taqqoslaymiz va kichigi 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning kattaligini hisoblaymiz. Jarayonni noldan farqli ikkinchi-tartibli minor ajralmaguncha davom etamiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta`rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng.

2-masala. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

B matritsadan ajralishi mumkin bo`lgan eng yuqori - ikkinchi tartibli har qanday minor nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, matritsa rangi ikkiga teng bo`la olmaydi. V matritsa nolmas matritsa bo`lgani uchun uning rangi 1 ga teng.

3-masala. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

C matritsa uchinchi tartibli kvadratik matritsa. Undan yagona eng yuqori 3-tartibli M_1 minor ajraladi. M_1 minor kattaligini hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$M_1 = 0$ bo`lgani uchun, C matritsa rangi 3 ga teng bo`la olmaydi. $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ bo`lgani uchun, rang(C) = 2.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi **elementar almashtirishlar** bajarganda o`zgarmaydi.

1. Matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko`paytirganda;

2. Matritsa satrlari (ustunlari) o`rinlari almashtirilganda;

3. Matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror songa ko`paytirib, so`ngra qo`sh-ganda;

4. Matritsa transponirlanganda.

Matritsa rangini aniqlashning ta`rif asosida biz yuqorida masala-larda ko`rgan **«minorlar ajratib hisoblash»** usuli va nollar yig`ib hi-soblashga asoslangan **«Gauss algoritmi»** usullari mavjud.

Matritsa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig`ish usuli asosida quyidagicha aniqlanadi: dastlabki ko`rinishdagi matritsa yuqorida sanab o`tilgan elementar almashtirishlar yordamida «**trapetsiyasimon matri-tsa**» ko`rinishiga keltiriladi.Trapetsiyasimon matritsa deb, boshdiagonaldan yuqorida yoki quyida joylashgan har bir elementi nolgateng bo`lgan matritsaga aytiladi. Trapetsiyasimon matritsaning rangi yoki xuddi shuning o`zi dastlabki matritsaning rangi trapetsiyasimon matritsaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini nollar yig`ish usulida aniqlang?

Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz va uning ko`rinishini trapetsiyasimon ko`rinishga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trapetsiyasimon matritsa bosh diagonal elementlaridan ikkitasi nol-dan farqli bo`lgani uchun uning rangi va shu bilan birga berilgan matri-tsa rangi ikkiga teng.