



511
A45

Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х.,
Эшмаматов И.А., Абдуқодирова П.Т.

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ



511
H 45

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ВИЛОЯТИ
ЧИРЧИК ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х.,
Эшмаматов И.А., Абдукодирова П.Т.

-5681-

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

Ўқув қўлланма

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ТОШКЕНТ ВИЛОЯТИ ЧИРЧИК
ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ
АХБОРОТ RESURS MARKAZI

Тошкент - 2020

Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х., Эшмаматов И.А.,
Абдуқодирова П.Т. “Алгебра ва сонлар назарияси”. Ўқув қўлланма.
–Т.: “Университет”, 2020, 168-бет.

УЎК: 511.2(075.8)

КБК: 22.132я73

А 45

Ушбу ўқув қўлланмада “Алгебра ва сонлар назарияси” курсининг асосий тушунча ва тасдиқлари, масалалари келтирилган бўлиб, математик мазмунни тадбиқлари кўрсатилган. Талабалар мавзулар бўйича мустақил ечиши учун топшириқлар ва уларнинг ечиш усуллари ҳам берилган. Ўқув қўлланма олий таълим муассасаларининг математика ўқитиш методикаси талабалари ва профессор - ўқитувчилари учун мўлжалланган.

Учебник содержит основные понятия, утверждения, задачи курса «Алгебра и теория чисел» и прикладное математическое содержание. Также даны задания для самостоятельного решения учащимися по темам и методам их решения. Учебник предназначен для студентов и преподавателей методики преподавания математики в высших учебных заведениях.

The textbook contains basic concepts, statements, tasks of the course "Algebra and number theory" and applied mathematical content. Also given tasks for independent solution by students on topics and methods of solving them. The textbook is intended for students and teachers of methods of teaching mathematics in higher education.

Такризчилар: ф.-м.ф.д., проф А.А.Жалилов
ф.-м.ф.д. Э.М. Махкамов

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги Чирчиқ давлат педагогика институти кенгашининг 2020 йил 03 мартдаги 13 - сонли қарорига асосан 5110100 – Математика ўқитиш методикаси таълим йўналишлари бўйича тахсил олаётган талабалар ва профессор ўқитувчилари учун ўқув қўлланма сифатида нашр қилишга тавсия этилган.

ISBN: 978-9943-6555-1-5

© “Университет” нашриёти, Тошкент, 2020 й.

Математикани билиш – фақат стандарт масалаларнигина эмас, балки фикр эркинлиги, соғлом мантиқ, оригиналлик, яратувчанликни талаб қиладиган масалаларни еча билишидир.

Д. Пойа

СЎЗ БОШИ

Ватанимиз мустақиллиги таълим тизимидаги улкан ўзгаришлар иктидорли ўқувчилар, талабаларга бўлган муносабатни ҳам тубдан ўзгартирди. Республикамизнинг ривожланган мамлакатлар даражасида тараққий этиши жамият аъзолари, айниқса, ёшларнинг эркин фикрлай олиш даражаси, мустақил ижодий фаолиятлари натижалари билан белгиланади.

Талабаларнинг математик билимларни ўзлаштириши, малака ҳосил қилиши ва кўникмага эга бўлиши, фанга бўлган қизиқишини рағбатлантириш ва математикавий маданиятни шакллантиришда мустақил фикрлаш қобилиятини фаоллаштириш масаласи алоҳида аҳамият касб этади.

Мазкур масалаларни ҳал қилишда рақамлар билан ишлаш усулларини ўзлаштириш, айниқса, фикрдаги ҳисоб-китоблар математика қонунларини яхшироқ тушунишга ёрдам беради. Шу билан бирга, концентратциялаш қобилиятини оширади, хотирани мустаҳкамлайди, бир вақтнинг ўзида бир нечта ғояларни хотирада ушлаб туриш малакасини ривожлантиради. Бундай ҳисоблаш усулларини ўрганадиган киши, бир нечта фикрлаш тузилмалари билан бир вақтнинг ўзида ишлашни ўрганади.

Ушбу ўқув қўлланма математиканинг муҳим қисмларидан бўлган туб ва мураккаб сонлар, таққосламалар назарияси ва Диофант тенгламаларини ечишнинг бир неча усулларини ўрганишга, таҳлил қилишга бағишланган. Унда Эратосфен ғалвири, Мерсен туб сонлари, Евклид алгоритми, Эйлер функцияси, Лежандр символи, Диофант тенгламалари ёритилган. Талабаларнинг ақлий фаолиятини мустаҳкамлаб, машғулот жараёнида вақтдан ютишига ёрдам берадиган, тезкор ҳисоблаш имкониятини берувчи усуллар ўрганилган.

Ўқув қўлланма уч бобдан иборат. **Биринчи бобда** туб ва мураккаб сонлар, туб сонлар тўпламининг чексизлиги, Эратосфен ғаливири, бўлиниш муносабати, энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий каррали, Евклид алгоритми, чекли занжир касрлар ва муносиб касрлар хоссалари, систематик сонлар ва улар устида амаллар ҳамда туб сонлар тарихи баён килинган. **Иккинчи бобда** бутун сонлар халкасида таққосламалар, унинг хоссалари ва чегирмалар, синф халкаси, Эйлер функцияси, Эйлер ва Ферма теоремаси, биринчи даражали таққосламалар ва биринчи даражали таққосламалар системаси мисоллар ёрдамида тушунтирилган. **Учинчи бобда** Диофант тенгламалари, биринчи даражали икки номаълумли Диофант тенгламаларининг бутун рационал ечимларини топиш усуллари, аниқмас тенгламаларнинг умумий ечими, тенгламани ечишни соддалаштириш, Лежандр симболи ва унинг хоссалари, туб модул бўйича юкори даражали таққосламалар, иккинчи ва учинчи тартибли Диофант тенгламалари, соннинг кўрсаткичи, туб модул бўйича индекслар, икки ҳадли таққосламалар, иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар кенг ёритилган. Ҳар бир мавзу мисоллар билан баён килинган ва мустақил ишлаш учун машқлар берилган.

Ўйлаймизки, ўқув қўлланма ўз ўқувчиларини топади, бошқа мавжуд ўқув адабиётлари каторида кизикарли математика ва олимпиада масалалари курси бўйича уларга билимларини оширишга кўмак беради.

Ушбу ўқув қўлланмадан педагогика олий таълим муассасалари талабалари ва профессор - ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

Муаллифлар

1 БОБ

БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1.1-§. Туб ва мураккаб сонлар. Туб сонлар тўпламининг чексизлиги. Эратосфен ғалвири

Санаш учун $1, 2, \dots$ натурал сонлар ишлатилади. $N = \{1, 2, \dots\}$ тўплам эса *натурал сонлар тўплами* дейилади. Агар a ва b натурал сонлар учун шундай q натурал сон топилиб, $a = b \cdot q$ шарт бажарилса, у ҳолда a натурал сон b натурал сонга *бўлинади*, деймиз.

Натурал сон туб сон дейилади, у иккита турли натурал бўлувчига (бир ва ўзи) эга бўлса мураккаб сон дейилади, агар унинг бўлувчилар сони иккитадан кўп бўлса.

Бир сон на туб, на мураккаб сонга тегишли эмас. Туб сонлар (ва уларнинг натурал даражалари) ўзаро тубдир. Мураккаб соннинг бирдан фарқли натурал бўлувчиси $\sqrt{a}$ дан катта эмас. Бу шартдан фойдаланиб a соннинг туб бўлувчиларини фақат $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб сонлар орасидан излаш кераклиги келиб чиқади.

Яна бир оддий усул - туб сонлар жадвалларидан фойдаланиш. Сўнгги 200 йил ичида кўплаб туб сонли жадваллар тузилган ва нашр этилган. Уларнинг энг кенг доираси Д.Х. Лехмера 1000000 гача бўлган оддий сонларни ўз ичига олади.

Учинчи қизиқарли усул: a сондан катта бўлмаган туб сонлар жадвалини тузиш учун Эратосфен ғалвири деб аталувчи усул мавжуд. Бу усул бўйича сонлар каторида биринчи топилган p_1 туб сонга каррали бўлган сонларни ўчириш, сўнг иккинчи p_2 туб сонни топиб, унга каррали сонларни ўчириш ва ҳоказо. Бу жараёни $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб сонгача давом эттириб, 1 дан a гача сонлар каторида ўчирилмай қолган сонлар a дан катта туб сонларни ҳосил қилади.

Масалан: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 – туб сонлар, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 – мураккаб сонлар.

Таъриф. 1 дан фарқли умумий бўлувчиларга эга бўлмаган иккита натурал сон *ўзаро туб* сонлар дейилади.

Теорема. a - бирдан фарқли натурал сон бўлсин. У ҳолда унинг бирдан катта энг кичик натурал бўлувчиси туб сондир.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, агар $a : t$ бўлиб, t мураккаб сон бўлса, m нинг p бўлувчиси бўлиб, $p < t$ ва $p \neq 1$. У ҳолда $a : t$ ва $m : p$ шартлардан $a : p$ муносабат келиб чиқади. Бу эса m – бирдан катта энг кичик натурал бўлувчи, деган шартга зид. Демак, m – туб сон.

Хулоса. Бу теоремадан, агар a мураккаб сон бўлса, a нинг албатта битта $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб бўлувчиси бор бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, a мураккаб сон, p эса унинг бирдан катта энг кичик туб бўлувчиси бўлсин. У ҳолда шундай q сон топилиб, $a = pq \geq p^2$ ёки $p \leq \sqrt{a}$ келиб чиқади.

Демак, бирдан катта a натурал сон туб сон бўлиши учун $p \leq \sqrt{a}$ туб сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмаслиги етарли. Масалан, 101 туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлаш учун уни $\sqrt{101}$ дан кичик бўлган 2,3,5,7 туб сонларга бўлиб кўрамиз, 101 бу сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди, шунинг учун 101 туб сон экан.

Агар $s = 91$ бўлса, туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлашда $\sqrt{s} = 9, \dots$; 91 га бўлинишини текшириш учун 2, 3, 5, 7 сонларга бўлиб кўрамиз, биз $91 = 7 \cdot 13$ эканлигини топамиз. Демак, 91 мураккаб сон экан.

Мисол. 397, 401, 403, 409, 677 сонларидан бири мураккаб сон бўлишини кўрсатинг.

Арифметиканинг асосий теоремаси

Теорема. Ҳар қандай натурал сон бирга тенг, туб сон ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.

Исбот. Математик индукция методи билан исбот қиламиз.

1-босқич. Индукция базиси $n=1$ бўлсин. У ҳолда теорема исбот бўлди.

2-босқич. Ҳар қандай $1 \leq k < n$ учун теорема тўғри бўлсин. Яъни, $k = 1$ га, туб сон ёки кўпайтувчилари тартибигача ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.

3-босқич. Агар n туб сон бўлса, исбот тамом. Агар n мураккаб сон бўлса, у ҳолда $1 < a < n$ ва $1 < b < n$ шартларни қаноатлантирадиган шундай натурал сонлар мавжуд бўлиб, $n = a \cdot b$ индукция фаразига кўра a , b лар туб сонлар ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона

усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади. Агар a, b лар туб сонлар бўлса, исбот тугайди.

Акс ҳолда,

$$a = p_1, p_2, \dots, p_k, \quad b = p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_m.$$

Энди бу ёйилма ягона эканлигини исбот қиламиз.

Фараз қилайлик, $n = q_1, \dots, q_s$ тенглик n нинг бошқа ёйилмаси бўлсин. Бундан, $n = p_1, p_2, \dots, p_m = q_1, \dots, q_s$ келиб чиқади. Бу тенгликнинг иккала томонини p_1 га бўлайлик. У ҳолда, p_1 ва $q_1, \dots, q_s$ лар туб сонлар бўлганлиги учун $q_1, \dots, q_s$ лардан бири p_1 га тенг. Аниқлик учун $p_1 = q_1$ бўлсин. У ҳолда, $p_2, \dots, p_m = q_2, \dots, q_s$. Бу ёйилмалар n дан кичик сонларнинг ёйилмалари бўлганлиги учун, индукция фаразига кўра, кўпайтувчилари тартибига ягона. n натурал сонни туб кўпайтувчиларга ёйганимизда, p_1 туб сон ёйилмада α_1 марта, p_2 туб сон α_2 марта ва ҳоказо, p_m туб сон α_m марта учрасин. У ҳолда $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ ифода n натурал соннинг каноник ёйилмаси дейилади. Каноник ёйилмада туб кўпайтувчиларни ўсиш тартибиде жойлаштирсак, ёйилма ягона бўлиши аниқ.

1-масала. Туб сонлар айирмаси шаклида ёзиладиган барча ток сонларни топинг.

Ечиш. Туб сонлардан биттаси, албагта, жуфт бўлиши керак, шунинг учун $N = p - 2$, бу ерда p – жуфт бўлмаган туб сон.

2- масала. $N = 3n + 2 (n = 1, 2, \dots)$ соннинг квадратини натурал сон квадрати ва туб сон йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин эмаслигини исботланг.

Ечиш. Агар $N^2 = n^2 + p$ бўлса, у ҳолда $p = (N - n)(N + n)$, бундан

$N - n = 1, N + n = p$ демак, $2N = 1 + p$ ёки $p = 2N - 1 = 6m + 3$, бу эса мумкин эмас.

3-масала. Маълумки, $p, p+10, p+14$ сонлар туб. p ни топинг.

Ечиш. $p, p+10, p+14$ сонлардан камида биттаси 3 га бўлинади. Демак, $p=3$.

4-масала. 127 туб ёки мураккаб сон эканлигини аниқланг.

Ечиш. $\sqrt{127}$ дан ошмайдиган 2, 3, 5, 7, 11 туб сонлар 127 ини бўлувчилари

эмас, демак, бу сон туб сондир.

5-масала. Агар туб p, q сонлар учун $x^2 - px + q = 0$ квадрат тенглама иккита турли бутун ечимга эга бўлса, p, q лар топилсин.

Ечиш. Тенгламанинг ечимлари $x_1 < x_2$ шартни қаноатлантирсин.

Виет формулаларига кўра, $p = x_1 + x_2$, $q = x_1 x_2$.

q -туб сон бўлгани учун охириги тенгликдан $x_1 = 1$ бўлади ва бундан $q = x_2$, $p = 1 + x_2$ — иккита кетма — кет туб сон эканлиги келиб чиқади. Бу эса фақат $q=2$, $p=3$ бўлгандагина ўринли.

6-масала. 2320 ва 2350 сонлари орасида жойлашган барча туб сонларни топинг.

Ечиш. Ечимни соддалаштириш мақсадида 2321 дан 2349 гача бўлган сонлар каторида жуфт, 0 ва 5 билан тугалланадиган сонларни ёзмаслик мумкин, чунки бу сонлар туб эмас. Демак: 2321, 2323, 2327, 2329, 2331, 2333, 2337, 2339, 2341, 2343, 2347, 2349.

Бу сонлар каторидан 3 га бўлинадиганларни ўчирамиз (3 га бўлиниш аломатидан фойдаланамиз). Бу сонлар: 2331, 2337, 2343, 2349

Қолган сонлар: 2321, 2323, 2327, 2329, 2333, 2339, 2341, 2347.

Бу каторда 5 га каррали сон бўлмаганлиги сабабли 7 га каррали сонларни ўчирамиз. Бу қуйидагича амалга оширилади. Катордаги биринчи сонни 7 га

бўламиз:

$$2321 = 7 \cdot 331 + 4.$$

Қолдик 4 дан (7 гача 3 ечишмайди) 7 га каррали сон натурал сонлар каторидаги 2321 дан кейинги учинчи сонлиги келиб чиқади, яъни 2324 ва шу 2324 дан кейинги барча 7 чи сонлар бўлади. Яъни: 2331, 2338, 2345. 11 га каррали сон 2321.

Бундан кейин келадиган 11 га каррали сонлар 2332, 2343 сонлар ўчирилган. 13 га каррали сонларни топамиз: қолган сонлардан биринчи сон 2323 ни 13 га бўламиз:

$$2323 = 13 \cdot 178 + 9.$$

Демак, 13 га каррали сон натурал сонлар каторида 2323 дан тўртта кейин келган ($9+4=13$) бўлади, яъни 2327. Бу сонни ўчирамиз. 13 га бўлинадиган кейинги сон 2340, бу сон ўчирилган. $\sqrt{2350} < 49$ бўлганлиги сабабли бу жараёни то 47 туб сонгача давом эттириш

керак. 2329 – 17 га каррали, 2323 – 23 га каррали сонлар. Қолган 2333, 2339, 2341, 2347 сонлар туб сонлар бўлади.

7-масала. Ихтиёрий олтига кетма-кет натурал сонлар учун улардан фақат биттасининг бўлувчиси бўладиган туб сон топилишини исботланг.

Ечиш. Кетма-кет бўлган, n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ сонларни оламиз. Агар n сони 5 га бўлинмаса, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ сонларидан фақат биттаси бешга бўлинади. Агар n сони 5 га бўлинса, $n+5$ ҳам 5 га бўлинади.

У ҳолда, 5 га бўлинмайдиган $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ сонлардан иккитаси 2 га бўлинмайди. Шу иккита тоқ сонлардан бири, албатта, 3 га бўлинмайди. Демак, 2 га, 3 га ва 5 га бўлинмаган шу сон 5 дан каттарок туб сонга бўлинади.

n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ сонлари орасида шу туб сонга бўлинадиган сон ягона.

8-масала. $p_1, p_2, \dots, p_n$ туб сонлар учун $b = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ сони туб сон бўладими?

Ечиш. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$. Йўқ, туб сон бўлмайди. Яъни мураккаб сон.

9-масала. $2^{18} + 3^{18}$ йиғиндини туб кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш.

$$2^{18} + 3^{18} = (2^2 + 3^2) (2^4 - 2^2 3^2 + 3^4) (2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) = \\ = 13 \cdot 61 (2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) = 13 \cdot 61 \cdot 488881 = 13 \cdot 61 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 181.$$

10-масала. Қуйидагиларни исботланг:

а) Агар a сон p туб сонга бўлинмаса, у ҳолда a , p сонлар ўзаро туб бўлади.

б) Агар бир нечта сон кўпайтмаси p туб сонга бўлинса, у ҳолда уни ташкил қилган кўпайтувчилардан камида биттаси p га бўлинади.

Ечиш. а) Тескарисини фараз қиламиз, яъни a сон берилган p туб сонга бўлинмасдан, у билан 1 дан фарқли умумий бўлувчига эга бўлсин.

p сон туб бўлганлиги боис бу умумий бўлувчи фақат p бўла олади, яъни a сон p туб сонга бўлинар экан. Зиддиятга эга бўлди.

б) Агар бир нечта сонларнинг кўпайтмаси p туб сонга бўлиниб, кўпайтувчилар барчаси p га бўлинмаса: (а) хоссага кўра улар p туб

сони билан ўзаро туб бўлади. Демак, берилган кўпайтма ҳам p туб сони билан ўзаро туб. Бу эса зиддиятга олиб келди.

11-масала. 3, 5 ва 7 сонлар ягона уч эгизак сонлар (яъни айирмаси 2 га тенг бўлган арифметик прогрессия ташкил эгувчи 3 та туб сон) ташкил этишини исботланг.

Ечиш. $p, p+2$ ва $p+4$ ($p > 3$) сонларни кўрамиз. $p=3q+1$ ($q=2,4,\dots$) бўлса, $p+2$ — сон мураккаб сон бўлади (3 га бўлинади). Агар $p=q+2$ ($q=1,2,\dots$) бўлса, $p+4$ мураккаб сон бўлади.

12-масала. $p > 3$ туб сон учун $24 \mid p^2 - 1$ муносабатни исботланг.

Ечиш. $p-1, p+1$ кетма — кет жуфт сонлардан биттаси 4 га биттаси 3 га бўлинади. Демак, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ сон 24 га бўлинади.

13-масала. $3n+2$ ($n=1,2,\dots$) кўринишдаги энг катта туб сон мавжуд эмаслигини исботланг.

Ечиш. $K=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p+2$ кўринишдаги сонни қараймиз, бу ерда $p=3n+2$ кўринишдаги сон (K сони ҳам шу кўринишдаги сон). K нинг каноник ёйилмасида p дан катта туб сонлар мавжуд ва булар орасида $3n+2$ кўринишдаги туб сон мавжуд. $3n+1$ кўринишдаги туб сонлар кўпайтмаси яна шу шаклга эга бўлганлиги сабабли у K га тенг бўла олмайди. Демак, p қандай бўлишидан қатъи назар, $3n+2$ кўринишдаги p дан катта туб сон мавжуд.

14-масала. Қандай натурал n сонлар учун $3n-4, 4n-5, 5n-3$ кўринишдаги учта сонлар барчаси туб бўлади?

Ечиш. Бу сонлар $(3n-4)+(4n-5)+(5n-3)=12n-12=12(n-1)$ — жуфт бўлгани учун улардан камида биттаси, албатта, жуфт, яъни 2 га тенг бўлади. Аммо, $4n-5$ тоқ бўлганлиги сабабли, қуйидаги ҳолларни қарашимиз етарли:

$$3n-4=2 \Leftrightarrow n=2 \text{ ёки } 5n-3=2 \Leftrightarrow n=1$$

Агар $n=1$ бўлса, $4n-5=-1$.

Агар $n=2$ бўлса, $4n-5=3, 5n-3=7$. Демак, $n=2$.

15-масала. $n > 2$ сондан катта бўлмаган барча туб сонлар кўпайтмаси n дан катта бўлишини исботланг.

Ечиш. p — туб сон $p \leq n$ шартни қаноатлантирувчи энг катта туб сон бўлсин.

$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p - 1$ соннинг каноник ёйилмаси фақат n дан катта туб сонлардан иборат. Демак, $N > n$ ва бундан $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p > n$.

16-масала. $27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ сони 26460 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ каноник ёйилмани ҳосил қиламиз.

$A = 27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ сонини $27195^8 - (10887^8 - 10152^8)$

кўринишда ёзамиз. Бу сон $5 \cdot 7^2$ га бўлинади. Ҳақиқатдан ҳам

$27195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37, 10887^8 - 10152^8$ айирма эса $10887 - 10152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ га бўлинади.

Бошқа тарафдан, $A = (27195^8 - 10887^8) + 10152^8$ кўринишдан A сони $2^2 \cdot 3^3$ га бўлиниши келиб чиқади, чунки $27195^8 - 10887^8$ сон $27195 - 10887 = 16308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151$ га бўлинади, 10152 сон эса $10152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$ каноник ёйилмага эга. Шундай қилиб, натижада A сони $5 \cdot 7^2$ га ва $2^2 \cdot 3^3$ сонига бўлинишини ҳосил қилдик. Демак, у $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ сонига ҳам бўлинади.

17-масала. Шундай 50 та натурал сонлар топилсинки, улардан ҳеч бири бошқасига бўлинмайди, аммо ихтиёрий иккитасининг кўпайтмаси колган 48 та сонлардан барчасига бўлинади.

Ечиш. $p_1, \dots, p_{50}$ — туб сонлар бўлсин.

$A_1 = p_1^2 \cdot p_2 \dots p_{50}, A_2 = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{50}, \dots, A_{50} = p_1 \cdot \dots \cdot p_{49} \cdot p_{50}^2$ сонлар масала шартини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Ҳақиқатган ҳам, агар $i \neq j$ бўлса, $A_i/A_j = p_i/p_j$ сон бутун бўлмайди. Бундан ташқари, $A_i A_j = (p_1 \cdot \dots \cdot p_{50})^2 p_i \cdot p_j$ сон $A_1, \dots, A_{50}$ сонларнинг барчасига бўлинади.

18-масала. p ва $8p^2 + 1$ — туб сонлар бўлса, $8p^2 + 2p + 1$ туб сон бўлишини исботланг.

Ечиш. p ва $8p^2 + 1$ — туб сонлар бўлганлиги сабабли $p = 3$ бўлиши керак, чунки $p = 3k + 1$ ёки $3k + 2$ бўлганда $8p^2 + 1$ туб бўлмайди. Демак, $8p^2 + 2p + 1 = 79$ — бу туб сон.

19-масала. Геометрик прогрессияда биринчи, унинчи ва ўттизинчи ҳадлар натурал сонлар бўлса, унинг йигирманчи ҳади ҳам натурал сон бўлишини исботланг.

Ечиш. $a_1, a_2, \dots, a_n$, – берилган геометрик прогрессия, q -унинг махражи бўлсин. Масала шартига кўра, $a_1, a_{10} = a_1 q^9$ ва $a_{30} = a_1 q^{29}$ сонлар натурал сонлар бўлади. Шунинг учун q^9 ва q^{29} – мусбат рационал сонлар. Демак, $q^2 = q^{29}/(q^9)^3$ ва $q = q^9/(q^2)^4$ сонлар ҳам рационал сонлар бўлади. $q = m/n$ бўлсин, бу ерда m ва n натурал ўзаро туб сонлар.

$$a_{30} = a_1 m^{29}/n^{29}$$

натурал сон, m^{29} ва n^{29} ўзаро туб бўлгани учун a_1 сон n^{29} га бўлингани келиб чиқади. Демак, $a_{20} = a_1 q^{19} = a_1 m^{19}/n^{19}$ сон натурал сон бўлади.

20-масала. Қайси натурал n сон учун $n^5 + n^4 + 1$ сон туб бўлади?

Ечиш. $n=1$ бўлса, $n^5 + n^4 + 1 = 3$ – туб сон.

$$\begin{aligned} n^5 + n^4 + 1 &= n^5 + n^4 + n^3 - n^3 - n^2 - n + n^2 + n + 1 = \\ &= n^3(n^2 + n + 1) - n(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) = \\ &= (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

муносабатлар ўринли.

Маълумки, $n > 1$ бўлганда $n^3 - n + 1 > 1$, $n^2 + n + 1 > 1$ бўлади. Демак, бу ҳолда $n^5 + n^4 + 1$ сон бирдан катта натурал сонлар кўпайтмасига ёйилади, яъни у туб эмас. Демак, $n=1$.

21-масала. $a^4 + 4b^4$ сон туб сон бўладиган барча натурал a, b сонлар топилсин.

Ечиш.

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = \\ &= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 + b^2][(a-b)^2 + b^2] \end{aligned}$$

Равшанки, $(a+b)^2 + b^2 > 1$. Демак, $a^4 + 4b^4$ сон туб сон бўлиши учун

$$(a+b)^2 + b^2 = 1$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли.

Бу тенглик фақат $a=b=1$ бўлганда бажарилади. Бу сонлар эса масала шартини қаноатлантиради.

Изоҳ. Адабиётларда $a^4 + 4b^4 = [(a+b)^2 + b^2][(a-b)^2 + b^2]$ айният Софи Жермен¹ айнияти деб юритилади¹.

¹ Софи Жермен–француз математиги, файласуф ва механик

22-масала. $2^n - 1$ ва $2^n + 1, (n > 2)$ сонлар бир вақтда туб сонлар бўла олмаслигини исботланг.

Ечиш. $2^n = 3q + 1$ ёки $2^n = 3q + 2$ кўринишга эга. Биринчи ҳолда $2^n - 1 = 3q - \text{мураккаб сон}$, чунки $n > 2$ да $q > 1$ бўлиши керак. Иккинчи ҳолда $2^n + 1 = 3q + 3 - \text{яна мураккаб сон}$.

23-масала. Агар p туб сон ва $0 < k < p$ бўлса, у ҳолда,

$$C_p^k = \frac{1 \cdot 2 \cdots (p-1)p}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-k-1)(p-k)}$$

биномиал коэффициент p туб сонга бўлинади.

Ечиш. Биномиал коэффициент бутун сон бўлгани боис, уни

$1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ сурати махражга бўлинади. $0 < k < p$ бўлгани учун

$$1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-k-1)(p-k) = k!(p-k)!$$

сони p сон билан ўзаро туб сон. Шунинг учун $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ суратнинг факат

$1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ кўпайтувчиси махражга бўлинади.

24-масала. Мураккаб a сонининг 1 дан фаркли энг кичик бўлувчиси $\sqrt{a}$ сонидан катта бўлмаган туб сон бўлишини исботланг.

Ечиш. Натурал сонларнинг тўплами куйидан чегараганлигидан a сонининг 1 дан фаркли энг кичик бўлувчиси мавжуд бўлиши келиб чиқади ва биз уни b орқали белгилаймиз.

Дастлаб, b сонини туб сон бўлишини исботлаймиз. Агар биз уни мураккаб сон деб фараз қилсак, у ўзидан кичик бўлган натурал бўлувчига эга бўлганлиги келиб чиқади ва бу бўлувчи a сонини ҳам бўлади. Бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, b сони туб сон бўлади. $a = bq$ тенгликдан q бўлинма a сонини натурал бўлувчиси эканлиги келиб чиқади. Демак, b сонини таърифига кўра $q \geq b$ тенгсизлик бажарилади. Шу тенгсизликдан фойдаланиб, $a = bq \geq bb = b^2$ га эга бўламиз.

Изоҳ. Бу масала a сонидан катта бўлмаган туб сонларни топишда *Эратосфен ғалвири*² деб аталадиган оддий усулдан фойдаланишга имкон беради. Унинг моҳияти билан танишамиз.

² Эратосфен (м.а. 276-194 йиллар) – қадимий юнонлик олим. Кубия иккилаш масаласини ечишга доир махсус қурилма (мезолябий)ни кашф қилган

1, 2, 3, ..., a сонлар ичида 2, 3, 5, 7, ..., туб сонлари ва уларга бўлинадиган сонлари кетма-кет ўчирилади. Бунда:

а) p туб сонига бўлинадиган сонларни ўчиришни p^2 дан бошлаш керак;

б) ўчириш жараёнини $\sqrt{a}$ сонидан катта бўлмаган туб сонлар учун ўтказиш етарли.

Натижада a сонидан катта бўлмаган туб сонлар ўчирилмай қолади.

25-масала. p — туб сон бўлсин.

а) p дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар нечта?

б) p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар нечта?

Ечиш. а) Барча p дан кичик натурал сонлар у билан ўзаро туб бўлади.

Уларнинг сони эса $p-1$ га тенг.

б) Барча p^2 дан кичик ва p га қаррали бўлмаган натурал сонлар p^2 билан ўзаро туб бўлади.

p^2 дан кичик ва p га қаррали сонлар $p, 2p, \dots, (p-1)p$ қўринишга эга. Уларнинг сони $p-1$ га тенг. Демак, p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган сонлар

$$(p^2 - 1) - (p - 1) = p^2 - p$$

та бўлади. а) $p-1$; б) p^2-p .

26-масала. (Евклид теоремаси)³. Туб сонлар чексиз кўпдир.

Ечиш. Тескарисини фараз қиламиз, яъни фақат n та туб сонлар мавжуд бўлсин. $b = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ сонини олайлик. У барча $p_1, p_2, \dots, p_n$ туб сонлардан катта бўлгани учун мураккаб сон бўлади. Демак, унинг 1 дан фарқли энг кичик p натурал бўлувчиси туб сон бўлиб, у $p_1, p_2, \dots, p_n$ лардан бирортаси билан устма-уст тушади, яъни b ва $p_1, p_2, \dots, p_n$ сонлар b га бир вақтда бўлинади.

Демак, $1 = p_1 p_2 \dots p_n - b$ сони p га бўлинади. Зиддият.

Изох. 2006 йилда $2^{32582657} - 1$ — сони туб сон бўлиши текширилди. Бу сон ҳозиргача энг катта маълум бўлган туб сон бўлиб, у ўнли позицион системада 9808358 та рақамдан иборат.

³ Евклид (м. а. 356-300 йиллар) — қадимий юнонлик олим. Геометрия фанининг асосчиларидан бири.

27-масала. $e_1 = 2$, $e_n = e_1 e_2 \dots e_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$) тенгликлар ёрдамида аниқланган кетма – кетлик факат туб сонлардан иборат бўладими?

Ечиш. Йўқ, $e_5 = 1807 = 13 \cdot 139$.

28-масала. Ихтиёрий натурал n учун n та кетма-кет мураккаб сонлар мавжудлигини кўрсатинг.

Ечиш. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1) + 2$ сон 2 га, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1) + 2, \dots$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1) + n+1$ сон $n+1$ га бўлингани учун, бу сонлар масала шартини қаноатлантиради.

29-масала. 3, 7, 11, ... чексиз арифметик прогрессияда туб сонлар чексиз кўп бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. Тескарисини фараз қиламиз, яъни берилган прогрессияда факат n та $p_1 = 3, p_2 = 7, \dots, p_n$ туб сонлар мавжуд бўлсин.

$b = 4p_2 \dots p_n + 3$ сонини олайлик. У барча $p_1, p_2, \dots, p_n$ туб сонлардан ҳеч қайсисига бўлинмасдан, $4k+3$ кўринишдаги p натурал бўлувчига эга. Зиддиятликка келдик.

30-масала. 1001001001 соннинг 10000 дан катта бўлмаган туб бўлувчиларидан энг каттасини топинг.

Ечиш. $1001001001 = 1001 \cdot 10^6 + 1001 = 1001 \cdot (10^6 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (10^6 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (10^2 + 1) \cdot (10^4 - 10^2 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9901$

Жавоб. 9901

1.2-§. Бўлиниш муносабати. Натурал сон, натурал бўлувчиларининг сони ва йиғиндиси

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - бутун сонлар ҳалқаси, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Маълумки, a сони b сонига бўлинади, агар шундай c сони ($c \in \mathbb{Z}$), топилса, бунда $a = b \cdot c$ бўлса. Бўлинишга нисбатан хоссалари:

1) $\forall (a \in \mathbb{Z}) a : a$, чунки $a = a \cdot 1$

2) $a : b \wedge b : c \Rightarrow a : c$,

3) $a : b \wedge b : c \Rightarrow (a \pm b) : c$

4) $a : b \wedge b \nmid c \Rightarrow (a \pm b) \nmid c$

5) $a : c, \text{mo} \forall (b \in \mathbb{Z}) (ab) : c$

6) $a : b \Rightarrow (-a) : b \wedge a : (-b) \wedge (-a) : (-b)$

7) $\forall (a \in \mathbb{Z}) a \neq 0, a \nmid 0$

8) $a \neq 0 \wedge a : b \Rightarrow |a| \geq |b|$

Таъриф. a бутун сонни b га ($b \neq 0$) қолдиқли бўлиш деб, шундай бутун $b \cdot q \leq a < b(q+1)$ ва $0 \leq a - b \cdot q < b$ $q, r \in \mathbb{Z}$ сонга айтиладики, қуйидаги тенглик бажарилади:

$$a = bq + r, 0 \leq r < |b|.$$

Қуйидаги теорема муҳим аҳамиятга эга.

1 - Теорема. $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ қандай бўлишидан қатъи назар, a ни b га доимо бир қийматли қолдиқли бўлиши мумкин.

Исбот. а) $b \in \mathbb{Z}, b > 0$. b қаррали сонларни ўсиш тартибида жойлаштириб чиқамиз: $\dots, b(-2), b(-1), b0, b1, b2, \dots$

$bq \in \mathbb{Z}$, бўлсин. Энг катта бутун сон, a дан устун бўлмасин. У ҳолда, $r = a - bq$ $b \cdot q \leq a < b(q+1)$ ва $0 \leq a - bq < b$. $y = a - bq$ орқали белгилаймиз, унда:

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b.$$

б) $b \in \mathbb{Z}, b < 0$ хоссасини кўриб чиқамиз. У ҳолда, $-b > 0$. а) хоссасига мувофиқ, шундай $q, r \in \mathbb{Z}$ мавжуд, $a = (-b) \cdot q + r$, $0 \leq r < -b$ ёки $a = b \cdot (-q) + r$, $0 \leq r < -b$.

Ягоналиги. q, r, q_1, r_1 бутун сонлар бўлсин, бунда $a = b \cdot q + r$ ва

$$a = b \cdot q_1 + r_1, 0 \leq r < |b| \text{ ва } 0 \leq r_1 < |b|.$$

Бу нисбатлардан:

$$b(q - q_1) = r_1 - r, 0 \leq |r_1 - r| < |b| \Rightarrow |q - q_1| \leq |r_1 - r| \quad (1.1)$$

га эга бўламиз.

Агар $q \neq q_1$ деб фараз қилинса, $(1.1) \Rightarrow |q - q_1| \geq 1 \Rightarrow |r_1 - r| \geq |b|$ бўлганлиги сабабли қарама-қарши фикрга келдик. Демак, $q \neq q_1$. У ҳолда, (1.1) дан келиб чиқади, $r = r_1$.

Изоҳ. Шунини айтиш жоизки, охирги g) хосса бўлиниш билан боғлиқ мулоҳазаларни бутун сонлар учун эмас, балки натурал сонлар учун юритишга имкон яратади.

2 га каррали бутун сонлар (яъни, $2k, k \in \mathbb{Z}$, кўринишдаги сонлар) *жуфт*, 2 га каррали бўлмаган бутун сонлар (яъни, $2k+1, k \in \mathbb{Z}$, кўринишдаги сонлар) эса *тоқ* сонлар, деб юритилади.

Бунда қуйидагилар ўринли:

а) Иккита тоқ сонларнинг йиғиндиси ва айирмаси жуфт, кўпайтмаси эса тоқ сон бўлади.

б) Иккита жуфт сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси жуфт сон бўлади.

1-масала. a сонни 13 га бўлганда тўлиқмас бўлинма 17 га тенг бўлса, a нинг энг катта қийматини топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра, $a = 13 \cdot 17 + r, 0 \leq r < 13$. Демак, $r = 12$ бўлганда a энг катта қийматга эришади, яъни $13 \cdot 17 + 12 = 233$.

2-масала. а) $a+1$ сон 3 га бўлинса, $4+7a$ сон ҳам 3 га бўлинишини исботланг:

б) $2+a$ ва $35-b$ сонлар 11 га бўлинса, $a+b$ сон ҳам 11 га бўлинишини исботланг.

Ечиш.

а) $4 + 7a = 4(a + 1) + 3a$ бўлгани учун $4+7a$ сон 3 га бўлинади.

б) $a + b = (2 + a) - (35 - b) + 33$ бўлгани учун $a+b$ сон 11 га бўлинади.

3-масала. Бўлинувчи 371, тўлиқмас бўлинма 14 га тенг бўлса, бўлувчи ва унга мос колдикларни топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра, $371 = b \cdot 14 + r, 0 \leq r < b$, бундан $14b < 371, b \leq 26$. Бошқа томондан $15b > 371$, бундан $b > 24$. Демак, $b=25; 26$ ва $r = 21; 7$ бўлади.

4-масала. Ихтиёрий m ва n бутун сонлар $mn(m+n)$ сони жуфт сон бўлишини исботланг.

Ечиш. Агар m ва n сонлардан бирортаси жуфт бўлса, у ҳолда $mn(m+n)$ сони жуфт сон бўлиши маълум. Шунинг учун m ва n сонлар иккаласи ҳам тоқ, бўлади деб фараз қиламиз. У ҳолда, иккита тоқ сонларнинг $m+n$ йиғиндиси жуфт сон бўлганлиги сабабли $mn(m+n)$ сони жуфт бўлади.

5-масала. a сонни b сонга бўлганда бўлинма q ва нолмас колдик r га тенг. a ни қандай натурал n сонга n марта кўпайтирганда бўлинма n марта ортади?

-5661-

Ечиш. $an = bqn + rn$ дан $rn < b$ ва $a < \frac{b}{r}$.

6-масала. Берилган еттита сондан ихтиёрий олтитасининг йигиндиси 5 га бўлинади. Бу сонлар ҳар бири 5 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Берилган сонларни a, b, c, d, e, f, g орқали, уларнинг йигиндисини эса k орқали белгилаймиз. Масаланинг шартига кўра $k - a, k - b, k - c, k - d, k - e, k - f, k - g$ айирмалар барчаси 5 га бўлинади. Уларни қўшиб,

$$7k - (a + b + c + d + e + f + g) = 6k$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $6m$ сони 5 га бўлиниши келиб чиқади. Бу эса k сони 5 га бўлинганди бажарилади.

Шундай қилиб, k ва $k - a$ сонлар 5 га бўлинади, демак, $a = k - (k - a)$ сон ҳам 5 га бўлинади.

Худди шундай, қолган b, c, d, e, f ва g сонлар 5 га бўлиниши исботланади.

7-масала. Учта кетма - кет натурал сонлардан биттаси 3 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Натурал сонни $3m, 3m + 1, 3m + 2$ сонларнинг биттаси шаклида ифодалаш мумкин. Агар $n = 3m$ бўлса, у ҳолда $3|n$; агар $n = 3m + 1$ бўлса, у ҳолда $3 \nmid n + 2$; агар $n = 3m + 2$ бўлса, у ҳолда $3|n + 1$.

8-масала. а) 3 та кетма-кет натурал сонларнинг кўпайтмаси 6 га бўлинишини исботланг.

б) 5 та кетма - кет натурал сонларнинг кўпайтмаси 120 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. а) Берилган сонлардан камида биттаси жуфт сон бўлгани учун кўпайтма 2 га бўлинади. Худди шундай, берилган сонлардан камида биттаси 3 га қаррали бўлгани учун кўпайтма 3 га бўлинади. Демак, кўпайтма $6 = 2 \cdot 3$ га бўлинади.

б) Берилган сонлардан камида биттаси 5 га, камида биттаси 3 га, камида икkitаси 2 га бўлиниши аниқ.

Бундан ташқари, 2 га бўлинадиган сонлардан камида биттаси 4 га бўлигани учун кўпайтма $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$ га бўлинади.

9-масала. Агар беш хонали сон 41 га бўлинса, шу сонни ташкил қилган рақамларни айланма алмаштириш ёрдамида ҳосил бўлган ҳар қандай соннинг 41 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Беш хонали сон $N=10^4a+10^3b+10^2c+10d+e$ бўлсин ва у 41 га бўлинсин. Ракамларни айланма алмаштиришдан (чапга бир ракамга) қуйидаги сонни ҳосил қиламиз:

$N_1=10^4b+10^3c+10^2d+10d+a=10(10^4a+10^3b+10^2c+10d+e)-10^5a+a=10N-99999a$.
 $41 \mid N$ ва $41 \mid 99999$ дан $41 \mid N_1$ келиб чиқади.

10-масала. Ихтиёрий натурал k сон учун $7 + 7^2 + \dots + 7^{4k}$ йиғинди, 400 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Берилган йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} & (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + (7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8) + \dots \\ & + (7^{4k-3} + 7^{4k-2} + 7^{4k-1} + 7^{4k}) = \\ & = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) \cdot (1 + 7^4 + 7^8 + \dots + 7^{4k-4}) = \\ & = 7 \cdot 400 \cdot (1 + 7^4 + 7^8 + \dots + 7^{4k-4}) \end{aligned}$$

Бундан, $7 + 7^2 + \dots + 7^{4k}$ йиғинди 400 га бўлиниши келиб чиқади.

11-масала. $2^{2^n} + 1 (n=2,3,\dots)$ кўринишдаги барча сонлар 7 ракам билан тугагини исботланг.

Ечиш. $2^{2^2} + 1 = 17$. Агар $2^{2^n} + 1 = 10q + 7$, бўлса, у ҳолда

$$2^{2^{n+1}} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 = (10q + 6)^2 + 1 = (10Q + 6) + 1 = 10Q + 7.$$

12-масала. $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ ни билган ҳолда 7, 11, 13 га умумий бўлиниш аломатини келтириб чиқаринг. Бу аломатни 368312 га қўлланг.

Ечиш. $N = 1000q + r = 1001q + r - q$ дан N сон 7, 11 ва 13 га бўлиниши учун шу сондан унинг 1000 га бўлинганида ҳосил бўлган қолдиқдан айирмаси 7, 11 ёки 13 га бўлиниши зарур ва етарлиги келиб чиқади, яъни $7 \cdot 11 \cdot 13 \mid (1 - q)$. Агар $N = 368312$ бўлса, юқорида келтирилган айирма $368 - 312 = 56$.

56 факат 7 га бўлинганлиги сабабли $368312 / 7$ га бўлинади, лекин 11 ва 13 га бўлинмайди.

13-масала. $1^{2009} + 2^{2009} + \dots + 16^{2009}$ натурал сон 17 га бўлинишини кўрсатинг.

Ечиш. Ихтиёрий $k = 1, 2, \dots, 16$ учун

$$(17 - k)^{2009} = 17A - k^{2009}$$

тенглик ўринли, бу ерда A – натурал сон.

Демак, $k^{2009} + (17 - k)^{2009}$ сони 17 га бўлинади.

$1^{2009} + 2^{2009} + \dots + 16^{2009} = (1^{2009} + 16^{2009}) + (2^{2009} + 15^{2009}) + \dots$
 бўлгани учун берилган йиғинди ҳам 17 га бўлинади.

14-масала. Тўртта кетма-кет жойлашган бутун сонлар кўпайтмасига бир қўшилганда тўлиқ квадрат ҳосил бўлишини исботланг.

Ечиш. $m - 1, m, m + 1, m + 2$ – тўртта кетма-кет келадиган бутун сонлар бўлсин. У ҳолда

$$(m-1)m(m+1)(m+2)+1=(m-1)(m+2)(m^2+m)+1=(m^3+m-1)^2.$$

15-масала. Барча натурал n сони ва $m > 2$ тоқ сони учун $k = m^n$ сонни қараймиз. $1^k + 2^k + \dots + (m-1)^k$ сонини m га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Маълумки, $k = m^n$ кўринишдаги сон тоқ бўлади.

Демак, барча натурал $i = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$ – сонлар учун

$$i^k + (m-i)^k = m(i^{k-1} - i^{k-2}(m-i) + \dots + (m-i)^{k-1})$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликларни барчасини қўшиб чиқсак,

$$1^k + 2^k + \dots + (m-1)^k$$

сони m га бўлинишини ҳосил қиламиз.

16-масала. $11^{10} - 1$ сонни 100 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. Ньютон биномини қўллаймиз:

$$(1+10)^{10} = 1 + C_{10}^1 \cdot 10 + C_{10}^2 \cdot 10^2 + C_{10}^3 \cdot 10^3 + \dots + 10^{10}.$$

Бундан

$(1+10)^{10} - 1 = 10 \cdot 10 + C_{10}^2 \cdot 10^2 + C_{10}^3 \cdot 10^3 + \dots + 10^{10}$ ҳар бир қўшилувчи 100 га бўлинади.

17-масала. x, y – бутун сонлар бўлсин. $2x + 3y$ сони 17 га бўлиниши учун $9x + 5y$ сони 17 га бўлиниши зарур ва етарли бўлишини исботланг.

Ечиш. Қуйидагиларга эгамиз:

$$17|(2x + 3y) \Rightarrow 17|(13(2x + 3y)) \Rightarrow 17|(26x + 39y) \Rightarrow 17|(9x + 5y)$$

Демак, $2x + 3y$ сони 17 га бўлинса, $9x + 5y$ сони ҳам 17 га бўлинади.

Бошқа тарафдан

$$17|(9x + 5y) \Rightarrow 17|(4(9x + 5y)) \Rightarrow 17|(36x + 20y) \Rightarrow 17|(2x + 3y)$$

Демак, $9x + 5y$ сони 17 га бўлинса, $2x + 3y$ сони ҳам 17 га бўлинади.

18-масала. Ҳар бир бутун n учун $n^5 - n$ сон 5 га бўлиниши исботланг.

Ечиш. $n^5 - n = n(n^2-1)(n^2+1)$. Бутун сонни 5 га бўлганда қолдиклар 0, 1, 2,

3, 4 бўлади ва бундан бутун сон $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$, кўринишдан бирига тенг бўлиши келиб чиқади.

Агар $n = 5k$ бўлса, n сон 5 га бўлинади; агар $n = 5k + 2$ ёки $n = 5k + 3$ бўлса, $(n^2 + 1)$ сон 5 га бўлинади; агар $n = 5k + 1$ ёки $n = 5k + 4$ бўлса, (n^2-1) 5 га бўлинади.

19-масала. Барча бутун n сонлар учун қуйидагиларни исботланг:

а) $n^5 - 5n^3 + 4n$ сони 120 га бўлинади;

б) $n^2 + 3n + 5$ сони 121 га бўлинмайди.

Ечиш.

а) $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ бўлгани учун у 5 та кетма-кет натурал $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ сонларнинг кўпайтмаси бўлади. Бундай сонлар эса $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ сонига бўлинади (текширинг).

б) $n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$ тенглик бажарилишини кўрсатиш қийин эмас.

Агар $11 \nmid n^2 + 3n + 5$ бўлса, у ҳолда $11 \nmid (n+7)(n-4)$, яъни $11 \nmid n+7$ ёки $11 \nmid n-4$ бўлади.

$$(n+7) - (n-4) = 11$$

бўлгани учун $121 \mid (n+7)(n-4)$ бўлади. Аммо 33 сони 121 га бўлинмагани учун бу ҳолда $n^2 + 3n + 5$ сони 121 га бўлинмайди.

Агар $n^2 + 3n + 5$ сони 11 га бўлинмаса, у ҳолда $n^2 + 3n + 5$ сони 121 га бўлинмайди.

20-масала. Рақамлар йиғиндиси бир хил бўлган икки сон айирмаси 9 га бўлинишини исботланг.

Ечиш. $N_1 = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ ва $N_2 = \overline{b_m \dots b_1 b_0}$ бўлсин.

$N_1 = 9Q_1 + \sum_{i=0}^n a_i$ ва $N_2 = 9Q_2 + \sum_{i=0}^m b_i$ дан шартга кўра,

$\sum a_i = \sum b_i$, демак, $N_1 - N_2 = 9(Q_1 - Q_2)$.

21-масала. Кетма-кет келган тўртта рақам бирин-кетин ёзилган бўлиб, дастлабки иккита рақам ўрни алмаштирилгандан сўнг тўла квадрат бўлган тўрт хонали сон ҳосил қилинган. Шу сонни топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра,

$$N^2 = 1000(x+1) + 100x + 10(x+2) + (x+3) = 11(101x+93).$$

Бундан $N = 11 \cdot k$ ва N тўла квадрат бўлганлигидан $11k^2 = 101x + 93$, яъни

$$k^2 = \frac{101x+93}{11} = 9x+8 + \frac{2x+5}{11}.$$

Бу ерда $x = 3$ келиб чиқади. Демак,
 $N = 11(101 \cdot 3 + 93) = 4356 = 66^2$.

1.3- §. Энг катта умумий бўлувчи ва Энг кичик умумий каррали. Евклид алгоритми

Таъриф. $a, b \in \mathbb{Z}, a \nmid b, \delta \in \mathbb{Z}$. бутун сонларнинг умумий бўлувчиси $a_1, a_2, \dots, a_n$, агар $a_i : \delta (i = \overline{1, n})$. $d \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ бутун сонларнинг ЭКУБ и деб аталади агар:

а) d — шу сонларнинг умумий бўлувчиси бўлса;

б) d шу сонларнинг ҳар қандай умумий бўлувчисига бўлинади.

Таърифдан кўриниб турибдики, бутун сонларнинг ЭКУБи аниқ белгисигача аниқланган. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бутун сонлар ЭКУБининг фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз ва уни $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ёки ЭКУБ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ деб белгилаймиз.

Лемма. Агар $a = b \cdot q + r$ бўлса, у ҳолда $\text{ЭКУБ}(a, b) = \text{ЭКУБ}(b, r)$.

Икки бутун соннинг ЭКУБини топиш масаласини ечамиз.

$a, b \in \mathbb{Z}, a \nmid b$ бўлсин. a ни b га қолдиқли бўламиз: $a = b \cdot q_0 + r_1, 0 < r_1 < |b|$.

Энди b ни r_1 : $b = r_1 \cdot q_1 + r_2, 0 < r_2 < |r_1|$ га бўламиз ва ҳоказо.

Бу кетма-кет бўлиш жараёнини нолли қолдиқ ҳосил қилмагунча давом эттирамиз. Чунки $r_1 > r_2 > r_3 \dots$ а $b(a \nmid b, b \nmid a)$ натурал сонларининг кетма-кетлиги тугалланмас бўлиши мумкин эмас, зеро $n \in \mathbb{N}$, шундай

натурал сон борки, у $r_{k-1} : r_n$. Натижада тенглик занжирилини ҳосил қиламиз:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = bq_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < |b| \\ b = r_1q_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots \\ r_{n-2}r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_n, r_{n+1} = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

(1.2) тенгликдан $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_n, 0) = r_n$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, қуйидаги теоремага келамиз.

1 - Теорема. $a, b (a \nmid b, b \nmid a)$ бутун сонларнинг ЭКУБ и a, b бутун сонлар учун Евклид алгоритмида охириги нолли бўлмаган қолдикка тенг.

Мисол. 816, -187 бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш.

Ечиш. 816, -187 бутун сонларга Евклид алгоритмини қўлаймиз:

$$\begin{array}{r} 816 \overline{) -187} \\ \underline{-744} \quad -4 \\ -187 \overline{) 68} \\ \underline{-204} \quad -3 \\ 68 \overline{) 17} \\ \underline{68} \quad 4 \\ 0 \end{array}$$

кўриниб турибдики, $816 = -187 \cdot (-4) + 68, -187 = 68 \cdot (-3) + 17, 68 = 17 \cdot 4,$

Нолдан фарқли қолдиқ 17 га тенг. Хусусан, $(816, -187) = 17$.

2 - Теорема. $\exists (x, y \in \mathbb{Z}), ax + by = d, a_i \in \mathbb{Z} (i = \overline{1, n})$. Бўлсин. Агар,

$$(a_1, a_2) = d_1, (a_3, d_1) = d_2, (a_4, d_2) = d_3, \dots, (a_n, d_{n-2}) = d_{n-1}, \text{ токи } (a_1, a_2, \dots, a_n) = d_{n-1}.$$

Бутун сонлар ЭКУБи қуйидаги хоссаларга эга:

1) катталигига кўра энг катта мусбат умумий бўлувчи $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ шу сонларнинг ЭКУБи ҳисобланади;

2) $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, бўлсин, у ҳолда $(am, bm) = m(a, b)$;

3) агар

$$a:m \wedge b:m, \text{ бўлса, у ҳолда, } \left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{(a,b)}{m}$$

4) агар

$$d = (a,b), \text{ бўлса, у ҳолда, } \exists (x, y \in Z), ax + by = d.$$

Ўзаро

туб бутун сонлар. Энг кичик умумий каррали бутун сонлар

Таъриф. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бутун сонлар ўзаро туб деб аталади, агар ЭКУБ $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ бўлса.

Ўзаро туб сонларнинг хоссалари

1.

$a, b \in Z$ ўзаро туб сон ҳисобланади $\Leftrightarrow \exists (x, y \in Z) ax + by = 1$.

Исбот. а) Шартга кўра, $(a, b) = 1$. ЭКУБнинг 4-хоссасига кўра,

$$\exists (x, y \in Z) ax + by = 1.$$

б) Шартга кўра, $ax + by = 1, (x, y \in Z)$. $(a-b) = d$ бўлсин.

туб сонлар. $\Rightarrow 1, d, d \in N \wedge 1: d \Rightarrow d = 1$. Бундан кўринадики, a ва b ўзаро бутун

Хулоса.

Агар ЭКУБ $(a, b) = 1 \Rightarrow a: a_1, b: b_1 \Rightarrow (a_1, b_1) = 1$.

Энг кичик умумий каррали бутун сонлар

Таъриф. a ва b сонларининг мусбат умумий карраллари ичида $[a, b]$ орқали шу сонларнинг энг кичик умумий карралиси дейилади ва у белгиланади.

агар $k \in Z, (i = \overline{1, k})$ бутун сон $a_1, a_2, \dots, a_n$ умумий каррали бутун сон деб аталади, агар $k \in Z, (i = \overline{1, k})$ бўлса.

а) $m \in Z$ бутун сон $a_1, a_2, \dots, a_n$ энг кичик умумий каррали сон деб аталади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:

а) m - умумий каррали бутун сон $a_1, a_2, \dots, a_n$;

б) ҳар қандай умумий каррали бутун сон m га бўлинади.

Бутун сонларнинг ЭКУБини фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз. Ва ЭКУК $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ёки $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ белгилаймиз.

1 - Теорема. $\forall (a, b \in N), [a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)}$

1-хулоса $\forall (a, b \in \mathbb{Z}), a \neq 0; b \neq 0$. учун шу сонларнинг ЭКУБи мавжуд.

2-хулоса $(a, b \in \mathbb{Z})$ энг кичик мусбат умумий каррали сони шу бутун сонларнинг ЭКУБи ҳисобланади.

Бутун сонларнинг ЭКУКи хоссалари

2) $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ бўлса, у ҳолда $[am, bm] = m[a, b]$;

3) агар $a:m \wedge b:m$ бўлса, у ҳолда $\left[\frac{a}{m}, \frac{b}{m} \right] = \frac{[a, b]}{m}$;

4) агар $d=(a, b)$ бўлса, у ҳолда $\exists (x, y \in \mathbb{Z}), ax+by=d$.

Хоссалар

а) p туб сон бўлса, ихтиёрий натурал m сон учун $(p, m)=p(p, m)=1$ бўлади;

б) $d=(m, n)$, $m=dm', n=dn'$ бўлса, у ҳолда $(m', n')=1$ бўлади;

с) $d=(m, n)$, $m=d'm', n=d'n'$ ва $(m', n')=1$ бўлса, $d=d'$ бўлади;

д) агар $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ бўлса (бу ерда $p_1, p_2, \dots, p_k$ -туб сонлар, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$), у ҳолда $(m, n) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$ тенглик ўринли;

е) a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси шу сонларнинг барча умумий бўлувчиларига бўлинади.

1-масала. Иккита кетма-кет жуфт сонларнинг ЭКУБи 2 га, тоқ сонларнинг

ЭКУБи эса 1 га тенглигини исботланг.

Ечиш. $(2n, 2n+2) = 2(n, n+1) = 2$

$2n+3 = (2n+1) \cdot 1 + 2$

$2n+1 = 2 \cdot n + 1$

$2 = 1 \cdot 2$, бундая $(2n+1, 2n+3) = 1$.

2-масала. (Қолдиқли бўлиш ҳақида теорема) a ва b ($b \neq 0$) бутун сонлар бўлса, у ҳолда $a=bq+r$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона q ва r ($0 \leq r < |b|$) бутун сонлар мавжуд.

Ечиш. $[x]$ орқали $x \in R$ сонининг бутун қисмини, яъни x дан катта бўлмаган энг катта бутун сонни белгилаймиз.

$\{x\} = x - [x]$ тенглик билан $x \in R$ сонининг каср қисми аникланади.

Бутун қисм ва каср қисм таърифларидан бевосита

$$\frac{a}{|b|} = \left[\frac{a}{|b|} \right] + \left\{ \frac{a}{|b|} \right\}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $a = \left[\frac{a}{|b|} \right] |b| + \left\{ \frac{a}{|b|} \right\} |b| = bq + r$
бу ерда

$$q = \left[\frac{a}{|b|} \right] \operatorname{sgn} b, r = a - bq = \left\{ \frac{a}{|b|} \right\} |b|.$$

Бундан $bq + r$ ва $0 \leq r < |b|$.

Агар $a = bq_1 + r_1$ тенглик бажарилса ($0 \leq r_1 < |b|$), у ҳолда

$$b(q - q_1) = r_1 - r$$

бўлади. $0 \leq r, r_1 < |b|$ тенгсизликлардан

$$|b||q - q_1| = |r_1 - r| < |b|$$

тенгсизлик келиб чиқади, бундан $|q - q_1| < 1$. q, q_1 сонлар бутун бўлгани учун $q = q_1, r_1 = r$ га эга бўламиз.

Изоҳ. Юқоридаги q сон тўлиқсиз бўлинма, r сон эса a ни b га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ деб юритилади.

Натижа. a сонининг бирор бўлувчисига мос бўлган бўлинма ягонадир.

3-масала. $(a, b) = 1$ дан $(a + b, a - b)$ 1 ёки 2 га тенглиги келиб чиқишини исботланг.

Ечиш. $(a + b, a - b) = d$ бўлсин, у ҳолда $d|2a$ ва $d|2b$. $(2a, 2b) = 2(a, b) = 2$ бўлганлиги сабабли $d|2$.

Демак, $d = 1$ ёки 2.

4-масала. Агар a сони b сонидан кичик бўлмасдан, $a = bq + r$ ($0 \leq p < b$) бўлса, у ҳолда $(a, b) = (b, r)$ бўлади.

Ечиш. $D(a, b)$ орқали a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари тўпламини белгилаймиз. $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) ва $s \in D(a, b)$ бўлсин.

Демак, $r = a - bq$ сони s сонига бўлинади, яъни $s \in D(b, r)$. Аксинча, $s \in D(b, r)$ бўлса, у ҳолда $a = bq + r$ сони s га бўлинади, яъни $s \in D(a, b)$.

Демак, a сони b сонидан катта бўлмасдан, $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) бўлса, у

ҳолда, $D(a,b)$, $D(b,r)$ тўпламлар устма-уст тушади. Бундан уларнинг энг катта элементлари ўзаро тенг бўлиши келиб чиқади, яъни $(a,b), (b,r)$.

5-масала. Агар $u_2v_2 - u_1v_1 = 1$ бўлса, $(a,b) = (u_1a + v_1b, u_2a + v_2b)$ ни исботланг.

Ечиш. $(a,b) = d$ ва $(u_1a + v_1b, u_2a + v_2b) = d_1$ бўлсин. $d_1 | (u_1a + v_1b), d_1 | (u_2a + v_2b)$ ва $u_2v_2 - u_1v_1 = 1$ дан $d_1 | a, d_1 | b$ келиб чиқади, демак, $d_1 | d, d_1 | a, d_1 | b$ дан $d_1 | d$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $d_1 = d$.

6-масала. $p > 3$ туб сон 6 га бўлингanda ҳосил бўлган қолдиқ 1 ёки 5 га тенг бўлишини исботланг.

Ечиш. $p > 3$ сон 6 га бўлингanda 2 ва 4 қолдиқлар ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон жуфт бўлар эди. $p > 3$ сон 6 га бўлингanda 3 қолдиқ ҳам ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон 3 га бўливар эди. Демак, $p > 3$ туб сон 6 га бўлингanda ҳосил бўлган қолдиқ ёки 1 га ёки 5 га тенг бўлиши мумкин.

Натижа. $p > 3$ туб сон $6n \pm 1$ кўринишга эга.

7-масала. $3 = (51, 21)$ ни $51x + 21y$ шаклда ифодаланг.

Ечиш. $51 = 21 \cdot 2 + 9$, $21 = 9 \cdot 2 + 3$. Бундан

$$3 = 21 - 2 \cdot 9 = 21 - 2(51 - 21 \cdot 2) = 21 \cdot 5 - 51 \cdot 2.$$

8-масала. $p > 3$ туб соннинг квадрати 12 га бўлингanda ҳосил бўлган қолдиқ 1 га тенг бўлишини исботланг.

Ечиш. Олдинги масаланинг натижасига кўра $p = 6n \pm 1$ кўринишга, унинг квадрати эса $36n^2 \pm 12n + 1$ кўринишга эга. a ва b сонларнинг иккаласини ҳам бўладиган сон шу сонларнинг умумий бўлувчиси дейилади. $D(a,b)$ орқали a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари тўпламини белгилаймиз. Маълумки, барча a ва b учун $D(a,b)$ тўпam юқоридан чегараланган. Шунинг учун a ва b сонларининг умумий бўлувчилари ичида энг каттаси мавжуд бўлиб, шу сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси дейилади ва (a,b) орқали белгиланади.

9-масала. 1428 ва 2765 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий қарралисини Евклид алгоритмидан фойдаланиб топайлик:

$$1428 = 2765 \cdot 0 + 1428;$$

$$2765 = 1428 \cdot 1 + 1337;$$

$$1428 = 1337 \cdot 1 + 91;$$

$$1337=91 \cdot 14+63;$$

$$91=63 \cdot 1+28;$$

$$63=28 \cdot 2+7;$$

$$28=7 \cdot 4+0;$$

Демак, $(1428, 2765)=7$.

Бу сонларнинг умумий қарралисини топиш учун эса $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$ формуладан фойдаланамиз.

$$[1428, 2765] = \frac{1428 \cdot 2765}{7} = 395 \cdot 1428 = 564060.$$

10-масала. ab ва $m = [a, b]$ сонларнинг ЭКУБини топинг.

Ечиш. $(ab, m) = (dm, m) = m(d, 1) = m$, бу ерда $d = (a, b)$.

11-масала. $(2n+13, n+7)$ ни топинг.

Ечиш. $(2n+13, n+7) = (n+7, n+6) = (n+6, 1) = 1$.

12-масала. Учта кетма-кет натурал сонларнинг ЕКУБ ва ЕКУКини топинг.

Ечиш. $(n, n+1, n+2) = ((n, n+1), n+2) = (1, n+2) = 1$.

$$[n, n+1, n+2] = [[n, n+1], n+2] = [n(n+1), n+2] =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n, n+2)n}$$

нинг жуфт-тоқлигига қараб 2 ёки 1 бўлади.

Демак, агар n тоқ бўлса, $[n, n+1, n+2] = n(n+1)(n+2)$ ва агар n

$$\text{жуфт бўлса, } [n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

13-масала. $(160, 72)$ ни 160 ва 72 сонлар орқали чизиқли ифодасини топинг.

Ечиш. $160 = 72 \cdot 2 + 16$, $72 = 16 \cdot 4 + 8$, $16 = 8 \cdot 2$.

Иккинчи тенгликдан $8 = 72 - 16 \cdot 4$, биринчи тенгликдан эса $16 = 160 - 72 \cdot 2$ келиб чиқади. Шу тенгликларга қўра:

$$8 = 72 - 16 \cdot 4 = 72 - (160 - 72 \cdot 2) \cdot 4 = (-4) \cdot 160 + 9 \cdot 72.$$

$$\text{Демак, } (160, 72) = 8 = (-4) \cdot 160 + 9 \cdot 72.$$

Маълумки, ўзаро туб a, b сонлар учун $(a, b) = 1$ тенглик бажарилади. Айрим адабиётларда бу тенглик ўзаро туб сонлар таърифи сифатида қабул қилинган.

Қуйидаги хоссага эгамиз:

Хосса. a, b сонлари ўзаро туб сон бўлиши учун $am + bn = 1$ шарт зарур ва етарли, бу ерда m ва n бутун сонлар.

14-масала. Иккита соннинг ЭКУБи шу сонлар айирмасидан катта бўлиши мумкинми?

Ечиш. $a > b$ ва $(a, b) = d$ бўлсин. Бундан $a = dx$, $b = dy$ ва $x - y > 0$ бўлади. Агар $d > a - b = d(x - y)$ бўлса, $1 > x - y$ ва $0 < x - y < 1$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик ўринли эмас, чунки x ва y — бутун сонлар.

Демак, $(a, b) \leq a - b$ ($a > b$) бўлади.

15-масала. a ва b натурал сонлар учун маълумки, $a^2 + b^2$ сон ab га бўлинади. $a = b$ тенгликни исботланг:

Ечиш. $d = (a, b)$, $a = du$, $b = dv$.

d^2 га қискартириб, $u^2 + v^2$ сони uv га бўлинишини ҳосил қиламиз. Аммо, $(u^2 + v^2, uv) = 1$, чунки u ва v ўзаро туб. Демак,

$$uv = 1.$$

Бундан $u = v = 1$, $a = b = d$ эканлиги келиб чиқади.

16-масала.

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ (x, y) = 30 \end{cases}$$
 системанинг натурал ечимларини топинг.

Ечиш. $(x, y) = 30$ қуйидаги системага тенг кучли.

$$\begin{cases} x = 30u \\ y = 30v \\ (u, v) = 1. \end{cases}$$

Бундан берилган системанинг биринчи тенгламаси $u + v = 5$ кўринишга келади ва $u = 1, 2, 3, 4$ қийматлар қабул қилади. Демак, $x = 30, 60, 90, 120$ га тенг бўлиши мумкин. $y = 150 - x$ дан $y = 120, 90, 60, 30$.

17-масала. $m \geq n$ бўлсин. Қуйидагиларни исботланг:

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1 \quad (a > 1);$$

Ечиш. Маълумки, $(a^n, a^n - 1) = 1$. Демак,

$$\begin{aligned} (a^m - 1, a^n - 1) &= (a^m - a^n, a^n - 1) = (a^n(a^{m-n} - 1), a^n - 1) \\ &= (a^{m-n} - 1, a^n - 1). \end{aligned}$$

Шунинг учун $a^m - 1$, $a^n - 1$ сонлар учун Евклид алгоритми m, n даражалар учун ҳам Евклид алгоритмига ўтади ҳамда (m, n) ва 0 да тугалланади.

18-масала. Натурал сонлардан ташкил топган a_i кетма-кетлик учун $i \neq j$ ларда $(a_i, a_j) = (i, j)$ тенглик бажарилади. Барча i лар учун $a_i = i$ бўлишини исботланг.

Ечиш. Ҳар бир a_i учун $(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i$ га бўлинганлиги боис $a_i \geq i$ бўлади.

Фараз қиламиз, бирор i учун $a_i > i$ тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда,

$$(a_{a_i}, a_i) = (a_i, i) = i.$$

Бошқа томондан a_{a_i} сон a_i га бўлинганлиги учун $(a_{a_i}, a_i) = a_i > i$. Зиддият.

19-масала. Маълумки, ўзаро тенг бўлмаган натурал

a, b сонлар учун $a \mid b \mid a^2 + ab + b^2$ муносабат ўринли. $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$ тенгсизликни исботланг.

Ечиш. $g = (a, b)$ деб олсак, $a = xg, b = yg$ тенгликларга эга бўламиз, бу ерда x, y — ўзаро тўб бўлган сонлар. Бундан

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} = \frac{xy(x+y)g}{x^2+xy+y^2} \in \mathbb{Z}$$

муносабатларга эга бўламиз.

$$(x^2 + xy + y^2, x) = (y^2, x) = 1, (x^2 + xy + y^2, y) = (x^2, y) = 1, (x + y, y) = 1$$

тенгликлардан

$$(x^2 + xy + y^2, x + y) = (y^2, x + y) = 1$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Шунинг учун энг катта умумий бўлувчининг хоссаларидан $x^2 + xy + y^2 \mid g$ муносабатга эга бўламиз. Бундан $g \geq x^2 + xy + y^2$. Демак,

$$|a - b|^3 = |g(x - y)|^3 = g^3 |x - y|^3 \geq g^2 |x - y|^3 g \geq g^2 \cdot 1 \cdot (x^2 + xy + y^2) > g^2 xy = ab$$

20-масала (1-ХМО). Барча натурал n сонлар учун $\frac{21n+4}{14n+3}$ каср қискармас каср бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$ бўлгани учун

$21n + 4$ ва $14n + 3$ сонлар ўзаро тўб сонлар, яъни $\frac{21n+4}{14n+3}$ каср қискармас бўлади.

21-масала. a, b, c бутун сонлар берилган бўлсин. Шундай ўзаро туб k, l сонлар топиладики $a k + b l$ сон c га бўлинади. Исботланг.

Ечиш. $|a| + |b|$ бўйича индукцияни қўллаб исботлаймиз. $a = 0$ ёки $b = 0$ бўлса натижа осонлигича келиб чиқади. k ва l сонларнинг ишорасини ўзгартиб, $a > 0$ ва $b > 0$ деб олишимиз мумкин.

Бу ҳолда $|a| + |b| > |a - b| + |b|$. Индукция фаразига кўра, шундай ўзаро туб k' ва l' сонлар топиладики, улар учун $(a - b)k' + bl'$ сон c сонига бўлинади. Бундан $ak' + b(l' - k')$ сон c сонига бўлиниши келиб чиқади.

k' ва l' ўзаро туб бўлгани учун $k = k'$ ва $l = l' - k'$ ўзаро тублиги келиб чиқади.

22-масала. Барча m, n бутун сонлар учун $[m, n] \cdot (m, n) = |mn|$ тенгликни исботланг.

Ечиш. $[a, b] = [|a|, |b|]$ бўлгани учун фақат натурал m, n сонлар учун исботлаймиз.

$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ бўлсин (бу ерда $n = 1, 2, \dots, nk$ - туб сонлар, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$), у ҳолда

$$(m, n) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)} \quad \text{ва} \quad [m, n] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$$

тенгликлар ўринли. Бундан

$$\begin{aligned} (m, n) &= p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)} p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)} = \\ &= p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2) + \max(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k) + \max(\alpha_k, \beta_k)} = \\ &= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \dots p_k^{\alpha_k + \beta_k} = mn \quad \text{келиб чиқади.} \end{aligned}$$

1.4-§. Чекли занжир касрлар, муносиб касрлар хоссалари

Икки номаълумли чизиқли тенгламалар. a ва b натурал сонлар учун Евклид алгоритми қуйидагича бўлсин:

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b;$$

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1;$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2;$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1};$$

$$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}; r_{n+1} = 0;$$

Ҳар бир тенгликни бўлувчиларга бўлиб чиқамиз:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b_1}; \quad (1.3)$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}; \quad (1.4)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}(n+1).$$

Натижада тенглиklar ҳосил бўлади.

У ҳолда, $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$; (1.3) тенгликка (1.4) тенгликдаги $\frac{b}{r_1}$

қийматини қўйсак,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}$$

ифодага эга бўламиз. Бу жараёни давом эттирсак,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{q_n}}}}}$$

тенглик келиб чиқади.

Бу ифода $\frac{a}{b}$ рационал соннинг занжир касрга ёйилмаси дейилади. “Занжир каср” “узлуксиз каср” деб ҳам аталади.

Занжир касрлар $[q_0, q_1, \dots, q_n]$ кўринишида белгиланади.

$$\text{1-мисол. } \frac{120}{31} = 3 + \frac{27}{31} = 3 + \frac{1}{\frac{31}{27}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{4}{27}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{27}{4}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{3}{4}}}$$

$$\text{ёки } \frac{120}{31} = [3, 1, 6, 4].$$

$\frac{a}{b} = [q_0, q_1, \dots, q_n]$ занжир каср берилган бўлсин. У ҳолда

$[q_0, q_1, \dots, q_n], k \leq n$ занжир каср k - муносиб каср дейилади ва $\frac{P_k}{Q_k}$

кўринишда белгиланади. $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{a}{b}$ бўлиши аён.

Муносиб касрлар қуйидаги хоссаларга эга. Агар $k \geq 2$ бўлса,

$$1. P_k = P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2} \cdot Q_k = Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2};$$

$$2. \frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \dots < \frac{a}{b} = \frac{P_k}{Q_k} < \dots < \frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_0}{Q_0};$$

$$3. \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k \cdot Q_{k-1}};$$

$$4. P_k \cdot Q_{k-1} - Q_k \cdot P_{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

Бу хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан математик индукция методини қўллаш ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин.

Масалан 1- хоссанинг исботини кўриб чиқайлик:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}; \quad \text{бўлгани} \quad \text{учун}$$

$P_0 = q_0, Q_0 = 1; P_1 = q_0 \cdot q_1 + 1, Q_1 = q_1$ бўлиши равшан. У ҳолда, $k=2$ учун

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = q_0 + \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{(q_0 q_1 + 1) q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1} = \frac{P_1 \cdot q_2 + P_0}{Q_1 \cdot q_2 + Q_0}$$

Бундан $P_2 = P_1 \cdot q_2 + P_0; Q_2 = Q_1 \cdot q_2 + Q_0$ ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, k натурал сон учун 1-хосса тўғри бўлсин. 1-хоссани $k+1$ учун исбот қиламиз. Яъни, $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2}}$; бўлсин. $\frac{P_k}{Q_k}$

муносиб касрдан $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ муносиб касрни ҳосил қилиш учун q_k ни $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$

билан алмаштириш кифоя.

Шунинг учун

$$\begin{aligned}\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} &= \frac{P_{k-1}(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}) + P_{k-2}}{Q_{k-1}(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}) + Q_{k-2}} = \frac{P_{k-1}q_k q_{k+1} + P_{k-1} + q_{k+1}}{Q_{k-1}q_k q_{k+1} + Q_{k-1} + Q_{k-2} \cdot q_{k+1}} = \\ &= \frac{(P_{k-1}q_k + P_{k-2})q_{k+1} + P_{k-1}}{(Q_{k-1}q_k + Q_{k-2})q_{k+1} + Q_{k-1}} = \frac{P_k \cdot q_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k \cdot q_{k+1} + Q_{k-1}}.\end{aligned}$$

Демак, $P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}$; $Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}$.

Қолган хоссаларни мустақил исбот қилиб кўринг.

4 - хоссадан $(P_k, Q_k) = 1$, яъни, муносиб касрнинг сурат ва махражи ўзаро туб сон бўлиши келиб чиқади. Чунки $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$ сон P_k ва Q_k сонларнинг энг катта умумий бўлувчисига бўлинади.

Демак, $\frac{a}{b}$ каср қисқартирилмаган бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ ни занжир касрга ёйиб қисқартириш мумкин.

2-мисол. $\frac{1341}{2013}$ касрни занжир касрга ёйилик:

$$1341 = 2013 \cdot 0 + 1341$$

$$2013 = 1341 \cdot 1 + 672$$

$$1341 = 672 \cdot 1 + 669$$

$$672 = 669 \cdot 1 + 3$$

$$669 = 3 \cdot 223$$

У ҳолда

$$\frac{1341}{2013} = [0, 1, 1, 1, 3] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{223}}}} = \frac{447}{671}$$

Агар $(a, b) = 1$ бўлса, яъни $\frac{a}{b}$ каср қискармас каср бўлса, у ҳолда $P_k \cdot Q_{k-1} - Q_k \cdot P_{k-1} = (-1)^{k-1}$ тенгликдан $P_n \cdot Q_{n-1} - Q_n \cdot P_{n-1} = (-1)^{n-1}$ ёки $a \cdot Q_{n-1} - b \cdot P_{n-1} = (-1)^{n-1}$ ҳосил бўлади. Бундан $a \cdot |Q_{n-1} \cdot (-1)^{n-1}| - b \cdot |P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1}| = 1$ тенгликка эга бўламиз. Уни c га кўвайтирсак, $a \cdot |c \cdot Q_{n-1} \cdot (-1)^{n-1}| - b \cdot |c \cdot P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1}| = c$ тенглик ҳосил бўлади. Демак, $(a, b) = 1$ бўлганда

$$ax - by = c \quad (1.5)$$

тенгламанинг ечимларидан бири

$$\begin{cases} x_0 = c \cdot Q_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \\ y_0 = c \cdot P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \end{cases} \quad (1.6)$$

хосил бўлади. (1.6) тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x = x_0 + b \cdot m \\ y = y_0 + a \cdot m \end{cases} \quad (1.7)$$

формула билан ҳисобланади.

3-мисол. $25x - 16y = 9$ тўпламни бутун сонлар тўпламида ечинг.

$$\begin{aligned} \frac{25}{16} &= 1 + \frac{9}{16} = 1 + \frac{1}{\frac{16}{9}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{9}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{7}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} \\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{11}{7}. \text{ Демак, } \frac{P_1}{Q_1} = \frac{11}{7}. \text{ Топилган қийматларни (1.7)} \end{aligned}$$

формулага қўйиб,

$$\begin{cases} x = 9 \cdot Q_1 \cdot (-1)^1 + 16m, \\ y = 9 \cdot P_1 \cdot (-1)^1 - 25m, \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Қийматларни бундан } \begin{cases} x = 9 \cdot 7 + 16m = -63 + 16m \\ y = -9 \cdot 11 + 25m = -99 + 25m \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Умумий ечимни топамиз. Хусусий ечим сифатида $\begin{cases} x = -63 \\ y = -99 \end{cases}$ ни олиш мумкин.

$$\text{Текшириш: } 25 \cdot (-63) - 16 \cdot (-99) = -1575 + 1584 = 9$$

4-масала. Битта қутичада пашшалар билан чумолилар бор. Уларнинг оёқлари сони 76 та. Пашшанинг 8 тадан оёғи, чумолининг эса 6 тадан оёғи бор бўлса, қутичада нечта пашша ва чумоли бор?

Ечиш. Фараз қилайлик, қутичада x дона пашша ва y дона чумоли бор. Масала шартига кўра, $8x + 6y = 76$ ёки $4x - 3y = 38$.

$$\text{Бундан } \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Демак, } \begin{cases} x = 38 + 3m \\ y = -38 - 4m \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Лекин масала шартига кўра, $x > 0, y > 0$. Топилган ечимларнинг мусбатларини олишимиз керак. Яъни, $\begin{cases} 38+3m \geq 0 \\ -38-4m \geq 0 \end{cases} m \in \mathbb{Z}$ Бундан $-\frac{38}{3} \leq m \leq -\frac{19}{2}$, ундан эса $-\frac{12}{3} \leq m \leq -\frac{1}{2}$ келиб чиқади. Агар, $m=-10$, бўлса, $x=8; y=2$; агар $m=-11$, бўлса, $x=5; y=6$; агар $m=-12$ бўлса, $x=2; y=10$ бўлади. Демак, масала ечими қуйидагилардан иборат:

$$1) \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} 2) \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases} 3) \begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases}$$

Иррационал сонларни занжир каср кўринишида ифодалаш

Агар α иррационал сон берилган бўлса, унинг бутун қисмини ажратиб, қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин: $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Бу ерда $[\alpha]$ - берилган α иррационал соннинг бутун қисми, $\{\alpha\}$ - берилган α иррационал соннинг каср қисми бўлиб, албатта, $[\alpha] \geq 1, 0 < \{\alpha\} < 1, [\alpha] \text{ ни } \frac{1}{\alpha_1}, (\alpha_1 > 1) \text{ кўринишида ёзиб олсак, } \alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1} \text{ ҳосил бўлади.}$

Энди α_1 учун юқоридаги жараёни такрорлаб, α_1 ни $\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}$ кўринишида ёзиб оламиз ва ҳоказо:

$$\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, q_1 = [\alpha_1], \alpha_2 > 1;$$

$$\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3}, q_2 = [\alpha_2], \alpha_3 > 1.$$

Бу жараёни n марта такрорласак, $\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, \alpha_n]$ занжир каср ҳосил бўлади. Бу жараёни чексиз давом этгирсак, $\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n, \dots]$ чексиз занжир каср ҳосил бўлади.

Агар α квадрат иррационаллик бўлса, яъни шундай a, b, c лар мавжуд бўлиб, $\alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ кўринишида ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда α ни чексиз даврий занжир каср сифатида ифода қилиш мумкин.

Мисол. $\sqrt{2}$ ни чексиз даврий занжир касрга ёйинг.

Ечиш:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

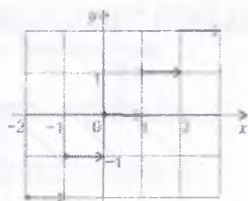
Демак, $\sqrt{2} = [1, (2)]$

1.5-§. Сонлар назариясида муҳим функциялар

Таъриф. $x \in R$ соннинг $[x]$ бутун қисми деб, x дан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади.

Масалан, $[-1,5] = -2$, $[-1] = -1$, $[0] = 0$, $[1,5] = 1$, $[\pi] = 3$.

Умуман олганда, таърифга биноан, $[x] = k$ тенглик қуйидагини билдиради: k сон $k \leq x < k+1$ шартни қаноатлантирадиган бутун сондир.



1.1-расм

$y = [x]$ функциянинг графиги зинасимон кўринишга эга (1.1-расм).

$\{x\} = x - [x]$ тенглик билан $x \in R$ сонининг қаср қисми аниқланади.

Масалан,

$$\{-0,3\} = 0,7; \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}; \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1; \{-2\sqrt{5}\} = 2 - \sqrt{2}; \{1\} = 0$$

x соннинг бутун қисми, яъни $[x]$ қўш тенгсизлик билан $[x] \leq x \leq [x] + 1$ ёки $x - 1 < [x] \leq x$ ёки $x = [x] + \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$ тенглик билан аниқланади ва аниқланиб қолган функция дейилади.

Агар x_1 ва x_2 сонлардан бирортаси бутун бўлса,

$$[x_1 + x_2] = [x_1] + [x_2]$$

ўринли бўлади.

$$\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{[x]}{m}\right] \text{ ўринли бўлади.}$$

$m!$ кўпайтманинг каноник ёйилмасига p туб сон

$$\left[\frac{m}{p} \right] + \left[\frac{m}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{m}{p^r} \right]$$

даражада келади, бу ерда S сон $p^r \leq m < p^{r+1}$ тенгсизликдан аникланади.

Хоссалари:

$$1) [x] \leq x; 2) [x+a] = [x] + a; 3) [x+y] \geq [x] + [y]$$

бу ерда a ихтиёрий бутун, x, y – ихтиёрий сонлар.

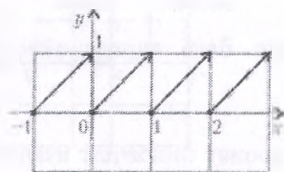
$$4) \{x\} = x \text{ тенглик } 0 \leq x < 1 \text{ бўлгандагина бажарилади;}$$

5) $\{x\} = \{y\}$ тенглик $x-y=n$ (бу ерда n -бутун сон) бўлгандагина бажарилади;

$$6) \text{ Ихтиёрий } x \text{ учун } \{x+1\} = \{x\} \text{ бўлади.}$$

Шундай қилиб, $y=\{x\}$ функция энг кичик даври 1 га тенг бўлган даврий

функциядир. Унинг графиги (1.2-расм) келтирилган.



1.2-расм

Натурал соннинг бўлувчилар сони ва улар йиғиндиси

Ихтиёрий натурал a сон учун $\tau(a)$ ва $S(a)$ функциялар мос равишда a соннинг натурал бўлувчилари сони ва уларнинг йиғиндисини ифодалайди. Бу функциялар учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$r(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$$

$$S(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1} = \prod_{i=1}^n \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

бу ерда: $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ - a соннинг каноник ёйилмасы.

Бу функциялар мултипликатив, яъни агар $(a, b) = 1$ лар учун $\tau(ab) = \tau(a) \tau(b)$ ва $S(ab) = S(a)S(b)$ ўринли.

Эйлер функцияси.

$\varphi(a)$ – Эйлер функцияси a соннинг барча натурал қийматларида аниқланган

бўлиб, a дан катта бўлмаган ва у билан ўзаро тўб бўлган сонлар сонини билдиради.

$\varphi(1)=1$ деб қабул қилинган. Эйлер функцияси:

$$\varphi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) (p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_n^{a_n} - p_n^{a_n-1})$$

формула ёрдамида ҳисобланади, бу ерда $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ – соннинг каноник ёйилмаси.

Хусусан, $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$, $\varphi(p) = p-1$.

Эйлер функцияси мультипликатив, яъни ўзаро тўб $a, b, \dots, k$ сонлар учун $\varphi(ab \dots k) = \varphi(a)\varphi(b) \dots \varphi(k)$ шарт бажарилади.

Мёбиус функцияси

Барча натурал сонлар учун аниқланган

$$\mu(a) = \begin{cases} 1, & \text{агар } a=1 \\ (-1)^k, & \text{агар } a = p_1 p_2 \dots p_k, \quad p_i = p_j, \quad i \neq j \\ 0, & \text{агар } a \text{ тўб сон квадратига бўлинса} \end{cases}$$

қўринишдаги функцияга Мёбиус функцияси деб аталади.

Бу функция мультипликативдир, яъни агар $(a,b)=1$ бўлса, $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$.

Агар $\theta(a)$ – ихтиёрий мультипликатив функция бўлса, у ҳолда

$$\sum_{d|a} \mu(d) \theta(d) = \begin{cases} 1, & \text{агар } a=1 \\ \prod_{p|a} (1 - \theta(p)), & \text{агар } a \neq 1. \end{cases}$$

Агар бу формулада $\theta(a)=1$ ва $\theta(a)=\frac{1}{a}$ деб олсак, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\sum_{d|a} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{агар } a=1 \\ 0, & \text{агар } a \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} 1, & \text{агар } a=1 \\ \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right), & \text{агар } a>1. \end{cases}$$

Агар бутун a лар учун $f(a)$ – функция бир қийматли бўлиб,

$$F(a) = \sum_{d|a} f(d) \quad (d > 0)$$

ўринли бўлса, у ҳолда

$$f(a) = \sum_{d|a} \mu(d) F\left(\frac{a}{d}\right)$$

тенглик ўринлидир (Мёбиуснинг тескарилаш формуласи)

1-масала. 2002 соннинг бўлувчилар сони ва уларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, бундан

$$\tau(2002) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$$

$$S(2002) = \frac{2^{1+1}-1}{2-1} \cdot \frac{7^{1+1}-1}{7-1} \cdot \frac{11^{1+1}-1}{11-1} \cdot \frac{13^{1+1}-1}{13-1} = 3 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 14 = 4032.$$

2-масала. 2002 соннинг барча бўлувчиларини топинг.

Ечиш. $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ - каноник ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$(1+2)(1+7)(1+11)(1+13) = 1+2+7+11+13+14+22+26+77+91+143+154+18$$

$2+286+ +1001+2001-2002$ нинг барча бўлувчилари йиғиндиси, демак, ҳар бир қўшилувчи изланаётган бўлинмаларни беради.

3-масала. $3 - 2 \cos \frac{90\pi}{181}$ соннинг бутун қисмини топинг.

Ечиш. $a \in \mathbb{Z}$ ва x каср сон учун $[a - x] = a + [-x]$ формула ўринли. Бу формулани қўллаб

$$\left[3 - 2 \cos \frac{90\pi}{181}\right] = 3 + \left[-2 \cos \frac{90\pi}{181}\right] = 3 + (-1) = 2$$

ни ҳосил қиламиз.

4-масала. $x^2 - 10[x] + 9 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Фараз қилайлик, $[x] = k$ бўлсин. $k \geq 0$ эканлиги тушунарли.

$x \geq k$ бўлганлиги учун $x \geq 0$. Натижада $x^2 - 10[x] + 9 \leq 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Бундан $1 \leq x \leq 9$ келиб чиқади, бундан $1 \leq k \leq 9$. $x^2 + 9$ сон 10 га бўлинувчи бутун сондир. Текширишлар шуни кўрсатадики, $1; \sqrt{61}; \sqrt{71}$ сонлар тенгламани қаноатлантиради.

5-масала. 180 дан катта бўлмаган ва 5, 7, 11 ларга бўлинмайдиган сонлар сонини топинг.

Ечиш. $n = 180$ ва $p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11$ лар учун

$$B(180; 5, 7, 11) = [180] - \left[\frac{180}{5} \right] - \left[\frac{180}{7} \right] - \left[\frac{180}{11} \right] + \left[\frac{180}{5 \cdot 7} \right] + \left[\frac{180}{5 \cdot 11} \right] + \left[\frac{180}{7 \cdot 11} \right] - \left[\frac{180}{5 \cdot 7 \cdot 11} \right] = \\ = 180 - 36 - 25 - 16 + 5 + 3 + 2 - 0 = 113.$$

6-масала. $\left[\frac{2x+1}{3} \right] = [x]$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Фараз қилайлик, $[x] = k$. У ҳолда

$$\begin{cases} k \leq \frac{2x+1}{3} < k+1 \\ k \leq x < x+1 \end{cases}$$

тенг қучли системани ёзамиз:

$$\begin{cases} \frac{3k-1}{2} \leq x < \frac{3k+2}{2} \\ k \leq x < x+1 \end{cases}$$

Бундан k қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$\frac{3k-1}{2} < k+1, \quad k < \frac{3k+2}{2}.$$

Яъни, $-2 < k < 3$.

Шундай қилиб, $k-1; 0; 1; 2$ қийматларга эга бўлиши мумкин. Ушбу қийматларни кетма-кет (1) системага қўйиб, ҳосил бўлган тенгсизликларни ечиб, қуйидаги жавобни топамиз.

Демак, $-1 \leq x < -\frac{1}{2}; 0 \leq x < 2; \frac{5}{2} \leq x < 3$

7-масала. $(2m)!!$ нинг каноник ёйилмасига p туб сон нечанчи даражада киришини аниқланг.

Ечиш. $(2m)!! = m! \cdot 2^m$ бўлганлиги сабабли $p = 2$ га тенг бўлса,

$$m + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{2^i} \right], 2^k \leq m < 2^{k+1}.$$

$p > 2$ бўлса,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^i} \right], p^k \leq m < p^{k+1}$$

га тенг бўлади.

8-масала. $\left[\frac{x+y}{n} \right]$ ни $\left[\frac{x}{n} \right] + \left[\frac{y}{n} \right]$ ёки $\left[\frac{x}{n} \right] + \left[\frac{y}{n} \right] + 1$ га тенглигини исботланг.

Ечиш. $\frac{x+y}{n} = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + \alpha + \left\lfloor \frac{y}{n} \right\rfloor + \beta$

бўлиб, бу ерда: $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$. Демак,

$0 \leq \alpha + \beta < 2$ бўлганлиги сабабли $[\alpha + \beta]$ 0 ёки 1 га тенг бўлади.

9-масала. Барча натурал бўлувчилари кўпайтмаси 5832 га тенг бўлган натурал сонни топинг.

Ечиш. $\sqrt[n]{a^{r(a)}} = 5832 = 2^3 \cdot 3^6$, бундан $a = 2^x \cdot 3^y$ ва

$$\begin{cases} x(1+x)(1+y) = 6 \\ y(1+x)(1+y) = 12. \end{cases}$$

Бу системанинг ечими: $x = 1$, $y = 2$. Демак, $a = 18$.

10-масала. Куйидаги кетма-кетликни кўрамиз

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$$

(Кетма-кетликда битта бир, иккита икки, учта уч, тўртта тўрт, бешта беш ва ҳоказо). Қайси сон

а) 2002-; б) n - инчи ўринда туради?

Ечиш. Фараз қилайлик, $x_n = k$; $k - n$ -ҳад. Берилган кетма-кетликда k сони биринчи пайдо бўлгунга қадар

$$1 + 2 + 3 + \dots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$$

сон кетма-кетлиги ёзилади. Охирги k сон $\frac{k(k+1)}{2}$ - ўринда туради.

Шунинг учун

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Бундан

$$k^2 - k < 2n \leq k^2 + k$$

келиб чиқади.

Охирги ҳосил бўлган тенгсизликнинг ўнг ва чап қисмига $\frac{1}{4}$ ни қўшиб куйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} k^2 - k + \frac{1}{4} &< 2n < k^2 + k + \frac{1}{4} \\ \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 &< 2n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

У ҳолда,

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2}$$

Бундан

$$k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < k + 1.$$

Натижада,

$$x_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right].$$

Берилган кетма-кетликнинг n -хадини ҳисоблаш формуласини ҳосил қилдик. Хусусан, $x_{2002} = 63$

11-масала. 3 ва 4 га бўлинадиган ва 14 та бўлувчига эга бўлган сонни топинг.

Ечиш. Мисол шартига кўра, $\tau(a) = 14 = 2 \cdot 7 = (1+1)(6+1)$, демак, $a = p_1^2 p_2^6$, яъни $a = 2^2 \cdot 3^6$, бу ерда $a_1 \geq 2, a_2 \geq 1$. Демак, $a = 2^6 \cdot 3 = 192$.

12-масала. $100!$ сон иккиннинг қайси даражасига бўлинади?

Ечиш. 1, 2, ..., 100 сонлар орасида қуйидагилар мавжуд:

$$\frac{100}{2} = 50 \text{ та жуфт сон,}$$

$$\frac{100}{4} = 25 \text{ та 4 га қаррали сон.}$$

$$\left[\frac{100}{8} \right] = 12 \text{ та 8 га қаррали сон.}$$

$$\left[\frac{100}{16} \right] = 6 \text{ та 16 га қаррали сон.}$$

$$\left[\frac{100}{32} \right] = 3 \text{ та 32 га қаррали сон.}$$

$$\left[\frac{100}{64} \right] = 1 \text{ та 64 га қаррали сон.}$$

Бундан $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 100$ кўпайтмада жами $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ та 2 сони қатнашади, яъни: $100!$ сон 2^{97} га бўлинади ва 2^{98} га бўлинмайди. Демак, жавоб 97.

13-масала. $\varphi(12 \cdot 5 \cdot 1956)$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Ўзаро туб кўпайтувчиларни аниқлаш учун кўпайтманинг каноник ёйилмасини топамиз:

$$12 \cdot 5 \cdot 1956 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 163 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 163. \text{ Бундан}$$

$$\varphi(12 \cdot 5 \cdot 1956) = \varphi(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 163) = (2^4 - 2^3)(3^2 - 3)(5 - 1)(163 - 1) = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 162 = 31104.$$

14 – масала (Гаусс масаласи).

$$\sum_{d|x} \varphi(d) = x$$

айниятни исботланг:

Ечиш. $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Мультипликатив функциялар учун асосий айнtimerтга кўра,

$$\begin{aligned} \sum_{d|x} \varphi(d) &= (1 + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \dots + \varphi(p_1^{a_1}) \dots = \\ &= \{1 + (p_1 - 1) + (p_1^2 - p_1) + \dots + (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})\} \dots = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \\ &= x \end{aligned}$$

Айният исботланди.

15-масала. $\varphi(3^x \cdot 5^y) = 600$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ дан $\varphi(3^x \cdot 5^y) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Бошқа томондан

$$\varphi(3^x \cdot 5^y) = (3^x - 3^{x-1})(5^y - 5^{y-1}).$$

Демак, $3^{x-1} \cdot 2 \cdot 5^{y-1} \cdot 4 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ ёки $3^{x-1} 5^{y-1} = 3 \cdot 5^2$ ва $x = 2$, $y = 3$.

16-масала. Агар $x > 0$ ва n натурал сон бўлса, у ҳолда

$$\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{x}{n} \right] \text{ бўлишини исботланг.}$$

Ечиш. Равшанки, $(\alpha; \beta)$ ораликда $[\beta] - [\alpha]$ та бутун сонлар жойлашган.

Ҳақиқатган ҳам, агар m бутун сон $\alpha < m < \beta$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $[\alpha] + 1 \leq m < [\beta]$. Худди шундай, $(\alpha; \beta)$

ораликда $\left[\frac{\beta}{x} \right] - \left[\frac{\alpha}{x} \right] -$ та берилган $x > 0$ га қаррали сонлар жойлашган.

x дан кичик ва n га бўлинадиган натурал сонларни кўрамиз.

Бундай сонлар жами $\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{x}{n} \right] - \left[\frac{0}{n} \right]$ та. Аммо $[x]$ дан катта бўлмаган

ва n га бўлинадиган сонлар ҳам $\left[\frac{x}{n} \right]$ та. Тенглик исботланди.

17-масала. $\mu(2002)$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ дан $\mu(2002) = (-1)^4 = 1$ келиб чиқади.

18-масала. n - натурал, x - ҳақиқий сонлар учун

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right]$$

тенгликни исботланг:

Ечиш. n сонини фиксирлаб,

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

функцияни караймиз. У ҳолда,

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x + 1] - [nx + 1].$$

Ихтиёрий бутун k учун $[x + k] = [x]$ формулани қўлаб барча ҳақиқий x қийматларида

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$$

тенглик бажарилишини ҳосил қиламиз.

Демак, $y=f(x)$ функция даврий функция бўлади ва y $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ оралиқда айнан нолга тенг бўлишини текшириш қийин эмас.

Бундан $y=f(x)$ функция барча ҳақиқий x қийматларида нолга тенг бўлиши келиб чиқади.

19-масала. $\sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ формула тўғрилигини $a = 12$ учун текширинг.

Ечиш. 12 нинг бўлувчилари: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Бундан

$$\sum_{d|12} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(2)}{2} + \frac{\mu(3)}{3} + \frac{\mu(4)}{4} + \frac{\mu(6)}{6} + \frac{\mu(12)}{12} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$\prod_{p|12} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

20-масала. а) $\left[(2 + \sqrt{3})^{2002}\right]$; $\left\{(2 + \sqrt{3})^{2002}\right\} > \frac{0,9 \dots 9}{1001}$

сонлар тоқ эканлигини исботланг.

Ечиш. $(2 + \sqrt{3})^{2002}$ ифодада қавсни очиб $(2 + \sqrt{3})^{2002} = A + B\sqrt{3}$ ни ҳосил қиламиз, бу ерда A ва B – натурал сонлар. Бундан

$$(2 - \sqrt{3})^{2002} = A - B\sqrt{3} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{2002}}.$$

Бу ҳолда

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} + (2 - \sqrt{3})^{2002} = 2A$$

бўлади.

Бундан

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = 2A - 1 + 1 - (2 - \sqrt{3})^{2002}$$

келиб чиқади.

Нагижада, $\left[(2 + \sqrt{3})^{2002}\right] = 2A - 1$ - тоқ сон, яъни

$$\{(2 + \sqrt{3})^{2002}\} = 1 - (2 - \sqrt{3})^{2002}$$

келиб чиқади.

Ҳосил бўлган тенгликнинг ўнг қисмини баҳолаймиз:

$$(2 - \sqrt{3})^{2002} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{2002}} = \frac{1}{(7 + 2\sqrt{3})^{1001}} < \frac{1}{10^{1001}}.$$

$$\text{Шунинг учун } \{(2 + \sqrt{3})^{2002}\} > \frac{0,9 \dots 9}{1001}$$

1.6-§. Туб сонлар тарихидан

Қадимги грек математиги Эратосфен дунёда биринчилардан бўлиб, ернинг ўлчамини аниқлади, “параллел” ва “меридиан” тушунчаларини киритди. Пифагор эса “ер шар шаклида” деган фаразни ўртага ташлади: “Табиатда ҳамма нарса мукаммал, шунинг учун ҳам ер мукаммал кўринишда бўлиши даркор. Геометрик жисмлардан энг мукаммали шардир. Демак, ер шар шаклида бўлиши керак”. Лекин ернинг шар шаклида эканлигини исбот қилиш ва унинг радиусини ўлчаш фақат Эратосфенгагина nasib қилди. У биринчи бўлиб, ер юзи харитасини тузиб чиқди. Ўша пайтда маълум бўлган Европа, Осиё, Ливия, Арабистон, Ариана, Ҳиндистонларгина унинг харитасидан жой олган (А. М. Куприн. Слово о карте. —М.: Изд. “Недра”, 1987).

Туб сонларни ўрганиш тарихи 2000 йилдан бери копрок даврни уз ичига олади. Эрампдан аввалги III асрда яшаган лонон олими Евклид туб сонлар 2,3,5,7 ... чексиз куп билан ишлаш исботлаган. Бунда у туба сонлар сони чеклита, деб $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ сонини олади. Бу сон $p_1, p_2, \dots, p_k$ ларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди. Демак, N туб сон ёки $p_1, p_2, \dots, p_k$ лардан бошқа бирорта p_{k+1} туб бўлувчига эга. Бу эса туб сонлар сони чеклита дайилганига зиддир, яъни туб сонларнинг сони чексиз куп. Ушбу исбот Евклиднинг “Бошлангичлар” асарининг IX китобидаги 20-теоремасида келтирилган бўлиб, ҳозиргача мажуд

исботларнинг энг соддаси ҳисобланади. Натурал сонлар каторида туб сонлар соннинг чексиз кўплигининг бошқа исботлари билан кизиқувчилар Л. Эйлер ва Г. Поя исботлари билан танишишлари мумкин.

Туб сонларни қуйидагича тасаввур қилишимиз мумкин. Кўз олдингизга хонадан чиқиб, самога қараб чўзилиб кетган электр симини келтиринг. Бу симнинг ҳар бир метрига биттадан лампочка осилган бўлиб, бу лампочкалар кетма - кет натурал сонлар билан рақамланган бўлсин. Сим токка уланганда фақат туб рақамли лампочкалар ёнсин.

Энди тармок бўйлаб фазога саёҳат қилайлик. Кўз олдимизда қуйидаги ҳодисалар намоён бўлади:

1-лампочка ўчик, 2- , 3- лампочка ёниқ! Бунақаси бошқа учрамайди!

3 ва 5; 5 ва 7; 11 ва 13; 17 ва 19; 29 ва 31; 41 ва 43; 71 ва 73; 101 ва 103 сонлар эгизак сонлар дейилади.

Биринчи юзта натурал сонлар билан рақамланган лампочкалардан 75 таси ўчик ва 25 таси ёриклигини кўрамыз.

Биринчи мингталикда 832 та ва 168 та.

Биринчи миллионталикда эса 921502 та ва 78468 та мос равишда ўчик ва нур сочувчи чирокларни кўрасиз.

Тасаввур қиламиз. Орқада ҳам, олдинда ҳам зим-зиё қоронғулик. Лекин нур сўнмайди, чунки Евклид теоремасига асосан, олдинда чексиз кўп нур сочувчи чироклар учрайди.

Агар бизнинг учиш тезлигимиз, ҳатто, 300000 км/с, яъни ёруғлик тезлигига тенг бўлса ҳам нур сочувчи чироклар кўринмайди. Лекин биламизки, П. Л. Чебишев теоремасига асосан, қанча масофа босиб ўтган бўлсак, яъни шунча масофадан сўнг яна нур сочувчи чирок кўринади, деб ўзимизга таскин бера оламиз.

Маълумки, туб сонларга оид масалаларни ҳал қилиш жараёнида буюк математикларнинг меҳнатлари натижасида математиканинг асосий соҳаси – “Сонлар назарияси” вужудга келди. Шуниси қизиқки, сонлар назарияси муаммолари қанчалик мураккаб бўлмасин, масаланинг мазмуни, ҳатто мактаб ёки лицей ўқувчилар учун ҳам тушунарли.

Туб сонлар жуда қадимдан маълум бўлсада, унга математикларнинг кизиқиши ҳанузгача сўнгани йўқ. Бунинг иккита асосий сабаб бор: биринчиси туб сонлар жуда содда ва табиий аниқланган, иккинчидан бу сонлар билан ифодаланадиган баази математик хоссаларини умумий ҳолда исботлаш жуда қийин ҳозирча исботлаш йўли йўқ. Масалан, Бундан 263 йил илгари Л. Эйлер ва Х. Голдбахлар томонидан кўриб чиқилган гипотеза ҳозиргача ўз исботини топмади. Бу гипотеза Голдбахнинг бинар проблемаси деб деб аталиб, у қуйидагича: иккидан катта бўлган ҳар қандай жуфт сонни иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин. Бу гипотезанинг тўғрилигини дастлабки бир неча жуфт сонлар учун текшириб кўриш осон (масалан: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$ ва ҳоказо) замонавий компьютерлардан фойдаланиб, анча катта сонлар учун ҳам текшириб кўрилган, лекин уни умумий ҳолда исботлаш ҳозир ҳам муаммолигича қолмоқда.

Х.Голдбах муаммоси. 1742 йили Санкт-Петербург академиясининг аъзоси Х. Голдбах Л. Эйлерга ёзган хатида қуйидаги фаразни баён қилди: Бешдан катта бўлган ҳар қандай натурал сон қўпи билан 3 та туб сон йиғиндиси сифатида ифода қилинади.

$16=3+2+11$, $12=7+3+2$, $13=7+3+3$, $11=7+2+2$ ва ҳоказо.

Кинбор 1000 гача, Обри 2000 гача, Миле 9000 гача Х. Голдбах гипотезаси тўғри бўлишини текширганлар.

Х.Голдбах муаммосидан яна иккита фараз (гипотеза) келиб чиқади:

- ҳар қандай 4 дан кичик бўлмаган жуфт сон иккита туб сон йиғиндисига тенг;

- ҳар қандай 7 дан кичик бўлмаган тоқ сон учта туб сон йиғиндисига тенг.

Л. Эйлер Х. Голдбах муаммосини ҳал қилгани йўқ, лекин у бу муаммони ҳал қилиш учун ҳар қандай 4 дан кичик бўлмаган жуфт сон иккита туб сон йиғиндисига тенглигини исбот қилиш етарли бўлишини кўрсатди.

Агар $2m = p_1 + p_2$ бўлса,

$$2n+1 = 2n+3-2 = 2(n-1)+3 = p_1' + p_2' + 3.$$

Лекин, 200 йил мобайнида Х. Голдбах муаммосини ҳеч ким ҳал қила олгани йўқ. Фақатгина 1937 йили академик И. М. Виноградов ҳар қандай 7 дан катта тоқ соннинг 3 та туб сон йиғиндисига тенглигини исбот қилди. Бу теоремадан ҳар қандай 10 дан кичик бўлмаган жуфт сон 4 та туб соннинг йиғиндисига тенглиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан,

$$2n-1 = p_1 + p_2 + p_3, \text{ ёки } 2n = p_1' + p_2' + p_3 + 1 = p_1' + p_2' + p_3 + 1 = p_1' + p_2' + p_3 + 3 - 2.$$

$$\text{ёки } 2n + 2 = p_1' + p_2' + p_3 + 3.$$

Шундай қилиб, ҳозиргача Х. Голдбах муаммоси тўлиқ ҳал қилингани йўқ.

Шунингдек, юқоридаги $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ туб (мураккаб сонлар) сони (берилган $k \geq 2$ учун) чексиз кўп деган муаммо ҳам очик қолмоқда. Шу каби ўхшаш турли муаммоларни ҳал қилиш жараёнида сонлар назарияси фан сифатида шаклланди.

Ўрта асрларда сонлар назариясининг гуллаб - яшнаши буюк француз математиги П. Ферма (XVII асрда яшаган) номи билан боғлиқ. Лекин, у ўз кашфиётларининг ёзма баёнини қолдирмаган.

Сонлар назарияси энг аввал фан сифатида Леонард Эйлернинг (1707- 1783) илмий ишларида шаклланди. Л. Эйлернинг фаолияти ақлни лол қолдирадиган даражада бой. Л. Эйлер 1735 йили бир кўзи, 1766 йили иккинчи кўзи ҳам кўрмай қолишига қарамай, умрининг охириги йилларида унинг илмий фаоллиги камаймади, аксинча, ошиб борган. Унинг илмий ишлари 72 жилдлик асарлар тўпламида жамланган бўлиб, уларнинг юздан ортиғи сонлар назариясига бағишланган. П. Ферманинг деярли барча исботсиз теоремалари Л. Эйлер томонидан тўлиқ исбот қилиниб, улар асосида кўпгина математик қонуниятлар кашф қилинди.

У ҳақда “Бошқалар учун нафас олиш жараёни қандай кечса, Эйлер учун ҳисоблаш жараёни шундай табиий жараён” ёки “Юраги уришдан тўхтаганда ҳам мияси ҳисоблашдан тўхтамаган математик”, дейишади.

Туб сонлар билан боғлиқ бўлган бундай гипотезаларни кўплаб келтириш мумкин.

Малумки, туб сонлар натурал сонлар каторида текис тақсимланмаган. Масалан, (1,100) ораликдаги натурал сонларнинг

25% ва туб сон бўлса, (101,200) ораликда 21%, (201,300) ораликда 16%, (1,1000) ораликда эса 16,8% туб сонлар бор. Шунинг учун ҳам туб сонлар тақсимотини ўзида ифодаловчи функцияни излаш табиий ҳол бўлиб кўринар эди. x нинг барча табиий қийматларида фақат ҳар хил туб сонга тенг қиймат қабул қилувчи $f(x)$ бутун Л. Эйлер ва бошқа олимлар томонидан бундай кўпхадлар топилди, лекин кейинчалик маълум бўлдики, уларнинг бирортаси ҳам аргументнинг барча табиий қийматларида турли туб қиймат қабул қилмас экан. Масалан:

$$f(x) = x^2 + x + 17 \text{ кўпхад } x = 0, 1, 2, 3, \dots, 15 \text{ бўлганда;}$$

$$f(x) = 2x^2 + 29 \text{ кўпхад } x = 0, 1, 2, 3, \dots, 28 \text{ бўлганда;}$$

$$f(x) = x^2 + x + 41 \text{ кўпхад } x = 0, 1, 2, 3, \dots, 39 \text{ бўлганда;}$$

$$f(x) = x^2 - 79x + 1601 \text{ кўпхад } x = 0, 1, 2, 3, \dots, 79 \text{ бўлган}$$

қийматларда турли туб сонларга тенг қийматлар қабул қилади, лекин бошқа баъзи қийматларида эса мураккаб сонга тенг қиймат қабул қилар экан. Кейинчалик ушбу теорема исботланди.

Л. Эйлер туб сонларга оид изланишларида $x=1, 2, \dots, 40$ бўлганида туб сон бўладиган $p(x) = x^2 - x + 41$ кўринишдаги полиномни кашф қилди. $p(x)$ кўпхаднинг биринчи 2398 та нагурал сонлар орасидаги қийматларидан тенг ярмиси туб сонлар бўлишини исбот қилди. Шунингдек, $q(x) = x^2 + x + 72491$ кўпхад орқали ифода қилинадиган 5000 та туб сонларни аниқлади.

Бундан ташқари, барча қийматлари туб сонлардан иборат n даражали кўпхад мавжуд эмаслигини исботлаб, Л. Эйлер ўз ишлари билан аддитив сонлар назариясига асос солди. Сонлар назариясида кўпгина қонуниятларнинг исботи Л. Эйлер номи билан боғлиқ. Лекин, ҳозирги кунда ҳам ўз ечимини топмаган муаммолар жуда кўп.

Эгизак туб сонлар, яъни 3 ва 5; 5 ва 7; 11 ва 13;...; 239 ва 241 сонлар жуфтлиги чексиз кўпми ёки чеклими?

$$2^n + 1; 2^n - 1; n^2 + 1. \text{ кўринишдаги туб сонлар чексиз кўпми?}$$

Мерсен туб сонлари

Ҳозиргача жуфт мукамал сонларнинг сони чексиз кўпми ёки улар чекли сондами? деган савол очик қолиб келмода. Чунки, $2^k - 1$

кўринишдаги туб сонлар соннинг чексиз эканлиги исботланмаган. Бундай кўринишда сонлар туб бўлишишининг зарурий шarti унинг даража кўрсаткичи k винг туб бўлишидир.

Ҳақиқатнан ҳам, $k=k_1k_2$ - мураккаб сон бўлса, у ҳолда $(2^k)^{k_2} - 1$ ни тривиал бўлмаган (яъни, ўзидан ва 1 дан фаркли) кўпайтувчиларга ажратиш мумкин. Улардан бири $2^k - 1$ га тенг бўлади. Лекин бу шарт старли шарт эмас, яъни туб бўлса, $2^k - 1$ сон барча k лар учун туб сон булавермайди. Масалан, $k=11$ бўлганда $2^{11}-1 = 2047 = 23 \cdot 89$ мураккаб сон.

Ихтиёрий p туб сон учун $M_p = 2^p - 1$ кўринишидаги туб сонлар мукамал сонлар муаммоси билан жиддий шуғулланган француз монахи Мерсен шарафига *Мерсен туб сонлари* деб аталади.

Юкоридаги формулага асосан:

$$M_2 = 3; M_3 = 7; M_5 = 31; M_7 = 127; M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$$

бўлишини ҳисоблаб топиш қийин эмас. Демак, $2^p - 1$ кўринишдаги сонларнинг ҳаммаси ҳам туб сон эмас экан.

Л. Эйлергача Мерсен туб сонлари M_p га мос ($p=2,3,5,7,13,17,19$) келувчи 7 мукамал сон маълум бўлган.

1756 йили Л. Эйлер M_{31} туб сон бўлишини исбот қилди. Бир асрдан кўпроқ давр мобайнида M_{31} энг катта Мерсен туб сони бўлиб қолди.

1883 йилда рус математиклари И. М. Первушин (1827-1900) $M_{61} = 2^{61} - 1$ соннинг туб эканлигини исботлади.

Француз математиги Лукас 1876 йили

$M_{127} = 170141183460469231731687303715884105727$ сон Мерсеннинг туб сони бўлишини исботлади.

Сўнгра Д. Х. Лемар ЭХМ оркали $P=521, P=607, P=1279, P=2203, P=2281$ туб сонлар учун ҳам М. Мерсеннинг туб сонлари бўлишини кўрсатди.

Кейинчалик Ризел (1958), $P=3217$, Гурвис (1962) $P=4253, P=4423$, Гиллелс (1964) $P=9689, P=9941, P=11213$ сонлар учун М. Мерсен туб сонлари бўлишини аниқлади.

Лукас топган М ни 39 та рақамдан ташкил топганлигини кўрган эдик, ҳозирда энг катта Мерсен туб сони 3376 рақамдан иборат бўлиб,

бу сон Американинг Иллинойс университети математиклари томонидан ҳисоблаб топилган. Улар топган сонлари билан жуда ҳам фахрланадилар, математика факультетидан юбориладиган ҳар бир хат солинган конверт устига шу сонни ёзиб қўядиган бўлидилар.

$M_{11213} = 2^{11213} - 1$ сониди 3375 та ракам бўлиб, унинг туб эканлиги 1963 йилда исботланган. Бу исоблаш асосида француз математиги Е. Люк томонидан 1878 йилда топилган критерия ётади. У қуйидагидан иборат: , бунда (туб сон) нинг туб сон бўлиши учун ушбу рекурент кетма-кетлик $c_1 = 4, c_2 = 4^2 - 2 = 14, \dots, c_k = c_{k-1}^2 - 2$ нинг $|p-1|$ ҳадини M_p га бўлиниши, яъни $c_{p-1} \equiv 0 \pmod{M_p}$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Мисол. $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ га Люк критериясини қўллаймиз. У ҳолда 127 модули бўйича қуйидаги муносабатларга эга бўламиз:

$$c_1 = 4, c_2 = 4^2 - 2 = 14, c_3 = 14^2 - 2 = 194 \equiv 67, c_4 = 194^2 - 2 \equiv 67^2 - 2 \equiv 42, c_5 = 42^2 - 2 \equiv -16, c_6 = 16^2 - 2 = 254 \equiv 0 \pmod{127}.$$

Демак, теорема шарти бажарилади ва биз $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ ни туб сон дея оламиз.

Табиий савол туғилади, M_M -Мерсен сони бўладими?

Масалан, $M_{M_2} = 2^3 - 1 = 7$ - туб сон; $M_{M_7} = 2^7 - 1 = 127$ - туб сон;
 $M_{M_5} = 2^{31} - 1$ - туб сон (Эйлер исбот қилган);

$M_{M_7} = M_{127}$ - туб сон (Лукас исбот қилган).

Ферма туб сонлари

Ажойиб математик П. Ферма

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad (1.8)$$

қўринишидаги барча сонлар туб сонлар бўлишини тўлиқ ишонч билан айтган. (1.8) формула билан ифодаланадиган сонлар *Ферма сонлари* деб аталади.

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3; F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5; F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17; F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257; F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537; \\ F_5 = 2^{2^5} + 1 = 65536 \cdot 65536 + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

F_5 мураккаб сон бўлишини Эйлер кўрсатган.

F_n формула билан ифодаланадиган кейинги мураккаб сон $F_{12} = 2^{4096} + 1$

1883 йили рус рухонийси Первушин томонидан аниқланди.

Энди F_5 мураккаб сон эканлигининг исботини келтирамиз:

$$641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4 \rightarrow 5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}, (2)$$

$$641 = 5 \cdot 128 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1 \rightarrow 5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}, (3)$$

(2) таққосламанинг иккита тарафини 2^{28} га кўпайтирамиз:

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv -2^{32} \pmod{641}$$

(3) нинг иккала тарафини 4-даражага оширамиз:

$$5 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}. \text{ ҳосил бўлса, охириги 2 та таққосламаларни бир-}$$

бирдан айирсак, $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$ ҳосил бўлади. Демак, $2^{32} + 1 \nmid 641$.

1.7-§. Систематик сонлар ва улар устида амаллар

Рақамни номлаш ва ёзишнинг ҳар қандай усули сонлар системаси деб аталади.

Барча сонлар системаси икки синфга бўлинади: позитцион ва нопозитцион. Сонларни ёзишда ишлатиладиган белгиларга рақамлар дейилади. Позитцион санок системасида берилган соннинг қиймати сонни тасвирловчи рақамларнинг эгаллаган ўрнига боғлиқ бўлади. Мисол сифатида, 0, 1, 2, 3, . . . , 9 араб рақамларидан ташкил топган ўнлик санок системани қараш мумкин, улар сондаги тутган ўринларга қараб турли қийматни акс эттиради.

Нопозитцион санок системаларида белгининг қиймати унинг эгаллаган ўрнига боғлиқ эмас. Мисол сифатида рим рақамлари санок системасини келтириш мумкин. Масалан, XX сониди X рақами, қаерда жойлашганига қарамасдан ўнлик санок системасидаги 10 қийматини англатади.

Нопозитцион рим санок системаси 7 та белгидан иборат: I-1, V-5, X-10, L-50, C-100, D-500, V-1000. Бу санок системада сонларни ёзишда қуйидаги қоидаларга амал қилиш керак:

1. Агар кичик белги катта белги олдида турса, айирув амали бажарилади.
2. Агар катта белги кичик белги олдида турса, қўшув амали бажарилади.

Масалан: CLV-155, CM-900.

Позитцион санок системаси

$M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, $q \in N$, $q \geq 2$ бўлсин. $a \in N$ сонни қуйидагича

ифодалаймиз:

$$a = a_s q^s + a_{s-1} q^{s-1} + \dots + a_1 q + a_0 \quad (1.9)$$

Бунда, $a_i \in M (i = \overline{1, s})$, $a_0 \neq 0$, q - асосга кўра санок системасининг a сони дейилади. $a \in N$ сонининг қисқача кўриниши $a = (a_0 a_{s-1} \dots a_1)_q$

Масалан, $589_{12} = 5 \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 + 9$.

Теорема. q асосга кўра, $\forall (a \in N)$ санок системаси (1.9) кўринишда бўлиб, бир қийматлиги аниқланган.

Исбот. (1.9) ни математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

а) $a \in N$, $a < q$ бўлсин. У ҳолда (1.9) дан $a = a$ келиб чиқади.

б) $a \in N$, $a \geq q$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\forall (m \in N)$, $1 \leq m < a$ (1) қаноатлантира олсин.

a ни q га қолдиқли бўламиз: $a = bq + a_0$ ($a_0 \in M$), бунда $b < a$, у ҳолда фаразимизга индуктив ёндашиб, b ни қуйидагича тасвирлай оламиз:

$$b = a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + \dots + a_2 q + a_1, a_i \in M, a_i \neq 0 (i = \overline{1, s}). \quad (1.10)$$

(1.10) га кўра. $a = bq + a_0$ ($a_0 \in M$), тенгликдан:

$$a = a_s q^s + a_{s-1} q^{s-1} + \dots + a_1 q + a_0.$$

Математик индукция принципи ёрдамида (1.9) га эга бўлдик.

Ягоналиги. $\forall (a \in N)$ сон учун (1.9) нинг ўринли эканлигини математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

а) $a \in N$, $a < q$ бўлсин. У ҳолда (1.9) дан $a = a$ келиб чиқади ва ягона.

б) $a \in N$, $a \geq q$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\forall (m \in N)$, $1 \leq m < a$ (1.9) ни қаноатлантиради ва ягона.

$\forall (a \in N)$ бўлсин. (1.9) дан фарқлироқ q асосга кўра қуйидаги кўринишга келтира олишимиз мумкин:

$$a = b_s q^s + b_{s-1} q^{s-1} + \dots + b_1 q + b_0 \quad (1.11)$$

(1.9) ва (1.11) дан:

$$a = (a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + \dots + a_1) q + a_0 = (b_s q^{s-1} + b_{s-1} q^{s-2} + \dots + b_1) q + b_0.$$

Бу тенгликдан, қолдиқли бўлиш теоремасига кўра:

$$a_0 = b_0, b = a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + \dots + a_1 = b_s q^{s-1} + b_{s-1} q^{s-2} + \dots + b_1$$

$b < a$ дан индукция фаразимизга кўра $b)_t = s, a_s = b_s, \dots, a_1 = b_1$.

Шундай қилиб, $\forall (a \in N)$ учун (1.9) тенглик яғонадир.

Систематик сонлар устида амаллар

Ҳар хил сонлар системасида қўшиш, айириш, қўпайтириш, бўлиш амаллари 10 асосли санок системаси қондасига кўра бажарилади.

Мисоллар:

1. Қўшиш, айириш.

$$\begin{array}{r} 5768_9 \\ + \\ 6832_9 \\ \hline 13711_9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7632_9 \\ - \\ 6858_9 \\ \hline 663_9 \end{array}$$

2. Қўпайтириш, бўлиш.

$$\begin{array}{r} 465_9 \\ \times 36_9 \\ \hline 3476_9 \\ 4163_9 \\ \hline 48126_9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 33162_9 \\ - 3753_9 \\ \hline 3432_9 \\ 3432_9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 437_9 \\ \times 36_9 \\ \hline 25 = 4 \cdot 9 + 3 \\ 29 = 3 \cdot 9 + 5 \\ 23 = 2 \cdot 9 + 7 \\ 42 = 5 \cdot 9 + 2 \\ 35 = 4 \cdot 9 + 3 \\ 28 = 3 \cdot 9 + 4 \end{array}$$

Бир санок системасидан бошқа санок системасига ўтиш

$\forall (a \in N)$ p асосга кўра, санок системаси бўлсин. a сонини q асосга кўра санок системасида ёзиш талаб қилинсин.

Фараз қилайлик, a сонини q асосга кўра санок системасида

$$a = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \dots + a_1 q + a_0.$$

$a_0, a_1, \dots, a_k$ сонларни топиш зарур. Бу p асосга кўра санок системаси учун a ни q га қолдиқли бўламиз: $a = b_0 q + a_0$.

Худди шу санок системасида b_0 ни q га қолдиқли бўламиз.

$$b_0 = b_1 q + a_1.$$

Ва худди шундай давом эттирамиз. Бу жараён кетма-кет бажарилиб, ноль бўлинмага айлангунича давом этади:

$$b_{k-2} = b_{k-1} q + a_{k-1}, b_{k-1} = 0 \cdot q + b_{k-1}, b_{k-1} = a_k.$$

p асосга кўра санок системаси учун a ни q га қолдиқли бўлиш қуйидаги схема ёрдамида бажарилади:

$$\begin{array}{r}
 \frac{a}{a_0} \left| \frac{q}{b_0} \right. \\
 \frac{a_1}{a_1} \left| \frac{q}{b_1} \right. \\
 \frac{a_2}{a_2} \left| \frac{q}{b_2} \right. \\
 \vdots \\
 \frac{a_k}{a_k} \left| \frac{q}{b_k} \right. \\
 \frac{a_{k+1}}{a_{k+1}} \left| \frac{q}{b_{k+1}} \right.
 \end{array}$$

Стрелка тартиб йўналишини кўрсатади.

Агар $q < p$, у ҳолда a ни q га бўлгандаги $a_0, a_1, \dots, a_k$ қолдиқлар кетма-кетлиги p асосга кўра санок системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра, санок системасидаги a сонининг рақамлари бўлади.

Агарда, $p > q$ дан катта ёки тенг бўлса, у ҳолда q ва баъзи $a_0, a_1, \dots, a_k$ қолдиқлар p асосга кўра санок системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра санок системаси ёрдамида ёзилиши зарур.

Масала. 545_6 сонини 12 асосли санок системаси кўринишда ёзинг.

12 сонини санок системасида 6 асосга кўра ёзиб оламиз:
 $12 = 2 \cdot 6 + 0 = (20)_6$.

$$\begin{array}{r}
 \frac{545_6}{40} \left| \frac{20_6}{25} \right. \\
 \frac{145}{5} \left| \frac{20}{5} \right. \\
 \frac{140}{5} \left| \frac{20}{5} \right. \\
 \frac{10}{5} \left| \frac{20}{5} \right.
 \end{array}$$

Демак, $545_6 = 155_{12}$.

II БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

2.1-§. Бутун сонлар халқасида таққосламалар, уларнинг хоссалари, чегирмалар синфи халқаси

Бизда a , b , бутун сонлар ҳамда $m > 1$ натурал сон берилган бўлсин. Агар $a-b$ айирма m га қолдиксиз бўлинса, у ҳолда a бутун сон b бутун сон билан m модул бўйича таққосланади ва қуйидагича белгиланади:

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (2.1)$$

Таърифга кўра, a ва b бутун сонлар учун $a \equiv b \pmod{m}$ муносабатнинг ўринлилиги $(a-b):m$ ни, яъни $a-b=mq$, $q \in \mathbb{Z}$ ни билдиради.

Бутун сонларнинг m модуль бўйича таққосланиш муносабати бутун сонлар тўпламида эквивалентлик муносабати бўлишини текшириш қийин эмас. Бу муносабат бўйича эквивалентлик синфлари m модуль бўйича чегирмалар синфлари ёки чегирма синфлар дейилади.

Масалан:

$$4\mathbb{Z} = \{\dots, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$$

$$4\mathbb{Z} + 1 = \{\dots, -15, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$$

$$4\mathbb{Z} + 2 = \{\dots, -14, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, \dots\}$$

$$4\mathbb{Z} + 3 = \{\dots, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$$

Кейинги ўринларда қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-Теорема. Иккита a ва b бутун сонлар m модул бўйича таққосланишлари учун уларни m га бўлганда бир хил қолдик чиқиши зарур ва етарли.

Исбот. $a \equiv b \pmod{m}$ бўлсин. У ҳолда, $a-b=mq$, $q \in \mathbb{Z}$. Демак, $a=mq+b$. Агар $b=mq_1+r$, $0 \leq r < m$ бўлса, $a=m(q+q_1)+r$, $0 \leq r < m$. Яъни, a ва b бутун сонларни m га бўлсак, бир хил қолдик қолар экан. Аксинча, агар $f=mq_1+r$, $0 \leq r < m$ ва $b=mq_2+r$ бўлса, у ҳолда $a-b=m(q_1-q_2)$ ёки $a \equiv b \pmod{m}$ бўлади.

Таққосламанинг асосий хоссалари. Қуйида таққосламанинг бевосита таққослама таърифидан келиб чиқадиган асосий хоссаларини келтираимиз. Бу хоссаларнинг барчасида a , b , c , d лар

ихтиёрий бутун сонлар, m эса 1 дан катта натурал сон деб хисоблаймиз.

$$1^0. a \equiv a \pmod{m}$$

2°. Агар $a \equiv b \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $b \equiv a \pmod{m}$ бўлади.

3°. Агар $a \equiv b \pmod{m}$ ва $b \equiv c \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $a \equiv c \pmod{m}$ бўлади.

4°. Таккосламаларни ҳадма-ҳад қўшиш ва ҳадма-ҳад кўпайтириш мумкин, агар $a \equiv b \pmod{m}$ ва $c \equiv d \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ ва $ac \equiv bd \pmod{m}$ бўлади.

5°. Таккосламанинг иккала тарафини ҳам ихтиёрий сонга кўпайтириш мумкин. Яъни, $a \equiv b \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $ac \equiv bc \pmod{m}$ бўлади.

6°. Агар $a \equiv b \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ бўлади. Бу ерда n ихтиёрий натурал сон.

7° Таккосламанинг ихтиёрий қисмига модулга қаррали сонни қўшиш мумкин:

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{ва} \quad k, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + km \equiv b \pmod{m} \quad \text{ва} \quad a \equiv b + lm \pmod{m}$$

$$8^0 x \equiv u \pmod{m_1} \quad \text{ва} \quad x \equiv u \pmod{m_2} \Leftrightarrow x \equiv u \pmod{[m_1, m_2]}$$

$$9^0 x \equiv u \pmod{m} \quad \text{ва} \quad a_k \in \mathbb{Z} (k = 0, 1, \dots, n) \quad \text{бўлса, у ҳолда} \\ a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_{n-1} u + a_n \pmod{m}.$$

10° $x \equiv u \pmod{m}$ ва $a_k \equiv b_k \pmod{m}$, $(k = 0, 1, \dots, n)$ бўлса, у ҳолда

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \dots + b_{n-1} u + b_n \pmod{m}$$

$$11^0 (a, p) = 1 \quad \text{бўлсин.} \quad ax \equiv ay \pmod{p} \Rightarrow x \equiv y \pmod{p}$$

12° Агар $a \equiv b \pmod{d}$, $a \equiv b \pmod{c}$, $(d, c) = 1$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b \pmod{dc}$.

13° Агар $a \equiv b \pmod{d}$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $c \in \mathbb{Z}$ учун $ac \equiv bc \pmod{d}$.

14° Агар $ac \equiv bc \pmod{d}$ ва $(c, d) = 1$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b \pmod{d}$.

Юқоридаги хоссалардан, агар $a \equiv b \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда коэффициентлари бутун сонлардан иборат $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ кўпхад учун

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{m} \quad (2.2)$$

бўлиши келиб чиқади.

Таққосламаларнинг хоссаларидан 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13 га бўлиниш аломатларини келтириб чиқариш мумкин.

Масалан: 9 га бўлиниш аломатини кўриб чиқайлик. Бунинг учун ихтиёрий натурал сон n учун таққосламадан фойдаланамиз. У ҳолда (2.1) таққосламага асосан $a_0a_1\dots a_n = a_010^n + a_110^{n-1} + a_{n-1}10 + a_n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{9}$, яъни сон 9 га бўлиниши учун унинг рақамлари йиғиндиси 9 га бўлиниши зарур ва етарли экан.

Чегирмаларнинг тўлиқ системаси.

Берилган модул бўйича чегирма синфлар эквивалентлик синфлари сифатида шундай синфлар эга бўладиган барча хусусиятларга эга.

Хусусан, m модул бўйича исталган иккита чегирмалар синфлари устма-уст тушади, ёки бирорта ҳам умумий элементга эга бўлмайди. m модул бўйича барча чегирмалар синфлари бирлашмада Z тўпламини беради. Шунингдек, m модуль бўйича ҳар қандай чегирмалар синфи шу синфга кирувчи ихтиёрий a элемент оркали бир кийматли аниқланади, бу синф қуйидаги тўпламдан иборат:

$$\{a + km \mid k \in Z\} = a + mZ.$$

Бу тўпламини, яъни $a \equiv b \pmod{m}$ ўринли бўладиган барча $a \in Z$ сонлар тўпламини $a \pmod{m}$ ёки $\bar{a}$ каби белгилаймиз.

Синфнинг ихтиёрий сони m модул бўйича чегирма дейилади (шу синфнинг бошқа сонларига нисбатан).

Ҳар бир синфдан ихтиёрий равишда биттадан олинган сонлар тўплами берилган m модул бўйича чегирмаларнинг *тўла синфи* дейилади.

Одатда, чегирмаларнинг тўла синфи сифатида берилган m бўйича энг кичик манфий бўлмаган чегирмалар, яъни 0, 1, 2, ..., $m-1$ система олинади. Баъзан берилган m модул бўйича чегирмалардан

абсолют қиймати бўйича энг кичик мусбат бўлмаган чегирмаларнинг тўла системаси ҳам қаралади:

$-(m-1), -(m-2), \dots, -2, -1, 0$. m модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла синфи ҳам ишлатилади. Масалан, $m=7$ бўлганда бу система $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ чегирмалардан иборат бўлади;

$m=8$ бўлганда эса $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ ёки $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ чегирмалардан ташкил топади.

Чегирмаларнинг тўла системасидан олинган ва m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системаси дейилади. Келтирилган системада чегирмалар сони $\phi(m)$ Эйлер функцияси қийматига тенг.

Чегирмаларнинг тўла системасидаги каби келтирилган системанинг ҳам уч тури ишлатилади: энг кичик мусбат чегирмаларнинг келтирилган системаси, абсолют қиймати бўйича энг кичик манфий чегирмаларнинг келтирилган системаси, абсолют қиймати бўйича энг кичик чегирмаларнинг келтирилган системаси.

$x_1, x_2, \dots, x_c$ бутун сонлар системаси $c=m$ ва $i \neq j$ да $x_i \equiv x_j \pmod{m}$ бўлганда фақат шу ҳолда m модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлади. $(a, m)=1$ бўлганда $ax+b$ чизикли форманинг қийматлари m модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлиши учун x қабул қиладиган қийматлар ҳам чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлиши зарур ва етарли.

$x_1, x_2, \dots, x_c$ бутун сонлар системаси $c=\phi(m)$ ва $i \neq j$, $(x_i, m)=1$ да $x_i \equiv x_j \pmod{m}$ бўлганда ва фақат шу ҳолда m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлади. $(a, m)=1$ бўлганда ax чизикли форманинг қийматлари m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлиши учун x қабул қиладиган қийматлар ҳам чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

1-масала. Ихтиёрий натурал n сон учун қуйидагиларни исботланг:

а) $n^2 \equiv 0$ ёки $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$

б) $n^2 \equiv 0$ ёки $n^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$

с) $n^2 \equiv 0$ yoki $n^2 \equiv 1$ yoki $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$

д) $n^3 \equiv 0$ yoki $n^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$

$$e) n^4 \equiv 0 \text{ yoki } n^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

Ечиш. а) Қуйидаги ҳолларни караб ўтамиз: $n \equiv -1, 0, 1 \pmod{3}$. Бу ҳолда $n^2 \equiv 1, 0, 1 \pmod{3}$

б) Қуйидаги ҳолларни караб ўтамиз:

$$n \equiv -2, -1, 0, 1, 2 \pmod{3}. \text{ Бу ҳолда } n^2 \equiv -1, 1, 0, 1, -1 \pmod{3}.$$

Шунга ўхшатиб, с); д); е) лар ҳам текширилади.

2-Масала. Қуйидаги шартни қаноатлантирадиган m нинг қийматларини топинг:

$$20 \equiv 8 \pmod{m}.$$

Ечиш. m нинг қийматлари (такқосламанинг маъноси ҳақидаги теоремага асосан) $20 - 8 = 12$ нинг бўлувчиларидан иборат, яъни: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

2.2-§. Эйлер функцияси. Эйлер ва Ферма теоремаси

m натурал сонга бўлинганида бир хил r қолдик қоладиган барча бутун сонлар тўплами m модул бўйича сонлар синфини ташкил қилади. Бу синфнинг ҳар бир сони умумий ҳолда $mk+r$, $k \in \mathbb{Z}$ кўринишда ёзилади. Барча синфлар сони m га тенг.

Бутун номанфий сонлар тўпламида аниқланган $\varphi(m)$ функция Эйлер функцияси дейилади.

$m > 1$ ва $(a, m) = 1$ бўлганда қуйидаги такқослама ўринли: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, бу ерда $\varphi(m)$ – Эйлер функцияси (Эйлер теоремаси).

$$\text{Масалан, } \varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(12) = 4.$$

p туб сон ва $(a, p) = 1$ бўлганда қуйидаги такқослама ўринли:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ (Ферма теоремаси).}$$

a бутун сонни ўзида саклайдиган m бўйича чегирмалар синфини $a \pmod{m}$ билан белгилаймиз. Демак, $a \pmod{m} = a + m\mathbb{Z} = \{a + km; k \in \mathbb{Z}\}$.

(Ферма теоремаси). p туб сон учун $a^p \equiv a \pmod{p}$ такқослама ўринли бўлади.

Исбот. a бўйича индукцияни қўлаймиз. $a=1$ да навижа равшан. Фараз қиламиз, $p \mid a^p - a$, у ҳолда Ньютон биноми формуласига кўра,

* Ферма Пер (1601-1655.) – франциялик адвокат ва математик. Аналитик геометрия асосчиси.

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$$

$p \mid C_p^k$, $k = 1, 2, \dots, p-1$, муносабатдан (текширинг) ва индукция фаразига кўра, $p \mid (a+1)^p - (a+1)$. Демак, $(a+1)^p \equiv (a+1)(\text{mod } p)$.

Изох. Агар $(a, p)=1$ бўлса, у ҳолда Ферма теоремасидан куйидаги муносабат келиб чиқади:

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$$

Таққосламаларнинг хоссаларига кўра куйидагига эгамиз:

$c_i \equiv d_i(\text{mod } p)$, $i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow c_1 c_2 \dots c_n \equiv d_1 d_2 \dots d_n(\text{mod } p)$
 $(a, p)=1$ бўлсин. Куйидаги сонларни киритамиз:

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$$

бу кетма-кетликда иккита турли ҳадлари p модуль бўйича таққосланмайди. Ҳақиқатга ҳам,

$$ia \equiv ja(\text{mod } p) \Rightarrow i \equiv j(\text{mod } p) \Rightarrow i = j$$

Демак, $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ – сонлардан ҳар бири $1, 2, 3, \dots, p-1$ сонлардан факат биттаси билан p модуль бўйича таққосланади.

Бундан

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a = a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \\ \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)(\text{mod } p)$$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$, $p \equiv 1$ бўлгани учун $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ бўлади.

Z/mZ - билан m модуль бўйича барча чегирмалар синфлари тўпламини белгилаймиз:

$$Z/mZ = \{0(\text{mod } m), 1(\text{mod } m), \dots, (m-1)(\text{mod } m)\}.$$

Бу тўпланда қўшиш ва кўпайтириш амалларини куйидаги тенгликлар орқали киритилади:

$$a(\text{mod } m) + b(\text{mod } m) = (a+b)(\text{mod } m), \\ a(\text{mod } m) \cdot b(\text{mod } m) = ab(\text{mod } m)$$

$(Z/mZ, +)$ – абел группасидан ҳамда Z группанинг mZ қисм группа бўйича фактор группасидан иборат бўлиб, m модуль бўйича чегирмалар синфининг *аддитив группаси* дейилади.

$(Z/mZ, \cdot)$ – бирлик элементли коммутатив халқадан иборат бўлиб, m модуль бўйича чегирмалар *синфининг халқаси* дейилади.

Агар $(a, m) = 1$ бўлса, $a \pmod{m}$ синф m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар синфи дейилади.

m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар синфлари тўплами кўпайтиришга нисбатан абел группасини ташкил этади ва у m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар синфларининг мультипликатив группаси дейилади.

Агар $ab \equiv 1 \pmod{m}$ бўлса, a чегирма b чегирмага m модул бўйича тескари дейилади.

1-масала. 10 модул бўйича чегирмалар тўла системасининг учта турини ёзинг.

Ечиш. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – 10 модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган чегирмалар тўла системаси.

-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0 – 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик манфий чегирмалар тўла системаси.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ёки -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 – 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар тўла системаси.

2-масала. $2^{5n} - 1$ нинг 31 га бўлинишини исботланг ($n \in \mathbb{N}$).

Ечиш. $2^5 - 1 = 31$ бўлганлиги учун $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$. Бу таққосламанинг иккала томонини (6-хоссага асосан) n даражага кўтариб, $2^{5n} \equiv 1 \pmod{31}$ ни ҳосил қиламиз, бу эса $31 \mid (2^{5n} - 1)$ ни аңглатади.

3-масала. $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ сонлар системаси 7 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган сонлардан энг кичик мусбат чегирмаларни тузамиз: 3, 2, 6, 4, 5, 1, чунки, $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$, $3^3 \equiv 6 \pmod{7}$, $3^4 \equiv 4 \pmod{7}$, $3^5 \equiv 5 \pmod{7}$, $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

4-масала. 2^{100} сонининг охириги иккита ракамини топинг.

Ечиш. Берилган соннинг охириги икки раками бу сонни 100 га бўлганда ҳосил

бўладиган қолдиқдан иборат. Демак, қуйидаги таққосламани қаноатлантирадиган x сонини топиш талаб қилинади:

$$2^{100} \equiv x \pmod{100}.$$

Иккиннинг кичик даражаларидан бошлаб, 100 га бўлганда ҳосил бўладиган

қолдиқларни кетма-кет ажратамиз:

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10}; (1024)^{10} \equiv (24)^{10} \pmod{100}.$$

$$(24)^{10} = (576)^5 \equiv 76^5 \equiv (76)^4 \cdot 76 = (5776)^2 \cdot 76 \equiv (76)^2 \cdot 76 = 5776 \cdot 76 \equiv 76^2 \equiv 5776 \equiv 76 \pmod{100}.$$

Шундай қилиб, 2^{100} сонининг охирги икки рақами 7 ва 6 дан иборат.

5-масала. 383^{175} ни 45 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. $383 \equiv 23 \pmod{45}$ бўлганлиги учун $383^{175} \equiv 23^{175} \pmod{45}$. Энди $\varphi(45) = 24$ ва $(23, 45) = 1$ дан Эйлер теоремасига кўра: $23^{24} \equiv 1 \pmod{45}$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $23^{175} = 23^{24 \cdot 7 + 7} = (23^{24})^7 \cdot 23^7 \equiv 1^7 \cdot 23^7 \pmod{45}$. Шу таҳлитда давом этиб,

$$23^7 = (23^2)^3 \cdot 23 = 34^2 \cdot 23 = 34^2 \cdot 34 \cdot 23 = 1156 \cdot 782 \equiv 31 \cdot 17 = 527 \equiv 32 \pmod{45} \text{ ни ҳосил қиламиз.}$$

Шундай қилиб, $383^{175} \equiv 32 \pmod{45}$. Изланаётган қолдиқ 32 дан иборат.

6-масала. Агар p — туб сон бўлса, у ҳолда $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod{p}$ таққосламани исботланг.

Ечиш. Маълумки, ихтиёрий p ва k сонлар учун $C_{p-1}^k + C_{p-1}^{k-1} = C_p^k$ формула ўринли, C_p^k - бутун сондан иборат бўлиб, p га бўлинади, чунки $k < p$, p эса туб сондан иборат, шунинг учун у махражнинг бирорта ҳам кўпайтувчиси билан қисқариб кетмайди. Шундай қилиб, $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}$. У ҳолда $C_{p-1}^k \equiv (-1)C_{p-1}^{k-1} \pmod{p}$. Бу рекуррент муносабатни кетма-кет қўллаб, юкори кўрсаткични 1 гача камайтирамиз:

$$C_{p-1}^k \equiv (-1)C_{p-1}^{k-1} = (-1)^2 C_{p-1}^{k-2} = (-1)^3 C_{p-1}^{k-3} = \dots = (-1)^{k-1} (p-1) = (-1)^k \pmod{p}.$$

7-масала. x нинг ҳар қандай бутун қийматида $x^7 \equiv x \pmod{42}$ таққослама тўғрилигини кўрсатинг.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра, $x^7 \equiv x \pmod{7}$. Энди $x^7 \equiv x \pmod{2}$ ва 3 эканлигини исбот қиламиз, бунинг учун 2 ва 3 модуллар бўйича чегирмаларнинг тўла системасини, яъни 0, 1, 2 сонларни синаш етарли.

8-масала. Агар a ва b - ихтиёрий бутун сонлар, p - туб сон бўлса, қуйидаги таққосламани исботланг:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

Ечиш. Биномни ёйиш формуласидан:

$$(a+b)^p \equiv a^p + C_p^1 a^{p-1}b + C_p^2 a^{p-2}b^2 + \dots + C_p^{p-k} ab^{p-1} + b^p.$$

Ўнг томонда иккинчи қўшилувчидан бошлаб, $p-1$ - қўшилувчига барча қўшилувчилар p га бўлинади, чунки

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\dots(p-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \text{ бу ерда } k < p.$$

Демак, $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}, i=1, 2, \dots, (p-1)$.

Бу ерда $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ келиб чиқади.

9-масала. Бутун соннинг 100-даражасини 125 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. Агар $(a, 5)=1$ бўлса, у ҳолда Эйлер теоремасига кўра:

$$a^{\varphi(125)} = a^{100} \equiv 1 \pmod{125}.$$

Агарда $(a, 5) = 5$ бўлса, у ҳолда $a^{100} \equiv 0 \pmod{125}$. Демак, $(a, 5) = 1$ бўлса, у ҳолда изланаётган қолдиқ 1 га тенг. Агарда $(a, 5)=5$ бўлса, у ҳолда a^{125} сони 125 га бўлинади.

10-масала. $2^{r(m)-1}$ ни тоқ m сонига бўлинганида ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. $2^{r(m)-1} \equiv r \pmod{m}, 0 \leq r < m$ бўлсин. У ҳолда $2^{r(m)} \equiv 2r \equiv 1 \pmod{m}$ ёки

$$r = \frac{1+mq}{2}, \text{ бу ерда } q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < m \text{ шартни } q=1 \text{ да ягона } \frac{1+mq}{2} \text{ қиймат}$$

қаноатлантиради, бу ердан $r = \frac{1+m}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

11-масала. 341 сони учун $2^{341} \equiv 2 \pmod{341}$ таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. 341 мураккаб сон, $341=11 \cdot 31$ $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ ва $2^{10} \equiv 1 \pmod{31}$ таққосламалар ўринли эканлигини осонгина текшириш мумкин.

Ферма теоремасига асосан $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. 11 ва 13 сонлар ўзаро туб бўлганлиги учун бу ердан $2^{10} \equiv 1 \pmod{11 \cdot 31}$ келиб чиқади, яъни $2^{10} \equiv 1 \pmod{341}$. Демак, $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$ ва $2^{341} \equiv 2 \pmod{341}$ таққосламалар ўринли.

12-масала. $ax \equiv 1 \pmod{p}$ таққосламани қаноатлантирадиган барча x сонлар топилсин.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра, бу сон $x \equiv a^{p-2} \pmod{p}$ таққослама билан аниқланади.

13-масала. p туб сон барча бутун a, b , сонлар учун $ab^p - ba^p$ - сони бўлади.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра,

$$b^p \equiv b \pmod{p}, \quad a^p \equiv a \pmod{p} \\ ab^p - ba^p \equiv ab - ab \equiv 0 \pmod{p}.$$

14-масала. $p \geq 7$ туб сон учун $p-1$ та рақамдан ташкил топган $1! \dots 1$ сон p га қолдиксиз бўлинишини исботланг:

Ечиш. $(10, p)=1$. Демак, Ферма теоремасига кўра

$$11 \dots 1 = \frac{10^{p-1}-1}{9} \equiv \frac{1-1}{9} \equiv 0 \pmod{p}.$$

15-масала. p туб сон учун $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p) \pmod{p}$ такқослама ўринли бўлади.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра,

$$a \equiv a^p \pmod{p}, \quad b \equiv b^p \pmod{p}, \quad (a+b)^p \equiv (a+b) \equiv a+b \equiv (a^p + b^p) \pmod{p}.$$

16-масала. (Эйлер теоремаси). Агар $(a, m)=1$ бўлса, у ҳолда

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

$n = \varphi(m)$ белгилаймиз.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар $\{1, 2, \dots, m\}$ тўллам ичида жойлашган ва m сони билан ўзаро туб бўлган ўзаро тенг бўлмаган сонларни ажратамиз. Маълумки, улар бир-бири билан m модул бўйича таққосланмайди.

Қуйидаги сонларни киритамиз:

$$ax_1, ax_2, \dots, ax_n$$

Бу кетма-кетликда ҳам иккита турли ҳадлари m модул бўйича таққосланмайди.

Ҳақиқаттан ҳам, $x_i \neq x_j$ ва $x_i a \equiv x_j a \pmod{m}$ бўлсин. У ҳолда $(a, m)=1$ бўлгани учун $x_i \equiv x_j \pmod{m}$ бўлади. Бу эса $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонларнинг бир-бири билан m модул бўйича таққосланмаслигига зид. $(a, m)=1, (x_i, m)=1$ бўлгани учун $(a, m)=1$ бўлади, яъни $ax_i \equiv x_j \pmod{m}$. Бу таққосламаларни $i=1, 2, \dots, n$ бўйича қўпайтириб чиқсак

$$ax_1 \cdot ax_2 \cdot \dots \cdot ax_n = a^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \pmod{m}$$

ни ҳосил қиламиз. $(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n, m)=1$ бўлгани учун $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ бўлади.

Изох. $\varphi(p) = p - 1$ бўлгани учун Ферма теоремаси Эйлер теоремасидан бевосита келиб чиқади.

17-масала. a бутун сон учун $a^{10} + 1$ сон 10 га бўлинади.

a ни топинг.

Ечиш. $(a, 10) = 1$, акс ҳолда $a^{10} + 1$ ва 10 сонлар ўзаро туб бўлади.

$\varphi(10) = 4$ бўлгани учун, Эйлер теоремасига кўра,

$a^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{10}$ таққослама $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{10}$ таққосламага тенг кучли. $a = \pm 1, a = \pm 3$ ҳолларни қараб чиқиб, $a \equiv \pm 3 \pmod{10}$ ечимни топамиз. Демак, $a \equiv \pm 3 \pmod{10}$.

18-масала. $p > 5$ - туб сон бўлса, $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$ ни исботланг.

Ечиш. $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Ферма теоремасига кўра, $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ва

$p^4 \equiv 1 \pmod{5} \cdot \varphi(2^4) = 2^3$ бўлгани боис, Эйлер теоремасига кўра

$$p^8 \equiv 1 \pmod{16}$$

Демак, $p^8 \equiv 1 \pmod{m}$, $m = 3, 5, 16$, яъни $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$.

19-масала. $a = 128^{108} - 148^{129}$ сонини 13 га бўлгандаги қолдиқни топинг.

Ечиш. 2 хоссага кўра, $r_{13}(a) = r_{13}(r_{13}(128^{108}) - r_{13}(148^{129}))$. Шунинг учун $r_{13}(128^{108})$, $r_{13}(148^{129})$ ни қолдиқини топамиз. Демак, $128 \equiv -2 \pmod{13}$.

Кетма-кет равишда

$$128^2 \equiv (-2)^2 \pmod{13} \quad \text{яъни} \quad 128^2 \equiv 4 \pmod{13},$$

$$128^4 \equiv 4^2 \pmod{13} \quad \text{яъни} \quad 128^4 \equiv 3 \pmod{13},$$

$$128^8 \equiv 4 \cdot 3 \pmod{13} \quad \text{яъни} \quad 128^8 \equiv -1 \pmod{13},$$

$$128^{12} \equiv (-1)^2 \pmod{13} \quad \text{яъни} \quad 128^{12} \equiv 1 \pmod{13},$$

топамиз.

Бундан $148 = 12 \cdot 12 + 4$, у ҳолда $128^{148} = (128^{12})^{12} \cdot 128^4 \equiv 3 \pmod{13}$, шунинг учун

$r_{13}(128^{148}) = 3$. Худди шундай, $r_{13}(148^{129}) = 5$. Натижада қуйидаги қолдиққа эга бўламиз.

$$r_{13}(a) = r_{13}(3 - 5) = r_{13}(-2) = 11.$$

2.3-§. Биринчи даражали таққосламалар ва уларни ечиш усуллари

n -даражали бир номаълумли таққослама деб қуйидаги кўринишдаги таққосламага айтилади:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \pmod{m},$$

Бу ерда: $a_0 \equiv 0 \pmod{m}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $i=0, n, n-1$ манфий бўлмаган бутун сон. Таққосламани ечиш — уни қаноатлантирадиган x нинг барча қийматларини топиш демакдир.

Агар берилган таққосламани бирор $x \equiv a \pmod{m}$ қиймат қаноатлантирса, у ҳолда бу таққосламани a билан m модул бўйича таққосланадиган барча сонлар ҳам қаноатлантиради: $x \equiv a \pmod{m}$ ёки $x = mk + a$, яъни, m модул бўйича a тегисли бўлган чегирмалар синфининг барча чегирмалари қаноатлантиради. Ҳар бир синф битта ечимни ташкил этади.

Демак, таққосламани ечиш уни қаноатлантирадиган чегирмаларнинг барча синфларини топишдан иборат.

Ҳар бир синфдан биттадан олинган чегирмалар тўла системани ташкил этганлиги учун таққосламани қаноатлантирадиган сонлар синфини аниқлаш, чегирмаларнинг тўла системасидан уларга мос келадиган чегирмаларни топишдан иборат экан. Одатда, a сифатида берилган модул бўйича манфий бўлмаган энг кичик ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар олинади. Шундай қилиб, тўла системанинг нечта чегирмаси берилган таққосламани қаноатлантирса, таққослама шунча ечимга эга бўлади.

Агар бир хил x номаълумли ва бир хил модулли иккита таққосламани x номаълумлининг бир хил қийматлари қаноатлантирса, бундай таққосламалар тенг кучли дейилади.

Берилган таққосламага тенг кучли таққосламалар қуйидаги алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлади:

а) берилган таққосламанинг иккала томонига ҳам бир хил сонни қўшиш натижасида;

б) берилган таққосламанинг ихтиёрий бир қисми модулига қаррали бўлган сонни қўшиш натижасида;

с) берилган таққосламанинг иккала томонини модул билан ўзаро тўб бўлган сонга қўпайтириш (бўлиш) натижасида;

д) таққосламанинг иккала томони ва модулини бир хил сонга бўлиш натижасида.

1-масала. Қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $x^3 - 2x + 6 \equiv 0 \pmod{11}$;

$$б) x^4 + 2x^3 + 6 \equiv 0 \pmod{8};$$

$$с) x^4 - x^3 - x^2 + 5x - 2 \equiv 0 \pmod{6}.$$

Ечиш. а) 11 модул бўйича абсолют киймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла системасидан иборат:

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

сонларни бевосита такқосламага қўйиб текшириш натижасида 5 сони такқосламани канаотлантиришини ҳосил қиламиз. Ечимни $x \equiv 5 \pmod{11}$ кўринишда ёзамиз;

б) 8 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системаси $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ да бирорта ҳам чегирма такқосламани канаотлантирмайди, шунинг учун берилган такқослама ечимга эга эмас;

с) 6 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системаси $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ да факат иккита сон такқосламани канаотлантиради: -1 ва 2 . Берилган такқослама иккита ечимга эга: $x \equiv -1 \pmod{6}$ ва $x \equiv 2 \pmod{6}$.

Модулнинг бўлувчиси бўйича олинган такқослама берилган модул бўйича такқосламанинг натижасидан иборат бўлади.

2-масала. $x^2 - 5x + 6 \equiv 0 \pmod{9}$ такқосламани ечинг.

Ечиш. Модулнинг бўлувчиси бўйича олинган такқосламани кўриб чиқамиз:

$$x^2 - 5x + 6 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ бу ердан } x^2 + x \equiv 0 \pmod{3} \text{ ёки } x(x+1) \equiv 0 \pmod{3}$$

кўпайтувчиларнинг ҳар бирини алоҳида ечиб $x \equiv 0; 2 \pmod{3}$ ни ҳосил қиламиз.

Ечимларни чегирмалар синфи оркали $x = 3q$; $3q + 2$ шаклида ёзамиз. Энди $x = 3q$ ни берилган такқосламага қўямиз: $9q^2 - 15q + 6 \equiv 0 \pmod{9}$, бу ердан $3q \equiv 3 \pmod{9}$, яъни, $q \equiv 1 \pmod{3}$ ёки $q = 1 + 3t$. Бу ердан $x = 3 + 9t$ ёки $x \equiv 3 \pmod{9}$ ечимни ҳосил қиламиз. $x = 3q + 2$ да берилган такқослама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$9q^2 + 12q + 4 - 15q - 10 + 6 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Бу такқосламани соддалаштиришлардан сўнг $3q \equiv 0 \pmod{9}$ ёки $q \equiv 0 \pmod{3}$ ни ҳосил қиламиз. $q = 3t$ бўлганда бериладиган такқосламанинг иккинчи ечими

$x = 9t + 2$ ёки $x \equiv 2 \pmod{9}$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, берилган такқослама иккита ечимга эга экан: $x \equiv 2; 3 \pmod{9}$.

3-масала. Тенг кучли таққосламага ўтиш билан куйидаги таққосламани ечинг:

$$13x \equiv 5 \pmod{47}.$$

Ечинг. Таққосламанинг ўнг томонига 47 ни қўшамиз: $13x \equiv 52 \pmod{47}$.
Энди таққосламанинг иккала томонини 13 га қисқартириб, унинг ечимини ҳосил қиламиз: $x \equiv 4 \pmod{47}$.

Биринчи даражали таққосламанинг умумий кўриниши куйидагича ёзилади:

$$ax \equiv b \pmod{m}.$$

Бу таққосламани ечишда куйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) Агар $(a, m) = 1$ бўлса, у ҳолда таққослама фақат ягона ечимга эга.

б) Агар $(a, m) = d > 1$ бўлса, b озод ҳад d га бўлинмаса, у ҳолда таққослама ечимга эга эмас.

с) Агар $(a, m) = d > 1$ бўлиб, b озод ҳад d га бўлинса, у ҳолда таққослама d га ечимга эга бўлади, бу ечимлар куйидаги формулалар билан топилади:

бу ерда α - куйидаги таққосламанинг ечимидан иборат:

$$x_k \equiv \alpha + \frac{(k-1)m}{d} \pmod{m}, k = 1, 2, \dots, d$$

$ax \equiv b \pmod{m}$ таққосламани ечиш усуллари фақат $(a, m) = 1$ бўлганда қараб чиқамиз, учинчи ҳолда таққослама d га қисқартирилгандан сўнг биринчи ҳолга келтирилади.

Биринчи даражали таққосламаларни ечишда куйидаги учта усул қўлланилади:

а) ечим m модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган ёки абсолют киймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла системасидаги сонларни бевосита синаш усули билан топилади.

б) **Эйлер усули.** Ечим куйидаги формула билан топилади:

$$x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod{m},$$

бу ерда $\varphi(m)$ — Эйлер функцияси;

с) **чекли узлуксиз касрлар ёрдамида** куйидаги формула билан ечим топилади:

$$x \equiv (-1)^n bP_{n-1} \pmod{m},$$

бу ерда $P_{n-1} = \frac{m}{a}$ касрни узлуксиз касрга ёйганда ҳосил бўладиган охиргисидан битта олдинги муносиб касрнинг суратидан иборат. Баъзи ҳолларда такқосламаларнинг хоссаларига асосланган алмаштиришлар орқали берилган такқослама осон ечилади (3-мисолга қаранг).

4-масала. Қуйидаги такқосламани Эйлер усули билан ечинг:

$$9x \equiv 8 \pmod{34}.$$

Ечиш. $(9, 34) = 1$ бўлганлиги учун берилган такқослама ягона ечимга эга бўлади. $\phi(34) = 16$ ни ҳисоблаб қуйидагиларга эга бўламиз;

$$x = 8 \cdot 9^{15} \equiv 8 \cdot 3^{30} \equiv 8 \cdot 3^{14} \equiv 8 \cdot (2187)^2 \equiv 8 \cdot 11^2 \equiv 16 \pmod{34}.$$

5-масала. Такқосламани узлуксиз касрлар орқали ечинг:

$$285x \equiv 177 \pmod{924}.$$

Ечиш. $(285, 924) = 3$ ва $177 = 59 \cdot 3$ бўлганлиги учун берилган такқослама учта ечимга эга.

Такқосламанинг иккала томони ва модулини 3 га бўламиз:

$$95x \equiv 59 \pmod{308}.$$

$\frac{308}{95}$ касрни узлуксиз касрга ёямиз: $\frac{308}{95} \equiv (3, 4, 7, 1, 2)$. Муносиб касрлар жадвалини тузамиз:

2.1-жадвал

q_i		3	4	7	1	2
P_i	1	3	13	94	107	308

Шундай қилиб, $P_{n-1} = P_4 = 107$, демак, $x \equiv (-1)^4 \cdot 107 \cdot 59 \pmod{308}$, бу ердан натижа такқосламанинг ечими $x \equiv 153 \pmod{308}$ ни ҳосил қиламиз. Берилган такқосламанинг ечимлари қуйидагича тасвирланади:

$$x \equiv 153; 461; 769 \pmod{924}.$$

Биринчи даражали такқосламаларни биринчи даражали икки номаълумли аниқмас тенгламаларини (диофант тенгламалари) ечишга тадбикини қараб чиқамиз.

Қуйидаги аниқмас тенглама

$$ax+by=c; (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

ни ечиш талаб қилинсин. Агар $(a,b)=1$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама бутун ечимларга эга бўлиб, унинг умумий ечими қуйидагича ифодаланади:

$$x=x_1+bt,$$

$$y=y_1-at$$

ёки b манфий бўлганда қуйидагича ифодалаш қулай:

$$x=x_1-bt,$$

$$y=y_1+at.$$

Бу формулаларда x_1 ва y_1 лар x ва y ларнинг тенгламани қаноатлантирадиган қандайдир қийматларидан иборат ва $t \in \mathbb{Z}$.

Агар $(a,b)=d > 1$ ва c сони d га бўлинмаса, у ҳолда $ax+by=c$ тенглама бутун сондаги ечимларга эга эмас.

Биринчи даражали аниқмас тенгламалар назариясидан номаълумларнинг хусусий ечимларини топишнинг бир неча усуллари мавжуд.

Таққосламалар ёрдамида хусусий ечим қуйидагича топилади: $ax+by=c$ дан таққосламанинг маъноси ҳақидаги теоремага кўра $ax \equiv c \pmod{b}$ бир номаълумли таққосламани ҳосил қиламиз, бу ерда b ўз ишораси билан олинади, таққосламани қаноатлантирадиган x нинг қиймати x_1 сифатида олинади, y_1 нинг қиймати эса бевосита берилган тенгламага x_1 ни қўйиб топилади.

6-масала. Қуйидаги тенгламани бутун сонларда ечимларини топинг:

$$39x-22y=10.$$

Ечиш. Тенгламадан қуйидаги таққослама келиб чиқади:

$$39x \equiv 10 \pmod{22}.$$

Бу таққосламадаги коэффициентларни 22 модул бўйича энг кичик мусбат чегирмаларига келтирсак, $17x \equiv 10 \pmod{22}$ га тенг ва бу ердан $x_1=20$ ни ҳосил қиламиз. Бу қийматни берилган тенгламага қўйиб, $y_1=35$ ни топамиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = 20 + 22t \\ y = 35 + 39t \end{cases}$$

7-масала. Туғилган куннинг 12 га кўпайтмасы ва ойнинг 31 га кўпайтмаларининг йиғиндиси 299 эканлиги маълум бўлса, туғилган кунни топинг.

Ечиш. x —сана, y —ойнинг рақами бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$12x+31y=299.$$

Бу ердан $12x \equiv 299 \pmod{31}$ ёки $12x \equiv 20 \pmod{31}$ таққослама келиб чикади. Охириги таққосламани ечиб, $x_1=12$ ни топамиз. Топилган қийматни берилган тенгламага қуйиб, $y_1=5$ ни ҳосил қиламиз. Демак, туғилган кун 12 – май экан.

2.4-§. Таққосламалар системаси ва унинг ечими

Бир номаълумли ҳар хил модулли биринчи даражали таққосламалар системасининг умумий кўриниши қуйидагидан иборат:

$$\begin{cases} a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \dots\dots\dots \\ a_nx \equiv b_n \pmod{m_n} \end{cases} \quad (2.3)$$

Бу система ечимини топишнинг умумий усули қуйидагича:

Дастлаб системанинг биринчи таққосламасининг $x \equiv a \pmod{m_1}$ счими топилади, бу ерда $a \equiv m_1t + \alpha$ модуль бўйича манфий бўлмаган энг кичик ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмадан иборат, бу ечим сонлар синфи шаклида ёзиб олинади:

$$x \equiv m_1t + \alpha \quad (2.4)$$

(Агар биринчи таққослама ечимга эга бўлмаса, берилган система ҳам ечимга эга бўлмайди).

Сўнгра x нинг (2) даги қиймати системанинг иккинчи таққосламасига қўйилиб,

$$a_2(m_1t + \alpha) \equiv b_2 \pmod{m_2} \quad (2.5)$$

таққослама ҳосил қилинади. (3) таққосламадан t нинг сонлар синфи шаклидаги

$$t \equiv m_2t_1 + \beta$$

кўриниши топилиб, у (2) тенгликка қўйилади, x нинг янги қиймати ҳисобланади. (Агар (3) таққослама ечимга эга бўлмаса, берилган система ҳам ечимга эга бўлмайди).

Натижада x нинг сонлар синфи шаклида ёзилган ва берилган системанинг дастлабки иккита таққосламасини каноатлантирадиган қиймати ҳосил бўлади. x нинг топилган қиймати учинчи таққосламага қўйилиб, ҳосил бўлган таққослама t_1 га нисбатан ечилади ва t_1 нинг сонлар синфи шаклида ёзилган қиймати x нинг ифодасига қўйилади, сўнгра x нинг бу қиймати тўртинчи таққосламага қўйилади, шу тарзда системанинг охириги таққосламасигача ечилади. x нинг охириги қиймати берилган системанинг ечимидан иборат бўлади.

Берилган системани ечишда даставвал ҳар бир таққосламани алоҳида ечиб, система қуйидаги кўринишга келтириб олинади:

$$\begin{cases} x \equiv \alpha_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv \alpha_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv \alpha_n \pmod{m_n} \end{cases} \quad (2.6)$$

Сўнгра юқоридаги усул қўлланилади.

Агар (1) системанинг $a_i x \equiv b_i \pmod{m_i}$, ($i=1, n$) таққосламалари учун $(a_i, m_i) = d_i$ ва $d_i | b_i$ бўлса, у ҳолда ҳар бир i -таққосламанинг ҳадлари ва модулини d_i га қискартириб, (1) системага тенг кучли бўлган қуйидаги система ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{d_1} x \equiv \frac{b_1}{d_1} \pmod{\frac{m_1}{d_1}} \\ \frac{a_2}{d_2} x \equiv \frac{b_2}{d_2} \pmod{\frac{m_2}{d_2}} \\ \dots \\ \frac{a_n}{d_n} x \equiv \frac{b_n}{d_n} \pmod{\frac{m_n}{d_n}} \end{cases} \quad (2.7)$$

Бу системанинг таққосламаларини x га нисбатан ечиб, (5) системанинг ечимини қуйидаги системанинг ечимига келтириш мумкин:

$$\begin{cases} x \equiv \alpha_1 \pmod{\frac{m_1}{d_1}} \\ x \equiv \alpha_2 \pmod{\frac{m_2}{d_2}} \\ \dots \\ x \equiv \alpha_n \pmod{\frac{m_n}{d_n}} \end{cases} \quad (2.8)$$

Агар (4) системада $m_1, m_2, \dots, m_n$ модуллар жуфт-жуфти билан ўзаро туб ва $i \neq j$ да $(m_i, m_j) = 1$ бўлса, у ҳолда унинг ечимини қуйидаги формула билан ҳам топиш мумкин:

$$x_0 = \frac{M}{m_1} y_1 \alpha_1 + \frac{M}{m_2} y_2 \alpha_2 + \dots + \frac{M}{m_n} y_n \alpha_n \quad (2.9)$$

бу ерда $M=[m_1, m_2, \dots, m_n]$ ва $y_1, y_2, \dots, y_n$ лар

$$\frac{M}{m_i} y_i \equiv 1 \pmod{m_i}, i = \overline{1, n}$$

таққосламаларнинг ечимларидан иборат. Системанинг ечими эса $x \equiv x_0 \pmod{M}$ таққосламадан иборат бўлади.

Агар $\frac{m_1}{d_1}, \frac{m_2}{d_2}, \dots, \frac{m_n}{d_n}$ модуллер жуфт-жуфти билан ўзаро tub бўлса,

бу усул билан (6) системани ҳам ечиш мумкин.

1-масала. Куйидаги таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x \equiv 13 \pmod{16} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 9 \pmod{14} \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи таққосламадан: $x=16t+13$ ни ҳосил қиламиз. x нинг бу кийматини иккинчи таққосламага қўйиб ҳисоблаймиз:

$$16t+13 \equiv 3 \pmod{10}, \text{ ёки } 16t+10 \equiv 0 \pmod{10},$$

Бу ердан $8t \equiv 0 \pmod{5}$ ёки $16t \equiv 0 \pmod{5}$ ни ҳосил қиламиз, демак, $t=5t_1$.

$t=5t_1$ ни $x=16t+13$ ифодага қўямиз: $x=16 \cdot 5t_1+13=80t_1+13$. x нинг топилган кийматини учинчи таққосламага қўямиз:

$$80t_1+13 \equiv 9 \pmod{14}, \text{ ёки } 80t_1 \equiv 4 \pmod{14}, \text{ бу ердан } 80t_1 \equiv 10 \pmod{14}, \text{ ёки}$$

$$40t_1 \equiv 5 \pmod{7}, \text{ ёки } 8t_1 \equiv 1 \pmod{7}, \text{ бу ердан } t_1 \equiv 1 \pmod{7}, \text{ яъни, } t_1=7t_2+1.$$

$t_1=7t_2+1$ ни $x=80t_1+13$ ифодага қўйиб, $x=80 \cdot (7t_2+1)+13=560t_2+93$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $x \equiv 93 \pmod{560}$.

Текшириш: $93-13$ айирма 16 га бўлинади; $93-13$ айирма 10 га бўлинади; $93-9$ айирма 14 га бўлинади.

Эслатма. $16t \equiv 0 \pmod{10}$ таққосламани ечишда $8t \equiv 0 \pmod{5}$ таққосламани ҳосил қилдик, унинг ечими $t \equiv 0 \pmod{5}$, ёки $t=5t_1$ берилган таққосламанинг $x=80t_1+13$ ечимига олиб келди. Аммо $16t \equiv 0 \pmod{10}$ таққосламанинг иккинчи $t \equiv 5 \pmod{10}$, $t=10t_1+5$ ечими ҳам мавжуд, чунки $d=(16,10)=2$. Бу ечимни $x=16t+13$ ифодага қўйиб, $x=16(10t_1+5)+13=160t_1+93$ ечимни ҳосил қиламиз. Лекин, $93 \equiv 13 \pmod{80}$ бўлганлиги учун, яъни 93 ва 13 сонлари 80 модул бўйича бир синфга тегишли бўлганлиги учун x нинг бу киймагига мос бўлган ечими қаралмайди.

Бу эслатмадан (1-мисол) агар системанинг бирор такқосламаси ёки t_1 га нисбатан бирор такқослама m модул бўйича d та ечимга эга бўлса, у ҳолда система ечимини топиш учун d та ечимга эга бўлган такқослама ечимини унга тенг кучли бўлган mid модул бўйича такқослама ечими билан алмаштириш етарли.

2-масала. Такқосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 7x \equiv 3 \pmod{11} \\ 15x \equiv 5 \pmod{35} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг ҳар бир такқосламасини алоҳида ечиб, бу системага тенг кучли бўлган куйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Бу системанинг модуллари жуфт - жуфти билан ўзаро туб сонлардан иборат бўлганлиги учун унинг ечимини (7) формула билан топиш мумкин.

$$M = [11, 7, 5] = 385, \quad \frac{M}{m_1} = 35, \quad \frac{M}{m_2} = 55, \quad \frac{M}{m_3} = 77$$

сонларни топиб, куйидаги такқосламаларни тузамиз:

$$35u_1 \equiv 1 \pmod{11}, \quad 55u_2 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 77u_3 \equiv 1 \pmod{5},$$

бу ердан $u_1 = 6$, $u_2 = -1$, $u_3 = 3$ ларни топамиз. Энди (7) формуладан куйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = 35 \cdot 6 \cdot 2 + 55 \cdot (-1) \cdot 5 + 77 \cdot 3 \cdot 4 = 1069 \equiv 299 \pmod{385}.$$

Шундай қилиб, $x \equiv 299 \pmod{385}$.

3-масала. Такқосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 5x \equiv 7 \pmod{9} \\ 4x \equiv 3 \pmod{7} \\ 3x \equiv 8 \pmod{12} \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системанинг учинчи такқосламасида $(3, 12) = 3$, аммо 8 сони 3 га бўлинмайди, шунинг учун бу такқослама берилган система ҳам ечимга эга эмас.

4-масала. Такқосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{2} \\ x \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг дастлабки иккита такқосламаси $x \equiv -1 \pmod{3}$ ва

$x \equiv -1 \pmod{2}$ таққосламаларга тенг кучли, шунинг учун уларни учинчи таққосламанинг натижаси бўлганлиги учун ташлаб юборилса бўлади. Шундай қилиб, система учинчи таққосламасининг ечими системанинг ҳам ечими бўлади, яъни, $x \equiv -1 \equiv 5 \pmod{6}$.

5-масала. 2, 3, 4, 5, 6 ва 7 сонларига бўлинганида мос равишда 1, 2, 3, 4, 5 ва 0 қолдик ҳосил бўладиган сонни топинг.

Ечиш. Масала куйидаги таққосламалар системасига келтирилади:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

$x \equiv 1 \pmod{2}$ ёки $x \equiv 3 \pmod{2}$ таққослама $x \equiv 3 \pmod{4}$ таққосламанинг натижаси сифатида ташлаб юборилиши мумкин. Худди шундай $x \equiv 2 \pmod{3}$ таққослама ҳам олинмайди.

Шундай қилиб, куйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $x \equiv 119 \pmod{420}$ ни ҳосил қиламиз.

6-масала. Куйидаги таққослама ечимга эга бўладиган a нинг қийматларини топинг:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{18} \\ x \equiv 8 \pmod{21} \\ x \equiv a \pmod{35} \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи таққосламадан $x = 18t + 5$ ни ҳосил қиламиз. x нинг бу қийматини иккинчи таққосламага қўйиб, t нинг қийматини топамиз:

$$18t + 5 \equiv 8 \pmod{21}, 18t \equiv 3 \pmod{21} \text{ ёки } 6t \equiv 1 \pmod{7}, t \equiv 6 \pmod{7}.$$

$t \equiv -1 \pmod{7}$ ни олиш қулайроқ, бу ердан $t = 7t_1 - 1$. Бу қийматни x нинг ифодасига қўйиб, $x = 16(7t_1 - 1) + 5 = 126t_1 - 13$. x нинг ҳосил қилинган қийматини системанинг учинчи таққосламасига қўямиз:

$$126t_1 - 13 \equiv a \pmod{35}, \text{ яъни } 21t_1 \equiv a + 13 \pmod{35}.$$

$(21, 35) = 7$ бўлганлиги учун охирги таққослама ечимга эга бўлиши учун $a + 13 \equiv 0 \pmod{7}$ таққослама ечимга эга бўлиши керак, бу ердан $a \equiv 1 \pmod{7}$.

Шундай қилиб, берилган система $a \equiv 1 \pmod{7}$ бўлганда ечимга эга.

7-масала. Ўнлик санок системасида берилган $4x87y6$ сони 56 га бўлинади. Шу сонни топинг.

Ечиш. Масала шартидан қуйидаги таққосламаларни тузамиз:

$$\begin{cases} 4x87y6 \equiv 0 \pmod{8} \\ 4x87y6 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Биринчи таққосламадан $7y6$ нинг 8 га бўлиниши ва 8 га бўлиниш аломатига асосан $y=3$ ва $y=7$ қийматларни ҳосил қиламиз. Бу қийматларни иккинчи таққосламага қўйиб,

$$4x8736 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$4x8776 \equiv 0 \pmod{7}$$

таққосламаларни топамиз. Бу таққосламаларни қуйидаги кўринишда тасвишлаб оламиз:

$$400000 + 10000x + 8736 \equiv 0 \pmod{7} \quad 4x \equiv 1 \pmod{7}$$

ёки $400000 + 10000x + 8776 \equiv 0 \pmod{7} \quad 4x \equiv 3 \pmod{7}.$

Биринчи таққослама $x \equiv 2 \pmod{7}$ ёки $x = 7t + 2$ ечимга эга. Бу ердан $t=0$ да $x_1 = 2$ ва $t=1$ да $x_2 = 9$ ни ҳосил қиламиз. t нинг бошқа қийматларига мос келувчи x нинг қийматлари ярамайди.

Иккинчи таққослама $x \equiv 6 \pmod{7}$ ёки $x = 7t + 6$ ечимга эга. Бундан ягона қиймат $x_3 = 6$ ни ҳосил қиламиз. x нинг ҳосил қилинган қийматларини берилган соннинг ифодасига қўйиб, 428736, 498736, 468776 сонларни ҳосил қиламиз.

8-масала. Қуйидаги таққосламани ўзаро туб модулар бўйича таққосламалар системасига келтириб ечинг:

$$x^5 + 2x + 3 \equiv 0 \pmod{15}.$$

Ечиш. Берилган таққослама қуйидаги системага тенг кучли:

$$\begin{cases} x^5 + 2x + 3 \equiv 0 \pmod{5} \\ x^5 + 2x + 3 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Бу системанинг иккинчи таққосламаси $(x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod{3}$ таққосламага тенг кучли ва у x нинг барча бутун қийматлари учун ўринли. Демак, берилган таққослама қуйидаги таққосламага тенг кучли бўлади.

$x^5 + 2x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$, бу ердан $x \equiv 2; 4 \pmod{5}$ ни ҳосил қиламиз. Берилган 15 модул бўйича қуйидаги ечимларни ҳосил қиламиз:

$$x \equiv 2; 7; 12; 4; 9; 14 \pmod{15}.$$

9-масала. Қуйидаги чизик қайси бутун нуқталардан ўтади:

$$15u=2x^3-5x^2+4x+11, \text{ бу ерда } -2 < x < 8 ?$$

Ечиш. Чизик тенгламасидан $2x^3-5x^2+4x+11 \equiv 0 \pmod{15}$

таққосламага эга бўламиз. Бу таққослама эса қуйидаги системага тенг кучли

$$2x^3-5x^2+4x+11 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$2x^3-5x^2+4x+11 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Биринчи таққослама $x \equiv 2, 4 \pmod{5}$ ечимларга, иккинчиси эса $x \equiv 1, 2 \pmod{3}$ ечимларга эга.

$$\text{Энди, } \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}, \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}, \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}, \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

таққосламаларни ечиб, $x \equiv 7, 2, 4, 14 \pmod{15}$ ечимларни топамиз.

Шартда кўрсатилган ораликқа x нинг қуйидаги қийматлари тушади:

$$x \equiv 7, 2, 4, -1$$

у нинг мос қийматлари чизикнинг берилган тенгламасидан топилади.

10-масала. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 9u \equiv 15 \\ 7x - 3u \equiv 1 \end{cases} \pmod{12},$$

Ечиш. Биринчи таққосламанинг иккала томони ва модулини 3 га қискартириб, $3u \equiv 5 \pmod{4}$, ёки $3u \equiv 9 \pmod{4}$, ёки $u \equiv 3 \pmod{4}$ ни ҳосил қиламиз. 12 модул бўйича $u \equiv 3, 7, 11 \pmod{12}$ ечимлар келиб чиқади.

Бу ердан қуйидаги учта системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 7x \equiv 1 + 3u \\ u \equiv 3 \end{cases} \pmod{12}, \begin{cases} 7x \equiv 1 + 3u \\ u \equiv 7 \end{cases} \pmod{12}, \begin{cases} 7x \equiv 1 + 3u \\ u \equiv 11 \end{cases} \pmod{12}$$

Бу системаларни соддалаштириб,

$$\begin{cases} x \equiv 10 \\ u \equiv 3 \end{cases} \pmod{12}, \begin{cases} x \equiv 10 \\ u \equiv 7 \end{cases} \pmod{12}, \begin{cases} x \equiv 10 \\ u \equiv 11 \end{cases} \pmod{12},$$

ечимларни ҳосил қиламиз.

11-масала. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + 2u \equiv 3 \\ 4x + u \equiv 2 \end{cases} \pmod{5}$$

Ечиш. Иккинчи таққосламани 2 га кўпайтириб, ҳосил бўлган таққосламадан биринчи таққосламани ҳадма-ҳад айирамиз: $7x \equiv 1 \pmod{5}$, бу ердан $x \equiv 3 \pmod{5}$ ни ҳосил қиламиз. Биринчи таққосламани иккала томонини 4 га кўпайтириб, ҳосил қилинган таққосламадан иккинчисини айирамиз:

$$u \equiv 0 \pmod{5}.$$

Тегишириш:

$\begin{cases} x \equiv 3 \\ u \equiv 2 \end{cases} \pmod{5}$ система берилган системанинг ечимидан иборат эканлигини кўрсатади.

III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

3.1-§. Биринчи даражали икки номаълумли Диофант тенгламаларининг бутун рационал ечимларини топиш усуллари.

Дастлабки эслатмалар.

Аникмас тенглама – Диофант тенгламаларидир. Биринчи даражали икки номаълумли аникмас тенглама деб $ax+by+c=0$ кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда x , y лар номаълум, a , b , c лар параметрлар (коэффициентлар). Кўпинча масаланинг шартлари шундай бўладики, фақат бутун сонлар билан ифодаланган қийматларгина, баъзан эса фақат бутун, шу билан бирга мусбат сонлар билан ифодаланган қийматларгина масалада қўйилган саволга тўғри жавоб бўла олади.

1-масала. 118 ни шундай икки бўлакка ажратиш керакки, улардан бири 11 га, иккинчиси 17 га қолдиксиз бўлсин.

Ечиш. Сонлардан бирини $11x$, иккинчисини $17y$ билан белгиласак, $11x+17y=118$ тенглама ҳосил бўлади.

Масалада 118 ни ажратишдан ҳосил бўладиган сонларнинг ишоралари тўғрисида ҳеч нарса айтилмагани учун манфий илдишлар ҳам масалага жавоб бўла олади дея оламиз. Чунончи, масаланинг шартларини ($x=3$ ва $y=5$ бўлганда) 33 ва 85 дан иборат сонлар қаноатлантиради, лекин $x=20$ ва $y=-6$ бўлганда 220 ва 102 дан иборат сонлар ҳам қаноатлантиради.

2-масала. Бирига 4 та, иккинчисига 7 та самовар сиғадиган икки хил яшик бор. 41 та самоварни жойлаш учун ҳар қайси хил яшикдан нечта олиш керак?

Ечиш: Кичик яшикларнинг сонини x билан, катталарининг сонини y билан белгилаб, ушбу тенгламани тузамиз:

$$4x+7y=41.$$

Масаланинг шартидан бунда фақат бутун ва шу билан бирга, мусбат илдишлар экани кўриниб турибди. Бу тенглама $x=3$, $y=5$ дан иборат фақат бир жуфтгина илдишга эга бўла олади.

Хуллас, аникмас тенгламаларнинг бутун, сонлар ҳамда бутун ва мусбат бутун сонлар билан ифода қилинган илдишларини топишимиз зарур.

I₁ . Тенгламаларнинг илдизлари бутун сон бўлмаслик аломати.

Куйидаги

$$ax + by + c = 0$$

тенглама берилган бўлсин. Агар a, b, c коэффициентлардан баъзилари каср бўлса, барча коэффициентларни бир махражга келтириб, кейин махражни ташласак, у ҳолда барча коэффициентлар бутун бўлади. Сўнгра a, b, c ларнинг бирор умумий кўпайтувчиси бўлса, тенгламанинг иккала кисмини унга қисқартириш мумкин. Демак, a, b ва c коэффициентларни умумий кўпайтувчиси бўлмаган бутун сонлар деб, фараз қиламиз.

Энди бирорта бутун, лекин 1 га тенг бўлмаган умумий кўпайтувчига эга, деб фараз қиламиз. Масалан:

$$a = ma_1, \quad b = mb_1$$

Бу ҳолда, тенглама ушбу кўринишни олади:

$$a_1x + b_1y = \frac{c}{m}.$$

x ва y ларнинг қийматлари бутун бўлса, тенгламанинг чап қисми бутун, ўнг қисми эса каср сон бўлади, чунки юқоридаги фаразимизга мувофиқ, c сон m га бўлинмайди. Бундай тенгликнинг бўлиши мумкин эмас. Демак,

Аниқмас тенглама номаълумларининг коэффициентлари умумий кўпайтувчига эга бўлиб, озод ҳад унга эга бўлмаса, тенглама бутун илдизларга эга бўлмайди.

Шунинг учун бундан кейин барча муҳокамаларда a ва b ни ўзаро туб сон деб, фараз қиламиз.

I₂. Тенгламаларнинг илдизлари мусбат сон бўлмаслик аломати.

$ax + by = c$ тенгламада a ва b коэффициентлар мусбат, озод ҳад c манфий бўлсин. У ҳолда x ва y нинг ҳар қандай мусбат қийматларида тенгламанинг чап қисми мусбат, ўнг қисми эса манфийлигича қолади. Бундай тенглик бўлиши мумкин эмас. Агар a ва b коэффициентлар манфий, c мусбат бўлса, тенгламанинг барча ҳадларини 1 га кўпайтириб, у ҳолни ҳам олдинги ҳолга келтирамиз. Демак,

Аниқмас тенгламада номаълумлар коэффициентларининг ишоралари озод ҳад ишорасига қарама-қарши бўлса, тенглама мусбат илдизга эга бўлмайди.

Аниқмас (Диофант) тенглама илдизларининг умумий формуласи

Бирор усул билан (масалан, бевосита синаш йўли билан) $ax + by = c$ Диофант тенгласининг бутун сонлар билан ифода қилинган бир жуфт илдизини топган бўлайлик. Бу илдизлар $x = \alpha$ ва $y = \beta$ бўлсин, уларни берилган тенгламага қўйиб, қуйидаги айниятни ҳосил киламиз: $a\alpha + b\beta = c$. Бу айниятни берилган тенгламадан ҳадлаб айирсак, $a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$ бўлиб, бундан $ax = a\alpha - b(y - \beta)$ ёки $x = \alpha - \frac{b(y - \beta)}{a}$ келиб чиқади. x нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{b(y - \beta)}{a}$ ифода бутун сон бўлиши зарур ва етарли (чунки, a бутун сон). Бошқача айтганда, $b(y - \beta)$ ифоданинг a га қолдиксиз бўлиниши зарур ва етарли. Лекин, фаразимизга биноан $(b, a) = 1$. демак, $y - \beta$ айирманинг a га бутун бўлиниши зарур (ва етарли). $y - \beta$ ни a га бўлишдан чиққан бутун бўлинмани t билан белгилаб (y мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин), ушбуни ҳосил киламиз:

$$\frac{y - \beta}{a} = t, \text{ бундан } y = \beta + at \text{ ни оламиз.}$$

x ни ифодаловчи формулада $\frac{y - \beta}{a}$ каср ўрнига t ни қўйсак, $x = \alpha - bt$ ҳосил бўлади.

Хуллас, аниқмас тенгламанинг илдизлари учун қуйидаги формулаларни ҳосил килдик:

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at$$

Бу формулаларда t га ихтиёрий бутун мусбат ва манфий кийматлар бериб, аниқмас тенгламанинг чексиз кўп бутун илдизларини топамиз. Жумладан, $t = 0$ бўлганда юқорида ўзимиз топган $x = \alpha$ ва $y = \beta$ илдизни топамиз.

Топилган формулаларга диққат қилиб қаралса, уларнинг қуйидаги қоидага кўра тузилганини кўришимиз мумкин:

1. Формулаларнинг биринчи ҳади берилган номаълумнинг топилган хусусий киймати бўлади.

2. Формулаларнинг иккинчи ҳади берилган тенгламанинг коэффициентлари билан ихтиёрий бутун t соннинг кўпайтмасидир, бунда x ни ифодаловчи формула учун берилган тенгламадаги y ёнидаги коэффициент, y ни ифодаловчи формула учун эса x ёнидаги коэффициент олинади.

3. Коэффициентлардан бири тескари ишора билан олинади.

Коэффициентлардан қайси бирини тенгламада турган ишораси билан ва қайси бирини тескари ишора билан олишимизнинг ҳеч қандай фарқи йўқлигини кўриш кийин эмас. Ҳақиқаттан ҳам,

$$x = \alpha - bt, y = \beta + at \text{ ва } x = \alpha + bt, y = \beta - at$$

формулалар худди бир турли илдизларни беради, фақат биринчи формулалар t нинг мусбат қийматларида берган ечимларни иккинчи формулалар t нинг абсолют миқдор жиҳатидан уларга тенг бўлган манфий қийматларида беради.

1-масала. $3x + 5y = 26$ тенглама берилган. Бевосита ўрнига қўйиш билан $x = 2$ ва $y = 4$ қийматларнинг тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз. У ҳолда қолган барча илдизлар ушбу формулалардан топилади:

$$x = 2 + 5t, y = 4 - 3t \text{ ёки } x = 2 - 5t, y = 4 + 3t.$$

Бу формулаларда t га ихтиёрий қийматлар бериб, тенгламанинг бутун сонлар билан ифодаланган турли илдизларини ҳосил қиламиз. Масалан, биринчи жуфт формулаларни олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

3.1-жадвал

t	0	1	2	3	-1	-2	...
x	2	7	12	17	-3	-8	...
y	4	1	-2	-3	7	10	...

Агар иккинчи жуфт формулаларни олсак, y ҳолда t га кетма-кет 0, -1, -2, -3, 1, 2, ... шунга ўхшаш қийматларни бериб, худди ўша илдизларни олган бўлар эдик. Шундай қилиб, аниқмас тенгламанинг бутун сонлар билан ифодаланган илдизларини топиш масаласи қандай бўлмасин, бир жуфт илдизни топишга келтирилади.

Ўрнига қўйиш усули

Аникмас тенгламанинг бир жуфт илдизини топиш учун қуйидаги усулдан фойдаланиш мумкин:

Масалан, $ax + by = c$ тенглама берилган бўлсин. Номалумлардан бирини иккинчисига нисбатан аниклаймиз (коэффициенти кичик бўлганини танлаш яхшироқ). Масалан, $a < b$ бўлсин. У ҳолда, $x = \frac{c - by}{a}$. $c - by$ ифода a га қолдиксиз бўлингунча y га кетма-кет $0, 1, 2, 3, \dots$ қийматлар бера бошлаймиз. $y = n$ бўлганда $c - bn$ ифода a га бутун бўлинади ва m бўлинмани беради, деб фараз қиламиз. У ҳолда $x = m$ ва $y = n$ қийматлар берилган тенгламанинг бир жуфт илдизини беради. Қуйидагини оламиз: $\frac{c - bn}{a} = m$ ёки $c - bn = am$, $am + bn = c$. Охириги тенглик m ва n сонлар берилган тенгламани қаноатлантиришини кўрсатади.

2-масала. Ушбу тенглама берилган: $7x - 4y = 2$. Бу тенгламадан y ни аниклаймиз: $4y = 7x - 2$, $y = \frac{7x - 2}{4}$. x га кетма-кет $0, 1, 2, 3, \dots$ қийматлар бериш билан $x = 2$ бўлганда $7x - 2$ ифода 4 га бўлиниб, бўлинмада 3 чиқишига ишонч ҳосил қила оламиз. Демак, биз бир жуфт илдизни топдик: $x = 2$, $y = 3$. Илдизларнинг қолган жуфтлари умумий формуладан топилади: $x = 2 + 4t$, $y = 3 + 7t$ ёки $x = 2 - 4t$, $y = 3 - 7t$.

Эслатма. Сонлар назариясида агар a ва b ўзаро туб сонлар бўлса, $0, 1, 2, 3, \dots, (a-1)$ сонлар орасида ҳар вақт шундай бир y сонни топиш керакки, унда $c - by$ ифода a га қолдиксиз бўлиниши исбот қилинади. Шу сабабли қўп марта синашдан қутилиш учун a ва b коэффициентлардан кичигини бўлувчи қилиб олиш тавсия қилинади.

Аникмас тенгламанинг хусусий шакли

Агар аникмас тенгламада номалумлардан бирининг коэффициенти 1 га тенг бўлса, у тенглама умумий шаклда оsonлик билан ечилади. Масалан, x нинг коэффициенти 1 га тенг бўлсин. У ҳолда $x + by = c$ бўлиб, бундан x ни аниклаймиз: $x = c - by$. Бунда y

нинг бутун сон билан ифодаланган исталган қийматларига x нинг ҳам бутун сон билан ифодаланадиган қийматлари тўғри келади.

3-масала. $5x + y = 18$ тенглама берилган. Бундан $y = 18 - 5x$ келиб чиқади. x га ихтиёрий бутун қийматлар бериб, y учун мос келган бутун қийматларни топамиз:

3.2-жадвал

x	0	1	2	3	4	-1	-2	...
y	18	13	8	3	-2	23	28	...

3.2-§. Аниқмас тенгламаларнинг умумий ечими

Исталган коэффициентли аниқмас тенгламани ечиш усулини мисол устида кўрсатамиз. Қуйидаги тенглама берилган бўлсин: $23x + 53y = 109$.

Бу тенгламадан коэффициенти кичик бўлган номаълумни, яъни x ни топамиз: $x = \frac{109 - 53y}{23}$; бундан бутун кисмини ажратамиз:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}; \quad y \text{ бутун бўлганда } x \text{ нинг бутун бўлиши учун } \frac{17 - 7y}{23}$$

ифоданинг қандай бўлса ҳам бутун сон бўлиши зарур ва етарли. Бу сонни t билан белгилаб, ушбу $\frac{17 - 7y}{23}$ ёки $17 - 7y = 23t$; $23t + 7y = 17$

ларни топамиз. Агар y ва t учун $\frac{17 - 7y}{23} = t$ тенгламани ёки шунинг

ўзидан иборат бўлган $23t + 7y = 17$ тенгламани қаноатлантирадиган бутун қийматлар топсак, шу билан x учун тўғри келадиган бутун қийматларни топган бўламиз ва масала ечилган бўлади. Хуллас, берилган тенгламани ечилишда янада соддарок, коэффициентлари берилган тенгламанинг коэффициентларига қараганда кичик бўлган иккинчи бир тенглама ечишга келтирилади. Янги тенгламада ҳам шундай қиламиз. Унда y ни аниқлаймиз: $y = \frac{17 - 23t}{7} = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7}$. y

нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{3 - 2t}{7}$ ифода бутун сон бўлиши зарур ва

етарли. Бу сонни t_1 дейлик: $\frac{3 - 2t}{7} = t_1$ ёки $7t_1 + 2t = 3$. t ва t_1 нинг қийматлари охириги тенгламани қаноатлантирувчи бутун сон бўлганда

x ва y учун берилган тенгламани қаноатлантирадиган бутун қийматлар оламиз. Демак, масаламиз коэффициентлари янада кичик бўлган охириги тенгламани ечишга келтирилади. Бунинг билан ҳам олдингидай иш кўрамиз:

$$t = \frac{3-7t_1}{2} = 1-3t_1 + \frac{1-t_1}{2}; \quad \frac{1-t_1}{2}$$

ифодани t_2 билан белгиласак ($t \in \mathbb{Z}$), $\frac{1-t_1}{2} = t_2$ ёки $2t_2 + t_1 = 1$ келиб чиқади.

Номаълумлардан бирининг (t_1 нинг) коэффициенти 1 га тенг бўлган тенглама ҳосил бўлди. Бундай тенгламаларни ечишни биламиз, уни ечиб, ушбунни топамиз: $t_1 = 1 - 2t_2$. Бу тенгламада t_2 га ихтиёрый бутун қийматлар бериб, t_1 учун бутун қийматлар ҳосил қиламиз. t_1 ва t_2 нинг топилган бутун қийматларини t учун чиқарилган $t = 1 - 3t_1 + \frac{1-t_1}{2} = 1 - 3t_1 + t_2$ ифодага қўйиб, t нинг мос келган бутун қийматларини топамиз. t ва t_1 га мос келган жуфт қийматни юқоридаги y нинг ифодасига қўйиб,

$$y = 2 - 3t + \frac{3-2t}{7} = 3 - 2t + t_1$$

ни топамиз. Ниҳоят, y ва t учун топилган қийматларни x учун

$$\text{бўлган } x = 4 - 2y + \frac{17-7y}{23} = 4 - 2y + t$$

ифодага қўйиб, x учун мос келган бутун қийматларни ҳосил қиламиз.

Аммо, x ва y ни тўғридан-тўғри t_2 га нисбатан ифода қилиш ҳам мумкин. Бунинг учун t ни ифодаловчи тенгламадаги t_1 ўрнига унинг t_2 орқали белгиланган ифодасини қўямиз: $t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2$ ёки $t = -2 + 7t_2$. Энди y учун бўлган ифодага t ва t_1 ўрнига уларнинг t , орқали белгиланган ифодасини қўямиз:

$y = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2)$ ёки $y = 9 - 23t_2$. Ниҳоят, y ва t нинг топилган қийматларини x учун бўлган ифодага қўйсак,

$$x = 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t_2) + (-2 + 7t_2) \text{ ёки } x = -16 + 53t_2$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, x ва y учун қуйидаги формулаларни ҳосил қилдик:

$$x = -16 + 53t_2, \quad y = 9 - 23t_2.$$

Бу формулаларда t_2 учун ихтиёрий бутун мусбат ва манфий кийматлар бериб, тенгламанинг чексиз кўп илдизларини ҳосил қиламиз, улардан бир нечтаси 3.3-жадвалда келтирилди:

3.3-жадвал

t_2	0	1	2	-1	-2
x	-16	37	90	-69	-122
y	9	-14	-37	32	55

Берилган ва ундан кейинги тенгламаларнинг коэффицентлари устида қилинган ишларга диққат билан қараб, шундай кетма-кетликни кўриш мумкин:

1. Берилган тенгламанинг катта коэффиценти 53 ни кичик коэффиценти 23 га бўлдиқ; бўлинма 2 ва қолдиқ 7 чиқди.

2. Берилган тенгламанинг кичик коэффиценти 23 ни қолдиқ 7 га бўлдиқ; бўлинмада 3 ва иккинчи қолдиқ 2 чиқди.

3. Биринчи қолдиқ 7 ни иккинчи қолдиқ 2 га бўлдиқ; бўлинмада 3 ва учинчи қолдиқ 1 чиқди.

Бошқача айтганда, берилган тенглама коэффицентларининг энг катта умумий бўлувчисини топмоқчи бўлгандек иш кўрдик. Бундан ушбу натижани оламиз:

Агар аникмас тенгламада номаълумларнинг коэффицентлари ўзаро туб сонлар бўлса, ҳамма вақт тенгламанинг бутун илдизларини топиш мумкин.

3.3-§. Тенгламани ечишни соддалаштириш

Баъзан аникмас тенгламани тезроқ ечишга олиб келувчи соддалаштиришдан фойдаланиш мумкин.

1. Номаълумларнинг коэффицентларидан бири ва озод ҳад умумий кўпайтувчига эга бўлганда тегишли равишда янги номаълум танлаб, тенгламанинг иккала томонини ўша кўпайтувчига қискартириш мумкин.

1-масала. $6x - 5y = 21$ тенглама берилган. Коэффицент 6 ва озод ҳад 21 умумий 3 кўпайтувчига эга. Демак, $5y$ ҳад ҳам 3 га бўлиниши керак. 5 нинг ўзи 3 га бўлинмагани учун y номаълум 3 га бўлиниши

керак. $y=3t$ деб фараз қилиб (t – бутун сон), қуйидаги тенгламани оламиз:

$6x-15t=21$ ёки 3 га қисқартирилгандан сўнг $2x-5t=7$ бўлади. Бу тенгламани ечамиз: $x=\frac{7+5t}{2}=3+2t+\frac{1+t}{2}=3+2t+t_1$, бунда $\frac{1+t}{2}=t_1$ бўлиб, натижада $2t_1-t=1$ ёки t келиб чиқади. Топилган қийматларни x ва y ларни ифодаловчи тенгликларга қўйсак,

$$x=3+2(-1+2t_1)+t_1=1+5t_1,$$

$$y=3(-1+2t_1)=-3+6t_1$$

ҳосил бўлади.

2-масала. $9x+14y=105$ тенглама берилган. $y=3t$ деб фараз қилиб, тенгламанинг ҳар икки томонини 3 га қисқартирсак: $9x+14\cdot 3t=105$ дан $3x-14t=35$ ни оламиз. Бу тенгламада $x=7t_1$ десак, $3\cdot 7t_1+14y=35$ бўлиб, буни 7 га қисқартирсак, $3t_1+2t=5$ бўлади. Бу охириги тенгламани ечамиз:

$$t=\frac{5-3t_1}{2}=2-t_1+\frac{1-t_1}{2}=2-t_1+t_2, \quad \text{бунда} \quad \frac{1-t_1}{2}=t_2 \quad \text{бўлиб, натижада}$$

$2t_2+t_1=1$ ёки $t_1=1-2t_2$ келиб чиқади. Кетма-кет орқага қайтиб, ўрнига қўйишларни бажарсак, қуйидагиларни топамиз:

$$t=2-(1-2t_2)+t_2=1+3t_2;$$

$$x=7t_1=7(1-2t_2)=7-14t_2;$$

$$y=3t=3(1+3t_2)=3+9t_2.$$

2. Агар бутун сонга тенгланувчи ифоданинг суратидаги ҳадлар умумий кўпайтувчига эга бўлса, тенгламани ечишни соддалаштириш мумкин.

3-масала. $12x+17y=41$ тенглама берилган. Буни x га нисбатан ечамиз:

$$x=\frac{41-17y}{12}=3-y+\frac{5-5y}{12}=3-y+5\cdot\frac{1-y}{12}$$

$5\cdot\frac{1-y}{12}$ нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{1-y}{12}$ нинг бутун сон бўлиши зарур

ва етарли. Бу ифодани t бутун десак ва унга тенгласак, $\frac{1-y}{12}=t$;

$1-y=12t$, $y=1-12t$ бўлиб, натижада $x=3-(1-12t)+5t=2+17t$ бўлади.

3. Агар бутун қисмни ажратиб чиқаришда қолдиқ бўлувчининг ярмидан кагга бўлса, манфий қолдиқ киритиш қўлай.

4-масала. $11x - 20y = 49$ тенглама берилган. Бундан

$$x = \frac{49 + 20y}{11} = 4 + 2y + \frac{5 - 2y}{11} = 4 + 2y + t; \frac{5 - 2y}{11} = t; 5 - 2y = 11t; 11t + 2y = 5;$$

$$y = \frac{5 - 11t}{2} = 2 - 5t + \frac{1 - t}{2} = 2 - 5t + t_1 \text{ га тенг.}$$

Бу тенгликдан $1 - t = 2t_1$, ниҳоят $t = 1 - 2t_1$ бўлади. Орқага қайтиб, ўрнига қўйишларни бажарсак,

$$y = 2 - 5(1 - 2t_1) + t_1 = -3 + 11t_1$$

$$x = 4 + 2(-3 + 11t_1) + (1 - 2t_1) = -1 + 20t_1$$

Берилган тенгламани одатдаги усул билан ечганимизда x учун ушбунни олган бўлар эдик: $x = 4 + y + \frac{5 + 9y}{11}$ ва ундан кейинги тенглама

қуйидагича бўлар эди: $\frac{5 + 9y}{11} = t; 11t - 9y = 5$. Бу тенглама манфий қолдик киритиш ёрдамида олинган $11t + 2y = 5$ тенгламага қараганда мураккаброкдир.

5-масала. $15x + 28y = 59$ тенглама берилган. Тенгламани манфий қолдиклар киритиб, x га нисбатан ечамиз:

$$x = \frac{59 - 28y}{15} = 4 - 2y + \frac{-1 + 2y}{15} = 4 - 2y + t; \frac{-1 + 2y}{15} = t; -1 + 2y = 15t; 2y - 15t = 1.$$

$$y = \frac{1 + 15t}{2} = 7t + \frac{1 + t}{2} = 7t + t_1; \frac{1 + t}{2} = t_1; 1 + t = 2t_1; t = -1 + 2t_1.$$

Ўринларига қўйсак, натижада

$$y = 7(-1 + 2t_1) + t_1 = -7 + 15t_1;$$

$$x = 4 - 2(-7 + 15t_1) + (-1 + 2t_1) = 17 - 28t_1 \text{ келиб чиқади.}$$

Бу параграфдаги мисолларда келтирилган тенгламаларни одатдаги йўл билан ечиб қўриб, кўрсатилган соддалаштиришни тадбиқ қилмаганда уларнинг ҳар бирини ечиш учун кўп иш бажариш талаб қилинганлигини кўриш жуда осон.

Мусбат ечимлар

Юқорида айтилганидек қўлгина аниқмас тенгламанинг топилган илдиэларидан айни замонда x ва y учун фақат мусбат қийматлар берадиганларини олиш керак. x нинг қандай қийматларида x ва y учун бутун ва мусбат қийматлар олишни бирданига аниқлаш мумкин. Ҳақиқаттан, қуйидаги формулаларни олайлик:

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at$$

x ва y нинг мусбат бўлиши учун t га фақат шундай қийматлар олиш зарур, y қийматларда $\alpha + bt > 0$, $\beta - at > 0$ бўлсин. a ни мусбат сон деб ҳисоблаймиз. У вақтда турлича ҳоллар бўлиши мумкин.

1. Иккала тенгсизлик ҳам бир хил маънода. Бу ҳол b манфий сон бўлгандагина содир бўлади. Тенгсизликларнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$bt > -\alpha; at < \beta; t < -\frac{\alpha}{b}; t < \frac{\beta}{a}.$$

Бу ҳолда тенглама саноксиз кўп бутун мусбат илдишларга эга бўлади. Масалан, қуйидаги тенгсизликни олайлик:

$$t < \frac{7}{2}; \quad t < -1\frac{3}{5}$$

$-1\frac{3}{5}$ дан кичик ҳар қандай сон иккала тенгсизликни қаноатлантириши очик кўриниб туради. Демак, t учун -1 дан кичик бўлган ҳар қандай бутун сонни олиш мумкин экан.

Бошқа бир ҳолни қарайлик: $t > \frac{7}{15}$; $t > 3\frac{1}{3}$. t учун $3\frac{1}{3}$ дан катта ҳар қандай бутун сонни олганда x ва y учун бутун ва мусбат қийматлар чиқиши очик кўриниб турибди.

6-масала. $3x - 5y = 11$ тенглама берилган. Бу тенгламани ечамиз:

$$x = \frac{11+5y}{3} = 4+2y - \frac{1+y}{3} = 4+2y-t;$$

$$\frac{1+y}{3} = t, \quad 1+y = 3t;$$

$$y = -1+3t;$$

$$x = 4+2(-1+3t)-t = 2+5t.$$

Мусбат илдишларини излаймиз:

$$-1+3t > 0; \quad 2+5t > 0; \quad \text{ёки } t > \frac{1}{3}; \quad t > -\frac{2}{5};$$

t учун $\frac{1}{3}$ дан катта исталган бутун сон олсак, x ва y нинг берилган тенгламани қаноатлантирувчи саноксиз кўп жуфт мусбат бутун қийматларини топамиз.

7-масала. $8x - 3y = -13$ тенглама берилган. Тенгламани ечамиз:

$$y = \frac{13+8y}{3} = 4+3x + \frac{1-x}{3} = 4+3x+t;$$

$$\frac{1-x}{3} = t; \quad 1-x = 3t; \quad x = 1-3t; \quad y = 7-8t.$$

Мусбат илдизларини қидирамиз:

$$1-3t > 0; \quad 7-8t > 0; \quad \text{ёки } t < \frac{1}{3}; \quad t < \frac{7}{8}.$$

t нинг $\frac{1}{3}$ дан кичик ҳар бир бутун (яъни 0, 1, 2, ...) қиймати x ва y учун бутун ва мусбат қийматларни беради.

2. Тенгсизликлар қарама-карши маънода бўлиб, бири иккинчисига зид.

Масалан, қуйидаги тенгсизликни олайлик:

$$t < \frac{7}{8}; \quad t > -1\frac{1}{3}.$$

t нинг айтилган вақтда иккала тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари йўқ экани очик кўриниб турибди. Бу ҳолда тенглама мусбат илдизларга эга бўла олмайди.

8-масала. $4x+5y=-7$. Бу тенгламани ечайлик.

$$x = \frac{-7-5y}{4} = -2-y + \frac{1-y}{4};$$

$$\frac{1-y}{4} = t; \quad y = 1-4t;$$

$$x = -3+5t.$$

Бундан $-3+5t > 0; \quad 1-4t > 0$ ёки $t > \frac{3}{5}; \quad t < \frac{1}{4}$. Бу тенгсизликлар бир-бирига зид, тенгламанинг мусбат илдизлари йўқ.

3. Тенгсизликлар қарама-карши маънода бўлиб, бир-бирига зид эмас.

Масалан, қуйидаги тенгсизликлар чиққан бўлсин:

$$t > 4\frac{1}{7}; \quad t < 7\frac{3}{4}.$$

t нинг $4\frac{1}{7}$ билан $7\frac{3}{4}$ орасидаги барча бутун қийматлари, яъни 5, 6 ва 7 сонлар x ва y учун мусбат илдизлар бўлади. Шундай қилиб, бу ҳолда:

t учун топилган чегаралар орасида канча бутун сон бўлса, тенгламанинг шунча бутун мусбат илдизи топилади.

Хусусий ҳолда бу ерда ҳам тенгламанинг бутун мусбат илдиэлари бўлмаслиги мумкин. Бу ҳол t учун топилган чегаралар орасида ҳеч бир бутун сон бўлмаганда содир бўлади. Масалан, куйидаги тенгсизликлар чиққан бўлсин:

$$t > 1\frac{1}{4}; t < 1\frac{7}{8}.$$

Тенгсизликлар бир-бирига зид эмас, лекин $1\frac{1}{4}$ билан $1\frac{7}{8}$ орасида ҳеч бир бутун сон топилмайди. Демак, тенгламанинг бутун мусбат илдиэлари йўқ.

9-масала. $3x + 7y = 55$. Тенгламани ечамиз:

$$x = \frac{55 - 7y}{3} = 18 - 2y + \frac{1 - y}{3};$$

$$\frac{1 - y}{3} = t; y = 1 - 3t;$$

$$x = 16 + 7t.$$

Бундан $1 - 3t > 0; 16 + 7t > 0$ ёки $t < \frac{1}{3}; t > -2\frac{2}{7}$. t учун фақат ушбу қийматларни олиш мумкин: 0, -1, -2. Тенгламанинг учта илдиэини ҳосил қиламиз:

3.4-жадвал

t	0	-1	-2
x	16	9	2
y	1	4	7

10-масала. $5x + 4y = 3$. Тенгламани ечиб, куйидагини олаамиз:

$$x = 1 + 4t;$$

$$y = 2 - 5t.$$

Бундан $t > \frac{1}{4}; t < \frac{2}{5}$. Тенгсизликлар бир-бирига зид эмас, лекин $\frac{1}{4}$ билан $\frac{2}{5}$ орасида бутун сонлар йўқ. Демак, тенгламанинг бутун мусбат ечимлари йўқ.

3.4-§. Лежандр символи ва унинг хоссалари. Туб модул бўйича юкори даражали такқосламалар. Иккинчи ва учинчи тартибли Диофант тенгламалари

m - натурал сон, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, a_2 \neq 0$ бўлсин. $a_0x^2 + a_1x + a_2 \equiv 0 \pmod{m}$ квадратик такқослашни караймиз, x ўзгарувчига нисбатан тўлиқ квадрат ёрдамида, Эйлер теоремасини қўллаш орқали ажратиб ва қолдикли бўлиш ҳақидаги хитой теоремасига асосан, такқосламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x^2 \equiv a \pmod{m}$$

бунда, $a \in \mathbb{Z}$.

Бундан кейин квадратик такқосламани $x^2 \equiv a \pmod{m}$, деб караб кетамиз. Маълумки, ҳамма a лар учун, m такқосламага нисбатан ечимга эга бўла олмайди.

1-Изох. $a \equiv 3$ ва $m = 4$ учун, $x^2 \equiv a \pmod{m}$, квадратик такқослашда ечимлар йўқ, уларни бирма-бир кўриш билан текшириш осон.

Таъриф. Агар такқосламанинг ечими бўлса, у ҳолда $a - m$ модулга нисбатан *квадратик чегирма* дейилади, акс ҳолда a сони m модулга *қўра квадрат чегирмасиз* дейилади.

1-Теорема. $p > 2$ туб сон учун $\frac{p-1}{2}$ га тенг квадратик чегирмалар сони ва $\frac{p-1}{2}$ та квадратик чегирмасизлар сони мавжуд.

Исбот. Шуни таъкидлаймизки, бунда $x^2 \equiv (p-x)^2 \pmod{p}$. Яъни, квадрат чегирмалар сони $\frac{p-1}{2}$ тадан ошмайди. $1^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ сонлар орасида p модулга қўра такқосламалар йўқ эканлигини кўрсатамиз, у ҳолда $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$ бўлсин. У ҳолда $(x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod{p}$ кўринишда келтирсак, бундай бўлиши мумкин эмас, чунки $x \neq y$ ва $x+y < p$. Шундай қилиб, биз $\frac{p-1}{2}$ та квадратик чегирмани топдик.

Таъриф. Лежандр белгиси $\left(\frac{a}{p}\right)$ - a бутун сон ва p туб сонлар

учун қуйидагича $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & (0 \text{ га тенг агар } a, p \text{ га бўлинса, } 1 \text{ га тенг} \\ 1, & \\ -1, & \end{cases}$

агар a, p модулга кўра квадратик чегирмали бўлса, -1 га тенг, агар a, p га кўра квадрат чегирмасиз бўлса) аниқланади.

Лежандр белгисининг асосий хоссаларини келтираимиз:
Айтайлик, $a, b \in \mathbb{Z}, (a, p) = 1, (b, p) = 1, q$ -тоқ, туб сон $(p, q) = 1$.

$$\bullet a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$$

$$\bullet \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod{p}$$

$$\bullet \left(\frac{2}{p}\right) \equiv (-1)^{(p^2-1)/8}$$

$$\bullet \left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{(p-1)/2}$$

$$\bullet \left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$$

Таъриф. n -тоқ натурал сон бўлиб, 1 дан катта бўлсин ва $n = p_1 \dots p_k$ - n сонини туб кўпайтувчиларга ажратмаси (ҳар хил бўлиши шарт эмас). Ихтиёрий a бутун сон учун, $(a, n) = 1$, Якоби симболи $\left(\frac{a}{n}\right)$

Лежандр симболи орқали қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \dots \left(\frac{a}{p_k}\right)$$

Масалан. Оқилона таккослашни ўрганинг.

$$x^2 \equiv 983 \pmod{1103}.$$

Биламизки, 1101 - туб сон. Лежандр симболини ҳисоблаймиз.
Квадратлараро ўзаро келишув қонунидан фойдаланиб,

$$\left(\frac{983}{1103}\right) = -\left(\frac{1103}{983}\right) = -\left(\frac{120}{983}\right) = -\left(\frac{2}{983}\right)^3 \left(\frac{3}{983}\right) \left(\frac{5}{983}\right) =$$

$$\left(\frac{983}{3}\right) \left(\frac{983}{5}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

Шундай қилиб, $x^2 \equiv 983 \pmod{1103}$ таққослама ҳал қилиниши мумкин.

Диффрант томонидан килинган ишларни тушуниш учун алгебраик геометрия ва аникмас тенгламалар назариясидан баъзи маълумотларни билиш керак. Ҳозирги кунда аникмас тенгламаларни ечиш масаласи куйидагича ифода этилади: фараз килайлик, n та номаълумли m та кўпхад берилган бўлсин ($m < n$): $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ бу кўпхадлар K майдондан олинган коэффициентлар билан таъминланган.

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

системанинг барча ечимларининг $M(K)$ тўпламини топиш ва унинг алгебраик тузилишини аниқлаш талаб этилади. Шу билан бирга $(x^0, x^1, \dots, x^p)$ ечим рационал дейилади, агар барча $x^0 \in K$ бўлса.

$M(K)$ тўпламининг K майдонга боғлиқлиги маълум. $x^2 + y^2 = 3$ тенглама $\mathcal{Q}$ рационал сонлар майдонида биронта илдизга эга эмас, лекин $\mathcal{Q}(\sqrt{3})$ майдонда, яъни $a + b\sqrt{3}$ ($a, b \in \mathcal{Q}$) кўринишдаги сонлар майдонида чексиз кўп ечимга эга.

Сонлар назарияси учун муҳим бўлган ҳоллар:

- 1) Качон $K = Q$ рационал сонлар майдони;
- 2) P туб модулга кўра K чегирмалар майдони.

Диофант ана шулардан биринчисига қараган. Бундан кейин биз ҳам $K = 0$ деб ҳисоблаймиз.

Куйида биз факат Диофантнинг шундай тенгламаларини караймизки, уларни икки номаълумли битта тенгламага, яъни $m=1$, $n=2$ ҳолга келтириш мумкин:

$$f(x, y) = 0. \quad (3.2)$$

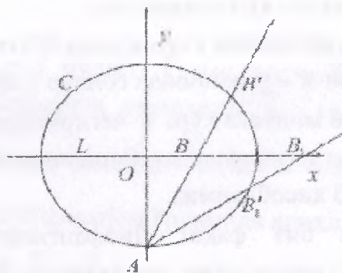
Бу тенглама R^2 текисликда Γ алгебраик эгри чизикни аниқлайди. (3.2) тенгламанинг рационал ечимини Γ эгри чизикнинг рационал нуқтаси деб атаймиз. Биз кўпроқ геометрик тилга мурожаат қиламиз, Диофантнинг ўзи бундай қилмаган. (3.2) га тартиб бўйича қандайдир синфлаштиришни берамиз. (3.2) эгри чизикнинг тартиби деганда, $f(x, y)$ қўпхаддаги ҳадларнинг максимал тартиби (бунда x ва y ларнинг даражалари йигиндиси) тушунилади. Бу тушунчанинг геометрик маъноси эса тўғри чизикнинг n -тартибли эгри чизик билан

роппа-роса n та нуқтада кесишиши тушунилади. Бунда кесишган нуқталарнинг карралилари, комплекслари ва “чексиз узоклашганлар”и каралади.

Масалан, $x^2 + y^2 = 1$ айлана ва $x + y = 2$ тўғри чизикни 2 та комплекс нуқтада, $x^2 - y^2 = 1$ гипербола ва $y = x$ тўғри чизик 2 та чексиз узоклашган нуқталарда, худди шу гипербола $x = 1$ тўғри чизик билан эса 2 каррали битта умумий нуқтада кесишади.

Лекин Диофант таҳлили мақсадлари учун (бу терминни ҳозир Диофант геометрияси дейишади) тартиб бўйича классификациялаш қўполга ўхшайди. Буни мисолда тушунтириш қулай. Айтайлик, $C: x^2 + y^2 = 1$ айлана ва ҳар қандай рационал коэффицентли $L: y = 0$ тўғри чизик берилган бўлсин. Бу айлана ва тўғри чизикнинг рационал нуқтасини бир қийматли мосликка қўйиш мумкин. Буни қуйидагича аниқлаймиз:

C айлананинг B нуқталарини L тўғри чизикнинг B нуқталари билан $C \cap L$ ва $(AB) \cap L$ каби кесишган жойларидаги нуқталарига мос қўйилади (3.1-расм).



3.1-расм.

Бундай ҳолда L тўғри чизик C айлананинг тартиблари турлича бўлсада, уларнинг Диофант таҳлили ажралмас бўлиб, уларнинг рационал ечимлари тўплами эквивалентдир.

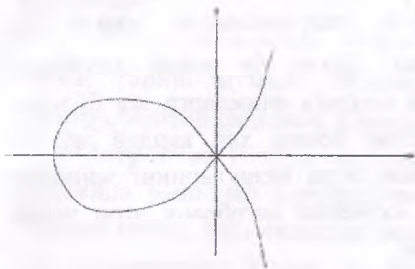
Алгебраик эгри чизикларни жинс бўйича классификациялаш анча нозик бўлиб, буни XIX асрда Абел ва Риман киритган. Бу классификациялаш Γ эгри чизикнинг махсус нуқталари сонини ҳисобга олади.

Айтайлик, Γ эгри чизикнинг (3.2) тенгламадан иборат $f(x, y)$ қўлхад рационал сонлар майдонида келтирилмайдиган ва Γ эгри чизикнинг $P(x_0, y_0)$ нуктасида унга ўтказилган уринманинг тенгламаси $y - y_0 = k(x - x_0)$ бўлсин, у ҳолда $k = \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$. Агар $P(x_0, y_0)$ нуктада f'_x ёки f'_y нолдан фарқли, масалан, $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ва $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ бўлса, $k = \infty$ бўлиб, уринма эса $P(x_0, y_0)$ нуктада вертикал бўлади.

Агар $P(x_0, y_0)$ нуктада ҳар иккала хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлса, яъни $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ва $f'_y(x_0, y_0) = 0$ бўлса, $P(x_0, y_0)$ нукта махсус нукта дейилади.

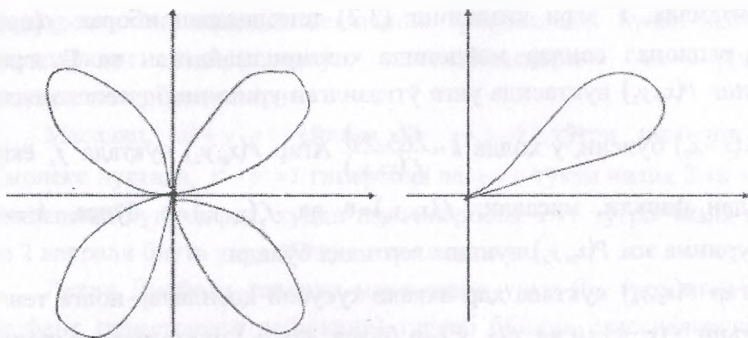
Масалан, $y^2 = x^2 + x^3$ эгри чизикда $(0, 0)$ нукта махсус, чунки бу нуктада $f'_x = -2x - 3x^2$ ва $f'_y = 2y$ лар нолга айланади.

Энг содда махсус нукта каррали нукта бўлиб, унда f''_{xx} , f''_{yy} ва f''_{xy} ҳосилалардан камида биттаси нолдан фарқли. 3.2-расмда каррали нукта тасвирланган бўлиб, бу нуктадан иккита турлича уринмалар ўтган.



3.2-расм.

Бундан ҳам мураккаброқ бўлган махсус нукта 3.3-расмда тасвирланган.



3.3-расм.

Алгебраик эгри чизикда чекли сондаги махсус нукталар бўлиши мумкин. Айтайлик,

$$f(x, y) = 0 \quad (*)$$

эгри чизик тенгламаси бўлиб, бунда $f(x, y)$ кўпхад Q рационал сонлар майдонида келтирилмайдиган бўлсин. Махсус нукталарнинг координаталари $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$ тенгламаларни ҳамда $(*)$ тенгламани қаноатлантириши керак. Лекин бу учала алгебраик тенгламалар системаси фақат чекли сондаги ечимларга эга бўлиши мумкин. Каррачи махсус нукталардан бошқа ҳеч қандай махсус нукталари бўлмаган бундай алгебраик эгри чизикларнинг жинсини аниқлаймиз. Умумий ҳолда, яъни ихтиёрий алгебраик эгри чизик учун жинс анча мураккаб аниқланади.

Айтайлик, Γ ясси эгри чизикнинг каррали нукталари сони $d(d \geq 0)$ га тенг бўлсин, у ҳолда Γ нинг жинси ушбу $P = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ формула билан аниқланувчи P бутун сонга айтилади, бунда n сон Γ эгри чизик тартиби; $P \geq 0$ ни кўрсатиш мумкин.

Агар Γ тўғри чизик ёки иккинчи тартибли эгри чизик бўлса, келтирилган формуладан кўринадики, $P = 0$ яъни, бу эгри чизиклар (3.2 - , 3.3-расмлар жинсга эга эгри чизиклар)дир. Учинчи тартибли эгри чизиклар махсус нуктага эга бўлиши бўлмаслигига боғлиқ бўлиб, 0 ёки 1 жинсга эга. Масалан, 1 жинсли “Ферма эгри чизиги”дир:

$x^2 + y^2 = 1$. Бироқ жинс бўйича классификациялаш эгри чизикнинг арифметик хоссаларини тан олмайди.

Масалан, $x^2 + y^2 = 1$ ва $x^2 + y^2 = 3$ эгри чизиклар 0 жинсга эга, шу билан бирга, улардан биринчисида чексиз кўп рационал нуқталар бўлиб, иккинчисида биронта ҳам йўқ.

(2) тенгламани ечишда кўпинча

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (3.3)$$

ўзгарувчиларни алмаштирамиз; бу ерда $\varphi(u, v)$ ва $\psi(u, v)$ икки кўпхад нисбатларидан иборат рационал функциялардир. (3.3) ни (3.2) тенгламага қўйсақ,

$$G(u, v) = 0 \quad (3.4)$$

ни оламиз. Бу тенглама Γ' эгри чизикни ифода этади.

Айтайлик, Γ ва Γ' нинг нуқталари ўзаро бир қийматли бўлиб, бирининг нуқталарини бошқасининг нуқталарига ўтказиб қуйидаги икки шарт бажарилсин: 1) φ ва ψ лар рационал коэффициентларга эга бўлсин; 2) (3.3) тенглама тескариланувчи, яъни улардан ўз навбатида

$$u = \varphi_1(x, y), \quad v = \psi_1(x, y) \quad (3.3')$$

ларни топиш мумкин бўлсин, бунда φ_1 ва ψ_1 лар рационал коэффициентли рационал функциялардир.

Агар Γ ва Γ' эгри чизиклар орасида (3.3) ва (3.3') формулалар ёрдамида рационал коэффициентлар билан ўзаро мослик ўрнатиш мумкин бўлса, эгри чизиклар эквивалент бирационаллар дейилади, бу алмаштиришнинг ўзини эса бирационал дейилади. Масалан, агар $\varphi(u, v)$ ва $\psi(u, v)$ лар ушбу кўринишли чизикли, яъни

$$\left. \begin{aligned} x = \varphi(u, v) &= au + bv + c, \\ y = \psi(u, v) &= a_1u + b_1v + c_1 \end{aligned} \right\}$$

функциялар бўлса, u, v ларни x, y ларнинг чизикли рационал коэффициентли рационал функциялари орқали ифодалаш мумкин, яъни алмаштириш бирационал бўлади, бунда $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Мураккаброқ мисол кўрамиз. Айтайлик, L эгри чизик ўз тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$y^2 = x^4 - x^3 + 2x - 2 = (x-1)(x^3 + 2) \quad (**)$$

Буни $v^2 = \varphi_3(u)$ ($\varphi_3(u)$)–учинчи даражали кўпхад кўринишли L эгри чизикка бирационал алмаштириш мумкин. Бунинг учун $(**)$ тенгламанинг ҳар икки томонини $(x-1)^4$ га бўлиб, $x-1 = \frac{1}{u}$, $\frac{y}{(x-1)^2} = v$ деймиз. У ҳолда $(**)$ тенглама ушбу тенгламага алмашади:

$$v^2 = 3u^3 + 3u^2 + 3u + 1$$

Шунинг билан x ва y лар u, v орқали рационал ифода этилади:

$$x = \frac{1+u}{u}, y = \frac{v}{u^2} \text{ ва аксинча, } u = \frac{1}{x-1}, v = \frac{y}{(x-1)^2},$$

яъни, L ва L эгри чизиклар бирационал эквивалентдир.

Иккита бирационал эквивалент эгри чизикларнинг M ва M рационал нукталар тўпламларини нукталарнинг чекли тўпламигача бир қийматли мослигини ўрнатиш мумкин.

Диофант таҳлили нуктаи назаридан иккита бирационал эквивалент эгри чизиклар ўзаро тенг ҳуқуқли. Шу билан бирга, Γ эгри чизик тартиби Γ эгри чизик тартибидан фаркли.

Агар Γ учинчи тартибли эгри чизик бўлса, у энг камида битта рационал нуктага эга бўлиб, унинг бирационал алмаштиришлар орқали ҳосил килинган тенгласини

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b \quad (3.5)$$

кўринишга келтириш мумкин, бунда a ва b лар рационал сонлар.

Фан тарихчиларининг Диофант методига берган баҳолари.

Келгуси параграфларда иккинчи тартибли эгри чизикларнинг рационал нукталарини аниқлашда Диофантнинг умумий методларга эга бўлганини ўрганамиз. Пуанкаре ана шу методларни 0 жинсли барча эгри чизиклар учун қўллаш мумкинлигини кўрсатди. Диофант, шунингдек, учинчи тартибли эгри чизикларда рационал нукталарни аниқлаш учун умумий методларни топган, аммо бу методлар иккинчи тартибли эгри чизикларга тадбик этилган методдан кескин фарк қилади. Пуанкаре ишларидан кўринадики, Диофантнинг бу методлари 1 жинсли ҳар қандай эгри чизикларга рационал нукталарни топиш учун қўлланилиши мумкин.

Алгебраик эгри чизикларнинг рационал нуқталарини топиш учун бошқа ҳеч қандай умумий методлар ҳозиргача мавжуд эмас.

Математика тарихида Диофантнинг метод ва ғояларидан Виет ва П. Фермадан то Л. Эйлергача бўлган тадқиқотчи математиклар қандай фойдаланганини қисқача шархлаймиз. Кўпгина фан тарихчилари математикларга қарама-қарши ўлароқ ҳозиргача Диофант ижодини, унинг илмий меросини баҳолай олмадилар (очиғи баҳоламадилар). Улар Диофант тенгламасининг битта хусусий ечимини топиш билан чегараланиши, турлича масалалар (тенгламалар)ни ечишга турлича сунъий усулларни қўллаган деб чиқишди, масалан, Г.Ганкель ёзади: "...ҳозирги математик Диофантнинг 100 та масаласини ечишни ўрганиб олгач, 101-масаласини ечишда қийналади ... у қувониш ўрнига кўрмай қолади". Г. Ганкелнинг китобида Пуанкаре ишлари ёзилган бўлиб, унда мазкур гаплар (баҳолар берилган) ёзилган эди. Лекин О.Беккер ва И.Гоффманларнинг 1951 йилда нашр қилинган "Математика тарихи" номли китобининг 90-бетида ушбу жумлалар ёзилган: "Диофант ҳеч қандай умумий методни бермайди, лекин ҳар бир янги масала учун янги қутилмаган сунъий усул қўллайдики, булар шарқона усулларни эслатади". Ана шундай мулоҳазани Ван-дер-Варден ўзининг "Ўйғониш илми" китобида ҳам келтиради: "Одатда, у (яъни, Диофант) битта масала ечими бутун сонни берадими ёки каср сонни берадими, унга масалани ечишга алоҳида усулни қўллайди. Масалаларнинг бирдан бошқасига ўтишда ечиш усулларини ўзгартириб боради. Ҳеч бир икки хил масалани бир хил усулда ечмаган". Айниқса, 2-тартибли аниқмас тенгламаларни ечишда ҳийлакорлик билан квадрат тенгламаларни рационал илдиз берадиган турларга келтириб, уларга мос хилма-хил усулларни топа олган. Г.Цейтен Диофантга анча тўғри баҳо берган: "Ўмуман айтганда, Диофант масала учун умумий ечимни изламай биргина ечимни топишга ҳаракат қилган; унинг масалалар ечишдаги қўллаган хусусий, сунъий, хилма-хил усуллари унинг ечимларни излашдаги ижодкорлигидан дарақдир". ("История математики в древности и среднего века", Гонти, 1938, стр. 167-168). Г.Цейтен 2-тартибли аниқмас тенгламаларнинг рационал ечимларини топишдаги хусусий

усулларини атрофлича таҳлил қилади, лекин учинчи тартибли аниқмас тенгламаларни ечишда Диофант қўлаган усулларни кўрмайди, топа олмайди.

3.5-§. Соннинг кўрсаткичи. Туб модул бўйича индекслар. Икки ҳадли таққосламалар. Иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар

Диофантгача ушбу кўринишдаги тенгламалар қаралган:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ва булардан биринчиси кадимги Вавилонияда ўрганилган. Бу тенгламани ечишдаги формулалар Пифагорчилар томонидан топилган:

$$x^2 = k^2 - 1, y = 2k, z = k^2 + 1.$$

Юкоридаги икки тенгламадан Иккинчиси Евклиднинг “Негизлар”ида $a=2$ учун рационал сонларда эмас, балки бутун сонлардаги ечимлари тўлиқ келтирилган. a нинг ихтиёрий квадрат бўлмаган ҳоли учун бу тенгламанинг ечимини Архимед билган (у Эратосфенга барчага маълум бўлган “буқалар ҳақидаги масала”ни кўйган). Диофант ўзининг “Арифметика II” китобида турлича 2-тартибли аниқмас тенгламалар ҳақида фикр билдириб ушбу теоремани беради:

Иккита ўзгарувчили иккинчи тартибли аниқмас тенглама биронта ҳам рационал ечимга эга эмас ёки ечимлар параметрининг рационал функциялари сифатида ифода этилган чексиз кўп $x = \varphi(k), y = \psi(k)$ ечимларга эга, бунда φ, ψ лар рационал функциялар.

Буни кўрсатиш (тушунтириш) учун “Арифметика II” китобининг 8-масаласини келтирамыз. “Берилган квадратни иккита квадратга бўлинг. Айтайлик, 16 ни иккита квадратга бўлиш таклиф қилинган бўлсин. Улардан биринчисини x^2 десак, бошқаси $16 - x^2$ бўлиб, $16 - x^2 = y^2$ бўлиши керак. Ана шу квадратланувчи сон $2x - 4$ бўлиб, квадрати $4x^2 + 16 - 16x$ бўлади, бу $16 - x^2$ га тенг бўлиши лозим. Ҳар икки томонга манфий сонларни қўшиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз, у ҳолда $5x^2 = 16x$ ва $x = \frac{16}{5}$ келиб чиқади. Бири $\frac{256}{25}$.

иккинчиси $\frac{144}{25}$, буларнинг йиғиндиси $\frac{400}{25}=16$ ва булардан ҳар бири квадрат бўлади”.

Энди Диофант методини “соф кўринишда” ажратишга ҳаракат қиламиз.

Фараз қилайлик,

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (3.6)$$

тенглама берилган бўлсин.

Бу ўз вақтида маркази координаталар бошида бўлган айланани ифода этади. Бу тенгламанинг рационал ечимларидан бири $(0, -a)$ бўлади. Диофант

$$\left. \begin{array}{l} x = x, \\ y = kx - a \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

ўрнига қўйиш қилади. Ихтиёрий k учун $k=2$ ни олади ва $kx-2$ нинг квадрати ҳақида гапириб, (3.7) нинг геометрик талқини $(0, -a)$ нуктадан $y = kx - a$ (2.7) тўғри чизикнинг ўтишидир. Бу тўғри чизик (3.6) айланани яна бир нуктада кесади, унинг координаталари k га боғлиқ рационал функциялардир. Ҳақиқатдан, $x^2 + (kx - a)^2 = a^2$ ва $x = \frac{2ak}{k^2 + 1}$, $y = kx - a = a \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$.

Хуллас, k нинг ҳар бир рационал қийматига (3.6) эгри чизикнинг фақат битта рационал нуктаси мос келади ва аксинча. Унинг исталган нуктаси билан $(0, -a)$ нуктани туташтирсак, рационал бурчак коэффициентли тўғри чизикни оламиз. Диофант методининг моҳиятини “Арифметика II” китобининг 9-масаласини ечишда яққол кўрамиз, у қуйидагича ифодаланади:

“Иккита квадратлар йиғиндиси бўлмиш берилган сони бошқа иккита квадратларга алмаштирилсин.” Диофант 13 сонини беради, у $4+9$ га тенг. Хуллас, битта ечим $(2, 3)$ эканлиги маълум. Бошқа ечимларни топиш учун биринчи сонни $x = t + 2$, иккинчисини $y = 2t - 3$ билан белгилайди, яъни у тўғри чизикни $(2, -3)$ нуктадан ўтади.

Диофант методининг мутлақо умумийлигини кўриш қийин эмас.

Агар эгри чизик камида битта рационал нуктага эга бўлса, иккинчи тартибли эгри чизикнинг барча рационал нукталарини топишга имконият беради. Иккита ўзгарувчига боғлиқ 2-тартибли

$$f_2(x, y) = 0 \quad (3.8)$$

тенглама берилган ва у (a, b) рационал ечимга эга бўлсин. Диофант

изидан бориб, $\left. \begin{array}{l} x = a + t, \\ y = b + kt \end{array} \right\}$ ўрнига қўйишларни қиламиз ва ушбу

тенгламани ҳосил қиламиз:

$$f_2(a + t, b + kt) = f_2(a, b) + tA(a, b) + ktB(a, b) + t^2C(a, b, k) = 0.$$

Лекин, $f_2(a, b) = 0$ шунинг учун

$$t = \frac{A(a, b) + kB(a, b)}{C(a, b, k)}.$$

Хуллас, ҳар бир рационал k учун битта ва фақат битта рационал ечим топамиз. Агар берилган тенглама

$$y^2 = a^2x^2 + bx + c \quad (3.9)$$

кўринишга эга бўлса, Диофант $y = ax + m$ деб тенглама кўринишини

ўзгартиради ва $x = \frac{c - m^2}{2am - b}$ бўлади.

Аналитик геометрияда R^2 текисликнинг ҳар бир элементи $(x, y) \in R^2$, проектив текислик эса P^2 бўлиб, унинг элементи $(u, v, z) \in P^2$ лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли. $(u, v, z) \in P^2$ ва $(u_1, v_1, z_1) \in P^2$ ларни бир хил деймиз, агар $u_1 = ku, v_1 = kv, z_1 = kz$ ($k \neq 0$) бўлса. Шундай қилиб, чексиз кўп учликлар биттагина нуктани ифода этади.

$\forall (u, v, z) \in P^2$ берилган бўлиб, агар $z \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}, 1\right)$ нукта ҳам

ўша нуктани аниқлайди. Бу нукта билан $(x, y) \in R^2$ орасида бир

кийматли мослик ўрнатамиз: $x = \frac{u}{z}, y = \frac{v}{z}$. Агар $z = 0$ бўлса, у ҳолда

$(u, v, 0)$ нукта R^2 текисликнинг бирорта нуктасига жавоб бермайди.

Бундай нуктани чексиз узоқлашган ёки хосмас нукта деб атаймиз.

Барча шундай нукталар чексиз узоқлашган $z = 0$ тўғри чизикда ётади.

Аффин координатларида ёзилган $f(x, y) = 0$ тенгламадан бир жинсли

координаталардаги тенгламага ўтиш учун $x = \frac{u}{z}, y = \frac{v}{z}$, деймиз.

Умумий маҳражга келтириб, мос ўрнига қўйишларни бажариб,

$\Phi(u, v, z) = 0$ тенгламани оламир. $\Phi(u, v, z)$ ифода (u, v, z) га нисбатан қўнхад. Масалан, $x^2 - y^2 = 1$ гипербола тенгламаси бир жинсли координаталарда $u^2 - v^2 = z^2$ қўринишни олади. Бу эгри чизикнинг чексиз узоқлашган нуқтасини топиш учун $z = 0$ деймиз (бошқача айтганда чексиз узоқлашган тўғри чизик билан унинг кесилган нуқтасини топамиз). У ҳолда $v = \pm u$, яъни $(1, 1, 0)$ ва $(1, -1, 0)$ нуқталарни топамиз. Уларнинг ҳар иккаласи ҳам рационал координаталарга эга. Бундай нуқталарни чексиз узоқлашган рационал нуқталар деймиз. Диофант ўрнига қўйишларига қайтайлик. (3.9) тенглама бир жинсли координаталарда

$$v^2 = a^2 u^2 + buz + cz^2 \quad (3.9')$$

каби ёзилади. $(1, a, 0)$ ва $(1, -a, 0)$ нуқталар унинг чексиз узоқлашган рационал нуқталари бўлади. Улардан биринчиси орқали тўғри чизик ўтказамиз. Бир жинсли координаталардаги тўғри чизикнинг умумий тенгламаси $Au + Bv + Cz = 0$ қўринишга эга. Лекин бизнинг нуқта шу тўғри чизикда ётади, яъни, $A \cdot 1 + B \cdot a + C \cdot 0 = 0$. Демак, $A = ka$, $B = -k$, $C = km$ ўрнига қўйишларни қилиш мумкин, бу ерда m – ихтиёрий. Шундай қилиб, изланган тўғри чизик тенгламаси $au - v + mz = 0$ бўлади ёки бундан яна аффин координаталарига ўтсак, $y = ax + b$ ни оламир. Бу эса Диофант томонидан бажарилган ўрнига қўйишлар бўлган. У ўзининг “Арифметика III” китобининг 19-масаласида: “Берилган квадратни иккита квадратга чексиз сондаги усуллар билан ажратиш мумкин” дейди. Яна “Арифметика IV” китобида 19-масалани қуйидагича ифодалайди: “Учта сондан исталган иккитасининг қўпайтмаси бир билан биргаликда квадратни берадиган умумий (ёки аникмас) ифодани топинг”: Диофант бу ифодаларни ушбу $x + 2, x$ ва $4x + 4$ қўринишда топади ва ёзади: “Шундай қилиб, муаммо умумий (ёки ноаниқ қўринишдаги) ифода ёрдамида ҳал бўлди, бинобарин, улардан ихтиёрий иккитасининг қўпайтмаси бир билан биргаликда x қандай танланмасин, квадратдан иборат бўлади, чунки умумий (ёки ноаниқ қўринишдаги) ифодани топиш – шундай формулани бериш деганики, x қандай танланмасин, уни ўрнига қўйгандан сўнг (масала) шартлари қаноатлантирилади”.

$y^2 = a^2x^2 + bx + c$ аникмас тенгламани ечиш учун Диофант методлари “Эйлер ўрнига қўйишлари” билан устма-уст тушади (математик анализни ўқиган ҳар бир олий ўқув юрти талабасига Эйлер ўрнига қўйишлари таниш). У ерда ҳам, бу ерда ҳам x ва y лар битта параметрга боғлиқ рационал функциялар билан ифода этилади; бу ўрнига қўйишлар $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ интегрални ҳисоблашда бажарилади. Бу ерда $y = \sqrt{ax + t}$ ёки $y = tx + \sqrt{c}$ дейиш мумкин.

3.6-§. Учинчи тартибли аникмас тенгламалар

Диофант “Арифметика IV” китобида учинчи ва тўрттинчи тартибли аникмас тенгламаларни тадқиқ қилади. Бу ерда иш анча-мунча мураккаб: агар учинчи тартибли эгри чизик рационал нукталарга эга бўлса, уларнинг координаталари битта параметрли рационал функциялар билан ифодаланиши мумкин эмас. Лекин, кубик эгри чизикнинг битта ёки иккита рационал нуктасини билган ҳолда унинг яна битта учинчи рационал нуктасини топиш мумкин. Ҳар қандай тўғри чизик учинчи тартибли эгри чизикни учта нуктада кесади. Уларнинг координаталарини, масалан, Γ эгри чизик тенгламаси

$$f_3(x, y) = 0 \quad (3.10)$$

дан y ни чиқариш билан ҳосил қилинган учинчи даражали тенгламадан топиш мумкин. Агар бу натижавий тенгламанинг илдизларидан икkitаси рационал бўлса, учинчи илдизи ҳам рационал бўлади (буни кубик тенглама илдизларининг йиғиндиси x^2 олдидаги коэффициентни тескари ишора билан олинганини x^3 олдидаги коэффициентга бўлинганига тенг эканлигини эътиборга олсак, агар тенглама коэффициентлари рационал бўлиб, унинг иккита илдизи рационал бўлса, учинчи илдизнинг рационал бўлиши маълум). Бу эслатма, масалан, ушбу иккита тасдиққа асосланади:

1) Агар P нукта эгри чизикнинг рационал нуктаси бўлса, Γ эгри чизикқа P нуктадан k бурчак коэффициенти рационал бўлган уринма ўтказилади. У Γ билан кесишиб, яна битта рационал нуктани ҳосил қилади (Уринма тенгламасини эгри чизик тенгламаси билан

биргаликда ечиб, каррали рационал илдизга эга бўлган натижавий кубик тенгламани оламиз, демак, учинчи илдиз ҳам рационал бўлади).

2) Агар Γ эгри чизикнинг P_1, P_2 нуқталари рационал бўлса, бу нуқталардан P_1P_2 тўғри чизикни ўтказиб, Γ билан кесишадиган учинчи рационал нуқта изланади.

Бу усулларни Диофантнинг уринма ва кесувчи методлари деб атаймиз. Ана шу методлар тадбиқига доир унинг “Арифметика IV” китобидан олинган 24-масаласини қараймиз: “Берилган сон шундай иккита сонга ажратилсинки, уларнинг кўпайтмаси томонсиз кубга тенг бўлсин.

Айтайлик, 6 сони берилган бўлсин. Биринчи сонни x десак, иккинчиси $6-x$ бўлади. Бирининг иккинчисига кўпайтмасини томонсиз кубга тенглашиб қоляпти, аммо $u = 6x - x^2$ бўлади; бу томонсиз кубга тенг бўлиши керак. Мен кубни қандайдир коэффициентли $x-1$ дан ҳосил қиламан; айтайлик, $2x-1$ бўлсин, унинг куби минус томони $8x^3 + 4x - 12x^2$ га тенг. Бу $6x - x^2$ га тенг.

Агар иккала қисмдаги x нинг коэффициентлари тенг бўлганда эди, u ҳолда x^1 ва x^2 лик тенг ҳадлар қолар эди; бунда x рационал бўлади. Аммо $4x$ сон $3 \cdot 2x$ нинг $2x$ га ошиғи билан қўшимчаси сифатида олинади; $3 \cdot 2x - 2x$ бизга $2 \cdot 2x$ ни беради; бироқ, фаразимизга кўра 6 бўлиши керак. Хуллас, иш x олдидаги коэффициентнинг 2 га кўпайтмаси 6 ни берадиган сонни излашга келади. Бу эса 3 бўлади.

Бинобарин, мен $6x - x^2$ нинг куб минус томонга тенг бўлишини истар эканман, u ҳолда кубнинг томонини $3x-1$ деб оламан; бу куб минус томон

$$27x^3 + 6x - 27x^2 = 6x - x^2$$

ва $x = \frac{26}{27}$ бўлади.

Формулалар бўйича биринчиси $= \frac{26}{27}$, иккинчиси $= \frac{366}{26}$ бўлади”.

Энди Диофант методини соф ҳолда ажратишга ҳаракат қиламиз. Айтайлик, a сон берилган бўлсин. Изланган сонлардан бирини x билан, иккинчисини $a-x$ билан белгилаймиз. Шартга асосан,

$$x(a-x) = y^3 - y \quad (3.11)$$

бўлади. Рационал ечимлардан бири $(0, -1)$ бўлади. Диофант йўлидан бориб, бу нукта орқали

$$y = kx - 1 \quad (*)$$

тўғри чизикни ўтказамиз (Диофант дастлаб $k=2$ ни олади) ва унинг (3.11) эгри чизик билан кесишиш нуктасини топамиз:

$$ax - x^2 = k^3 x^3 - 3k^2 x^2 + 2kx$$

x рационал бўлиши учун $2k = a$, яъни

$$k = \frac{a}{2} \quad (**)$$

дейиш етарли, буни эса Диофант қўллаган. Шундан кейин

$$x = \frac{3k^2 - 1}{k^3} = 2 \cdot \frac{3a^2 - 4}{a^3}$$

ни топамиз.

(**) шарт (*) тўғри чизик учун нимани билдиришини қўрамиз. Буни аниқлаштириш учун икки ўзгарувчили учинчи тартибли ихтиёрий (3.10) тенгламага Диофант методини қўлаймиз. Бу тенглама (a, b) рационал ечимга эга, яъни $f_3(a, b) = 0$. $P(a, b)$ нукта орқали

$$y - b = k(x - a) \quad (3.12)$$

ёки

$$\left. \begin{aligned} x &= a + t, \\ y &= b + kt \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

тўғри чизикни ўтказамиз. У ҳолда,

$$f_3(a + t, b + kt) = f_3(a, b) + tA(a, b) + ktB(a, b) + t^2C(a, b, k) + t^3D(a, b, k) = 0. \text{ Аммо } f_3(a, b)$$

ва агар

$$A(a, b) + kB(a, b) = 0 \quad (3.14)$$

десак, у ҳолда

$$k = -\frac{A(a, b)}{B(a, b)} = -\frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}(P)$$

ни оламиз, яъни (2.12) тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти шундай танланиши керакки, у (2.10) эгри чизикқа $P(a, b)$ нуктада уринсин. Шундай қилиб, бу ерда Диофантнинг уринмалар методидан фойдаланилади.

Худди шу методни қўллаб, Диофантнинг “Арифметика VI” китобидан олинган 18-масалани ечди, шунингдек, Диофантнинг ўзи тасдиқлаши бўйича бизгача етиб келмаган унинг “Поризмлар” номли китобида қаралган

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3$$

масалани ҳам ечди.

Йўл-йўлакай Диофант уринманинг k бурчак коэффициентини аниқловчи соф алгебраик усулни олди, бу ерда $k - \frac{dy}{dx}$ ёки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

ҳосилага тенг. Лимитга ўтишни талаб этмайдиган, яъни соф алгебраик усул билан ёритиладиган бу усул ҳосилани таърифлашнинг тарихий жараёнида катта роль ўйнади, асосан Ферма ва Декартда, ҳозирги даврда эса алгебраик геометрияда кенг қўлланилади.

Энди IV китобининг кесувчи методи қўлланилган 26-масаласига ўтамиз. “Шундай иккита сон топинки, уларнинг кўпайтмаси улардан ҳар бири билан олинганда кубни берсин”.

Фараз қилайлик, биринчи сон кубга тенг коэффициент билан, 8 x , иккинчиси эса $x^2 - 1$ бўлсин. Битта шарт бажарилади, чунки кўпайтмага биринчисини қўшиш кубни беради.

Шу кўпайтмага иккинчисини қўшганда ҳам кубни берадиган ҳолни аниқлаш қолди, ҳолос. Аммо, иккинчисини қўшиш $8x^3 + x^2 - 8x - 1 = \text{куб}$ ни беради. $2x - 1$ дан куб ҳосил қиламиз, бу ушбуни беради: $x = \frac{14}{13}$. Яна формула бўйича: биринчиси $\frac{112}{13}$, иккинчиси эса

$$\frac{27}{169}.$$

Диофант изидан бориб, биринчи номаълумни a^3x , иккинчисини $x^2 - 1$ билан белгилаймиз. У ҳолда, масаланинг биринчи шarti бажарилади, иккинчиси эса,

$$a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1 = y^3 \quad (3.15)$$

ни беради. Диофант алмаштиришлар бажариб, $x = \frac{a^3 + 3a}{1 + 3a^2}$ ни олади.

Бу ерда қўлланилган метод устида бироз тўхталиб ўтамиз. (3.15) тенгламанинг рационал ечимларидан бири $(0,-1)$ бўлади. Бу нукта орқали $y=kx-1$ тўғри чизик ўтказамиз ва у (3.15) билан кесишиб нуктасини топамиз:

$$(a^3 - k^3 \cdot x^3) + (1 + 3k^2 \cdot x^2) - (q^3 - 3k \cdot x)$$

Диофант олдинги ҳолда килинганидек, x олдидаги коэффициентни эмас, балки x^3 олдидаги коэффициентни нолга тенглайди ва натижада

$$a^3 - k^3 = 0, k = a \text{ бўлади.}$$

Бундай тенглаштириш геометрик нуктаи - назардан нимани билдиради? Бу саволни геометрик талқинда тушунтириш учун $x = \frac{u}{z}$,

$y = \frac{v}{z}$ деб, бир жинсли координаталарда (2.15) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$a^3 u^3 + u^2 z - a^3 u z^2 - z^3 = y^3 \quad (3.15)$$

Бу ерда эгри чизикнинг иккита рационал нуктага эгаллигини кўрамиз: $P_1(0,-1)$ ва $P_2(1,a,0)$; буларни туташтирувчи тўғри чизик $v=au > z$ дан иборат. У эса (3.15) билан кесишиб, учинчи рационал нуктани ҳосил қилади. Шундай қилиб, бу ерда Диофант берилган рационал нукталардан бири чекли, иккинчиси эса чексиз узоклашган ёки махсус бўлган ҳол учун кесувчи методини қўллайди. Диофант ўзининг уринма ва кесувчи методларини бошқа ("Арифметика IV, V, VI" китобларидан олинган) масалаларни ечишда ҳам қўллайди.

МИСОЛЛАР

3.1. Тенглама ифодаларини барча мумкин бўлган ўзгарувчилар қийматига тўлиқ алмаштириш усули

1. $49x+51y=602$. Барча натурал ечимларини топиш.

Ечиш:

$$x = \frac{602-51y}{49} \geq 1, 602-51y \geq 49$$

$$51y \leq 553, 1 \leq \frac{1043}{51}$$

Бу оралиқдан $x=5, y=7$ ечимларга келамиз.

Жавоб: (5;7)

2. Тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

$$x(x-1)(x-2)\dots\cdot 2\cdot 1 = y^2 - 12.$$

Ечиш: $x > 5$ да тенгламанинг чап томони 5·2, яъни ноль билан тугайди. Ўнг томони ноль билан тугаши мумкин эмас. Қуйидаги жадвални киритамиз.

3.5-жадвал

у нинг охири рақами	y^2 нинг охири рақами	y^2-12 нинг охири рақами
0	0	8
1	1	9
2	4	2
3	9	7
4	6	4
5	5	3
6	6	4
7	9	7
8	4	2
9	1	9

Демак, $x > 5$ тенглама ечимга эга эмас. Энди қолган ҳолларда ўрганиб чикамиз.

$$x=4: \text{ да } 24=y^2-12; y=6$$

$$x=3: \text{ да } 6=y^2-12; \text{ ечимга эга эмас.}$$

$$x=2: \text{ да } 2=y^2-12; \text{ ечимга эга эмас.}$$

$$x=1: \text{ да } 1=y^2-12; \text{ ечимга эга эмас.}$$

Жавоб: (4;6).

3. Тенгламанинг бутун ечимини топинг. $x^2+1=3y$.

Ечиш: 1). Тенгламанинг ўнг томони 3 га бўлинади.

2). Чап томонини 3 га бўлганда қандай қолдик қилишини кўрамиз. Бутун сонларнинг қолдикли бўлиш теоремасига асосан, бутун сон 3 га бўлинганда, қолдик 1 ёки 2 қолади.

Агар $x=3k$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг ўнг томони 3 га бўлинмайди.

Агар $x=3k+1$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг чап томони 3 га бўлинмайди.

Агар $x=3k+2$ бўлса, y ҳолда тенгламанинг чап томони 3 га бўлинмайди.

Демак, тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: ечимга эга эмас.

3.2. Кўпайтувчиларга ажратиш усули

1. Тенгламанинг барча бутун ечимларини топинг.

$$x^2 - 4x - y^2 + 6 = 0.$$

Ечиш: Тенгламанинг чап томонини x ва y га нисбатан квадратлар кўринишига келтирамиз.

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - (y^2 - 2y + 1) + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - (y-1)^2 = -3$$

$$(x-y-1)(x-2+y-1) = -3 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y-3) = -3.$$

-3 сонини бир неча хил кўринишдаги кўпайтиришлар усули билан ёзиш мумкин.

$$-3 = 3 \cdot (-1) = -3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 1 \cdot (-3).$$

$x^2 - 4x - y^2 + 6 = 0$. тенгламани тўртта система кўринишда ёзиб, бутун ечимларини топамиз.

$$\begin{cases} x-y-1=3 \\ x+y-3=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-1=-3 \\ x+y-3=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-1=-1 \\ x+y-3=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-1=1 \\ x+y-3=-3 \end{cases}$$

Бу системани ечимдан $(3;-1)$, $(1;3)$, $(3;3)$, $(1;-1)$ чиқади.

Жавоб: $(3;-1)$, $(1;3)$, $(3;3)$, $(1;-1)$.

2. $1+x+x^2+x^3=2^y$ тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

Ечиш: Кўпхадни кўпайтма кўринишга келтирамиз.

$$(1+x)(1+x^2)=2^y,$$

$$\begin{cases} 1+x=2^m \\ 1+x^2=2^{y-m} \end{cases} \begin{cases} x=2^m-1 \\ x^2=2^{y-m}-1 \end{cases}$$

$$x^2 = 2^{2m} - 2^{m+1} + 1 = 2^{y-m} - 1,$$

$$2^{n-m} + 2^{m+1} - 2^{2m} = 2.$$

1-ҳол. $m=0$ бўлсин. У ҳолда $2^y + 2 - 1 = 2$; $2^y = 1$; $y=0$, $x=0$. натурал ечими йўқ.

$$m > 0; 2^{y-m-1} + 2^m - 2^{2m-1} = 1$$

$$2\text{-хол. } 2^{y-m-1} (1 + 2^{2m-y+1} - 2^{3m-y}) = 1,$$

$$\begin{cases} m=1 \\ y=2, x=2^m-1=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{y-m-1} = 1 \\ 1 + 2^{2m-y+1} - 2^{3m-y} = 1 \end{cases}, \begin{cases} y-m-1=0 \\ 2m-y+1=3m-y \end{cases}$$

Жавоб: (1;2)

3. (Белорусс математика олимпиадаси, Гомель ш., 2012 йй)
Барча (n, m) бутун сонларни топинг.

$$n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5).$$

$$\text{Ечиш: } n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5) = m^4 + m^2 + 8m - 15.$$

Ушбу тенгламадан $n^2 + n - (m^4 + m^2 + 8m - 16) = 0$. n га нисбатан квадрат тенгламани ечиб,

$D = 4m^4 + 4m^2 + 32 - 63 = (2m^2 + 2)^2 - 4(m-1)^2 - 59 < (2m^2 + 2)^2$ барча $m > 2$ натурал сонлар учун.

$$D = 4m^4 + 4m^2 + 32 - 63 = (2m^2 + 1)^2 + 32(m-2) > (2m^2 + 1)^2$$

$$n^2 + n - (m^4 + m^2 + 8m - 16) = 0 \text{ тенгламанинг натурал ечимлари } m=1, m=2.$$

$$m=1 \text{ бўлса, } n^2 + n + 6 = 0, \text{ бундан } n=-2 \text{ ёки } n=-3.$$

$$m=2 \text{ бўлса, } n^2 + n - 20 = 0, \text{ бундан } n=-5 \text{ ёки } n=4.$$

Жавоб: (4;2)

3.3. Бир ўзгарувчининг бошқа ўзгарувчига ифодалаш ва касрнинг бутун қисмини ажратиб қўрсатишга асосланган усул

1. $x+xy-y-2=0$. Тенгламанинг бутун ечимини топинг.

Ечиш: у ни x оркали ифодалаймиз.

$$\begin{aligned} y(x-1) &= 2-x^2, \\ y &= \frac{2-x^2}{x-1} = -\frac{x^2-2}{x-1} = -\frac{(x^2-1)-1}{x-1} = -\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \\ &= -(x+1) + \frac{1}{x-1}, (x \neq 1). \end{aligned}$$

x, y бутун сонлар, y ҳолда $\frac{1}{x-1}$ бутун сон бўлиши шарт. Яъни $x-1 = \pm 1$.

$$1) \begin{cases} x-1=-1 \\ y=-x-1-1; \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ x=-2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-1=1 \\ y=-x-1+1; \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-2; \end{cases}$$

Жавоб: $(0;-2), (2;-2)$

2. Тенгламанинг бутун ечимларини топинг:

$$3x+2y=7.$$

Ечиш: $2(x+y)=7-x$, кўринишда ёзиб, $7-x$, 2 га қаррали, яъни $7-x=2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Демак, $x=7-2k$, дастлабки тенгламадан $y=3k-7$ ни топиб оламиз. Бундан келиб чиқадики, ҳамма жуфтликлар $(7-2k; 3k-7)$, $k \in \mathbb{Z}$ дан иборат.

Жавоб: $(7-2k; 3k-7)$.

2. (Сиртки физика-математика олимпиадаси Москва ш.)

Тенгламалар системасининг бутун ечимларини топинг:

$$\begin{cases} x^2 + y - z = 0 \\ x + y^2 - z^2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Ечиш: Системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

$$\begin{cases} x^2 + y = z \\ x + y^2 + 6 = z^2. \end{cases}$$

У ҳолда, $(x^2 + y^2) = y^2 + x + 6$ ёки $x(x^2 + 2xy - 1) = 6$. Бундан x 6 га бўлинади, $x = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Бизга қуйидаги қийматлар мос тушади. $x = \pm 1; 2; 3; -6$.

Агар $x=-1$, $y=2$, $z=3$; $x=1$, $y=3$, $z=4$; $x=2$, $y=-1$, $z=3$; $x=3$, $y=-4$, $z=5$; $x=-6$, $y=-18$, $z=18$

Жавоб: $(1; 3; 4), (-1; 2; 3), (3; -4; 5), (-6; -18; 18)$.

3.4. Тўлиқ квадратни ажратиб кўрсатишга асосланган усул

1. Тенгламанинг барча бутун ечимларини топинг:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 29.$$

Ечиш: Тенгламанинг чап томонини тўлиқ квадратга кўтарамиз.

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = (x^2 - 6xy + 9y^2) + 4y^2 = (x - 3y)^2 + (2)^2 = 29.$$

Демак, $(2y)^2 \leq 29$.

$$y = 0; \pm 1; \pm 2.$$

1. $y = 0; (x-0)^2 = 29$. Бутун ечимга эга эмас.
2. $y = -1; (x+3)^2 + 4 = 29; (x+3)^2 = 25; x+3 = 5$ ёки $x+3 = -5$;
 $x = 2$ ёки $x = -8$.
3. $y = 1; (x+3)^2 + 4 = 29; (x-3)^2 = 25; x-3 = 5$ ёки $x-3 = -5$;
 $x = 8$ ёки $x = -2$.
4. $y = -2; (x+6)^2 + 16 = 29; (x+6)^2 = 13$;
Бутун ечимга эга эмас.
5. $y = 2; (x-6)^2 + 16 = 29; (x-6)^2 = 13$. Бутун ечими йўқ.

Жавоб: (2; -1), (-8; -1), (8; 1), (-2; 1).

3.5. Икки ўзгарувчили тенгламани бир ўзгарувчига нисбатан квадратга кўтариб ечиш усули

1. $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$. тенгламанинг бутун ечимини топинг.

Ечиш: x га нисбатан квадрат тенгламани қараймиз.

$$5x^2 + 8(y-2)x + 5y^2 + 2y + 2 = 0.$$

$$D = (8y-2)^2 - 4 \cdot 5(5y^2 + 2y + 2) = 64y^2 - 32y + 4 - 100y^2 - 40y - 40 = \\ = -36(y^2 + 2y + 1) = -36(y+1)^2.$$

Тенглама ечимга эга бўлиши учун, $D=0$.

$$-36(y+1)^2 = 0.$$

$y = -1$ бўлса, y ҳолда $x = 1$.

Жавоб: (1; -1)

3.6. Тенглама ифодасини баҳолашга асосланган усул

1. (Ўқувчилар учун Белорусс математика олимпиадаси, охириги тур, Гомель ш., 2011 йй). Тенгламанинг учлик натурал (x, y, z) ечимларини топинг:

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

Ечиш: $z=0$, тенглама бутун ечимга эга эмас. $z=1$ бўлса, $y=0$, $x=1$.
 $z=2$ бўлса, $y=1$, $x=2$.

$z \geq 3$ бўлсин. U ҳолда, $(3^x + 7^y) : 8$ x -жуфт дейлик. 3^x -ни 8 га бўлсак 3 қолдик қолади. 7^y ни 8 га бўлганда 1 ёки 7 қолдик қолади, U ҳолда $3^x + 7^y$, 8 га бўлинмайди. $x=2a$ манфий бўлмаган a учун, U ҳолда

$7^y = 4^z - 3^x = (2^z - 3^a)(2^z + 3^a)$. $(2^z - 3^a) \text{ ва } (2^z + 3^a) \text{ 7 сонининг даражасидир.}$
 $(2^z + 3^a) > 1$, у ҳолда $(2^z + 3^a) : 7$. Демак, $((2^z - 3^a) + (2^z + 3^a)) : 7$, $(2 \cdot 2^z) : 7$,
 мумкин эмас. Шунинг учун, $(2^z - 3^a) = 1$, яъни $2^z - 1 = 3^a$. $z = 2$ с учун, с
 манфий бўлмаган бутун сон. У ҳолда, $4^c - 3^a = 1$. $a = 1$ бўлганда, $c = 1$ ни
 топамиз ва қуйидаги ечимларга эга бўламиз. $x = 1$, $z = 2$, $y = 1$. Агар, $a > 1$,
 у ҳолда $4^c = 3^a + 1$ ни 9 га бўлганда 1 қолдик қолади. Шундай қилиб,
 $3^a = 4^c - 1$ 7 га қолдиксиз бўлиниши керак. Қарама-қаршиликка келдик.
 Демак, икки ечимдан бошқа ечим йўқ.

Жавоб: (1;0;1) ва (2;1;2).

3.7. Евклид алгоритми ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1. Тенгламани ечинг. $24x - 17y = 2$.

Ечиш: $(24; 17; 2) = 1$. Бу Диофант тенглама, ЭКУБ(24,17)=1.
 Евклид алгоритмидан фойдаланиб, (x_0, y_0) хусусий ечимларини
 топамиз:

$$\frac{24}{17} \Rightarrow 24 = 17 \cdot 1 + 7;$$

$$17 = 7 \cdot 2 + 3;$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1;$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

ЭКУБда чизиқли ифодасини аниқлаймиз:

$$1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 = 7 - 17 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17 = 5 \cdot (24 - 17 \cdot 1) - 2 \cdot 17 = 5 \cdot 24 - 5 \cdot 17 - 2 \cdot 17 = 5 \cdot 24 - 7 \cdot 17 = 24 \cdot 5 - 17 \cdot 7.$$

$$24 \cdot 5 - 17 \cdot 7 = 1;$$

$$24 \cdot 10 - 17 \cdot 14 = 2;$$

$$x_0 = 10, y_0 = 14; \begin{cases} x = 10 - 17t, \\ y = 14 - 2t, \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Жавоб: $(10 - 17t, 14 - 2t), t \in \mathbb{Z}$.

3.8. Занжирли каср ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1. Тенгламанинг бутун ечимларини топинг.

$$127x - 52y + 1 = 0$$

Ечиш: $\frac{127}{52}$ ни занжир касрлар ёрдамида бўламиз.

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

Ҳосил бўлган тенглик узлуксиз каср ёки чекли занжир каср деб аталади. Бу занжир касрнинг охириги бўғинини олиб ташлаб, қуйидаги янги касрни ҳосил қиламиз: $\frac{127}{52}$;

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9},$$

$$\frac{127}{52} - \frac{22}{9} = \frac{1143 - 1144}{52 \cdot 9}.$$

Шу билан, $127 \cdot 9 - 52 \cdot 22 + 1 = 0$ ҳосил қиламиз. Бундан кўриниб турибдики, $x=9$, $y=22$ лар тенгламанинг хусусий ечимлари экан.

Умумий ечими: $x = 9 + 52t$, $y = 22 + 127t$ ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

3.9. Таккослаш ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1. Тенгламани ечинг.

$$5x - 7y = 6.$$

Ечиш: $(5, 7) = 1$ - Диофант тенглама, бунда $(5, 7) = 1$, y ҳолда, $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ - Диофант тенгламанинг ечими.

$y = \frac{5x-7}{6} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5x-6}{7} \Leftrightarrow 5x \equiv 6 \pmod{7}$, $(5, 6) = 1$, y ҳолда таккослама ягона ечимга эга бўлади.

$$5x \equiv 20 \pmod{7},$$

$$x \equiv 4 \pmod{7},$$

$$x = 4 + 7t, t \in \mathbb{Z}.$$

$$y = \frac{5 \cdot (4 + 7t) - 6}{7} = 2 + 5t, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = 2 + 5t, \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Жавоб: $(4+7t, 2+5t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

3.10. Пелля тенгламаси

Иккинчи даражали Диофант тенгламалари Пелля тенгламаси дейилади (бундай тенглама аникланмаган Ферма тенгламаси деб ҳам аталади), $x^2 - ay^2 = 1$, бунда a -мусбат бутун сон, тўлиқ квадратга

келмайди. Ҳар бир Пелля тенгламаси ($\pm 1; 0$) ечимга эга бўлиб, тривиал деб аталади. Қолган барча ечимлар тривиал эмас. Пелля тенгламаси чексиз кўп ечимга эга. Пелля тенгламаси ечимининг бир нечта усуллари бор.

1-ҳол. Формулага асосланиб ҳисоблаш усули.

$$\begin{cases} (x_0 + \sqrt{a}y_0)^n = x_n + \sqrt{a}y_n, \\ (x_0 - \sqrt{a}y_0)^n = x_n - \sqrt{a}y_n \end{cases}$$

Икки ўзгарувчи $x_0 + \sqrt{a}y_0$ ни n -даражага кўтариш асосида ҳамма ечимлари топилади. Бу усул ечимини топишда “қўлда ҳисоблаш” орқали қулай, чунки бутун сонлар билан ишлаш керак, “кам” операциялар бажарилади энг кичик ечимлардан ташқари ҳеч қандай маълумот талаб этилмайди. Аммо компьютерда амалга оширишда муаммолар вужудга келади. Биринчидан, намоён қилиш мураккаблигидир. Кўпгина қўшимча ўзгарувчиларни шакллантириш, Паскаль учбурчаги ва $n+1$ йиғиндисини киритиш, даражага “катта” рақамларни киритиш, бунинг учун кўп дастурлаш тилларида алоҳида функция шакллантириш талаб этилади. Иккинчидан, $n+1$ ни “катта” рақамлар (агарда $a > 4294967295$ бўлса, а рақамини “катта” деб атаيمиз) билан ишлаш лозим, бунинг учун янги типдаги рақамлар яратиш ва улар учун зарур операцияларни (умумийлаштириш, кўпайтириш, фарқлаш, бўлиш, сақлаш) ишлаб чиқиш талаб этилади. Ундан ташқари энг кичик ечимни топиш талаб этилади, бу эса муаммодир.

2-ҳол. Иккинчи усул “гиперболик буриш” амалига асосланган, графикдаги бир бутун нуқтани кейингисига қуйидаги формула асосида ўтказиш:

$$\begin{cases} x_n = x_0x_{n-1} + ay_0y_{n-1}, \\ y_n = x_0y_{n-1} + y_0x_{n-1} \end{cases}$$

Бу формула математик индукция ёрдамида осон исботланади.

3-ҳол. (Ҳинд усули). Даставвал иккита бутун сонни олиб, Пелля тенгламасининг ўнг томонига қўйиб, натижа топилади. Шундай сонни олиш керакки, ўнг томон бирга яқинроқ бўлиши керак. Кейинчалик ҳосил бўлган тенгламани Пелля тенгламасига кўпайтирилади. Қавслар очилади, тўлиқ квадратга келтирилади ва

тенгсизликни каноатлантирувчи бошка сон танланади. Тенгламанинг иккала томони уларнинг ЭКУБига қискартирилади ва яна Пелля тенгламасига кўпайтирилади ва ҳоказо, токи ўнг томони бирга тенг бўлмагунича. Бу алгоритм жуда ҳам мураккаб бўлиб, ўзгарувчилар бажаришини текшириш тўпламида талаб қилинади ва жуда кўп вақтни олади. Қўлда ҳисоблаганда кичик алгоритмнинг ўзидаёқ хатога йўл қўйиш мумкин.

4-ҳол. (Инглиз усули). Занжирли каср асосида алгоритмнинг бажарилиш тартиби қуйидагича: $\sqrt{a}$ ни иккинчи тўлик бўлинмадан бошлаб даврий бўлган занжирли касрга ёямиз. Шундай k даврни топамизки, уни kn тартибда ҳисоблайди, бунда n энг кичик натурал сон, kn эса жуфт. Пелля тенгламасининг ҳамма ечимлари мос касрнинг сурат ва махражларидан иборат. Ҳинд ва инглиз усулларини занжирли касрларда қўллаш тўхтатилган.

Мисол. (МДУ —олимпиадаси 2012 й.) Пелля тенгламасини ечинг.

$$x^2 - 8y^2 = 1.$$

Ечиш:

- 1) (x_0, y_0) кичик сонни топамиз: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = [2, 1, 4, 1, 4, \dots]$;
- 2) $S=2$;
- 3) $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}} = \frac{P}{Q} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}$, бундан $x_0=3, y_0=1$.

Қолган ечимларни қуйидаги формула ёрдамида топамиз.

$$x_n = \frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \sqrt{d} y_0 \right)^n + \left(x_0 - \sqrt{d} y_0 \right)^n \right],$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}} \left[\left(x_0 + \sqrt{d} y_0 \right)^n - \left(x_0 - \sqrt{d} y_0 \right)^n \right].$$

3.11. Каталон тенгламаси

1842 йил Бельгия математиги Эжен Шарл Каталон қуйидаги тасдиқни исботлаган: $x^a - y^b = 1$, бунда, $x, y, a, b > 1$ натурал сонларда ягона ечимга эга: $x=3, y=2, a=2, b=3$. (Каталон гипотезаси).

3.12. Марков тенгламаси

1879 йилда 23 ёшли Петербург университети талабаси Марков ўзининг “Мусбат аниқланган бинар квадратик формалар” мавзусидаги магистрлик диссертация ишида ўрганган

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

тенгламасига Марков тенгламаси дейилади.

3.13. Икки ёки ундан юқори бўлган Диофант тенгламаларини ечиш усули

$$x^2 + y^2 = z^2$$

кўринишдаги тенгламалар.

1. (Москва олимпиадаси) Бутун сонларда ечинг.

$$6x^2 + 5y^2 = 74.$$

Ечиш: Тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз: $6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$, яъни $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$. Бундан, $x^2 - 4 = 5u, 10 - y^2 = 6v$ ва $u = v$. Шундай қилиб,

$$x^2 = 4 + 5u; 4 + 5u \geq 0, \text{ бундан } u \geq -\frac{4}{5};$$

$$10 - y^2 = 6v; 10 - y^2 \geq 0, \text{ бундан } v \leq \frac{5}{3};$$

демак $u = 0$ ёки $u = 1$.

$u = v = 0$ бўлса, $10 = y^2$, бунда y бутун сон, нотўғри.

$u = v = 1$ га тенг бўлсин, у ҳолда $x^2 = 9, y^2 = 4$.

Жавоб: $(3; 2), (3; -2), (-3; 2), (-3; -2)$.

3.14 Диофант тенгламасининг баъзи тадбиқларига доир ечимлари

1. Тенгламани ечинг.

$$\cos 3x + \cos 4x = 2.$$

Ечиш: $\cos 3x \leq 1; \cos 4x \leq 1$, у ҳолда берилган тенглама қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 4x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2\pi k, \\ 4x = 2\pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Охирги

системанинг

қесишмасидан:

$$\frac{2\pi k}{3} = \frac{n\pi}{2} \Leftrightarrow 4\pi k = 3n\pi \Leftrightarrow 4k = 3n, n \in \mathbb{Z}.$$

$4k = 3n$ тенгламадан қуйидаги ечимларга эга бўламиз: $k = 3t, n = 4t, t \in \mathbb{Z}$ ва тенгламалар системасининг умумий ечимидан қуйидаги тенгламага

$$\text{келамиз. } x = \frac{2\pi k}{3} = \frac{2\pi 3t}{3} = 2\pi t, t \in \mathbb{Z}.$$

Жавоб: $2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

І. БОБ. БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1 - §

1. Агар бўлинувчи ва бўлинма берилган бўлса, бўлувчи ва қолдиқни топинг.

а) 25 ва 3; б) -30 ва -4 .

2*. Исботланг.

а) тоқ натурал соннинг квадратини 8 га бўлганда 1 қолдиқ қолади;

б) кетма-кет икки натурал сон квадратлари йигиндисини 4 га бўлганда 1 қолдиқ қолади.

3*. 15 сони ҳар қандай натурал даражага кўтарилиб, 7 га бўлинса 1 қолдиқ қолишини исботланг.

4*. Агар $mn + pq$ $m - p$ га бўлинса, у ҳолда $mq + nr$ ҳам $m - p$ га бўлинишини кўрсатинг, бу ерда $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

5*. a, b, c, d, n — бутун сонлар. $ad - bc$, $a - b$ сонлар n га бўлинади ва b, n сонлар бирдан фаркли натурал бўлувчиларга эга эмас. $c - b$ ни n га бўлинишини исботланг.

6. Ихтиёрий бутун n сон учун исботланг:

а) $n^3 - n$ сон 3 га бўлинади; б) $n^7 - n$ сон 7 га бўлинади;

с*) $n^5 - n$ сон 30 га бўлинади.

7*. Олти хонали сон 5 билан тугайди, агар бу сонни чап томонга биринчи ўринга ўтказсак, у ҳолда берилган сондан 4 марта катта сон ҳосил бўлади. Шу сонни топинг.

8*. $n(n+1)(2n+1) (n \in \mathbb{N})$ сонни 6 га бўлинишини исботланг.

9*. Каср соннинг сурати, икки тоқ соннинг квадратлари айирмаси, махражи эса шу сонлар квадратлари йигиндисига тенг. Шу каср сурат ва махражини иккига қискартириш мумкин, 4 га эса қискармаслигини кўрсатинг.

10*. Тула квадрат бўлган тўрт хонали соннинг минглар ва ўнлар хонасидаги рақамлари бир хил, юзлар хонасидаги рақам бирлик рақамдан 1 га катта. Шу сонни топинг.

11*. Кетма-кет жойлашган бешта бутун сонлар квадратларининг йигиндиси тула квадрат бўлмаслигини исботланг.

12*. Агар бирор сонни 9 га бўлганда қолдиқ 2, 3, 5, 6, 8 сонлардан бирортаси бўлса, шу сон тула квадрат бўла олмаслигини кўрсатинг.

13. $S_n = 7 + 77 + 777 + \dots 77 \dots 77$ кетма-кетликнинг $+ 77 + 777 + \dots + 77 \dots 7$ n -та ҳадлари йиғиндисини топинг.

14*. 16 сонининг рақамлари ўртасига 15 сони ёзилган, 1156 сони ўртасига яна 15 ёзилган ва ҳоказо. Шу сонлар тўла квадрат бўлишини кўрсатинг.

15*. Ҳар қандай натурал m ва n лар учун $mn(m^4 - n^4)$ сонни 30 га бўлинишини исботланг.

16*. Ҳеч қандай бутун x учун $3x^2 + 2$ сон тўла квадрат бўла олмаслигини кўрсатинг.

17*. $3^n (n \in \mathbb{N})$ та бир хил рақамлардан тузилган натурал сонни 3^n га бўлинишини исботланг.

2 - §

18. Евклид алгоритми ёрдамида сонларнинг ЭКУБ ва ЭКУКини топинг.

- а) 546 ва 231; б) 1001 ва 6253; в) 2737, 9163 ва 9639;
д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

19. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиб сонларнинг ЭКУБини топинг.

- а) 360 ва 504; б) 220 ва 6600; в) 187 ва 533;
д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

20*. Агар $a = cq + r, b = cq_1 + r_1$ бўлиб, a, b, q, q_1, r, r_1 - бутун номанфий сонлар; c - бутун мусбат сон бўлса, $(a, b, c) = (c, r, r_1)$ тенгликни исботланг. Бу тенгликдан (a, b, c) ни топиш қоидасини келтириб чиқаринг ва шу қоидадан n та сон учун умумлаштиринг.

21. 20-масаладан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг ЭКУБини топинг.

- а) 299, 391 ва 667; б) 588, 2058 ва 2849;
в) 31605, 13524, 12915 ва 11067.

22. $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$ формуладан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг ЭКУКини топинг.

- а) 252 ва 468; б) 279 ва 372; в) 178 ва 381;
д) 299 ва 234; е) 493 ва 221.

23*. Агар $(a, b) = 1$ бўлса, қуйидагиларни топинг:

- а) $((a, b), [a, b])$; б) $(a+b, ab)$; в) $(a+b, [a, b])$.

24*. Икки сон йиғиндиси 667, ЭКУКи ва ЭКУБи нисбатлари 120 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

25*. Икки соннинг ҳар бирини уларнинг ЭКУБига бўлганда ҳосил бўлган бўлинмалар йиғиндиси 18 га тенг. Сонларнинг ЭКУКи 975 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

26*. $a = 899$, $b = 493$ берилган. $d = (a, b)$ ни топинг ва шундай x ва y ларни аниқлангки, $d = ax + by$ кўринишда ифодалаш мумкин бўлсин.

27. 26-масалани қуйидаги жуфтликлар учун бажаринг:

а) $a = 1445$, $b = 629$; б) $a = 903$, $b = 731$; в) $a = 1786$, $b = 705$.

28*. Системаларни натурал ечимларини топинг:

$$\text{а) } \begin{cases} (x, y) = 45 \\ \frac{x}{y} = \frac{11}{7} \end{cases}; \text{ б) } \begin{cases} (x, y) = 20 \\ xy = 8400 \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} (x, y) = 28 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{9} \end{cases}; \text{ д) } \begin{cases} xy = 20 \\ [x, y] = 10 \end{cases}$$

29*. Агар a , b , c – тоқ сонлар бўлса, $(a, b, c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2} \right)$ ни исботланг.

30*. Исботланг:

$$\text{а) } [a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(a, c)(b, c)};$$

$$\text{б) } (a, b)(a, c)(b, c)[a, b][a, c][b, c] = a^2b^2c^2.$$

31*. $N = 10a + b$ ($0 \leq b \leq 9$) натурал сон $m = 10q + 1$ сонга бўлиниши учун фақат ва фақат $a - bq$; m га бўлиниши кифоя эканлигини исботланг.

32*. Ҳисобланг.

а) $(n, 2n + 1)$; б) $(10n + 9, n + 1)$; в) $(3n + 1, 10n + 3)$.

33*. $N = 10a + b$ ($0 \leq b \leq 9$) натурал сон $m = 10q + 9$ га бўлиниши учун фақат ва фақат $a + b(q + 1)$ ни m га бўлиниши кифоя эканлигини исботланг.

34. Ихтиёрий натурал a ва b лар учун:

$$(a, b) = (5a + 3b, 13a + 8b)$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг.

35. Агар $(a, b) = 1$ бўлса, $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}$ – қисқармас каср эканлигини исботланг.

3 - §

36. Сонлар орасида жойлашган туб сонларни топинг.

а) 200 ва 220; б) 2540 ва 2570; с) 1200 ва 1250.

37*. $n > 1$ натурал сонлар учун $m^4 + 4$ ва $n^4 + n^2 + 1$ мураккаб сонлар бўлишини исботланг.

38*. Қандай туб p сон учун $4p^2 + 1$ ва $6p^2 + 1$ туб сонлар бўлади.

39*. Қандай туб p сон учун $p + 10$ ва $p + 14$ туб сонлар бўлади.

40*. Агар $a > 3$, натурал m ва n сонларни 3 га бўлганда мос равишда 1 ва 2 га тенг қолдиққа эга бўлса, a , $a + m$, $a + n$ сонлар бир вақтда туб бўла олмаслигини кўрсатинг.

41*. n ва $n!$ ($n > 2$) сонлар орасида ҳеч бўлмаганда битта туб сон борлигини исботланг.

42*. Барча $2p + 1$ кўринишдаги бутун сонлар ичида битта сон тўла куб бўлишини исботланг, бу ерда p – туб сон.

43*. Агар туб сонларни 5 туб сондан бошлаб номерлаб чиқилса, у ҳолда ҳар бир туб сон ўзини учланган рақамидан катта бўлишини исботланг.

44*. Агар $p > 5$ туб сон бўлса, унинг квадратини 30 га бўлганда қолдиқ 1 ёки 19 бўлишини кўрсатинг.

45*. p ва $q - 3$ дан катта туб сонлар бўлса, $p^2 - q^2$ сон 24 га қаррали бўлишини кўрсатинг.

46*. Сонлар бир вақтда туб сон бўла олмаслигини исботланг:

а) $p + 5$ ва $p + 10$;

б) p , $p + 2$ ва $p + 5$.

47*. Агар тоқ p сонни икки сон квадратлари айирмаси шаклида ягона равишда ифодалаш мумкин бўлса, у туб, акс ҳолда мураккаб бўлишини исботланг.

48*. 47 масала ечимидан фойдаланиб тоқ сонларни кўпайтувчиларга ажратиш усулини келтириб чиқаринг:

а) 6643; б) 1769; с) 3551; д) 6497 сонларни кўпайтувчиларга ажратинг.

49*. Агар N сон икки сонлар квадратлари йиғиндиси шаклида икки хил ифодаланса, яъни $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, у ҳолда N мураккаб сон бўлишини исботланг.

50*. $235^2 + 972^2$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

51*. $3^{10} + 3^5 + 1$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

52*. Агар $1+2^k$ туб сон бўлса, $k = 0$ ёки $k = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) бўлишини исботланг.

53*. Ўзаро туб a, b сонлар учун $a^\alpha + b^\beta$ туб сон бўлса, $(\alpha, \beta) = 1$ ёки $(\alpha, \beta) = 2^k$ ўринли бўлишини кўрсатинг.

54. Агар $2^n - 1$ туб сон бўлса, n — туб сон эканлигини кўрсатинг.

4 - §

55. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$$a) 2, 71828; b) \frac{103993}{33102}; c) \frac{99}{170}; d) \frac{355}{113}.$$

56. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$$a) \frac{247}{74}; b) \frac{77}{187}; c) \frac{333}{100}; d) \frac{103993}{3302}.$$

57. Узлуксиз касрларга ёйилмасидан фойдаланиб, касрларни қискартиринг.

$$a) \frac{3953}{871}; b) \frac{6059}{1241}; c) \frac{6821}{2147}; d) \frac{10027}{32671}; e) \frac{3653}{3107}.$$

58. Берилган касрни узлуксиз касрга ёйинг ва уни $\frac{P}{Q}$ каср билан алмаштиринг. Алмаштириш хатосини топинг ва хатоси кўрсатилган ҳолда тақрибий алмаштирингга мос тенглигини ёзинг.

$$a) \frac{29}{37}; b) \frac{648}{385}; c) \frac{571}{359}.$$

59. Кўрсатилган чекли узлуксиз касрларга мос оддий қискармайдиган касрларни топинг.

$$\frac{a}{b} = (2, 3, 1, 4); b) \frac{a}{b} = (1, 1, 2, 3, 4); c) \frac{a}{b} = (1, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 5);$$

$$d) \frac{a}{b} = (2, 1, 1, 2, 1, 6, 2, 5); e) \frac{a}{b} = (-2, 3, 1, 5, 4, 2); f) \frac{a}{b} = (0, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 7).$$

60. Тенгламани ечинг.

$$a) (x, 2, 3, 4) = \frac{73}{30}; b) (2, 1, 2, x) = \frac{19}{7}.$$

5 - §

61. Ҳисобланг.

$$a) [-2, 7]; b) \left[2 + \sqrt[3]{987} \right]; c) \left[\frac{7 - \sqrt{21}}{2} \right]; d) \left[\frac{10}{3 + \sqrt{3}} \right];$$

62*. Барча ҳақиқий x ва y лар учун $[x + y] \geq [x] + [y]$ тўғрилигини исботланг.

63*. $[ax] = m$ тенгламанинг ечимини топинг, бу ерда $a \neq 0, x \in P$.

64*. m нинг кандай бутун мусбат киймати учун $[12,4 \cdot m] = 86$ тенглик ўринли бўлади.

65*. Агар $p > 2$ туб сон бўлса, $\left[\frac{p}{4}\right]$ нинг киймати $\frac{p-1}{4}$ ёки $\frac{p-1}{4}$ га тенглигини исботланг.

66*. a сонни m га бўлганда қолдиқ r бўлса, $\left[\frac{a}{m}\right] = \frac{a-r}{m}$ тенгликни исботланг.

67*. Агар m тоқ сон бўлса, $\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m-1}{2}$ ни исботланг.

68*. Тенгламани ечинг.

$$a)[x^2] = 2; b)[3x^2 - x] = x + 1; c)[x] = \frac{3}{4}x; d)[x^2] = x.$$

69*. 10^6 ва 10^7 сонлар орасида 786 га қаррали бўлган нечта натурал сон бор?

70*. 1000 дан кичик натурал сонлардан нечаси 5 ва 7 га бўлинади?

71*. 100 дан катта бўлмаган натурал сонлардан нечаси 36 билан ўзаро туб?

72. 1000! нинг каноник ёйилмасида 11 нечанчи даражада келади?

73. 1964! сони нечта нол билан тугайди?

74. 2311 дан ошмайдиган ва 5, 7, 13, 17 ларга бўлинмайдиган бутун мусбат сонлар сони нечта?

75. 12317 дан катта бўлмаган ва 1575 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

76. 1000 дан катта бўлмаган ва 363 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

77. r^n ! нинг каноник ёйилмасига p туб сон нечанчи даражада келади?

78. Сонларнинг каноник ёйилмасини топинг.

а) 10! ; б) 15! ; в) 20! ; д) 25! ; е) 30! .

79. $\frac{20!}{10!10!}$ ни каноник ёйилмасини топинг.

80*. α нинг шундай энг катта қийматини топингки, бунда

$$N = \frac{101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 1000}{7^\alpha} - \text{бутун сон бўлсин.}$$

81*. $(2m+1)!!$ нинг каноник ёйилмасида p туб сон нечанчи даражада бўлишини аниқланг.

82*. $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ эгри чизикли трапецияда бутун координатали нукталар сони нечта? Бу ерда a ва b – натурал сонлар; $f(x)$ – берилган кесмада узлуксиз ва номанфий функция.

83. $x^2 + y^2 = 6,52$ доирада нечта бутун координатали нукта бор?

84*. Агар $(a, 4) = 1$ бўлса,

$$\left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{2a}{4}\right] + \left[\frac{3a}{4}\right] = \frac{3(a-1)}{2} \quad \text{тенглик тўғрилигини исботланг.}$$

85*. Агар $(a, m) = 1$, $m \geq 2$, $a \geq 2$ бўлса,

$$\left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{2a}{m}\right] + \dots + \left[\frac{(m-1)a}{m}\right] = \frac{(m-1)(a-1)}{2} \quad \text{тенглик тўғрилигини исботланг.}$$

86*. x нинг қандай қийматларида $[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] = 1$ тенглик ўринли.

87*. $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{x}{m-1}\right]$ тенгламани ечинг, бу ерда $m = 2, 3, 4 \dots$.

88. Қандай шартлар бажарилганда $[ax^2 + bx + c] = d$ тенглама ечимга эга бўлади, бу ерда $a \neq 0$, $d \in \mathbb{Z}$.

89. Ҳисобланг. а) $\{2, 6\}$; б) $\left\{\frac{8}{3}\right\}$; в) $\{7\}$; д) $\left\{-2\frac{1}{2}\right\}$.

90. Берилган сонларнинг натурал бўлувчилари ва улар йиғиндисини топинг.

а) 375; б) 720; в) 957; д) 988; е) 990; ф) 1200.

91. Берилган сонларнинг барча бўлувчиларини топинг:

а) 360; б) 375.

92*. $S(m) = 2m - 1$ шarti каноатлантирувчи натурал m сонлар чексиз кўплигини исботланг.

93*. Агар $(m, n) > 1$ бўлса, $\tau(mn)$ ёки $\tau(m) \tau(n)$ лардан қайси бири катта, $S(mn)$ ва $S(m) S(n)$ ларчи?

94. Агар $m = 1968$ бўлса, $\tau(m)$, $S(m)$, $\delta(m)$ ларни топинг.

95*. Ўзининг натурал бўлувчилари кўпайтмасига тенг бўлган барча натурал сонлар тўплами барча туб сонлар тўплами билан устма-уст тушишини исботланг.

96*. a натурал соннинг барча натурал бўлувчиларининг n -даражаси ($n \in \mathbb{Z}$) йиғиндиси $S_n(a)$ формуласини келтириб чиқаринг.

97. Ҳисобланг. а) $S_2(12)$; б) $S_2(18)$; в) $S_2(16)$.

98. 28, 496, 8128 сонлар мукамал, яъни ўзининг бўлувчилари йиғиндисининг ярмига тенглигини исботланг.

99*. Евклид теоремасини исботланг: $2^a (2^{a+1} - 1)$ кўринишдаги жуфт натурал сонлар мукамал сонлардир, бу ерда $2^{a+1} - 1$ – туб сон.

100*. Эйлер теоремасини исботланг: $2^a (2^{a+1} - 1)$ кўринишдаги натурал сонлар, ягона мукамал жуфт сонлардир, бу ерда $2^{a+1} - 1$ – туб сон.

101*. Ферма теоремаси: $2^a \cdot r_1 \cdot r_2$ кўринишдаги шундай энг кичик сон топингки, унинг барча бўлувчилари йиғиндиси ўздан уч марта катта бўлсин, бу ерда r_1 ва r_2 – туб сонлар.

102*. Шундай сон топингки, унинг иккита туб бўлувчиси бўлиб, барча бўлувчиларининг сони 6 га, йиғиндиси эса 28 га тенг бўлсин.

103*. Натурал сон иккита туб бўлувчига эга. Шу сон квадратининг барча бўлувчилари сони 15 та бўлса, унинг кубини нечта бўлувчига эга?

104*. Натурал сон иккита туб бўлувчига эга. Шу сон квадратининг барча бўлувчилари сони 81 та бўлса, унинг кубини нечта бўлувчига эга?

105*. Исботланг.

$$N = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + d_n}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_{n-1}} + \frac{1}{d_n}}.$$

бу ерда $d_1, d_2, \dots, d_n - N$ соннинг барча бўлувчилари.

106*. Агар $N = a^a b^b \dots m^m$ ($a, b, \dots, m \in \mathbb{Z}$) бўлса, шу сонни иккита сон кўпайтмаси шаклида неча хил ёзиш мумкин?

107*. $N = 2^a 5^b 7^c$ сон берилган. Агар $5N$, N дан кичик 8 та бўлувчига эга ва $8N$, N дан катта бўлса, N ни топинг.

108. $N = 2^x 3^y 5^z$ сон берилган. Агар N ни 2 га бўлсак, янги соннинг бўлувчилари N нинг бўлувчиларидан 30 та кам; агар N ни 3 га бўлсак, янги соннинг бўлувчилари N нинг бўлувчиларидан 35 та кам; агар N ни 5 га бўлсак, янги соннинг бўлувчиларидан 42 та кам. Шу сонни топинг.

109. Агар бирор сон тўла квадрат бўлиши учун фақат ва фақат унинг бўлувчилари сони ток бўлишини исботланг.

110. Қуйидагиларнинг аниқ қийматини ҳисобланг.

а) $\pi(4)$; б) $\pi(7)$; с) $\pi(10)$; д) $\pi(12)$; е) $\pi(25)$;

ф) $\pi(50)$; г) $\pi(200)$; х) $\pi(500)$.

111. $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ формула ёрдамида қуйидагиларнинг тақрибий

қиймати ва натижанинг нисбий хатосини топинг.

а) $\pi(50)$; б) $\pi(100)$; с) $\pi(500)$.

112*. Чебышев тенгсизлиги ёрдамида $\frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ ни исботланг.

113*. Ихтиёрий p туб сон учун $\frac{\pi(p-1)}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ ўринли, лекин m — мураккаб сон бўлса, $\frac{\pi(m)}{m} < \frac{\pi(m-1)}{m-1}$ ўринли эканлигини кўрсатинг.

114. Топинг: а) $\varphi(375)$; б) $\varphi(720)$; с) $\varphi(988)$; д) $\varphi(1200)$; е) $\varphi(1500)$; ф) $\varphi(4320)$.

115. Кўпайтма қийматини топмасдан кўпайтувчиларнинг Эйлер функцияси қийматини топинг.

а) $\varphi(5 \cdot 7 \cdot 13)$; б) $\varphi(12 \cdot 17)$; с) $\varphi(11 \cdot 14 \cdot 15)$; д) $\varphi(990 \cdot 1890)$.

116. 1 дан 120 гача сонлар интервалида 30 билан ўзаро туб бўлмаган сонлар нечта?

117*. Агар $a = 3^a 5^b 7^c$ ва $\varphi(a) = 3600$ бўлса, a ни топинг.

118*. Агар $a = pq$, $p - q = 2$ ва $\varphi(a) = 120$ бўлса, a ни топинг.

Бу ерда p ва q — ҳар хил туб сонлар.

119*. Агар $a = p^2 q^2$ ва $\varphi(a) = 11424$ бўлса, a ни топинг.

Бу ерда p ва q — ҳар хил туб сонлар.

120*. Агар $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1, \dots, \alpha_n > 1$) ва $\varphi(a) = 462000$ бўлса, a ни топинг.

121*. m дан кичик ва у сон билан ўзаро туб сонлар йиғиндиси $S = \frac{1}{2} m \cdot \varphi(m)$ формула ёрдамида ҳисобланишини исботланг.

122. $S = \frac{1}{2} a \cdot \varphi(a)$ формулани қуйидаги сонлар учун қўлланг:

а) 12; б) 18; с) 375.

123*. Исботланг.

а) $\varphi(2^a) = 2^a - 1$; б) $\varphi(p^a) = p^{a-1} \varphi(p)$; с) $\varphi(a^a) = a^{a-1} \varphi(a)$, $a \in \mathbb{N}$.

124. $\varphi(2a)$ ни $\varphi(a)$ ёки $2\varphi(a)$ га тенглигини исботланг. Шу сонлар ўринли бўладиган шартларни топинг.

125*. Исботланг. $\varphi(4n + 2) = \varphi(2n + 1)$; б) $\varphi(4n) = \begin{cases} 2\varphi(n), & \text{агар } (n, 2) = 1 \\ 2\varphi(2n), & \text{агар } (n, 2) = 2 \end{cases}$

126. Тенгламаларни ечинг. а) $\varphi(5^x) = 100$; б) $\varphi(7^x) = 294$;

с) $\varphi(7^x) = 705894$; д) $\varphi(r^x) = r^{x-1}, x \in \mathbb{N}$.

127. Берилган b махражли нечта тўғри кискармас мусбат касрлар мавжуд?

128. 129 масала ёрдамида махражлари куйидагилар бўлган кискармас мусбат касрлар сонини топинг.

а) 10; б) 16; с) 36; д) 72.

129. $\frac{a}{b}$ мусбат, тўғри кискармас каср бўлсин. Агар $b = 2$ дан $b = n$ гача қийматлар қабул қилса, бундай касрлар нечта?

130. 131 - масала шartiда b : а) 2 дан 5 гача; б) 2 дан 10 гача; с) 2 дан 15 гача қийматлар қабул қилса, касрлар сонини топинг.

131*. 300 дан кичик натурал сонлар ичида 20 билан тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

132. 1665 дан кичик натурал сонлар ичида y билан 37 га тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

133. 1476 дан кичик натурал сонлар ичида y билан 41 га тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

134*. $a \geq 3$ лар учун $\varphi(a)$ нинг қиймати доимо жуфт сон бўлишини исботланг.

135*. Агар $\varphi(x) = a$ тенглама $x = m$ илдизга эга бўлса, $x = 2m$ ҳам тенглама илдизи бўлишини исботланг, бу ерда $(m, 2) = 1$.

136*. $(m, n) > 1$ бўлса, $\varphi(mn)$ ёки $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$ ларни солиштиринг.

137*. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \cdot \frac{d}{\varphi(d)}$ тенгликни исботланг, бу ерда $(m, n) > 1$.

138*. $\varphi(mn) = \varphi(\delta) \cdot \varphi(\mu)$ тенгликни исботланг, бу ерда $\delta = (m, n)$, $\mu = [m, n]$.

139. $\varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \dots + \varphi(p^a)$, $a \in \mathbb{N}$ ни ҳисобланг.

140. $\varphi\left(\frac{a}{d_1}\right) + \varphi\left(\frac{a}{d_2}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{a}{d_k}\right)$ ни ҳисобланг, бу ерда d_i — a нинг барча

бўлувчилари?

141. Куйидаги сонлар учун $\sum_{d|a} \varphi(d) = a$ тўғрилигини текширинг.

а) 80; б) 360; с) 375; д) 957; е) 2800.

142. Тенгламаларни ечинг. а) $\varphi(x) = 2^a$; б) $\varphi(p^x) = 6 \cdot p^{x-2}$.

143. Тенгламаларни ечинг. а) $\varphi(x) = 14$; б) $\varphi(x) = 8$; с) $\varphi(x) = 12$.

144*. Тенгламани ечинг. $\varphi(2x) = \varphi(3x)$.

145. $\varphi(5x) = \varphi(7x)$ тенглама бутун сонлар тўпламида ечимга эга эмаслигини исботланг.

146. Тенгламаларни ечинг.

a) $\varphi(x) = \varphi(px)$;

б) $\varphi(px) = p\varphi(x)$;

с) $\varphi(p_1x) = \varphi(p_2x)$ (p_1, p_2 — турли туб сонлар).

147*. Тенгламани ечинг.

a) $\varphi(x) = \frac{x}{2}; \varphi(x) = \frac{x}{3}; \varphi(x) = \frac{x}{4}$;

148. $\varphi(p^x) = a$; тенгламани текширинг.

7 - §

149. Сонларни қўшинг.

a) $1001010_2 + 1101001_2$

b) $1543_6 + 42_6$

c) $65004_8 + 70645_8$

d) $7489(12)_{13} + 5762_{13}$

e) $43(10)(11)7_{12} + 3(10)6_{12} + 5(11)38_{12}$

f) $47(10)9_{11} + 84567_{11}$

g) $(12)724(11)(10)_{13} + 478(10)953_{13}$

150. Сонларни айиринг.

a) $10101011_2 - 110111_2$

b) $1131043_5 - 342144_5$

c) $23042_6 - 5354_6$

d) $783041_9 - 27605_9$

e) $46(10)37_{12} - 72(11)48_{12}$

f) $1(11)(10)9(10)_{13} - (12)(11)9(11)_{13}$

151. Сонларни қўпайтиринг.

a) $4203_5 \cdot 42_5$

b) $5034_6 \cdot 545_6$

c) $50624_7 \cdot 56_7$

d) $42(11)3_{12} \cdot 789_{12}$

e) $343224_7 \cdot 1256_7$

f) $258(10)3_{11} \cdot 56_{11}$

152. Сонларни бўлинг.

a) $111100011_2 : 10101_2$

b) $1141043_5 : 23_5$

c) $471222_8 : 27_8$

d) $51(10)3406_{11} : 548_{11}$

153. g сонлар тизимида $g-1$ бўлиниш белгисини бажаринг.

154. Юлдузчаларни ракамлар билан алмаштиринг бунда:

a) $7*8(10)5_2$ раками 11 га бўлинсин;

b) $36*05$ раками 6 га бўлинсин;

c) $51*2_6$ раками 4 га бўлинсин;

d) $25**_8$ раками 32 га бўлинсин.

155. Бир санок системасидан бошқа санок системасига ўтишни амалга оширинг.

a) $37051_8 = x_6$; b) $42013_5 = x_7$; c) $890721 = x_8$; d) $45253_7 = x_{12}$;

e) $6785_9 = x_{12}$; f) $(11)89(10)_{12} = x_{14}$; g) $6276_8 = x_{13}$; i) $(10)983_{11} = x_{13}$.

156. m ва n ларни g асосли сонлар тизимида ёзинг ва m ни n га қолдиқли бўлинг.

a) $m = 54326_9$, $n = 35_7$, $g = 8$;

b) $m = 70463_8$, $n = 124_5$, $g = 7$;

c) $m = 23012_4$, $n = 158_9$, $g = 5$.

II. БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

157. Куйидаги таққосламалардан қайсилари тўғри:

- a) $1 \equiv -5 \pmod{6}$; b) $546 \equiv 0 \pmod{13}$; c) $1956 \equiv 5 \pmod{12}$;
d) $23 \equiv 1 \pmod{4}$; e) $3m \equiv -1 \pmod{m}$?

158*. Берилган модул бўйича ҳар қандай бутун сон ўзининг қолдиғи билан таққосланишини исбот қилинг.

159. Куйидаги таққосламаларни қаноатлантирадиган x нинг барча қийматларини топинг:

- a) $x \equiv 0 \pmod{3}$; b) $x \equiv 1 \pmod{2}$.

160. Куйидаги таққосламаларни қаноатлантирадиган m нинг барча қийматларини топинг: $3r + 1 \equiv r + 1 \pmod{m}$.

161. Агар $x = 13$ сони $x \equiv 5 \pmod{m}$ таққосламани қаноатлантирса, модулнинг мумкин бўлган қийматларини топинг.

162*. Агар n – тоқ сон бўлса, у ҳолда $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$ таққослама ўринли эканлигини кўрсатинг.

163*. Агар $100a + 10b + c \equiv 0 \pmod{21}$ бўлса, у ҳолда $a - 2b + 4c \equiv 0 \pmod{21}$ таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

164. Агар $3^n \equiv -1 \pmod{10}$ бўлса, у ҳолда $3^{n+4} \equiv -1 \pmod{10}$ ($n \in \mathbb{N}$) таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

165*. $2^{11 \cdot 31} \equiv 2 \pmod{11 \cdot 31}$ таққосламанинг тўғрилигини кўрсатинг.

166*. Агар $x = 3n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ бўлса, у ҳолда $1 + 3^x + 9^x$ нинг 13 га бўлинишини кўрсатинг.

167. $N = 11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19$ сони 7 модул бўйича абсолют қиймати бўйича энг кичик қандай сон билан таққосланади?

168. $3^{14} \equiv -1 \pmod{29}$ ни текширинг.

169. $1532^5 - 1$ ни 9 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдикни топинг.

170*. Агар $a \equiv b \pmod{p^n}$ бўлса, у ҳолда $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$ ни исботланг.

171. Агар $ax \equiv bx \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b \pmod{\frac{m}{(x, m)}}$ ни исботланг.

172*. Агар $\overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} \equiv 0 \pmod{33}$ бўлса, у ҳолда $a_4 + a_3 a_2 + a_1 a_0 \equiv 0 \pmod{33}$ ни исботланг. $a_{i+1} = 0$ да $a_{i+1} a_i = a_i$ деб олинг.

173*. Берилган соннинг охириги иккита рақамини топинг: а) 9^9 ; б) 7^9 .

174. 10 модул бўйича чегирмаларнинг ҳамма синфларини таққосламалар кўринишида ёзинг.

175. 10 модул бўйича чегирмаларнинг ҳамма синфларини

$$x = 10q + r, 0 \leq r < 10$$

кўринишида ёзинг.

176. Қуйидаги модуллар бўйича кўрсатилган чегирмаларнинг синфларини ёзинг:

а) 10 модул билан ўзаро туб бўлган; б) 10 модул билан ЭКУБи 2 га тенг бўлган;

с) 10 модул билан ЭКУБи 5 га тенг бўлган; д) 10 модул билан ЭКУБи 10 га тенг бўлган.

177. Берилган модуллар бўйича чегирмаларнинг тўла ва келтирилган системаларининг барча турларини ёзинг: а) $m = 9$; б) $m = 8$; с) $p = 7$; д) $m = 12$.

178*. 25, -20, 16, 46, -21, 18, 37, -17 сонларнинг 8 модул бўйича чегирмалар тўла системасининг ташкил қилишини кўрсатинг.

179. 32, -9, 15, 42, -18, 30, 6 сонларни $p=7$ модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

180. 21, 2, -18, 28, -19, 40, -22, -2, 15 сонларнинг 9 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

181. 24, 18, -19, 37, 28, -23, -32, 5, 41, -35, -33 сонларнинг 11 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

182. 19, 23, 25, -19 сонларнинг 12 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

183. 11, -1, 17, -19 сонларнинг 8 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

184*. 24, 14, 25, 37, -8, -19, -40 сонларнинг 6 модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган, абсолют қиймати бўйича энг кичик мусбат бўлмаган ва абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларини топинг. Бу сонлар берилган модул бўйича нечта ҳар хил синфларга

тегишли бўлади? Қайси сонлар берилган модул бўйича бир синфга тегишли бўлади?

185. Манфий бўлмаган энг кичик чегирмаларни бевосита синаш усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $5x^2 - 15x + 22 \equiv 0 \pmod{3}$; б) $x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$; в) $3x \equiv 1 \pmod{5}$;

д) $8x \equiv 3 \pmod{14}$; е) $x^3 - 2 \equiv 0 \pmod{5}$; ф) $x^2 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod{4}$;

г) $27x^2 - 13x + 11 \equiv 0 \pmod{5}$.

186. Таққосламаларнинг хоссалари ёрдамида дастлаб соддалаштириб, сўнгра абсолют киймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларни бевосита синаш усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $12x \equiv 1 \pmod{7}$; б) $8x \equiv 1 \pmod{5}$; в) $3x \equiv 13 \pmod{11}$; д) $6x \equiv 3 \pmod{7}$; е) $6x + 5 \equiv 1 \pmod{7}$; ф) $90x^{20} + 46x^2 - 52x + 46 \equiv 0 \pmod{15}$.

187. Қуйидаги таққосламаларнинг ечимга эга эмаслигини кўрсатинг:

а) $2x - 3 \equiv 0 \pmod{6}$; б) $x^2 - 2x + 3 \equiv 0 \pmod{4}$; в) $x^3 + x + 4 \equiv 0 \pmod{5}$;

д) $x^4 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$; е) $x^5 - 2x^3 + 13x - 1 \equiv 0 \pmod{4}$.

188. Номабълумнинг ихтиёрий бутун кийматлари қуйидаги таққосламаларни қаноатлантиришини кўрсатинг:

а) $x^2 - x + 6 \equiv 0 \pmod{2}$; б) $x(x^2 - 1) \equiv 0 \pmod{6}$;

в) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \equiv 0 \pmod{4}$; д) $x^r - x \equiv 0 \pmod{p}$.

189. Таққосламанинг хоссаларидан фойдаланиб, алмаштиришлар орқали қуйидаги таққосламаларни ечинг.

а) $2x \equiv 7 \pmod{15}$; б) $5x \equiv 2 \pmod{8}$; в) $7x \equiv 2 \pmod{13}$;

д) $3x \equiv 23 \pmod{37}$; ё) $27x \equiv 14 \pmod{25}$; ф) $13x \equiv 10 \pmod{11}$;

г) $5x \equiv 3 \pmod{11}$; х) $7x \equiv 5 \pmod{24}$.

190. x нинг қандай бутун кийматларида $5x^2 + x + 4$ квадрат уч ҳад 10 га бўлинади?

191. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{6}$ таққосламани $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{2}$ зарурий шартдан фойдаланиб ечинг.

192. $x^{\varphi(30)} \equiv 1 \pmod{30}$ таққосламани ечинг.

193. $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ таққослама нечта ечимга эга?

194*. Агар $(n, m) = 1$ бўлса, у ҳолда n -даражали $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{m}$ таққосламани янги у ўзгарувчини киритиш билан $(n-1)$ даражали ҳади қатнашмайдиган $y^n + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n \equiv 0 \pmod{m}$ таққосламага келтириш мумкинлигини кўрсатинг.

195*. Олдинги масаладан фойдаланиб, $x^3 + 5x^2 + 6x - 8 \equiv 0 \pmod{13}$ таққосламани уч ҳадли $y^3 + ry + q \equiv 0 \pmod{13}$ таққосламага келтиринг.

196. Эйлер усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $5x \equiv 7 \pmod{10}$; б) $3x \equiv 8 \pmod{13}$; с) $7x \equiv 5 \pmod{17}$;

д) $13x \equiv 3 \pmod{19}$; е) $27x \equiv 7 \pmod{58}$.

197. Узлуксиз касрлар усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $7x \equiv 4 \pmod{19}$; б) $143x \equiv 41 \pmod{221}$; с) $13x \equiv 178 \pmod{153}$;

д) $67x \equiv 64 \pmod{183}$; е) $89x \equiv 86 \pmod{241}$; ф) $213x \equiv 137 \pmod{516}$;

г) $111x \equiv 81 \pmod{447}$; ҳ) $186x \equiv 374 \pmod{422}$; ж) $129x \equiv 321 \pmod{471}$.

198. Қулай усул билан қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $12x \equiv 9 \pmod{18}$; е) $-53x \equiv 84 \pmod{219}$;

б) $20x \equiv 10 \pmod{25}$; ф) $90x + 18 \equiv 0 \pmod{138}$;

с) $-50x \equiv 67 \pmod{177}$; г) $78x \equiv 42 \pmod{51}$.

д) $-73x \equiv 60 \pmod{311}$;

Жавобларни берилган таққосламага қўйиш билан текшириб кўринг.

199*. Биринчи даражали 21 модул бўйича қуйидаги таққосламаларни тузинг:

а) фақат ягона ечимга эга бўлган;

б) 3 ва 7 та ечимга эга бўлган;

с) 2, 10, 15 та ечимга эга бўлган.

200. Туғилган куннинг 12 га кўпайтмаси ва ойнинг 31 га кўпайтмаларининг йиғиндиси 198 бўлса, туғилган кунни топинг.

201*. 523 сонининг чап томонидан шундай уч хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган олти хонали сон 7, 8 ва 9 га бўлинсин.

202. 629 сонининг ўнг томонидан шундай уч хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган олти хонали сон 5, 8 ва 11 га бўлинсин.

203. 723 сонининг ўнг томонидан шундай икки хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган 5 хонали сонни 31 га бўлганда 7 қолдик қолсин.

204. Қуйидаги тенгламаларни бутун сонларда ечинг.

a) $3x + 4y = 13$;

g) $53x + 17y = 25$;

b) $8x - 13y = 63$;

h) $47x - 105y = 4$;

c) $43x + 37y = 21$;

i) $18x - 33y = 112$;

d) $45x - 37y = 25$;

j) $11x + 16y = 156$;

e) $81x - 48y = 33$;

k) $12x - 37y = -3$;

f) $26x + 3y = 13$;

l) $23x + 15y = 19$.

205. Дон ташиш учун 60 кг ва 80 кг вазнлик қоплар бор. 440 кг донни ташиш учун шу қоплардан неча керак бўлади?

206. 14900 сўмга 300 сўмлик ва 500 сўмлик чипталардан нечадан сотиб ола бўлади?

207. Қуйидаги таққосламалар системаларини ечинг:

a)
$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{12} \\ x \equiv 7 \pmod{14} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{25} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{13} \\ 5x \equiv 8 \pmod{17} \\ 3x \equiv 7 \pmod{31} \\ 14x \equiv 35 \pmod{19} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x \equiv 7 \pmod{13} \\ x \equiv 2 \pmod{17} \\ 5x \equiv 3 \pmod{9} \\ 8x \equiv 4 \pmod{14} \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{10} \\ 2x \equiv 5 \pmod{15} \\ 7x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 4x \equiv 1 \pmod{9} \\ 5x \equiv 3 \pmod{7} \\ 4x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$$

208. 2, 3, 4 га бўлинганида 1 қолдик қоладиган ва 5 га қолдиксиз бўлинадиган барча натурал сонларни топинг.

209. 4, 5, 7 га бўлинганида мос равишда 3, 4, 5 қолдик қоладиган 200 ва 500 сонлари орасидаги барча бутун сонларни топинг.

210. Қуйидаги таққосламалар системаларини ечинг.

a) $\begin{cases} x+3u \equiv 5 \\ 4x \equiv 5 \end{cases} \pmod{7}$	b) $\begin{cases} x-2u \equiv 1 \\ x \equiv 2 \end{cases} \pmod{4};$	c) $\begin{cases} 9u \equiv 15 \\ 3x-7u \equiv 1 \end{cases} \pmod{12};$
d) $\begin{cases} 3x-5u \equiv 1 \\ 9u \equiv 15 \end{cases} \pmod{12};$	e) $\begin{cases} x+2u \equiv 0 \\ 3x+2u \equiv 2 \end{cases} \pmod{5}$	f) $\begin{cases} 3x+4u \equiv 29 \\ 2x-9u \equiv -84 \end{cases} \pmod{143}.$

III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

211. $x^2 - 2y^2 = 1$ тенгламани қаноатлантирувчи барча x, y ларни топинг.
212. $x^2 - y^2 = 7$ тенгламанинг натурал ечимларини топинг.
213. $x^4(x^2 - x^4 + 2y) = y^2 + 1999$ тенгламанинг бутун ечимларини топинг.
214. $x^3 + y^3 = 8^{30}$ x, y - ларнинг бутун қийматини топинг.
215. $(x - y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 2005$. x, y, z ларнинг натурал ечимини топинг.
216. $10x^2 + 11xy + 3y^2 = 7$ x, y ларнинг бутун ечимларини топинг.
217. $n^2 + n = m^2 + 2m - 9$ (n, m) - ларнинг бутун қийматини топинг.
218. $2x^3 + x^2 + 10x + 5 = 2 \cdot p^n$. (x, n, p) ларни x, n - натурал ва p - туб сонларни топинг.
219. $(m+n)^{m^2+n^2} = (m^2+n^2+2)^m$ барча натурал ечимларини топинг.
220. $(n!)^m! - (m!)^n! = 28$. m ва n ларнинг натурал ечимларини топинг.
221. $y^2 - 11x^2 = 1$. Пелля тенгламасининг натурал ечимини топинг.
222. $34x^4 + 24y^3 = 100000$. тенгламанинг бутун қийматли ечимини топинг.
223. $\cos 2x + \cos \frac{6}{5}x = -2$. тенгламани ечинг.
224. $\sin ax + \sin bx = 2$. тенгламани ечинг.
225. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. тенгламани ечинг.
- 226.
- | | |
|-------------------|-----------------------|
| 1) $3x+4y=13;$ | 9). $81x-48y=33;$ |
| 2) $8x-13y=63;$ | 10). $26x+34y=13;$ |
| 3) $7x-19y=23;$ | 11). $122x+129y=2;$ |
| 4) $39x-22y=10;$ | 12). $258x+172y=56;$ |
| 5) $17x-25y=117;$ | 13). $38x+117y=209;$ |
| 6) $43x+37y=21;$ | 14). $119x-68y=34;$ |
| 7) $53x+47y=11;$ | 15). $258x-175y=113;$ |
| 8) $45x-37y=25;$ | 16). $41x+114y=5.$ |

Тенгламаларни узлуксиз каср ва таққосламалар ёрдамида ечинг.

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

I БОБ. БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1 - §

1. а) $q = 7$; 8 ва $r = 2$; 6; б) $q = 8$; 9 ва $r = 2$; 6.

2. а) Ечиш: $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$, бу ерда $n(n+1)$ 2 га бўлинади;

б) Ечиш. $n^2 + (n+1)^2 = 2n(n+1) + 1$, бу ерда $n(n+1)^2$ га бўлинади.

3. Кўрсатма. $15 = 7 \cdot 2 + 1$. Агар $15n = 7q + 1$, у ҳолда $15n + 1 = 5n \cdot 15 = 7 + 1$.

4. Ечиш. Масала шартини бўйича, $\frac{mn+pq}{m-p} = t$ — бутун сон.

$$\frac{mq+np}{m-p} = \frac{mq+np}{m-p} - \frac{mn+pq}{m-p} = \frac{q(m-p)-n(m-p)}{m-p} = q-n.$$

Бундан $\frac{mq+np}{m-p} = q-n+t$ бутун сон. Демак, $mq+np; m-p$ га бўлинади.

5. Ечиш. Масала шартига кўра, $ad-bc=nt$ ва $a-b=nt_1$. Иккинчи тенгликни d га кўпайтириб, биринчисидан айирамиз:
 $b(c-d)=n(dt_1-1)$.

Бундан b ва n га қўйилган шартларга асосан $c-d$ ни n га бўлиниши келиб чиқади.

6. с) Ечиш. $m^5 - m = (m-1)m(m+1)(m^2+1) = (m-1)m(m+1)[(m^2-4)+5] =$
 $= (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)+5(m-1)(m+1).$

Қўшилувчиларнинг ҳар бири 30 га бўлинади, чунки k та кетма-кет сонлар кўпайтмаси $k!$ га бўлинади (бу $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$ — бутун сон бўлишидан келиб чиқади). Бундан йиғинди ҳам 30 га бўлинади, демак $m^5 - m$ 30 га бўлинади.

7. Ечиш. $10x + 5$ — изланаётган сон бўлсин. 5 рақамни чап томондан биринчи ўринга қўйиб $5 \cdot 10^5 + x$ ни ҳосил қиламиз. Берилган шартларга кўра, $5 \cdot 10^5 + x = 4(10x + 5)$ тенгламага келамиз. Бундан, $x = 112820$ келиб чиқади.

8. Ечиш. Масала шартини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$n(n+1) (2n+1) = n (n+1) [(n-1) + (n+2)] = (n-1) n (n+1) + n (n+1)(n+2).$$

Ҳар бир қўшилувчи 6 га бўлинишидан (6 масала ечимидан) йиғиндини 6 га бўлиниши келиб чиқади.

9. Ечиш. $\frac{(2m+1)^2 - (2n+1)^2}{(2m+1)^2 + (2n+1)^2} = \frac{4(m+n+1)(m-n)}{2[2(m^2+n^2+m+n)]}$ ҳосил бўлган касрни

факат 2 га қисқартириш мумкин.

10. Ечиш. $N^2 = 1000x + 100(y+1) + 10x + y = 101(10x + y) + 100.$

Бундан $10x + 1 = \frac{(N+10)(N-10)}{101}, N=91, N^2=8181.$

11. Ечиш. $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$ тўла квадрат бўлиши учун $n^2 + 25$ га қаррали бўлиши керак ёки n^2 нинг охирига рақами 8 ёки 3 бўлиши керак, бу мумкин эмас.

12. Ечиш. Ҳар қандай бутун сонни қуйидагилардан бирортаси шаклида ёзиш мумкин: $9k, 9k \pm 1, 9k \pm 2, 9k \pm 3, 9k \pm 4$. Бу сонлар квадратлари:

$$(9k)^2 = 9(9k^2); (9k \pm 1)^2 = 9(9k^2 \pm 2k) + 1; (9k \pm 2)^2 = 9(9k^2 \pm 4k) + 4;$$

$$(9k \pm 3)^2 = 9(9k^2 \pm 6k + 1); (9k \pm 4)^2 = 9(9k^2 \pm 8k + 1) + 7.$$

Натижада бутун сон квадрати 9 га бўлганда қолдиқ фақат 0, 1, 4, 7 бўлиши мумкинлиги келиб чиқади.

13. Ечиш.

$$S_n = 7(1+11+111+\dots+111\dots11) = 7\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9}\right) = \frac{7}{81}(10^{n+1} - 9n - 10).$$

14. Ечиш.

$$111\dots11555\dots56 = \frac{10^{n+1}-1}{9} \cdot 10^{n+1} + 5 \cdot 10 \cdot \frac{10^n-1}{9} + 6 = \left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2 = \left(\frac{10^{n+1}-1}{3} + 1\right)^2 = (333\dots33+1)^2.$$

15. Ечиш. $m(m^4 - n^4) = n(m^5 - m) - m(n^5 - n)$ 30 га қаррали (1 мисолга кўра).

16. Ечиш. $y^2 = 3x^2 + 2$ тенглама бутун сонларда счимга эга эмас. Уни $y = 3n$ ёки $y = 3n \pm 1$ шакллардан бирорта кўринишида ифодалаш мумкин ва бундан y^2 ни 3 га бўлганда қолдиқ фақат 0 ёки 1 бўлади. Масала шартига кўра, қолдиқ 2 бўлиши керак.

17. Ечиш. Математик индукция усулини қўлаймиз: $\overline{aaa}$ сон 3 га бўлинади, чунки $a + a + a = 3a$. Агар $\overline{aa\dots a}$ сон 3^n га бўлинса, у ҳолда

$\overline{aa...a} = \overline{aa...aaa...aaa...a} = \overline{aa...a} \cdot (10^3)^n + \overline{aa...a} \cdot 10^{3n} + \overline{aa...a} = \overline{aa...a} \cdot 100...0100...01 \cdot 3^{n+1}$ га бўлинади.

2 - §

18. а) 21, б) 13; с) 119; д) 3; е) 23.

19. а) 2520; б) 138600; с) 99671; д) 881200.

20. Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = cq + r$, $b = cq_1 + q_1$ дан $d|r$ ва

$d|r_1$ келиб чиқади. $d = (c, r, r_1)$ ни исботлаймиз. $(c, r, r_1) = D$ бўлсин. $a = cq + r$ ва $b = cq_1 + r_1$ тенгсизликлардан $D|a$, $D|b$ ва шарт бўйича $D|c$. Бундан

$D = (a, b, c)$ ва демак, $D = d$. n та сон учун $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n, r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ ни оламиз, бу ерда $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1} - a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ сонларни a_n га бўлгандаги қолдик.

21. а) 23; б) 7; с) 21.

22. а) 3776; б) 1116; с) 67818; д) 5382; е) 6409.

23. а) Ечиш. $(d, m) = (d, [dx, dy]) = d(1, [x, y]) = d$. Агар $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ва $m = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ деб олсак, натижа ўзгармайди.

б) Ечиш. Агар $p = a + b$ ва $a \cdot b$ сонларнинг умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда a ёки b сонлардан бирортаси p га бўлиниши керак. $a + b$ ни p га бўлинишидан p сон a ва b ларни умумий бўлувчиси эканлиги келиб чиқади. Бу масала шартига зид, чунки $(a, b) = 1$;

с) Ечиш. $(a, b) = d$ ва $a = dx$, $b = dy$ бўлсин, бунда $(x, y) = 1$. Бу ҳолда

$(a + b, m) = (d(x + y), dxy) = d(x + y, xy) = d$. Демак, $(a + b, [a, b]) = (a, b)$.

24. Ечиш. x ва y — изланаётган сонлар бўлсин ва $(x, y) = d$, бундан $x = dm$ ва $y = dn$ ва $(m, n) = 1$. Шартга кўра, $x + y = d(m + n) = 667 = 23 \cdot 29$. Шарт бўйича $\frac{[x, y]}{(x, y)} = 120$, бундан $[x, y] = 120 \cdot (x, y) = 120d$, бошқа

томондан $[x, y] = \frac{xy}{d} \Rightarrow \frac{xy}{d} = 120d$ ёки $xy = 120d^2$. Булардан $\begin{cases} x + y = 23 \cdot 29 \\ xy = 120d^2 \end{cases}$

системани ҳосил қиламиз. $d(m + n) = 23 \cdot 29$ дан $d = 23$ ва $d = 29$ ($d = 1$ ёки $d = 23 \cdot 29$ - ўринли бўлмайди) бўлиши мумкин. $d = 23$ бўлганда, $x = 552$, $y = 115$. $d = 29$ да $x = 435$, $y = 232$.

25. Ечиш. x ва y – номаълум сонлар ва $(x, y) = d$ бўлсин. У ҳолда $\frac{x}{d} = m, \frac{y}{d} = n$, бунда $(m, n) = 1$. Шарт бўйича $m + n = 18$,

$$[x, y] = \frac{xy}{d} = \frac{dm \cdot dn}{d} = mnd = 975 = 3 \cdot 5^3 \cdot 13. \text{ Бундан } \begin{cases} m+n=18 \\ mnd=3 \cdot 5^3 \cdot 13 \end{cases} \text{ ни ҳосил}$$

қиламиз ва унинг ечими $m = 5, n = 13, d = 15$ бўлади. Демак, $x = 75, y = 195$.

26. Ечиш. Шарт бўйича, $a = 899, b = 493$. Евклид алгоритмига кўра:

$a = b \cdot 1 + 406, b = 406 \cdot 1 + 87, 406 = 87 \cdot 4 + 58, 87 = 58 \cdot 1 + 29, 58 = 29 \cdot 2$ бўлади. Охириги иккинчи тенгликдан бошлаб,

$$29 = 87 - 58 = 87 - (406 - 87 \cdot 4) = 87 \cdot 5 - 406 = (b - 406) \cdot 5 - 406 = 5b - 406 \cdot 6 = 5b - (a - b) \cdot 6 = a(-b) + b \cdot 11 \text{ ни оламиз.}$$

$29 = 899x + 493y$ билан солиштирсак, $x = -6, y = 11$ келиб чиқади.

27. а) $17 = a(-10) + b \cdot 23 = ax + by;$

б) $43 = a \cdot (-4) + b \cdot 5 = ax + by;$

с) $47 = a \cdot 2 + b(-5) = ax + by.$

28. а) Ечиш. $x = 45u$ ва $y = 45v$, бу ерда $(u, v) = 1, \frac{u}{v} = \frac{11}{7}$ дан

$$u = 11 \text{ ва } v = 7, \text{ демак } x = 495 \text{ ва } y = 315;$$

б) Ечиш. $x = 20u$ ва $y = 20v$, бу ерда $(u, v) = 1, uv = 21$ дан $u = 1; 3; 7; 21$ ва $x = 20; 60; 140; 420. y = \frac{8400}{x}$ бўлганлиги сабабли $y = 420, 140, 60, 20;$

д) $x = 140, y = 252.$

29. Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = md, b = nd, c = kd$ $\frac{a+b}{2} = \frac{m+n}{2}d; \frac{a+c}{2} = \frac{m+k}{2}d; \frac{b+c}{2} = \frac{n+k}{2}d$. Бундан, d сон $\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}$ сонларнинг умумий бўлувчиси бўлишини кўрсатади.

Фараз қиламиз, $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}) = D$ бундан $d \mid D \frac{a+b}{2} = m_1 D; \frac{a+c}{2} = n_1 D; \frac{b+c}{2} = k_1 D$. Биринчи ва иккинчи тенгликлар йиғиндисидан учинчи тенгликни айириб, $a = (m_1 + n_1 - k_1)D$ ни тонамиз. Шу усулда $b = (m_1 - n_1 + k_1)D, c = (-m_1 + n_1 + k_1)D$ ларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликлардан

a, b, c ларнинг D га бўлиниши келиб чиқади ва демак, $D|d$. Натижада $D=d$ яъни, $(a, b, c) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2})$.

30. а) Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $(a, b) = md$, $(a, c) = nd$, $(b, c) = kd$, бу ерда $(m, n, k) = 1$. Бу тенгликдан adm ва dn га бўлиниши келиб чиқади, демак, $a = dmna$. Худди шундай: $b = dmkb$; $c = dnky$. Бу ерда $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

$$[a, b, c] = dmnk\alpha\beta\gamma = \frac{\alpha^4 m^2 n^2 k^2 \alpha\beta\gamma}{d^2 mnk} = \frac{(bmna)(dmk\beta)(dnk\gamma)d}{dm \cdot dn \cdot dk} = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(a, c)(b, c)};$$

б) Кўрсатма: $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$ дан фойдаланинг.

31. Ечиш. $qN = 100q + bq = 100q + a - a + bq = am - (a - bq)$, бундан тасдиқ тўғрилиги келиб чиқади, чунки $(q, m) = 1$.

32. а) 1;

б) Ечиш. $(10n + 9, n + 1) = d$ ва $10n + 9 = dx$, $n + 1 = dy$ бўлсин. У ҳолда

$10(dy - 1) + 9 = dx$ ёки $10dy - 1 = dx$ ва натижада $d = 1$.

с) Ечиш. Агар $(3n + 1, 10n + 3) = d$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} 3n+1=dx \\ 10n+3=dy \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 30n+10=10dx \\ 30n+9=3dy \end{cases}, \text{ бундан } 1 = d(10x - 3y) \text{ ва } d = 1.$$

Масалани Евклид алгоритми ёрдамида ҳам ечиш мумкин.

33. Ечиш. $(q + 1)N = 10a(q + 1) + b(q + 1) = am + [a + b(q + 1)]$, бу ерда $(q + 1, 10q + 9) = 1$ (32 масалага қаранг).

34. Ечиш. $(a, b) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = md$, $b = nd$, $(m, n) = 1$. $5a + 3b =$

$(5m + 3n)d$, $13a + 8b = (13m + 8n)d$ тенгликлардан $5a + 3b$ ва $13a + 8b$ ларнинг умумий бўлувчиси d бўлади. $(5a + 13b, 13a + 8b) = D$ бўлсин, у ҳолда $D|d$, $5a + 3b = m_1 D$, $13a + 8b = n_1 D$.

Бундан $a = (8m_1 - 3n_1)D$, $b = (5n_1 - 13m_1)D = D$ ва D , a ва b ларнинг бўлувчиси, демак, $D|d$. Натижада $d = D$.

35. Ечиш.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} = \frac{2a+b}{a(a+b)}, (a, b) = 1 \text{ дан } (a, 2a+b) = 1 \text{ келиб чиқади.}$$

$(2a + b, a + b) = 1$ ни кўрсатамиз. $(2a + b, a + b) = d > 1$ бўлсин, у ҳолда $2a + b = dm$, $a + b = dn$, $(m, n) = 1$, демак, $a = d(m - n)$, $b = d(2n - m)$, яъни $d|a$, $d|b$ масала шартига зиддир.

3 - §

36. а) 211;

б) 2543, 2549, 2551, 2557;

с) 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249.

37. Ечиш.

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

38. Ечиш. Барча натурал сонларни $5n$, $5n \pm 1$, $5n \pm 2$ кўринишда ёзиш мумкин. $5n$ кўринишдаги сон туб сон бўлади, агар $n=1$ бўлса, у ҳолда $p=5$, $4p^2+1=101$, $6p^2+1=151$. Бу p нинг қиймати масала шартини қаноатлантиради.

Бошқа бундай сонлар мавжуд эмаслигини кўрсатамиз. Агар $p=5n \pm 1$ бўлса, у ҳолда $4p^2+1=5(20n^2 \pm 8n+1)$ — мураккаб сон, агар $p=5n+2$ бўлса, $6p^2+1=5(30n^2 \pm 24n+1)$ — мураккаб сон бўлади.

39. Ечиш. Барча натурал сонларни $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$, $6k \pm 3$ кўринишда ёзиш мумкин. 2 ва 3 дан ташқари $6k \pm 1$ кўринишдаги сонлар туб бўлиши мумкин (тескараси ҳамма вақт ўринли эмас, яъни ҳар қандай $6k \pm 1$ кўринишдаги сонлар туб сон бўлмаслиги ҳам мумкин). Агар $p = 6k - 1$ бўлса, у ҳолда $p + 10 = 6k - 1 + 10 = 3(2k + 3)$ — мураккаб сон; агар $p = 6k + 1$ бўлса, у ҳолда $p + 14 = 6k + 1 + 14 = 3(2k + 5)$ — мураккаб сон. Шундай қилиб, бир вақтда $p + 10$ ва $p + 14$ сонлар туб бўладиган 3 дан катта p туб сон мавжуд эмаслигини кўрсатдик.

Агар $p = 2$ бўлса, $p + 10$ ва $p + 14$ — мураккаб сонлар бўлади. Агар $p = 3$ бўлса, $p + 10$ ва $p + 14$ — туб сонлар бўлади. Демак, битта $p = 3$ сон масала шартини қаноатлантиради.

40. Ечиш. Шарт бўйича, $a > 3$, $m = 3t + 1$, $n = 3t_1 + 2$. 2 ва 3 дан фарқли туб сонларни $p = 6k \pm 1$ кўринишда ифодалаш мумкин (39 масалага қаранг). Агар $a = p = 6k + 1$, у ҳолда $a + n = 6k + 1 + 3t + 2 = 3(2k + t + 1)$ — мураккаб сон; агар $a = p = 6k - 1$, у ҳолда $a + m = 6k - 1 + 3t + 1 = 3(2k + t)$ мураккаб сон.

41. Ечиш. $p - n!$ нинг туб бўлувчиси. $p \leq n! - 1$ бўлганлиги сабабли $p < n!$

Бошқа томондан $n!$ p га бўлинмайди, бундан $p < n!$. Шундай қилиб, $p < n!$ (бу исботдан туб сонлар сони чексиз кўплиги келиб чиқади).

42. Ечиш. Шарт бўйича, $2p + 1$ — тўла куб, яъни

$$2p + 1 = (2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x(4x^2 + 6x + 3) + 1,$$

бундан

$$p = x(4x^2 + 6x + 3). \quad p - \text{туб сонлигидан } x = 1 \text{ ва } p = 13, \text{ шунинг учун}$$
$$2p + 1 = 27 = 3^3 - \text{ягона сон.}$$

43. Ечиш. Олдин натурал сонлар қаторида 5 дан бошлаб урта кетма-кет келган ток сонлар барчаси туб бўла олмаслигини кўрсатамиз. Фараз қиламиз, ҳар бир туб сонлар жуфти ораларида битта мураккаб сон жойлашган (эгизак сонлар). Туб сонларни бундай жойлашиши етарлича зич бўлади. У ҳолда туб сонларни $6n-1$ ва $6n+1$ шаклида тасвирлаш мумкин ва уларнинг рақамлари $2n-1$ ва $2n$ бўлади.

$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ деб $6n-1=5, 11, 17, 23, 29, 35, \dots$ (бу сонлар рақамлари $2n-1=1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$) ва $6n+1=7, 13, 19, 25, 31, 37, \dots$ (бу сонлар рақамлари $2n=2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$). Бундан кўринадики, ҳар бир сон ўзининг рақами учланганидан катта: $6n-1 > 3(2n-1)$ ва $(6n+1) > 3 \cdot 2n$.

44. Кўрсатма.

Натурал сонлар қаторидаги сонларни $30k, 30k \pm 1, 30k \pm 2, \dots, 30k \pm 15$ шаклида тасвирлаймиз. Бу сонлардан $p = 30k \pm 1; 30k \pm 7; 30k \pm 11, 30k \pm 13$ лар туб сонлар бўлиши мумкин.

45. Ечиш. Агар $p-1$ ва $p+1$ сонлар орасига 3 дан катта p сон жойлаштирилса, $(p-1)p(p+1)$ кўпайтма 3 га бўлинади. $p > 3$ бўлганлиги сабабли $(p-1)(p+1)$ кўпайтма 3 га бўлиниши керак. Бошқа томондан $(p-1)(p+1)$ 8 га бўлинади, чунки агар $p-1$ га бўлинса, $p+1$ — ҳеч бўлмаса 4 га бўлиниши керак. $p^2 - q^2 = (p-1)(p+1) - (q-1)(q+1)$, бу ерда $(p-1)(p+1)$ ва $(q-1)(q+1)$ лар ҳар бири 3 га ва 8 га бўлинади. Демак, $p^2 - q^2$ 24 га бўлинади.

46. а) Ечиш. Агар $p=2$ бўлса, у ҳолда $p+10$ — мураккаб сон. Агар $p=2q+1 (q=1, 2, \dots)$ бўлса, у ҳолда $p+5$ — мураккаб сон.

47. Ечиш. $p=2k+1$ кўринишдаги ток сон. $p=mn$ ($m>n$) кўринишда кўпайтувчиларга ажралсин. У ҳолда, шундай x ва y сонлар топиладики, булар учун куйидаги система ўринли:

$$\begin{cases} x+y=m \\ x-y=n \end{cases}, \text{ бундан } x=\frac{m+n}{2}, y=\frac{m-n}{2}. \text{ Демак, мураккаб } p \text{ учун:}$$

$$p=mn=(x+y)(x-y)=x^2-y^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

Агар p туб бўлса, уни $p=(2k+1)\cdot 1$ ягона шаклда ёзиш мумкин. Бу ҳолда

$$m=2k+1=p, n=1, \text{ демак, } p=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Шундай қилиб, $p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ кўринишда тасвирланиш

ягона бўлса, у ҳолда p — туб сон; агар $p=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ кўринишда тасвирланган бўлса, p — мураккаб сон.

48. 47-масала шартидан ток сонларни $(x+y)\cdot(x-y)$ кўринишдаги кўпайтувчиларга ажратишнинг куйидаги усули келиб чиқади: $p=x^2-y^2$ тенгликдан $p+y^2=x^2$, яъни x ни топиш учун p га шундай y ($y\leq\frac{p-1}{2}$) натурал сон квадрaтини қўйиш керакки, натижада $p+y^2$ йиғинди квадратдан (x^2) иборат бўлсин. Шу усулда y ва x ни топиб, $p=(x+y)(x-y)=mn$.

а) Квадратлар жадвалидан фойдаланиб, 6643 сонига яқин бўлган сон $6724=82^2$ оламиз. $6724-6643=81=9^2$. Демак, $6643=82^2-9^2=(82+9)(82-9)=91\cdot 73=7\cdot 13\cdot 73$;

б) $1769=61\cdot 29$; в) $3551=67\cdot 53$; д) $6497=89\cdot 73$.

49. Ечиш. $N=a^2+b^2=c^2+d^2$ ва a ва b , c ва d — сонларнинг жуфт тоқлиги ҳар хил бўлсин. a ва c , b ва d — ларнинг жуфт тоқлиги бир хил деб оламиз.

$(a-c)(a+c)=(d-b)(d+b)$ тенгликдан, $\frac{a-c}{d-b}+\frac{d+b}{a+c}=\frac{u}{v}$ келиб чиқади.

Бунда биринчи касрни t га ва иккинчи касрни s га қискартирилган деб олсак, яъни

$a - c = tu, d + b = cu, ak = cv, d - b = tv$. У ҳолда, $a = \frac{tu + sv}{2}, b = \frac{su - tv}{2}$ бўлади.

Натижада, $N = a^2 + b^2 = \frac{1}{4}[(tu + sv)^2 + (sn - tv)^2] = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)(t^2 + s^2)$

50. Ечиш. $972^2 + 235^2 = 1000009 = 1000^2 + 3^2$ дан 1000009 сон икки усулда икки сон квадратлари йиғиндиси кўринишда ёзилиши келиб чиқади, демак, бу сон мураккаб ва $293 \cdot 3413$ га тенг.

51. Ечиш. Қуйидаги ёйилмани кўрамиз:

$$a^{10} + a^5 + 1 = \frac{a^{15} - 1}{a^5 - 1} = \frac{(a^3 - 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)}{(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)} = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1);$$

Бу ерда $a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1$ кўпхад $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ кўпхадга кўпхадларни бўлиш қондасига асосан бўлинган. Натижада,

$$3^{10} + 3^5 + 1 = (3^2 + 3 + 1)(3^8 - 3^7 + 3^5 - 3^4 + 3^3 - 3 + 1) = 13 \cdot 4561.$$

52. Ечиш. Агар q – тоқ бўлса, $1 + 2k$ сон $1 + 2 = 3$ га каррали. Агар k – жуфт бўлса, у $k = 2n$ га ёки $k = 2nm$ ($m \geq 1$ ва тоқ сон), ёки $k = 0$. Лекин $1 + 2^k = 1 + 2^{2^n m} = (1 + 2^{2^n})^m$; $1 + 2^{2^n}$ га каррали (агар $k = 0$ бўлса, 2 га каррали). $1 + 2^{2^n}$ сон мураккаб сон бўлади. Демак, барча $k = 2^n$ дан фарқли k лар учун $1 + 2^{2^n}$ сон мураккаб сон бўлади.

53. Ечиш. $(\alpha, \beta) = 1, (\alpha, \beta) = 2^n$ шартларни қаноатлантирувчи барча α ва β лар учун $a^\alpha + b^\beta$ мураккаб сон эканлигини кўрсатамиз. $(\alpha, \beta) = 1$ – бўлиб, тоқ бўлса, у ҳолда $\alpha = dm, \beta = dk, (m, k) = 1$ ва $a^\alpha + b^\beta = (a^m)^d + (b^k)^d$ га каррали. Агар $(\alpha, \beta) = 2^n d$ жуфт сон бўлиб, $d > 1$ – тоқ бўлса, у ҳолда $\alpha = 2^n dm, \beta = 2^n dk$ бундан, $a^\alpha + b^\beta = (a^{2^n m})^d + (b^{2^n k})^d$ сон $(a^{2^n m})^d + (b^{2^n k})^d$ га каррали. Демак, $(\alpha, \beta) = 1$ ва $(\alpha, \beta) = 2^n$ шартларни қаноатлантирувчи α ва β лардан ташқари барча ҳолларда $a^\alpha + b^\beta$ сон мураккаб бўлади. Тескари тасдиқ нотўғри, масалан $2^4 + 3^2 = 25$ – мураккаб сон.

54. Ечиш. n – мураккаб сон бўлсин, $n = ab$ ($a > 1, b > 1$), у ҳолда $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$ – мураккаб сон. Тескари тасдиқ нотўғри: $2p - 1$ ҳамма вақт туб эмас, масалан $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$; $2^{23} - 1 = 47 \cdot 178421$.

$$55. a) \frac{271828}{10^5} = (2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 10, 1, 1, 2);$$

$$b) \frac{103993}{33102} = (3, 7, 15, 1, 292);$$

$$c) \frac{99}{170} = (0, 1, 1, 2, 1, 1, 6, 2);$$

$$d) \frac{355}{113} = (3, 7, 16);$$

$$56. a) \frac{247}{47} = (3, 2, 1, 2, 2); \text{ муносиб касрлари: } \frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}, \frac{15}{4}, \frac{131}{35}, \frac{277}{74};$$

$$b) \frac{77}{187} = (0, 2, 2, 3); \text{ муносиб касрлари: } \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{12};$$

$$c) \frac{333}{100} = (3, 3, 3, 3); \text{ муносиб касрлари: } \frac{3}{1}, \frac{10}{3}, \frac{333}{100};$$

$$d) \frac{103993}{3302} = (3, 7, 15, 1, 292); \text{ муносиб касрлари: } \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{277}{74};$$

$$58. a) \frac{29}{37} \text{ сонни узлуксиз касрга ёямиз: } a) \frac{29}{37} = (0, 1, 3, 1, 1, 2);$$

Жадвал ёрдамида

K		0	1	2	3	4	5	6
q_k		0	1	3	1	1	1	2
P_k	1	0	1	3	4	7	11	29
Q_k	0	1	1	4	5	9	14	37

касрларни топамиз.

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{7}{9}, \quad \frac{1}{Q_4 Q_3} = \frac{1}{9 \cdot 14} = \frac{1}{126} = 0,008 < 0,01; \quad \frac{7}{9} = 0,78 \text{ ортиғи билан.}$$

$$59. a) \frac{43}{19}; b) \frac{73}{43}; c) \frac{2633}{1810}; d) \frac{1421}{552}; e) \frac{157}{225}; f) 1 - \frac{159}{215}; g) \frac{893}{11953}.$$

$$60. a) x=2; b) x=2.$$

5 - §

$$61. a) -3; b) 11; c) 1; d) 2;$$

62. Ечиш.

$x = [x] + \theta_1$ ва $y = [y] + \theta_2$ бўлсин, бу ерда $0 \leq \theta_1 < 1$, $0 \leq \theta_2 < 1$ у ҳолда $x + y = [x] + [y] + (\theta_1 + \theta_2)$. Агар $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 1$, $[x + y] = [x] + [y]$;

агар $1 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2$ бўлса, $[x + y] > [x] + [y]$ бўлади. Натижаларни бирлаштирсак,

$[x + y] \geq [x] + [y]$ ни ҳосил қиламиз.

63. Ечиш. $[x]$ ни таърифига кўра, масала шартига асосан $ax = m + \theta$, бу ерда $0 \leq \theta < 1$ ва $a \neq 0$, бу тенгликдан $x = \frac{m+\theta}{a}$ ни ҳосил қиламиз.

64. Ечиш. $12,4m = 86 + \theta$, бу ерда $0 \leq \theta < 1$. Тенгликни 5 га кўпайтирамиз: $62m = 430 + 5\theta$, бундан $m = \frac{430+5\theta}{62} = 6 + \frac{5\theta}{62}$, $0 \leq \theta < 1$ дан $0 \leq 5\theta < 5$ ва m бутун мусбат сон бўлиши учун $t = \frac{5\theta}{62}$ бутун бўлиши лозим. $t = 1$ деб олсак, $\theta = \frac{4}{5}$ ва $m = 7$ ни ҳосил қиламиз.

65. Ечиш. $\left[\frac{p}{4} \right]_{p=4n+1} = n = \frac{p-1}{4}$; $\left[\frac{p}{4} \right]_{p=4n+3} = n = \frac{p-3}{4}$;

66. Ечиш.

$a = mq + 1, 0 \leq r < m$, ёки $\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m}, 0 \leq \frac{r}{m} < 1$, бу ердан $q = \left[\frac{a}{m} \right]$; ва $\left[\frac{a}{m} \right] = \frac{a-r}{m}$.

67. $\left[\frac{m}{2} \right]_{m=2k+1} = \left[k + \frac{1}{2} \right] = k = \frac{m-1}{2}$.

68. а) Ечиш. $2 \leq x^2 < 3$ ёки $\sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3}$. бундан $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$; ва $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ ни оламиз;

б) Ечиш. $x + 1$ нинг қийматлари ва бундан x нинг қийматлари ҳам бутун бўлиши зарур. Бу қийматларда $3x^2 - x$ ҳам бутун бўлади ва берилган тенглама $3x^2 - x = x + 1$ га тенг кучли бўлади, бундан $x = 1$ ни оламиз.

с) Ечиш. Берилган тенгламани $0 \leq x < 4$ қийматлар қаноатлантиради, бу

қийматларда $\frac{3}{4}x$ бутун қийматларни қабул қилади, яъни $x=0$; $1\frac{1}{3}$; $2\frac{2}{3}$.

д) $x=0$; 1.

69. $\left[\frac{10^7}{786} \right] - \left[\frac{10^6}{786} \right] = 11450$.

70. Ечиш. $999 - \left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{999}{7} \right] + \left[\frac{\left[\frac{999}{5} \right]}{7} \right] = 686$.

71. Ечиш. $100 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 33.$

72. 98.

73. 488.

74. $B(2311; 5, 7, 13, 17) = 1378;$

75. $B(12317; 3, 5, 7) = 5634.$

76. 393.

77. $\left\lfloor \frac{p^n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{p^n}{p^{n-1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^n}{p^n} \right\rfloor = p^{n-1} + \dots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$

78.

a) $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7;$

b) $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13;$

c) $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19;$

d) $25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23;$

e) $30! = 2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29;$

79. $\frac{20!}{10!10!} = 2^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$

80. Ечиш. ,

$N = \frac{1000!}{100!7^a},$ бу ерда $\alpha \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{49} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{301} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{49} \right\rfloor + \alpha$ шартни

каноатлантиради, бундан $\alpha = 148$ келиб чиқади.

81. Ечиш. $(2m+1)!! = \frac{(2m+1)!}{(2m)!!} = \frac{(2m+1)!}{m!2^m}.$ Агар $p > 2$ бўлса, у ҳолда

$\sum_{i=1}^{2m+1} \left\lfloor \frac{2m+1}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor,$ бу ерда $p^k \leq 2m+1 < p^{k+1}.$

82. Ечиш. Ихтиёрий бутун $x = k$ ($a \leq k \leq b$) абсцисса учун $[\varphi(x)]+1$ бутун ординатали ва берилган трапециянинг ичида ва чегарасида жойлашади. Демак, нукталар сони $\sum_{k=a}^b ([f(k)]+1)$ га тенг.

83. 126.

84. Ечиш. Шартга асосан, $a = 4q + 1$ ёки $a = 4q + 3$ га тенг. Биринчи ҳолда

$\left\lfloor \frac{a}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{4} \right\rfloor = q + 2q + 3q = 6q = \frac{3(a-1)}{2}.$ Иккинчи ҳол ҳам худди

шундай текширилади.

85. Ечиш. $a = mq + r$ бўлсин, бу ерда $0 \leq r < m$ ва $(r, m) = 1$. $(r, m) = 1$

шарт барча $m \leq 2$ лар учун бажарилишидан $r = 1$ келиб чиқади. Демак,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left[i \left(q + \frac{1}{m} \right) \right] = q \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{q-1}{m} \cdot \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(q-1)(m-1)}{2}.$$

86. Ечиш. $x = [x] + \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ бўлганлигидан $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = 2[x] + \left[\alpha + \frac{1}{2} \right]$, бундан

$$\frac{1}{2} \leq \alpha + \frac{1}{2} < 1, \text{ са } \left[\alpha + \frac{1}{2} \right] = 0 \text{ га ёки } 1 \text{ га тенг. } 2x = 2[x] + 2\alpha \text{ ва } [2x] = 2[x] + [2\alpha] \text{ бўлганлигидан } [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [2\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{2} \right].$$

$$\text{Бу ерда } \left[\alpha + \frac{1}{2} \right] = [2\alpha] = 0, \text{ ёки } \left[\alpha + \frac{1}{2} \right] = [2\alpha] = 1.$$

87. Ечиш. Тенгламанинг ҳар бир қисмини y деб белгилаб,

$y \leq \frac{x}{m} < \frac{x}{m-1} < y+1$ ни оламир, $my \leq x < (m-1)(y+1)$. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар мавжуд бўлиши учун $my < (m-1)(y+1)$ ёки $y < m - 1$ шартлар бажарилиши зарур ва етарли. Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади:

$my \leq x < (m-1)(y+1)$, бу ерда $x - y < m - 1$ шартни қаноатлантирувчи бутун сон.

88. Ечиш. $ax^2 + bx + c$ функция ва шу билан биргаликда $[ax^2 + bx + c]$ функция $a > 0$ да қуйидан, $a < 0$ да эса юқоридан чегараланган.

Иккала ҳолда ҳам $[ax^2 + bx + c]$ функция чегараси $\left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right]$ сонга тенг. Шу сабабли $a > 0$ да берилган тенглама ечимга эга бўлади, агар, $\left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right] \leq d$ шарт бажарилса ва фақат шартда, агар $a < 0$ бўлса, бу шарт қуйидагича: $\left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right] \geq 1$.

89. а) 0, 6; б) $\frac{2}{3}$; в) 0; д) $\frac{1}{2}$.

90. а) 624; б) 2418; 30; в) 1440; 8; д) 1960; 12; е) 2808; 24; ф) 3844; 30.

91. а) 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360;

б) 1, 5, 25, 125, 3, 15, 75, 375.

92. Ечиш. $S(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1 = 2 \cdot 2^\alpha - 1$, демак, $m = 2^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

93. Ечиш. Агар p сон m ёки n нинг каноник ёйилмаларининг бирортасига α кўрсаткич кирса, у ҳолда $\tau(mn)$, ва $\tau(m) \cdot \tau(n)$ да $\alpha + 1$ кўпайтма мавжуд. Агар m ва n нинг каноник ёйилмаларида мос равишда p^α ва p^β лар бўлса, у ҳолда mn нинг каноник ёйилмасида $p^{\alpha+\beta}$ мавжуд ва $\tau(mn)$ даги $\alpha + \beta + 1$ кўпайтмага $\tau(m) \cdot \tau(n)$ да катнашувчи $(\alpha + \beta)(\beta + 1) > \alpha + \beta + 1$ кўпайтма мос келади. Демак, агар $(m, n) > 1$, у ҳолда $\tau(m) \tau(n) > \tau(mn)$. Агар r m ёки n нинг каноник ёйилмасига катнашса, юқорида қайд қилинганидек, $S(x)$ ни ҳисоблаш мумкин.

Иккинчи ҳолда $S(mn)$ га кирувчи $\frac{p^{\alpha+\beta+1}}{p-1}$, кўпайтмага $S(m) S(n)$ га кирувчи $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{p^{\beta+1}-1}{p-1} = \frac{p^{\alpha+\beta+2} - p^{\alpha+1} - p^{\beta+1} + 1}{(p-1)^2} + \frac{p^{\alpha+\beta+1}}{(p-1)^2}$, кўпайтма мос келади.

$\frac{p^{\alpha+\beta+2} - p^{\beta+1} + 1}{p-1} - (p^{\alpha+\beta-1} - 1) = \frac{p(p^\alpha - 1)(p^\beta - 1)}{p-1}$. тенгликни ўринлилигини

осонгина кўрсатиш мумкин, бундан $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{p^{\beta+1}-1}{p-1} > \frac{p^{\alpha+\beta+1}-1}{p-1}$.

Демак, агар $(m, n) > 1$ бўлса, $S(m) S(n) > S(mn)$ бўлади.

94. $\tau(m) = 20$, $S(m) = 5208$, $\delta(m) = 196810$.

95. Ечиш. Ўзининг барча бўлувчилари кўпайтмасига тенг бўлган m натурал сон $m = \sqrt{m^{\tau(m)}}$, тенглама ёрдамида аниқланади, яъни $\tau(m) = 2$ бундан масала ечими келиб чиқади.

96. $S_p(a) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$. Кўрсатма. Математик индукция усулидан фойдаланинг.

97. а) $S_2(12) = 120$; б) $S_2(18) = 455$; в) $S_2(16) = 341$.

99. Ечиш. $2^\alpha(2^{\alpha+1}-1) = m$ ва $2^{\alpha+1}-1 = p$, бўлсин, у ҳолда $S(m) = S(2^\alpha \cdot p) = (2^{\alpha+1}-1)(p+1) = (2^{\alpha+1}-1)2^{\alpha+1} = 2m$.

100. Ечиш. 99-масалага асосан, ҳар қандай мукамал сон $2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$, кўринишда бўлишини исботлаш керак, бу ерда $2^{\alpha+1}-1$ – туб сон. $m = 2^\alpha q$ бўлсин, $(q, 2) = 1$ ва $S(m) = 2m$, яъни $(2^{\alpha+1}-1) S(q) = 2^{\alpha+1} \cdot q$,

бундан $S(q) = 2^{\alpha+1} \cdot k$ ва $q = (2^{\alpha+1} - 1)k$, $k \in N$. k ва $(2^{\alpha+1} - 1)k$ сонлар q нинг бўлувчилари бўлиб улар йиғиндиси $k \cdot 2^{\alpha+1} = S(q)$ га тенг, бундан q бошқа натурал бўлувчиларга эга эмас. Демак, $q = (2^{\alpha+1} - 1)k$ – туб сон, бундан $k = 1$ ва $2^{\alpha+1} - 1$ – туб сондир.

101. Ечиш. $S(m) = 3m$ тенглама $m = 2^\alpha \cdot p_1 p_2$ учун $(2^{\alpha+1} - 1)(1 + p_1)(1 + p_2) = 3 \cdot 2^\alpha p_1 p_2$ кўринишга эга. Агар $\alpha = 0$ бўлса $(1 + p_1)(1 + p_2) = 3p_1 p_2$ ёки $1 + p_1 + p_2 = 3p_1 p_2$, бундан p_1 ва p_2 жуфт сон бўлиши керак, бу эса ўринли эмас, чунки $1 + p_1$ ва $1 + p_2$ жуфт сонлар. Демак, $\alpha \neq 0$. Агар $\alpha = 1$ $(1 + p_1)(1 + p_2) = 2p_1 p_2$ ёки $1 + p_1 + p_2 = p_1 p_2$, яъни $1 + p_1 = p_2(p_1 - 1)$; $p_1 - 1 = 2n$ бўлганлигидан $n + 1 = p_2 n$, бундан $n = 1$ ва $p_2 = 2$, бу эса ўринли эмас. Демак, $\alpha \neq 1$. Агар $\alpha = 2$ бўлса, $7(1 + p_1)(1 + p_2) = 12 p_1 p_2$ ёки $7 + 7(p_1 + p_2) = 5p_1 p_2$, бундан $p_1 = 7$ (ёки $p_2 = 7$) ва $p_2 = 2$ (ёки $p_1 = 2$), бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, $\alpha \neq 1$. $\alpha = 3$ бўлганда $5(1 + p_1)(1 + p_2) = 7 p_1 p_2$ ёки $5 + 5(p_1 + p_2) = 3 p_1 p_2$, бундан $p_1 = 5$ ва $p_2 = 3$. Шундай қилиб, масала шартини қаноатлантирувчи энг кичик натурал сон $m = 23 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ бўлади.

102. Ечиш. Шарт бўйича, $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ ва $(1 + p_1)(1 + p_2) = 6$, бўлганлигидан $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ ва $m = p_1 p_2^2$. Бундан ташқари, $S(m) = 28$, яъни $(1 + p_1)(p_2^2 + p_2 + 1) = 28$, бундан $1 + p_1 = 4$ ва $p_2^2 + p_2 + 1 = 7$, яъни $p_1 = 3$, $p_2 = 2$. Демак, $m = 3 \cdot 2^2 = 12$.

103. Ечиш. Масала шартига кўра, $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) = 15$, бундан $2\alpha_1 + 1 = 3$ ва $2\alpha_2 + 1 = 5$, яъни $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Демак, $\tau(m^2) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) = 4 \cdot 7 = 28$.

104. Ечиш. Шарт бўйича $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 81$, икки ҳол ўринли бўлиши мумкин: $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 3 \cdot 27$ ва $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 9 \cdot 9$, яъни $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 13$ ва $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$, булардан $\tau(m^3) = 160$ ёки $\tau(m^3) = 169$.

105. Кўрсатма. $d_1 = \frac{N}{d_n}, d_2 = \frac{N}{d_{n-1}}, \dots$ дан фойдаланинг.

108. $N = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$.

109. Ечиш. $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ бўлсин, у ҳолда $\tau(m) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k)$. Агар $\tau(m) \equiv 1 \pmod{2}$ бўлса, у ҳолда $1 + \alpha_i \equiv 1 \pmod{2}$ бўлади, бундан $\alpha_i \equiv 0 \pmod{2}$, бу эса, m – бутун соннинг квадрати бўлишини кўрсатади. Тескаридан, агар

m – бутун соннинг квадрати бўлса, у ҳолда $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ ва бундан $\tau(m) \equiv 1 \pmod{2}$ ни ҳосил қиламиз.

110. а) 2; б) 4; с) 4; д) 5; е) 9; ф) 15; г) 46; х) 95.

111. а) ≈ 13 ; 13%; б) ≈ 22 ; 12%; с) ≈ 80 ; 16%.

113. Ечиш. $\pi(p) < p$ тенгсизликдаги $-p < -\pi(p)$, $p\pi(p) - p < (p-1)\pi(p)$ ва $\frac{\pi(p)-1}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ ни ҳосил қиламиз. $\pi(p)-1 = \pi(p-1)$ дан $\frac{\pi(p-1)}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ келиб чиқади. $\pi(m-1) = \pi(m)$ тенгсизликдан $\frac{\pi(m)}{m} < \frac{\pi(m-1)}{m-1}$ ни оламиз.

114. а) 200; б) 192; с) 432; д) 320; е) 400; ф) 1152.

115. а) 288; б) 24; с) 480; д) 388800.

116. 88.

117. Ечиш. Масала шарт бўйича, $a = 3^\alpha 5^\beta 7^\gamma$. Бу соннинг Эйлер функцияси $\varphi(a) = 3^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 5^{\beta-1} 4 \cdot 7^{\gamma-1} \cdot 6 = 2^4 3^{\alpha-1} 5^{\beta-1} 7^{\gamma-1}$. Шартга кўра, $\varphi(a) = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, демак $2^4 \cdot 3^\alpha \cdot 5^{\beta-1} \cdot 7^{\gamma-1} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, бундан $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=1$ ва $a=3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 7875$.

118. Ечиш. Шарт бўйича: $\varphi(a) = \varphi(pq) = (p-1)(q-1) = 120$ ва $p-q = 2$. Натижада $\begin{cases} (p-1)(q-1)=120 \\ p-q=2 \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз. Унинг ечими $p=13$, $q=11$. Демак, $a=pq=143$.

119. Ечиш. Шарт бўйича $\varphi(a) = \varphi(p_2 q_2) = p(p-1)q(q-1)$ ва $\varphi(a) = 11424 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$. Демак, $p(p-1)q(q-1) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ ёки $p(p-1)q(q-1) = 17 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 6$ бундан $p = 17$, $q = 7$ ва $a = 17^2 \cdot 7^2 = 14161$.

120. Ечиш. Шарт бўйича,

$\varphi(a) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\dots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)$ ва $\varphi(a) = 462000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$.

Демак, $\varphi(a) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\dots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1) = 24 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 7 \cdot 11$

Ўнг томондаги кўпайтувчиларни чап томондаги каби кўринишда кўпайтувчиларнинг ўрнини алмаштирамиз:

$\varphi(a) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\dots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1) = (11 \cdot 10)(7 \cdot 6)(5^2 \cdot 4)$, бундан $p_1 = 11$ ва $\alpha_1 = 2$; $p_2 = 7$ ва $\alpha_2 = 5$; $p_3 = 2$ ва $\alpha_3 = 3$; $a = 11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^3 = 741125$.

121. Ечиш. $(a, m) = 1$ шарт бажарилганда $(a, m-a) = 1$ бажарилишини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $(a, m -$

$a) = d > 1$, у ҳолда $a = dk$, $m - a = dt$, бундан $m = d(t+k)$ ва $(a, m) = d > 1$, бу эса $(a, m) = 1$ шартга зиддир. m дан кичик ва у билан туб бўлган сонларни тартиб билан ёзамиз:

$1, a_1, a_2, \dots, m - a_2, m - a_1, m - 1$; бу қаторда $\varphi(m)$ та сон бор. Ҳар қандай a_i сонга $m - a_i$ сон мос келади; улар йиғиндиси $a_i + (m - a_i) = m$, бу жуфтликлар сони $\frac{1}{2}\varphi(m)$, демак, $S = \frac{1}{2}m\varphi(m)$

122. а) 24; б) 54; с) 37500.

124. Биринчи ҳол $(a, 2) = 1$ бўлганда ўринли, иккинчи ҳол эса $(a, 2) = 2$

бўлганда ўринли бўлади.

125. а) Ечиш. $\varphi(4n+2) = \varphi(2) \varphi(2n+1) = \varphi(2n+1)$;

б) Ечиш. Агар $(n, 2) = 1$ бўлса, у ҳолда $\varphi(4n) = \varphi(4) \varphi(n) = 2 \varphi(n)$.

Агар

$n=2^a \cdot k$ бўлиб, $(k, 2) = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\varphi(4n) = \varphi(2^{a+2} \cdot k) = 2^{a+1} \cdot \varphi(k) = 2 \cdot \varphi(2^{a+1} \cdot k) = 2 \varphi(2n).$$

126. а) $x = 3$; б) $x = 3$; с) тенглама $p > 2$ да ечимга эга эмас. $p = 2$ да ихтиёрий натурал сонлар учун ўринли.

127. $\varphi(b)$.

128. а) 4 каср: $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$. с) 12 каср.

129. $\varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(n)$.

130. а) 9; б) 31; с) 71.

131. Ечиш. Шарт бўйича $(300, x) = 20$ ва барча x лар 300 дан кичик, 20 га қискартиргандан сўнг $(15, y) = 1$, бу ерда барча y лар 15 дан кичик ва 15 билан ўзаро туб; улар сони $\varphi(15) = 8$. Бу $y = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ сонлар ва бундан $x = 20, 40, 80, 140, 160, 220, 260, 280$.

132. $\varphi(45) = 24$.

133. $\varphi(36) = 12$.

134. Кўрсатма. $\varphi(a)$ нинг жуфтлиги 121 - масала ёрдамида келиб чиқади.

135. Ечиш. Агар $(m, 2) = 1$ бўлса, у ҳолда $\varphi(m) = \varphi(2m)$.

136. Ечиш. m ва n ларнинг туб бўлувчиси p учун $\varphi(mn)$ сонда $1 - \frac{1}{p}$, кўпайтувчи бор, $\varphi(m) \varphi(n)$ – сонда эса $(1 - \frac{1}{p})^2$, кўпайтувчи бор.

$$1 - \frac{1}{p} < 1,$$

бўлганлиги сабабли $\varphi(m) \varphi(n) < \varphi(mn)$. Хусусий ҳолда $\varphi^2(m) \leq \varphi(m^2)$, тенглик $m = 1$ бўлганда бажарилади.

138. Ечиш. $\varphi(mn) = \varphi(\delta\mu) = \varphi(\delta) \varphi(\mu) \cdot \frac{\delta}{\mu} = \delta \varphi(\mu)$.

139. p^a .

140. m .

142. а) Ечиш. Гаусс формуласидан $x = 2^y 3^z 5^y$ ($y \geq 0, z = 0; 1$ ва $u = 0; 1$) келиб чиқади. $x = 2^y; 2^y \cdot 3; 2^y \cdot 5; 2^y \cdot 15; 3; 5; 15$ имкониятларни текшириши $x = 2^{a+1}; 2^a \cdot 3; 2^{a-1} \cdot 5; 2^{a-2} \cdot 15$ ($a \geq 2$); 15 ($a = 3$)ларни беради;

б) $p \neq 3$ да ечим йўқ. $r = 3$ да тенгламаларни ихтиёрий бутун $x \geq 2$ кийматлар каноатлантиради.

143. а) ечими йўқ.

II. БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

158. Ечилиши. Агар $a = mq + r$ бўлса, u ҳолда $a - r = mq$ ва $a \equiv r \pmod{m}$.

159. а) $x = 3q$; в) $x = 1 + 2q$.

160. $2r$ нинг бўлувчилари.

161. 8 нинг бўлувчилари.

162. Ечилиши. Агар n тоқ сон бўлса, u ҳолда $n-1$ ва $n+1$ - кетма-кет келадиган жуфт сонлар. Агар улардан бири 2 га қаррали бўлса, u ҳолда иккинчиси камида 4 га қаррали, шунинг учун $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$, ёки $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

163. Ечилиши. Берилган таққосламанинг иккала томонини 4 га кўпайтирамиз:

$$400a + 40b + 4c \equiv 0 \pmod{21}, \text{ лекин } 400a \equiv a \pmod{21}, 40b \equiv -2 \pmod{21},$$

$$4c \equiv 4 \pmod{21}.$$

Охириги учта таққосламани ҳадма-ҳад қўшамиз:

$400a + 40b + 4c \equiv a - 2b + 4c \pmod{21}$. Бу ердан $a - 2b + 4c \equiv 0 \pmod{21}$ ни ҳосил қиламиз.

165. Ечилиши. $11 \cdot 31 - 1 = 340 = 5 \cdot 68$ ва $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ бўлганлиги учун охирги таққосламанинг иккала томонини 68-даражага кўтариб, $(25)^{68} = 211 \cdot 31 - 1 \equiv 1 \pmod{11}$ ни ҳосил қиламиз. Сўнгра $25 \equiv 1 \pmod{31}$ дан $(2^5)^{68} = 2^{11 \cdot 31 - 1} \equiv 1 \pmod{31}$ ни топамиз. Бу ердан $2^{11 \cdot 31 - 1} \equiv 1 \pmod{11 \cdot 31}$. Бу таққосламани иккала томонини 2 га кўпайтириб, изланаётган таққосламани топамиз.

166. Ечилиши. $x = 3n + 1$ бўлганда бўлинувчи $1 + 3 \cdot 27^n + 9 \cdot 729^n$ га тенг бўлади. Берилган модул бўйича $27^n = 729^n \equiv 1$, шунинг учун $1 + 3 \cdot 27^n + 9 \cdot 729^n \equiv 1 + 3 + 9 = 13$.

169. 4.

170. Ечилиши. Шартга асосан, $a = b + pnq$ ($q=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Бу тенгликнинг иккала томонини r - даражага кўтариб, $a^p = b^p + p^n + 1 \cdot \alpha$ ($\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ни ҳосил қиламиз.

172. Кўрсатма. $a^4 \cdot 10^4 + a_3 a_2 \cdot 10^2 + a_1 a_0 \equiv 0 \pmod{33}$ таққосламанинг чап томонидан модулга қаррали бўлган $999a_4 + 99a_3 a_2$ сонни айириш керак.

173. Ечилиши. а) $9^{16} \equiv 1 \pmod{100}$ бўлганлиги учун $9^{10q+r} \equiv 9^r \pmod{100}$.

$9^9 \equiv 9 \pmod{10}$ бўлганлиги учун $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv 89 \pmod{100}$. Изланаётган рақамлар 8 ва 9;

б) $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ бўлганлиги учун $7^{100} \equiv 1 \pmod{100}$, бу ердан $7^{9^{9^9}} \equiv 7^{100q+89} \equiv 7^{89} \pmod{100}$. $7^{88} \equiv 1 \pmod{100}$ бўлганлиги учун $7^{89} \equiv 7 \pmod{100}$. Изланаётган рақамлар 0 ва 7.

174. $x \equiv 0; 1; 2; \dots; 9 \pmod{10}$.

176. а) $x \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$; б) $x \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}$; в) $x \equiv 5 \pmod{10}$;

д) $x \equiv 0 \pmod{10}$.

177. а) $m = 9$ да чегирмаларнинг тўла системалари:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,

4. Чегирмаларнинг келтирилган системалари:

1, 2, 4, 5, 7, 8; -8, -7, -5, -4, -2, -1; -4, -2, -1, 1, 2, 4.

б) $m = 8$ да чегирмаларнинг тўла системалари:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
ёки -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Чегирмаларнинг келтирилган системалари: 1, 3, 5, 7; -7, -5, -3, -1; -3, -1, 1, 3.

178. Ечилиши. Берилган синф сонларининг умумий кўринишидан қуйдагиларни топамиз:

$$25 = 8 \cdot 3 + 1; -20 = 8(-3) + 4; 16 = 8 \cdot 2 + 0; 46 = 8 \cdot 5 + 6; -21 = 8(-3) + 3;$$

$18 = 8 \cdot 2 + 2; 37 = 8 \cdot 4 + 5; -17 = 8(-3) + 7$. Ҳосил қилинган қолдиқларнинг ҳаммаси ҳар хил ва улар манфий бўлмаган энг кичик чегирмаларнинг тўла системасини ташкил қилади: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, демак, берилган сонлар ҳам чегирмаларнинг тўла системасини ташкил қилади.

184. Ечилиши. Ҳар бир сонни 6 га бўлиб, 0, 2, 1, 1, 4, 5, 2 қолдиқларни ҳосил қиламиз. Топилган манфий бўлмаган чегирмалардан (нолдан ташқари) 6 ни айириб, 0, -4, -5, -5, -2, -1, -4 – абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик мусбат бўлмаган чегирмаларни топамиз. Абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар 0, 2, 1, 1, -2, -1, 2 лардан иборат.

185. а) $x_1 \equiv 1 \pmod{3}$, $x_2 \equiv 2 \pmod{3}$;

б) $x_1 \equiv 1 \pmod{5}$, $x_2 \equiv 2 \pmod{5}$;

с) $x \equiv 2 \pmod{5}$;

д) ечимлари йўқ;

е) $x \equiv 3 \pmod{5}$;

ф) $x_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $x_2 \equiv 3 \pmod{4}$;

г) $x_1 \equiv 1 \pmod{5}$, $x_2 \equiv 3 \pmod{5}$.

186. а) $x \equiv 3 \pmod{7}$; б) $x \equiv 2 \pmod{5}$; с) $x \equiv -3 \pmod{11}$;

д) $x \equiv -3 \pmod{7}$; е) $x \equiv -1 \pmod{7}$; ф) $x \equiv -4 \pmod{15}$.

189. а) $x \equiv 11 \pmod{15}$; б) $x \equiv 2 \pmod{8}$;

с) $x \equiv 4 \pmod{13}$; д) $x \equiv 20 \pmod{37}$;

е) $x \equiv 7 \pmod{25}$; ф) $x \equiv 5 \pmod{11}$; г) $x \equiv 5 \pmod{11}$; ҳ) $x \equiv 11 \pmod{24}$.

194. Ечилиши. $x = u + \alpha$ алмаштиришни киритиб,

$(u + \alpha)^n + a_1(u + \alpha^{n-1} + \dots + a_n) \equiv 0 \pmod{m}$ ни ҳосил қиламиз. Бу ердан кавсларни очиб чиқиб, қайтадан гуруҳлашдан сўнг

$u^n + (na + a_1)u^{n-1} + \dots + (a^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_n) \equiv 0 \pmod{m}$ ни ҳосил қиламиз. a ни шундай танлаймизки, $na + a_1 \equiv 0 \pmod{m}$ ўринли бўлсин. Натижада, u^{n-1} ни ўзида сақлайдиган ҳад йўқолади: $u^n + b_1u^{n-2} + \dots + b_n \equiv 0 \pmod{m}$.

195. Ечилиши. $n^a + a_1 \equiv 0 \pmod{m}$ такқосламани тузамиз. Шартдан

$3a + 5 \equiv 0 \pmod{13}$ келиб чиқади, унинг ечими: $a \equiv 7 \pmod{13}$, демак, $x = u + 7$ алмаштирамиз. Бу алмаштиришни берилган такқосламага қўйиб,

$(u+7)^3 + 5(u+7)^2 + 6(u+7) - 8 = u^3 + 26u^2 + 223u + 622 \equiv u^3 + 2u - 2 \equiv 0 \pmod{13}$ ни ҳосил қиламиз.

196. а) $(5,10)=5$ ва 7 сони 5 га бўлинмаслиги учун берилган такқослама ечимга эга эмас. б) $x \equiv 7 \pmod{13}$; в) $x \equiv 8 \pmod{17}$; д) $x \equiv 9 \pmod{19}$; е) $x \equiv 11 \pmod{58}$.

197. а) $x \equiv 6 \pmod{19}$; б) ечими йўқ; в) $x \equiv 49 \pmod{153}$; д) $x \equiv 3 \pmod{183}$;

е) $x \equiv 47 \pmod{241}$. ф) ечими йўқ; г) $x \equiv 41, 190, 339 \pmod{447}$;

ҳ) $x \equiv 61, 248 \pmod{422}$; ж) $x \equiv 39, 196, 353 \pmod{471}$.

198. а) ечими йўқ; б) $x \equiv 3, 8, 13, 18, 23 \pmod{25}$; в) $x \equiv 73 \pmod{177}$;

д) $x \equiv 29 \pmod{311}$; е) $x \equiv 48 \pmod{219}$;

ф) $x \equiv 9, 32, 55, 78, 101, 124 \pmod{138}$; г) $x \equiv 11, 28, 45 \pmod{51}$.

199. Ечилиши. а) $ax \equiv b \pmod{21}$, бу ерда $(a, 21) = 1, b \in \mathbb{Z}$;

б) $ax \equiv b \pmod{21}$ такқослама ечимга эга бўлиши учун, масалан, 3 та ечимга эга бўлиши учун $(a, 21) = 3$ ва b сони 3 га бўлиниши зарур ва етарлидир;

в) бундай такқосламани тузиш мумкин эмас.

200. 1 июнь.

201. Ечилиши. Қўшиб ёзиладиган сонни x билан белиглаймиз, у ҳолда

$523 \cdot 10^3 + x \equiv 0 \pmod{7 \cdot 8 \cdot 9}$, бу ердан $x \equiv -523000 \equiv -352 \equiv 152 \pmod{504}$, ёки $x = 504t + 152$. x нинг қиймати $t = 0$ ва $t = 1$ да уч хонали бўлади. Бу ерда $x_1 = 152, x_2 = 656$.

202. $x \equiv 200 \pmod{440}$, яъни $x \equiv 200; 640$.

203. $x \equiv 30 \pmod{31}$, яъни $x = 30, 61, 42$.

204. а) $x = 3 + 4t, y = 1 - 3t$; б) $x = 3 + 13t, y = -3 + 8t$;

с) $x = 22 - 37t, y = -25 + 43t$; д) $x = 17 + 37t, y = 20 + 45t$;

е) $x = 1 + 16t, y = 1 + 27t$; ф) ечимга эга эмас

г) $x = 4 + 17t, y = -11 - 53t$; h) $x = 47 + 105t, y = 21 + 47t$; и) ечими йўқ;

ж) $x = 4 + 16t, y = 7 - 11t$; к) $x = 9 + 37t, y = 3 + 12t$; л) $x = -7 + 15t, y = 12 - 23t$.

205. $x = 2 - 4t, y = 4 + 3t$. $t = 0$ ва $t = -1$ да талаб килинган ҳосил бўлади.

206. $x = 3 - 5t, y = 28 + 3t$.

207. а) $x \equiv 49 \pmod{420}$; б) $x \equiv 4126 \pmod{6300}$;

с) $x \equiv 85056 \pmod{130169}$; д) $x \equiv 9573 \pmod{13923}$;

е) ечими йўқ; ф) ечими йўқ;

208. $x \equiv 25 \pmod{60}$.

209. 299 ва 439.

210. б) ечими йўқ; с) ечими йўқ; $y_1 \equiv 7 \pmod{12}$ $x_2 \equiv 4 \pmod{12}$, $y_2 \equiv 7 \pmod{12}$; $x_3 \equiv 8 \pmod{12}$, $y_3 \equiv 7 \pmod{12}$.

III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

211. (3,2)

212. (4,3)

213. (10,9001), (10,10999), (-10, 10999), (-10,9001)

214. $(2^{30}, 0)$, $(0, 2^{30})$

215. (16;12;1)

216. (-4;9), (14;-21), (4;-9), (-14;21)

217. (-10;-11), (-10;9), (-3;-5), (-3;3), (2;-5), (2;3), (9;9), (9;-11)

218. (1;2;3), (3;2;7)

219. $m=1, n=1$

220. $n=2, m=3$

221. $x=10, y=3$

222. . ечимга эга эмас.

223. $\frac{5\pi}{2} + 5\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

224. $\frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi(q + (1+4q)t) \right), b = \frac{1+4p}{1+4q} a, a \neq 0, q, t, p \in \mathbb{Z}$.

225. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}, n, m \in \mathbb{Z}$.

ГЛОССАРИЙ

№	Ўзбек тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
1.	Тўплам	Множество	Lots of
2.	Тўплам элементи	Элементы множества	Elements of the set
3.	Бўш тўплам	Пустое множество	Empty set
4.	Тўплам қисми	Подмножество	Subset
5.	Тўпламлар тенглиги	Равенства множеств	Equalities of sets
6.	Сонлар	Чисел	Numbers
7.	Соннинг кўрсаткичи	Показатель количества	Quantity indicator
8.	Бутун сонлар	Селых чисел	Of numbers
9.	Губ сонлар	Номера ванны	Tub numbers
10.	Мураккаб сонлар	Сложные числа	Compleks numbers
11.	Арифметик прогрессия	Арифметическая прогрессия	Arithmetic progression
12.	Геометрик прогрессия	Геометрическая прогрессия	Geometric progression
13.	Ўзаро бир қийматли мослик	Взаимно однозначные соответствия	Mutual value compatability
14.	Эквивалент тўпламлар	Эквивалентные множества	Equivalent paskages
15.	Тўплам қуввати	Мощность множества	Paskage capacity
16.	Санокли тўплам	Счетное множество	Countless collection
17.	Саноксиз тўплам	Несчетное множество	Countless collections
18.	Натурал сонлар	Натуральные числа	Natural numbers
19.	Бўлиниш муносабати	Разделительный подход	The division approach
20.	Энг катга умумий бўлувчи (ЭКУБ)	Крупнейший генерал глава	The largest general head
21.	Энг кичик умумий каррали (ЭКУК)	Минимальная общая кратность	Minimum total multiplicity
22.	Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
23.	Касрлар	Фраксии	Fractions
24.	Занжир касрлар	Цепные дроби	Chain fractions
25.	Чексиз занжир касрлар	Бесконечные цепные дроби	Infinite chain fractions
26.	Ўзлуксиз касрлар	Непрерывные дроби	Continuous fractions
27.	Тенгламалар	Уравнения	Equations
28.	Чизиқли тенгламалар	Линейные уравнения	Linear equations
29.	Икки номаълумли тенгламалар	Два неизвестных уравнения	Two unknown equations
30.	Аниқмас тенгламалар	Неопределенные	Indefinite equations

		уравнения	
31.	Ечимлар	Решения	Solutions
32.	Мусбат ечимлар	Положительные решения	Positive solutions
33.	Номаълум сон	Неизвестный номер	Unknown number
34.	Функциялар	Функции	Features
35.	Таққосламалар	Сравнения	Comparisons
36.	Юқори даражали таққосламалар	Сравнения высокого уровня	High-level comparisons
37.	Икки ҳадли таққосламалар	Двумерные сравнения	Two-dimensional comparisons
38.	Тенгсизликлар	Неравенства	Inequalities
39.	Чегирмалар синфи	Дискотный класс	Discount class
40.	Кўпайтувчиларга ажратиш	Разделит на множители	Divide into multipliers
41.	Комбинаторлик масала	Комбинаторная задача	Combinarny sum
42.	Комбинаторика	Комбинаторика	Combinatoricc
43.	Ўрин алмаштириш	Перестановки	Permutations
44.	Кoeffициент	Кoeffициент	Coefficient
45.	Комбинация	Комбинация	Combination
46.	Ньютон биноми	Бином Ньютона	Nyuton bean
47.	Биномиал коэффициент	Биномиальные коэффициенты	Binomial coefficients
48.	Ўринлаштириш	Перемещение	Moving
49.	Умумий ечим	Общее решение	Common decision
50.	Бир жинсли система	Однородная система	Homogeneous system
51.	Скаляр	Скаляр	Scalar
52.	Натурал сонлар тўплами	Множества натуральных чисел	Sets of natural numbers
53.	Бутун сонлар тўплами	Множества селых чисел	Lots of numbers
54.	Рационал сонлар тўплами	Множества рациональных чисел	Sets of rational numbers
55.	Иррационал сонлар тўплами	Множества иррациональных чисел	Sets of irrational numbers
56.	Ҳақиқий сонлар тўплами	Множества действительных чисел	Reality numbers
57.	Кўпхад	Многочлен	Polynomial
58.	Модул	Модул	Module
59.	Мусбат	Положительный	Positive
60.	Манфий	Отрицательный	Negative

ФҲЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Александров В.А. Задачник-практикум по теории чисел / В. А. Александров, С. М. Горшенин. – М.: Просвещение, 1972.
2. Александров В.А., Горшинин С.М. Задачник-практикум по теории чисел. Для студентов заочных отделений физико-математических факультетов педагогических институтов. Изд. второе, испр. И доп. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1963. – 72 с.
3. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. “Алгебра и теория чисел”, Сборник задач для математических школ.-М.: МЦНМО, 2002,-264 с.
4. Аюпов Ш., Рихсиев Б., Кучкоров О. Математика олимпиадалар масалалари. 1,2 кимлар - Т.: Фан, 2004.
5. Барабанов Е.А. Задачи заключительного тура минской городской математической олимпиады школьников / Е.А. Барабанов, И.И. Воронович, В.И. Каскевич, С.А. Мазаник. – Минск, 2006 г.- 352 с.
6. Басова А.А., Шубин М.А., Эпштейн Л.А. Лекции и задачи по математике. Пособие для учителей. – М.: Просвещение. 1981. – 96 с.
7. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения / И.Г. Башмакова. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
8. Бендукидзе А., Сулаквелидзе А. Вычисление сумм // Квант, № 9. 1970.
9. Берлов С.Л. Петербургские математические олимпиады / С.Л. Берлов, С.В. Иванов, К.П. Кохась. – СПб.: Лань, 2003. – 532 с.
10. Борович З. И. Теория чисел / З. И. Борович, И. Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1972.
11. Бошмаков М.И., Беккер Б.М., Гольговой В.М., Ионин Ю.И. Алгебра и начала анализа: задачи и решения. Учебное пособие. – М.: Высшая школа. 2004. – 296 с.
12. Бухштаб А.А. Теория чисел М:1966,- 347 с.
13. Бухштаб А.А., Виноградов И.М Сонлар назарияси асослари Т: 1959 257-бет.
14. Буштаб А.А. Теория чисел. / А.А. Буштаб. – М.: Просвещение, 1966. – 385 с.
15. Ван дер Варден Е.Л Алгебра М 1979, 483-с.
16. Василенко О. Н., Галочкин А. И. Сборник задач по теории чисел. — М.: изд-во Моск. ун-та, 1995.
17. Васильев Н.Б. Заочные математические олимпиады / Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Том. – М.: Наука, 1986. – 230 с.
18. Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 классов средней школы / Н.Я. Виленкин, И.Я. Депман. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.

19. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — М.: Наука, 1972.
20. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. Серия “Популярные лекции по Математике”— Вып. 39. — М.: Наука, 1963.
21. Гильфорд А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. — М.: Наука, 1983. — 64 с.
22. Грибанов В.У. Сборник упражнений по теории чисел / В.У. Грибанов, П.И. Титов. — М.: Просвещение, 1964. — 144 с.
23. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. Учебное пособие для физикоматематических факультетов пед. институтов. — М.: Просвещение, 1964. — 142 с.
24. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. Учебное пособие для физикоматематических факультетов пед. институтов. — М.: Просвещение, 1964. — 142 с.
25. Гринько, Е.П. Методы решения алгебраических олимпиадных задач: учебно-методич. пособие / Е.П. Гринько ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. — Брест: БрГУ, 2012. — 108 с.
26. Гринько, Е.П. Система работы с интеллектуально одаренными детьми: монография / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. — Брест: Изд-во БрГУ, 2009. — 229 с.
27. Довбыш Р.И. Математические олимпиады: 906 самых интересных задач и примеров с решениями [Текст] / Р.И. Довбыш, Н.А. Кулеско, В.В. Лиманский, Л.Л. Оридрога, Л.Л. Пстемкина, Н.Л. Трегуб. — Ростов н/Д: Феникс; Донецк: издательский центр «Кредо», 2006. — 335 с. — (Большая перемена).
28. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика / Г. Дэвенпорт. — М.: Наука, 1965.
29. Е.П. Гринько, А.Г. Головач Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам Брест БрГУ имени А.С. Пушкина 2013.
30. Задачи Минской городской математической олимпиады младших школьников / Е.А. Барабанов [и др.] — Мн.: Бел. ассоц. «Конкурс», 2005. — 352 с.
31. Задачи районного тура Минской городской математической олимпиады школьников (1991—2001 гг.) / Е.А. Барабанов [и др.]. — Мн.: Фаритэкс. 2002. — 181 с.
32. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др.; под ред. И. Н. Сергеева — М.: Наука, Физматлит, 1987.
33. Исмаилов Ш.Н. Сонлар назарияси. Т: 2008 й. - 63 б.
34. Казачек Н.А., Перлатов Г.Н., Виленкин Н.Я., Бородин А.И. Алгебра и теория чисел. Учебное пособие для студентов-заочников

физико-математических факультетов педагогических институтов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1984. – 200 с.

35. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: «Наука» - 1973.

36. Кострикин А.И., и др. Сборник задач по алгебре. М.: Наука, 1986.

37. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.

38. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III основные структуры. М.: «Наука» - 2004.

39. Кот В.И. Как одолеть олимпиадные задачи по математике: Пособие для учителей общеобразовательной школы / В.И. Кот. – Мн.: Бестпринт, 2002. – 400 с.

40. Кочева А.А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Ч.3. Учебное пособие для студентов заочников II курса физико-математических факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1984. – 42 с.

41. Криллов А.А. Элементы теории представлений. М.: «Наука» 1978.

42. Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел / Г. А. Кудреватов. – М.: Просвещение, 1970.

43. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979.

44. Курош А.Г. Олией алгебра курси. Т: Ёкитувчи, 1975.

45. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. Ч. I. Числа: Учебное пособие для студентов физикоматематических факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1974. – 383 с.

46. Мазаник А.А. Реши сам / А.А. Мазаник, С.А. Мазаник. – Мн., Народная асвета, 1992. – 256 с.

47. Маркова И.С. Новые олимпиады по математике / И. С. Маркова. – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 315 с.: ил. – (Здравствуй, школа!).

48. Московские математические олимпиады 1993 – 2005. / Р.М. Федоров и др. Под ред. В.М. Тихомирова – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.

49. Нечаев В.А. Задачник-практикум по алгебре. – М.: Просвещение, 1983.

50. Никитин Н.Д. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / - Пенза, 2010- 96 с.

51. Ожиглова Е.П. Что такое теория чисел. Изд. 2-е, стереотип. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 96 с.

52. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964.

53. Петраков И.С. Содержание и методика подготовки и проведения олимпиад (на примере международных олимпиад) / И.С. Петраков. – М.: 1973, – 152 с.

54. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: учебное пособие / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2007. – 608 с.: ил.

55. Серр Ж.-П. Курс арифметики / Ж.-П. Серр. – М.: Мир, 1972.

56. Соловьев Ю. П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1 - 3. — М.: школа им. А. Н. Колмогорова, 1998.
57. Соловьев Ю.П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1 - 3. — М.: школа им. А.Н. Колмогорова, 1998.
58. Сонлар назарияси асосларидан масала ва машқлар. “Алгебра ва сонлар назарияси” фанидан амалий машғулотлар учун услубий тавсиялар. Услубий қўлланма. — Самарқанд: СамДУ н, 2011. — 80 бет.
59. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
60. Фадеев Д.К. Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.
61. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе / А. В. Фарков. — 5-е изд. — М.: Айрис-Пресс, 2006. — 176 с.: ил. — (Школьные олимпиады).
62. Хинчин А.Я. Цепные дроби. — М., Гос. Изд-во Физ. - Мат. Лит., 1961.
63. Хинчин. А.Я. Цепные дроби. / А.Я. Хинчин. — М.: Наука, 1978. — 111 с.
64. Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Учебное пособие для физикоматематических факультетов педагогических институтов. М: Высшая школа, 1982. — 223 с.
65. Юнусов А.С., Афонина С.И., Бердикулов М.А., Юнусова Д.И. Қизіқарли математика ва олимпиада масалалари. Т: 2007.
66. “Математика в школе” (Россия), “Квант” (Россия), “Соровский образовательный журнал” (Россия), “Cruх mathematicorum with mathematical Mayhem” (Канада), “Физика, математика ва информатика” (Ўзбекистон) журналлари.
67. Andreescu T., Andrica D., Feng Z. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007
68. Engel A.. Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag New York Inc. 1998.
69. H. Lee. Problems in elementary number theory.
70. Mathematical Olympiads, Problems and solutions from around the world, 1998-1999. Edited by Andreescu T. and Feng Z. Washington. 2000.
71. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007
72. Xojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi. T: «O‘zbekiston», 2001 y.
73. Yunusov A., Yunusova D. Algebra va sonlar nazariyasidan modul texnologiyasi asosida tuzilgan nazorat topshiriqlari to‘plami. TDPU, 2004.
74. <http://mv.netian.com/idealitne/eng.html>
75. Math Links, <http://www.mathlinks.ro>
76. Art of Problem Solving, <http://www.artofproblemsolving.com>
77. Math Pro Press, <http://www.mathpropress.com>
78. Математические задачи, <http://www.problems.ru>

МУНДАРИЖА

СЎЗ БОШИ	3
I БОБ. БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ	
1.1-§. Туб ва мураккаб сонлар. Туб сонлар тўпламининг чексизлиги. Эратосфен ғалъири	5
1.2-§. Бўлиниш муносабаги. Натурал сон натурал бўлувчиларининг сони ва йиғиндиси.	14
1.3-§. Энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий каррали. Евклид алгоритми	20
1.4-§. Чекли занжир касрлар, муносиб касрлар, хоссалари	29
1.5-§. Сонлар назариясида муҳим функциялар	34
1.6-§. Туб сонлар тарихидан	42
1.7-§. Систематик сонлар ва улар устида амаллар	48
II БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ	
2.1-§. Бутун сонлар халқасида таққосламалар, уларнинг хоссалари, чегирмалар синфи халқаси.	52
2.2-§. Эйлер функцияси. Эйлер ва Ферма теоремаси	55
2.3-§. Биринчи даражали таққосламалар ва уларнинг ечиш усуллари	61
2.4-§. Таққосламалар системаси ва унинг ечими	66
III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ	
3.1-§. Биринчи даражали икки номаълумли Диофант тенгламаларининг бутун рационал ечимларини топиш усуллари	73
3.2-§. Аниқмас тенгламаларнинг умумий ечими	77
3.3-§. Тенгламани ечишни соддалаштириш	79
3.4-§. Лежандр символи ва унинг хоссалари. Туб модул бўйича юқори даражали таққосламалар. Иккинчи ва учинчи тартибли Диофант тенгламалари	84
3.5-§. Соннинг кўрсаткичи. Туб модул бўйича индекслар. Икки ҳадли таққосламалар. Иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар	92
3.6-§. Учинчи тартибли аниқмас тенгламалар	96
МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР	110
ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР	127
ГЛОССАРИЙ	147
Фойдаланилган адабиётлар	150

мат

мат

сон.
Усл

М.:

— 5.

196

111

Уч
ин

Қи

об
та
(Ў

Вс

19

wi

Вс

«(

te

**Махмудова Дилфуза Мелиевна,
Дўсмуродова Гавҳар Холбоевна,
Эшмаматов Исмоил Абсаламович,
Абдуқодирова Патмаҳон Турсунбоевна.**

“Алгебра ва сонлар назарияси”

Ўқув қўлланма

Мухаррир М.А.Ҳакимов

Босишга рухсат этилди 27.10.2020й. Бичими 60X84 $\frac{1}{16}$.
Босма табағи 10,5. Шартли босма табағи 10,5. Адади 100 нусха.

Буюртма №177. Баҳоси келишилган нарҳда.
“Университет” нашриёти. Тошкент, Талабалар шаҳарчаси,
ЎЗМУ маъмурий биноси.

Ўзбекистон Миллий университети босмахонасида босилди.
Тошкент, Талабалар шаҳарчаси, ЎЗМУ.

$\angle \tau(w)$
WEA

$$\sqrt[n]{z_1 z_2 \dots z_n}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

$$e = 2,7$$

$$\bar{z} = \sqrt[n]{z_1 z_2 \dots z_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n z_i}$$



9 789943 655515