Mavzu

Lecture 15

The equation of a plane.

Ma’ruza 15

Fazoda koordinatalar metodi. Tekislikning turli tenglamalari

Darsning rejasi va maqsadi

- 1. Fazoda koordinatalar metodi.
- 2. Tekislikning dekart koordinatalar sistemasidagi turli tenglamalari.
- 3. Tekislikning affin koordinatalar sistemasidagi turli tenglamalari.
- ***Maqsadi :*** Fazoda koordinatalar metodi. Tekislikning turli tenglamalari haqida bilimlar berish, tasavvurlar hosil qilish.

Asosiy tushunchalar:

Tekislik, fazo, koordinatalar sistemasi, tekisliklarning o’zaro vaziyati, vektor, affin koordinatalar sistemasi, siniq chiziq, dekart koordinatalar sistemasi

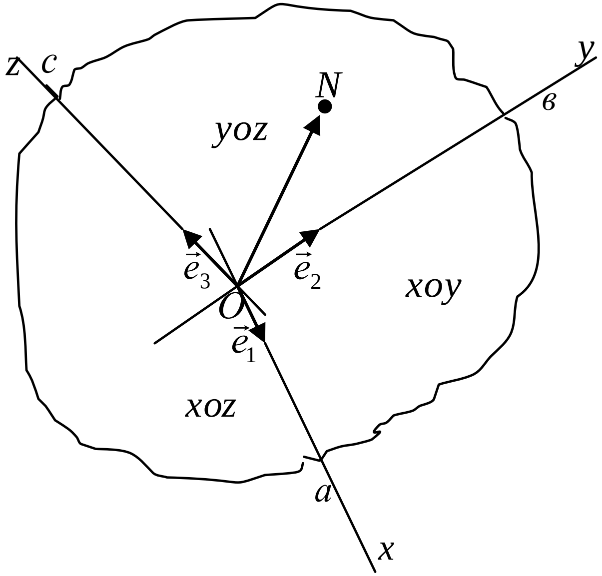
Tekshirish uchun savollar

1. Tekislik ning turli tenglamalarini ayting.
2. Eekislik ning umumiy tenglamasi deb nimaga aytiladi?
3. Umumiy tenglama bilan berilgan tekislik ning normal vektorini ayting.
4. Agar C = 0 bo’lsa, tekislik qanday vaziyatda bo’ladi?
5. Agar A = 0 bo’lsa, tekislik qanday vaziyatda bo’ladi?
6. Agar B= 0 bo’lsa, tekislik qanday vaziyatda bo’ladi?
7. Agar C= 0 bo’lsa, tekislik qanday vaziyatda bo’ladi?

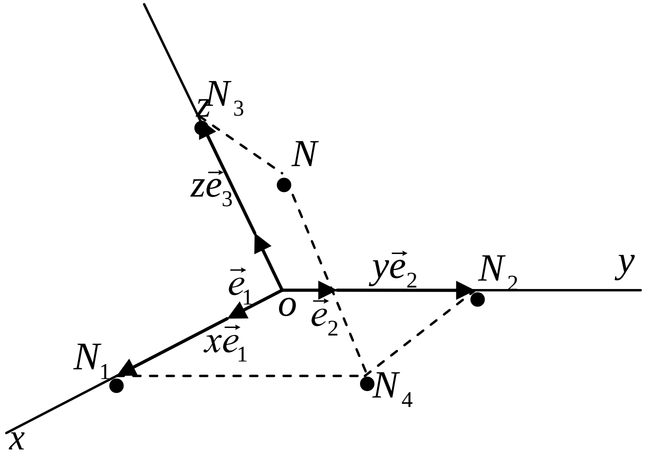
Bu va keyingi boblarda fazodagi geometriya bilan shug'ullanamiz, shuning uchun uch o'lchovli vektor fazo vektorlaridan foydalanamiz. Komplanar bo'lmagan ixtiyoriy uchta vektor bu fazoning bazis vektori bo'lishi ravshan.

Fazoga koordinatalar sistemasi, tekislikdka qanday kiritilgan bo'lsa, shunday kiritiladi.

Fazoning ixtiyoriy O nuqtasiga qo'yilgan uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ bazis vektorlar berilgan bo'lsin (110-chizma).



110-chizma



111-chizma

Bu vektorlar orqali o'tuvchi a, b va c to'g'ri chiziqlarni olamiz ($a \cap b \cap c = 0$).

2-masala. $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ va $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar berilgan. Ular orasidagi burchak kosinusini toping.

Echish. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (3.2)$$

3-masala. $N_1(x_1; y_1; z_1)$, $N_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orasidagi masofani toping.

Echish. Bu nuqtalar orasidagi masofani $\rho(N_1, N_2)$ bilan belgilaymiz.

$\overrightarrow{N_1N_2}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

$$\rho(N_1, N_2) = \left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (3.3)$$

4-masala. Uchlari $A(7, 2, 4)$, $B(4, -2, 2)$, $C(6, -7, 8)$, $D(9, -1, 10)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini isbotlang.

Isboti. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorlarning uzunliklarining tengliklarini va $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ shartning o'rinli ekanligini ko'rsatish etarli.

$\overrightarrow{AB}(-3, -6, -2)$, $\overrightarrow{BC}(2, -3, 6)$, $\overrightarrow{CD}(3, 6, 2)$, $\overrightarrow{AD}(2, -3, 6)$.

Bundan $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 49$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -6 + 18 - 12 = 0$, demak $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

Ta’rif. Musbat yo’nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlar bilan aniqlangan $a,\ b$ va c to’g’ri chiziqlardan iborat bo’lgan sistemani fazodagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi. $(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ bilan belgilanadi (111-chizma).

O nuqtani koordinatalar boshi, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlarni koordinata vektorlari deyiladi. a to’g’ri chiziqni ox bilan belgilab absissalar o’qi, b to’g’ri chiziqni oy bilan belgilab ordinatalar o’qi, c to’g’ri chiziqni esa oz bilan belgilab aplikata o’qi deb ataymiz. Bu o’qlarning har ikkitasi bilan aniqlangan uchta $xoy,\ xoz,\ yoz$ tekisliklarni koordinata tekisliklari deyiladi.

$(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ - affin koordinatalar sistemasi, N - fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. $\overrightarrow{ON}$ vektorni bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar yordamida yoyib yozish mumkin, ya’ni

$$\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (1.1)$$

Bu erdagi x, y, z haqiqiy sonlar $\overrightarrow{ON}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazislarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\overrightarrow{ON}(x; y; z)$ ko’rinishda yoziladi. $\overrightarrow{ON}$ vektorning x, y, z koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi. x soni N nuqtaning absissasi, y soni ordinatasi, z soni aplikatasi deyiladi va $N(x; y; z)$ ko’rinishda yoziladi.

Agar affin koordinatalar sistemasining koordinata $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlari o'zaro ortogonal va birlik vektorlar bo'lsa, u holda bunday affin koordinatalar sistemasini to'g'ri burchakli dekart yoki qisqacha dekart koordinatalar sistemasi deyiladi.

Boshi O nuqtada bo'lgan bunday koordinatalar sistemasini $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bilan belgilaymiz (113-chizma), bu erda $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1,\ \vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$.

Bu to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidan foydalanib, metrik masalalar echiladi.

1-masala. $\vec{a}(x; y; z)$ vektor uzunligini toping.

Echish. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yozib olsak, u holda I bob 6-§ ga asosan uning uzunligi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3.1)$$

ga teng bo'ladi.

Fazoda affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda fazo nuqtalari to'plami bilan ma'lum tartibda olingan haqiqiy sonlar $(x, y, z) \in R^3$ uchliklari to'plami orasida biektiv moslik mavjud bo'ladi.

Agar $z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta xoy koordinata tekisligida yotadi, chunki $\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar bir tekislikda yotadi. Shunga o'xshash $y = 0$ bo'lsa, N nuqta xoz tekisligida yotadi, $x = 0$ bo'lsa, N nuqta yoz tekisligida yotadi.

Agar $y = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta absissa o'qida yotadi, agar $x = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta ordinata o'qida, agar $x = y = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta aplikata o'qida yotadi, agar $x = y = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi.

Agar N nuqtaning x, y, z koordinatalari berilgan bo'lsa, $(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan N nuqtaning fazodagi vaziyatini (1.1) formuladan foydalanib aniqlasa bo'ladi. Koordinatalar boshidan $\overrightarrow{ON_1} = x\vec{e}_1$ vektorni qo'yamiz (111-chizma), undan keyin $\overrightarrow{N_1N_4} = \overrightarrow{ON_2} = y\vec{e}_2$ vektorni qo'yamiz, oxirida $\overrightarrow{N_4N} = \overrightarrow{ON_3} = z\vec{e}_3$ vektorni qo'yamiz. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON}_1 + \overrightarrow{N_1N_4} + \overrightarrow{N_1N} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Shunday qilib, N nuqta izlangan nuqta. ON_1N_4N siniq chiziqni koordinata siniq chizig'i deyiladi. Demak, fazodagi N nuqtani yasash uchun uning koordinata siniq chizig'ini yasash kifoya.

Uchta koordinata tekisligi birgalikda fazoni sakkiz qismga ajratadi, ularning har biri oktanta deb ataladi. Quyidagi jadvalda oktantalar va undagi koordinatalarning ishoralari belgilangan.

октанта / координаталар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

$A_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта текисликда берилган нуқта ва n вектор текисликга перпендикуляр бўлган нол бўлмаган вектор бўлсин. Текисликнинг ихтиёрий $A(x, y, z)$ нуқтаси бўлиб, $\overrightarrow{A_0A}$ ва n векторлар ўзаро перпендикуляр. Натижада

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad (1)$$

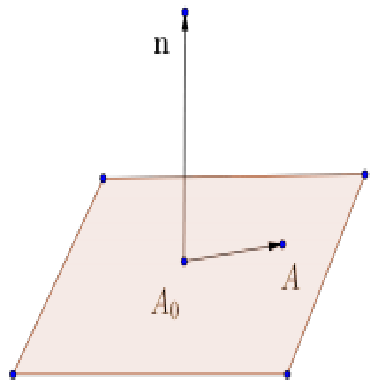
тенглик ўринли бўлади.

a, b, c лар e_x e_y, e_z базис векторлар билан ҳосил қилинган n векторнинг координаталари бўлсин.

У ҳолда $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$, бўлиб, (1) тенгликдан

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

келиб чиқади.



Текислик тенгламаси

Бу тенглама шартли тенгламадир.

Form the equation of an arbitrary plane in the rectangular Cartesian coordinates ***xyz***.

Let $\mathbf{A_0(x_0, y_0, z_0)}$ be a point in a plane and $\mathbf{n}$ a nonzero vector perpendicular to the plane. Then whatever the point of the plane $\mathbf{A(x, y, z)}$ is, the vectors $\overrightarrow{A_0A}$ and $\mathbf{n}$ are mutually perpendicular (Fig. 19.1). Hence,

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad (\ast)$$

Let $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ be the coordinates of the vector $\mathbf{n}$ with respect to the basis $\mathbf{e}_x$ $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$.

Then, since $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$, it follows from $(\ast)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (\ast\ast)$$

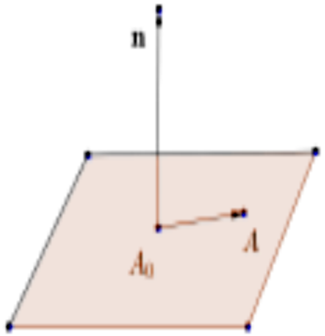


Figure 19.1: Equation of a plane

Ҳар қандай текисликнинг тенгламаси x, y, z ларга нисбатан чизиқли тенглама. Бундан Декарт координаталар системасидан бошқасига ўтилганда ҳам у чизиқли тенглама бўлиши келиб чиқади. Биз бу текислик тенгламасини Декарт координаталар системасида чизиқли эканлигини айта оламиз.

Келинг текисликнинг бошқа бирор кўринишдаги тенгламасини қарайлик.

$ax + by + cz + d = 0$

x_0, y_0, z_0 лар берилган тенгламанинг ечимлари бўлсин. У ҳолда

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ тенглик ўринли бўлиб уни қуйидаги

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$ (3)

кўринишида ҳам ёзиш мумкин.

Thus, *the equation of any plane is linear relative to the coordinates* x, y, z.

Since the formulas for transition from one Cartesian system of coordinates to another are linear, we may state that *the equation of a plane is linear in any Cartesian system of coordinates* (but not only in a rectangular one).

Let us now show that *any equation of the form*

$$ax + by + cz + d = 0$$

is the equation of a plane.

Let x_0, y_0, z_0 be a solution of the given equation. Then

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

and the equation may be rewritten in the from

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (***)$$

n вектор e_x, e_y, e_z базис векторлар асосида тузилган a, b, c координаталарга эга вектор A_0 нуқта x_0, y_0, z_0 координатали нуқта A нуқта x, y, z координаталарга эга нуқта. У ҳолда тенгламани (3) кўринишига эквивалент

$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0.$ кўринишини ёзишимиз мумкин.

Текисликнинг координаталар текислигига нисбатан жойлашуви

Келинг текскликнинг координаталар бошига нисбатан жойлашувини унинг тенгламаси аниқ бир кўринишини олингандаги ҳолатларини аниқлайлик.

Let $\mathbf{n}$ be a vector with the coordinates a, b, c with respect to the basis e_x, e_y, e_z, A_0 a point with the coordinates x_0, y_0, z_0 and A a point with the coordinates x, y, z. Then the equation (***) can be written in the equivalent form

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Whence it follows that all points of the plane passing through the point A_0 and perpendicular to the vector $\mathbf{n}$ (and only they) satisfy the given equation and, consequently, it is the equation of this plane.

Let us note that the coefficients of x, y, z in the equation of the plane are the coordinates of the vector perpendicular to the plane relative to the basis e_x e_y, e_z.

1. $a = 0, b = 0.$ n вектор z ўқига параллел. Текислик xy текислигига параллел. Agar d=0 bo’lsa xy tekisligidan idorat bo’ladi.
2. b=0, c=0 bo’lsa tekislik yz tekisligiga parallel bo’ladi. Agar d=0 bo’lsa yz tekisligidan iborat bo’ladi.
3. c=0, a=0 bo’lsa tekislik xz tekisligiga parallel bo’ladi. Agar d=0 bo’lsa xz tekisligidan iborat bo’ladi.
4. a=0, b≠0, c≠0 bo’lsa n vektor x o’qiga perpendikulyar bo’ladi. d=0 bo’lsa x o’qidan iborat bo’ladi.
5. a≠0, b=0, c≠0 bo’lsa y o’qiga parallel bo’ladi. d=0 bo’lsa y o’qidan iborat bo’ladi.
6. a≠0, b≠0, c=0 bo’lsa z o’qiga parallel bo’ladi. d=0 bo’lsa z o’qidan iborat bo’ladi.
7. d=0 bo’lsa

1. $a = 0, b = 0.$ Vector $\mathbf{n}$ (perpendicular to the plane) is parallel to the z-axis. The plane is parallel to the xy-plane. In particular, it coincides with the xy-plane if d is also zero.
2. $b = 0, c = 0.$ The plane is parallel to the yz-plane and coincides with it if $d = 0.$
3. $c = 0, a = 0.$ The plane is parallel to the xz-plane and coincides with it if $d = 0.$
4. $a = 0, b \neq 0, c \neq 0.$ Vector $\mathbf{n}$ is perpendicular to the x-axis: $e_x\mathbf{n} = 0.$ The plane is parallel to the x-axis, in particular, it passes through it if $d = 0.$
5. $a \neq 0, b = 0, c \neq 0.$ The plane is parallel to the y-axis and passes through it if $d = 0.$
6. $a \neq 0, b \neq 0, c = 0.$ The plane is parallel to the z-axis and passes through it if $d = 0.$
7. $d = 0.$ The plane passes through the origin (whose coordinates 0, 0, 0 satisfy the equation of the plane).