6-MAVZU : MURAKKAB VA TESKARI FUNKSIYALARNING HOSILALARI

REJA:

- 1. Murakkab funksiyaning hosilasi.
- 2. Teskari funksiya hosilasi.
- 3. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.

1. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, y=F(u) murakkab funksiya bo'lsin ya'ni y=F(u), $u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$, u - o'zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. y=F(u) va $u=\varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema: Murakkab F(u) funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiya oraliq argumenti bo'yicha hosilasini oraliq argumentining erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = F'_u(u)\cdot u'_x(x) \text{.......}(1)$$

Misol: $y=(x^5+4x^4+3x^2+2)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz ya'ni $y=u^5;\quad u=x^5+4x^4+3x^2+2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x = y'_u\cdot u'_x = \left((x^5+4x^4+3x^2+2)^5\right)' = 5(x^5+4x^4+3x^2+2)^4\cdot(5x^4+16x^3+6x)$$

Theorem 6.7 ("Chain rule") Aytaylik $f(x)$ funksiya $x_0 \in R$ nuqtada hosilaga ega bo'lsin va $g(y)$ funksiya $y_0 = f(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsin. U holda $g \circ f(x) = g(f(x))$ kompozitsiya x_0 nuqtada hosilaga ega va

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \quad \textbf{(6.7)}$$

Misollar(6.8)

i) $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ akslantirish $f(x) = 1-x^2$ funksiyaning kompozitsiyasi. hosilasi $f'(x) = -2x$ va $g(y) = \sqrt{y}$ uchun $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, u holda 6.7 ga ko'ra

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ii) $h(x) = e^{\cos x}$ funksiya $f(x) = \cos 3x$ funksiya uchun kompozitsiya, $g(y) = e^y$. Ammo $f(x)$ funksiya $\varphi(x) = 3x$ ning kompozitsiyasi va $\psi(y) = \cos y$. 6.7 ga ko'ra $f'(x) = -3\sin 3x$. Boshqa tomondan $g'(y) = e^y$. 6.7 dan yana bir marta foydalansak

$$h'(x) = -3e^{\cos 3x}\sin 3x$$

kelib chiqadi.

Misollar(6.10)

i) $y = f(x) = \tan x$ funksiya hosilasi $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ va teskarisi $x = f^{-1}(y) = \arctan y$. (6.9) ga ko'ra

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$f^{-1} = g$ uchun $g(x) = \arctan x$, u holda

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Examples 6.10

i) The function $y = f(x) = \tan x$ has derivative $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ and inverse $x = f^{-1}(y) = \arctan y$. By (6.8)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Setting for simplicity $f^{-1} = g$ and denoting the independent variable with x, the derivative of $g(x) = \arctan x$ is the function $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Claudio Canuto, Anita Tabacco " Mathematical analysis I" pp 174

ii) $y = f(x) = \sin x$;u $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda teskarilanuvchi bo'ladi.

$x = f^{-1}(y) = \arcsin y$ ma'lumki $f'(x) = \cos x$. Agar biz $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

tenglikni inobatga olsak $f'(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ tenglikka ega bo'lamiz. (6.9) ga ko'ra

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$f^{-1} = g$ uchun $g(x) = \arcsin x$, u holda

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Xuddi shunga o'xshash $g(x) = \arccos x$ uchun $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Claudio Canuto, Anita Tabacco " Mathematical analysis I" pp 174

iii) $y = f(x) = a^x$ uning hosilasi $f'(x) = (\log a)a^x$ va uning teskarisi $x = f^{-1}(y) = \log_a y$, (6.9) ga ko'ra

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(\log a)a^x} = \frac{1}{(\log a)y}$$

U holda $g(x) = \log_a x$ funksiya uchun $g'(x) = \dfrac{1}{(\log a)x}$ o'rinli.

Bibliography:

Claudio Canuto, Anita Tabacco " Mathematical analysis I" pp 173-174

3.Higher Derivatives

If the derivative function $f'(x)$ is the input to the operator box illustrated in the figure (1), then the output function is denoted $f''(x)$ and represents a **derivative of a derivative called a second derivative**. Higher ordered derivatives are defined in a similar fashion with $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n y}{dx^n}$ which states that the derivative of the(n − 1)st derivative is the nth derivative. The function $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ is called a first derivative, $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ is called a second derivative, $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ is called a third derivative $f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ is called a n-th derivative.

Yuqori tartibli hosilalar.

Agar funktsiyaning hosilasi $f'(x)$ (1) da ko'rsatilganidek kiruvchi operator bo'lsa, u holda chiquvchi funktsiyani $f''(x)$ deb belgilaymiz va u hosilaning hosilasi bo'lib, ikkinchi tartibli hosila deb ataladi. Yuqori tartibli hosilalar ham shunga o'xshash ta'riflanadi va $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n y}{dx^n}$ kabi belgilanib, $(n-1)$ –tartibli hosilaning hosilasi, ya'ni n-tartibli hosila deb nomlanadi. $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ funktsiya birinchi tartibli hosila deb, $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ funktsiya ikkinchi tartibli hosila deb, $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ uchinchi tartibli hosila deb, $f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ esa n-tartibli hosila deb ataladi.

Adabiyot: J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, p .90-91 prop.of int.

1-misol. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ bo'lsa,

$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots+a_{n-1},$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$y^{(n)}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot a_0=a_0\,n!,$$

$$y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\ldots=0.$$

Demak, n – darajali ko'phadning n – tartibli hosilasi o'zgarmas son bo'lib, $(n+1)$- tartibli hosilasidan boshlab yuqori tartibli hosilalarining barchasi nolga teng bo'lar ekan.

2-misol. $f(x)=e^{kx}$, k – o'zgarmas $(k\neq0)$.

$$f'(x)=e^{kx}(kx)'=ke^{kx};$$

$$f''(x)=(f'(x))'=(ke^{kx})'=k(e^{kx})'=k\cdot ke^{kx}=k^2e^{kx}$$

va hokazo,

$$f^{(n)}(x)=k^ne^{kx}$$

ni olamiz. Demak,

$$(e^{kx})^{(n)}=k^ne^{kx},\ n\in N$$

3-misol. $f(x)=sinx.$

$$f'(x)=cosx=sin(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x)=(f'(x))'=(sin(x+\frac{\pi}{2}))'=cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1=sin(x+\pi),$$

- -

$$f^{(n)}(x)=sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

ya'ni $\quad (sinx)^{(n)}=sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}), \quad n\in N$

4-misol. $f(x)=cosx.$

Yuqoridagiga o'xshash,

$$(cos\,x)^{(n)}=cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}), \quad n\in N$$

ni olish mumkin.

5-misol. $f(x)=U\cdot V,$ bu yerda U va V lar ixtiyoriy tartibli hosilalari mavjud funksiyalardir.

$$(U\cdot V)'=U'V+UV'$$

$$(UV)''=(U'V+UV')'=U''V+U'V'+U'V'+UV''=U''V+2U'V'+UV''$$

va hokazo.

$$(U\cdot V)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^K\,U^{(n-k)}\cdot V^{(k)}$$

3-misol. $f(x)=\sin x$.

$$f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x)=(f'(x))'=(\sin(x+\frac{\pi}{2}))'=\cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1=\sin(x+\pi),$$

- -

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

ya'ni $\quad (\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}), \quad n\in N$

4-misol. $f(x)=\cos x$.

Yuqoridagiga o'xshash,

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}), \ n\in N$$

ni olish mumkin.

5-misol. $f(x)=U \cdot V$, bu yerda U va V lar ixtiyoriy tartibli hosilalari mavjud funksiyalardir.

$$(U \cdot V)'=U'V+UV'$$

$$(UV)''=(U'V+UV')'=U''V+U'V'+U'V'+UV''=U''V+2U'V'+UV''$$

va hokazo.

$$(U \cdot V)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^K U^{(n-k)} \cdot V^{(k)}$$

ni olish mumkin. Bu *Leybnis formulasi* deb yuritiladi. Bu yerda nolinchi tartibli hosila funksiyaning o'zi ekanligini eslash lozim.

Endi, yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritamiz. Buning uchun funksiya differensialini uning birinchi tartibli differensiali argument orttirmasini o'zgarmas deb qabul qilgan holda $(n-1)$ – tartibli differensialning differensialini *n-tartibli differensial deb ataymiz* va uning uchun $d^n y$, $d^n f(x)$ kabi belgilashlarni qo'llaymiz.

Demak, ta'rif bo'yicha $d^n y=d(d^{n-1}y)$ ekan. Oxirgi formula asosida

$$d^2y=d(dy)=d[f'(x)dx]=(f''(x)dx)dx=f''(x)dx^2$$

va hokazo,

$$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n$$

formulani olamiz.

Bu yerda *ikkinchi va undan yuqori tartibli differensiallar birinchi tartibli differensialning invariantlik xossasiga ega emasligini ammo, oraliq o'zgaruvchi bo'lgan murakkab funksiya argumenti (erkli o'zgaruvchi)ning chiziqli funksiyasi bo'lgan holda bu xossa saqlanishini aytamiz.*

Yuqori tartibli hosila ma'nolariga kelsak, agar moddiy nuqta $S=S(t)$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsa, undan (yo'l funksiyasidan) olingan birinchi tartibli hosila moddiy nuqtaning tezligi $\vartheta=\vartheta(t)$ ekanligi bizga ma'lum, ya'ni

$$\vartheta=\frac{dS}{dt}.$$

Agar tezlanishni qaralsa,

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}=\frac{d\vartheta}{dt}$$

ekanligini chiqarish qiyin emas. Yoki

$$a=\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)=\frac{d^2S}{dt^2}.$$

Demak, *to'g'ri chiziqli harakatda bo'lgan moddiy nuqtaning tezlanishi uning yo'l funksiyasidan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng* ekan. Bu ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosidir. Geometrik ma'nosini keyinroq ko'ramiz.

10.6. Differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi teoremalar

Bu bandda differensial hisobida nazariy tatbiqlari muhim ahamiyatga ega bo'lgan teoremalarni keltiramiz.

10.6.1-teorema (Ferma). Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a;b)$ nuqtada eng kichik yoki eng katta qiymatga erishsa va shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, $f'(x_0)=0$ bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = f(x_0)$ deylik. U holda,

$\forall x \in (a;b)$ $f(x) \leq f(x_0)$ o'rinlidir. Endi, x_0 nuqtaga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasi Δy ni olsak,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

bo'ladi. U holda,

$$\Delta x<0 \text{ bo'lganda } \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0,$$

$$\Delta x>0 \text{ bo'lganda } \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \; .$$

Oxirgi tengsizliklarda $\Delta x \to 0$ dagi limitga o'tib, $f'(x_0)$ mavjudligini hisobga olsak,

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ va } f''(x_0) \leq 0$$

larni olamiz. Bulardan $f'(x_0)=0$ kelib chiqadi.

$\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x) = f(x_0)$ hol ham huddi shunga o'xshash qaraladi.

Teorema isbotlandi.

10.6.2–teorema(Roll). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida teng $(f(a)=f(b))$ qiymatlar qabul qilsa, $(a;b)$ oraliqda shunday c nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng $(f'(c)=0)$ bo'ladi.

Isbot. Agar $[a;b]$ da funksiya o'zgarmas bo'lsa, teorema isboti aniqdir, ya'ni c nuqta sifatida $(a;b)$ ning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin, chunki bu oraliqda funksiya hosilasi nolga teng bo'ladi. Demak, funksiya $[a;b]$ da o'zgaruvchi bo'lgan holni qarash kifoyadir. Bu holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi sababli, bu kesmada shunday x_1 va x_2 nuqtalar mavjud bo'ladiki, ularda funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi. Bu nuqtalardan aqalli bittasi $(a;b)$ ning ichki nuqtasidan iborat bo'ladi, (aks holda funksiya o'zgarmas bo'lib qolar edi), o'shani c deb olib, isbotlangan Ferma teoremasiga ko'ra $f'(c)=0$ ni olamiz. Teorema isbotlandi.

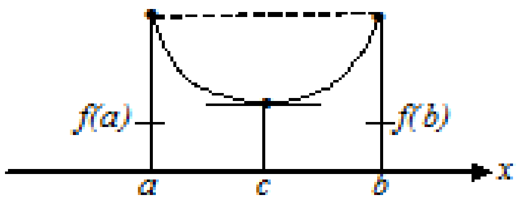
10.6.3–teorema(Lagranj). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, $(a;b)$ oraliqda shunday c nuqta topiladiki, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ o‘rinli bo‘ladi.

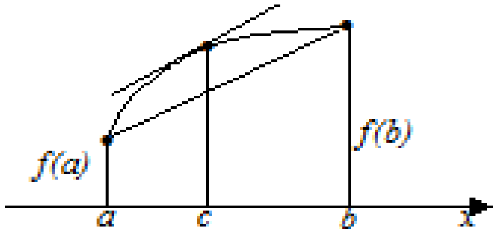
Isbot. $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ yordamchi funksiyani kiritsak, u yuqoridagi Roll teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Demak, shunday $c\in(a;b)$ mavjudki, $\varphi'(c)=0$ bo‘ladi.

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

da $x=c$ desak, teorema isboti kelib chiqadi.

Yuqorida keltirilgan Roll va Lagranj teoremalari quyidagicha geometrik talqinlarga ega. Ya’ni, Lagranj teoremasi shartlari bajarilsa, aqalli bitta shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, grafikning bu nuqtasiga o‘tkazilgan urinma grafik chetki nuqtalarini tutashtiruvchi kesmaga parallel bo‘ladi. Roll teoremasida grafik chetki nuqtalarini tutashtiruvchi kesma Ox o‘qiga parallel bo‘lganligi sababli urinma abssissalar o‘qiga paralleldir (10.6.1-rasmga qarang). Shu bilan birga bunday nuqta aqalli bitta bo‘lishi aytilgan bo‘lib, ular bir nechta bo‘lishi ham mumkindir.





10.6.1-rasm

10.6.4 - teorema (Koshi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, shunday $c \in (a;b)$ topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. Avval teorema xulosasidagi tenglikning har ikki tomonidagi ifodalar ham ma'noga ega ekanligini aytamiz. Haqiqatdan ham, o'ng tomon uchun bu ayondir. Chap tomonni olsak, nisbat ma'noga ega bo'lmasligi uchun $g(a)=g(b)$ bo'lishi kerak, bu holda Roll teoremasi asosida $(a;b)$ ning biror ichki nuqtasida $g'(x)=0$ bo'lishi kerak, bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, $g(a) \neq g(b)$ ekan.

Endi,

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot [\varphi(x) - \varphi(a)]$$

funksiya yordamida teorema isbotiga kelamiz (bunga ishonch hosil qilishni o'quvchining o'ziga qoldiramiz).

1-eslatma. Lagranj teoremasi xulosasidagi tenglikda $a=x_0$; $b=x_0+\Delta x$ deb faraz qilinsa, uni

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\,\Delta x)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi, bu yerda $c=x_0+\theta\Delta x$ deb olingan bo'lib, $0<\theta<1$. Oxirgidan esa,

$$\Delta y=f'(x_0+\theta\,\Delta x)\cdot\Delta x$$

ga kelamiz. Bu funksiya orttirmasi uchun yana bir formula bo'lib, uni *chekli orttirmalar formulasi* deb yuritiladi.

2-eslatma. Agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, u bu atrofda uzluksizligi ma'lumdir. Bu holda uning hosilasi $f'(x)$ x_0 nuqtada yoki uzluksiz bo'lishi yoki ikkinchi jins uzilishga ega bo'lishi, ammo, birinchi jins uzilishga ega bo'laolmasligi isbotlangandir.

Haqiqatdan ham, agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ ning hosilasi mavjud bo'lib, bu nuqtada $f'(x)$ birinchi jins uzilishga ega deb faraz qilsak, $f'(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)$ yoki $f'(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0}f'(x)$ lardan aqqalli bittasi o'rinli bo'lishi kerak. Ammo, funksiya differensiallanuvchi bo'lganligi sababli

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli hosila hamda bir tomonli

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

hosilalar mavjuddir. Ikkinchi tomondan Lagranj teoremasi asosida $\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ ni olamiz. Bu yerda $0<\theta<1$ va bundan

$$\lim_{x\to x_0\pm 0}f'(x)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}f'(x_0+\theta\,\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

bo'lib, $f'(x)$ ning uzluksiz bo'lishi, ya'ni qilingan faraz noto'g'ri ekanligi kelib chiqadi. Bu esa, funksiyaning nuqtadagi bir tomonli hosilasi bilan hosilasining bir tomonli limiti aynan tushunchalar emasligini ko'rsatadi.

Masalan.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

funksiyani olsak, uning hosilasi $x\in(-\infty;\ \infty)$ mavjuddir.

Haqiqatdan ham,

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$

hamda $f'(-0)=f'(+0)$ ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

Bundan $x=0$ nuqtada $f'(0)=0$ mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to-0} f'(x)$ va $\lim\limits_{x\to+0} f'(x)$ limitlarning ikkalasi ham mavjud emasligini ko‘rish qiyin emasdir. Demak, bu funksiyaning hosilasi 0 nuqtada mavjud bo‘lib, bu nuqtada ikkinchi jins uzilishga egadir.

Yuqori tartibli hosilalar

Faraz qilaylik, biror (a,b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a,b) da aniqlangan funksiya bo‘ladi. Demak, hosil bo‘lgan funksiyaning hosilasi, ya’ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa, uni $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta’rif bo‘yicha $y''(x)=(y')'$ ekan.

Shunga o‘xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo‘lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi. Demak, ta’rif bo‘yicha $y'''=(y'')'$.

Berilgan funksiyaning to‘rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o‘xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n-tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta’rif bo‘yicha n-tartibli hosila $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

Misol. $y=x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, demak $y'''(2)=24\cdot 2=48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n- tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini hisoblash zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi bir elementar funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y=x^{\mu}$ $(x>0,\ \mu\in R)$ funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y'=\mu x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)\,x^{\mu-2}$, . . .

Bundan

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad (8.1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning n=1 uchun o'rinliligi yuqorida ko'rsatilgan. Endi (1) formula $n=k$ da o'rinli, ya'ni $y^{(k)}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo'lsin deb, uning $n=k+1$ da o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Shuning uchun

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})=(\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (8.1) formulaning $n=k+1$ da ham o'rinli bo'lishini bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko'ra (8.1) formula $\forall n\in N$ uchun o'rinli.

(8.1) da μ=-1 bo'lsin. U holda $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (8.2)$$

formula bilan topiladi.

2) $y=\ln x$ ($x>0$) funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyainng birinchi hosilasi $y'=\frac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (8.2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (8.3)$$

formula kelib chiqadi.

3) $y=\sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y'=\cos x$. Biz uni quyidagi

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ngra $y=\sin x$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$y''=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=(-\sin x)'=-\cos x=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(IV)})=(-\cos x)'=\sin x=\sin(x+4\cdot\frac{\pi}{2})$$

Bu ifodalardan esa $y=\sin x$ funksiyainng n-tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (8.4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Xuddi shunga o'xshash

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2}) \qquad (8.5)$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Masalan,

$$\cos x)^{(115)}=\cos(x+115\cdot\frac{\pi}{2})=\cos(x+\frac{3\pi}{2})=\sin x.$$

Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi.

1-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya yig'indisining n -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x)+v(x))^{(n)}=u^{(n)}(x)+v^{(n)}(x)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik $y=u+v$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz: $y'=u'+v'$, $y''=(y')'=(u'+v')'=u''+v''$.

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya'ni $n=k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$ tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta'rifi, hosilaga ega bo'lgan funksiyalar xossalaridan foydalanib $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})'= =(u^{(k)})'+(v^{(k)})'= u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko'ra $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o'rinli deb xulosa chiqaramiz.

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini n-tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi. Isbotini o‘quvchilarga qoldiramiz.

Misol. $y=\frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz: $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$. So‘ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \qquad (8.6)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladigan A va B koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda $2x+3=A(x-3)+B(x-2)$, yoki

$$2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ikki ko‘phadning tenglik shartidan (ikki ko‘phad teng bo‘lishi uchun o‘zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo‘lishi zarur va yetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi A=-7, B=9 ekanligini ko‘rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (8.1) tenglikka qo‘yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasini kuyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)}=-7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}+9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \qquad (8.7)$$

Endi $\frac{1}{x-2}$ va $\frac{1}{x-3}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topishimiz lozim. Buning uchun $u=\frac{1}{x+a}$ funksiyaning n-tartibli hosilasini bilish yetarli. Bu funksiyani $u=(x+a)^{-1}$ ko‘rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda $u'=-(x+a)^{-2}$, $u''=2(x+a)^{-3}$, $u'''=-2\cdot3(x+a)^{-3}=-6(x+a)^{-4}$.

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x+a)^{-n-1} \qquad (8.8)$$

Shunday qilib, (8.7) va (8.8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)}=-7\cdot(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}+9\cdot(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{9}{(x-3)^n}-\frac{7}{(x-2)^n}\right)$$

natijaga yerishamiz.

3-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega boʻlsa, u holda bu ikki funksiya koʻpaytmasining n -tartibli hosilasi uchun

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + \\ + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} \qquad (8.9)$$

formula oʻrinli boʻladi. Bunda $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Misol. $y=x^3e^x$ ning 20-tartibli hosilasi topilsin.

Yechish. $u=e^x$ va $v=x^3$ deb olsak, Leybnits formulasiga koʻra

$y^{(20)} = x^3(e^x)^{(20)} + C_{20}^1(x^3)'(e^x)^{(19)} + C_{20}^2(x^3)''(e^x)^{(18)} + C_{20}^3(x^3)'''(e^x)^{(17)} +$
$+C_{20}^4(x^3)^{(4)}(e^x)^{16} + \ldots + (x^3)^{(20)}e^x$ boʻladi. $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=6x$, $(x^3)'''=6$, $(x^3)^{(4)}=0$ tengliklarni va $y=x^3$ funksiyaning hamma keyingi hosilalarining 0 ga tengligini, shuningdek $\forall n$ uchun $(e^x)^{(n)}=e^x$ ekanligini eʼtiborga olsak,

$y^{(20)} = e^x(x^3 + 3C_{20}^1x^2 + 6C_{20}^2x + 6C_{20}^3)$ tenglik hosil boʻladi.

Endi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$C_{20}^1 = 20, \quad C_{20}^2 = \frac{20\cdot 19}{2} = 190, \quad C_{20}^3 = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{6} = 1140$$

Demak, $y^{(20)} = e^x(x^3 + 60x^2 + 1140x + 6840)$.