16-MAVZU:MUSBAT HADLI QATORLAR.

REJA

1.Taqqoslashbelgisi.

2.QatoryaqinlashishningDalamberKoshiva integral alomatlari.

1.Taqqoslashbelgisi.

Musbat hadli ikkita qator berilgan bo'lsin:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

$$b_1+b_2+b_3+...+b_n+... \qquad (2)$$

Bu qatorlar uchun quyidagi teoremalar o'rinli:

1-teorema. Agar (1) qatorninghadlari (2) qatorningmoshadlaridankattabo'lmasa, ya'ni

$$a_n \le b_n \ (n=1, 2, ...) \qquad (3)$$

bo'lsava (2) qatoryaqinlashuvchibo'lsa, u holda (1) qator ham yaqinlashuvchibo'ladi.

1-misol. Ushbuqator

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+...$$

yaqinlashadi, chunkiuninghadlari

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n+1}}+...$$

qatorningmoshadlaridankichik. Ammo keyingiqatoryaqinlashadi, chunkibuqatormaxrajі$q=1/2$ gatengbo'lgangeometrikprogressiyadaniborat. Bu holda 1-teoremaga asosan, berilganqator ham yaqinlashuvchibo'ladi.

2-teorema. Agar (2) qatorninghadlari (1) qatorningmoshadlaridankichikbo'lmasa, ya'ni

$$a_n \leq b_n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

bo'lsava (1) qatoruzoqlashuvchibo'lsa, u holda (2) qator ham uzoqlashuvchidir.

2-misol. Ushbu

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

qatoruzoqlashuvchi, chunkiuninghadlari, ikkinchihadidanboshlabuzoqlashuvchibo'lgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

garmonikqatorningmoshadlaridankatta.

1-izoh. Yuqoridaisbotlangan 1- va 2-taqqoslash teoremalarifaqatmusbathadliqatorlaruchuno'rinli. (1) va (2) qatorlarningba'zihadlarinollarbo'lganholuchun ham o'zkuchidaqoladi. Ammo qatorninghadlariorasidamanfiysonlarbo'lsa, bualomatlarto'g'ribo'lmaydi.

2-izoh. Agar (3) tengsizliklarbarcha$n$=1, 2, 3, ...uchunemas, balkifaqat$n\geq N$uchunbajarilaboshlasa, shuholdagina 1- va 2-teoremalar o'rinlidir.

2.QatoryaqinlashishningDalamberKoshiva integral alomatlari.

Teorema. Agar musbathadli

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

qator (n+1) hadiningn–hadiganisbati$n\to\infty$ da chekli l limitgaegabo'lsa, ya'ni

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\ell$$

bo'lsa, u holda:

1) l<1 bo'lgandaqatoryaqinlashadi.
2) l>1 bo'lgandaqatoruzoqlashadi.

Isboti. 1) l<1 bo'lsin. $l<q<1$ munosabatni qanoatlantiruvchi q sonini qaraymiz (1-shakl). Limitning ta'rifidan va (2) munosabatdan biror Nnomerdan boshlab, n-ning barcha qiymatlari uchun, ya'ni $k\leq N$uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \qquad (3)$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Haqiqatan, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ miqdor l ga intilganligi sababli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ miqdor bilan l son orasidagi ayirmani (biror Nnomerdan boshlab), absolyut qiymati har qanday musbat q- l sondan kichik bo'ladi, demak

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<q-l$$

Bu tengsizlikdan (3) tengsizlikkelibchiqadi. Bu tengsizlikni N nomerdanboshlab n ningturliqiymatlariuchunyozibquyidagilarnihosilqilamiz:

$$\begin{cases} a_{N+1} < qa_N \\ a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N \\ a_{N+3} < qa_{N+2} < q^3 a_N \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad (4)$$

Endiquyidagiikkiqatornitekshiramiz:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots \qquad (1)$$

$$a_N+qa_N+q^2a_N+\ldots \qquad (5)$$

(5) qator maxraji q<1 bo'lgan geometrik progressiyadir. Demak, (5) qator yaqinlashadi. (1) qatorning hadlari a_{N+1} dan boshlab (4) tengsizliklarga asosan (5) qatorning hadlaridan kichik. Musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi 1-teoremaga asosan (1) qator yaqinlashadi.

2) $l>1$ bo'lsin. U holda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{N+1}}{a_N}=l$ tenglikdan, biror N nomerdan boshlab, ya'ni $n\geq N$ uchun $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ yoki barcha $n\geq N$ uchun $u_{N+1}>u_N$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Lekin bu tengsizlik qatorning hadlari $N+1$ dan nomerdan boshlab o'sishini bildiradi. Shuning uchun qatorning umumiy hadi nolga intilmaydi. Demak, qator uzoqlashadi.

1-eslatma. Agar $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$ bo'lsa, u holda qator uzoqlashadi, chunki bu holda $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ va $a_{N+1}>a_N$, ya'ni $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (zaruriy shart bajarilmaydi).

2-eslatma. Agar $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mavjud va birga teng bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda Dalamber alomati qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlash imkonini bermaydi.
Bu masalani hal qilish uchun boshqa alomatlardan foydalanish kerak.
3.Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis II, P.12.

1-misol. Ushbu

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3^2}}+\frac{3}{\sqrt{3^3}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{3^n}}+\ldots$$

qatorning yaqinlashishi tekshirilsin.

Yechish. Tekshirilayotgan qatorda

$$a_n=\frac{n}{\sqrt{3^n}};\ a_{n+1}=\frac{n+1}{\sqrt{3^{n+1}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^{n+1}}\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\sqrt{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+1/n)}{n\sqrt{3}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$$

Demak, qatoryaqinlashuvchi.

2-misol.Ushbu

$$\frac{1!}{2}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{2^3}+\ldots+\frac{n!}{2^n}+\ldots$$

qatorningyaqinlashishitekshirilsin.

Yechish.Bunda

$$a_n=\frac{n!}{2^n};a_{n+1}=\frac{n+1!}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}=\infty>1$$

Berilganqatoruzoqlashadi.

3-misol.Ushbu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

qatorningyaqinlashishitekshirilsin.

Bu garmonikqatordir.Unga Dalamber alomatini tadbiq etib, $a_n=\frac{1}{n};a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ ekanligini, demak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

bo'lishinitopamiz. Demak, buqatorniDalamberalomatidanfoydalanibyaqinlashuvchiyokiuzoqlashuvchiekanligi niaytaolmaymiz.Lekin biz bilamizki, garmonikqatoruzoqlashuvchi.

Koshialomati.

Teorema. Agar musbathadliqator

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

uchun $\sqrt[k]{u_k}$ miqdor $k\to\infty$ da l cheklilimitgaegabo'lsa, ya'ni $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l$ bo'lsa, u holda

1) $l<1$ bo'lgandaqatoryaqinlashadi;

2) $l>1$ bo'lgandaqatoruzoqlashadi.

Isboti. 1) $l<1$ bo'lsin. $l<q<1$ munosabatniqanoatlantiruvchisonniqaraymiz.Biror $k=N$ nomerdanboshlab

$$\left|\sqrt[k]{a_k} - l\right| < q - l$$

munosabato'rinlibo'ladi, bundan

$$\sqrt[k]{a_k} < q$$

yokihamma $k\geq N$ uchun $a_k<q^k$ ekanligikelibchiqadi.

Endi ushbu ikki qatorni qarab chiqamiz:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots \qquad (1)$$

$$a_N+qa_N+q^2a_N+\ldots \qquad (2)$$

(2) qator yaqinlashadi, chunki u maxraji q<1 bo'lgan geometrik progressiyani tashkil qiladi. (1) qatorning hadlari a_N dan boshlab (2) qatorning hadlaridan kichik. Bu holda musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi 1-teoremaga asosan (1) qator ham yaqinlashadi.

2) $l>1$ bo'lsin. U holda $k=N$ nomerdan boshlab $\sqrt[k]{a_k}>1$ yoki $a_k>1$ bo'ladi. Lekin qaralayotgan qatorning hamma hadlari u_N dan boshlab 1 dan katta bo'lsa, uning umumiy hadi nolga intilmaydi, demak qator uzoqlashuvchi.

Eslatma. Dalamber alomatidagi kabi, $l=1$ bo'lgan holda Koshi alomati ham qo'shimcha tekshirishni talab qiladi.

3.Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis II, P.12.

1-misol. Quyidagi qatorni yaqinlashuvchanlikka tekshiring.

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^4+\ldots+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

Yechish. Bunda

$$a_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{2^k}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\frac{e}{2}>1$$

Qator uzoqlashuvchi.

2-misol. Ushbu

$$\frac{3}{2}+\left(\frac{9}{11}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n+\ldots$$

qatoryaqinlashuvchanlikkatekshirilsin.

Yechish.Bunda $a_n=\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2+1/n^2)}{n^2(3-1/n^2)}=$$ qatoryaqinlashadi.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n^2}{3-1/n^2}=\frac{2}{3}<1$$

Qatoryaqinlashishining integral alomati.

Teorema. Agar

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

qatorninghadlarimusbatvao'smaydiganbo'lsa, ya'ni

$a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq\ldots$

va $f(x)$ uzluksiz funksiya uchun

$f(1)=a_1, f(2)=a_2, \ldots, f(n)=a_n, \ldots$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda:

1) agar $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashsa, (1) qator ham yaqinlashadi.

2) agar $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, (1) qator ham uzoqlashadi.

2) agar $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, (1) qator ham uzoqlashadi.

3.Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis II, P.13.

Isboti. Yuqoridan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan, asoslari $x=1$ dan x=n gacha bo'lgan, (bunda n–ixtiyoriy butun musbat son) egri chiziqli trapetsiyani qaraymiz (2-shakl). Bu trapetsiyaga asoslari [1, 2], [2, 3], ..., [n-1, n] kesmalardan iborat ichki va tashki zinasimon to'rtburchaklar chizamiz, bunda funksiyaning

$$a_2=f(2),\ a_3=f(3),\ \ldots,\ a_n=f(n)$$

qiymatlari ichki chizilgan to'rtburchaklarga

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ \ldots,\ a_{n-1}=f(n-1)$$

qiymatlari esa tashqi chizilgan to'rtburchaklarga balandlik bo'lib xizmat qiladi.

S_n-qatorning n-qismiy yig'indisi, $\overline{S}_n$-egri chiziqli trapetsiyaning yuzi, S_{ur}, S_{tr}- mos ravishda ichki va tashqi chizilgan zinasimon shakllarning yuzlari bo'lsin. Bu holda

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

$\overline{S}_n = \int_1^n f(x)dx$ ekani ravshan. Shakldan $S_{ur}<\overline{S}_n<S_{tr}$ (2)

ekanligi kelib chiqadi, bunda

$$S_{u,r}=a_2+a_3+\ldots+a_n=S_n-a_1.$$

$$S_{t,r}=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=S_n-a_n.$$

Shunday qilib, (2) tengsizlikni quyidagicha yozish mumkin:

$$S_n\text{-}a_1 < \overline{S}_n < S_n\text{-}a_n$$

yoki $\quad S_n\text{-}a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n\text{-}a_n$. Bundan ikkita tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$S_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx \qquad (3)$$

$$S_n > a_n + \int_1^n f(x)dx \qquad (4)$$

$f(x)$ funksiya musbat, shu sababli n ning ortishi bilan $\int_1^n f(x)dx$ integral ham kattalashib boradi.Ikkiholniqaraymiz:

1. Farazqilaylik $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashsin, ya'ni

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)dx = J$$

integralcheklisongatengbo'lsin. U holda $\int_1^{n} f(x)dx < J$ va (3) tengsizlikdanharqanday n da $S_n < u_1 + J$ekanligikelibchiqadi. Shundayqilib, buholdaS_n–qismiyyig'indilarketma-ketligichegaralanganvademak, (1) qatoryaqinlashadi.

2. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchibo'lsin, ya'ni

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$$

bo'lsin.Bu esa$n$ o'sganda (4) tengsizlikkaasosan$S_n$qismiyyig'indilarketma-ketligichegaralanmaganligikelibchiqadi, ya'niqatoruzoqlashadi.

Misol. Umumlashgangarmonikqator deb ataluvchiushbu

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

qatorningyaqinlashishitekshirilsin.

Yechish. $f(x)=\frac{1}{x^p}$ ekanligiravshan. bunda p–tayinlangan son. Quyidagiintegralniqaraymiz:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{N\to\infty}(N^p-1),\ p\neq 1$$

$p$ningturliqiymatlaridaqatorningyaqinlashishiyokiuzoqlashishihaqidafikryuritamiz.

Agar $p>1$ bo'lsa, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{(p-1)}$ ya'niintegralchekli, shuninguchunqatoryaqinlashadi, agar $p<1$ bo'lsa, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty$ qatoruzoqlashadi.

agar $p=1$ bo'lsa, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\ln x|_1^{\infty}=\infty$, ya'niqatoruzoqlashadi. Demak, umumlashgangarmonikqatorfaqat $p>1$ dayaqinlashuvchibo'lib, $p\leq 1$ bo'lgandauzoqlashuvchiekan.