13-mavzu: TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ VA ULARNING TENGLAMALARI

Topic-13. IN PLAIN STRAIGHT LINE AND THEIR EQUATIONS

Adabiyot: Csaba Vincze and Laszlo Kozma "College Geometry" March 27,2014 pp.179-189k.

1.To’ g’ ri chiziq ta‘riflanmaydigan tushuncha.

To’g’ri chiziqqa parallel bo’lgan ixtiyoriy nol bo’lmagan vektor to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori deyiladi.

a) bitta nuqtasi va yo’naltiruvchi vektori bilan to’g’ri chiziq tenglamasi.

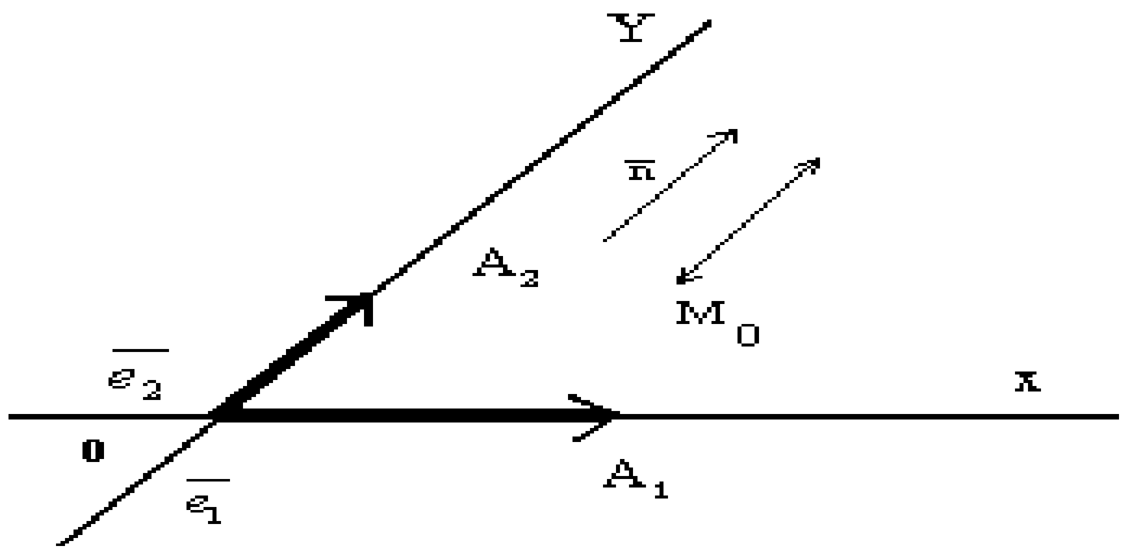
Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$berilgan bo’lsin. Tekislikdagi d to’g’ri chiziq o’zining $N_0(x_0,u_0)$ nuqtasi va yo’naltiruvchi $\vec{a}\,(a_1,a_2)$ vektorning berilishi bilan to’liq aniqlanadi. d to’g’ri chiziq tenglamasini yozaylik, ma’lumki tekislikdagi biror N(x,y) nuqta d to’g’ri chiziqda yotishi uchun $\overrightarrow{M_0N}$ vektor $\vec{a}$ vektorga kolleniar bo’lishi zarur va yetarlidir.

$$\overrightarrow{M_0N} = \lambda \vec{a} \qquad (13.1)$$

bundan

$$x = x_0 + \lambda a_1; \qquad y = y_a + \lambda a_2 \qquad (13.2)$$

λ - haqiqiy soni parametr deb aytiladi.



(13.1) tenglama d to'g'ri chiziqning **vektor parametrik tenglamasi** (13.2) tenglama d to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamasi** deyiladi.

(13.2) tenglamadan ushbu,

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2} \qquad (13.3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (13.3) ni to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi. Undan

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0$$

$$a_2x-a_1y+(a_1y_0-a_2x_0)=0 \qquad (13.4)$$

Bu yerda a_1 va a_2 lardan kamida bittasi noldan farqli, shu sababli (13.4) birinchi darajali tenglamadir.

Shuning bilan, ushbu muhim xulosaga keldik:

Har qanday to'g'ri chiziq birinchi tartibli algebraik chiziqdir.

b) Ikki nuqtasi bilan berilgan to'g'ri chiziq.

Affin koordinatalar sistemasiga nisbatan d to'g'ri chiziqning $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalari berilgan bo'lsin. M_1M_2=d to'g'ri chiziq tenglamasini yozaylik.

d to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb $\overline{M_1M_2}$ $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ vektorni olsak, (13.3) ga asosan d to'g'ri chiziq tenglamasi ushbu

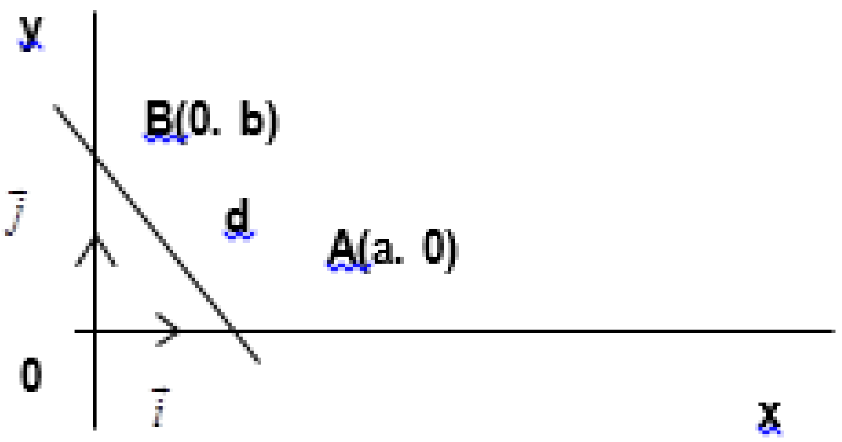
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (13.5)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

c) To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

To'g'ri chiziq OX o'qini A(a,0) nuqtada OY o'qini B(0,b) nuqtada kessin, u holda ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi (13.5) dan foydalansak (39-chizma)

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}, \qquad \text{yoki} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



39′-chizma

(13.5) da a,b sonlar to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari ni to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi.

d) To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Ordinata o'qini kesuvchi d to'g'ri chiziq olaylik. Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\bar{a}\,(a_1,a_2)$ bo'lsa, $\bar{a}$ va $\bar{e}_2$ vektorlar kolleniar bo'lmaydi, shuning uchun $a_1 \neq 0$.

2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini

$$Ax + By + C = 0 \tag{13.6}$$

tekshiraylik, ya'ni A,B,C larning ba'zi birlari nolga aylanganda to'g'ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylanishini o'rganaylik:

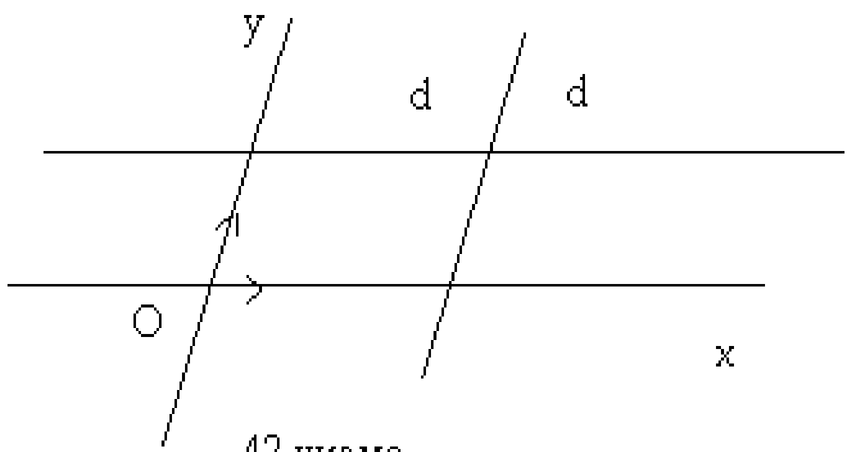
1. $C = 0$ bo'lsa, (13.6) tenglama ushbu $Ax + By = 0$ ko'rinishni oladi, 0 nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, demak, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi va aksincha $O \in d$ bundan $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Shunday qilib (13.6) to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tishi uchun $C=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

2. $A=0$ bo'lsin, (13.6) $\Rightarrow By+C=0$. $R(-B,0)$. Bu yo'naltiruvchi vektor e_1 koordinat vektorga kollinear, demak, $d \parallel OX$,

$$y = -\frac{C}{B}, \; -\frac{C}{B} = b, \; y = b.$$

Shunday qilib, $y = b$ tenglama ordinata o'qidan b kesma ajratgan va ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq (42-chizma).



42-чизма

Agar A=0, C=0=> By=0=> y=0, demak, d to'g'ri chiziq OX o'qi bilan ustma-ust tushadi.

4.B = 0 bo'lsa, bunda 2-holdagiga o'xshash d to'g'ri chiziq OY o'qqa parallel joylashadi (42-chizma) va bu holda C=0 bulsa, (Ax=0=>x=0) d to'g'ri chiziq OY o'qi bilan ustma-ust tushadi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagicha:

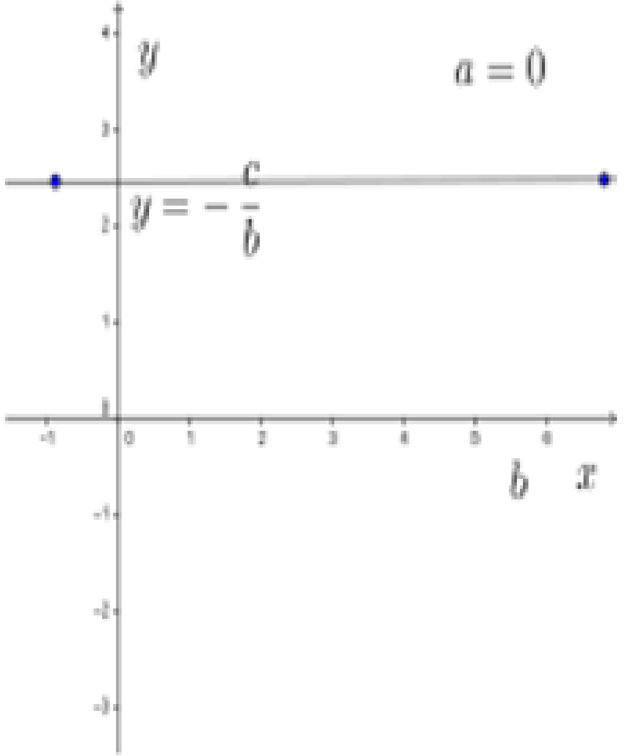
$$ax + by + c = 0 \qquad (*)$$

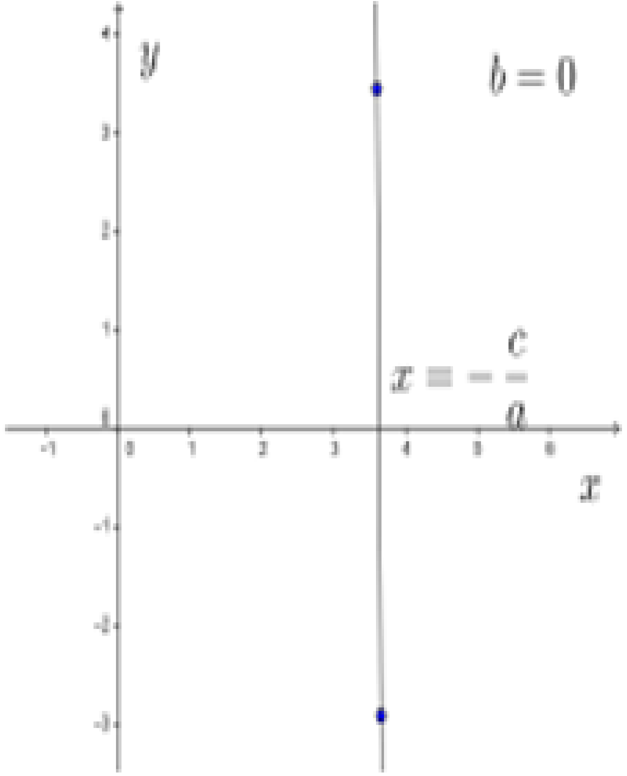
Bu yerda a, b, c berilgan sonlar. $(x; y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli nuqta.Unga mos to'g'ri chiziqning berilish usullarini qarab chiqamiz.

1. $a = 0$. U holda (*) dan $y = -\frac{c}{b}$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq x o'qiga parallel bo'ladi. (16.2 chizma)

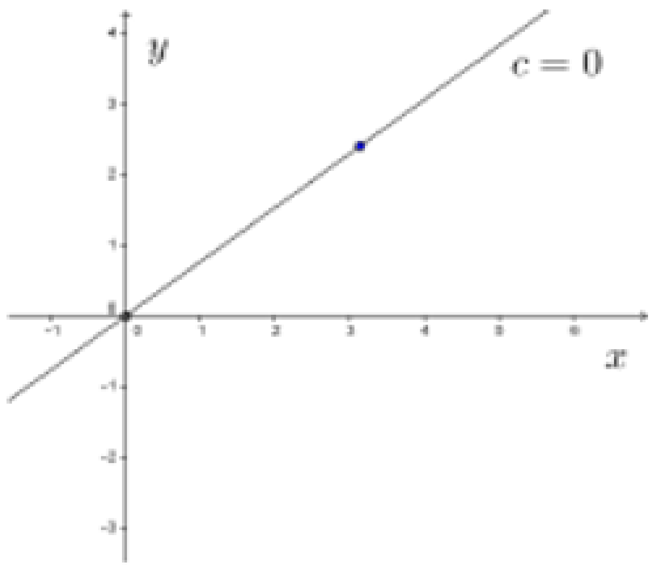
2. $b = 0$. U holda (*) dan $x = -\frac{c}{a}$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq y o'qiga parallel bo'ladi. (16.3 chizma)

3. $c = 0$. U holda (*) dan $ax + by = 0$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi. (16.4 chizma)





16.2 chizma 16.3 chizma



16.4 chizma

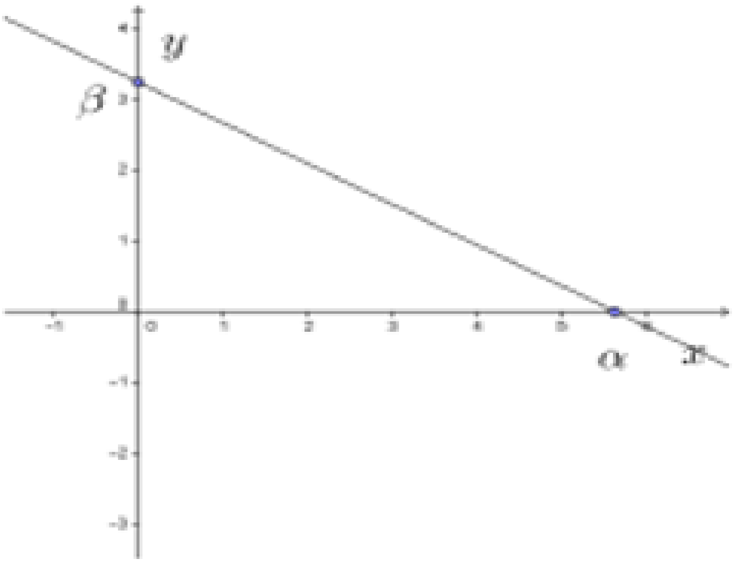
Faraz qilaylik $a \neq 0$ $b \neq 0$ va $c \neq 0$ bo'lsin. $ax + by + c = 0$ tenglikdan $ax + by = -c$ kelib chiqadi. Tenglikning ikkala tomonini $-c$ ga bo'lamiz.

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

Agar $-\frac{c}{a} = \alpha$ va $-\frac{c}{b} = \beta$ belgilashlarni kiritsak;

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \qquad (**)$$

(**) tenglikka to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi. Bu yerda α va β modul jihatdan to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar uzunligiga teng. (16.5 chizma)



(16.5 chizma)

To'g'ri chiziq parametrik tenglama bilan ham beriladi.

$$x = at + b, \quad y = ct + d \qquad -\infty < t < \infty \quad (***)$$

Misollar:

1. a, b, c ning qanday qiymatlarida $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziq x o'qining musbat (manfiy) yo'nalishini kesib o'tadi.

2. a, b, c ning qanday qiymatlarida $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziq koordinatalar tekisligining birinchi choragini kesib o'tmaydi.

3. Ushbu $ax + by + c = 0$ va $ax - by + c = 0$ tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar x o'qiga nisbatan simmetrik joylashganligini ko'rsating.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

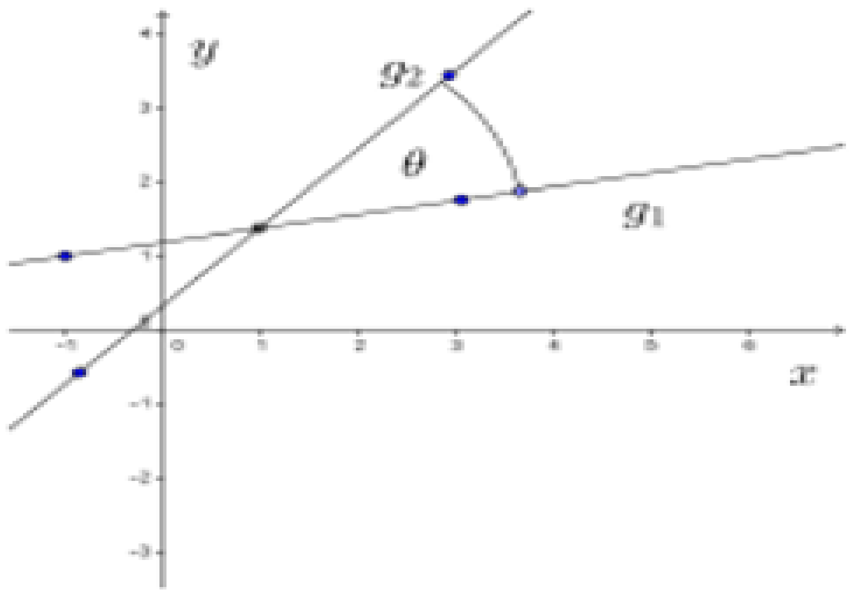
Faraz qilaylik bizga y o'qiga parallel bo'lmagan g_1 va g_2 to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. $\theta(g_1;g_2)$ orqali g_1 va g_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni belgilaymiz.

To'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak uchun quyidagi xossalar o'rinli.

(1) $\theta(g_1;g_2)=\theta(g_2;g_1)$

(2) $\theta(g_1;g_2)=0$ faqat va faqat shu holdaki to'g'ri chiziqlar parallel yoki ustma-ust tushsa.

(3) $\theta(g_3;g_1)=\theta(g_3;g_2)+\theta(g_2;g_1)$



16.6 chizma

Aytaylik

$$ax+by+c=0$$

to'g'ri chiziq y o'qiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziq bo'lsin. Tenglamani ikkala tomonini $\frac{1}{b}$ ga ko'paytirib, so'ngra $-\frac{a}{b}=k$ va $-\frac{c}{b}=l$ belgilashlarni inobatga olsak, biz quyidagi

$$y=kx+l \qquad (*)$$

formulaga ega bo'lamiz.

(*) formuladagi k va l koeffisientlar aniq geometric ma'noga ega:

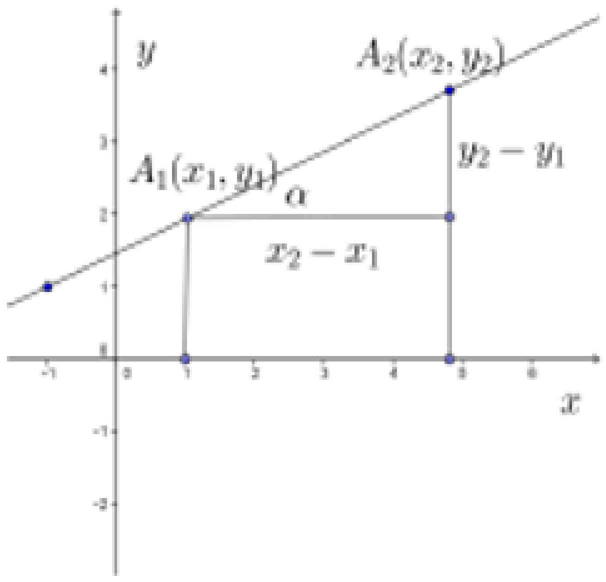
k - to'g'ri chiziqning x o'qi bilan tashkil qilgan α burchakning tangensidir.

l - to'g'ri chiziqning y o'qi bilan kesishishidan hosil bo'lgan kesmadir.

Haqiqatdan ham, aytaylik $A_1(x_1;y_1)$ va $A_2(x_2;y_2)$ nuqtalar to'g'ri chiziqning ikkita nuqtasi bo'lsin.(16.7 chizma)

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(kx_2 + l) - (kx_1 + l)}{x_2 - x_1} = k$$

To'g'ri chiziq y o'qini ($x = 0$ ekanidan $y = k \cdot 0 + l = l$ kelib chiqadi) $(0, l)$ nuqtada kesadi.



16.7 chizma

Faraz qilaylik bizga xy tekisligida ikkita

$$y = k_1 x + l_1 \text{ va } y = k_2 x + l_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin.

θ orqali bu ikki chiziq orasidagi burchakni belgilaymiz. Agar α_1 va α_2 lar mos ravishda yuqoridagi to'g'ri chiziqlar bilan x o'qi orasidagi burchaklarni belgilasak, (3) xossaga ko'ra

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

tenglik o'rinli.

$$k_1 = \tan \alpha_1, k_2 = \tan \alpha_2$$

ekanidan, biz

$$\tan \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (**)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu yerda $|\theta| < \pi$

Misollar:

1. Ikkita $ax+by+c=0$ va $bx-ay+c'=0$ to'g'ri chiziqlar to'g'ri burchak ostida kesishishini ko'rsating.

2. $y=x\cot\alpha$ $(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0)$ to'g'ri chiziqning x o'qi bilan tashkil qilgan burchagi nimaga teng?

3. Ushbu $x+2y=0$, $2x+y=0$ va $x+y=1$ tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.

4. Ushbu to'rtta , $\pm ax\pm by+c=0$ $(a,b,c\neq 0)$ to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan to'rtburchakning romb ekanini ko'rsating va koordinata o'qlari uning diagonallari ekanini isbotlang.

To'g'ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi.

Faraz qilaylik bizga xy tekisligida ikkita

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{va} \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin.

Ularning ko'rinishini

$$y=k_1x+l_1 \text{ va } \quad y=k_2x+l_2$$

kabi ham yozish mumkin. Bu yerda $k_i=-\dfrac{a_i}{b_i}$ va $l_i=-\dfrac{c_i}{b_i}$ $\quad i=\overline{1,2}$

1. Tabiiyki, agar berilgan to'g'ri chiziqlar ***parallel*** bo'lsa ular orasidagi burchak nolga teng. Biz bundan

$$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=0 \Rightarrow k_1-k_2=0$$

yoki

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \qquad (*)$$

natijani olamiz.

2. Agar berilgan to'g'ri chiziqlar ***perpendikulyar*** bo'lsa ular orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng. Biz bundan

$$\tan\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \infty \Rightarrow 1 + k_1k_2 = 0$$

yoki

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \qquad (**)$$

natijani olamiz.

Misollar:

1. Parametrik ko'rinishida berilgan

$$\begin{cases} x = \alpha_1 t + a_1 \\ y = \beta_1 t + b_1 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x = \alpha_2 t + a_2 \\ y = \beta_2 t + b_2 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning parallellik (perpendikulyarlik) shartlarini toping.

2. Umumiy ko'rinishda berilgan

$$ax + by + c = 0$$

to'g'ri chiziq va parametrik ko'rinishida berilgan

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning parallellik (perpendikulyarlik) shartlarini toping.