

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН**

Ташкентский финансовый институт

Ш.Ш.БАБАДЖАНОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ I

Учебное пособие

**ТАШКЕНТ
«IQTISOD – MOLIYA»
2008**

**Высшая математика. Часть I: Учебное пособие / Ш.Ш. Бабаджанов;
«IQTISOD – MOLIYA», Ташкент, 2008. 336 с.**

В учебном пособии обстоятельно излагаются основы линейной алгебры и элементы аналитической геометрии в доступной форме для экономиста – бакалавра.

Учебное пособие предназначено бакалаврам всех направлений области образования «Бизнес и управление» и написано в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта.

**Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского
финансового института (15.06.2007 №2).**

**Рецензенты: канд.физ.-мат.наук, доц. ТУИТ Х. А. Абдуванов;
канд.физ.-мат.наук, доц. ТФИ А. Р. Роишев**

**© Ш.Ш. Бабаджанов, 2008
© «IQTISOD – MOLIYA», 2008**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучай, познавай, не пугаясь преград:
Познающему – трудное станет легко.
Доказательства сделай кольчужой своей
Крепких доводов щит подними высоко!
Носири Хисрав (1004-1088)

Настоящая книга является первой частью учебного пособия по дисциплине «Высшая математика», которая состоит из двух частей; вторая часть выйдет в свет отдельно несколько позднее.

В первой части обстоятельно излагаются основы линейной алгебры и элементы аналитической геометрии в доступной форме для экономиста – бакалавра. В ней по возможности подробно рассмотрены теории матриц, определителей, n -мерных векторных пространств и их линейных преобразований, а также теория систем линейных уравнений. Она адресована бакалаврам всех направлений области образования «Бизнес и управление» и написана в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта.

При написании учебного пособия автор руководствовался принципом повышения уровня фундаментальности подготовки студентов – бакалавров с усилением ее прикладной экономической направленности. Поэтому в учебном пособии:

- приводятся доказательства большинства теорем;
- имеются указания приложений линейной алгебры и элементов аналитической геометрии к вопросам экономики.

Изложение материалов очень строгое, вместе с тем, доступное для студентов первого курса. В каждом параграфе рассматривается достаточно большое количество иллюстрирующих теоретический материал примеров с решениями, которые способствуют лучшему его усвоению. Каждый параграф заканчивается перечнем ключевых слов и словосочетаний, вопросами для самопроверки и задачами для самостоятельного решения.

Автор выражает глубокую признательность за советы рецензентам доцентам Х. А. Абдуваитову и А. Р. Роишеву.

Автор

ГЛАВА I

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. Основные сведения о матрицах. Действия над матрицами

Планирование¹ производства должно основываться на надлежащим образом упорядоченной системе информации, с помощью которой просто и сжато описываются зависимости, имеющие место в материальном производстве. Эту упорядоченную систему информации можно наглядно представить в виде соответствующей таблицы.

Рассмотрим, например, систему информации о взаимных поставках продукции отраслей материального производства. Если через $i=1,2,...,6$ обозначить соответственно номера отдельных отраслей, то таблица взаимных поставок продукции принимает следующий вид:

Таблица 1

Отрасль	1	2	3	4	5	6
1	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}
2	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}	v_{26}
3	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}
4	v_{41}	v_{42}	v_{43}	v_{44}	v_{45}	v_{46}
5	v_{51}	v_{52}	v_{53}	v_{54}	v_{55}	v_{56}
6	v_{61}	v_{62}	v_{63}	v_{64}	v_{65}	v_{66}

¹ Мировая система хозяйствования в настоящее время активно использует возможности не только прогнозирования, но и планирования. При разработке планов применяются: а) макропланирование; б) мезопланирование, т.е. планирование отраслей, подотраслей, территориально-производственных комплексов, промузлов, исходящих от «метакорпораций», к которым относятся межотраслевые, межрегиональные и международные финансово-промышленные группы; в) территориальное планирование, т.е. прогнозы, бюджетные планы и программы региональных и местных властей; г) микропланирование на уровне фирмы. Особого внимания заслуживает опыт индикативного планирования, который уже несколько десятилетий плодотворно используется в ряде стран мира [1].

В таблице через v_{ij} ($i=1,2,\dots,6$; $j=1,2,\dots,6$) обозначены объемы поставок продукции из i -й отрасли в j -ю отрасль. Так, например, $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{16}$ обозначают поставки продукции отрасли 1 всем отраслям материального производства, $v_{21}, v_{22}, \dots, v_{26}$ – поставки отрасли 2 всем отраслям материального производства и т. д.

Подобным же образом планирование на предприятии обосновывают, пользуясь нормами как системой информации. Если, например, на предприятии производятся четыре продукта 1, 2, 3, 4 и для их производства используются материалы 1, 2, 3, то система норм материальных затрат, которая представляет собой основу плана снабжения, может быть представлена в виде таблицы:

Таблица 2

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

где a_{ij} ($i=1,2,3$; $j=1,2,3,4$) – есть норма расхода i -го материала на производство j -го продукта. Так, норма расхода материала 1 на единицу продукта 1, 2, 3, 4, соответственно равна $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$; норма расхода материала 2 на единицу продукта, соответственно, составляет $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$, норма расхода материала 3 на единицу продукта, соответственно, составит $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$.

Табл. 1 и 2 – частные случаи так называемых **матриц**, рассматриваемых математикой. Они находят широкое применение в экономических исследованиях, особенно в планировании производства, значительно облегчают работу, связанную с планированием, снижают трудоемкость этой работы, позволяют быстро разработать разные варианты плана и, кроме того, облегчают изучение зависимостей между разными экономическими показателями.

Следует отметить, что основное внимание исследователей с момента зарождения теории финансов как науки (20-30-е годы XX – го столетия) и по настоящее время направлено на совершенствование методологии прогнозирования, разработку новых методов, применяемых при прогнозировании различных финансовых показателей. Одним из таких является коллокационные модели – модели,

построенные на базе методов коллокации. Коллокационные модели обладают большой универсальностью и позволяют решать задачи прогнозирования, используя при этом самую разнообразную информацию об объекте (в частности, при прогнозировании характеристик ценных бумаг использовать информацию о курсах, ценах, объемах продаж, индексов и т.д.). Основное достоинство коллокационных моделей в том, что методика прогноза по любой из них сводится к простейшим матричным операциям [2].

Приведенные и перечисленные примеры не исчерпывают всех приложений матриц, однако они в определенной степени помогли нам показать важность и полезность матриц.

Теперь приступим к изучению матриц.

1.1. Основные определения

Определение. Матрицей² называется прямоугольная таблица чисел, расположенных строками и столбцами и записывается так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Каждая матрица имеет определенные размеры, т.е. определенное количество строк и столбцов. В приведенной выше матрице A имеется m строк и n столбцов. Значит, эта матрица размера $m \times n$.

В матрице (1) числа a_{ij} называются ее элементами (первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Употребляется также сокращенное обозначение матриц. Например, пишут $A = (a_{ij})_{mn}$. Это значит, что матрица состоит из

² Понятие матриц впервые введено в работах английских математиков У.Гамильтона (1805 – 1865) и А. Кели (1821 – 1895). В настоящее время матрицы служат важным аппаратом математического исследования, в частности, экономико-математического моделирования. Выше мы это попытались объяснить.

элементов a_{ij} , причем $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица называется **прямоугольной**, если $m \neq n$. Если же $m = n$, то матрица называется **квадратной**³, а число n – ее **порядком**⁴.

Матрицы называются **равными**, если у них одинаковое число строк и столбцов и все соответствующие элементы совпадают.

Матрица называется **нулевой** (или **нуль-матрицей**), если все ее элементы равны нулю. Нулевую матрицу обозначают символом Θ . Например, следующие матрицы:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются, соответственно, нулевой матрицей 3-го порядка, нулевой матрицей размера 3×4 и нулевой матрицей размера 2×3 .

Матрица, состоящая из одной строки (т.е. матрица размера $1 \times n$) или из одного столбца (т.е. матрица размера $m \times 1$), называется, соответственно, **вектор–строкой** или **вектор–столбцом**.

Вектор–столбцы и вектор–строки называют также просто **векторами**. Элементы векторов будем называть их **компонентами**.

Замечание. В дальнейшем, если отдельно не отмечено, всегда будем считать вектор заданным в виде вектора–столбца, хотя часто для экономии места компоненты вектора будут записываться в строку.

Матрица A' , которая получается из матрицы A заменой в ней местами строк и столбцов, называется **транспонированной** относительно матрицы A . Таким образом, для матрицы (1) транспонированной служит матрица

³ Следует иметь в виду, что матрицы не имеют какой-либо геометрической интерпретации. Термины «квадратная» и «прямоугольная» матрицы являются просто удобной характеристикой вида расположения и количества элементов матрицы.

⁴ Иногда термин «порядок матрицы» употребляют по отношению не только к квадратной, но и к прямоугольной матрице (например, порядка $m \times n$). Однако в нашей математической литературе (имеется в виду стран СНГ) принято термин «порядок» употреблять только относительно квадратных матриц. Что же касается прямоугольных матриц, то по отношению к ним указывается число строк и столбцов или же при необходимости употребляется слово «размерность».

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операция перехода к матрице A' , транспонированной относительно матрицы A , называется **транспонированием** матрицы A . Для матрицы размера $m \times n$ транспонированной является матрица размера $n \times m$.

Транспонированной относительно матрицы A' , очевидно, служит матрица A , т. е. $(A')' = A$.

Главной диагональю квадратной матрицы называется воображаемая прямая, соединяющая ее элементы, у которых оба индекса одинаковы (т.е. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$). Эти элементы называются **диагональными**.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется **диагональной** и записывается так:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все элементы α_{ii} диагональной матрицы равны между собой, то матрицу называют **скалярной**. Такая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

В случае, если $\alpha = 1$, скалярная матрица называется **единичной** и обозначается буквой E , т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Иногда для записи элементов единичной матрицы используется символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

При помощи этого символа можно написать

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}_{ij}$$

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. При этом матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где $b_{ij} = 0$ при $i > j$, называется **правой (или верхней) треугольной** матрицей, а матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = 0$ при $i < j$, называется **левой (или нижней) треугольной матрицей**.

Симметрической матрицей называется квадратная матрица A , для которой $A = A'$.

Ясно, что симметрическая матрица симметрична относительно диагонали, т.е. отражение от главной диагонали не изменяет матрицу. Симметрическая матрица n -го порядка не может состоять из произвольных n^2 элементов, так как $a_{ij} = a_{ji}$, но выше или ниже главной диагонали ее элементы произвольны. Число элементов, стоящих выше главной диагонали, равно $\frac{n^2 - n}{2}$. Элементы главной диагонали также произвольны. Таким образом, общее число произвольных элементов в симметрической матрице n -го порядка равно

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пример. Следующая матрица - симметрическая:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кососимметрической матрицей называется квадратная матрица A , для которой $A = -A'$.

Очевидно, что элементы кососимметрической матрицы симметрично расположены относительно ее главной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$.

Ясно, что все элементы главной диагонали являются нулями: $a_{ii} = 0$. Число произвольных элементов в кососимметрической матрице n -го порядка равно

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример. Следующая матрица является кососимметрической:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Действия над матрицами

Основные операции над матрицами следующие: умножение матриц на число, сложение матриц, умножение матриц.

1.2.1. Линейные операции над матрицами

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ **на число** λ **называется матрица**, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число λ :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу $2A$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением получим

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 10 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется **противоположной** матрице A .

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C такой же размерности,

элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B , т.е.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется **разность** матриц:

$$A - B = C = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1j} - b_{1j} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2j} - b_{2j} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} - b_{i1} & a_{i2} - b_{i2} & \dots & a_{ij} - b_{ij} & \dots & a_{in} - b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mj} - b_{mj} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти сумму и разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением получим

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим одно интересное свойство матриц.

Любая квадратная матрица может быть выражена как сумма симметрической и кососимметрической матриц:

$$A = A + \frac{A'}{2} - \frac{A'}{2} = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2}.$$

Далее

$$\left(\frac{A + A'}{2}\right)' = \frac{A + A'}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{A - A'}{2}\right)' = -\frac{A - A'}{2}.$$

Если

$$A_s = \frac{A + A'}{2} \quad \text{и} \quad A_a = -\frac{A - A'}{2},$$

то матрица A_s является симметрической и A_a является кососимметрической. Таким образом, мы выразили квадратную матрицу A в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \frac{A + A'}{2} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{15}{2} \\ \frac{15}{2} & \frac{15}{2} & 9 \end{pmatrix}, \quad \frac{A - A'}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2}.$$

Легко проверить, что операции сложения и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

- 1⁰. $A + B = B + A$;
- 2⁰. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3⁰. $A + \Theta = A$;
- 4⁰. $A + (-A) = \Theta$;
- 5⁰. $1 \cdot A = A$;
- 6⁰. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- 7⁰. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 8⁰. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

здесь A, B и C матрицы, α и β - числа, Θ - нулевая матрица.

1.2.2. Умножение матриц

Произведение $A \cdot B$ (в дальнейшем, просто AB) матрицы A на матрицу B определяется в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Пусть даны матрица A размерности $m \times p$ и матрица B размерности $p \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

или в сокращенной записи

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jk}).$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Произведением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ заданных в определенном порядке (A — первая, B — вторая), называется следующая матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk},$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, произведение AB имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Правило умножения матриц. Чтобы получить элемент, стоящий в i -й строке и k -м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i -й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы k -го столбца второй и полученные произведения сложить.

Пример. Умножить матрицу A на матрицу B , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Элемент первой строки и первого столбца новой матрицы $C = AB$ представляет собой сумму произведений элементов 1-й строки матрицы A на элементы 1-го столбца матрицы B , а именно:

$$c_{11} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6.$$

2) Элемент первой строки и второго столбца новой матрицы представляет собой сумму произведений элементов 1-й строки матрицы A на элементы 2-го столбца матрицы B :

$$c_{12} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2.$$

3) Элемент первой строки и третьего столбца определяется так:

$$c_{13} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1.$$

4) Элемент второй строки и первого столбца новой матрицы получается последовательным умножением элементов 2-й строки матрицы A на элементы 1-го, 2-го и 3-го столбцов матрицы B и суммированием получаемых произведений:

$$c_{21} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6;$$

$$c_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1;$$

$$c_{23} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1.$$

5) Аналогично получают элементы 3-й строки матрицы C :

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8;$$

$$c_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1;$$

$$c_{33} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Итак,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример. Умножить матрицу A на матрицу B , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Следует иметь в виду, что умножение матриц **некоммутативно** (не обладает свойством перестановочности), т.е. $AB \neq BA$.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Как видим, в результате перестановки умноженных матриц A и B получены различные результаты. **Необходимо поэтому указывать, как умножаются матрицы (слева или справа).**

В отдельных случаях произведение матриц в противоположном порядке вообще невозможно. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 46 & 31 & 19 \end{pmatrix};$$

BA - не существует.

В тех случаях, когда $AB = BA$, матрицы A и B называются **коммутативными (перестановочными)**. Так, например, единичная матрица E перестановочна с любой квадратной матрицей A того же порядка, причем

$$AE = EA = A.$$

Следует заметить, что единичная матрица среди всех квадратных матриц данного порядка играет в операции умножения такую же роль, как число единица при умножении чисел.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

т.е. $AE = EA = A$.

Можно проверить, что умножение матриц обладает следующими свойствами:

1⁰. $A(BC) = (AB)C$;

2⁰. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

3⁰. $C(A+B) = CA + CB$;

4⁰. $(A+B)C = AC + BC$,

где A, B и C матрицы, λ - число.

При этом предполагается, что все написанные произведения матриц имеют смысл.

Имеет место следующее правило транспонирования произведения двух матриц:

$$(AB)' = B' \cdot A'.$$

Ступенчатой матрицей называется матрица, обладающая тем свойством, что если в какой-либо из ее строк первый отличный от нуля элемент стоит на k -м месте, то во всех следующих строках на первых k местах стоят нули, например:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы прервем изучение матриц для того, чтобы изложить некоторые аспекты теории определителей, которые нам понадобятся для дальнейшего изложения теории матриц.

Ключевые слова и словосочетания

Матрица, прямоугольная матрица, квадратная матрица, порядок квадратной матрицы, нулевая матрица, вектор—строка, вектор—столбец, транспонирование матриц, диагональная матрица, скалярная матрица, правая (или верхняя) треугольная матрица, левая (или нижняя) треугольная матрица, симметрическая матрица, кососимметрическая матрица, линейные операции над матрицами, умножение матриц, ступенчатая матрица, каноническая матрица.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей?
2. Какая матрица называется прямоугольной?
3. Какая матрица называется квадратной?
4. Что представляет собой нулевая матрица?
5. Какая матрица называется диагональной?
6. Что представляет собой скалярная матрица?
7. Что представляет собой единичная матрица?
8. Какая матрица называется (правой (или верхней), левой (или нижней)) треугольной матрицей?
9. Какая матрица называется симметрической?
10. Какая матрица называется кососимметрической?

11. Что называется транспонированием матрицы?
12. Каким образом квадратная матрица может быть выражена с помощью симметрической и кососимметрической матриц?
13. Какими свойствами обладают операции сложения и умножения матрицы на число? Перечислите их.
14. Что называется произведением двух матриц?
15. Сформулируйте правило умножения двух матриц.
16. Когда матрицы называются коммутативными (перестановочными)?
17. Какими свойствами обладает умножение матриц? Перечислите их.
18. Приведите правило транспонирования произведения двух матриц.
19. Какая матрица называется ступенчатой?
20. Какая матрица называется канонической?

Задачи для самостоятельного решения

1. Умножить матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$г) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad д) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведения AB и BA , если

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$в) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$г) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу

где

$$A^2 + 4A + E,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

а E - единичная матрица второго порядка.

4. Вычислить $AB - BA$, если

$$а) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Выполнить действие:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

6. Произвести умножение матриц в указанном порядке:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$г) \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad д) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислить выражение:

$$a) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^5; \quad б) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n; \quad в) \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^n, \text{ где } a^2 + bc = 1;$$

$$г) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

8. Как изменится матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

если умножить ее слева на одну из матриц:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad г) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

9. Найти матрицу:

$$a) A^2 - 12E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б) \quad (A - 2E)^2 (A - E), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) \quad A^2 + B^2, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§2. Понятие определителя n -го порядка

Часто в математике бывает полезно охарактеризовать объект, определяемый многими параметрами, с помощью одной величины. Определитель⁵ – пример такого рода. Он вводится только для квадратных матриц. Существуют разные, но, естественно, эквивалентные способы его определения. Мы рассмотрим один из этих способов.

⁵ Зарождение теории определителей относят к концу XVII в. В 1693 г. Лейбниц, изучая линейные уравнения со многими неизвестными, впервые подметил общий закон составления определителей. В письме к Лопиталю от 28 апреля 1693 г. Лейбниц сообщает, что своему открытию он обязан особому способу обозначения коэффициентов уравнения. Этот способ обозначения состоял в том, что каждый коэффициент обозначался двумя числами (система двойных индексов). Эти результаты Лейбница не были опубликованы, и потому они остались неизвестными его современникам.

В 1750 г. женеvским ученым Крамером была опубликована работа, посвященная теории алгебраических кривых. В приложении, помещенном в конце своего сочинения, Крамер указывает общий закон составления определителей и приводит общую формулу решения системы n линейных уравнений с n неизвестными – эту формулу мы выведем позже в §5.

Однако ни Лейбниц, ни Крамер не дали более или менее законченной теории определителей. Первые шаги в этом направлении были сделаны французским математиком Вандермондом в мемуаре, доложенном Парижской Академии наук в 1771 г.

Дальнейшее и притом значительное развитие теория определителей получила в 1812 г., когда появились работы двух французских математиков Бине и Коши, причем особенно важное значение имел мемуар Коши.

С этого момента определители становятся одним из важных орудий математического исследования. В настоящее время нет почти ни одной отрасли математики, в которой определители не имели бы приложений. Мы их встречаем в других отраслях науки, в том числе и в экономике.

Пусть дана квадратная матрица n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

По определенным правилам сопоставим матрице A некоторое число, которое называют определителем (детерминантом) n -го порядка и обозначают одним из следующих символов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| = \det A = \Delta. \quad (1)$$

Элементы матрицы A , ее диагонали, строки и столбцы называют, соответственно, элементами, диагоналями, строками и столбцами определителя $|A|$, т.е. горизонтальные ряды в определителе (1) называются **строками**, вертикальные **столбцами**, числа a_{ij} — **элементами определителя** (первый индекс означает номер строки, второй — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$). **Порядок определителя** — это число строк и столбцов.

Воображаемая прямая, соединяющая элементы определителя, у которых оба индекса одинаковы (т.е. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) называется **главной (первой) диагональю**, другая диагональ — **побочной (второй)**.

Определение. Определителем (детерминантом) матрицы A называется число, являющееся алгебраической суммой $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) членов, каждый из которых — произведение n элементов, взятых только по одному из каждой из n строк и из каждого из n столбцов взятых со знаком плюс или минус.

Для выведения правила выбора знаков для членов определителя требуются новые понятия и определения.

Определение. Всякое расположение чисел $1, 2, \dots, n$ называется их перестановкой.

Количество возможных перестановок равно $n!$. При $n=2$ возможны лишь две перестановки - либо 1, 2, либо 2, 1. В данном случае число перестановок равно $1 \cdot 2 = 2!$. При $n=3$, число возможных перестановок будет равно 6 (1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 2, 1; 3, 1, 2), т.е. $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$

Определенное утверждение можно сделать при любом значении n .

Если это утверждение справедливо для числа элементов n , то оно справедливо и для числа элементов $n+1$.

Предположим, что наше утверждение уже доказано для n , т.е. n элементов дают $n!$ перестановок. Рассмотрим все перестановки из $n+1$ элементов $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$. Тогда перестановок, у которых на первом месте стоит элемент a_1 будет (по предположению) $n!$ перестановок, у которых на первом месте стоит элемент a_2 , тоже будет $n!$. Поступая аналогично со всеми $n+1$ элементами, получим, что число перестановок будет $n!(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1) = (n+1)!$

Рассмотрим произвольную перестановку n чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Выберем в ней два числа a_i и a_j . Если окажется, что большее из этих чисел расположено впереди (левее) меньшего, то числа a_i и a_j образуют инверсию (беспорядок).

Определение. Инверсией (беспорядком) в перестановке называют такое положение, при котором большее число стоит впереди (левее) меньшего. В противном случае числа инверсии (беспорядка) не образуют.

Рассмотрим перестановку четырех первых чисел натурального ряда 3, 2, 1, 4. Здесь беспорядок образуют следующие пары чисел: 3 и 2, 3 и 1, 2 и 1. Значит, в данной перестановке число всех инверсий (беспорядков) три. В перестановке 2, 4, 3, 1 имеется четыре инверсии.

Для подсчета числа беспорядков воспользуемся следующим приемом. Определим количество чисел, стоящих впереди 1. Пусть их будет k_1 . Вычеркнем единицу и определим количество чисел, стоящих впереди 2. Пусть их будет k_2 . Вычеркнем двойку и определим количество чисел, стоящих впереди 3 и т.д.

Пример. Подсчитайте число инверсий в перестановке
2, 1, 4, 3, 5, 6.

Решение

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 0, \quad k_5 = 0. \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 2.$$

Следовательно, в данной перестановке имеются две инверсии.

В общем случае число инверсий (t) равно:

$$t = \sum_{i=1}^{n-1} k_i.$$

Заметим, что впереди самого большого числа перестановки большее число стоять не может. Поэтому суммирование осуществляется до $n-1$.

Число инверсий может быть четным или нечетным.

Правило. Если в одном из членов определителя расположить множители так, чтобы первые индексы возрастали, то перед этим членом пишется знак плюс, когда число инверсий, образованных перестановкой вторых индексов, четное. И наоборот, если число инверсий нечетное, то ставится знак минус.

Пример. Определить знак члена определителя пятого порядка:

$$a_{32}, \quad a_{41}, \quad a_{53}, \quad a_{24}, \quad a_{15}.$$

Решение. Расположим множители этого члена в порядке возрастания первых индексов: $a_{15}, \quad a_{24}, \quad a_{32}, \quad a_{42}, \quad a_{53}$.

Рассмотрим перестановку 5, 4, 2, 1, 3, составленную из вторых индексов, и определим число инверсий:

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 1.$$

Число инверсий составит $3 + 2 + 2 + 1 = 8$. Раз число инверсий четное, то перед этим членом определителя ставится знак плюс.

Пример. Пользуясь определением определителя, вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы записать сумму отличных от нуля членов данного определителя. В качестве первого сомножителя таких членов можно взять из первой строки a_{12} или a_{13} . Если берем a_{12} , то из второй строки можно взять a_{21} или a_{24} . Если берем a_{21} , то из третьей строки можно взять только a_{34} , а из четвертой a_{43} . Перебирая так все возможности и учитывая знаки соответствующих подстановок, получим:

$$\Delta = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}.$$

Замечание. Вычислять более сложные определители путем непосредственного применения определения было бы весьма неудобно. Для этого применяются специальные методы (см. §3).

В приложениях часто встречаются определители второго и третьего порядков. Определители второго порядка вычисляются согласно определению по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

которая иллюстрируется следующей схемой:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Для определителя третьего порядка соответствующая формула имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

При его вычислении часто удобно пользоваться правилом треугольников (правилом Саррюса), которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Ключевые слова и словосочетания

Определитель, элементы определителя, главная диагональ, побочная диагональ, порядок определителя, перестановка, инверсия (беспорядок).

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой определитель (детерминант) матрицы A ?
2. Что называется главной (первой) диагональю определителя?
3. Что называется побочной (второй) диагональю определителя?
4. Что называется перестановкой чисел?
5. Что называется инверсией (беспорядком) в перестановке?
6. Приведите прием подсчета числа инверсий (беспорядков) в перестановке.
7. Как определяется знак члена определителя n -го порядка?
8. Как вычисляются определители второго порядка?
9. С помощью какого правила можно вычислить определители третьего порядка?

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить число инверсий в перестановках:

а) 2, 4, 3, 5, 1, 7, 6;	б) 7, 5, 3, 6, 4, 2, 1;
в) 7, 4, 5, 3, 6, 2, 1, 8;	г) 8, 6, 4, 2, 7, 5, 3, 1.
2. Выяснить какие из данных произведений являются членами определителя соответствующего порядка; указать при этом порядок определителя и знак члена:

а) $a_{34}a_{15}a_{23}a_{42}a_{51}$;	б) $a_{15}a_{23}a_{34}a_{51}a_{42}$;
---------------------------------------	---------------------------------------

$$в) a_{61}a_{52}a_{42}a_{33}a_{14}a_{25};$$

$$з) a_{43}a_{42}a_{31}a_{24}a_{34}a_{16}.$$

3. Выбрать j и k так, чтобы произведение $a_{1j}a_{21}a_{32}a_{5k}a_{45}$ было отрицательным членом определителя пятого порядка.

4. Дополнить произведение элементов $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}$ определителя 7-го порядка так, чтобы получить член этого определителя, входящий в него: а) со знаком плюс; б) со знаком минус.

5. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 3x & 1 & 2 \\ x & x & 1 \\ 2 & x & 2x \end{vmatrix}$$

содержащие x^3 и x^2 .

6. Пользуясь определением определителя, вычислить определители:

$$а) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$з) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$д) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислить определители второго порядка:

$$а) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислить определители третьего порядка:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};$$

$$г) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$д) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$е) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

§3. Свойства определителей

Транспонированием определителя называется такое преобразование, при котором его строки делаются столбцами с тем же самым номером. Транспонирование есть поворот определителя около главной диагонали.

Свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства основывается на следующих рассуждениях. Всякий член определителя имеет вид $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ перестановка вторых индексов. Знак члена определителя зависит от четности инверсий в перестановке вторых индексов. В транспонированном определителе члены состоят из тех же множителей, что и в исходном определителе, хотя они имеют иное расположение индексов, но четность инверсий в перестановке вторых индексов одинакова. Отсюда и вытекает свойство определителя не изменяться при транспонировании.

Следовательно, строки и столбцы в определителе равноправны, и если выполняется некоторое свойство относительно строк, то такое

же свойство существует и для столбцов. В дальнейшем такие два свойства будем формулировать одновременно.

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Свойство 2. Если хотя бы одна из строк (столбцов) определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

Доказательство. Каждый член определителя содержит множитель из этой строки, все элементы которой равны нулю. Следовательно, все члены определителя и он сам равны нулю.

Свойство 3. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то определитель изменит знак.

Доказательство. В результате этой операции изменится четность инверсий в перестановке вторых индексов. Все члены получат обратные знаки, следовательно, и определитель изменить свой знак на обратный.

Пример. Убедиться в справедливости свойства 3 для определителя

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

и определителя получаемого из него перестановкой 1-й и 3-й строк.

Решение. Пользуясь правилом треугольников, получим

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 30 + 0 + 3 + 0 - 40 = -11.$$

Найдем теперь определитель, полученный из данного перестановкой 1-й и 3-й строк:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 40 + 4 - 30 = 11.$$

Выполнение свойства 3 очевидно.

Свойство 4. Если в определителе имеются две одинаковые строки (столбцы), то определитель равен нулю.

Доказательство. Если в определителе одинаковые строки поменять местами, то по свойству 3 он должен изменить знак на обратный. Однако в данном случае этого не произойдет, все члены определителя останутся в точности такими же, как и были и по величине и по знаку, а это возможно лишь тогда, когда определитель равен нулю.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на какое-либо число, то сам определитель умножится на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это свойство можно перефразировать так:

Общий множитель элементов строки (столбцов) можно выносить за символ определителя.

Доказательство. Каждый член определителя содержит множитель из этой строки. Значит, его можно вынести за знак определителя.

Например, имеем определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Умножим вторую строку определителя на число b . Получим

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ba_{21} & ba_{22} \end{vmatrix}.$$

Члены этого определителя $a_{11}ba_{22} - a_{12}ba_{21}$. Вынесем общий множитель за скобки $b(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Тогда в скобках останутся члены исходного определителя. Значит.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ba_{21} & ba_{22} \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. Если две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть две строки определителя пропорциональны, т.е. элементы одной получаются умножением элементов другой на коэффициент пропорциональности. После вынесения коэффициента пропорциональности за знак определителя по свойству 5, у определителя окажутся две одинаковые строки. А такой определитель (по свойству 4) равен нулю.

Свойство 7. Если все элементы некоторой строки (столбца) состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых элементами этой строки (столбца) являются первые слагаемые, во втором – вторые, а остальные элементы такие же, как и в данном определителе, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Каждый член данного определителя содержит множитель, и притом только, из той строки, элементы которой состоят из двух слагаемых. Раскрыв скобки в этом члене, получим два слагаемых: в одном вместо суммы множителем служит первое слагаемое элемента рассматриваемой строки, в другом – второе. Все первые и все вторые слагаемые образуют определители. У первого из

них элементами указанной строки служат первые слагаемые, у второго — вторые слагаемые, а остальные элементы обоих определителей совпадают с элементами данного определителя.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам какой — нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженное на любое число λ , т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (*)$$

В правой части равенства (*) элементы i -й строки состоят из двух слагаемых. Поэтому, согласно свойству 7, справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (**)$$

Но по свойству 4 второе слагаемое правой части этого равенства равно нулю, так как две строки определителя (i -я и j -я) одинаковы. Тогда из равенства (**) следует равенство (*).

Замечание. Перечисленные свойства широко используются для упрощения вычисления определителей.

Для того чтобы сформулировать последнее свойство определителей требуются новые понятия и определения.

Определение. Если в определителе n -го порядка выделить некоторый элемент, например a_{ij} , и вычеркнуть строку и столбец, в которых этот элемент находится (i -я строка и j -й столбец), то в результате останется определитель $(n-1)$ -го порядка. Этот оставшийся определитель называется **минором** элемента a_{ij} и обозначается символом M_{ij} .

Например, для определителя 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент a_{32} и вычеркнем 3-ю строку и 2-й столбец, в которых находится этот элемент. Получим минор элемента a_{32}

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, количество миноров $(n-1)$ -го порядка будет столько, сколько элементов содержит определитель, т.е. $n \cdot n$.

Если в миноре $(n-1)$ -го порядка выбрать какой-либо элемент и вычеркнуть строку и столбец, в которых он находится, то получим минор $(n-2)$ -го порядка. Аналогично, можно говорить о минорах $(n-3)$ -го, $(n-4)$ -го порядка и т.д. минором 1-го порядка являются сами элементы определителя.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение обозначается символом A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример. Дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент 5 и вычеркнем строку и столбец, в которых он находится. Получим

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение этого элемента

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3.$$

Теперь приведем последнее свойство определителей (без доказательства).

Свойство 9 (теорема Лапласа). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

или то же самое

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Но по свойству 4 второе слагаемое правой части этого равенства равно нулю, так как две строки определителя (i -я и j -я) одинаковы. Тогда из равенства (**) следует равенство (*).

Замечание. Перечисленные свойства широко используются для упрощения вычисления определителей.

Для того чтобы сформулировать последнее свойство определителей требуются новые понятия и определения.

Определение. Если в определителе n -го порядка выделить некоторый элемент, например a_{ij} , и вычеркнуть строку и столбец, в которых этот элемент находится (i -я строка и j -й столбец), то в результате останется определитель $(n-1)$ -го порядка. Этот оставшийся определитель называется **минором** элемента a_{ij} и обозначается символом M_{ij} .

Например, для определителя 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент a_{32} и вычеркнем 3-ю строку и 2-й столбец, в которых находится этот элемент. Получим минор элемента a_{32}

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, количество миноров $(n-1)$ -го порядка будет столько, сколько элементов содержит определитель, т.е. $n \cdot n$.

Если в миноре $(n-1)$ -го порядка выбрать какой-либо элемент и вычеркнуть строку и столбец, в которых он находится, то получим минор $(n-2)$ -го порядка. Аналогично, можно говорить о минорах $(n-3)$ -го, $(n-4)$ -го порядка и т.д. минором 1-го порядка являются сами элементы определителя.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение обозначается символом A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример. Дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент 5 и вычеркнем строку и столбец, в которых он находится. Получим

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение этого элемента

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3.$$

Теперь приведем последнее свойство определителей (без доказательства).

Свойство 9 (теорема Лапласа). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

или то же самое

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Эта формула называется **формулой разложения определителя Δ по элементам i -й строки**.

Очевидно, также имеет место **формула разложения определителя Δ по элементам j -го столбца**:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Следствие. Сумма произведений всех элементов некоторой строки (некоторого столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или другого столбца) равна нулю.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по элементам первой строки. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= 2A_{11} + A_{12} + 3A_{13} = 2(-1)^{1+1} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(9 - 8) - (15 - 2) + 3(20 - 3) = 2 - 13 + 51 = 40. \end{aligned}$$

Читатель может самостоятельно разложить определитель по другим строкам и столбцам определителя и убедиться, что во всех случаях искомая величина будет равна 40.

Нетрудно заметить, что если у определителя какая-либо строка или столбец содержит нулевые элементы, то разложение удобнее осуществлять именно по этой строке или столбцу.

Например, дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычислить такой определитель весьма просто, если разложить его по элементам второй строки:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 21 = 4.$$

Пользуясь свойствами определителя, можно превращать некоторые элементы какой-либо строки или столбца в нули, что существенно упрощает вычисления.

Пример. Дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь свойством 8, прибавим к элементам первой строки соответствующие элементы третьей строки, умноженные на -1. От этого определитель не изменится:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Как видим, среди элементов 1-й строки появился один нулевой. Теперь прибавим к элементам 2-го столбца соответствующие элементы третьего столбца, умноженные на -2. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель также равноценен исходному. Но его 1-я строка и 2-й столбец содержит по два нулевых элемента. Разложив, например, этот определитель по элементам 2-го столбца, имеем:

$$\Delta = 0 \cdot A_{12} + (-1) \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0 + 3) = -3.$$

Ключевые слова

Транспонирование определителя, минор, алгебраическое дополнение, теорема Лапласа, формула разложения определителя.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое транспонирование определителя? Докажите, что определитель не изменяется при транспонировании.

2. Чему равен определитель, если все элементы одной из его строк (или одного из его столбцов) равны нулю? Докажите это утверждение.

3. Почему определитель меняет знак, если в нем поменять местами две строки (или два столбца)?

4. Почему определитель равен нулю, если в нем имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца?

5. Как изменится определитель, если все элементы некоторой его строки (или столбца) умножить на какое-либо число?

6. Почему определитель равен нулю, если две его строки (или два столбца) пропорциональны?

7. Чему равен определитель, у которого все элементы какой-либо строки (или столбца) представляют собой сумму двух слагаемых?

8. Изменится ли определитель, если к элементам какой-либо его строки (или столбца) прибавить произведение соответствующих элементов другой строки (или столбца) на какое-либо постоянное число? Докажите это утверждение.

9. Что называется минором элемента определителя?

10. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя и как определяется его знак?

11. Как вычисляются определители с помощью алгебраических дополнений их элементов?

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{12} , a_{13} и a_{31} для определителя

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$г) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$д) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$е) \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$$

$$ж) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$з) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$и) \begin{vmatrix} 4 & a & 1 & -5 \\ 3 & b & 2 & 1 \\ 2 & c & -3 & 4 \\ 1 & d & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Пользуясь свойствами определителей, включая разложение по строке или по столбцу, доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

§4. Дальнейшее изучение матриц. Ранг матрицы. Обратная матрица

Теперь мы после изложения теории определителей продолжим дальнейшее изучение матриц.

4.1. Некоторые определения

Определение. Квадратная матрица называется **невырожденной** или **неособенной**, если ее определитель не равен нулю, и **вырожденной** или **особенной**, если ее определитель равен нулю.

Пример. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Установить, какие из них являются неособенными.

Решение. Вычислим определители данных матриц.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 60 = -50, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0.$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, матрицы A и E - неособенные, а матрица B - особенная.

Замечание. Определитель единичной матрицы любого порядка, очевидно, равен единице.

Определение. **Присоединенной** к квадратной матрице A называется матрица $\bar{A}$ того же порядка, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя матрицы A' , транспонированной относительно матрицы A . Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти присоединенную матрицу.

Решение. Найдем матрицу A' , транспонированной относительно матрицы A :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элементы присоединенной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Следовательно, матрица $\bar{A}$, присоединенная к матрице A , имеет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -5 & -15 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отметим одно интересное свойство.

4.2. Определитель произведения двух матриц

Если A и B - квадратные матрицы одного и того же порядка, то $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Пример. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$AB = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 11 \\ 27 & 33 & 18 \\ 20 & 34 & 19 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 16 \\ 32 & 29 & 25 \\ 28 & 23 & 23 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то, что полученные матрицы различны, их определители равны: $|AB| = |BA| = -120$. С другой стороны $|A| \cdot |B| = -3 \cdot 40 = -120$.

4.3. Ранг матрицы

4.3.1. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймления

В матричном исчислении важное значение имеет понятие ранга матрицы. Сначала, прежде чем вводить понятие ранга матрицы введем понятие минора k -го порядка матрицы.

Выше отмечалось (см. §3), что определитель порядка n может иметь миноры различных порядков: $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ и т. д.

Аналогично обстоит дело и с минорами матриц.

Пусть дана матрица A размерностью $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней произвольно k строк и k столбцов. Тогда получим квадратную матрицу k -го порядка. Определитель этой матрицы называется **минором k -го порядка матрицы A** . Выбирая всевозможными способами по k строк и k столбцов, получаем всевозможные миноры k -го порядка матрицы A . Очевидно, что максимальный порядок минора может равняться меньшему числу из m и n .

Но миноры могут быть и других порядков: $(k-1)$ -го, $(k-2)$ -го, $(k-3)$ -го и т. д. вплоть до миноров 1-го порядка (каждый отдельный элемент матрицы A).

Рангом матрицы A называется наибольшее из порядков миноров, отличных от нуля и обозначается $\text{rang} A$ или $r(A)$.

Таким образом, ранг матрицы определяется максимальным порядком минора, отличного от нуля. Если матрица A имеет ранг r , то это означает, что существует в этой матрице минор порядка r , отличный от нуля, а всякий минор порядка большего, чем r , равен нулю (в противном случае именно он определял бы ранг матрицы).

Пусть выделенное из матрицы A максимальное количество произвольных k строк и k столбцов (предположим, что $n < m$ и поэтому $k = n$) составляет следующую квадратную матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если определитель, составленный из элементов этой матрицы, не равен нулю, то это означает, что матрица A размерностью $m \times n$ имеет ранг, равный n . Если же этот определитель равен нулю, то ранг матрицы A меньше n .

Выделим в матрице элемент a_{ij} и вычеркнем строку и столбец, в которых он находится. Получим минор $(n-1)$ -го порядка.

Количество миноров этого порядка, естественно, равно количеству элементов матрицы, т.е. $n \times n$. Если среди этих элементов имеется хотя бы один, отличный от нуля, то ранг матрицы равен $n-1$. Если же все миноры этого порядка равны нулю, то тогда надлежит рассмотреть все миноры $(n-2)$ -го порядка и т. д.

Практический способ вычисления ранга матрицы (исходя из выше изложенного) состоит в следующем: в заданной матрице выбираем минор 2-го порядка, не равный нулю. Если такого минора нет, то ранг матрицы будет равен единице (если, конечно, матрица не нулевая, т.е. не все ее элементы равны нулю; нулевая матрица имеет ранг 0).

Затем находим значение миноров, окаймляющих выбранный. **Минором, окаймляющим данный минор**, называется минор высшего порядка по отношению к данному, если этот минор высшего порядка содержит данный минор. Если найдется минор, отличный от нуля, то продолжаем окаймление дальше, если же такого минора не окажется, то ранг равен 2 и т. д.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим минор 2-го порядка, не равный нулю, например, минор, составленный из элементов, расположенных в левом верхнем углу матрицы:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Окаймляем его. Возможны четыре варианта окаймления, но во всех случаях эти миноры 3-го порядка оказываются равными нулю:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 10 & 18 & 40 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 10 & 18 & 17 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы равен 2, так как наивысший порядок минора, отличного от нуля, равен 2.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Левый верхний минор 2-го порядка равен нулю

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Возьмем другой минор 2-го порядка, например

$$M = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Окаймляем его и получим минор 3-го порядка:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Продолжим окаймление. Здесь возможны два варианта, определить которые рекомендуется читателю. В обоих случаях миноры 4-го порядка окажутся равными нулю. Значит, матрица A имеет ранг 3, т.е. $r(A) = 3$.

Замечание. Такое вычисление ранга является, вообще громоздким, так как приходится часто рассматривать большое число миноров матрицы. Существуют более эффективные способы вычисления ранга матрицы, основанные на приведении матрицы к ступенчатому или каноническому виду. Их мы рассмотрим в п. 4.3.3.

4.3.2. Основные свойства ранга матрицы

Рассмотрим теперь те свойства ранга матрицы, которые упрощают его вычисление.

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

Свойство 2. Ранг матрицы не меняется при перестановке ее столбцов (или строк).

Свойство 3. Ранг матрицы не меняется при умножении всех элементов ее столбца (или строки) на отличное от нуля число.

Свойство 4. Ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов (или строк) прибавить другой столбец (соответственно строку), умножив его (ее) на некоторое число.

Доказательство. Обозначим через A исходную матрицу, через $\tilde{A}$ - преобразованную. Согласно определению ранга достаточно установить, что всякому отличному от нуля минору $\tilde{M}$ матрицы $\tilde{A}$ отвечает отличный от нуля минор M того же порядка в матрице A , и наоборот. Но поскольку все преобразования, о которых идет речь, обратимы (иначе говоря, матрица A может быть получена из матрицы $\tilde{A}$ преобразованием того же вида, что и $\tilde{A}$ из A), то в доказательстве нуждается только первая часть утверждения.

Итак, пусть $\tilde{M}$ - отличный от нуля минор матрицы $\tilde{A}$. В случае преобразований 1 - 3 в матрице A найдется минор M того же порядка, удовлетворяющий одному из следующих соотношений:

$$M = \tilde{M}', \quad M = (-1)^s \tilde{M}, \quad M = \mu \tilde{M}, \quad \text{где } \mu \neq 0.$$

Если $\tilde{M} \neq 0$, то и $M \neq 0$. Поэтому свойства 1 - 3 доказаны.

Для доказательства свойства 4, учитывая возможность перестановки столбцов, напомним:

$$A = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n), \quad \tilde{A} = (C_1 + \lambda C_2 \ C_2 \ \dots \ C_n).$$

Рассмотрим следующие три случая:

1. Минор $\tilde{M}$ матрицы $\tilde{A}$ не содержит элементов ее первого столбца $C_1 + \lambda C_2$. Тогда, если M соответствующий (одинаково расположенный) минор матрицы A , то, очевидно, $M = \tilde{M} \neq 0$.

2. Минор $\tilde{M}$ содержит элементы первых двух столбцов матрицы $\tilde{A}$. Если M - соответствующий минор матрицы A , то

$$\tilde{M} = M + \lambda M_1,$$

где $M_1 = 0$, так как содержит два одинаковых столбца - первый и второй. Значит, и в этом случае $M = \tilde{M} \neq 0$.

3. Пусть, наконец, $\tilde{M}$ содержит элементы первого столбца матрицы $\tilde{A}$, но не содержит элементов ее второго столбца. Имеем опять

$$\tilde{M} = M + \lambda M_2,$$

где теперь и M и M_2 - миноры матрицы A того же порядка, что и $\tilde{M}$. Так как $\tilde{M} \neq 0$, то или $M \neq 0$, или $M_2 \neq 0$. Следовательно, во всех случаях, ненулевому минору матрицы $\tilde{A}$ можно поставить в соответствие ненулевой минор того же порядка матрицы A . Как указывалось выше, в силу обратимости преобразования верно и обратное. Следовательно, $r(A) = r(\tilde{A})$; свойство 4 доказано.

Свойство 5. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, равный нулю.

Действительно, все миноры матрицы A , не входящие в преобразованную матрицу $\tilde{A}$, содержат нулевой столбец и, значит, равны нулю. Поэтому максимальный порядок отличных от нуля миноров у этих матриц одинаков.

Свойство 6. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, являющийся линейной комбинацией других столбцов.

В самом деле, по свойству 4 можно, не меняя ранга, сделать этот столбец нулевым, после чего по свойству 5 удалить.

В формулировках свойств 5 и 6, разумеется, столбцы можно заменить строками.

4.3.3. Элементарные преобразования матрицы. Простейший метод вычисления ранга матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

- 1) перестановка двух любых столбцов (или строк);
- 2) умножение столбца (или строки) на отличное от нуля число;
- 3) прибавление к одному столбцу (или строке) линейной комбинации остальных столбцов (или строк).

Как было доказано в п.4.3.2, при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Две матрицы называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы A и B эквивалентны, то это записывается так: $A \sim B$.

Ступенчатой матрицей называется матрица, обладающая тем свойством, что если в какой-либо из ее строк первый отличный от нуля элемент стоит на k -м месте, то во всех следующих строках на первых k местах стоят нули, например:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любая матрица при помощи элементарных преобразований только строк приводится к ступенчатой. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Простейший метод вычисления ранга матрицы с числовыми элементами состоит в приведении ее элементарными преобразованиями к ступенчатой или канонической матрице.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. При помощи элементарных преобразований приводим эту матрицу к ступенчатому виду.

Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

из третьей строки вычтем вторую; получим ступенчатую матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая эквивалентна матрице A , так как получена из нее с помощью конечного множества эквивалентных преобразований.

Очевидно, что ранг матрицы B равен двум, а следовательно, и $r(A) = 2$.

Матрицу B легко привести к канонической. Вычитая первый столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы первой строки, кроме первого, причем элементы остальных строк не изменяются. Затем, вычитая второй столбец, умноженный на подходящие числа, из последующих, обратим в нуль все элементы второй строки, кроме второго, и получим каноническую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Процедура вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований позволяет решить и другую задачу: выделить из системы столбцов (строк) этой матрицы базис, а также найти выражения всех столбцов (строк) через базисные. Это мы покажем на примере в п. 4.4.2.

Замечание. В дальнейшем в п. 4.5.2 мы покажем применение элементарных преобразований к отысканию обратной матрицы.

4.4. Теорема о базисном миноре. Необходимое условие равенства нулю определителя

4.4.1. Линейная комбинация векторов. Теорема о линейной зависимости векторов

Напомним ранее введенные некоторые определения (см. §1) и несколько дополним их.

Вектором мы называем матрицу, состоящую из одного столбца (вектор-столбец) или из одной строки (вектор-строка). Элементы этой матрицы называются **компонентами вектора**. Число компонент вектора - это его размерность; вектор размерности n называется n -мерным. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под словом «вектор» будем понимать вектор-столбец.

Вектор Y называется **линейной комбинацией векторов** $X_1, X_2, \dots, X_n$, если имеет место равенство

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ числовые коэффициенты.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются **коэффициентами линейной комбинации**. Очевидно, что компоненты вектора Y представляют собой линейные комбинации соответствующих компонент векторов $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Векторы $X_1, X_2, \dots, X_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует равная нулевому вектору (нулю) линейная комбинация

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = \Theta,$$

где не все коэффициенты λ_j равны нулю.

Заметим, что если некоторые из векторов $X_1, X_2, \dots, X_n$ линейно зависимы, то и все они линейно зависимы, так как остальные векторы можно включить в имеющуюся зависимость с нулевыми коэффициентами.

Векторы $X_1, X_2, \dots, X_n$, не являющиеся линейно зависимыми, называются **линейно независимыми**. Иначе говоря, векторы $X_1, X_2, \dots, X_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = \Theta$$

возможно лишь в случае, когда все коэффициенты λ_j равны нулю.

Между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости существует следующая связь.

Теорема. Для того чтобы векторы $X_1, X_2, \dots, X_n$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Пусть векторы $X_1, X_2, \dots, X_n$ линейно зависимы. По определению это означает существование чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не равных одновременно нулю, и таких, что

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = \Theta.$$

Для простоты записи предположим, что ненулевым является первый коэффициент λ_1 . Умножив обе части предыдущего равенства на число $-\frac{1}{\lambda_1}$, получим

$$-X_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)X_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)X_n = \Theta,$$

или

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимирова Л.П. Прогнозирование и планирование в условиях рынка. М.: Издательский Дом «Дашков и К⁰», 2001.
2. Бабешко Л.О. Коллокационные модели прогнозирования в финансовой сфере. М.: Экзамен, 2001.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Мир, 1976.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.
7. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
8. Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч.1 и 2. М.: Высшая школа, 1982.
9. Высшая математика для экономистов / Под ред. профессора Н.Ш. Кремера. М.: ЮИНТИ, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
 ГЛАВА I. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ	
§1. Основные сведения о матрицах. Действия над матрицами	4
§2. Понятие определителя n -го порядка	22
§3. Свойства определителей	29
§4. Дальнейшее изучение матриц. Ранг матрицы. Обратная матрица	40
 ГЛАВА II. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	
§5. Основные понятия и методы решения систем линейных уравнений	81
§6. Общая теория систем линейных уравнений	107
§7. Арифметические векторные пространства	125
§8. Система векторов в пространстве R^n	136
§9. Координаты векторов, преобразования координат, подпространства в пространстве R^n	150
§10. Система фундаментальных решений однородной линейной системы уравнений. Связь решений однородной и неоднородной систем	178
§11. Леонтьевская межотраслевая модель экономики (балансовый анализ)	196
 ГЛАВА III. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	
§12. Прямая на плоскости	206
§13. Кривые второго порядка на плоскости	225
§14. Прямая и плоскость в пространстве	243
 ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОР- МЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	
§15. Линейные пространства. Евклидовы пространства	256
§16. Линейные операторы	276
§17. Собственные векторы	293
§18. Квадратичные формы	306
 ЛИТЕРАТУРА	334