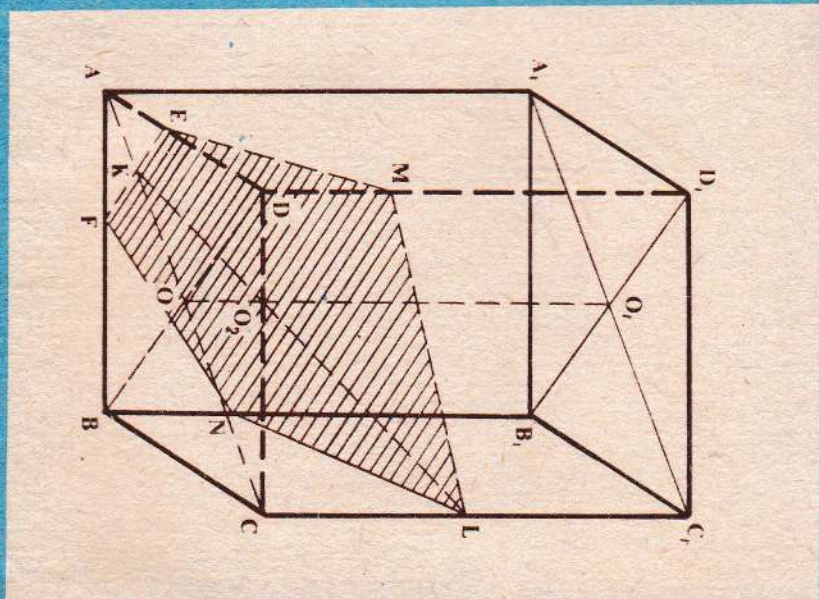


535.
51(075)
T60
H

ШИ ТОЖИЕВ

МАТЕМАТИКА

ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИГА КИРУВЧИЛАР УЧУН



Книга должна быть возвращена
не позже указанного здесь срока

Количество предыдущих выдач _____

08.04.22.
17.05.22

Ш. И. ТОЖИЕВ

435
51/0087
760

МАТЕМАТИКА

Ўзбекистон ССР Халқ таълими вазирлигининг олий ўқув
юртадорлигининг таърифов бўлиши тингловчилари ва абиту-
рентлар учун ўқув қўлланмиси сифатида тасдиқланган

Селиф

У/4040

ТОШКЕНТ, ЎҚИТУВЧИ • 1960

Т а қ р и з ч и — Педагогика фанлари кандидати Д. А. Маваши
Ма х с у с м у х а р р и р — Физика-математика фанлари
кандидати, доцент Р. Худойберганоэ

Қўлланмада олий ўқув юр்தларига кирувчилар математикада
кириш имтиҳонларида йўл қўядиган типик хатолар таҳлил қилин-
ган. Ёзма имтиҳонларда қўйилган талоғлар баён қилинган. Им-
тиҳонларда бериладиган вариантлар ва уларнинг ечимлари зарур
кўрсатмалар билан берилган. Мустақил ечиш учун 500 дан орти-
мисол ва масала келтирилган.
Қўлланма олий ўқув юр்தларига кирувчилар учун мўлжаллан-
ган.

ЎЗГА БОСМАН

Ўқувчиларнинг эътиборига ҳавола қилинаётган маз-
кур қўлланма олий ўқув юр்தларига киришга тайёрга-
лигини, математикадан ўз билимларини чуқурлашти-
ришни исбатлаган ўртоқларга мўлжалланган. Олий ўқув
юр்தларида математикадан ўтказиладиган кириш имти-
ҳонларининг яқинлари шунки кўрсатилганки абитуриент-
ларнинг аксарияти мисол ва масалалар ечишда „қоқи-
лабдор“. Назарий материал юзасидан бериладиган
аввалларга буюро-буюро жавоб берадиган абитуриент-
лар мисол ва масалалар ечишга келганда у ёки бу на-
зоратчи шу мисол ёки масалани ечишга қўлай олмас-
лилари кўришиб қолади. Хусусан, кўпчилик абитури-
ентлар тенгламаларни ечишда, бажарадиган турли шакл
амаллаштиришлар натижасида тенгламанинг илдиэлари
ўқолишиб, чет илдиэларнинг пайдо бўлиши каби
қандай фактларга эътибор бермасликлари туфайли
исоғларни тўғри еча олмайдилар. Масалалар доир чи-
қадиган чизмаларда йўл қўйиладиган элементар
ағдолар абитуриентни умуман нотўғри йўлга солиб
қўйибди, натижада у масалани ё нотўғри ечади, ё,
мумкин еча олмайдди. Абитуриентларнинг кириш имти-
ҳонларида йўл-қўйдиган шу ва шунга ўхшаш типик
ағдоларни ҳақида, бундай хатоларга йўл қўймаслик
уларни туғрисида мазкур қўлланмада баъзи масала-
лар берилган ҳаракат қилинган. Кириш имтиҳон-
ларида тапсия этилган айрим мисол ва масалаларни ечиб
ўқувчилар орқали абитуриентлар томонидан йўл қўйила-
ган айрим хатолар таҳлил қилинган ҳамда олий тех-
ника ўқув юр்தларига кирувчилар учун математикадан
қандай ва қандай имтиҳонларда қўйилган талоғлар
нидан таништирилган.

Т 1602040000 — 79 138 — 90
353 (04) — 90 © „Ўқитувчи“ нашриёти, 1990
ISBN — 5 — 645 — 00698 — 4

Қўлланмани ёзишда автор кўп йиллар давомида
олий ўқув юр்தларига кириш имтиҳонларида иштирок
таб ортирган тажрибасидан фойдаланган.
Китобда бир неча йиллар давомида Тошкент поли-

техника институтига математикадан кириш имтиҳонларида тавсия этилган ёзма иш вариантларидан ва оғзаки имтиҳон билетларидан намуналар келтирилган. Қўлингизда вариантлар ечилишлари билан берилган. Шунингдек, бир қатор олий ўқув юр்தларида ўтказилган кириш имтиҳонлари вариантлари ҳам танишиш учун (айримлари ечилишлари билан) келтирилган.

Қўланмада 500 дан бoртиқ мисол ва масала мустақил ечиш учун абитуриентларга тавсия этилган. Мисол ва масалалар ечишда тез-тез керак бўлиб турадиган математик формулалар ва муносабатлар китобга илова қилиб берилган.

Автор китоб қўлёзмасини муфассал ўқиб, ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга, хусусан, Тошкент политехника институтининг иккинчи олий математика кафедрасининг ўқитувчиларига, қўлёзма сифатини яхшилашга қаратилган бир қатор фикрлари учун педагогика фанлари доктори профессор Н. Ғайбуллаевга, доцент Д. А. Мавашевга, Тошкент Давлат университети математика ўқитиш методика кафедрасининг доценти Р. Худойбергановга ўз миннатдорчилигини билдирди.

Қўланма тўғрисидаги фикр ва мулоҳазаларни автор миннатдорчилик билан қабул қилади.

Автор

1 БОБ АБИТУРИЕНТЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИДА УЧРАЙДИГАН ТИПИК ХАТОЛАР

1-§ Тенгламалар

$f(x) = g(x)$ кўринишдаги тенглик бир ўзгарувчилик (номатълумлик) тенглама дейилади, бунда $f(x)$ ва $g(x)$ берилган функциялар. Тенглама одатда ўзининг аниқланish соҳаси $-D(f)$ ва $D(g)$ тўғламаларининг умумий қисмида қаралади.

Ўзгарувчининг тенгликни қаноатлантирадиган қиймати тенгламанинг ечими (илдизи) дейилади. Бу ечим $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланish соҳаларининг умумий қисмига тегишли бўлиши шарт.

Тенгламани ечиш — унинг ҳамма илдизларини топishни ёки илдизи йўқ эканлигини исботлашни билдиради.

Қуйдаги тенгламаларнинг илдизларини (ечимларини) топish формулалари бизга маълум:

агар $ax + b = 0$, $a \neq 0$ бўлса, $x = -\frac{b}{a}$;

агар $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac \geq 0$ бўлса, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ ва ниҳоят, $D < 0$ бўлса, тенглама

ечимга эга эмас; $\sin x = a$, $|a| \leq 1$ бўлса, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi \cdot n$, $n \in Z$ бутун сонлар тўплами ва ҳоказо. Бу тенгламаларни содда тенгламалар деймиз.

Ёзма ишларда таклиф қилинган тенгламаларнинг аксарият кўпчилиги шу берилган тенгламага боғлиқ бўлган, ана шу тенглама устида маълум амаллар bajarилгандан кейин содда тенгламаларга келадиган тенгламалар бўлади.

Ана шундай амаллар қаторига тенгламанинг иккала қисмига ўзгарувчи қатнашган биргина ифодани кўпиш ёки биргина ифодага кўпайтиришга тўғри келади, яъни

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \\ f(x) + \varphi(x) &= g(x) + \varphi(x), \end{aligned}$$

$$f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x), \\ f^n(x) = g^n(x)$$

ва ҳоказо.

Бу ҳолларда ҳар дони ечимлар (илдизларнинг барча-си) тўплами ўзгарган-ўзгармаганини аниқлаш зарур.

Таъриф Агар биринчи тенгламанинг ҳар қандай ечими иккинчи тенгламанинг ҳам ечими бўлса ва аксинча, иккинчи тенгламанинг ҳар қандай ечими биринчисининг ҳам ечими бўлса, у ҳолда бу икки тенглама берилган сонли тўпланда *тенг кучли* (*эквивалент*) тенгламалар дейилади.

Мисоллар. 1. $x = 1$ ва $x^2 = 1$ тенгламалар ҳақиқий сонлар соҳасида тенг кучли, чунки уларнинг ҳар бири битта $x = 1$ ечимга эга.

$$2. x(x-1) = 0 \text{ ва } x(x-1) + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \text{ тенгла-}$$

малар тенг кучли тенгламалар эмас, чунки биринчи тенгламанинг $x = 1$ ечими иккинчи тенгламанинг ечи-ми эмас. Энди тенгламанинг ечимлар тўпламини топиш жараёнида кўп ишлатиладиган тенгламаларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги ушбу тасдиқларни исботсиз келтирамиз:

1. $f(x) = g(x)$ ва $f(x) - g(x) = 0$ тенгламалар тенг кучли.

2. Иштиёрий $a \in R$ сон учун $f(x) = g(a)$ ва $f(x) + a = g(x) + a$ тенгламалар тенг кучли.

3. Иштиёрий $a \in R$ ($a \neq 0$) сон учун $f(x) = g(x)$ ва $a f(x) = a g(x)$ тенгламалар тенг кучли.

4. Иштиёрий $a > 0$ ($a \neq 0$) сон учун $f(x) = g(x)$ ва $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ тенгламалар тенг кучли.

5. Агар бирор M тўпланда $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ бўл-са, у ҳолда иштиёрий натурал сон n учун, шу M тўп-ламда $f(x) = g(x)$ ва $(f(x))^n = (g(x))^n$ тенгламалар тенг кучли.

6. Агар M тўпланда $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ бўлса, у ҳолда иштиёрий $a > 0$ ($a \neq 1$) сон учун M тўпланда $f(x) = g(x)$ ва $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ тенгламалар тенг кучли.

7. Агар $y = \varphi(x)$ функция M тўпланининг ҳеч бир нуқта-сида нолга тенг бўлмаса ва $f(x) = g(x)$ тенгла-манинг аниқланган соҳасида маънога эга бўлса, у ҳол-да M тўпланда $f(x) = g(x)$ ва $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ тенгламалар тенг кучли.

Агар тенгламанинг шу тасдиқларга амал қилган ҳолда ечимлари топилса, у ҳолда тенгламанинг ечим-ларини текшириш шарт эмас.

Бошқа ҳолларда тенгламанинг ечимлари чида бе-гона ечим ҳосил бўлиши ёки ечим йўқолишидан қўту-лиш учун топилган ечимларни афбатга текшириш ке-рак. Топилган ечимлар қандай текширилади? Текши-ришнинг иккита асосий усулини кўрсатиш мумкин:

1) топилган ечимларнинг ҳар бирини берилган тенгламатга қўйиш; 2) ҳамма этапларда ҳосил бўлган тенглама берилган тенгламатга тенг кучли тенглама эканлигини исбот қилиш.

Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

$\frac{2x^2}{x^2-3x^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{18}{(x-3)^2}$ тенгламани ечиш учун касрларни умумий махражга келтириб, махраждан қўт-қарамиз. У ҳолда $2x^2 = x-3+18 \Rightarrow 2x^2 - x - 15 = 0$ тенгламатга эга бўламиз. Бу тенглама $x_1 = 3$ ва $x_2 = -2,5$ ечимларга эга.

Текшириш. Агар $x_1 = 3$ ни тенгламатга қўйсак,

$$\frac{2 \cdot 3^2}{3-3^2} = \frac{1}{3-3} + \frac{18}{(3-3)^2} \Rightarrow \frac{18}{0} = \frac{1}{0} + \frac{18}{0}$$

ни ҳосил қиламиз, яъни $x_1 = 3$ да тенглама маънога эга бўлмай қолди, демак, у бегона ечим.

Агар $x_2 = -2,5$ ни тенгламатга қўйсак:

$$\frac{2 \cdot (-2,5)^2}{(-2,5-3)^2} = \frac{50}{121} - \frac{1}{-2,5-3} + \frac{18}{(-2,5-3)^2} = \frac{50}{121}.$$

Шундай қилиб, $x_2 = -2,5$ да тенгламанинг иккада қисми бир хил сон кийматга эга бўлгани учун $x = -2,5$ берилган тенгламанинг ечими бўлади.

Кўпчилик абитуриентлар тенгламалар ечаётганда унинг ечимлари йўқолиши ва бегона ечимларнинг ке-либ чиқишини билмасликлари туфайли берилган тенг-ламани қаноатлантирмайдиган ечимларни жавоб сифа-тида ёзиб қўядилар. Масалан, абитуриентлар $x^3 - \frac{4x^2}{4x^2} = 0$ тенгламани ечар эканлар $\frac{x^2}{x^2}$ касрни қисқар-

тириш натижасида $x^3 - 4x = 0$ ни ҳосил қилиб, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ ечимларни топдилар. Ҳосил қи-лингн $x^3 - 4x = 0$ тенглама берилган тенгламатга тенг кучли эмас. Бундай алмаштириш натижасида пайдо бўлган $x_2 = 0$ ечим берилган тенгламанинг аниқланган

соҳасига кирмайди. Бетона ечим пайдо бўлган. Бетона ечим пайдо бўлмаслиги учун берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x \neq 0$ ни ҳисобга олиш керак эди.

$$x^2 + x + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+3} + 12$$

тенгламанинг ечимини топish учун унинг ҳамма ҳадларини бир томонга ўтказиб $x^2 + x - 12 = 0$ тенглама ҳосил қилинган ва унинг $x_1 = 3, x_2 = -4$ ечимлари топилган. Бироқ берилган тенглама фақат $x_1 = 3$ ечимга эга. Агар берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси эътиборга олинганда эди, у ҳолда $x = 3$ ечим билан чекланган бўлинар эди. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+5} = 3$ тенгламани ечиш учун илдиэлар остидаги ифодаларни кўпайтириб, сўнг-ра ҳар икки томонни квадрат кўтариб, $2x^2 + 3x - 14 = 0$ тенглама ҳосил қилинган. Унинг ечимлари: $x_1 = -3,5$ ва $x_2 = 2$. Бироқ берилган тенгламани фақат $x = 2$ ечим қаноатлантиради. Демак $x_2 = -3,5$ бетона ечим.

Бетона ечимнинг пайдо бўлишига сабаб берилган тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарилганда унинг аниқланиш соҳаси кенгайишидир. Аммо, тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенгайиши билан ҳамма вақт ҳам бетона ечимга эга бўлавермаслигимизни қайд қилиб ўтамиз. Масалан, $\sqrt{x+2} = 2$ тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $x \geq -2$.

Агар тенгламанинг ҳар икки томонини квадратга кўтарсак, берилган тенгламага тенг кучли $x+2=4$ тенгламага эга бўламиз. Унинг аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ дан иборат.

Абитуриентларнинг тенгламаларни ечишда йўл кўядиган асосий хатоларидан яна бири тенгламанинг иккала томонини номўълум иштирок этган умумий кўпайтувчига бўлиш натижасида содир бўлади. Агар шу умумий кўпайтувчи (функция) тенгламанинг аниқланиш соҳасида нолга айланса, у ҳолда тенгламанинг иккала томонини қисқартириш натижасида ечим йўқолади. Масалан, ечимлари $x_1 = 5$ ва $x_2 = 9$ бўлган $(x-5)^2 = 4(x-5)$ тенгламани ечишда кўпчилик абитуриентлар тенгламанинг иккала томонини $(x-5)$ га қисқартириб, фақат битта $x = 9$ ечимни топганлар. Натижада $x = 5$ ечим йўқолган.

Абитуриентлик тенгламаларни ечишда ҳам юқоридаги хатолар учрайди. Масалан, $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)} = 2$ тенгламани

ечишда абитуриентлар куйидаги соддалаштиришларни бажарганлар:

$$\lg 2x = 2 \lg(4x-15) \Rightarrow \lg 2x = \lg(4x-15)^2 \Rightarrow 2x = (4x-15)^2.$$

Бу тенгламани ечиб, $x_1 = \frac{9}{2}$ ва $x_2 = \frac{25}{8}$ ечимларни топганлар.

$x_2 = \frac{25}{8}$ ечим берилган тенгламани қаноатлантирмаслигини осонгина текшириш мумкин. Берилган тенглама $2x = (4x-15)^2$ кўринишга келтирилганда тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенгайди ва натижада $x_2 = \frac{25}{8}$ бетона ечим ҳосил бўлади.

Кўпчилик абитуриентлар тенгламаларнинг иккала томонини бир хил асосда логарифмлаганда тенгламанинг аниқланиш соҳаси торайишини, потенцириланда эса унинг аниқланиш соҳаси кенгайишини эътиборга олмайдилар. Масалан, $x^2 = 49$ тенглама $x_1 = -7$ ва $x_2 = 7$ ечимларга эга. Агар берилган тенгламани 7 асосга кўра логарифмласак, у ҳолда берилган тенгламага тенг кучли бўлмаган тенгламага эга бўламиз:

$$2 \log_7 x = \log_7 49 \Rightarrow 2 \log_7 x = 2 \Rightarrow \log_7 x = 1,$$

натижада битта $x = 7$ ечимни топамиз. Демак, логарифмлаш натижасида тенгламанинг аниқланиш соҳаси тораяди, яъни $x^2 = 49$ тенглама x нинг ҳамма ҳақиқий қийматларида маънога эга, $\log_7 x = 1$ эса фақат $x > 0$ да маънога эга.

$f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x) = 0$ кўринишдаги тенгламаларни ечишда ҳам абитуриентлар тез-тез хатога йўл қўядилар. Кўпайтма нолга тенг бўлса, кўпайтувчилардан камида биттаси албатта нолга тенг бўлиши бизга маълум. Бу тасдиқни кўпайтувчилар алгебраик функциялар бўлган ҳол учун татбиқ қилишда жуда ҳам эҳтиёт бўлиш керак.

Масалан, $(x-3)\sqrt{2-x} = 0$ тенгламани ечишда абитуриентлар уни иккита 1) $x-3=0$; 2) $\sqrt{2-x}=0$ мустақил тенгламалар кўпайтмаси кўринишда ёзиб оладилар ва улардан $x_1=2, x_2=3$ ларни топадилар. Бу усул билан топилган $x_2=3$ ечим берилган тенглама учун бетона ечимдир. Ҳақиқатан ҳам, $x_2=3$ да

$\sqrt{2-x}$ кўпайтувчи маънога эга бўлмайди. Демак, берилган тенгламани қаватлантирмайдиган $x_2 = 3$ ечимни топдик.

Олий ўқув юр்தарига кириш имтиҳонларида берилдиган ҳамма тенгламалар бирор метод билан ечишни талаб қилмайди. Масалан, $4x^2 + 8 \cdot 4x + 5 = 0$ кўрсаткичли тенглама учун x нинг ҳар қандай қийматида унинг чап томони нолга тенг бўлмагани учун берилган тенглама ечимга эга эмаслигини айтиш мумкин. Аммо кўпчилик адитуриснтлар $z = 4x$ алмаштириш бажариб, уни $z^2 + 8z + 5 = 0$ кўринишдаги тенгламага келтириб, берилган тенгламанинг ечими йўқ эканини аниқлайдилар.

$\sqrt{x-20} + \sqrt{1-x} = 8$ кўринишдаги иррационал тенгламани иррационалликдан кутқариш зарур эмас. Тенгламанинг аниқланиш соҳасини топгач, унинг ечимига эга эмаслигини кўрсатиш етарлидир, яъни

$$\begin{cases} x-20 \geq 0, \Rightarrow x \geq 20, \\ 1-x \geq 0, \Rightarrow x \leq 1. \end{cases}$$

Бу системанинг ечими бўш тўғламан иборат.

Энди институтга кириш имтиҳонларида берилган тенгламаларнинг айримларини ечиш усули билан таъништирамиз.

1-мисол. $\frac{3}{x^2-4} + \frac{5}{x^2-4x+4} = \frac{2x+28}{x^3-2x^2-4x+8}$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x^2-4)$ эканини эътиборга олиб, берилган тенгламанинг иккала қисмидаги ифодаларни умумий маҳражга келтирамиз:

$$\frac{3(x-2)+5(x+2)}{(x-2)(x^2-4)} = \frac{2x+28}{(x-2)(x^2-4)} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-2)+5(x+2) = 2x+28 \\ (x-2)(x^2-4) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-6+5x+10=2x+28 \Rightarrow 6x=24 \Rightarrow x=4 \\ (x+2)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

$$(4-2)(4+2) \neq 0 \text{ мулоҳаза тўғри.}$$

Жавоб: 4.

2-мисол. $2 - \frac{x-3}{4-x} = \frac{1}{x-4}$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. Тенгламанинг иккала қисмидаги ифодаларни умумий маҳражга келтирамиз:

$$\frac{2(x-4)+(x-3)}{x-4} = \frac{1}{x-4} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-4)+(x-3)=1, \Rightarrow \\ x-4 \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4, \\ x-4 \neq 0. \end{cases}$$

$$4-4=0 \text{ мулоҳаза нотўғри.}$$

Жавоб: Тенгламанинг илдизи йўқ.

Демак, маҳражга ўзгарувчи қатнашадиган тенгламаларни ечганда, x нинг топилган қиймати қаср маҳражини нолга айлантирмаслигини текшириб кўриш керак. Агар x нинг топилган қийматида маҳраж нолга тенг бўлса, у ҳолда x нинг бу қиймати берилган тенгламанинг ечими бўлмай, балки бегона ечим бўлади.

Иррационал тенгламаларни ечиш учун, аввал ундаги ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлари соҳасини топиш керак. Ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлари соҳаси топилмаган ҳолларда эса, ўзгарувчининг топилган ҳамма қийматларини берилган тенгламага кўйиб текшириш лозим. Агар ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлар соҳаси топилган бўлса, у ҳолда тенгламанинг бу соҳага тегишли ҳамма ечимлари олинад.

3-мисол. $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{3x^2-5} = -4$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. $\sqrt{x^2+2}$ ва $\sqrt{3x^2-5}$ ифодадар x нинг ҳеч қандай қийматида манфий сон бўла олмагани сабабли, уларнинг йиғиндиси -4 га тенг бўлиши мумкин эмас. Демак, берилган тенглама x нинг ҳеч қандай қийматида ўринли бўлмайди, яъни тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: $\emptyset$.

4-мисол. $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 5$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. $\sqrt{2-x}$ ифода $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$ бўлгандагина маънога эга. $\sqrt{x-3}$ ифода эса $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ бўлганда маънога эга. $x \leq 2$ ва $x \geq 3$ тенгсизликларнинг ечими мос ҳолда $(-\infty, 2]$ ва $[3, +\infty)$ оралиқлардан иборат бўлиб, бу оралиқларнинг кесилишмаси бўш тўғламан бўлгани учун берилган тенглама ечимга эга бўлмайди.

5-мисол. $\sqrt{x-1} = 4x-7$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз. Биринчидан $x-1 \geq 0$ бўлиши (чунки $x-1 < 0$ бўлса, $\sqrt{x-1}$ маънога эга эмас), иккинчидан $4x-7 \geq 0$ бўлиши керак (чунки тенгламанинг чап қисми манфий бўлмайди). Натжида қуйидаги тенгсизликлар системасига келамиз:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 4x-7 \geq 0. \end{cases}$$

Биринчи тенгсизликдан: $x \geq 1$, иккинчисидан: $x \geq \frac{7}{4}$. Тенгсизликлар системасининг ечимини: $x \geq \frac{7}{4}$. Берилган тенгламанинг ечимини $x \geq \frac{7}{4}$ тенгсизликни қаноатлантириши керак. Тенгламанинг иккала қисмини (манфий бўлмагани учун) квадратга кўтарсак:

$$x-1 = (4x-7)^2 \Rightarrow 16x^2 - 56x + 49 = x-1 \Rightarrow 16x^2 - 57x + 50 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{9}{16}.$$

$x \geq \frac{7}{4}$ шартни $x_2 = \frac{9}{16}$ қаноатлантиргани учун у берилган тенгламанинг ечимини бўлмайди, $x_1 = 2$ эса қаноатлантирмагани учун ечим бўла олмайди.

6-мисол. $\sqrt{9-8x} + \sqrt{2-x} = \frac{14}{\sqrt{2-x}}$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\begin{cases} 9-8x \geq 0, \\ 2-x > 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x \leq 1,125, \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \leq 1,125.$$

Берилган тенгламанинг ечимини $x \leq 1,125$ тенгсизликни қаноатлантириши керак. Шакл алмаштиришлар натижасида $x^2 - 7x - 18 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x_1 = -2$ ва $x_2 = 9$.

$x \leq 1,125$ шартини $x_1 = -2$ қаноатлантиргани учун у берилган тенгламанинг ечимини бўлмайди, $x_2 = 9$ эса бу шартини қаноатлантирмагани учун ечим бўла олмайди.

Таъриф. Агар ўзгарувчи фақат даража кўрсаткичида қатнашган бўлса, бундай тенглама кўрсаткичли тенглама дейилади. Масалан, $2^x = 8$, $3^{x+1} + 3^x = 18$ ва ҳокazo. Энг содда кўрсаткичли тенглама $a^x = b$ кўринишга эга ва бу тенглама фақат $b > 0$ бўлганда ечимга эга бўлади. Кўрсаткичли тенгламаларни ечингда асосан 4-таслиқдан фойдаланилади.

7-мисол. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{5^x} = 100$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. Тенгламани ечиш учун уни илдиз таърифдан фойдаланиб,

$$2^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 100$$

кўринишда ёзамиз. Сўнгра, $10^{\frac{x}{2}} = 10^2$, бундан $\frac{x}{2} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 4.$$

8-мисол. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. Тенгламанинг чап ва ўнг қисмидаги умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$6^x(1+6) = 2^x(1+2+2^2) \Leftrightarrow 6^x = 2^x.$$

Сўнгра қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{6^x}{2^x} = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0.$$

9-мисол. $2^{5-3x} \cdot 3^{3x-5} = 1$ тенгламани ечинг.

Еч и ш. Манфий кўрсаткичли даража таърифидан фойдаланиб, 2^{5-3x} ни $2^{5-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бунини тенгламага қўйсак:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow 3x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Таъриф. Агар тенгламадаги номаълум логарифм белгиси остида бўлса, бундай тенглама логарифмик тенглама дейилади, масалан,

$$\lg x + \lg(x+3) = 1, \quad \frac{\lg_2 x}{\lg_2(x+1)} = 1,$$

$$\ln x + \frac{1}{\ln(x+1)} = 2,$$

$$x^{10} x^{-1} = 10 \text{ ва ҳокazo.}$$

Логарифмик тенгламаларни ечиш усуллари жуда кўп. Шунинг учун ҳар бир тенгламани ечиш усули унинг тузилишга кўра танланади. Бу усулларни мисоллар ечиш ёрдамида кўриб чиқамиз.

1. Логарифмнинг таърифига кўра ечилишган тенгламалар.

10-мисол. $\log_{1-x}(4x^2 + 4x + 1) = 2$ тенгламани

ечинг.

Ечиш. Логарифмнинг таърифига кўра: $4x^2 + 4x + 1 = (1-x)^2$ ёки $3x^2 + 6x = 0$, бу ердан $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Иккинчи ечим, яъни $x_2 = 0$ берилган тенгламанинг ечими бўлмайди, чунки бунда логарифм асоси бирга тенг бўлиб қолади, бунинг бўлиши мумкин эмас. Ўрнига кўйиш орқали $x_1 = -2$ берилган тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб: -2 .

11-мисол. $\frac{\lg(x^2 + x^2 + 31x + 39)}{\lg(x-1)} = 3$ тенгламани

ечинг.

Ечиш. Бу мисол потенцирилаш билан ечилади. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси куйдаги системадан топилади:

$$\begin{cases} x^2 + x^2 + 31x + 39 > 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Берилган тенгламани куйдаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\lg(x^3 + x^2 + 31x + 39) = 3 \lg(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\lg(x^3 + x^2 + 31x + 39) = \lg(x-1)^3 \Rightarrow$$

$$x^3 + x^2 + 31x + 39 = (x-1)^3 \Rightarrow 4x^2 - 28x + 40 = 0 \Rightarrow$$

$$x \in \{2, 5\}.$$

$x = 2$ да тенглама аниқланмаган, 5 сонни берилган тенгламанинг ечими. Бунга текшириш орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: 5.

12-мисол.

$$\frac{3 - \lg x}{1 - \lg x} - \frac{3}{1 + \lg x} = 2 \text{ тенгламани ечинг.}$$

Ечиш. Соддаштиришдан сўнг тенглама куйдагига кўринишга келади:

$$\lg^2 x - 3 \lg x + 2 = 0.$$

$\lg x = y$ деб белгилаймиз, y ҳолда $y^2 - 3y + 2 = 0$, бу ердан $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. 1) $\lg x = 1$ бўлса, $x_1 = 10$; 2) $\lg x = 2$ бўлса, $x_2 = 100$. Бу қийматлар берилган тенгламанинг ечимлари эканлигига ўрнига кўйиш орқали ишонч ҳосил қилиш осон.

Жавоб: 10, 100.

13-мисол. $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x = 6$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Тенгламадаги турли асосдаги логарифмларни бир хил асосга келтириш керак, бунинг учун турли асосдаги логарифмлар орасидаги боғланиш формулаларидан фойдаланамиз:

$$\log_{\sqrt{5}} x = \frac{\log_5 x}{\frac{1}{2}} = 2 \log_5 x, \log_{\frac{1}{5}} x = -\log_5 x.$$

Натижада берилган тенглама куйдагича ёзилади:

$$\log_5 x + 2 \log_5 x - \log_5 x = 6 \Rightarrow \log_5 x = 3 \Rightarrow$$

$$x = 5^3 = 125.$$

Жавоб: $x = 125$.

Даража кўраткичида логарифмлар иштирок этган тенгламаларни ечишга алоҳида эътибор бериш керак. Одатда бундай тенгламаларни уларнинг иккала томонини логарифмлаш орқали ёки логарифмнинг $x^{\log_x a} = a$ хосасидан фойдаланиб ечилади. Шунинг учун бундай тенгламаларни ечишда унинг аниқланиш соҳасини топиш зарур. Сўнгра аниқланган ечимлар тўплами аниқланиш соҳасига тегишлими ёки тегишли эмаслигини аниқлаш керак.

Мисоллар кўрамыз.

14-мисол. $x^{\frac{4}{3} \lg^3 x - \frac{1}{3} \lg x} = 1000 \sqrt[3]{100}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x > 0$, $x \neq 1$. Тенгламанинг иккала томонини логарифмлаймиз:

$$\left(4 \lg^3 x - \frac{1}{3} \lg x\right) \lg x = \lg 1000 + \frac{2}{3} \lg 10$$

$$12 \lg^4 x - \lg^2 x - 11 = 0. \text{ Бу ердан: } \lg x = \pm 1.$$

$$\text{Жавоб: } \left\{10; \frac{1}{10}\right\}.$$

15. мисол. $x^{\log_x (2-x)} = 9$ тенгламани ечинг.
Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси қуйидаги шартлар билан аниқланади:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ ва } 1 < x < 2.$$

Тенгламанинг даражасини қуйидагича ёзиш мумкин:
 $\log_x (2-x) = \log_x (2-x)^2$, у ҳолда тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$x^{\log_x (2-x)^2} = 9.$$

Асосий логарифмик айниятдан фойдаланиб ёзиш мумкин: $(2-x)^2 = 9$, бундан $x_1 = -1$ ва $x_2 = 5$. x нинг топилган қийматлари тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли эмас, демек берилган тенглама илдиэларга эга эмас.

2. § Тригонометрик тенглама ва айниятлар

Таъриф. Агар тенгламадаги номаълум факат тригонометрик функция белгиси остида қатнашса, бундай тенглама тригонометрик тенглама дейилади.

Масалан, $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 0$,

$$\sin 2x + \cos x = 0, \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 1 = \cos x$$

тенгламалар тригонометрик тенгламаларга мисол бўлади.

Тригонометрик тенгламани ечиш берилган тенгламани қаноатлантирадиган барча бурчакларни топиш десан сўзлар. яъни шундай бурчакларни топиш керакки, уларни тенгламадаги номаълум ўрнига қўйилганда тенглама айниятга айланиши керак.

Масалан, $\sin x - \cos x = 0$ тенглама $x = \frac{\pi}{4}$ илдиэга

эга, аммо бу тенглама чексиз кўп илдиэларга эга бўлиб, улар $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) формула ёрдамида топилади.

Энг содда тригонометрик тенгламаларнинг ечимларини ифодаловчи формулалар қуйидаги кўринишда ёзилишини эслатиб ўтамыз:

16

а) $\sin x = a$, $|a| \leq 1$ бўлса, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
б) $\cos x = a$, $|a| \leq 1$ бўлса, $x = \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 $|a| > 1$ бўлганда а) ва б) тенгламалар ечимга эга бўлмайдн.

в) $\operatorname{tg} x = a$, $x = \arctg a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) $\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arccotg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Берилган тригонометрик тенглама устида қуйидаги амаллар бажарилганда топилган ечимларни текшириш зарур:

а) айрим алмаштиришлар бажарилганда (қасрни маҳражидан кўтқариш, қасрларни қисқартириш, ўхшаш ҳадларни ихчамлаш) тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенглиши юз бера;

б) тенгламанинг иккала қисми бир хил жуфт даражага кўтарилган бўлса;

в) тенгламани ечишда унинг иккала қисмида ҳар хил аниқланиш соҳасига эга бўлган тригонометрик айниятлардан фойдаланилган бўлса, масалан:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

ва бошқалар. Тенгламани ечишда бу айниятларнинг чап қисми ўрнига ўнг қисми қўйилса, у ҳолда тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенгайди, натижада бегона ечим пайдо бўлишини кутиш мумкин, аксинча, шу айниятлардан фойдаланилса, у ҳолда тенгламанинг аниқланиш соҳаси қисқариши ва ечим йўқолиши рўй беришини кутиш мумкин. Мисол учун қуйидаги тенгламани кўрамыз:

$$\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \operatorname{ctg} x - 1, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}, \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}. \quad (3)$$

(2) ва (3) га кўра (1) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 1.$$

$y = \lg x$ алмаштиришни бажариб, $\frac{y+1}{1-y} = \frac{2}{y} - 1$ ни ҳосил қиламиз, бундан $y = \frac{1}{2}$, яъни $\lg x = \frac{1}{2}$, демак,

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Бу ечим (1) тенгламани қаноатлантиради. Лекин $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) қийматлар ҳам (1) тенгламани қаноатлантиришни кўриш мумкин. Ечим йўқолишининг сабаби (2) ва (3) айтиётлардан фойдаланилганда тенгламанинг аниқланиш соҳасининг торайишидандир, натижада $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ илдизлар йўқолади.

Тригонометрик тенгламаларни ечишда асосан икки та усулдан фойдаланилади:

а) кўпайтувчиларга ажратиш; б) янги ўзгарувчи киритиш.

Тенгламани янги ўзгарувчини киритиш усули билан ечишда қайси функцияни бошқа функциялар билан алмаштириш кераклигини аниқлаб олиш жуда муҳим роль ўйнайди. Чунки биринчи функцияни иккинчи функция билан алмаштирганда иррационал тенгламага ва аксинча бўлганда эса, рационал тенгламага эга бўлишимиз мумкин. (Бунда рационал тенгламага эга бўлганимиз маъқулроқ).

Масалан, $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$ тенгламада $y = \cos x$ алмаштириш бажарсак, $2y^2 + 4y = 3(1 - y^2) \Leftrightarrow 5y^2 + 4y - 3 = 0$ кўринишдаги квадрат тенгламага эга бўламиз.

Энди тригонометрик тенгламаларни ечишда абитуриентлар йўл қўйган хатоларни мисоллар ёрдамида кўрсатамиз. Ушбу

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = \cos 2x$$

тенгламани ечишда, кўпчилик абитуриентлар берилган тенгламани $\cos x + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$ кўринишга келтириб, тенгламанинг иккала томонини ($\cos x + \sin x$) га бўлганлар. Бу билан қўпол хатога йўл қўйилган, чунки $\cos x + \sin x$ ифода x нинг алоҳида қийматлари тўлимида нолга айланиши эътиборга олинмаганилиги натижасида ечимлар йўқолаган.

Бундай хатонинг олдини олиш учун тенгламанинг ҳамма ҳалларини бир томонга ўтказиб, сўнгга кўпай-

тувчиларга ажратиш керак, яъни $(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0$.

Бундан $\sin x + \cos x = 0$, $1 + \sin x - \cos x = 0$ га эга бўламиз. Ҳосил бўлган бу иккита тенглама берилган тенгламага тенг кучли ва уларнинг ечимлари қуйидагичадир:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$ тенгламани ечишда дастлаб тенгла-

манинг аниқланиш соҳаси $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) бўлган ҳақиқий сонлар тўлимидан иборат эканлигини аниқлаб олиш керак, сўнгга берилган тенгламани

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$$

кўринишда ёзиб олиш ва уни $1 - \cos^2 x (1 - \cos^2 x \neq 0)$ га кўпайтириш керак:

$$\cos^2 x = (1 + \sin x)(1 - \cos^2 x)$$

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x) = (1 + \sin x)(1 - \cos^2 x). \quad (A)$$

Кўпчилик абитуриентлар (A) нинг иккала томонини $(1 + \sin x)$ га бўлганлар. Натижада берилган тенгламанинг ечими йўқолади (чунки $1 + \sin x = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган қийматлар тўлими ҳам берилган тенгламанинг ечими бўлади). Бундан қутулиш учун (A) ни қуйидаги кўринишда ёзиб олиш керак:

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x) = 0,$$

$$\cos x - \sin x = 0, \text{ бундан } x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$1 + \sin x = 0, \text{ бундан } x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Айрим абитуриентлар тенгламанинг аниқланиш соҳасини эътиборга олмаганликлари сабабли, тенгламани қаноатлантирмайдиган бегона ечимга эга бўлганлар, яъни тенгламани қуйидаги кўринишга келтирганлар:

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0,$$

$$\cos x - \sin x = 0, \text{ бундан } x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$1 + \sin x = 0, \text{ бундан } x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z},$$

$$1 + \cos x = 0, \text{ бундан } x_3 = \pi(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}.$$

Аммо $x_3 = \pi(1 + 2k)$ ечим берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасига кирмайди, шунинг учун x_3 берилган тенгламанинг ечими бўлмайди.

Абитуриентлар $\sin x + \cos x = 1$ тенгламани қуйиндаги усуллар билан ечишга уринганлар.

1-усул. Берилган тенгламадаги $\cos x$ ни $\sqrt{1 - \sin^2 x} \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 \Rightarrow \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x \Rightarrow \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x \times (\sin x - 1) = 0$ кўринишга келтирилган. Сўнгра

$$\sin x = 0, \text{ бундан } x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = 1, \text{ бундан } x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Лекин, бирорта ҳам абитуриент $x_1 = \pi n$ ечим берилган тенгламани n нинг ҳамма қийматларида ҳам қаноатлантиривермаслигини изоҳламаган. Ҳақиқатан ҳам, топишган $x_1 = \pi n$ ечимлар $n = 2m$ бўлганда $\sin x + \cos x = 1$ тенгламани қаноатлантиради, $n = 2m + 1$ бўлганда эса берилган тенгламани қаноатлантирмайди, яъни бегона ечимга эга бўлмайди.

$$2\text{-усул. } \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 1 - \cos x \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \text{ бундан } x_1 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \left(\cos \frac{x}{2} \neq 0 \right), \text{ бундан}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

3-усул. Синус ва косинусларни $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ орқали ифодалаймиз, яъни

$$2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \neq 0 \right) \Rightarrow$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \text{ бундан } x_1 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \text{ бундан } x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

4-усул (Кўшимча бурчак киритиш усули). Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$\sqrt{2} \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos x \sin \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0$ тенгламани ечишда абитуриентлар тенгламани қуйидаги кўринишга келтирганлар:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 6x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3 \Rightarrow 2 \cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 3 \Rightarrow$$

$$2(\cos^2 2x - 1) + \cos 2x (\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cos 2x - 1 (2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 2) = 0.$$

$$\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Агар тенгламанинг чап томонидаги ҳар бир қўшилувчининг манфий эмаслигини ва уларнинг бир вақтда нолга тенг бўлганда бажарилишини кўра олганимизда эди, у ҳолда берилган тенгламанинг ечимини жуда тез аниқлашимиз мумкин эди, яъни берилган тенглама

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \sin 3x = 0 \end{cases}$$

системага тенг кучлн. Ундан:

$$\begin{cases} x_1 = \pi n, n \in Z, \\ x_2 = \frac{\pi}{2} m, m \in Z, \\ x_3 = \frac{\pi}{3} k, k \in Z. \end{cases}$$

x_2 ва x_3 x_1 ечимлар нунда ётгани учун $x = \pi n$ берилган тенгламанинг ечими бўлади.

$\sin \frac{x}{2} \cos 2x = 1$ тенгламани абиуриентлардан биронтаси ҳам еча олмади. Бу тенгламани куйидаги усуллар билан ечиш мумкин.

1-усул. Тенгламани иккита система шаклида ёзиб оламиз:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = -1, \\ \cos 2x = -1; \end{cases}$$

а) системанинг биринчи тенгламасидан $x_1 = \pi(1 + 4n)$, $n \in Z$ ни, иккинчисидан $x_2 = \pi m$, $m \in Z$ ни толамиз. Бу ечимларнинг умумийси эса, яъни $x = \pi(1 + 4n)$ берилган тенгламанинг ечимидир.

б) системанинг ечими бўш тулладан иборат.

2-усул. Агар $\sin \frac{x}{2} = t$ ва $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x =$

$= 1 - 8 \sin^2 \frac{x}{2} (1 - \sin^2 \frac{x}{2}) = 1 - 8t^2(1 - t^2)$ алмаштирашлари бажарсак, куйидаги кўринишдаги алгебраик тенгламага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} t | 1 - 8t^2(1 - t^2) | - 1 &= 0 \Rightarrow \\ 8t^5 - 8t^2 + t - 1 &= 0 \Rightarrow \\ 8t^3(t^2 - 1) + (t - 1) &= 0 \Rightarrow \\ (t - 1)[8t^3(t + 1) + 1] &= 0 \Rightarrow \\ t &= 1, \\ \begin{cases} 1 < 8t^3(t + 1) + 1 = 0, \\ -1 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sin \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \pi(1 + 4n), n \in Z.$$

Абиуриентлар $3 \sin x - 2 \cos x = 2$ тенгламанинг ҳам ечимларини тўғри тополмаганлар. Уни ечиш учун $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларни $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ орқали ифодалаб,

$$3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2$$

тенгламага эга бўламиз. Уни соддалаштирсак, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} =$

$= \frac{2}{3}$ кўринишдаги содда тригонометрик тенглама ҳосил бўлади, унинг ечими: $x = 2 \arctg \frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Энди $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ қийматлар тўғлами ҳам берилган тенгламани қаноатлантиришини текшириш керак. Агар бу қийматларни берилган тенгламадаги ўзгарувчининг ўрнига қўйсак,

$$3 \sin (\pi + 2\pi n) - 2 \cos (\pi + 2\pi n) = -2 \cos \pi = 2$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, $x = \pi + 2\pi n$ ҳам берилган тенгламанинг ечими экан.

Айрим тригонометрик тенгламаларнинг ечимларини топишда

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad (\text{А})$$

формулардан фойдаланилади. Аммо кўпчилик абиуриентлар бу формулардан фойдаланилганда ечим йўқолишини билмас эканлар. Масалан, $\sin 2x = \sqrt{3} \times \times \cos 2x = \sqrt{3}$ тенгламанинг ечимини топиш учун (А) формуладан фойдаланиб, тенгламани

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{\sqrt{3}(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{3}$$

кўринишда ёзиб, сўнгра соддалаштирсак, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ кўринишдаги содда тенгламага эга бўламиз. Бундан эса $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$ ни толамиз. $\sin 2x$ ва $\cos 2x$ ни $\operatorname{tg} x$

орқали ифодадаш натижасида $x = \frac{\pi}{2}(2m+1)$, ($m \in \mathbb{Z}$)
 ечимлар тўплами йўқотилган. Бундай алмаштириш
 ёрдамида берилган тенгламанинг ечимларини топишда,
 албатта $x = \frac{\pi}{2}(2m+1)$ қийматлар тўплами берилган
 тенгламани қаноатлантириши ёки қаноатлантирмасли-
 гини текшириш керак.

Агар берилган тенглама

$$\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$$

кўринишда ёзиб олинса, ҳосил бўлган бу тенглама қу-
 йдаги иккита тенгламага тенг кучли бўлади:

$$a) \cos x = 0, \quad b) \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Тенгламаларнинг ҳар бирини алоҳида алоҳида ечиб,
 иккита ечимлар тўпламини ҳосил қиламиз:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}(2m+1), \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Ечининг бундай усулида берилган тенгламани қа-
 ноатлантирувчи барча ечимлар топилади.

Тригонометрик тенгламалар ҳар хил алмаштириш-
 лар ёрдамида энг содда тригонометрик тенгламаларга
 келтирилиб ечилишини юқорида айтган эдик. Тенгла-
 маларни содда тенгламаларга келтиришнинг умумий
 усули йўқ. Аммо энг содда тригонометрик тенглама-
 ларга келтиришнинг амалида қўлланиб келинадиган бир
 қанча усуллари (ёрдмчи буручак қиригиш, номаялғумин
 алмаштириш, кўпайтувчиларга ажратиш ва ҳоказо)
 мавжуд. Шу усуллар билан ечиладиган мисолларни
 кўрамиз.

1-мисол. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ тенгламани ечинг.
 Ечинш. $\sin x = y$ десак, $2y^2 + 3y - 2 = 0$ тенглама-
 ни ҳосил қиламиз. Бундан: $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -2$. Демак,
 $\sin x = \frac{1}{2}$ ва $\sin x = -2$ энг содда тригонометрик тенг-
 ламаларга эга бўламиз. Улардан:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$\sin x = -2$ тенглама ечимлар тўплами бўш тўплам-
 дан иборат, чунки $|-2| > 1$.

$$\text{Жавоб: } \left\{ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2-мисол. $\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$ тенгламани ечинг.
 Ечинш. Бу тенгламада айни бир аргументнинг ик-
 ки функцияси иштирок этади, шунинг учун $\sin^2 x =$
 $1 - \cos^2 x$ формуладан фойдаланиб, берилган тенг-
 ламани фақат битта $\cos x$ функция қатнашадиган кўри-
 нишда ёзамиз:

$$\sqrt{2}(1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0.$$

$$\cos x = y \text{ десак, } \sqrt{2}y^2 - y - \sqrt{2} = 0, \text{ бундан}$$

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \sqrt{2}.$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = \sqrt{2} > 1 \text{ бўлгани учун унинг ечими: } \emptyset.$$

$$\text{Жавоб: } \left\{ \pm \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3-мисол. $\sin 2x + \cos x = 0$ тенгламани ечинг.
 Ечинш. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ формула ёрдамида бе-
 рилган тенгламадаги функцияларни бир аргументга
 келтирамиз:

$$2\sin x \cos x + \cos x = 0.$$

Ҳосил бўлган тенгламанинг чап қисмини кўпайтув-
 чиларга ажратамиз:

$$\cos x(2\sin x + 1) = 0, \text{ бундан}$$

$$a) \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad (n \in \mathbb{Z});$$

$$b) 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

4-мисол. $5\sin^2 x + 7\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0$ тенг-
 ламани ечинг.

Ечинш. Агар берилган тенгламани $\cos^2 x$ га бўлсак,
 унда тенг кучли бўлган

$$5\tg^2 x + 7\tg x - 6 = 0$$

тенгламага эга бўламиз. $\tg x = y$ десак, $5y^2 + 7y - 6 = 0$
 квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан: $y_1 = -2$,

$$y_2 = \frac{3}{5}.$$

Натижада $\operatorname{tg} x = -2$ ва $\operatorname{tg} x = \frac{3}{5}$ энг содда тригонометрик тенгламалар ҳосил бўлади. Булардан

$$x_1 = -\arctg 2 + \pi n \text{ ва } x_2 = \arctg \frac{3}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ечимлар тўпламига эга бўламиз.

5-мисол. $2\sin^2 2x - 1 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечинг. Бу тенглама $\sin 2x$ га нисбатан осон ечилса ҳам (яъни $\sin 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$), бироқ $2\sin^2 2x$ ни $1 - \cos 4x$ га алмаштириш қулайроқдир. У ҳолда қуйидаги кўринишдаги содда тригонометрик тенгламага эга бўламиз ва уни ечамиз:

$$1 - \cos 4x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow$$

$$4x = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} (2n + 1), \text{ бунида } n \in \mathbb{Z}.$$

6-мисол. $1 - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi + x}{2} = 0$ тенгламани ечинг.

Ечинг. Бизга маълумки, $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$, $\sin 90^\circ + \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}$, шунинг учун берилган тенглама бундай кўринишни олади:

$$1 + \cos x + \cos \frac{x}{2} = 0, \text{ бу ердан } 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2},$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} \left(2\cos \frac{x}{2} + 1 \right) = 0.$$

$$1) \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \pi(2n + 1), (n \in \mathbb{Z}),$$

$$2) 2\cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi m \Rightarrow$$

$$x_2 = \pm \frac{4}{3}\pi + 4\pi m, (m \in \mathbb{Z}).$$

Айният-тенглик бўлиб, бу тенглик унда қатнашувчи ҳарфларнинг қабул қиладиган барча қийматларида тўғри бўлади. Масалан, $(a - b)^2 = (b - a)^2$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\lg(xy) = \lg x + \lg y$ ($x > 0, y > 0$) айниятлардир. Биз бу ерда тригонометрик айниятлар

ҳақида фикр юритамиз. Тригонометрик айниятларни исботлашда қуйидаги усуллардан фойдаланамиз:

а) айниятнинг бир қисмида турган ифода айний шакл алмаштиришлар ёрдамида айниятнинг иккинчи қисмида турган ифодага келтирилади;

б) айниятнинг чап ва ўнг қисмларида турган ифодада айний шакл алмаштиришлар ёрдамида бир хил кўринишга келтирилади;

в) айниятнинг чап ва ўнг қисмлари орасидаги айирма нолга тенг эканлиги исботланади.

Буни бир неча мисолларда тушунтирамиз.

1-мисол. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$ айниятни исботланг.

Исботи. Икки сон квадратининг айирмаси формуласига кўра:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Аммо, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ва $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Шунинг учун:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha.$$

Шуни исботлаш татаб қилинган эди.

2-мисол. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) = \cos(2\pi + \alpha) -$

$-3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ айниятни исботланг.

Исботи. Бу айниятни исботлаш учун унинг чап ва ўнг қисмларини келтириш формулларида фойдаланиб соддалаштирамиз:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha - \cos \alpha = -2\cos \alpha;$$

$$\cos(2\pi + \alpha) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha - 3\cos \alpha = -2\cos \alpha.$$

Шундай қилиб, берилган айниятнинг иккала қисмида турган ифодалар бир хил кўринишга келтирилди. Шу билан айният исботланди.

3-мисол. $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ айниятни исботланг.

Исботи. Бу айниятнинг чап ва ўнг қисмлари орасидаги айирма нолга тенг эканлиги кўрсатамиз:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = \\ = \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha - \cos \alpha = 0.$$

Шу билан айният исботланди.

$$4 \text{ мисол } \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ айнtimerтми исботлант.}$$

Исботи. Бу айнtimerтми пропорция деб караш мумкин. Бизга маълумки, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ пропорциянинг тўғ-

рилигини исботлаш учун унинг четки ҳадлари кўпайтмаси *ad* ўрта ҳадлари кўпайтмаси *bc* га тенг эканлини кўрсатиш етарлидир. Бу айнtimerтмида ҳам шу ишни бажарамиз, яъни $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha$ эканлини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$.

$$5\text{-мисол. } \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \text{ айнtimerтми исбот-}$$

лант.

Исботи. Айнtimerтнинг чап қисми унинг ўнг қисмига тенглигини кўрсатамиз (ўнг қисминини чап қисмига келтирамиз):

$$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$6\text{-мисол. } \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \text{ айнtimerтми ис-}$$

ботлант.

Исботи. Айнtimerтнинг чап қисми ўнг қисмига тенглигини кўрсатамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ \sin \alpha + \cos \alpha &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right] = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \end{aligned}$$

Шу билан айнtimerт исботланди.

$$7\text{-мисол. } \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \text{ (бунда}$$

$0 < \alpha < 45^\circ$) айнtimerтми исботлант.

Исботи. Бу айнtimerтми абиругентлар қуйидагича исбот қилганлар:

$$\begin{aligned} 1 + \sin \alpha &= \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$1 - \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2.$$

У ҳолда берилган айнtimerтнинг чап қисми

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

кўринишни олади ва айнtimerт тўғри исбот қилинган деб бўлмайди. Чунки $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}$ ифода $0 < \alpha < 45^\circ$ қий-мада манфий, шунинг учун квадрат илдиз остидан $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}$ ифода эмас, балки $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}$ ифода чиқади (арифметик илдиз таърифига кўра). У ҳолда айнtimerт тўғри исбот қилинган бўлади.

$$8\text{-мисол. } \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha \text{ айнtimerт-}$$

ини исботлант ва шу айнtimerтнинг қаноатлантирувчи α нинг қийматлар тўпламини топинг.

Бу айнtimerт осон иш боғланишига қарамай кўпчилик абиругентлар хатога йўл қўйдилар. Улар одатда қуйида-ти алмаштиришларни бажарганлар:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Айнtimerт тўғри исботланганга ўхшайди, ammo илдиздан чиқаришда $\sin \alpha$ ифода α нинг ҳар қандай қиймат-ларида ҳам мусбат бўлавермайди, масалан, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ да

берилган айнtimerт бажарилмайди. Ҳўш, абиругентлар исботлаш жараёнининг қаерида хатога йўл қўйдилар? Улар тригонометрик функциялар учун арифметик илдизни ёзиб, яъни $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$ деб тенглик α нинг ҳамма қийматларида тўғри деб хатога йўл қўйганлар.

Агар $\sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha|$ тенглик олинганда эди, у ҳолда бу тенглик α нинг ҳар қандай қиймати учун ўринли бўлар эди. Айтилганларга эътибор бериб, бу мисолни қуйидагича исботлаш мумкин бўлар эди, яъни

$$\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha-(1-\cos\alpha)}{|\sin\alpha|} = \frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}, \text{ бунида } \alpha \neq \pi n.$$

Бунда $|1+\cos\alpha|=1+\cos\alpha$, $|1-\cos\alpha|=1-\cos\alpha$, чунки $1+\cos\alpha > 0$ ва $1-\cos\alpha > 0$.

Энди $\frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$ ифодани абсолют киймат белгисизсиз ёзамиз:

1) агар α аргумент ($2\pi n$; $\pi+3\pi n$), ($n \in \mathbb{Z}$) ораликлардан кийматлар олса, у ҳолда $\alpha > 0$ бўлади ва $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ тенглик ўринли, шунинг учун

$$\frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha;$$

2) агар α аргумент ($-\pi+3\pi n$; $2\pi n$) ($n \in \mathbb{Z}$) ораликлардан кийматлар олса, у ҳолда $\sin\alpha < 0$ бўлади ва $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ тенгликка эга бўлаемиз. Демак,

$$\frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|} = -\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Бундан кўринадики, берилган тенглик аргументнинг $2\pi n < \alpha < \pi+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ кийматлар тўпламида тўғри, $-\pi+2\pi n < \alpha < 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ кийматлар тўпламида эса

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -2\operatorname{ctg}\alpha.$$

тенглик ўринли бўлади.

3-§. Тенгсизлик

Иккита ҳақиқий a ва b сонлар орасида қуйидаги уч муносабатдан биттаси ва фақат биттасигина ўринлидир: а) a сон b сонга тенг ($a=b$); б) a сон b сондан катта ($a>b$); в) a сон b сондан кичик ($a<b$).

Таъриф. Иккита сонни ёки ўзарувчиларга эга бўлган иккита ифодани "катта" ёки "кичик" ($>$ ёки $<$) белгиси ёрдамида бирлаштирилиб ёзилган символлик ёзув *тенгсизлик* дейилади.

Масалан, $15>14$, $a<1+a^2$, $l<3$, $f(x)>g(x)$, $a<b$, $c<d$ ёки $a>b$, $c>d$ кўринишдаги икки тенгсизлик бир хил маъноли тенгсизликлар. $a>b$ ва $c<d$ кўринишдаги икки тенгсизлик қарама-қарши маъноли

тенгсизликлар дейилади. a сон b сондан кичик эмаслиги $a \geq b$ каби ёзилади, a сон b сондан катта эмаслиги $a \leq b$ кўринишда ёзилади. $a \geq b$ ёки $a \leq b$ кўринишдаги тенгсизликлар қатъиймас (ноқатъий) тенгсизликлар дейилади.

Ўзарувчи катнашган тенгсизлик бу ўзарувчининг ҳар қандай кийматларида ўринли бўлса, бундай тенгсизлик айний тенгсизлик дейилади. Масалан, $a^2+b^2+5>0$ тенгсизлик a ва b нинг исталган кийматларида ўринли бўлгани учун у айний тенгсизликдир. x нинг $f(x)>g(x)$ тенгсизлигини тўғри тенгсизликка айлантирилган (ўринли бўладиган) кийматлари шу тенгсизлиكنинг ечими дейилади. Тенгсизлиكنинг ечими дейилганда ўзарувчининг тенгсизлигини қаноатлантирадиган барча кийматлар тўплами тушунилади. Бу тўплам чексиз, чекли, бўш бўлиши мумкин.

$f(x)>g(x)$ тенгсизлигининг аниқланиш соҳаси деб $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланиш соҳаларининг умумий қисмига, яъни x ўзарувчининг иккала функция маънога эга бўладиган кийматларида айтилади.

Таъриф. Агар ўзарувчи катнашган бир тенгсизлиكنинг ҳар қандай ечими ўзарувчи катнашган иккинчи тенгсизлиكنинг ечими бўлса, ва аксинча, иккинчи тенгсизлиكنинг ҳар қандай ечими биринчи тенгсизлиكنинг ечими бўлса, бу тенгсизликлар тенг қучли тенгсизликлар дейилади.

Тенгсизликларни ечиш қоидалари тенгламаларни ечиш қоидаларига нисбатан анча жиддийдир. Маълумки бирор тенгсизлиكنи ечиш учун (агар у содда ҳолда бўлмаса), аввал уни бир қатор алмаштиришлар бажариб, содда тенгсизликка келтирамиз ва бу келтирилган тенгсизлиكنинг ечимини топамиз. Бундай алмаштиришлар бажарилганда ҳосил бўлган тенгсизлик дастлабки тенгсизликка тенг қучлими ёки тенг қучли-маслигини аниқлаш алобатта лозим. Қуйида, тенгсизликлар ечимини топишда жуда кўп ишлатиладиган тенгсизликларнинг тенг қучлилиги ҳақидаги тасдиқларни исботсиз келтирамиз:

1. $f(x)>g(x)$ ва $f(x)-g(x)=0$ тенгсизликлар тенг қучли.

2. Иштиёр $\alpha>0$ сон учун $f(x)>g(x)$ ва $af(x)>\alpha g(x)$ тенгсизликлар тенг қучли.

3. Иштиёр α сон учун $f(x)>g(x)$ ва $\alpha+f(x)>\alpha+g(x)$ тенгсизликлар тенг қучли.

4. Иштиёрий манфий a сон учун $f(x) > g(x)$ ва $a f(x) < a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучди.

5. $(1; +\infty)$ тўпламдаги иштиёрий a сон учун $f(x) > g(x)$ ва $a f(x) > a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучди.

6. $(0, 1)$ тўпламдаги иштиёрий a сон учун $f(x) < g(x)$ ва $a f(x) > a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучди.

7. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар мусбат бўлса, у ҳолда иштиёрий натурал сон n учун $f(x) > g(x)$ ва $(f(x))^n > (g(x))^n$ тенгсизликлар тенг кучди.

8. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар мусбат бўлса, у ҳолда $(1 + \infty)$ тўпламдаги иштиёрий a сон учун $f(x) > g(x)$ ва $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучди.

9. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар мусбат бўлса, у ҳолда $(0; 1)$ тўпламдаги иштиёрий a сон учун $f(x) > g(x)$ ва $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучди.

10. Агар M тўпламда $y = \varphi(x)$ функция мусбат бўлса, у ҳолда шун M тўпламда $f(x) > g(x)$ ва $f(x) \varphi(x) > g(x) \varphi(x)$ тенгсизликлар тенг кучди.

Энди тенгсизликларни ечишда баъзи функцияларнинг хоссаидан фойдаланишни кўрамиз.

$y = ax^2 + bx + c$ квадрат функция (учхад) нинг графиги a ва $D = b^2 - 4ac$ ларнинг ишорасига қараб, турли кўринишда бўлиши бизга маълум (1-чизма).

Бу чизмалардан квадрат учхаднинг хоссаидан фойдаланиб, тенгсизликларни ечишга доир нисолар кўрамиз.

1-нисол. $x^2 - x - 2 > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечинг. Бу нисолда $a = 1$, $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 > 0$.

Демак, квадрат учхаднинг графиги тармоқлари юқорига қараган параболоа бўлади.

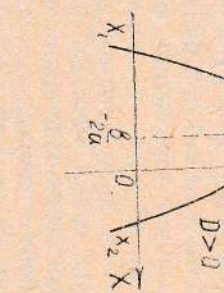
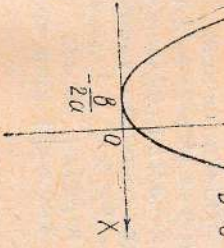
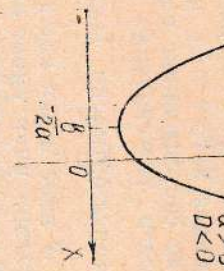
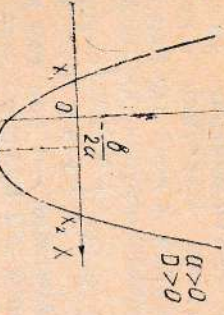
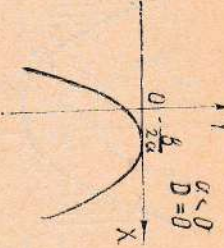
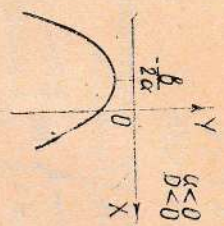
Маълумки, бу квадрат учхаднинг илдизлари $x^2 - x - 2 = 0$ тенглама ечимларига тенг бўлиб, улар: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

2-чизмадан кўриниб турибдики, $x^2 - x - 2$ квадрат учхаднинг ишораси $x < -1$ ва $x > 2$ бўлганда мусбат бўлади. Жавоб: $x < -1$, $x > 2$.

Бу тенгсизликни бошқача усул билан ҳам ечиш мумкин. Маълумки, $x^2 - x - 2$ квадрат учхадни унинг ечимларидан фойдаланиб, $(x + 1)(x - 2)$ кўлайтма кўринишда ёзиш мумкин. Демак,

$$(x + 1)(x - 2) > 0. \quad (1)$$

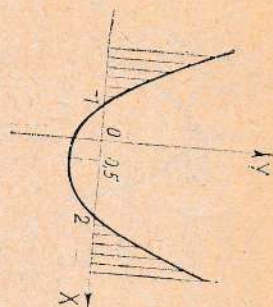
(1) тенгсизлик



$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

(2)

ва



2-чизма.

$$\begin{cases} x+1 < 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Тенгсизликлар системаларини тенг кучли. Булардан:

$$\begin{cases} x > -1, \\ x > 2 \end{cases}, \text{ ва } \begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \end{cases}$$

ёки $x > 2$ ва $x < -1$.

Юқоридagi жавобни ҳосил қилдик. Кўпчиликл абитуриентлар тенгсизликлар системасини ечиш жараёнида хатоликлар системасининг ечими деб x нинг ҳар бир системдаги тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматлари тўпламига айтилади. Мазкур ҳолда $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2 \end{cases}$ системада x нинг 2 дан катта қийматлари -1 дан ҳам катта бўлгани учун унинг ечими $x > 2$ бўлади. Ҳудди шунингдек,

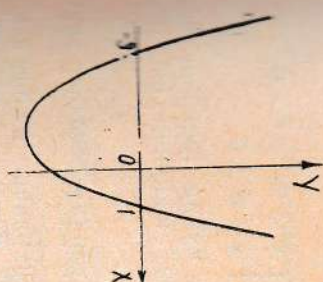
$$\begin{cases} x < -1, \\ x < 2 \end{cases}$$

системанинг ечими $x < -1$ дан иборат, чунки -1 дан кичик бўлган ҳар бир сон 2 дан ҳам кичик.

Еч и ш. $a = 1 > 0$ бўлгани учун $y = x^2 + 2x - 3$ параболанинг тармоқлари юқорига йўналган бўлади (3-чизма). $x^2 + 2x - 3$ квадрат учҳад иккита ҳақиқий манфий экани чизмадан кўриниб турибди. Демак, берилган тенгсизлиكنинг ечими $-3 < x < 1$ кўш тенгсизликдан иборат.

3-мисол. $5x^2 - 10x + 6 > 0$ тенгсизлиكنи ечинг. Еч и ш. $a = 5 > 0$ бўлгани учун параболга тармоқлар юқорига йўналган бўлади (4-чизма).

Учун квадрат учҳад ҳақиқий ечимларга эга эмас. Чизмадан ва x га ихтиёрий қийматлар беришдан кўринадики, берилган тенгсизлиكنи x нинг ҳар қандай қиймати қаноатлантиради.



3-чизма.

Жавоб: $(-\infty < x < +\infty)$.

4-мисол. $-x^2 - x + 6 > 0$ тенгсизлиكنи ечинг.

Еч и ш. $a = -1 < 0$ бўлгани учун $-x^2 - x + 6$ параболани тармоқлари пастга йўналган бўлади (5-чизма). $-x^2 - x + 6$ квадрат учҳад иккита ҳақиқий $x_1 = -3, x_2 = 2$ ечимларга эга. Чизмадан кўринишича ёки x га $(-3; 2)$ оралиқдаги ихтиёрий қийматларни бериб, учҳадни текширсак, $-x^2 - x + 6$ учҳад мусбат эканлигини кўрамыз.

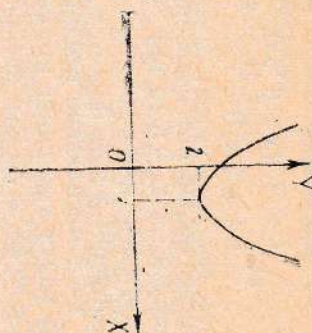
Жавоб: $-3 < x < 2$.

5-мисол. $\frac{x-2}{x+5} > \frac{x}{3}$ тенгсизлиكنи ечинг.

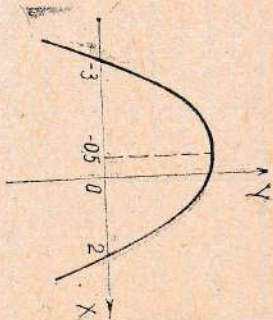
Еч и ш. Кўпчилик абитуриентлар берилган тенгсизлиكنи $3(x-2) > x(x+5)$ кўринишда ёзиб олиб кўнол хатога йўл қўядилар. Бундай ёзишда 10-тасдиқ бўзилади, яъни тенг кучли тенгсизликлар ҳосил бўлмайди.

Бундай хатога йўл қўймаслик учун қуйдагилар алгебраик алмаштиришлар бажариш керак:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+5} > \frac{x}{3} &\Rightarrow \frac{x-2}{x+5} - \frac{x}{3} > 0 \Rightarrow \\ \frac{3x-6-x^2-5x}{3(x+5)} > 0 &\Rightarrow \frac{x^2+2x+6}{3(x+5)} < 0. \end{aligned}$$



4-чизма.



5-чизма.

Бу тенгсизлик

$$a) \begin{cases} x^2 + 2x + 6 > 0, \\ x + 5 < 0 \end{cases} \text{ ва } б) \begin{cases} x^2 + 2x + 6 < 0, \\ x + 5 > 0 \end{cases}$$

Тенгсизликлар системаларига тенг кучли. Биринчи системадан $x < -5$ га эга бўламиз. Иккинчи система ечимга эга эмас.

Жавоб: $x < -5$.

1-5-мисолларни оралиқлар усули (интерваллар усули) билан ҳам ечиш мумкин.

$y = ax^2 + bx + c$ квадрат функциянинг ишора саклаш оралиқларини аниқлаш керак бўлсин. Уни қуйидаги жадвал ёрдамида ёзиш мумкин:

а) $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг ҳақиқий ва ҳар хил илдизлари x_1 ва x_2 бўлсин ($x_1 < x_2$):

$a > 0$	x		$(-\infty; x_1)$		$(x_1; x_2)$		$(x_2; +\infty)$	
	y		+		-		+	
$a < 0$	x		$(-\infty; x_1)$		$(x_1; x_2)$		$(x_2; +\infty)$	
	y		-		+		-	

б) x_1 ва x_2 илдизлар ҳақиқий ва $x_1 = x_2$:

$a > 0$	x		$(-\infty; x_1)$		$(x_1; +\infty)$	
	y		+		+	
$a < 0$	x		$(-\infty; x_1)$		$(x_1; +\infty)$	
	y		-		-	

в) ҳақиқий илдизлар мавжуд эмас:

$a > 0$	x	$(-\infty; +\infty)$	$0 > a$	x	$(-\infty; +\infty)$
	y			y	

Чизиқли ва квадрат функциянинг бу хоссаларидан тенгсизликлар ва тенгсизликлар системаларини ечишда фойдаланиш мумкин.

Масалан, юқорида ечилган 4-мисолни қуйидагича

ечиш мумкин: $-x^2 - x + 6 > 0$ тенгсизлигининг чап қисмини қўпайтувчиларга ажратамиз:

$$(x-2)(x+3) < 0.$$

Бу тенгсизлиkning чап томони илдизлари мос равишда -3 ва 2 га тенг бўлган $x-2$ ва $x+3$ функциялар қўпайтмасидан иборат. $(x+3)$ нинг ишора саклаш оралиқлари $(-\infty; -3)$ ва $(-3; +\infty)$. Бу оралиқларнинг биринчисида функция манфий қийматларга, иккинчисида мусбат қийматларга эга.

$x-2$ функциянинг ишора саклаш оралиқлари қуйидагича: $(-\infty; 2)$ ва $(2; +\infty)$. Бу оралиқларнинг биринчисида функция манфий қийматларга, иккинчисида мусбат қийматларга эга. Қуйидаги ишоралар жадвалини тузамиз:

Функциялар	Сонли оралиқлар			
	$(-\infty; -3)$	$(-3; 2)$	$(2; +\infty)$	
$x-2$	-	-	+	
$x+3$	-	+	+	
$(x-2)(x+3)$	+	-	+	

Жадвалнинг охириг сатри берилган масала жавобини беради, яъни $-3 < x < 2$ бўлганда $(x-2)(x+3) < 0$ бўлади.

Демак, квадрат учхал қатнашган тенгсизликларини ечишда, уни қўпайтувчиларга ажратиб керак, сўнгра қўпайтувчиларни нолга айлантирадиган x нинг қийматлари ёрдамида сон ўқини бир нечта интервалларга бўлиш керак экан. Бу интервалларда қўпайтувчилар қўпайтмасининг ишораларини тез аниқлашга имкон беради.

Энди кўрсаткичли функциялар иштирок этган тенгсизликларни кўрамиз.

$$6\text{-мисол. } \frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x \text{ тенгсизлигини ечинг.}$$

Еч иш. x нинг ихтиёрий қийматида $2^{1-x} > 0$ бўлган учун тенгсизлиkning иккала қисмини 2^{1-x} га кўпайтирамиз:

$$4^x - 2^{x+1} + 8 < 8^x \cdot 2^{1-x} \Rightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 > 0. \quad (A)$$

Бунда $2^x = y$ деб белгилаб, y га нисбатан $y^2 + 2y - 8 > 0$ тенгсизликка эга бўламиз. $y^2 + 2y - 8$ учухад $y_1 = -4$ ва $y_2 = 2$ ечимларга эга. Демак, (А) тенгсизлик

$$a) \begin{cases} 2^x - 2 > 0, \\ 2^x + 4 > 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad b) \begin{cases} 2^x - 2 < 0, \\ 2^x + 4 < 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаларига тенг кучли. Биринчи системадан $x > 1$ га эга бўламиз. Иккинчи система ечимга эга эмас.

Жавоб: $x > 1$.

7-мисол. $4^{\frac{x-3}{3x-2}} < \frac{1}{4}$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. Бу тенгсизлигини $4^{\frac{x-3}{3x-2}} < 4^{-1}$ кўринишда ёзиб оламиз. 5-тасдиқка кўра ($a = 4 > 1$)

$$\frac{x-3}{3x-2} < -1 \quad \text{ёки} \quad \frac{4x-5}{3x-2} < 0 \quad (B)$$

бўлади. (B) тенгсизлигини бир неча усул билан ечинш мумкин.

1-усул. (B) тенгсизлигини унга тенг кучли бўлган $\begin{cases} 4x - 5 > 0, \\ 3x - 2 < 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} 4x - 5 < 0, \\ 3x - 2 > 0 \end{cases}$

тенгсизликлар системалари билан алмаштирамиз. Биринчи системадан

$$\begin{cases} x > \frac{5}{4}, \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

эгани келиб чиқади. Бундай бўлиши мумкин эмас, chunkи x бир вақтнинг ўзида $\frac{5}{4}$ дан катта ва $\frac{2}{3}$ дан кичик қийматларни қабул қила олмайди. Бундай ҳолларда берилган система биргалликда эмас дейилади. Иккинчи системадан:

$$\begin{cases} x < \frac{5}{4}, \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Жавоб: $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$.

2-усул. (B) тенгсизлигини унга тенг кучли бўлган $(4x - 5)(3x - 2) < 0$

тенгсизлик билан алмаштирамиз. Бу тенгсизлиkning чап томонидаги кўпайтувчиларнинг ҳар бирини нолга тенглаб, $x = \frac{2}{3}$ ва $x = \frac{5}{4}$ ларни топамиз ва топилган

нуқталар билан $(-\infty; +\infty)$ интервални $(-\infty; \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}; \frac{5}{4})$ ва $(\frac{5}{4}; +\infty)$ интервалларга бўламиз. Сўнгра

шу интерваллардан x нинг ихтиёрий қийматларини олиб тенгсизликка қўямиз. Агар қўйилган қиймат тенгсизлигини қаноатлантирса, шу қиймат олинган интервалдаги сонлар тўплами тенгсизлиkning ечими бўлади.

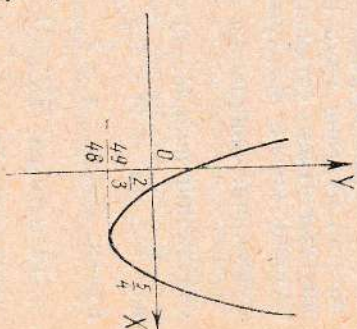
Аниқлик учун $(-\infty; \frac{2}{3})$ дан $x = -1$ ни, $(\frac{2}{3}; \frac{5}{4})$ дан $x = 1$ ни ва $(\frac{5}{4}; +\infty)$ дан $x = 3$ ни олиб, уларни тенгсизликка қўйсак, мос ҳолда $45 < 0$, $-1 < 0$ ва $49 < 0$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $(\frac{2}{3}; \frac{5}{4})$ интервалдан олинган ихтиёрий $x = 1$ қиймат берилган тенгсизлиkning қаноатлантиради.

Жавоб: $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$.

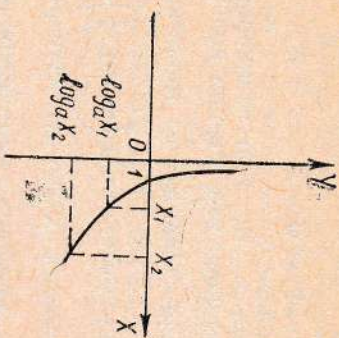
3-усул. $(4x - 5)(3x - 2) < 0$ тенгсизлигини $12x^2 - 23x + 10 < 0$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгсизлик 2-мисол каби ечилади.

$a = 12 > 0$, демак парабола нинг тармоқлари юқорига йўналган (6-чизма) ва унинг ечимлари $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$

га тенг. Чизмадан кўриниб турибдики, $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$ бўлганда $12x^2 - 23x + 10$ квадрат учухад манфий бўлади.



6-чизма.



7-чизма.

Энди логарифмик функциялар иштирок этган тенгсизликларни кўрамиз.

8-мисол. $\log_a(x+2) < \log_a(3-x)$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. Тенгсизлик $x+2 > 0$ ва $3-x > 0$ бўлганда маънога эга. Бу тенгсизликлардан $-2 < x < 3$ эканлиги келиб чиқади. 8-таслиққа кўра берилган тенгсизлик $x+2 < 3-x$ тенгсизликка тенг кучли. Бу тенгсизлиكنи ечиб, $x < \frac{1}{2}$

ни толамиз. Берилган тенгсизлик маънога эга бўлиши учун $-2 < x < 3$ шарт бажарилиши керак. Шунинг учун берилган тенгсизлиكنи қаноатлантирувчи ечимлар тўплами $-2 < x < \frac{1}{2}$ бўлади.

9-мисол. $\log_{0.5}(x^2+1) < \log_{0.5}(2x-5)$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. Кўпчилиик абитуриентлар 9-таслиққа ва логарифмик функциянинг хоссаларига аҳамият бермаганликлари натижасида $x^2+1 < 2x-5$ тенгсизлигини ёзиб, кўпол хатога йўл қўйгандар. Логарифмик функция хоссаларини унинг графиги орқали кўрсатиш қўлайдир (7-чизма).

Чизмадан кўриниб турибдики, $0 < a < 1$ бўлганда $x_1 < x_2$ бўлгани учун $\log_a x_1 > \log_a x_2$ бўлади. Демак, абитуриентлар ёзганича эмас, балки $x^2+1 > 2x-5$ бўлиши керак. Марҳумки, берилган логарифмик тенгсизлиكنинг аниқланиш соҳаси: $x > \frac{5}{2}$. Берилган тенгсизлиكنинг аниқланиш соҳаси $x > \frac{5}{2}$ да $x^2+1 > 2x-5$

ва $\log_{0.5}(x^2+1) < \log_{0.5}(2x-5)$ тенгсизликлар тенг кучли. Демак, $x > \frac{5}{2}$.

10-мисол. $\frac{\lg(x^2+6)}{\lg x} < 1$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. Кўпчилиик абитуриентлар берилган тенгсизлиكنи $\lg(x^2+6) < \lg x$ кўринишда ёзиб, сўнггра бу

тенгсизлиكنи потенцирлагандар. Бунда йўл қўйилган хато тенгсизлиكنинг ҳар иккала қисмини $\lg x$ функциянинг ишорасига аҳамият бермасдан кўпайтиришдан иборат. Ҳақиқатан ҳам, $0 < x < 1$ интервалда $\lg x$ функция манфий қийматлар қабул қилади ва натижада $0 < x < 1$ интервалда берилган тенгсизликка тенг куч бўлмаган тенгсизликка эга бўламиз.

Таъриф. Ўзгарувчи фақат даража кўрсаткичда қатнашган тенгсизлик кўрсаткичли тенгсизлик дейилади.

Кўрсаткичли тенгсизликларни ечинш кўрсаткичли функцияларнинг монотонлигини ифодаловчи қуйидаги хоссасига асосланган: агар $a^x > a^y$ бўлса, $a > 1$ бўлганда $x_1 > x_2$, $a < 1$ бўлганда эса $x_1 < x_2$ бўлади.

11-мисол. $4^{x^2-4x} > 1024$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. $1024 = 4^5$ бўлгани учун $4^{x^2-4x} > 4^5$. Бу тенгсизлик $x^2-4x > 5$ ёки $x^2-4x-5 > 0$ тенгсизликка тенг кучли. Кейинги тенгсизлиكنинг ечими: $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

12-мисол. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x^2-5x}{27}} > \frac{1}{27}$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ бўлгани учун $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x^2-5x}{27}} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Бу тенгсизлик $2x^2-5x < 3$ ёки $2x^2-5x-3 < 0$ тенгсизликка тенг кучли. Бу тенгсизлиكنи ечиб $-\frac{1}{2} < x < 3$

ни толамиз.

13-мисол. $3^{2x-1} > 2 \cdot 3^{x-1} + 1$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. 3^x ни у деб белгилаб, берилган тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз: $y^2 - 2y - 3 > 0$. Бу тенгсизлик $y < -1$ ва $y > 3$ қийматларда ўринли. Унинг ўрнига 3^x ни қўйиб, $3^x > 3$ ва $3^x < -1$ тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг ҳамма қийматлар тўплами берилган тенгсизлиكنи қаноатлантиради. $3^x < -1$ тенгсизлик ечимга эга эмас, $3^x > 3$ тенгсизликдан эса $x > 1$ жавобни толамиз.

14-мисол. $-1 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$ тенгсизлигини ечинг.

Ечинш. Берилган кўш тенгсизлиكنи ечинш деганда, биз бир вақтда $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -1$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг барча қийматларини топишни

тушунамиз. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -1$ тенгсизлиكنинг чап кисми x нинг хар кандай кийматида мусбат бўлгани учун $x \in (-\infty; +\infty)$.

Иккинчи тенгсизлиكنи

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3} 2}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Логарифмнинг хоссасига кўра берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган $x > \log_{1/3} 2$ тенгсизликка эга бўламиз. Демак, кўш тенгсизлиكنи $x > \log_{1/3} 2$ кийматлар тўғлами қановатлантиради.

4. §. Функциялар ва уларнинг графикалари

Мактаб математика курсида функция тушуначаси ва унинг графигини чизиш масаласи асосий ўринлардан бирини эгаллайди. Математиканинг ҳамма бўлимларини мукаммал ўрганиш учун функционал боғланишни тухта ўзлаштириш зарур. Тажриба шуни кўрсатдики, абитуриентларнинг бир қисми функциянинг таърифини ва унинг маъносини билмайдилар. Абитуриентларнинг жавоблари шуни кўрсатадики, улар функцияларни аналитик усул билан текшириш ва бу текшириш натижаларидан фойдаланиб, функция графигини чизилиши яхши билмайдилар. Айрим абитуриентлар функциянинг графигини чизиш учун жадвал тузиб, сўнгра бу нукталарни бевосита туташтириб чиқяндилар. $y = f(x)$ кўринишдаги функциянинг графигини чизиш учун берилган функцияни текшириш керак. Сўнгра функциянинг хоссалари ва текшириш натижасида олинган маълумотларга кўра унинг умумий кўринишини ва эгри чизикнинг ҳолатини аниқлаш ёрдамида функция графигининг эскизини аниқлаб олиш керак.

Функция графигининг эскизини чизишда асимптоталар катта роль ўйнайди.

Таъриф. $y = f(x)$ функция графигининг асимптотаси деб, шундай тўғри чизикка айиладикки, тўғри чизик устидаги $M(x, y)$ нукта билан $y = f(x)$ эгри чизик орасидаги масофа $M(x, y)$ нукта шу эгри чизик бўйлаб чексизликка интилганда нолага интилади.

Уч хил: вертикал, горизонтал ва оғма асимптоталар мавжуддир.

Агар $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ лимитлардан акад-ли биттаси $+\infty$ (ёки $-\infty$) га тенг бўлса, $x = b$ тенглама билан берилган тўғри чизик *вертикал асимптота* бўлади.

$y = kx + b$ тенглама билан берилган тўғри чизик *оғма асимптота* бўлиши учун

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$$

лимитларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир. Агар $k = 0$ бўлиб, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ лимит мавжуд бўлса, y ҳолда $y = b$ тенглама билан берилган тўғри чизик *горизонтал асимптота* бўлади.

Функциянинг графигини чизишда мумкин қадар графигининг характерли нукталарини аниқ кўрсатиш керак. Масалан, функция графигининг координата ўқлари билан кесишиш нукталарини, функциянинг маъносини йўқотадиган нукталарини, эгри чизикнинг мос учининг координатларини топиб олиш керак. Функциянинг узлиш нукталари функциянинг аниқланиш соҳасини бир қанча оралиқларга бўлади, бу оралиқларнинг ҳар бирида функция графигининг ҳолатини аниқлаш керак. Шундан сўнг функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқлари, энг катта ва энг кичик кийматлари топилади.

Аниқланган характерли нукталари, функциянинг ҳар бир оралиқдаги ҳолати бўйича функциянинг умумий хоссаларини ҳисобга олган ҳолда графиги чизилди.

Умуман функциянинг графигини чизиш учун унинг графигини чизилиши осонлаштирадиган факторлардан, яъни функция графигининг ўққа симметриялигидан, координата ўқларига нисбатан суришдан, функция графигини ўққа нисбатан сиқиш ёки чўзиш усулларидан фойдаланишни билиш керак.

Бу усуллар яхши ўзлаштириб олинса,

$$y = \frac{k}{x+a}, \quad y = \frac{k}{(x+a)^2}, \quad y = a^{nx}, \quad y = a^{nx-e},$$

$$y = \log_c(ax+b), \quad y = A \sin(ax+b)$$

ва бошқа функцияларнинг графикаларини чизиш осонлашади. Масалан, $y = a^x$ ($k > 1$) функциянинг графигини чизиш учун дастлаб $y = a^x$ функциянинг графиги-

ни чизиш керак, сўнгра бу графикни абсциссалар ўқи бўйича k марта чўзиш керак. Графикларни чизишга доир бир нечта мисол кўра-миз.

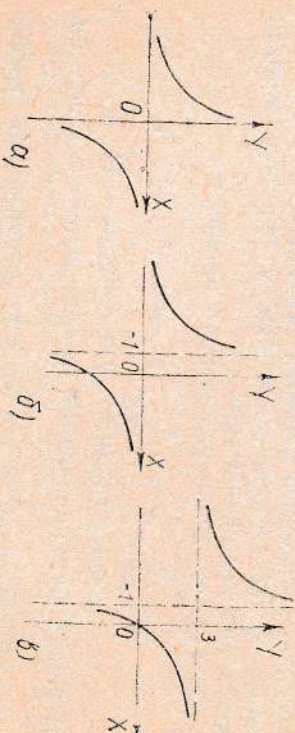
1-мисол. $y = \frac{3x-2}{x+1}$ функциянинг графикни чизинг.

Бу функциянинг шаклини қуйидагича алмаштира-миз:

$$y = \frac{3x-2}{x+1} = 3 + \frac{-5}{x+1}.$$

Бу функциянинг графиги босқичма-босқич чизила-ди. Дастлаб $y = \frac{-5}{x}$ (гипербола) графигини чизамиз, сўнгра уни абсциссалар ўқи бўйича чапта бир birlik-ка суриб, $y = \frac{-5}{x+1}$ функциянинг графигини ҳосил қи-ламиз. Шундан сўнг, берилган функциянинг графиги-ни узинг-кесил чизиш учун $\frac{-5}{x+1}$ нинг графигини ва коор-дината ўқларини уч birlik юқорига ва чапта парал-лел суриш kifoy. Шундай қилиб, $y = \frac{3x-2}{x+1}$ функция-нинг графиги вертикал асимптотаси $x = -1$, горизонтал асимптотаси $y = 3$ бўлган гиперболадан иборат (8-чиз-ма). $y = f(x)$ функцияни текшириш ва унинг графигини чизишни бирор аниқ схема асосида олиб бориш мақ-садга мувофиқдир. Бунга аниқ мисоллар ениш орақли кўрсатамиз.

2-мисол. $y = \lg(1-x)$ функциянинг графикни чи-зинг.



8-чизма.

1. Функциянинг аниқла-ниш соҳасини топамиз:

$$1-x > 0 \text{ ёки } x < 1,$$

$$(-\infty; 1).$$

2. Функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. Демак, унинг графиги симметрия ўқига, симметрия марказига эга эмас.

3. Функциянинг графиги координата бошидан ўтади, chunki $y(0) = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \lg(1-x) = -\infty$ бўлгани учун $x = 1$ тўғри

чизик функция графигининг вертикал асимптотасидир. 5. $A(-9, 1)$ контрол нўқта бўлиб, у функциянинг графигини тўғри чизишга ёрдам беради.

6. Берилган функциянинг графигини олтинган май-лумотларга кўра чизамиз (9-чизма).

3-мисол. $y = \lg \sin x$ функциянинг графикни чи-зинг.

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси $y = \lg \sin x$ функция x нинг $\sin x > 0$ шартни қаноатлан-тирувчи $2n\pi < x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ қийматлар тўплами-да аниқланган.

2. $y = \lg \sin x$ функцияси жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. Бундан кўринадики, унинг графиги симметрия марказига ва симметрия ўқига эга эмас.

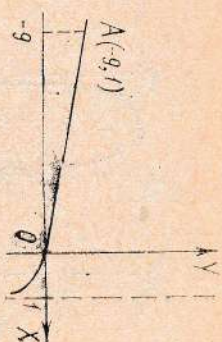
3. Функциянинг даврий фўнгилиги. $\sin x$ функция даври 2π га тенг бўлган даврий функция бўлгани учун $\lg \sin(x + 2\pi) = \lg \sin x$ бўлади.

Демак, берилган функция даврий функция бўлиб, унинг даври 2π га тенг. Шунинг учун функциянинг аниқланиш соҳасини билган ҳолда $(0, \pi)$ интервалда берилган функциянинг графигини чизиш етарлидир.

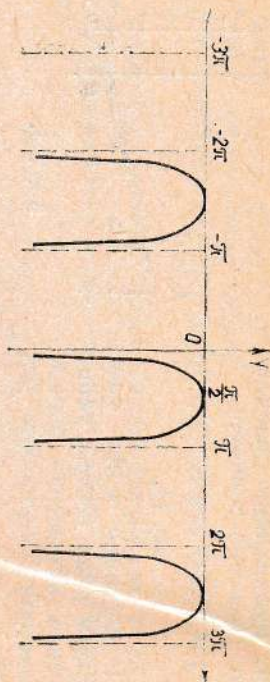
4. $x = 0$ ва $x = \pi$ чизиклар берилган функциянинг вертикал асимптоталари бўлади, chunki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lg \sin x = -\infty \text{ ва } \lim_{x \rightarrow \pi} \lg \sin x = -\infty.$$

5. Функция қийматларининг ўзгариш соҳаси $0 < \sin x \leq 1$ бўлгани учун $-\infty < y \leq 0$ бўлади. Демак, функциянинг графиги Ox ўқидан пастда жойлашган экан.



9-чизма.



10-чизма.

6. Энг катта ва энг кичик қийматлари.
 $x = \frac{\pi}{2}$ нуктада $y = |\sin x|$ функция ўзининг энг катта $y = 1$ қийматига эришади. У энг кичик қийматга эга эмас.

Текшириш натижасига ва бир нечта характерли нукталарига кўра берилган функциянинг графигини чизамиз (10-чизма).

Абитуриентлар ва ҳатто студентлар функция аргументи абсолют қиймат белгиси остида келган бўлса, унинг графигини чизишда қийналадилар. Масалан,

$$y = |ax + b|, \quad y = |ax^2 + bx + c|, \quad y = |\log_a |x||, \\ y = |ax^2 + bx + c|, \quad y = |\sin |x|| \text{ ва ҳоказо}$$

кўринишдаги функцияларнинг графигини чизиш тавсия этилганда кўпчилик абитуриентлар абсолют қиймат тушунчасини яхши тушунмаганликлари сабабли, бир қатор хатога йўл қўядилар. Бундай функцияларнинг графигини чизишни кўйидаги мисоллар орқали тушунтирамиз.

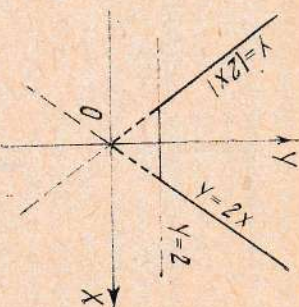
4-мисол. $y = |x + 1| + |x - 1|$ функциянинг графигини чизинг.

Берилган функцияни кўйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y = \begin{cases} -(x+1) - (x-1) = -2x, & \text{агар } x < -1 \\ (x+1) - (x-1) = 2, & \text{агар } -1 \leq x \leq 1 \\ (x+1) + (x-1) = 2x, & \text{агар } x > 1 \end{cases} \text{ бўлса,}$$

Берилган функциянинг графигини чизиш учта: $y_1 = -2x$, $y_2 = 2$ ва $y_3 = 2x$ функциянинг мос интервал-

лардаги графикаларини чизишга олиб келинади. Бу график кўйидаги сининг чизилган ёборат (11-чизма).



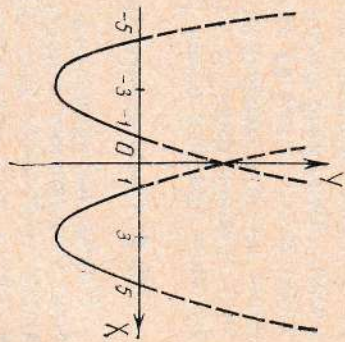
$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| \text{ ва} \\ \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

11-чизма.

Демак, (*) функциянинг графиги билан $y = |x + 1| + |x - 1|$ функциянинг графиги лари устма-уст тушар экан.

Кўпчилик абитуриентлар $y = |ax^2 + bx + c|$ функциянинг графигини оsonгина чизсалар-да, $y = x^2 - 6|x| + 5$ кўринишдаги функцияларнинг графикаларини чизишда қийналадилар. Шу функциянинг графигини қандай чизишни кўрсатамиз.

Абсолют қиймат белгисидан қутқарамиз. Агар $x > 0$ бўлса, у ҳолда функция $y = x^2 - 6x + 5$ кўринишда олади. Бу параболанинг графигини шундай чизамизки, графикада x нинг манфий бўлмаган қийматлари қатнашган қисми қолсин. Агар $x < 0$ бўлса, у ҳолда берилган функция $y = x^2 + 6x + 5$ кўринишда олади. Бу параболанинг графигини шундай чизамизки, графикада x нинг мусбат бўлмаган қийматлари қатнашган қисми қолсин (12-чизма).



Биринчи курс студентларига $y = |\lg x \cdot \lg x|$ функциянинг графигини чизиб келиш топширилган эди. Уларнинг кўпчилиги берилган функцияни $y = 1$ кўринишда ёзиб, сўнг унинг графиги $y = 1$ тўғри чизик деб чизиб келгандлар. Албатта, бу график нотўғри, чунки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ нукталар-

SC томонига DE перпендикуляр туширамиз ҳамда H ва B нукталарни туташтирамиз (15-чизма).

$DC = CB$, $\angle SCD = \angle SCB$ ва EC — умумий томон бўлгани учун $\triangle DCE = \triangle BCE$, демак, $BE \perp SC$. Маънада шартига кўра $\angle DEB = \alpha$ (пирамиданинг ён ёқлари орасидаги чизикли бурчагидан иборат).

Ёрдамчи $\angle SCO = \varphi$ бурчак киритамиз. $\triangle SOC$ дан,

$$SO = H, H = OC \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

$\triangle EOC(DEB)$ — текислигига SC перпендикуляр бўлгани учун тўғри бурчакли учбурчак) ва $\triangle OEB$ лардан:

$$\sin \varphi = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{OD} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{ ни топамиз.}$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} H &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\ &= \frac{a\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{-\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

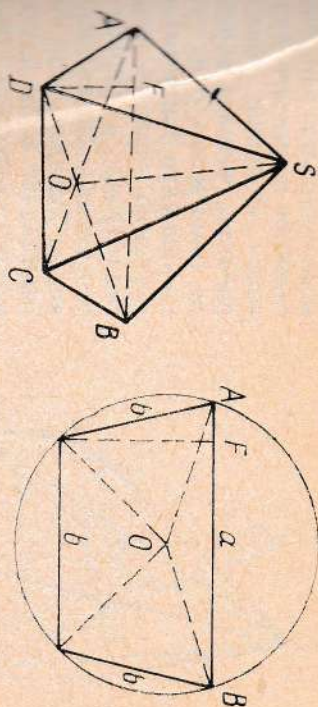
$$\text{Демак, } V = \frac{1}{3} S_{\text{асос}} \cdot H = \frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{6 \sqrt{-\cos 2\alpha}}.$$

Агар $\cos 2\alpha < 0$ тенгсизлиги бажарилса ёки α нинг қийматлар тўплами $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бўлса, у ҳолда масала ечимга эга бўлади.

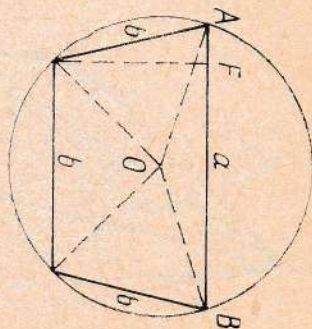
2-масала. Пирамиданинг асоси трапециядан иборат бўлиб, унинг катта асоси a га, кичик асоси ва ён томондари эса бир-бирига тенг. Трапециянинг ўтмас бурчлари α га тенг. Пирамиданинг ҳамма қирралари асос текислиги билан φ бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

Бу масалани ечиш учун абитуриентларнинг кўпчилиги 16-чизмани чизганлар.

Агар 16-чизмага назар солсак, пирамида учини S нинг проекцияси асос диагоналлари нинг кесилиш нуктасига



16-чизма.



17-чизма.

туширилган. Бунда абитуриентларнинг хатоси, OS баландлик пирамида асоси — $ABCD$ трапецияга ташқи чизилган айлана маркази O дан ўтганини билмаганликларидир (17-чизма).

Умуман, масалалар ечишда геометрик жисмларнинг хоссаларидан ва уни ечишни енгиллаштирадиган тушуначалардан фойдаланиш керак. Масалан, пирамида доир масалалар ечганда куйдагилардан фойдаланиш мумкин.

1) агар пирамиданинг ҳамма ён ёқлари, қирралари асос текислиги билан бир хил бурчак ташкил қилса, у ҳолда:

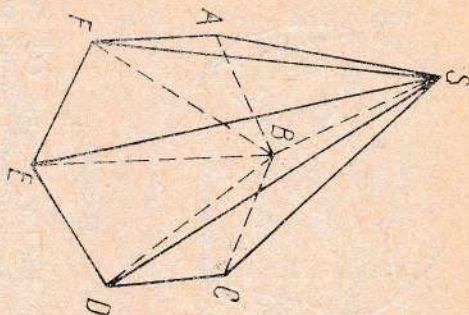
а) пирамиданинг ён қирралари тенг;
б) асосига ташқи айлана чизиш мумкин;
в) пирамиданинг баландлиги ташқи чизилган айлана марказидан ўтади.

2) Агар пирамиданинг ҳамма ён ёқлари асос текислиги билан бир хил бурчак ташкил қилса, у ҳолда:

а) ёқларининг баландликлари тенг;
б) асосига ички айлана чизиш мумкин;
в) $S_{\text{асос}} = S_{\text{ён}} \cdot \cos \alpha$;

$$\text{г) } S_{\text{ўша}} = \frac{2S_{\text{асос}} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Кириш имтиҳони вариантларидан бирида, асоси квадратдан иборат бўлган тўртбурчакли пирамиданинг иккита ён ёни асосга перпендикуляр, қолган иккита ёни эса асос билан α бурчак ташкил этади мазмунидани



18-чизма.

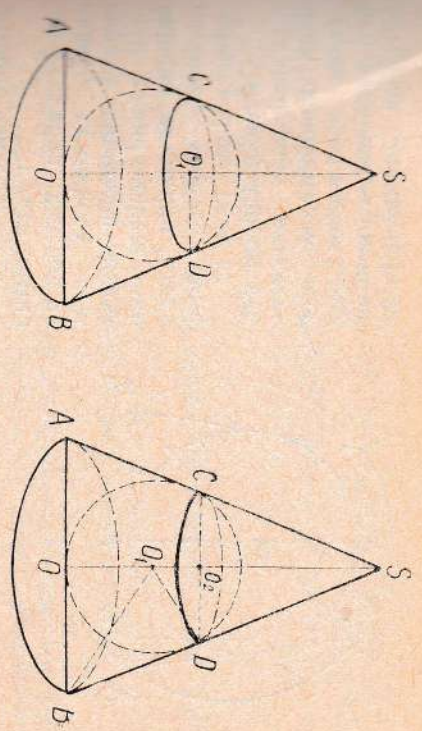
$= BC$, демак, $\triangle ABS = \triangle CBS$ (катетлари тенг бўлган учун). SFE ва SDE учбурчаклар тўғри бурчакли учбурчак эканлигини исбот қиламиз. Чизмага кўра $BE = 2R$, бунда R мунтазам олти бурчакли кўйбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси.

Демак, $\angle BFE = 90^\circ$ (BE диаметрга тиралган бурчак бўлган учун). $\triangle BFE$ —тўғри бурчакли учбурчак бўлгани учун: $FE \perp BF$. Аммо, BF эса SF оғманнинг проекцияси, шунинг учун $у$ ч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра $FE \perp SF$ ва SFE учбурчак тўғри бурчакли учбурчакдир. Худди шунингдек, SDE учбурчак ҳам тўғри бурчакли учбурчак ва $\triangle SFE$ га тенг. Қолган учбурчакларнинг тўғри бурчакли экани ҳам юқоридикидек исбот қилинади.

Стереометрияга доир кўп масалаларнинг шартиди бирор геометрик жисми бошқа жисмга ички ёки ташқин чизиш талаб қилинади. Абитуриентлар кўпинча шар билан боғлиқ чизмаларни чизишда хатога йўл қўядилар. Масалан, абитуриентларга кириш имтиҳон шартида конусга шар ички чизилишини талаб қилинган масала берилганда, улар 19-чизмада тасвирланган шакл-ни чизишган. Бу чизмани чизишда хатога йўл қўйил-

масала берилган эди. Масаланинг шартиди бурчакли кўпчилик абитуриентлар чизмада кўрсатилганлар, бунинг тушуниш учун ёки чизмада кўрсатиш учун $у$ ч перпендикуляр ҳақидаги теоремадан фойдаланиш керак. Масалан, агар пирамиданинг асоси мунтазам олти бурчакли бўлиб, унинг битта ёки кираси асос текислигига перпендикуляр бўлса, $у$ ҳолда тўғрига ёки ёки иккитадан ўзаро тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат эканлигини исбот қилайлик (18-чизма).

Масала шартига кўра $SB \perp BA$, $SB \perp BC$, $AB =$



19-чизма.

20-чизма.

ган, яъни O_1D радиус OB радиусга параллел қилиб чизилган. Тўғри чизма эса 20-чизмадир.

Агар 19-чизмага қараб муҳокама юритадиган бўлсак, шар радиуси O_1D асос радиусига параллел. $у$ ҳолда $\angle O_1DS$ ва $\angle OBS$ бурчаклари тенг (хато) деб олиш натижасида O_1SD ва OSB учбурчаклар ўхшаш учбурчаклар деб қаралади. Натижада масалани ечиш жараёнида кейинги қадамлар ҳам хато бўлади.

Учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси $у$ нга учбурчакнинг тегишли учидан туширилган баландлигининг учдан бир қисмига тенг деб хатога йўл қўядиган абитуриентларни ҳам учратиш мумкин.

Масала шартига кўра бир жисмни иккинчи жисм ичига чизиш талаб этилган бўлса, $у$ ҳолда чизма чизилганда кўйилганларни эътиборга олишни маслаҳат беримиз:

- а) агар шарга цилиндр ташқи чизилган бўлса, $у$ ҳолда шарнинг катта доираси цилиндр ясовчиларига ўринади;
- б) агар шарга цилиндр ички чизилган бўлса, $у$ ҳолда цилиндрнинг асослари шарнинг марказидан бир хил узоқликдаги кесимларда ётади;
- в) агар шарга призма ташқи чизилган, бўлса $у$ ҳолда шарнинг катта доираси призма ёқларига ўринади;
- г) агар шарга призма ички чизилган бўлса, $у$ ҳолда

$$V = \frac{3a^3 \sin(\alpha + \beta)}{8 \cos \alpha \cos \beta}.$$

$\triangle ABC$ ни $\triangle AEC$ нинг проекцияси дейиш мумкин ва улар орасидаги бурчак α бўлгани учун:

$$S_{\text{асос}} = S_{ACE} \cdot \cos \alpha$$

ёки

$$S_{A_1EC_1} = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos \alpha}.$$

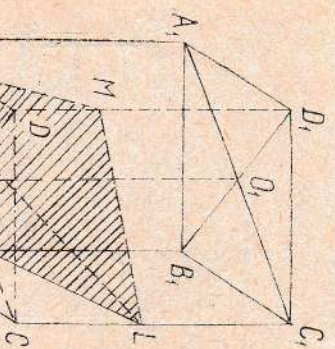
Шунга ўхшаш ёза оламиз:

$$S_{AEC} = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos \beta}.$$

Кейинги икки тенгликни қўшиб, кесим юзларининг йиғиндисини толамиз:

$$\begin{aligned} S_{AEC} + S_{A_1EC_1} &= S_{\text{асос}} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} \right) = \\ &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{a^2 \sqrt{3} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

5-масала. Тўртбур-



23-чизма.

чакли мунтазам призмада асосининг икки қўшни томонларининг ўртасидан ўрта ён қиррасини кесиб ўтувчи текислик ўтказилган. Призма асосининг томони a га тенг, кесимда ҳосил бўлган кўпбурчак асос текислигидан α бурчак ҳосил қилди. Кўпбурчакнинг юзини топинг.

Еч иш. Тўртбурчакли мунтазам призманинг асоси $ABCD$ нинг AD ва AB томонларининг ўрталаридан EF кесма ўтказамиз (23-чизма). Призма асосининг диагонали AC

нинг EF билан кесишиш нуқтасини K орқали белгилаймиз ва AC билан α бурчак ҳосил қилувчи KL кесмани ўтказамиз. Ўзаро кесишувчи EF ва KL тўғри чизиклар орқали текислик ўтказасак, бу текислик призманинг AA_1D_1D ёғини EM бўйича, DD_1C_1C ёғини ML бўйича, AA_1B_1B ёғини EN бўйича, BB_1C_1C ёғини NL бўйича кесиб ўтиш натижасида $EFNLM$ кесим ҳосил бўлади. $EFNLM$ бешбурчак масала шартидagi кесим бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $EF \parallel DB$ бўлгани учун $EFNLM$ кесим EF дан ўтиб, BB_1D_1D диагонал кесимини MN бўйича кесди ва $MN \parallel EF$ бўлиб, улар бир текисликда ётади. $OO_1 \perp DB$, демак, $OO_1 \perp MN$. Лекин OO_1 ва KL лар AA_1C_1C диагонал кесимда ётади, шунинг учун $KL \perp MN$, яъни $KL \perp EF$ бўлади. KL тўғри чизик MN тўғри чизик билан O_2 нуқтада кесишгани учун E, F, N, L, M нуқталар билан текисликда ётади.

У ҳолда $\angle LK = \alpha$ бўлади, чунки $KL \perp EF$ ва $KL \perp EF$. $EFBCD$ бешбурчак $EFNLM$ нинг проекцияси.

$$S_{EFBCD} = S_{ABCD} - S_{AEF} = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}.$$

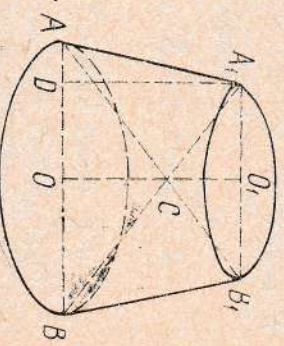
У ҳолда

$$S_{EFNLM} = \frac{S_{EFBCD}}{\cos \alpha} = \frac{7a^2}{8 \cos \alpha}.$$

6-масала. Кесик конуснинг ясовчиси асос текислигидан α бурчак ҳосил қилди, ўқ кесимининг диагоналлари ўзаро перпендикуляр. Агар кесик конуснинг ён сирти S бўлса, унинг ясовчисини топинг.

Еч иш. Масала шартига кўра $\angle A_1AO = \alpha$, $AB_1 \perp A_1B$ ва $S_{\text{ой}} = S$. $A_1D \perp AB$ ни ўтказамиз (24-чизма). У ҳолда, $AB_1 \perp A_1B$ бўлгани учун $\triangle A_1C_1B_1$ ва $\triangle ACB$ лар тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчаклар бўлиб,

$AO = OB = OC = R$, $A_1O_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = r$ бўлади. Шунинг учун $A_1D = OO_1 = R + r$. $\triangle A_1DA$ дан:



24-чизма.

$$\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \frac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+2x}+1).$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(\sqrt{1+2x}+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

4-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin \frac{x}{3}}$ ни топинг.

Ечиш. Лимит белгиси остидаги ифодани қўйиладиганга ўзгартириб ёзамиз:

$$\frac{2x}{\sin \frac{x}{3}} = \frac{6 \cdot \frac{x}{3}}{\sin \frac{x}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{\frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}}.$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin \frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}} = 6 \left(\text{чунки } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} = 1 \right).$$

2. Функциянинг ҳосиласини топиш функциянинг ҳосиласини топиш учун жуда кўп ишлатиладиган асосий формула ва қоидалар жавдани келтирамиз:

1. $y = C$, $y' = 0$, бунда $C = \text{const}$;
2. $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$;
3. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, хусусан $a = e$ бўлса, $(e^x)' = e^x$;
4. $y = \log_a x$, $y' = \frac{1}{x \ln a}$, бунда $a > 0$, $a \neq 1$,
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $y = \sin x$, $y' = \cos x$;
6. $y = \cos x$, $y' = -\sin x$;
7. $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$$8. y = \operatorname{ctg} x, y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$9. y = f(x) + g(x), y' = f'(x) + g'(x);$$

$$10. y = f(x) \cdot g(x), y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$11. y = \frac{f(x)}{g(x)}, y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$12. y = g[f(x)], y' = g'[f(x)] \cdot f'(x).$$

1-мисол. $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ функция ҳосиласининг $x=1$ нуқтадаги қийматини топинг.

Ечиш. $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ ифодани даражали функция қўринишида ёзамиз:

$$\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-\frac{3}{2}}; y = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Бу функциянинг ҳосиласини (2) формула ёрдамида топишимиз:

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}};$$

$$x=1 \text{ да } y'(1) = -\frac{3}{2}.$$

2-мисол. $y = \log_{0.2}(3+x)$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. (4) формулага асосан:

$$y' = \frac{1}{3+x} \log_{0.2} e = \frac{1}{(3+x) \ln 0.2}.$$

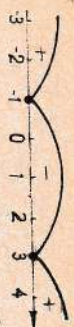
3-мисол. Агар $y = 6 \ln(x-2) - x^2$ бўлса, $y' \geq 0$ тенгсизлигини ечинг.

$$\text{Ечиш. } y' = \frac{6}{x-2} - 2x \geq 0, \text{ бунда } x-2 > 0.$$

$$\begin{cases} 6-2x^2+4x \geq 0, \\ x-2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \leq 0, \\ x > 2. \end{cases}$$

Биринчи тенгламани ечамиз:

$$x^2-2x-3=0 \text{ бўлса, } x=1 \pm 2, \text{ бундан } x_1=-1, x_2=3.$$



26-чизма.

Тенгсизлиكنинг ечими
эса $-1 \leq x \leq 3$ (26-чизма).
 $x - 2 > 0$ бўлгани учун жавоб
 $2 < x \leq 3$ бўлади.

3-мисол. $y = \frac{ax^2}{b-cx^2}$

Функциянинг ҳосиласини топиш.

Ечиш. (11) формуладан фойдаланамиз:

$$y' = \frac{(ax^2)'(b-cx^2) - ax^2(b-cx^2)'}{(b-cx^2)^2} = \frac{2ax(b-cx^2) - ax^2(-2cx)}{(b-cx^2)^2} = \frac{2abx - 2acx^3 + 2acx^3}{(b-cx^2)^2} = \frac{2abx}{(b-cx^2)^2}$$

4-мисол. $y = x^2 \sin x$ функциянинг ҳосиласини топиш.

Ечиш. (2) ва (5) формулалардан фойдаланамиз:

$$y' = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = x^2 \cos x + 2x \sin x = x(x \cos x + 2 \sin x).$$

5-мисол. $y = \frac{\cos x}{\lg x + 3}$ функциянинг ҳосиласини топиш.

Ечиш. (6), (7) ва (11) формулалардан фойдаланамиз:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\lg x + 3} \right)' = \frac{(\cos x)'(\lg x + 3) - \cos x (\lg x + 3)'}{(\lg x + 3)^2} = \frac{(-\sin x)(\lg x + 3) - \cos x}{(\lg x + 3)^2} = \frac{(-\sin x)(\lg x + 3) - \cos x}{(\lg x + 3)^2} = \frac{\cos x(\lg x + 3) - 1}{\cos x(\lg x + 3)^2} = \frac{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 1}{\cos x(\lg x + 3)^2} = \frac{2(1 + \sin^2 x) + 3 \sin 2x}{2(\lg x + 3)^2 \cos x}.$$

6-мисол. $y = \ln(0.5x) - x^2$ функция графигининг абсциссаси $x_0 = 2$ га тенг бўлган нүктасига уринма тенгламасини тузинг.

Ечиш. $y = f(x)$ функция графигининг $(x_0, f(x_0))$ нүктасидан ўтувчи уринма тенгламаси $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ дан фойдаланамиз:

$$f(x_0) = f(2) = \ln 1 - 4 = -4.$$

$$y' = f'(x) = \frac{0.5}{0.5x} - 2x = \frac{1}{x} - 2x, \text{ бунда } x > 0,$$

$$f'(2) = 0.5 - 4 = -3.5.$$

$$y = -4 - 3.5(x - 2) \Rightarrow y = 3 - 3.5x.$$

7-мисол. $y = \frac{e^{2x+1}}{x^2}$ функция графигининг абсциссаси $x_0 = -\frac{1}{2}$ га тенг нүктасига ўтказилган уринма тенгламасини тузинг.

$$\text{Ечиш. } f(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-1+1}}{\frac{1}{4}} = e^0 \cdot 4 = 4.$$

$$y' = (e^{2x+1})' \cdot x^{-2} + e^{2x+1} (x^{-2})' = 2e^{2x+1} x^{-2} - 2x^{-3} e^{2x+1} = 2x^{-2} e^{2x+1} (1 - x^{-1}).$$

$$y' \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{-2} e^0 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{-1} \right) = 8 \cdot 3 = 24.$$

$$y = 4 + 24 \left(x + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = 24x + 16.$$

8-мисол. Моддий нүқта $x(t) = t^3 - 3t^2 - 8t + 30$ қонуи бўйича тўғри чизикли ҳаракат қилади. Нүқта-нинг $t = 2$ даги тезланишини топиш. Нүктанинг тезланиши 12 м/с^2 бўлгандаги вақтни ва унинг шу моментдаги тезлигини топиш.

$$\text{Ечиш. } v(t) = x'(t) = 3t^2 - 6t - 8,$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 6.$$

$$a(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Масала шартига кўра $a(t) = 12$, y ҳолда

$$12 = 6t - 6 \Rightarrow t = 3 \text{ сек.}$$

$$v(3) = 3t^2 - 6t - 8 = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 8 = 27 - 26 = 1 \text{ м/с.}$$

Жавоб: $a(2) = 6 \text{ м/с}^2$; $t = 3$; $v(3) = 1 \text{ м/с.}$

3. Функциянинг ўсиши ва камайиши
Тарриф. Агар аргументнинг (a, b) интервалада тегишли ихтиёрий $x_1 < x_2$ қийматларига $y = f(x)$ функциянинг $f(x_1) < f(x_2)$ шартни қаноатлантирувчи қийматлари мавжуд бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалада ўсувчи дейилади. Агар аргументнинг (a, b) интервалада тегишли ихтиёрий $x_1 < x_2$ қийматларига функциянинг $f(x_1) > f(x_2)$ шартни қаноатлантирувчи қийматлари мавжуд бўлса, $y = f(x)$ функция (a, b) интервалада камаювчи дейилади.

Функциянинг ўсиши ёки камайишини функция ҳосиласининг ишорасига қараб ҳам билиш мумкин. Қуйидаги тасдиқни исботсиз келтирамиз.

Агар $f'(x)$ ҳосила x аргументнинг (a, b) интервалдан олинган барча қийматларида $f'(x) > 0$ бўлса, $y = f(x)$ функция шу интервалда ўсувчи, агар $f'(x)$ ҳосила x аргументнинг (a, b) интервалдан олинган барча қийматларида $f'(x) < 0$ бўлса, y ҳолда $y = f(x)$ функция бу интервалда камаювчи бўлади.

$x \in (a, b)$ аргументнинг ҳосиласи нолга айланадиган ёки узилмайдиган қийматлари критик нуқталар ёки аргументнинг критик қийматлари дейилади. Ҳосила ёрдамида функциянинг ўсиши ёки камайишини аниқлашга доир мисоллар кўрамиз.

Мисол. Куйидаги функцияларнинг ўсиш ва камайиш интервалларини топиш:

$$1. y = 3x - x^3; \quad 2. y = \frac{2}{3-x}; \quad 3. y = 4x + \frac{1}{x}.$$

Еч и ш. 1. $y = 3x - x^3$ функция ҳақиқий сон ўқининг ҳамма ерида аниқланган. Функциянинг ҳосиласи $y' = 3 - 3x^2$ бўлгани учун $1 - x^2 > 0$ бўлса, y ҳолда $y'(x) > 0$ бўлади. Энди ушбу тенгсизлиكنи ечамиз:

$$1 - x^2 < 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Демак, берилган функция $(-1; 1)$ интервалда ўсувчи, x нинг $1 - x^2 > 0$ тенгсизлики қаноатлантирувчи барча қийматлари, яъни $(-\infty, -1)$ ва $(1; +\infty)$ интервалларда камаювчидир.

2. $y = \frac{2}{3-x}$ функция ҳақиқий сон ўқининг $x \neq 3$ дан бошқа ҳамма ерида аниқланган.

Функциянинг ҳосиласи $y' = \frac{2}{(3-x)^2}$ га тенг. x нинг ҳамма $(x \neq 3)$ дан бошқа қийматларида $y'(x) > 0$ бўлгани учун берилган функция $(-\infty; 3)$ ва $(3; +\infty)$ интервалларнинг ҳар бирида ўсувчи.

3. $y = 4x + \frac{1}{x}$ функция ҳақиқий сон ўқининг $x = 0$ дан бошқа ҳамма ерида аниқланган. Функциянинг ҳосиласи $y' = 4 - \frac{1}{x^2}$ га тенг. Агар $4x^2 - 1 > 0$ бўлса, y ҳолда $y'(x) > 0$ бўлади. Бу тенгсизлиكنи ечамиз:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Бу тенгсизлиكنинг чап томонининг ишорасини аниқлайдиган (интерваллар усулига кўра) чизма куйида



27-чизма.

келтирилган (27-чизма). Демак, берилган функция x нинг бу тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида, яъни $(-\infty; -\frac{1}{2})$ ва $(\frac{1}{2}; +\infty)$ интервалларнинг ҳар бирида ўсувчи, $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ интервалларнинг ҳар бирида камаювчи.

4. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун функциянинг берилган интервалда дифференциалланувчи (ҳосиласи мавжуд) функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун функциянинг берилган интервалдаги ётган барча критик нуқталарини топиш, функциянинг шу нуқталардаги ва интервалнинг чек-келаридagi қийматларини ҳисоблаш ва шу йўл билан топилган барча сонлар орасидан энг каттасини ва энг кичиксини олиш керак.

1-мисол. $y = 4x^3 + 6x^2 - 1$ функциянинг $[-2; 1]$ oralqidaги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш. Еч и ш. Бу функциянинг критик нуқталарини топиш. Берилган функциянинг ҳосиласи

$$y' = 12x^2 + 12x = 12x(x + 1)$$

бўлгани учун $x_1 = -1$ ва $x_2 = 0$ критик нуқталар бўлади. Энди

$$y(-2) = -9, \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 9$$

бўлгани учун бу функциянинг энг катта қиймати 9 га тенг бўлиб, унга $x = 1$ нуқтада эришилади, функциянинг энг кичик қиймати -9 бўлиб, унга $x = -2$ нуқтада эришилади.

$$\max_{x \in [-2; 1]} y(x) = y(1) = 9; \quad \min_{x \in [-2; 1]} y(x) = y(-2) = -9.$$

2-масала. Иккита мусбат соннинг йиғиндиси a га тенг, уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлиши учун бу сонларни қандай танлаш керак?

Еч и ш. Агар қўшилувчилардан бири x бўлса, y ҳолда иккинчи сон $a - x$ бўлади. Бу x ва $a - x$ қўшил-

дувчиларнинг кўпайтмасы ўзгарувчи миқдор ва уни у орқали белгилаб топамиз:

$$y = x(a - x) = ax - x^2, \quad (0 < x < a).$$

Функциянинг критик нуқтасини топамиз. Аниқланган функция ҳосиласи $y' = a - 2x$ бўлгани учун, $x = \frac{a}{2}$ критик нуқта бўлади.

$$y(0) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$$

бўлгани учун $x = \frac{a}{2}$ бўлганда бу сонларнинг кўпайтмаси энг катта бўлади.

3-масала. Берилган периметрли тўғри тўртбурчаклар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг.

Еч иш. Тўғри тўртбурчакнинг периметри p га тенг бўлсин. Агар тўғри тўртбурчакнинг битта томонини x билан белгиласак, у ҳолда иккинчи томон $\frac{p-2x}{2} = \frac{p}{2} - x$ га тенг бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг юзини y билан белгилаймиз, у ҳолда

$$y = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{p}{2}x - x^2, \quad \left(0 < x < \frac{p}{2}\right).$$

Берилган функциянинг ҳосиласи $y' = \frac{p}{2} - 2x$ бўлгани учун $x = \frac{p}{4}$ критик нуқта бўлади. Энди $y(0) = 0$,

$$y\left(\frac{p}{2}\right) = 0, \quad y\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p^2}{16}$$

ларни топамиз.

Критик нуқта атрофида функция ҳосиласининг ишораси плюсдан минусга ўзгаргани учун, берилган периметрли барча тўғри тўртбурчаклар ичидан томони $\frac{p}{4}$ дан иборат квадрат энг катта юзга эга бўлади.

4-масала. R радиусли доирага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклар ичидан энг катта юзга эга бўлганини топинг.

Еч иш. Доирага ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали $2R$ га тенг, томонларидан бирини x билан белгиласак, у ҳолда иккинчи томон $\sqrt{(2R)^2 - x^2}$ бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг юзи ўзгарувчи миқдор ва уни y билан белгилаб $y = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ ни ҳосил

қиламиз (бунда $x \in (0, 2R)$). Бу функциядан ҳосила оламиз:

$$y' = x' \sqrt{4R^2 - x^2} + x \left(\frac{4R^2 - x^2}{2} \right)' = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{8R^2 - 3x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

$$y' = 0, \quad \frac{8R^2 - 3x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$2R^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = R\sqrt{2}.$$

Масала шартига кўра ҳосила ишорасини $x = R\sqrt{2}$ критик нуқта атрофида плюсдан минусга ўзгартиришти, демек, функция $x = R\sqrt{2}$ да энг катта қийматга эришди, бинобарин, энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак томони $R\sqrt{2}$ га тенг бўлган квадратдир. 5-масала. Асоси билан бадаллигининг йигиндиси a га тенг бўлган барча учбурчаклар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг.

Еч иш. Учбурчакнинг асоси x бўлса, у ҳолда унинг бадаллиги $a - x$ га тенг бўлади. Учбурчакнинг юзини y билан белгиласак, у ҳолда

$$y = \frac{1}{2}x(a - x)$$

функцияни ҳосил қиламиз (бунда $x \in (0, a)$).

Функциянинг ҳосиласи $y' = \frac{a}{2} - x$ бўлгани учун

$$\frac{a}{2} - x = 0 \text{ тенгламани ечиб критик нуқтани топамиз: } x = \frac{a}{2}. \quad [0, a] \text{ оралиқда } y(0) = y(a) = 0 \text{ ва } y\left(\frac{a}{2}\right) > 0$$

бўлгани учун, у функция $x = \frac{a}{2}$ нуқтада энг катта қийматга эришади. Демак, учбурчакнинг асоси $\frac{a}{2}$ ва бадаллиги $a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ га тенг бўлганда унинг юзи энг катта бўлади.

5. Бошланғич функция ва аниқ интегралнинг татабқиқлари
1-таъриф. Ҳосиласи $f(x)$ га ёки дифференциали $f'(x)dx$ га тенг, яъни $F'(x) = f(x)$; $dF(x) = f(x)dx$ бўладиган $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

2-тарбиф. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бирорта бошлангич функция, яъни $F'(x) = f(x)$ ёки $df(x) = f(x)dx$ бўлса, у ҳолда $F(x) + C$ нифода $f(x)$ функциянинг антиклас интеграл дегилди ва бу қуйидагича ёзилади:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Бошлангич функцияни топишга ва аниқ интегралнинг айрим табиқларига доир масалалар ечишга мисоллар келтирамиз.

1-мисол. Ҳосиласи $y' = 2x - 4$ бўлган функцияни топиш.

Еч иш. $y' = 2x - 4$ ёки $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$, бундан

$$dy = (2x - 4)dx.$$

Бунинг чап ва ўнг томонларидан интеграл оламиз:

$$\int dy = \int (2x - 4)dx, \quad y = x^2 - 4x + C.$$

Биз ҳосиласи $y' = 2x - 4$ бўлган функцияларнинг умумий нифодасини ҳосил қилдик.

2-мисол. Ҳосиласи $y' = 2x - 5$ бўлган ва $x = -3$ да 28 га тенг қиймат қабул қиладиган функцияни топиш.

Еч иш. $y' = 2x - 5$ ёки $\frac{dy}{dx} = 2x - 5$, бундан $dy = (2x - 5)dx$. Бунинг ўнг ва чап қисмларидан интеграл оламиз:

$$\int dy = \int (2x - 5)dx; \quad y = x^2 - 5x + C.$$

Берилган $x = -3$ ва $y = 28$ қийматларини ўрнига қўйиб C ни толамиз: $28 = (-3)^2 - 5(-3) + C$, бундан $C = 4$. Берилган бошлангич шартларни қаноатлантирувчи функция $y = x^2 - 5x + 4$ қўриниши олади.

3-мисол. Агар чизикқа уринманинг исбатланган уриниш нуктасидаги бурчак коэффициентини $-\frac{x}{y}$ га тенг бўлса, чизикнинг тенгламасини тузинг.

Еч иш. Масаланинг шартига $k = -\frac{x}{y}$ берилган, 2-мисол $k = \frac{dy}{dx}$, демак, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, бундан, ўзгарувчилар-

ни ажратиб, $ydy = -x dx$ ни ҳосил қиламиз. Иккала томонини интеграллаймиз:

$$\int ydy = -\int xdx, \quad \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C.$$

Агар бунини соддалаштирсак, $x^2 + y^2 = 2C$ айланга эга бўламиз.

4-мисол. Агар $A(3; -1)$ нуктадан ўтувчи эгри чизикқа уринманинг бурчак коэффициентини чизикнинг ҳар бир нуктасида $2x - 4$ га тенг бўлса, чизикнинг тенгламасини топиш.

Еч иш. Масаланинг шартига кўра $k = 2x - 4$, бироқ $k = \frac{dy}{dx}$, демак, $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ ёки $dy = (2x - 4)dx$.

Бунини интеграллаймиз:

$$\int dy = \int (2x - 4)dx; \quad y = x^2 - 4x + C.$$

А нуктанинг координаталарини топишга тенгламатга қўйиб, C ни толамиз: $-1 = 3^2 - 4 \cdot 3 + C \Rightarrow C = 2$. У ҳолда тенглама $y = x^2 - 4x + 2$ қўриништа эга бўлади, бу эгри чизик параболadir.

5-мисол. Жисмининг тўғри чизикда ҳаракат тезлиги $v = 2t - 3$ тенглама билан берилган. S йўлнинг тенгламасини топиш.

Еч иш. Мавлудики, жисмининг тўғри чизикда ҳаракати тезлиги S йўлдан t вақт бўйича олганган ҳосилатга тенг: $v = \frac{dS}{dt} = 2t - 3$, бундан $dS = (2t - 3)dt$. Бунини интеграллаймиз:

$$\int dS = \int (2t - 3)dt, \quad S = t^2 - 3t + C.$$

6-мисол. Нуктанинг тўғри чизикда ҳаракати тезлиги $v = 2 \cos t$ формула билан берилган. Агар $t = \frac{\pi}{6}$ моментда нукта санок бошидан $S = 4$ см масофада бўлса, унинг ҳаракат тенгламасини тузинг.

Еч иш. $v = \frac{dS}{dt} = 2 \cos t$ ёки $dS = 2 \cos t dt$.

Бунини интеграллаймиз:

$$\int dS = \int 2 \cos t dt; \quad S = 2 \sin t + C.$$

S ва t нинг қийматларини ўрнига қўйиб C ни то-
памиз:

$$4 = 2 \sin \frac{\pi}{6} + C, \text{ бундан } C = 3.$$

Нуктаининг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўриниш-
да бўлади:

$$S = 2 \sin t + 3.$$

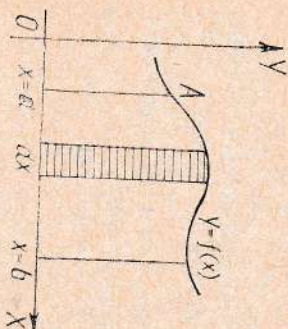
Аниқ интеграл ёрдамида яси фигураларнинг юзини,
айланниш жисмларининг ҳажмларини айланиш сиртла-
рининг юзини, жисмининг ўтган йўлини, кучнинг бажар-
ган ишини, юк кўтаришда бажарилган ишни, суюқлик-
лардан фақат яси фигураларнинг ҳисоблаш мумкин. Шу-
доир мисоллар кўралик.

$y = f(x)$ эгри чизик. Ox ўқ ҳамда $x = a$ ва $x = b$
тўғри чизиклар билан (бунда $a < x < b$, $f(x) \geq 0$) че-
гараланган фигуранинг S юзини топамиз (28-чизма).
Ўзгарувчи S юзининг дифференциали асоси dx ва
баландлиги $f(x)$ бўлган тўғри тўртбurchакнинг юзидир,
яъни $dS = f(x)dx$.

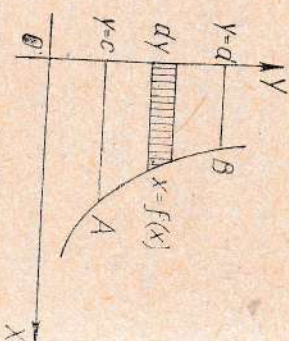
Бу тенгликни $x = a$ дан $x = b$ гача интеграллаб
қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Агар эгри чизикли трапеция Oy ўққа ёпишган бўл-
са (29-чизма), y ҳолда ўзгарувчи S юзининг диффе-



28-чизма.



29-чизма.

$$dS = f(y)dy$$

бўлади, бундан

$$S = \int_c^d f(y) dy. \quad (2)$$

Мисол. $y = 3x$, $y = 0$
ва $x = 3$ чизиклар билан
чегараланган фигуранинг
юзини ҳисоблайлик.

Чунки, фигурани ясай-
лик. Масала партидан кў-
риниб турибдики, фигура
координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизик $y = 3x$,
(x ўқ ($y = 0$)) ва $x = 3$ ордината билан чегараланган
(30-чизма). Юз (1) формула бўйича ҳисобланади.

$$S = \int_0^3 3x dx = \left. \frac{3x^2}{2} \right|_0^3 = \frac{27}{2} \text{ (кв. бирлик).}$$

Белрилган фигура асоси 3 ва баландлиги $y = 3 \cdot x =$
 $= 3 \cdot 3 = 9$ бўлган тўғри бурчакли учбurchак бўлади.
Кининг юзини одатдаги усул билан ҳисоблаймиз:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \frac{27}{2} \text{ (кв. бирлик).}$$

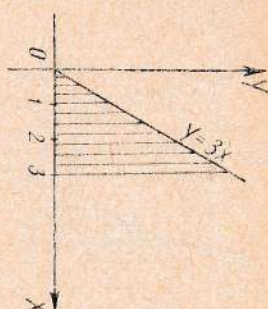
Мисол. $x - 2y + 4 = 0$, $x + y - 5 = 0$ ва $y = 0$
чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳи-
соблайлик.

Чунки, фигурани ясаймиз (31-чизма). Чизмадан
кўриниб турибдики, $C(5, 0)$. Тўғри чизикларнинг ке-
симиш нуктасини ушбу

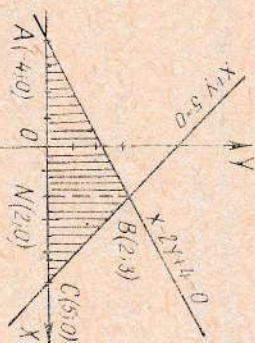
$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини
ёшиб, топамиз: $x = 2$,
 $y = 3$, $B(2, 3)$.

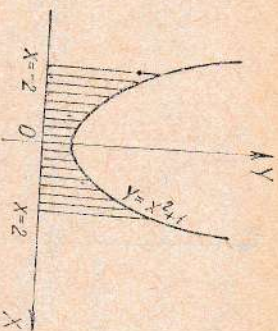
Низмаласган юзни ҳи-
соблаш учун ABC учбур-
чакни ABN ва NBC уч-
бурчакларга бўламиз,
чунки x ўзгарувчи A дан



30-чизма.



31-чизма.



32-чизма.

N гача ўзгарганда юз $x = -2y + 4 = 0$ тўғри чизик билан чегараланган, x ўқ тарувчи N дан C гача ўзгарганда эса $x + y - 5 = 0$ тўғри чизик билан чегараланган.

ABN учбурчак учун: $x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$. NBC учбурчак учун: $x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -x + 5$. Ҳар бир учбурчакнинг юзини ҳисоблаб чиқамиз:

$$S_{\triangle ABN} = \int_{-4}^2 \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_{-4}^2 = 9 \text{ (кв. бирлик);}$$

$$S_{\triangle NBC} = \int_2^5 \left(-x + 5 \right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_2^5 = 4,5 \text{ (кв. бирлик);}$$

$$S = S_{\triangle ABN} + S_{\triangle NBC} = 9 + 4,5 = 13,5 \text{ (кв. бирлик).}$$

9-мисол. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -2$ ва $x = 2$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

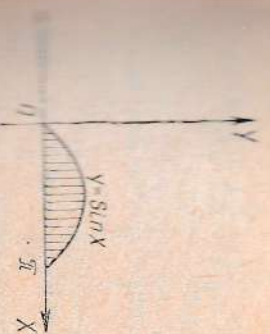
Еч. ш. $y = x^2 + 1$ параболали нуқталар бўйича асаймиз (32-чизма):

x	0	1	2	3
y	1	2	5	10

Масаланинг шартидан $f(x) = x^2 + 1$, $a = -2$ ва $b = 2$ бўлгани учун:

$$S = \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^2 = 9 \frac{1}{3} \text{ (кв. бирлик).}$$

10-мисол. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = \pi$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



33-чизма.

Еч. ш. Ивланаётган юз синусининг ярим тўлиқини ва Ox ўқ билан чегараланган (33-чизма). Масала шартига кўра $f(x) = \sin x$, $a = 0$ $b = \pi$. y ҳолда (1) формулага кўра:

$$y = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \text{ (кв. бирлик).}$$

Ox ўқ, $y = f(x) < 0$ чизик ҳамда $x = a$ ва $x = b$ нуқталар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблашда унинг мўдори манфий чиқади, шунинг учун эгри чизикли трапециянинг юзи қуйидаги формула билан ҳисобланади:

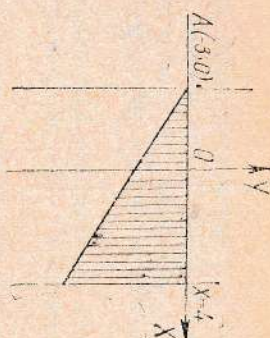
$$S = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (3)$$

11-мисол. $2x + 3y + 6 = 0$, $y = 0$ ва $x = 4$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

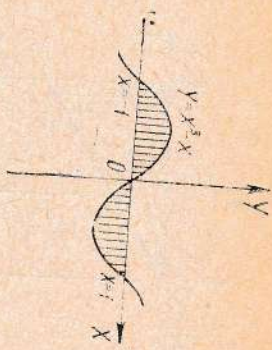
Еч. ш. Фигура Ox ўқидан пастда жойлашганлиги билан кўриниб турибди (34-чизма). Масала шартидан:

$$2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 2.$$

Тўғри чизик Ox ўқни $A(-3, 0)$ нуқтада кесиб ўтади ва $b = 4$. Демак,



34-чизма.



$$S = \int_{-3}^4 \left(-\frac{2}{3}x - 2 \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^2 - 2x \right) \Big|_{-3}^4 =$$

$$= \left| -16\frac{1}{3} \right| = 16\frac{1}{3} \text{ (кв. бир-лик).}$$

35-чизма.

Чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоб-
ланг.

Е чиш. Фигура юзлари тенг бўлган иккита бўлак-

дан иборат эканлиги $y = x^3 - x$ функциянинг графиги-
дан (35-чизма) кўриниб турибди, шунинг учун Ox
бўлган юқоридаги фигуранинг юзини топиб, ҳосил
бўлган натижани иккилантирамиз:

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{4} \text{ (кв. бирлик);}$$

$$S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ (кв. бирлик).}$$

7-§. Математикадан қисқача концепт тузиш

Олий техника ўқув юр்தларига кириш учун тайёр-

ларлик кўришда математика курсининг алоҳида тема-
лари бўйича қисқача концепт тузиш мақсадга муво-
фиқдир. Математикадан тузилган қисқача концепт
катта ҳажмдаги (бир неча бетли) алоҳида темани ма-
тематик формулалар ёрдамида бир бетга (ёки ундан
кам) осон тушунарли, темани тез такрорлаш учун,
мисол ва масалаларни ечишда ундан справочник мате-
риал тарикасида фойдалана олиш учун тузилади.
Математикадан тузилган қисқача концепт қандай
бўлиши керак?

1. Аввало дарсликдан темани кўнг билан яхшилаб
ўқиш керак. Сўнгра бу темани қай даражада ўзлаш-
тирганлигини ва бу темага тегишли теорема ва фор-
мулалар қанчалик эсда қолганини текшириб кўриш
керак.

2. Энди бу темани қисқа тузилган концепт бўйича
тарғибли керак. Агар сиз концептдаги қисқача баён
эканлиги мумкинлар ва ҳосил қилинган асосий формула-
ларни Комиссияни тушуниб олсангиз мақсадга эришган
бўларсиз.

3. Қисқача тузилган концептдан фойдаланиб, тема-
нинг мазмунини тўлиқ баён эта олаётган бўлишингиз
керак.

Амалдан, Ёнгте теоремаси учун қуйидагича қисқача
концепт тузиш мумкин:

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

4. $a = 1$ бўлса, $x^2 + px + q = 0$, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Шу қисқа концептга қараб бу темани қуйидагича
тўлиқ баён этиш керак

Ёнгте теоремаси. Умумий кўринишдаги квад-
рат тенгламанинг илдизлари йиғиндиси x олдидagi
коэффициентнинг x^2 олдидagi қарама-қарши ишора
олган олинган коэффициентга нисбатига, уларнинг қу-
раётгани эса озод ҳаднинг x^2 олдидagi коэффициентга
нисбатига тенг.

Исбот. Умумий кўринишдаги квадрат тенглама-
нинг илдизлари қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Бу ифодаларни қўшсак:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

10 эга бўламиз.

x_1 ни x_2 га қўпайтиришда $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
формуладан фойдаланамиз, яъни

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Теорема исбот бўлди.

Агар $a=1$ бўлса, квадрат тенглама $x^2 + px + q = 0$ дейилади. Келтирилган квадрат тенглама теоремаси куйидагича баён этилади:

Келтирилган квадрат тенглама илдизларининг йиғиндис қарама-қарши ишора билан олинган x олдидан коэффициентга, уларнинг кўпайтмаси эса шу тенгламанинг оқд ҳадига тенг:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Виет теоремаси ёрдамида тенгламани ечимасдан туриб тенглама илдизларининг ишорасини аниқлаш мумкин. Агар оқд ҳад мусбат бўлса, u ҳолда илдизлар бир хил ишорали бўлади. Агар оқд ҳад манфий бўлса, u ҳолда илдизлар ҳар хил ишорали бўлади. Куйидаги ҳолларни кўриш мумкин:

а) $p > 0, q > 0$ — иккала илдиз манфий бўлади;

б) $p > 0, q < 0$ — абсолют миқдори бўйича каттаси манфий илдиз бўлади;

в) $p < 0, q > 0$ — иккала илдиз мусбат бўлади;

г) $p < 0, q < 0$ — абсолют миқдори бўйича каттаси мусбат бўлади.

Виет теоремасидан квадрат учҳадларни кўпайтувчиларга ёйишда ҳам фойдаланилади.

4. Энди бу қисқа ёзилган ва тезда эсда қоладиган контекпти бемалол айтиб бера оладиган даражада ўрганиб олинг. Унинг учун темани 2—3 марта қосибилан солиштириб темани қанчалик ўзлаштирилганингизни билиб олишингиз мумкин.

5. Шу темага доир мисол ва масалалар ечишга киришингиз мумкин.

Қисқача контекст тузиш мундарижасининг формуласи Виет теоремаси. Квадрат учҳадли кўпайтувчиларга ёйиш.

2. $y = ax + b$ функциянинг хоссаси ва унинг графиги. $y = \frac{k}{x}$ функциянинг хоссаси ва унинг графиги. $y = ax^2 + bx + c$ функциянинг хоссаси ва унинг графиги.

3. Тенгсизлик. Сонли тенгсизликларнинг хоссалари. Чизикли ва квадрат тенгсизликлар. Интерваллар методини.

4. n асосга кўра b сонининг логарифми таърифи. Арифметик логарифмнинг хоссалари. Бирор асосга логарифмдан янада асосга ўтиш формуласи. Ушбу логарифмларнинг асосга ўтиш формуласи.

5. Күрсаткичли функциянинг хоссалари ва графиги. Күрсаткичли функциянинг хоссалари ва графиги. Күрсаткичли функциянинг хоссалари ва графиги. Күрсаткичли функциянинг хоссалари ва графиги.

6. Арифметик прогрессия. Геометрик прогрессия. Прогрессия n -хадининг ва n та ҳад йиғиндисининг формуласи. Чекиз камаювчи геометрик прогрессияларнинг янгилиси.

7. Тригонометрик функцияларнинг таърифи. Бир хил асосга ўтиш тригонометрик функциялар орасидаги боғланиш. Тригонометрик функцияларнинг ишоралари. Арифметик прогрессия. Геометрик прогрессия. Прогрессия n -хадининг ва n та ҳад йиғиндисининг формуласи. Чекиз камаювчи геометрик прогрессияларнинг янгилиси.

8. Кўриш теоремаси. Иккиланган ва ярим бурчакларнинг тригонометрик функциялари формуллари. Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғиндисининг янгилиси.

9. $y = \sin x$ функциянинг хоссалари ва графиги. $y = \cos x$ тригонометрик тенгламани ечиш. $y = \cos x$ функциянинг хоссаси ва графиги. $\cos x = a$ тригонометрик тенгламани ечиш.

10. $y = \lg x$ функциянинг хоссалари ва графиги. $y = a$ тенгламани ечиш. $y = \lg x$ функциянинг хоссалари ва графиги. $\lg x = a$ тенгламани ечиш.

11. Учбурчак. Тент ёғли учбурчакнинг хоссалари. Учбурчак ва кўпбурчаклар нукта бурчакларининг йиғиндисини. Учбурчакнинг юзи. Учбурчакларнинг ўзаро тенглиги.

12. Ушташ учбурчаклар. Пифагор теоремаси. Синуслар теоремаси. Косинуслар теоремаси.

13. Тўртбурчаклар. Паралелотрамм ва унинг хоссалари. Паралелотраммнинг аломатлари. Ромб, тўғри тўртбурчак, квадрат. Трапеция. Трапециянинг ўрта чизиги. Паралелотрамм, ромб, тўғри тўртбурчак, квадрат ва трапециянинг юзи.

14. Айлана. Айланга ўтказилган уринманинг хоссалари. Доирага нукта ва ташқи чизилган бурчакларнинг ўлчами. Учбурчакка нукта ва ташқи чизилган айланаларнинг нукталиги.

15. Мунгазам кўпбурчаклар, айлана ва сегмент доиранинг ўзуллиги. Доира ва секторнинг юзи.

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$\dots \dots \dots a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$1. a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2).$$

$$2. a_1 + a_n = a_1 + a_{n-1} + 1$$

$$3. S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$+ S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\therefore b_1, b_2, \dots, b_n \quad b_k = b_{k-1}q \quad (k \geq 2).$$

q — махраж.

$$b_2 = b_1q$$

$$b_3 = b_2q = b_1q^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_n = b_{n-1}q = b_1q^{n-1}, \quad b_n = b_1q^{n-1}.$$

$$1. b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1} \quad (k \geq 2).$$

$$2. b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot b_{n-1+1}$$

$$3. S = b_1 + b_2q + \dots + b_1q^{n-1}$$

$$Sq = b_1q + b_2q^2 + \dots + b_1q^n$$

$$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad (q \neq 1).$$

Чексиз каваровчи $\therefore$ прогрессия

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, |q| < 1.$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q};$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

И Б О В

МАТЕМАТИКАДАН ЁЗАМА ВА ОЖЗАКИ ИМТИҲОН

1 §. ЁЗАМА ИМТИҲОН

Олий ўқув юртиларига кириш қондаларига кўра абитуриентлар математикадан ёзма имтиҳон топирадлар. Ёзма ишни муваффақиятли бажариш учун абитуриент-

лар қувидаларини яхши ўзлаштирган бўлишлари ке-

ра. а) таъриф ва теоремаларни, математик тушунчаларни билан, теоремаларни исботлай олиш;

б) математик фикрларни оғзаки ва ёзма равишда билан ва кеска ифодадай олиш;

в) программада кўзда тутилган математик билим ва қувидаларини чуқур эгаллаш, улардан мисол ва масалалар ечишда фойдалана олиш.

Математикадан ёзма имтиҳонда берилган топшириқлар (сўралилар) мактаб программасидан четга чиқмайди ва унинг турли бўлимларидан олинган турган мисол ва масала геометрия ва тригонометриянинг татбиқига доир бўлган масалалардан иборат бўлади.

Мисоллар ва масалани аниқ, тушунарли қилиб ечиш, ечилиш давомида изчилликка риоя қилиш, ишни оптикча асосларга ҳисоблаш ва тушунтиришларсиз ҳамда амаллар математик символлардан фойдаланиб бажариш керак. Мисоллар катланган ифодаларни соддалаштиришда кеска қўлайириш формулаларидан фойдаланиш керак. Ёзма ишда бажариш сўғибор берилиш лозим. Маълумки, тенглама (тенгламалар системаси) ни ечиш учун шаклини соддалаша борадиган ва $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ каби символлар билан боғланган тенгламалар (тенгламалар системаси) кетма-кетлигидан иборат бўлади. Агар тенгламалар (тенгламалар системаси) кетма-кетлиги факат $\Rightarrow$ симболи билан ёзилган (афбатта, турли фойдаланишлар) бўлса, кейинги тенгламанинг (тенгламалар системасининг) барча ечимлари тўпалам дастлабк тенгламанинг (тенгламалар системасининг) барча ечимлари таъминот беради. $\Leftarrow$ симболи ақалли бирор бир боғланган катланша, олинган ечимларнинг дастлабк тенгламани (тенгламалар системасини) қаноатлантиришини қаноатлантирмаслигини текшириш, яъни бегона ечимларни ажратиш зарур.

Тенгламани ечишда унинг аниқлиниш соҳасини топиш учуриш шарт эмас (аммо аниқлиниш соҳасини топиш кийин бўлмаса, уни топиш мақсадга мувофиқдир).

Геометрик масалаларнинг ечилиши кеска ва тўлиқ қаноатланиш бўлиши зарур. Бунда фойдаланилган теория ва аломатлар эслатилиши керак. Геометрик масалаларни тригонометрияни қўллаб ечишда ишни умумий ҳолда бажариб сўғибора олинган натижага масалани параметрларнинг қийматларини қўйиш тавсия

қилинади. Масалада берилганлардан фойдаланиб чизмадан математик асосланган аниқ чизмалар имтиҳон топширувчининг геометрик билимларини ва фазовий тўшунчаларини баҳолашда муҳим роль ўйнайди.

Стереометрияга доир масалаларни ечишда кўпинча айтириентлар ён қирра билан асос текислиги орасидан бурчакни ён қирра билан асос томони орасидаги бурчак билан алмаштириладилар (бу ерда шу қирра билан унинг асос текислигидаги проекцияси орасидаги бурчак қаралиши лозим) ва иккита ён ёқ орасидаги бурчак билан уларнинг айрим қирралари орасидаги бурчак билан алмаштириладилар (аслида уларда ётувчи умумий нуқтага ёга бўлиб, ҳар иккаласига қарашли бўлган қирра перпендикуляр бўлган кесмалар орасидаги бурчак қаралиши лозим). Бир-бирига ички чизилган жисмларни (пирамидалар ички чизилган шар, конус ичига чизилган цилиндр ва ҳ. к) чизишда аввал ташқи жисмни, сўнг ички жисмни чизиш керак.

1980—1987 йилларда ўтказилган кириш имтиҳонларида математикадан ёзма имтиҳонни баҳолаш мезони қуйидагича бўлган.

Математикадан ёзма ишда 5 та топшириқ берилди, натижа беш балл система бўйича баҳоланган. Ҳар бир топшириқ бажарилишига қараб, 0^о баллдан „5^о баллга“ баҳоланган. Мисол ра масалаларни ечишда йўл қўйилган ҳатога қараб, балллар сони қуйидагича камайтирилди.

1. 1 ёки 2 баллга камайтиришдаги кичик ҳатога қўйилганлар кирди:

1) арифметик ҳатога; 2) қисқа қўпайтириш формулаларини қўлланмаслик; 3) ўхшаш ҳадларни иччилмаслик; 4) ишчи узоқ (норационал) йўл билан бажариш; 5) тригонометрик тенгламаларнинг ечимини умумий шаклда ёза олмаслик; 6) масалага доир чизма чизишда ҳатога йўл қўйиш; 7) жавобни ёзишда ҳатога йўл қўйиш; 8) тенгламанинг бегона ечимларини кўрсатмаслик.

II. 3 баллга камайтиришдаги ҳатога қўйилганлар кирди:

1) тенгламаларни (чизикли ва квадратик) ечинин битмаслик; 2) тенглама ва тенгсизликлар системасини ечинин битмаслик; 3) тенгсизликларни (чизикли ва квадратик) ечинин битмаслик; 4) топшириқларни бажариш учун керакли формулаларни битмаслик; 5) гео-

метрик шакллارни ва функцияларнинг графикларини ёзиш; 6) функцияларнинг дифференциаллари формулаларини битмаслик.

III. 4 баллга камайтиришдаги ҳатога қўйилганлар кирди:

1) тароқчалар, иллилар, кўрсаткичли функциялар, логарифмик функциялар ва тригонометрик функцияларнинг ҳосилаларини битмаслик.

IV. Топшириқ умуман бажарилмаганда умумий баллар 5 тага камайтирилади.

Учун иш учун якуний баҳо қуйидагича чиқарилади:

1) агар умумий баллар сони 25—23 орасида бўлса,

натижа 5 (беш) баҳо;

2) агар умумий баллар сони 22—18 орасида бўлса,

натижа 4 (тўрт) баҳо;

3) агар умумий баллар сони 17—12 орасида бўлса,

натижа 3 (уч) баҳо;

4) агар умумий баллар сони 11—0 орасида бўлса,

натижа 2 (икки) баҳо қўйилади.

1975—1988 ўқув йилларида Тошкент политехника институтига кириш имтиҳонларида берилган ёзма иш шартинидадан намуналар келтирмамиз.

1-вариант

$$1. \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} + \frac{1}{a} \right)$$

Натижа $-1 < a < 0$ бўлган ҳол учун соддалаштиринг.

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2(x+y)^2 - y^2 = 14. \end{cases}$$

3. Ифодани соддалаштиринг:

$$2 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \operatorname{tg} 2x.$$

4. Цилиндр ўқига параллел қилиб ўтказилган текислик унинг асосидан φ катталикдаги ёйни ажратди. Цилиндр ўқининг узунлиги h бўлиб, ундан кесувчи текисликкача бўлган масофа a га тенг. Кесим юзини топинг.

$$5. f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \quad \text{функция}$$

нинг $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик кий-
матларини топиш.

Ечиш. 1. $-1 < a < 0$ эканлигини эътиборга олиб
берилган ифоданинг шаклини алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1+\frac{1}{a}} \right) - \\ &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}} - \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}} \right) \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}} \times \\ & \times \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{|a|} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{-a} = \\ &= \frac{(V1+a+V1-a)(1-V1-a)}{a(V1+a-V1-a)} = \\ &= \frac{(V1+a+V1-a)^2(1-V1-a^2)}{(V1+a+V1-a)^2(1-V1-a^2)} = \\ &= \frac{2(1+V1-a^2)(1-V1-a^2)}{2a^2} = \frac{1-1+a^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1. \end{aligned}$$

Жавоб: 1.

$$2 \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2(x+y)^2 - y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2x^2 + y^2 + 4xy = 14. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламадан биринчисни айирсак:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Иккинчи тенгликни (-6) га кўпайтириб биринчис-
га кўшамиз:

$$\begin{cases} y^2 - 3xy + 2x^2 = 0 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x, \\ y_2 = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x^2 = 2 \\ y = \frac{2}{x} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, y_1 = 2, \\ x_2 = -1, y_2 = -2, \\ x_3 = \sqrt{2}, y_3 = \sqrt{2}, \\ x_4 = -\sqrt{2}, y_4 = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Жавоб: $\{(1; 2); (-1; -2); (\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2};$
 $- \sqrt{2})\}.$

4. Берилган ифода $2 \neq \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$ да аниқланган.

$$1-y \sin y, \quad 2 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x + \sin^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} =$$

$$= \frac{2(\sin 2x + \cos 2x)^2}{\sin 4x} = \frac{2 \left(\sin 2x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right)^2}{\sin 4x} =$$

$$= \frac{4 \sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 4x} = \frac{4 \sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 4x} = \frac{2(1 + \sin 4x)}{\sin 4x}.$$

$$2-y \sin y, \quad 2 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \operatorname{tg} 2x = 2 + \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} + \operatorname{tg} 2x = \frac{(1 + \operatorname{tg} 2x)^2}{\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} 2x \right)^2}{\operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos 2x} \right)^2 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)}{\sin 4x} =$$

$$= \frac{2(1 + \sin 4x)}{\sin 4x}.$$

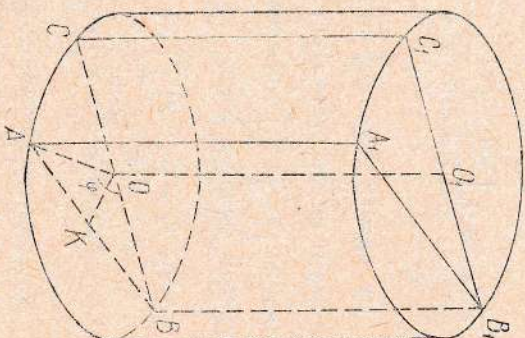
Жавоб: $\frac{2(1 + \sin 4x)}{\sin 4x}.$

4. Берилган: CB_1 —
доғрийий цилиндр (36-
рақам).

$$|OO_1| = h, AA_1 B_1 B \parallel OO_1,$$

$$AB = \varphi, |OK| = a.$$

$|AB| = |AA_1|$ шардан
чиқиб ва $S_{AA_1 B_1 B}$ ни топиш
kerас.



36-рақам.

Еч и ш. Чизмадан $OK \perp AB$ ва $OK \perp OO$, шуни-
учун $OK \perp AA, B, B$, демак, OK кесма OO , дан AA, B, B
текисликкача бўлган масофа бўлади.

$$\widehat{AOK} = \frac{\varphi}{2}, |OK| = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, |AB| = 2a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

$$|AA_1| = h, S_{AA_1B_1B} = |AA_1| \cdot |AB| = 2ah \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

AA_1B_1B — квадрат, шуни-учун: $2a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = h$. До-

мак, $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{2a}$, $S_{AA_1B_1B} = 2ah \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

Жавоб: $S_{AA_1B_1B} = 2ah \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{2a}$.

$$5. f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x - \cos^2 x \sin x + \sin x =$$

$$= \sin^2 x + \sin x - (1 - \sin^2 x) \cdot \sin x = \sin^2 x (1 + \sin x),$$

$$f'(x) = 0, \begin{cases} \sin x = 0, \\ 1 + \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

Бу ердаги $x = -\frac{\pi}{2}$ нуқта берилган $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесма
чегараси билан устма-уст тушганлиги сабабли функ-
циянинг $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмага тегишли факат $x = 0$ критик
нуқтаси мавжуд экан.

$$f(0), f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ кийматларни топамиз:}$$

$$f(0) = -\frac{2}{3}; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Жавоб: } \max f(x) = \frac{\pi}{4}; \min f(x) = -\frac{\pi}{4}, \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{1}{(a^{1/2} + c^{1/2})^{-2}} - \frac{a^{3/2} - c^{3/2}}{V a - V c} \right) \cdot (ac)^{-\frac{1}{2}}, \text{ бунда } a > 0, c > 0.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$1 - \log_9 (x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}x+3} \frac{x+5}{x}.$$

3. Аниқитни исботланг:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

бу ерда α, β, γ — учбурчакнинг ички бурчаклари.

4. Тўғри параллелепипеднинг асос томонлари a ва
 b га тенг. Улар орасидаги бурчак φ ва параллелепи-
пиднинг кичик диагонали c га тенг бўлса, параллеле-
пиднинг ҳажми-ни топинг.

$$5. f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 25} \text{ функциясининг } [-3; 3] \text{ оралиқдаги}$$

мин катта ва энг кичик кийматларини топинг.

Еч и ш. 1. Берилган ифода $a \neq c$, $a > 0$, $c > 0$ да
аниқланган.

$$\left(\frac{1}{(a^{1/2} + c^{1/2})^{-2}} - \frac{a^{3/2} - c^{3/2}}{V a - V c} \right) \cdot (a \cdot c)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left((V a + V c)^2 - \frac{(V a - V c)(a + V a + c)}{V a - V c} \right) \cdot \frac{1}{V a c} =$$

$$= (a + 2V a c + c - a - V a c - c) \cdot \frac{1}{V a c} =$$

$$= V a c \cdot \frac{1}{V a c} = 1.$$

Жавоб. 1.

2. Берилган тенглама куйидаги шартларда ечимга
эриш:

$$\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ \frac{x+5}{x+3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x < -5 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x \neq -1, \\ x > -3, \end{cases}$$

ндин тенгламанинг аниқланиш соҳаси (Т.А.С.):

$$(-\infty; -5) \cup (-3; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Берилган тенглама учун логарифмнинг хоссаларидан фойдаланиб, куйидаги алмаштиришларни бажарамиз:

$$1 - \log_3 (x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{x+5}{x+3} \Rightarrow$$

$$1 - \log_3 |x+1| = \log_3 \frac{x+5}{x+3} \Rightarrow \log_3 \frac{|x+1|(x+5)}{x+3} = 1,$$

$$\begin{cases} \frac{|x+1|(x+5)}{x+3} = 3, & \Rightarrow |x+1|(x+5) = 3(x+3), \\ x \in (T, A, C). \end{cases}$$

Бу ерда куйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $x+1 > 0$; $|x+1| = x+1$;

$$\begin{cases} (x+1)(x+5) = 3(x+3), & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ x \in (T, A, C). \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4, x_2 = 1, \\ x \in (T, A, C). \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

б) $x+1 < 0$; $|x+1| = -(x+1)$,

$$\begin{cases} -(x+1)(x+5) = 3(x+3), & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 14 = 0, \\ x \in (T, A, C). \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -7, x_2 = -2, \\ x \in (T, A, C). \end{cases} \Rightarrow x = -7, x = -2.$$

Жавоб: $\{-7; -2; 1\}$,

3. Масаланинг шартига кўра:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \gamma = \pi - (\alpha + \beta).$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta + 1 - \cos 2\gamma}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2(\pi - (\alpha + \beta))] =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2(\alpha + \beta)] =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2 \cos^2(\alpha + \beta) - 1] =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} [2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos^2(\alpha + \beta)] =$$

$$= 2 - \cos(\alpha + \beta) [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] =$$

$$= 2 + \cos[\pi - (\alpha + \beta)] \cdot 2 \cos \alpha \cos \beta =$$

$$= 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

4. Берилган: AC_1 —
туғри параллелепипед (37-
чиқма).

$$|AB| = a, |AD| = b,$$

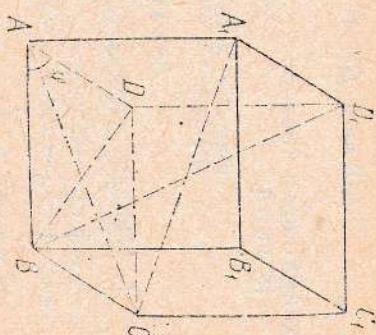
$$BAD = \varphi.$$

Алар $\varphi < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $|BD_1| = c$,

агар $\varphi > \frac{\pi}{2}$ бўлса, $|A_1C_1| = c$.

V_{AC_1} — топилисин.

Ечн ш.



$$\text{а) } \varphi < \frac{\pi}{2}, V_{AC_1} = S_{\text{асос}} \times$$

$$\times |BD_1|, S_{\text{асос}} = ab \cdot \sin \varphi,$$

37-чиқма.

$$|BD_1| = \sqrt{|BD|^2 + |DD_1|^2} = \sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos \varphi};$$

$$V_{AC_1} = a \cdot b \sin \varphi \cdot \sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos \varphi},$$

$$\text{б) } \varphi > \frac{\pi}{2}, V_{AC_1} = S_{\text{асос}} \cdot |AA_1| = |AA_1| \cdot ab \sin \varphi,$$

$$|AA_1| = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{c^2 - a^2 - b^2 - 2ab \cdot \cos \varphi},$$

$$V_{AC_1} = ab \sin \varphi \cdot \sqrt{c^2 - a^2 - b^2 - 2ab \cdot \cos \varphi}.$$

Жавоб: $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ бўлса, $V_{AC_1} = ab \sin \varphi \times$

$$\times \sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos \varphi}, \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \text{ бўлса, } V_{AC_1} =$$

$$= ab \sin \varphi \sqrt{c^2 - a^2 - b^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

5. Функциянинг $[-3; 3]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини шун оралиқда тегишли критик нуқталари ва кесманинг четки нуқталарида қий-
матларини таққослаш йўли билан толамиз.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 25) - 4x^3x^2}{(x^2 + 25)^2} = \frac{2x(25 - x^4)}{(x^2 + 25)^2}$$

Ҳолидаги нолга тенглаб, критик нуқталарни тола-
миз:

$$f'(x) = 0, x(25 - x^4) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{5}.$$

Топишган нуқталарнинг учаласи ҳам $[-3; 3]$ ора-
лиқда ётади. Шунинг учун,

$$f(0) = 0, f(\pm\sqrt{5}) = \frac{1}{10}, f(\pm 3) = \frac{9}{100}$$

кийматларни топамиз.

Жавоб:

$$\max_{x \in [-3; 3]} f(x) = 0, 1; \min_{x \in [-3; 3]} f(x) = 0.$$

3-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left[\frac{(x-1)^{-1}}{x^{-3}} - (1-x)^{-1} \right] \cdot \frac{1+x(x-2)}{x^2-x+1} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Жавоб: $x-1$.

2. Тенгламани ечинг:

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1.$$

Жавоб: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Тенгламани ечинг:

$$\log_3 [2 \log_3 (1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x))] = \frac{1}{2}.$$

Жавоб: 2.

4. Конуснинг ўқ kesimi училари бурчак 2α га, ўқ kesimi юзи esa Q га тенг бўлса, конуснинг ҳажмининг топинг.

Жавоб: $\frac{1}{3} \pi Q \sqrt{Q \operatorname{tg} \alpha}$.

5. $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{4} + 1$ функциянинг $[1; 3]$ kesmadati энг катта ва энг кичик кийматларини топинг.

Жавоб: $\max_{x \in [1; 3]} f(x) = 2, 25; \min_{x \in [1; 3]} f(x) = 2 \frac{1}{12}$.

4-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{\sqrt{a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}}}{2\sqrt{ab}}; \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + 2 \right),$$

бунда $a > 0, b > 0$.

Жавоб: $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$

2. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Жавоб: $\{(-1; 2); (2; -1)\}$.

3. Тенгламани ечинг.

$$\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = 0, 25.$$

Жавоб: $\left\{ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Тўғри бурчакли параллелепипед асосининг томон-лари a ва b га тенг. Параллелепипеднинг диагонали би кйраси билан φ бурчак ташкил эта, унинг ҳажмининг топинг.

Жавоб: $ab\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{ctg} \varphi$.

5. $y = \frac{\ln x}{x}$ функциянинг $[2; 4]$ kesmadagi экстре-мумини топинг.

Жавоб: $\max_{x \in [2; 4]} y(x) = y(e) = \frac{1}{e}$.

5-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left[\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right] : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Жавоб: $\frac{1}{xy}$.

2. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} - \sqrt[4]{(x+1)^2} = \frac{3}{2} \sqrt[4]{x^2 - 1}.$$

Жавоб: $-\frac{17}{15}$.

3. Тенгламани ечинг:

$$3 \sin x + 2 \cos x = 3.$$

Жавоб: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \arcsin \frac{5}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Кйраси a га тенг бўлган тетраэдрнинг ҳажмининг топинг.

Жавоб: $\frac{a^3}{9\sqrt{3}}.$

5. $y = x^3 + \frac{3}{x}$ функциянинг $[0.3; 7]$ кесмадаги экстремумини топинг.

Жавоб: $\min_{x \in [0.3; 7]} y(x) = y(1) = 4$.

6-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{2x - 3x^{-1/3}} - \frac{\frac{2}{x^3}}{x^{5/3} - x^{2/3}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}.$$

Жавоб: 0.

2. Тенгламани ечинг:

$$\log_a x - \log_a x + \log_a x = \frac{3}{4}.$$

Жавоб: a .

3. Тенгламани ечинг:

$$\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \sin x = 4\sin^3 x.$$

Жавоб: $\arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi, n \in \mathbb{Z}$.

4. Ён ёқлари квадратлардан иборат олти бурчакли мунтазам призманинг энг катта диагонали d га тенг бўлса, унинг тўда сиртини* топинг.

Жавоб: $\frac{3d}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{5}} d \right)$.

5. $y = x^3 - 3x + 2$ функциянинг $[-2; 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $\max_{x \in [-2; 2]} y(x) = y(2) = 4$, $\min_{x \in [-2; 2]} y(x) = y(1) = 0$.

7-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4b}{a + 9b + 5\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{3}{\sqrt{a}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}}}, \text{ буида } a > 0, b > 0.$$

Жавоб: $\frac{1}{ab}$.

*К: пўнни ён сирти (тўда сирин) юзи дейиш ўрнига кичиклик учун, кўнни ён сирин деб айтаи.

2. Системани ечинг: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4. \end{cases}$

Жавоб: $\{(1; 3); (3; 1)\}$.

3. Аниқтни исботланг:

$$\lg(45^\circ + \alpha) - \lg(45^\circ - \alpha) = \sin 2\alpha.$$

4. Учбурчакли мунтазам призма ён ёнининг диагонали асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Призма ён сирти S га тенг бўлса, унинг ҳажмини топинг.

Жавоб: $\frac{S\sqrt{3}}{3\sqrt{2}\lg \alpha}$.

5. $y = e^x - x + 6$ функциянинг $[-1; 3]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Жавоб: $\max_{x \in [-1; 3]} y(x) = y(3) = e^3 + 3$, $\min_{x \in [-1; 3]} y(x) = y(0) = 7$.

8-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left[\frac{x}{2x-1} \cdot \frac{x+2}{x(x+2)} - \frac{x+2}{x(x+2)} \right] : \frac{4}{x(x+2)} - \frac{x+4}{3(1-2x)}.$$

Жавоб: $-\frac{1}{3}$.

2. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \frac{1}{2x-y} + y = 5, \\ \frac{y}{2x-y} = 6. \end{cases}$$

Жавоб: $\left\{ \left(\frac{7}{6}; 2 \right); \left(\frac{7}{4}; 3 \right) \right\}$.

3. Аниқтни исботланг:

$$\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(120^\circ - \alpha) = 0.$$

4. Конуснинг баландлиги унинг асоси диаметрига тенг. Конуснинг ён сирти юзининг асоси юзига нисбатини топинг.

Жавоб: $\sqrt{5}$.

5. $y = x^4 - 8x^2 - 9$ функцияни текширинг ва графини ясанг.

9-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}-\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}} + \frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)^2$$

бунда $a > 0, b > 0$.

Жавоб: $\sqrt[4]{ab}$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$$

Жавоб: (1; 2).

3. Тенгламани ечинг:

$$3\cos^2x - \sin^2x - \sin 2x = 0.$$

Жавоб: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n, \arctg 3 + \pi n / n \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. a узунликлари ватар цилиндр асосида π ёйин тортиб туради. Агар цилиндрнинг баландлиги H бўлса, унинг тўла сиртини топинг.

Жавоб: $a\pi\left(H + \frac{a}{2}\right)$.

5. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ функциянинг $[0; 5]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг.

Жавоб: $\max_{x \in [0; 5]} v(x) = y(3) = 1, \min_{x \in [0; 5]} y(x) = y(1) = -3$.

10-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\left(\frac{x}{xy+y^2} - \frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2} + \frac{y}{x^2-xy}\right) : \frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}}.$$

Жавоб: $\frac{x}{y^2}$.

2. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Жавоб: $\{(\pm 3; \pm 4); (\pm 4; \pm 3)\}$.

3. Айниятни исботланг:

$$\frac{\sin \alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

4. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари a ва b га тенг. Параллелепипеднинг диагоналлари асос текислиги билан α бурчак ташкил этса, унинг ён сиртини топинг.

Жавоб: $2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg} \alpha$.

5. $y = \frac{x}{1+x^2}$ функциянинг $[-2; 2]$ кесмадаги энг

кичик ва энг катта қийматларини топинг.

Жавоб: $\max_{x \in [-2; 2]} y(x) = 0,5, \min_{x \in [-2; 2]} y(x) = -0,5$.

11-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\left[\frac{(ab^{-1} + a^{-1}b + 1)(a^{-1} - b^{-1})}{a^2b^{-2} + a^{-2}b^2 - (ab^{-1} + a^{-1}b)} \right]^{-1}, \text{ бунда } a > 0, b > 0.$$

Жавоб: 1.

2. Тенгламани ечинг:

$$\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6.$$

Жавоб: 2.

3. Айниятни исботланг:

$$\frac{2\sin^2\alpha - 1}{1 - 2\cos^2\alpha} - \frac{\cos \alpha - 1}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

4. Конуснинг ўқ кесими учтаги бурчак 2α га тенг. Конуснинг баландлиги ва ясовчаси узунликларининг нисбатидан m га тенг бўлса, унинг тўла сиртини топинг.

Жавоб: $\frac{\pi m^2}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

5. $y = x^2 - 6x + 1$ функциянинг $[-1; 4]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Жавоб: $\max_{x \in [-1; 4]} y(x) = 9, \min_{x \in [-1; 4]} y(x) = -7$.

12-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 \cdot \frac{\frac{a^2}{b^3} - 1}{\frac{a^3}{b^3} - 1} : \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1} \cdot \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1}.$$

$$\text{Жавоб: } \frac{a+b}{a-b}.$$

2. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 126, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

$$\text{Жавоб: } \{(1; -5); (5; -1)\}.$$

3. Айништи исботланг:

$$\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos(\frac{\alpha}{2}-\pi)}{\cos 2\alpha} = 2.$$

4. Тўртбurchакли мунтазам призманинг диагонали d га тенг бўлиб, ён ёқ текислиги билан α бурчак ташкил этади. Призманинг ҳажмини топинг.

$$\text{Жавоб: } d^3 \sin^2 \alpha \cdot \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

5. $y = x^2 - 8 \ln x$ функциянинг $[1; 9]$ кесмадаги экстремумларини топинг.

$$\text{Жавоб: } \min_{x \in [1; 9]} y(x) = 0.$$

13-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left[\frac{4}{3a} + \frac{1}{3a-bd} \cdot \left(2b-a - \frac{2b-a}{a} \right) \right] : \frac{\frac{5}{a^2} - \frac{1}{a}}{\frac{3}{a}}.$$

Жавоб: 1.

2. Тенгламани ечинг:

$$\cos^2(x + 30^\circ) = 1 - \sin^2(x - 30^\circ).$$

$$\text{Жавоб: } \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4.$$

$$\text{Жавоб: } \frac{17}{16}.$$

4. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромбдан иборат бўлиб, унинг диагонал кесимларининг юзлари S_1 ва S_2 га тенг. Параллелепипеднинг ён сиртини топинг.

$$\text{Жавоб: } 2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}.$$

5. $y = x - \sin x$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

$$\text{Жавоб: } \max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = \frac{\pi-2}{2}; \min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = 0.$$

14-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left[\frac{1}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{9} \right) + \frac{2}{(x+3)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \right) \right]^{-1}$$

$$\text{Жавоб: } 9x^2.$$

2. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

$$\text{Жавоб: } \{(1; 3); (3; 1)\}.$$

3. Айништи исботланг:

$$3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1.$$

4. Цилиндр ён сиртининг ёйилмаси тўғри тўртбurchакли бўлиб, унинг диагонали d га тенг ва асоси билан β бурчак ташкил этади. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

$$\text{Жавоб: } \frac{d^3 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{4\pi}.$$

5. $y = x - \ln(1+x)$ функциянинг $[-0.5; 4]$ кесмадаги экстремумларини топинг.

$$\text{Жавоб: } \min_{x \in [-0.5; 4]} y(x) = 0$$

15-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$x \cdot \frac{x}{ax^2 - 2a^2} - \frac{2(x+1)}{x^2 + x - 2ax - 2a}.$$

$$\text{Жавоб: } \frac{1}{a}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$6 \cdot 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \cdot 5^x = 22.$$

$$\text{Жавоб: } 0.$$

3. Айништи исботланг:

$$\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

4. Кокус асос айланасининг узунлиги c га, конус-

нинг ўқ кесими учидagi бурчак 2α га тенг. Конуснинг тўла сиртини топинг.

Жавоб: $\frac{c^2}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)$.

5. $y = x^2 - \frac{1}{2}x^4$ функция ҳосиласининг $x = -2$ даги қийматини топинг.
Жавоб: -12 .

16-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \left(1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c}\right) : \frac{c(1+c)-a}{bc}.$$

Жавоб: $a+c$.

2. Тенгламани ечинг:

$$2 - \cos 2x = 3 \sin x.$$

Жавоб: $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Тенгламани ечинг:

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \frac{7}{\sqrt{x-3}}.$$

Жавоб: 5.

4. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг гипотенузаси c га, катетларидан бири a га тенг. Иккинчи катети орқали ўтган ён ёнининг диагонали ён қирраси билан α бурчак ташкил этса, призманинг ён сиртини топинг.

Жавоб: $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{\sin \alpha} (a+c + \sqrt{c^2-a^2})$.

5. $y = (2x+3)^2$ функциянинг $[-2; 1]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.
Жавоб: $\max y(x) = 25$, $\min y(x) = 0$.
 $x \in [-2; 1]$

17-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(V\bar{a}+1)^2 - \frac{a-V\bar{a}}{x}}{V\bar{a}-V\bar{x}} \cdot \frac{(V\bar{a}+1)^3 - aV\bar{a}+2}{(V\bar{a}+1)^3 - aV\bar{a}+2}$$

Жавоб: 1.

2. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x+1} = 32 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}.$$

Жавоб: 24.

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 5^x = 75, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Жавоб: $(-1, 2)$.

4. Агар тетраэдрнинг қирраси a га тенг бўлса, унинг қийматини топинг.

Жавоб: $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

5. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ функция ҳосиласининг $x = -\frac{3}{4}$ нуқтадаги қийматини топинг.

Жавоб: $-\frac{9}{8}$.

18-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{a^{3/2} - b^{3/2}}{a^{1/2}} : \left(\frac{a^{1/2} + b^{1/2}}{a^{1/2}} - \frac{b^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}} \right), \text{ бунда } a > 0, b > 0.$$

Жавоб: $a-b$.

2. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

Жавоб: $(5, 5)$.

3. Айниқтни исботланг:

$$(\sin \alpha)^{-1} + (\operatorname{tg} \alpha)^{-1} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

4. Конус асос айланасининг узунлиги c га, конуснинг ўқ кесими учидagi бурчак эса 2φ га тенг. Конуснинг ҳажминини топинг.

Жавоб: $\frac{c^3}{24\pi} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

5. $y = e^x - x + 6$ функциянинг $[-1; 3]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

$$\text{Жавоб: } \max_{x \in [-1; 3]} v(x) = e^3 + 3; \quad \min_{x \in [-1; 3]} v(x) = 7.$$

19-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\left[\frac{2a}{2a-3b} - \frac{27b^3+36ab^2}{8a^3-27b^3} - \frac{24ab}{4a^3+6ab+9b^3} \right] \left[2a + \frac{9b^2+12ab}{2a-3b} \right].$$

$$\text{Жавоб: } \frac{(2a+3b)^2}{2a-3b}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$9 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}.$$

$$\text{Жавоб: } -0,5.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}.$$

$$\text{Жавоб: } \{(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n / n \in \mathbb{Z}\}.$$

4. Пирамида асоси тўғри тўртбурчакдан иборат. Иккита ён ёқлари асосга перпендикуляр бўлиб, қолган иккитаси асос текислиги билан α ва β бурчаклар таъининг ҳажмининг топинг.

$$\text{Жавоб: } \frac{1}{3} H^3 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

5. $y = 2x^2 - 8x + 3$ функциянинг $[-1; 3]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

$$\text{Жавоб: } \max_{x \in [-1; 3]} y(x) = 13, \quad \min_{x \in [-1; 3]} y(x) = -5.$$

2-§. Оёзаки имтиҳон

Ёзма имтиҳондан ижобий баҳо олган абитуриентлар оёзаки имтиҳон топирадилад.

Оёзаки имтиҳон саволлари ҳам «СССР Олий ўқув тухонлари кирувчилар учун математикадан кириш имтиҳонлари программаси» асосида тузилади.

Оёзаки имтиҳонда абитуриентнинг программа материалларини қай даражада билиши, назарий маълумотларни масал ва масалалар ечишда ишлата олиши, функция графикларини чиза билиши, тенглама ва тенгсиз-

ликларни еча олиши текширилади. Оёзаки имтиҳон жавобларида математик формула ва теоремаларнинг исботи тула ва тўғри, таъриф ва тушунчалар аниқ, кеска ёзилиши керак. Абитуриентга баҳо қўйишда қўйиладиган эътиборга олинади.

Агар абитуриент оёзаки имтиҳонда билет саволларини аниқ ва тўлиқ жавоб берса ёки программа материалларини яхши ўзлаштирилганлигини кўрсатса ва жиддий бўлмаган кичик хатога йўл қўйса, (ўқитувчилар томонидан берилган қўшимча саволларга ҳам яхши жавоб берса) «аъло» (5) баҳо қўйилади.

Агар абитуриент билет саволларига бераётган жавобини давомида программа материалларини умуман яхши билишни кўрсатган ҳолда, программанинг айрим қисмларини билишни унчалик яхши, чуқур билимсларини кўрсатувчи битта хатога йўл қўйса ёки жиддий бўлмаган учтадан ошмаган хатога йўл қўйса, «яхши» (4) баҳо қўйилади.

Агар абитуриент билет саволларига бераётган жавобини давомида программанинг қийин бўлмаган бўлимларини ва баъзи бўлимларини яхши билишни кўрсатса ҳаммо, айрим бўлимларини билимаслигидан дарак берувчи иккита ёки учта хатога йўл қўйса «қониқарли» (3) баҳо қўйилади.

Программа материалларини билмаган абитуриентга «қониқарсиз» (2) баҳо қўйилади.

Қуйида 1984—85 йилларда ўтказилган оёзаки имтиҳон билетларидан намуналар келтирилиз.

1-билет

1. Квадрат учҳалқини чизикдан қўпайтувчиларга ажратиш.

2. Иккиланган аргумент косинуси учун формула чикдириш.

3. Синуслар теоремаси.

2-билет

1. $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$, $D = 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.

2. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ функция учун келтириш формуллари.

3. Ҳурурчакларнинг ўхшашлик аломатлари (аломатлардан бирини исботлаш шарт).

3-билет

1. $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$, $D > 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.
2. $\cos(\pi \pm \alpha)$ функция учун келтириш формуллари.
3. Айланата ўтказилган уринманинг хоссалари.

4-билет

1. Сонли тенгсизликлар устида амаллар.
2. Ярим бурчак синуси учун формула келтириб чиқариш.
3. Учбурчак юзини ҳисоблаш формуласи.

5-билет

1. $y = ax + b$ ($a < 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.
2. Икки бурчак айирмасининг тангенс формуласини келтириб чиқариш.
3. Учбурчак ўрта чизигининг хоссалари.

6-билет

1. $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$, $D < 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.
2. $\lg\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ функция учун келтириш формуллари.
3. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг мавжудлиги.

7-билет

1. Квадрат тенгламанинг илдизларини топиш формуллари келтириб чиқариш.
2. $y = \sin x$ функциянинг хоссалари ва графиги.
3. Тенг ёнли учбурчакнинг хоссалари.

8-билет

1. Виет теоремаси (тўғри теорема).
2. $\sin x = a$ кўринишдаги тенгламани ечиш.
3. Квадрат купбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси.

102

9-билет

1. $y = ax + b$ ($a > 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.
2. Икки бурчак йиғиндисининг тангенс формуласини келтириб чиқариш.
3. Тўғри чизикларнинг параллеллик аломатлари.

10-билет

1. Икки функция кўпайтмасининг хосласи.
2. Ёнр хил аргументли тригонометрик функциялар ўр-
тосидати (боғланиш) муносабатлари.
3. Уч перпендикуляр ҳақидаги теорема.

11-билет

1. Чола квадрат тенгламаларни ечиш.
2. $y = \lg x$ функциянинг хоссалари ва графиги.
3. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси.

12-билет

1. Келтирилган квадрат тенглама илдизларини ҳисоблаш формуллари келтириб чиқариш.
2. $y = \cos x$ функциянинг хоссалари ва графиги.
3. Кесманинг учларидаи баравар узоқликда ётган нуқта-
ларнинг хоссалари.

13-билет

1. Бўлимининг логарифми.
2. $\lg x = a$ тенгламани ечиш.
3. Тўғри чизик ва текисликнинг параллеллик аломати.

14-билет

1. $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$, $D < 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.
2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ функция учун келтириш формуллари.
3. Пифагор теоремаси.

103

15-б и л е т

1. Ҳосиланинг таърифи. Унинг геометрик маъноси.
2. Тригонометрик функцияларнинг жуплиги, тоқлиги ва даврийлиги.
3. Кесик пирамиданинг ҳажми.

16-б и л е т

1. $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$, $D > 0$) функциянинг хосса-лари ва графиги.
2. $\lg(\pi \pm \alpha)$ функция учун келтириш формуллари.
3. Айланата ички чизилган буручакларни ўлчаш.

17-б и л е т

1. Даражанинг логарифми.
2. $\cos x = a$ тенгламани ечиш.
3. Трапеция юзини ҳисоблаш формуласи.

18-б и л е т

1. $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$, $D = 0$) функциянинг хосса-лари ва графиги.
2. $\sin(\pi \pm \alpha)$ функция учун келтириш формуллари.
3. Учбуручакка ички чизилган айлананинг мавжудлиги.

19-б и л е т

1. Икки функция бўлиминининг хосиласи.
2. Ярим буручак тангенс учун формулани келтириб чи-кариш.
3. Текисликларнинг параллеллик аломати.

20-б и л е т

1. $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ функция учун келтириш формуллари.
3. Трапеция ўрта чизигининг хоссалари.

104

21-б и л е т

1. Қулайтманинг логарифми.
2. Ярим буручак косинуси учун формулани келтириб чиқариш.
3. Берилган текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ, тенгсизлик ва тўғри чизиқнинг перпендикулярлик ало-мати.

22-б и л е т

1. Бист теоремаси (тескари теорема).
2. Иккиланган буручак синусининг формуласи.
3. Пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келти-риб чиқариш

23-б и л е т

1. Сонли тенгсизликларнинг хоссалари.
2. Иккиланган буручак тангенс учун формулани чиқа-риш.
3. Параллелограммнинг юзини ҳисоблаш формуласи.

24-б и л е т

1. $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) функциянинг хоссалари ва графиги.
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ функция учун келтириш формуллари.
3. Параллелограмм ва унинг хоссалари.

25-б и л е т

1. Икки номаъlumли чизикли икки та тенглама систе-масини текшириш (чексиз кўп ечимга эга бўлган ҳол).
2. Пифагор теоремаси.
3. $\lg \alpha + \lg \beta$ йиғинди учун формула келтириб чиқариш.

26-б и л е т

1. Квадрат тенгламанинг илгизлари билан коэффици-ентлари орасидаги муносабат.
2. Берилган айланата унинг ташқарисидда олинган нуқ-тадан ўтказилган кесувчи ва уринманинг хоссаси.
3. $y = \operatorname{ctg} x$ функциянинг даврийлиги.

105

Оғзаки имтиҳонда абитуриентларга берилган қўшимча саволлар назарий бўлиб, улар бу саволларга қай даражада жавоб бериши ва қўшимча саволларни мисол ва масала ечишта татбиқ эта олиши текширилади. Оғзаки имтиҳонларда берилган қўшимча саволлардан намуналар келтирилади.

1. Сонлар устида арифметик амаллар қандай тартибда бажарилади?
Ушбу $4,4 + 16,4 : \frac{3}{4} - \frac{7}{25} \cdot 0,5$ амалларни бажаринг.
2. Қандай сонларга даврий ўғли қаср дейилад?
3. Қандай қисқа кўпайтириш айниқларини биласиз?
Ушбу $(a \pm b)^2$; $(a \pm b)^3$ ифодаларни ёйинг ва $(a^2 - b^2)$; $(a^3 \pm b^3)$ ифодаларни кўпайтувчиларга ажратинг.
4. Пропорция ва унинг асосий хоссаларини айтинг.
 $2,44 : x = 4,2 : \frac{1}{3}$ пропорциядан x ни топинг.

5. Берилган сон бир нечта сонга қандай қилиб тўғри пропорционал нисбатда бўлилади? 36 ни 2, 3, 4 ларга тўғри пропорционал нисбатда бўлинг.

6. Берилган соннинг исатланган проценти қандай топилди?
 $\frac{445}{3}$ нинг 12% ни топинг. Агар бирор соннинг 15% ни 45 га тенг бўлса, шу сонни топинг.

7. Қандай сонларга иррационал сонлар дейилад?

8. Кўпхад кўпайтувчиларга қандай ажратилди?
 $18a^2b^3 - 12a^4b - 24a^3bc$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

9. Қаср сонлар қандай таққосланади?

10. Кўрсаткичлари ҳар хил бўлган илдиэлар қандай таққосланади. $\sqrt[3]{5}$ ва $\sqrt[5]{9}$ лардан қайси бири катта эканлигини аниқланг.

11. Кўрсаткичлари ҳад хил бўлган илдиэлар устида амаллар қандай бажарилади? Амалларни бажаринг:

$$5\sqrt[3]{3} : 3\sqrt[3]{5}; 7\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}.$$

12. Қасрларнинг маҳражини иррационалликдан қутқаринг:

а) $\frac{a}{\sqrt{a+1}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{a+1}\sqrt{3}}$; г) $\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}$;
д) $\frac{c}{\sqrt[5]{5}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[5]{7}}$.

13. Ушбу икки ҳадли тенгламаларни ечинг:
 $x^3 \pm a^3 = 0$; $x^4 - a^4 = 0$.

14. Квадрат тенглама илдиэларининг хоссасини айта беринг.

Агар $x^2 + px + 4 = 0$ тенгламада $x_1 + 3x_2 = 13$ бўлган p ни топинг.

Агар $x^2 - 7x + q = 0$ тенгламада $2x_1 + 5x_2 = 11$ бўлган q ни топинг.

15. $f(x) = 0$ ва $f(x) = g(x)$ кўринишдаги тенгламалар график усулда қандай ечилади?

а) $2 + x = 2x$; б) $\log_2 x = x - 1$ тенгламаларни график усулда ечинг.

16. $a^{10^k} = x$ тенгликни исботланг.
а) $\log_a(x^2 - 3a^2) = 2$; б) $5^{\log_5 x + 1} = 15$ тенгламаларни ечинг.

17. Функциянинг графиги деб нимага айтилади?

18. $y = f(x)$ функциянинг графиги берилган бўлса, $y = |f(x)|$ функциянинг графиги қандай ҳосил қилинади? $y = x$ ва $y = x + 1$ функцияларнинг графигидан фойдаланиб, $y = |x|$ ва $y = |x + 1|$ функцияларнинг графигини чизинг.

19. Арифметик прогрессиянинг хоссалари.

20. Геометрик прогрессиянинг хоссалари.

21. Берилган бурчакни тенг иккига бўлинг.

22. Берилган нүқтадан тўғри чизикка перпендикуляр тушинг.

23. Берилган нүқтадан тўғри чизикка параллел тўғри чизик ўтказинг.

24. Трапециянинг юзи учун формула чиқаринг.

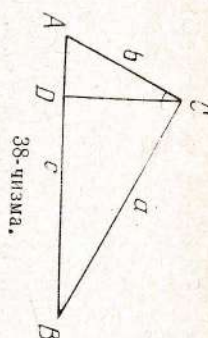
25. R радиусли айланата ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг томонини топинг.

26. Берилган кўпбурчакка ўхшаш кўпбурчак ясанг.

27. Берилган мунтазам кўпбурчакнинг марказини топинг.

28. Учбурчакнинг юзини: а) икки томони ва улар орасидати бурчак; б) бир томони ва учала бурчак; в) ташқи чизилган айлананинг радиуси; г) ички чизилган айлананинг радиуси орқали топиш формулаларини келтириб чиқаринг.

29. Келтириш формулаларини:
а) $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; б) $\pi \pm \alpha$; в) $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; г) $2\pi \pm \alpha$ бурчаклар учун исбот қилинг.



38-чизма.

кўринишни олади. Агар (b) системада $c_1 = c_2 = 0$ бўлса, сонларнинг исталган (b_0, y_0) жуфти унинг ечими бўлади. Агар c_1 ва c_2 сонлардан камидан биттаси ноладан фарқли бўлса, (3) сис-тема биргалликда бўлмидан учбурчакнинг томонлари бир хил уялов билан ўлчанган бўлса, гипотенузанинг квадрати катетлар квадратларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Исботи. Берилган $\triangle ABC$ да $\angle C = 90^\circ$,

$$AB = c, AC = b, BC = a.$$

$c^2 = a^2 + b^2$ эканини исбот қилиш керак (38-чизма). $CD \perp AB$ ўтказамиз. Туғри бурчак учидан гипотенузага туширилган баландлиқнинг хоссаси ҳақиқатини теоремага асосан:

$$AC^2 = AD \cdot AB, BC^2 = BD \cdot AB.$$

Бу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшамиз: $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB)$.

Агар $AB = AD + DB$ эканини ҳисобга олсак, $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ёки $c^2 = a^2 + b^2$ келиб чиқади.

Теорема исбот бўлди.

3. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$ йиғинди учун формула келтириб чиқаринг.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \end{aligned}$$

Чунонки

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta).$$

Демак

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

26-билет

1. Квадрат тенгламанинг илдизлари билан коэффициентлари орасидаги муносабат.

Теорема (Виет теоремаси). Келтирилган тенгламатенгламанинг йиғиндиситескари билан олдинган иккинчи ҳад (x олдидаги) коэффициентига, уларнинг кўпайтмаси эса озод ҳадга тенг.

$$x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q.$$

Исботи. $x^2 + px + q = 0$ тенгламанинг илдизлари:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Булларни ҳадма-ҳад қўшсак

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\ &= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p \end{aligned}$$

ни кўпайтирсак:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\ &= -\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q \end{aligned}$$

будан.

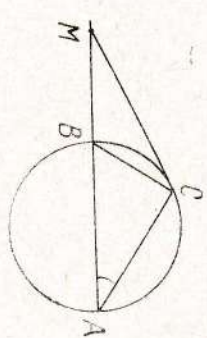
Демак, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорема исбот бўлди.

2. Берилган айланага унинг ташқарисидан олдинган нуқтадан ўтказилган кесувчининг уринманинг хоссаси.

Теорема. Айлана ташқарисида олдинган бирор нуқтадан айланага кесувчи ва уринма ўтказилган бўлса, кесувчининг билан унинг айланадан ташқаридати бўлганнинг кўпайтмаси уринманинг квадратига тенг бўлади.

Исботи. $MA \cdot MB = MC^2$ эканини исбот қилиш керак. Буниг учун C нуқтадан A ва B нуқталар билан унинг уринманинг хоссаси.

$\triangle MAC \sim \triangle MBC$ бўлади, чунки $\angle M$ умумий ва $\angle ACB = \angle CAB$ (BC ёйнинг ярми билан ўлчанган учун) (39-чизма).



39-чизма.

Ўхшаш томонларнинг пропорционалликдан
 $\frac{MC}{MB}$ экани келиб чиқади. Бу ердан $MA \cdot MB = MC^2$

Теорема исботланди.

3. Котангенснинг даврийлиги. Таъриф. Агар нолга тенг бўлмаган шундай сон топилш мумкин бўлиб, бу сонни аргументга қўшганда функциянинг қиймати ўзгармаса, яъни $f(x) = f(x + l)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ даврий функция дейилиб, l сонни унинг даври дейилади.

Берилган функция учун бундай l сондан бир нечта бўлиши ҳам мумкин. Таврифта кўра буларнинг ҳаммаси берилган функция даври бўлади. Лекин бу даврлар ичидан энг кичик мусбат давр аҳамиятга эгадир. Функциянинг даври дейилганда мана шу энг кичик мусбат давр тушунилади.

$\text{ctg } x$ даврий функция бўлиб, унинг даври π га тенг. Ҳақиқатан ҳам, даврий функциянинг таърифига асосан ёза оламиз:

$$\text{ctg}(x + l) = \text{ctg } x.$$

Бу ердан:

$$\text{ctg}(x + l) - \text{ctg } x = 0$$

ёки

$$\frac{\sin l}{\sin x \cdot \sin(x + l)} = 0.$$

Охири тенгликдан $\sin l = 0$ ёки $l = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) ни ҳосил қиламиз. Демак, $l = \pi$. Шундан келиб, $\text{ctg } x$ даври π бўлган даврий функция экан.

3-§. ЭҶМ ёрдамида ёзма имтиҳон

Ҳозирги даврнинг ўзига хос хусусиятларидан бири инсон фаолиятининг турли соҳаларида ЭҶМларнинг кенг қўлланилишидир. Бугунги кунда ЭҶМ фан-техника тараққиётининг ҳал қилувчи омилларидан бирidir. ЭҶМ дар инсоннинг ақлий фаолиятида интелектуал имкониятларини кенгайтириди. Агар обрзази кўлиб айтадиган бўлсак, ЭҶМ диагностика қўйди, у шахмат ўйнайди, шеър тўқийди...

Кейинги пайтда бир катор олий ўқув юртиларида кўриш имтиҳонлари ЭҶМ ёрдамида ўтказиланти. Жумладан, Тошкент политехника институтида 1985 ўқув

йилида математикадан ёзма имтиҳонлар ЭҶМ ёрдамида ўтказилди.

ЭҶМ ёрдамида олинган ёзма имтиҳон олдати ёзма имтиҳондан масалалар вариантларининг тузиллиши ва абитуриентларнинг жавобларини ЭҶМда текшириш билан фарқ қилади. Абитуриентларга бериладиган вариантлардаги мисол ва масалалар сон 8 та бўлиб, улар олдати вариантларга нисбатан осонроқ тузилган бўлади.

Мақсад математика курси программаси шартли равишда 8 та бўлимга бўлинган:

1. Алгебраик ифодаларни айний алмаштириш (соддаштириш).
2. Прогрессиялар.
3. Рационал тенгламалар ва тенгсизликлар.
4. Логарифмик ва кўрсаткичли тенглама ва тенгсизликлар.
5. Тригонометрик ифодаларни шакл алмаштириш.
6. Тригонометрик тенгламалар.
7. Физодаги геометрия (стереометрия).
8. Математик анализ элементлари (ҳосила, функцияни текшириш).

Ҳар бир абитуриентга бериладиган имтиҳон топшириклардаги 8 та мисол ёки масала юқоридаги саккиз бўлимнинг ҳар қайсисидан биттадан олинлиши мумкин. Ёзма имтиҳон вариантларидаги мисол ва масалалар жавоблари даврий бўлмаган фақат битта сондан иборат бўладиган қилиб танланган. Жавобнинг ўлчов бирликлари (град, см ва ҳоказо) ёзмамайди.

Жавоб тўртбурчак ичига олиб қўйилади ва у талон-дон топширикнинг тегинли номери каторига ёзиб қўйилади. Ечылмаган мисолнинг тартиб номери тўғридан чиққича (—) қўйилади.

Талонга тўғри жавобни ёзиб қўйиш имтиҳон муваффақиятли топширилди, деган сўз эмас. Мисол ёки масала ечилди, деб ҳисоблаш учун:

- а) ўқитувчига топширилган ёзма ишда мисол ёки мисолнинг тўла ечилиши бўлиши;
- б) ёзма ишда мисол ва масаланинг жавоблари ёзилган бўлиши;
- в) ёзма ишдаги ёзилган жавоб ЭҶМ талонидаги жавобга мос келиши;
- г) ЭҶМ учун ёзилган жавоб. ЭҶМ га киритилган тўғри жавоб билан мос келиши керак.

Ёзма ишмихон вариантлари 3, 4, 5 бадли мисоллардан иккитадан, 6, 7 бадли мисоллардан эса биттадан олиб тузилган. Ҳар бир топшириқ тузилган m_i бадлар билан баҳоланади. Ёзма ишнинг умумий бади олтиндан бадлар йиғиндиси билан белгиланади:

$$\sum_{i=1}^8 m_i = 37, \quad 3 < m_i \leq 7.$$

Ёзма имтиҳонда абитуриентларга берилган вариантлар ЭҲМ га мослаб тузилгани (ёзилгани) учун улар одатдаги шаклдан бир оз фарқ қилади:

ЭҲМ учун тузилган топшириқнинг ёзилгани	Одатдаги берилган топшириқнинг ёзилгани
1. Қуйидаги тенгламанинг $30 < x < 90$ оралиқдаги ечимини топинг:	СТГ $(3\pi/2 + 3) - TG^2(x) = (\cos(2x) - 1)/\cos^2(x)$.
	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + 3\right) - \lg^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$.
2. Тенгламани ечинг:	
$(LG(8) - LG(x - 5)) / (LG((x + 7)^2 - LG(2)) = -1$.	$\frac{\lg 8 - \lg(x - 5)}{\lg \sqrt{x + 7} - \lg 2} = -1$.

ЭҲМ учун тузилган вариантлардан намуналар келтирирамиз.

1-вариант*

1. Ифодани соддалаштиринг ва унинг $x = 9$, $y = 4$ даги қийматини топинг:

$$\frac{9(x-y)}{(\sqrt{x-y} - \sqrt{y})^2} \cdot \left(1 + \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}\right).$$

2. Чексиз камавачи геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади 10; бешинчи ҳади иккинчи ҳадидан 8 марра та кичик. Шу прогрессия ҳадларининг йиғиндиси топинг.

* Ушбу вариантлар 1986—1987 йилда Тошкент Поштехника институтини абитуриентларига берилган вариантлардир.

3. Қуйидаги тенгламанинг бутун ечимини топинг:

$$(2x + 1)(3x^2 - 11x - 4) = 0.$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\lg(x - 3) + \lg(x + 6) = 1.$$

5. $10\sqrt{2}(\sin 75^\circ - \sin 165^\circ)$ ни ҳисобланг.

6. $\sin x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2$ тенгламанинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кес-

мида тегишли ечимини топинг.

7. Тўртбurchакли мунтазам призма асосининг томонини $\sqrt{2}$ га тенг. Призманинг диагонали асос текислиги билан 45° ли бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажминини топинг.

8. $y = \sin \frac{x}{x+1}$ функция ҳосиласининг $x = 0$ нуқтадаги қийматини топинг.

$$\begin{aligned} \text{Ечинш. 1. } & \frac{9(x-y)}{(\sqrt{x-y} - \sqrt{y})^2} \cdot \left(1 + \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \\ & \frac{9(x-y)}{(\sqrt{x-y} - \sqrt{y})^2} \cdot \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x} = \frac{9(x-y)}{(\sqrt{x-y} - \sqrt{y})^2} \times \\ & \frac{(\sqrt{x-y} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x-y} - \sqrt{y})^2} = \frac{9(x-y)}{9(9-4)} = 5. \end{aligned}$$

Жавоб: $[5]$.

2. Берилган: $b_1 = 10$, $b_2 = 8b_5$.
 $S = ?$

Ечинш. $b_2 = b_1q$, $b_5 = b_1q^4$,

$$b_1q = 8b_1q^4, \quad 1 = 8q^3 \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = 20.$$

Жавоб: $[20]$.

3. $(2x + 1)(3x^2 - 11x - 4) = 0$.

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ 3x^2 - 11x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6}.$$

$$x_2 = 4, x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Жавоб: $\boxed{4}$.

$$4. \lg(x-3) + \lg(x+6) = 1.$$

$$\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+6 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x > -6, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lg(x-3)(x+6) = 1. \quad (x-3)(x+6) = 10.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3, \\ (x-4)(x+7) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x_1 = 4, \\ x_2 = -7. \end{cases}$$

Жавоб: $\boxed{4}$.

$$5. 10\sqrt{2}(\sin 75^\circ - \sin 165^\circ) =$$

$$10\sqrt{2}(\sin 75^\circ - \sin(180^\circ - 15^\circ)) = 10\sqrt{2}(\sin 75^\circ - \sin 15^\circ) = 10\sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} =$$

$$= 10\sqrt{2} \cdot 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Жавоб: $\boxed{10}$.

$$6. \sin x = \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad 0 \leq x \leq 90^\circ$$

бўлгани учун $x = 30^\circ$.

Жавоб: $\boxed{30}$.

7. Берилган: AC_1 — мунтазам призма

$$|AB| = \sqrt{2}, \quad \widehat{BVD_1} = 45^\circ.$$

Топиш керак: $V = ?$

Ечиш: $V = S_{\text{асос}} \cdot |BD_1|$.

Призманинг асоси квад-
ратдан иборат, шунинг учун
(10-чизма)

$$S_{\text{асос}} = |AB|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

$\triangle D_1DB$ — тўғри буруқли,

шунинг учун: $\widehat{D_1BD} =$

$= \widehat{DDB} = 45^\circ, \quad \triangle D_1DB$ —

тег ёнли,

$$|BD| = |AB| \cdot \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

$$|DD_1| = |BD| = 2.$$

$$\text{Демак, } V = 2 \cdot 2 = 4.$$

Жавоб: $\boxed{4}$.

40-чизма.

$$8. f(x) = \sin \frac{x}{x+1},$$

$$f'(x) = \cos \frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \cos \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} \cos \frac{x}{x+1}; \quad f'(0) = 1.$$

Жавоб: $\boxed{1}$.

1-вариантнинг жавоблари учун берилган талонни
тўлдирамыз:

Мисолларнинг №	1	2	3	4	5	6	7	8
Жавоблар	5	20	4	4	10	30	4	1

2-вариант

$$1. \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{x^{3/2} + x + x^{1/2}} : \frac{x-1}{x^2 - x^{1/2}} \text{ ифодани соддалаштиринг.}$$

2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ик-
кинчи ҳади бешинчи ҳадидан 8 марта катта. Агар бу
геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси 6 га тенг
бўлса, унинг биринчи ҳадини топинг.

3. $(2x-9)(3x-16)(x^2+4) < 0$ тенгсизлигининг шартлар сонлар тўпламига қарашли ечимини топинг.

4. $2 \log_2 x = \log_2 (x-4) + 4$ тенгламани ечинг.

5. $\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$ ни ҳисобланг.

6. $\lg^3 x - \lg^2 x - \lg x + 1 = 0$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ ни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

7. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси l

га тенг бўлиб, асосининг томонига тенг. Агар $l = \sqrt[4]{3}$ бўлса, пирамида тўла сиртини топинг.

8. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ функциянинг $[-2; 1]$ кесмалари энг катта қийматини топинг.

Ечинг.

$$1. \frac{x^2+1}{x^3+1} : \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2+1} \times \frac{1}{x^2(x^{3/2}-1)} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = 1.$$

Жавоб: $[1]$.

2. Берилган: b_n — чексиз камадовчи геометрик прогрессия,

$$b_2 = 8 \cdot b_3, S = 6.$$

Топиш керак: $b_1 = ?$
Ечинг.

$$S = \frac{b_1}{1-q} \Leftrightarrow b_1 = S(1-q).$$

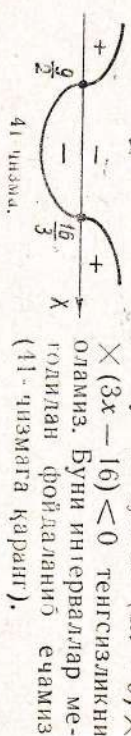
$$b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2 \text{ бўлгани учун}$$

$$b_1 q = 8b_1 q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}.$$

$$y \text{ ҳолда } b_1 = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Жавоб: $[3]$.

3. Ҳар қандай x учун: $x^2 + 4 > 0$. Шунинг учун берилган тенгсизликка тенг қучди бўлган $(2x-9) \times$



41-чизма.

$\times (3x-16) < 0$ тенгсизлиكنи оламиз. Буни интерваллар методидан фойдаланиб ечамиз (41-чизматга қаранг).

Чизмалар: $\frac{9}{2} < x < \frac{16}{3}$. Бу интервалда фақат битта $x = 5$ натурал сон бор.

Жавоб: $[5]$.

$$4. 2 \log_2 x = \log_2 (x-4) + 4 \Rightarrow \log_2 x^2 = \log_2 (x-4) + \log_2 16 \Rightarrow \log_2 x^2 = \log_2 16(x-4) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 4, \\ x^2 = 16(x-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4, \\ (x-8)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 8.$$

Жавоб: $[8]$.

5. Иккиланган бурчакларнинг тригонометрик функцияси формуласидан фойдаланиб толамиз:

$$A = \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{2 \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{4}.$$

Жавоб: $[0.25]$.

$$6. \lg^3 x - \lg^2 x + 1 - \lg x = 0 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow \lg^2 x + 1 = 0 \Rightarrow (\lg x - 1)^2 (\lg x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lg x = 1 \text{ ёки } \lg x = -1.$$

Булдан $x = 45^\circ + 180^\circ n$ ёки $x = -45^\circ + 180^\circ n$, бу ерда $n \in \mathbb{Z}$. Топишган қийматлар натижада берилган интервалга фақат $x = 45^\circ$ тегишли бўлади.

Жавоб: $[45]$.

7. Берилган: $ABCD$ — мунтазам пирамида (42-чизма),

$$|AD| = |AB| = l = \sqrt[4]{3}.$$

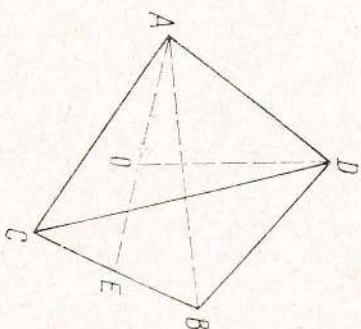
$S_{\pi, c}$ — тўла сиртининг юзини топиш керак.

Ечинг. Берилган пирамиданинг ҳамма ён ёқлари ўзаро тенг учбурчаклардан иборат бўлгани сабабидан (42-чизма):

$$S_{\pi, c} = 4 \cdot S_{\text{вос}} = 4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} =$$

$$= l^2 \sqrt{3} = (\sqrt[4]{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 3.$$

42-чизма.



Жавоб: $\boxed{3}$.

8. Дастлаб функциянинг кесма чегараларидаги қий-
матларини ҳисоблаймиз:

$$y(-2) = 3 \cdot (-2)^4 + 4(-2)^3 + 1 = 17,$$

$$y(1) = 3 + 4 + 1 = 8.$$

$y'(x) = 0$ деб функциянинг критик нуқталарини то-
памиз:

$$y'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1).$$

$y'(x) = 0$ дан $x = 0$ ёки $x = -1$ критик нуқталарни
оламиз. Функциянинг критик нуқталардаги қийматла-
рини топамиз:

$$y(0) = 1,$$

$$y(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 + 1 = 0.$$

Функциянинг топилган ҳамма қийматларини солиш-
тириб, унинг энг катта қиймати шах $y(x) = y(-2) =$
 $= 17$ ни топамиз.

Жавоб: $\boxed{17}$.

2. Вариантнинг жавоблари учун берилган талонни
тўлдирамиз:

Мисоллар №	1	2	3	4	5	6	7	8
Жавоблар	1	3	5	8	0,25	45	3	17

3-вариант

1. Арифметик прогрессиянинг учинчи ҳади билан
бешинчи ҳадининг йиғиндиси 12 га тенг. Дастлабки
бешта ҳадининг йиғиндиси 25 га тенг бўлса, прогрес-
сиянинг биринчи ҳадини топинг.

Жавоб: $\boxed{3}$.

$$2. \sqrt{a^2 + 4a + 4} - \sqrt{a^2 - a + \frac{1}{4}} \text{ ифодани содда-}$$

лаштиринг ва натижани $a = -\frac{1}{4}$ да ҳисобланг.

Жавоб: $\boxed{-1}$.

$$3. 3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 5 = 0 \text{ тенгламани ечинг.}$$

Жавоб: $\boxed{0}$.

4. $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ векторлар ўзаро 60° ли бурчак ташкил
этади. Агар $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 3$ бўлса, $|\vec{2p} - \vec{q}| \sqrt{7}$ ни ҳи-
собланг.

Жавоб: $\boxed{7}$.

5. Ушбу $\sin 3x = 2 \sin x$ тенгламанинг $180^\circ < x < 270^\circ$
шартни қаноатлантирувчи ечимларини топинг.

Жавоб: $\boxed{210}$.

6. x нинг $\sqrt{2x^2 - 4x + 2} \leq x - 1$ тенгсизликни қа-
ноатлантирувчи энг катта бутун қийматини топинг.

Жавоб: $\boxed{2}$.

$$7. 2^{\frac{1}{2}x+1} - 3^{\frac{1}{2}x} = 3^{\frac{1}{2}x+1} - 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}x} \text{ тенгламани ечинг.}$$

Жавоб: $\boxed{10}$.

8. Асоси $10 \sqrt{3}$ га ва учигадаги бурчаги 120° га тенг
бўлган тенг ёнли учбурчакни ён томонларининг бири
атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳаж-
мини топинг.

Жавоб: $\boxed{785}$.

4 вариант

1. Геометрик прогрессиянинг маҳражи $0,5$ га, даст-
лабки 6 та ҳадининг йиғиндиси $63/4$ га тенг. Прогрес-
сиянинг бешинчи ҳадини топинг.

Жавоб: $\boxed{0,5}$.

$$2. \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 4} \leq 0 \text{ тенгсизликни қаноатлантирувчи}$$

нечта натурал сон мавжуд?

Жавоб: $\boxed{7}$.

3. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4} = 1.$$

Жавоб: $\boxed{12}$.

$$4. \log_{\sqrt{x}} 2 + \log_x \sqrt{x} = \frac{5}{2} \text{ тенгламанинг энг кичик}$$

илдизини топинг.

Жавоб: $\boxed{2}$.

тенг. Шу цилиндрнинг тўла сиртига тенглош доиранинг радиусини топинг.

Жавоб: $\boxed{6}$.

8. $y = (2 - x)(x - 4)$ функциянинг $[-1; 3]$ кесмадаги энг катга қийматини топинг.

Жавоб: $\boxed{1}$.

7-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$2\sqrt{40}\sqrt{12} + 3\sqrt{5}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - 4\sqrt{15}\sqrt{27}.$$

Жавоб: $\boxed{0}$.

2. Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади 5 га, дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси 65 га, махруж эса 3 га тенг бўлса, унинг ҳадлари сонини топинг.

Жавоб: $\boxed{3}$.

3. $(x^4 + 7)(x^3 + 8 + x^2 - 4) = 0$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $\boxed{-2}$.

4. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $\boxed{1}$.

5. $\cos 2x + \sin 2x \operatorname{tg} x$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: $\boxed{1}$.

6. $2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 5$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ интервалдаги ечимини градусда топинг.

Жавоб: $\boxed{75}$.

7. Конус асосининг радиуси $\sqrt{15}$ га, ён сирти ёни имасининг учдаги бурчаги $\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлса, конус ҳажмининг π га нисбатини топинг.

Жавоб: $\boxed{75}$.

8. $y = x^3 - 2x^2$ функциясининг $[0; 3]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $\boxed{-4}$.

8-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}\right) \cdot \frac{a + b}{a \cdot b}.$$

Жавоб: $\boxed{1}$.

2. Арифметик прогрессияда $a_6 = 7$ ва $a_7 = 9$ бўлса, унинг биринчи ҳадини топинг.

Жавоб: $\boxed{-3}$.

3. $\frac{x^2 - 15x + 54}{(x - 7)^2} < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сонни топинг.

Жавоб: $\boxed{8}$.

4. $9^x - 12 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$ тенгламанинг ноқадриятли ҳадини топинг.

Жавоб: $\boxed{1}$.

5. $\frac{\sin(30^\circ - 2x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: $\boxed{0}$.

6. $\operatorname{ctg}(270^\circ + x) - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ интервалдаги ечимини топинг.

Жавоб: $\boxed{45}$.

7. Мунтазам тўртбурчакли призма диагоналлари ён ёни билан 30° ли бурчак ташкил қилади. Призма асоси томонининг узунлиги $\sqrt{2}$ га тенг бўлса, призманинг ҳажми топинг.

Жавоб: $\boxed{4}$.

8. $y = 2 - 3x + x^3$ функциясининг $[-2; 2]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $\boxed{0}$.

9-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} - \frac{1}{x^2 - y^2}\right) \cdot \frac{x}{(x + y)(x^2 - y^2)}.$$

Жавоб: $\boxed{2}$.

2. 3 сон билан номарълум сон орасига шундай сон қўйилганки, бу 3 та сон арифметик прогрессия ташкил

қилади. Агар иккинчи сон 6 тага камайтирилса, геометрик прогрессия ҳосил бўлади. Арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳадини топинг.

Жавоб: 15.

3. $(x^2 + x - 12)(x - 5) < 0$ тенгсизлиكنи қаноатлан-тирувчи энг катта сонни топинг.

Жавоб: 4.

4. $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$ тенгламани ечинг.

Жавоб: 1.

5. $\frac{1 + \lg^2 x}{\lg^2 x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\lg^2 x}$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: 1.

6. $3 + 4 \cos 2x = 2 \cos x$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: 60.

7. Ўқ кесимининг юзи 8, асосдаги айлана узунлиги 6 бўлган конуснинг ҳажминини топинг.

Жавоб: 8.

8. $y = 1 - x^2 - \frac{x^3}{3}$ функциянинг $[-3; 0]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: 1.

10-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{3}{2(x^3 + x^2 + x + 1)} + \frac{2x - 5}{2(x^3 - x^2 + x - 1)} \right) : \left(\frac{5}{x^2 + 1} + \frac{3}{2(x + 1)} - \frac{3}{2(x - 1)} \right)$$

Жавоб: 0,5.

2. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади -11 та тенг ва еттинчи ҳади бешинчи ҳадидан 6 та ортқ бўлса, унинг 10 та ҳади йигиндисини топинг.

Жавоб: 25.

3. $\frac{x^4 - 20x^2 + 64}{(x + 3)^4} < 0$ тенгсизлиكنи қаноатлантирувчи

бутун мусбат сонни топинг.

Жавоб: 3.

4. $\log_2(x^2 - 4x + 5) = 1$ тенгламанинг бирдн фарк-ли иллизини топинг.

Жавоб: 3.

5. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: 2.

6. $3 \sin^2 x = \cos^2 x$ тенгламанинг $20^\circ < x < 60^\circ$ интер-валга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: 30.

8. Конус ҳажмининг π га нисбати 9 та тенг бўлиб, унинг ясовачиси асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил қилади. Конуснинг баландлигини топинг.

Жавоб: 3.

8. $y = x^2 + 2x - 3$ функциянинг $[-1; 1]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: -1.

11-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{4}{6 + \sqrt{5}} : \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} + 2\sqrt{5}.$$

Жавоб: 6.

2. Арифметик прогрессиянинг олтинчи ҳади учинчи ҳадидан 12 та кам, уларнинг йигиндисн эса -8 га тенг. Прогрессиянинг саккизинчи ҳадини топинг.

Жавоб: -18.

3. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ тенгламанинг мусбат илли-зини топинг.

Жавоб: 1.

4. $\lg(3x - 11) + \lg(x - 27) = 3$ тенгламани ечинг.

Жавоб: 37.

5. $\frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x}$ ифодани соддалаштиринг ва $\lg \frac{x}{2} =$

-2 да унинг қийматини ҳисобланг.

Жавоб: 4.

6. $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ тенгламанинг $10^\circ < x < 60^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: 30.

7. Учбурчакли мунтазам призманинг ён қирраси асосининг баландлигига тенг. Асосининг баландлиги ва ён қирраси орқали ўтувчи кесимининг юзи 27 га тенг бўлса, асос томонини топинг.

Жавоб: $[6]$.

8. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ функциянинг $[1; 2]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: $[2,5]$.

12-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x^2-x-2} \cdot \left(1 + \frac{2x+x^2}{2+x}\right).$$

Жавоб: $[1]$.

2. Арифметик прогрессиянинг олтинчи ҳади иккинчи ҳадидан 20 та ортқ, биринчи ҳади эса -7 га тенг. Прогрессиянинг еттига ҳадининг йиғиндисини топинг.

Жавоб: $[56]$.

3. $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) = 0$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $[1]$.

4. $\log_3(2x - 3) + \log_3(x - 1) = 4 - \log_3 16$ тенгламанинг бутун мусбат ечимини топинг.

Жавоб: $[2]$.

5. $\frac{\sin 2x + 2 \sin x \cos 4x}{\cos x + \cos 4x}$ ифодани соддалаштиринг ва

унинг қийматини $\sin x = \frac{1}{2}$ учун ҳисобланг.

Жавоб: $[1]$.

6. $4 \cos^2 x = 3$ тенгламанинг $0 < x < 90^\circ$ интервалга тегишли ечимини градусда топинг.

Жавоб: $[30]$.

7. Конуснинг ясовачиси асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Агар асоснинг радиуси $\sqrt{3}$ га тенг бўлса, конус ҳажмининг нисбатини топинг.

Жавоб: $[3]$.

8. $y = x^2 + 2x + 5$ функциянинг $[-2; 0]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $[4]$.

13-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}}{3\sqrt{a}(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2})} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{a - b}.$$

Жавоб: $[0]$.

2. Агар геометрик прогрессиянинг биринчи ва учинчи ҳадлари йиғиндис 20 га, иккинчи ва тўртинчи ҳадлари йиғиндис 40 га тенг бўлса, унинг маҳражини топинг.

Жавоб: $[2]$.

3. $\frac{x^3 + x^2 - 3x - 27}{(x-1)^2} < 0$ тенгсизлиكنи қанотланттиринг.

4. Агар геометрик прогрессиянинг олтинчи ҳади иккинчи ҳадидан 20 та ортқ, биринчи ҳади эса -7 га тенг бўлса, унинг маҳражини топинг.

Жавоб: $[2]$.

5. $\log_3 x + \log_3 x = 16$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $[16]$.

6. $\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right) \left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right)$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: $[1]$.

7. $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ тенгламанинг $90^\circ < x < 210^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: $[180]$.

8. Агар кубнинг қирраси $\sqrt{3}$ га тенг бўлса, шу кубга ташқи чизилган шарнинг диаметрини топинг.

Жавоб: $[3]$.

9. $y = x^3 - 3x^2$ функциянинг $[-1; 1]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: $[0]$.

14-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$ab \left(\frac{a^{1-a}}{b^a} - \frac{b^{1-a}}{a^a} \right) \cdot \frac{1}{\frac{a}{1-a-b}}.$$

Жавоб: [1].

2. Ҷуъвчи геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади билан учинчи ҳади йиғиндиси 20 га, биринчи 3 та ҳадининг йиғиндиси эса 26 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

Жавоб: [2].

3. $(2x-9)(3x-16)(x^2+4) < 0$ тенгсизлиkning бугун ечимини топинг.

Жавоб: [5].

4. $\frac{2 \lg x}{\lg(5x-4)} = 1$ тенгламанинг бирдан фарқи илди-зини топинг.

Жавоб: [4].

5. Агар $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ бўлса, $(1 + \lg^2 x)(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$ ифодани ҳисобланг.

Жавоб: [0,2].

6. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$ тенгламанинг $30^\circ < x < 105^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: [90].

7. Мунтазам тўртбurchакли призма диагонали ён ёни билан 30° да бурчак ташкил қилади. Призма асоси томонининг узунлиги $\sqrt{2}$ га тенг бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

Жавоб: [4].

8. $y = \frac{x}{2} - \sqrt{x}$ функциянинг $[0; 16]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: [4].

15-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(1 + \sqrt[4]{y^2 + (1 - \sqrt[4]{y})^2})}{1 + \sqrt[4]{y}}.$$

Жавоб: [2].

2. Арифметик прогрессиянинг биринчи ва иккинчи ҳадлари йиғиндиси 10 га, дастлабки учта ҳадининг йи-

ғиндиси 39 га тенг бўлса, унинг биринчи ҳадини то-пинг.

Жавоб: [-3].

3. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ тенгламани ечинг.

Жавоб: [-1].

4. $\log_2(4x + 23) - \log_2(2x + 1) = 2$ тенгламани ечинг.

Жавоб: [1].

5. $\frac{\lg^2 x \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos 2x}$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: [-1].

6. $1 - \sin 3x = \left(\cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \right)^2$ тенгламанинг $0 < x < 90^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: [60].

7. Тўғри тўртбurchакли мунтазам пирамиданинг ба-дондани 3 га, асосининг томони 5 га тенг бўлса, унинг ҳажмининг топинг.

Жавоб: [25].

8. $y = (x + 2)^3 - (x - 2)^3$ функциянинг минимумини топинг.

Жавоб: [16].

16-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-1}, \text{ бунда } x > 2.$$

Жавоб: [1].

2. Чексиз камаловчи геометрик прогрессия ҳади-рининг йиғиндиси 32 га, дастлабки бешта ҳадининг йи-ғиндиси 31 га тенг бўлса, прогрессиянинг маҳражини топинг.

Жавоб: [0,5].

3. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x + 10) = 0$ тенгламанинг энг катта илди-зини топинг.

Жавоб: [2].

4. $\log_2(x-2) + \log_2(x-4) = \log_2 3$ тенгламанинг катта илди-зини топинг.

Жавоб: [5].

5. $\operatorname{tg} 110^\circ + \operatorname{ctg} 20^\circ$ ни жадвалдан фойдаланмасдан ҳисобланг.

Жавоб: $[0]$.

6. $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$ тенгламанинг $10^\circ < x < 60^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: $[15]$.

7. Цилиндр ёйилмасининг диагонади $2\sqrt{\pi}$ га тенг бўлиб, у асос айланасининг ёйилмаси билан 30° ли бурчак ташкил қилади Цилиндрнинг ҳажминини топинг.

Жавоб: $[0,75]$.

8. $y = 2x^2 + 8x + 7$ функциянинг $[-2; -1]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: $[1]$.

17-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x - \sqrt[3]{a}}^3 + 2x + a}{(\sqrt[3]{x - \sqrt[3]{a}}^3 - 2x - a)} \right)^3 - \frac{\sqrt[3]{(a^2 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3)^2}}{a}.$$

Жавоб: $[1]$.

2. Арифметик прогрессияни учинчи ҳади 8 га, бешинчи ҳади 16 га тенг бўлса, унинг бешта ҳадининг йиғиндисини топинг.

Жавоб: $[40]$.

3. $\frac{x^2 - 16x + 54}{(x - 2)^2} < 0$ тенгсизлиكنи қановатлантирувчи бутун сонни топинг.

Жавоб: $[8]$.

4. $4x^{-1} = 0,5^{3-x}$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $[-1]$.

5. Агар $0 < x < 90^\circ$ да $\cos 2x = \frac{4}{5}$ бўлса, $\sin^2 x$ нинг қийматини топинг.

Жавоб: $[0,1]$.

6. $\cos^4 \frac{x}{3} - \sin^4 \frac{x}{3} = 1$ тенгламанинг $30^\circ < x < 120^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: $[90]$.

7. Ҳосилчи 5 га, баландлиги эса 4 га тенг бўлган конус ҳажмининг π га нисбатини топинг.

Жавоб: $[12]$.

8. $y = 3x - x^3$ функциянинг $[-2; 3]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $[-18]$.

18-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{2}{3}}} - \frac{a+1}{a^2 - 4a + 3}, \text{ бунда } a > 0.$$

Жавоб: $[0]$.

2. Геометрик прогрессиянинг биринчи 4 та ҳади йиғиндис 4 га, кейинги 4 та ҳадининг йиғиндис эса 324 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

Жавоб: $[0,1]$.

3. $(3x^2 + 2x + 1)(4x - 5)(2x - 1) < 0$ тенгсизлиكنинг бутун ечимини топинг.

Жавоб: $[1]$.

4. $\log_3(5x - 3) - \log_3(x + 1) = 1$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $[3]$.

5. $\frac{(\cos x + \sin x)^2 - 1}{2 \sin x} - \operatorname{ctg} x \sin x$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: $[0]$.

6. $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ тенгламанинг $90^\circ < x < 210^\circ$ интервалга тегишли ечимини градусда топинг.

Жавоб: $[180]$.

7. Конус ясовчиси асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Агар конуснинг асоси радиуси $\sqrt{3}$ га тенг бўлса, конус ҳажмининг π га нисбатини топинг.

Жавоб: $[3]$.

8. $y = 1 + 3x^2 - x^3$ функциянинг $[0; 3]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: $[5]$.

19-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1-x+1}} + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \right).$$

Жавоб: $[-1]$.

2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг бешинчи ҳади иккинчи ҳадидан саккиз марта кичик, уларнинг йиғиндиси эса 9/16 га тенг бўлса, прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

Жавоб: $[1]$.

3. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x + 10) = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи қатта илгизни топинг.

Жавоб: $[2]$.

4. $\log_2(x^2 - 4x + 5) = 1$ тенгламанинг бирдан фарқли ечимини топинг.

Жавоб: $[3]$.

5. $\cos 3x = -2 \cos x$ тенгламанинг $80^\circ < x < 120^\circ$ интервалда тегишли ечимини топинг.

Жавоб: $[90]$.

7. Доғравий цилиндр асосининг радиуси 2 га тенг ва унинг ясовчиси радиусидан 8 марта қатта бўлса, цилиндрнинг тула сирти юзининг π га нисбатини топинг.

Жавоб: $[\frac{28}{3}]$.

8. $y = 4x - x^2$ функциянинг экстремумини топинг.

Жавоб: $[4]$.

20-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x^2 + x + \sqrt{x}} : \frac{x-1}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

Жавоб: $[1]$.

2. Геометрик прогрессиянинг дастлабки 15 та ҳади йиғиндиси дастлабки 5 та ҳади йиғиндисидан 256 га ортқ. Агар прогрессиянинг маҳраки 2 га тенг бўлса, унинг дастлабки 10 та ҳади йиғиндисини топинг.

Жавоб: $[8]$.

3. $(x^2 - 5x - 14)(x^2 - 2x + 7) = 0$ тенгламанинг буюн илгизини топинг.

Жавоб: $[7]$.

4. $\log_2(x + 7) + \log_2(x + 3) = 1$ тенгламани қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Жавоб: $[-2]$.

5. $\frac{1 + \lg x}{\lg^2 x + \lg^2 x} \cdot \frac{1}{\lg^2 x}$ ифодани соддаштиринг.

Жавоб: $[1]$.

6. $2 \lg x + 3 \lg x = 5$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ интервалда тегишли ечимини топинг.

Жавоб: $[45]$.

7. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчамлари 3, 4 ва 5/3 бўлса, унинг диагоналинини топинг.

Жавоб: $[10]$.

8. $y = x^4 - 2x^3 + 3$ функциянинг $[-1; 1]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: $[3]$.

21-вариант

1. Ифодани соддаштиринг:

$$\sqrt[4]{\frac{5+2\sqrt{6}}{6x}} \cdot (3\sqrt{2x} - 2\sqrt{3x})^{\frac{1}{2}}.$$

Жавоб: $[1]$.

2. Геометрик прогрессиянинг учинчи ҳади билан охиридаги ҳади йиғиндиси 264 га, уларнинг айирмаси эса 248 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

Жавоб: $[1024]$.

3. $(3x - 4)(2x - 3) < 0$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи буюн маъний ечимини топинг.

Жавоб: $[-2]$.

4. $3 \lg x + 2 \lg \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $[10]$.

5. Жадвалдан фойдаланмасдан ҳисобланг:

$$\operatorname{tg} 110^\circ + \operatorname{ctg} 20^\circ.$$

Жавоб: $[0]$.

6. $4 \cos x = 3 \operatorname{ctg} x$ тенгламанинг $80^\circ < x < 120^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: $[90]$.

7. Конуснинг ясовчиси асос текислиги билан 60° даража ҳосил қилади. Ясовчи 12 га тенг бўлса, конуснинг ён сирти юзини топинг.

Жавоб: $[\frac{72\pi}{4}]$.

8. $y = \frac{x}{2} - \sqrt{x}$ функциянинг $[0; 16]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

Жавоб: $[\frac{4}{4}]$.

22-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{a^2 + a - 2}{a^{n+1} - 3a^n} \left(\frac{(a+2) - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{3}{a^2 - a} \right) \cdot \frac{a^{n+1}}{a+2}.$$

Жавоб: $[\frac{1}{1}]$.

2. Арифметик прогрессиянинг етита ҳади йиғиндиси 21 га ва еттинчи ҳадидан биринчи ҳадининг айирмаси 12 га тенг бўлса, унинг биринчи ҳадини топинг.

Жавоб: $[-3]$.

3. $(x^2 - 5x - 14)(x^2 - 2x + 7) = 0$ тенгламанинг бутун илдизини топинг.

Жавоб: $[\frac{7}{7}]$.

4. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $[\frac{100}{100}]$.

5. Агар $\operatorname{tg} x = 4$ бўлса, $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{1 + \cos x}$ ифодани ҳисобланг.

Жавоб: $[\frac{4}{4}]$.

6. $\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + 2 = 0$ тенгламанинг $700^\circ < x < 800^\circ$ интервалдаги ечимини градусда топинг.

Жавоб: $[\frac{720}{720}]$.

7. Конуснинг цилиндр асосининг радиуси 2 га тенг бўлса, унинг ясовчиси радиусидан 3 марта катта бўлган цилиндр тўла сирти юзининг π га нисбатини топинг.

Жавоб: $[\frac{28}{28}]$.

8. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ функциянинг $[0; 2]$ кесмадаги энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $[\frac{5}{5}]$.

23-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{1}{(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2} + \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2},$$

бунда $p > 0, q > 0$.

Жавоб: $[\frac{2}{2}]$.

2. Текис камбучи геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳади биринчи ҳадидан 6 та кам, учинчи ҳади экинчи ҳадидан 4 та кам. Прогрессия ҳадлари оқимасини топинг.

Жавоб: $[\frac{54}{54}]$.

3. $(x^2 + x - 12)(x - 5) < 0$ тенгсизлиكنи қаноатландирувчи энг катта бутун сонни топинг.

Жавоб: $[\frac{4}{4}]$.

4. $\log_2(x+2) + \log_2(x+4) = \log_2 3$ тенгламанинг энг катта илдизини топинг.

Жавоб: $[\frac{-1}{-1}]$.

5. Ифодани соддалаштиринг:

$$\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos x - \cos^2 x.$$

Жавоб: $[\frac{-1}{-1}]$.

6. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ тенгламанинг $0 < x < 45^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Жавоб: $[\frac{30}{30}]$.

7. Конус ҳажмининг π га нисбати 9 га тенг бўлиб, унинг ясовчиси асос текислиги билан 45° даража ҳосил қилади. Конуснинг баландлигини топинг.

Жавоб: $[\frac{3}{3}]$.

8. $y = x^2 - 4x + 5$ функциянинг $[0; 3]$ кесмалари энг кичик қийматини топинг.
Жавоб: $[1]$.

24-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left((\sqrt{2} - 1)^2 \cdot (3 + 2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} + (x + 12)\sqrt{x - 6x - 8} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - (\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}.$$

Жавоб: $[1]$.

2. Чексиз камаровчи геометрик прогрессиянинг ҳаддлари йиғиндиси $\frac{625}{4}$ га, маҳражи эса $1/5$ га тенг. Прогрессиянинг тўртинчи ҳаддини топинг.

Жавоб: $[1]$.

3. $\frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-14x}{3x+1}$ тенгламанинг бутун илдишларини топинг.

Жавоб: $[2]$.

4. $x^3 - 10x^2 + 4x - 40 = 0$ тенгламани ечинг.

Жавоб: $[10]$.

5. Агар $\lg \frac{x}{2} = 2$ бўлса, $\frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x}$ ифодани ҳисобланг.

Жавоб: $[4]$.

6. $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \cos 2x$ тенгламанинг $0 < x < 90^\circ$ интервалдаги ечимини топинг.

Жавоб: $[30]$.

7. Конуснинг ясовчиси асос текислиги билан 60° лар бурчак ташкил қилади. Унинг ясовчиси 12 га тенг бўлса, конус ён сирти юзининг π га нисбатини топинг.

Жавоб: $[72]$.

8. $y = 2 - 3x + x^3$ функциянинг $[-2; 2]$ кесмалари энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $[0]$.

25-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} + \frac{1}{x + y} \right) : \frac{x + y + 1}{(x + y)^2}.$$

Жавоб: $[1]$.

2. Геометрик прогрессиянинг дастлабки 4 та ҳадди асосан $\frac{80}{27}$ га, маҳражи эса $\frac{1}{3}$ га тенг бўлса, унинг биринчи ҳаддини топинг.

Жавоб: $[2]$.

3. $(3x^2 + 2x + 1)(4x - 5)(2x - 1) < 0$ тенгсизликни қанчалантирувчи бутун ечимни топинг.

Жавоб: $[1]$.

4. $\log_2(x - 3) + \log_2(x + 3) = 4$ тенгламанинг мусбат ечимини топинг.

Жавоб: $[5]$.

5. $\left(\frac{1}{\cos x} - \lg x \right) \left(\frac{1}{\cos x} + \lg x \right)$ ифодани соддалаштиринг.

Жавоб: $[1]$.

6. $\frac{7 \cos x - 3}{2 \cos(x + \pi)} = 1$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ интервалдаги ечимини топинг.

Жавоб: $[60]$.

7. Тўртри призманинг асоси тенг ёшли учбурчак бўлади, унинг асоси 6 га, асосдаги бурчак 30° га тенг. Призманинг баландлиги $\sqrt{3}$ га тенг бўлса, унинг ҳажминини топинг.

Жавоб: $[9]$.

8. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ функциянинг $[1; 4]$ кесмалари энг кичик қийматини топинг.

Жавоб: $[-0,75]$.

1987 — 1988 ўқув йилида баъзи олий ўқув юртига кириш учун математикадан ёзма имтиҳон вариантларидан намуналар

Тошкент электротехника а.м.о.а институтини

1-вариант

$$1. \frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{(a^2 + ab)^{2/3}} : \frac{a^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$$

ифодани соддалаштиринг, сўнгра $a = \frac{1}{2}$ ва $b = 1,2$ қийматлар учун ҳисобланг.

2. a нинг қандай қийматида

$$x^2 + 2ax\sqrt{a^2 - 3} + 4 = 0$$

тенглама илдиэлари ўзаро тенг бўлади?

3. Тенгламани ечинг:

$$3^{\log_3 x^2 + \log_3 x^2 + \log_3 x^2 + \dots + \log_3 x^2} = 27x^{30}.$$

4. Агар $0 < x < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\cos^4 \frac{3}{2}x - \sin^4 \frac{3}{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ тенгламадан x ни топинг.

5. x нинг $(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+6}$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи бутун қийматларини аниқланг.

6. Периметри 44 см бўлган параллелограмм диагоналлари билан 4 та учбурчакка бўлинган. Иккита қўшни учбурчак периметрларининг айирмаси 6 см га тенг. Параллелограмм томонларининг узунлигини аниқланг.

2-вариант

1. Қуйидаги ифодани ҳисобланг:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 1,9 + 19,9 : 4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0,16}$$

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{1+a^{-1}}{1-a^{-1}} \cdot \left[\frac{a^2+1}{2a} - 1 \right].$$

3. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) = y-x, \\ 3x = 2y-1. \end{cases}$$

4. Тенгсизлиқни ечинг:

$$3^{x^2+3} < 81^x.$$

5. Тенгламани ечинг:

$$25 \sin^2 x + 100 \cos x = 89.$$

6. Пирамиданинг асоси томони a га ва ўткир бурчаги β га тенг ромбдан иборат. Агар асосидаги икки ёқли бурчаклари α га тенг бўлса, пирамиданинг ҳажми ва тўлиқ сиртини топинг.

3-вариант

1. Қуйидаги ифодани ҳисобланг:

$$\frac{\left(10 : 2 \frac{2}{3} + 7,5 : 10 \right) \cdot 2 \frac{1}{2} + 0,75}{0,02}.$$

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) \cdot (1-x^2).$$

3. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x - 26y - 7 = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

4. Айниётни исботланг:

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha).$$

5. Тенгсизлиқни ечинг:

$$\log_3(7x-8) > \log_3(x^2+4).$$

6. Кесик конус ости ва устки асосларининг радиуслари R ва r га тенг. Ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Кесик конуснинг ён сирти ва ҳажмини топинг.

4 вариант

1. Куйидаги ифодани ҳисобланг:

$$\left(\frac{3}{5} + 0,425 - 0,005\right) : 0,1$$

$$\left(30,5 + \frac{1}{6} + 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0,3$$

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{2a} - b\right)$$

3. Тенгламани ечинг:

$$(7x + 2)^2 - 10(7x + 2) + 9 = 0.$$

4. Агар $7 \sin \alpha = -3$ бунда $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$ экани маълум бўлса, $\lg 2\alpha$ ни топинг.

5. Тенгсизлиكنи ечинг: $0,5^x \leq 0,25^x$.

6. Тўртбۇрчакли мунтазам пирамида асосининг диагонали 16 см, ён ёғи билан асос текислиги орасидати бурчак 60° га тенг бўлса, пирамиданинг ён сиртинини топинг.

5-вариант.

1. Куйидаги ифодани ҳисобланг:

$$2\frac{14}{15} : \left(2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{20}\right) \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{14}\right).$$

2. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(a-b)^3 + b^3 - a^3}{3ab} \cdot \frac{1}{(b+a)^{-1}}.$$

3. Тенгсизлиكنи ечинг:

$$-3(4-x) < 9+x.$$

4. Агар $\sin \alpha = -0,8$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бўлса, $\cos \alpha$, $\lg \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ ларни топинг.

5. Куйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{3}{8}, \\ x^2 + y^2 = 12. \end{cases}$$

6. Конуснинг ясовачиси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Агар конус ўқ kesимининг юзи Q га тенг бўлса, унинг тула сиртини топинг.

1-вариантнинг ечилиши

1. Дастлаб берилган ифодани соддалаштирамиз:

$$\frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{(a^2 - ab)^{2/3}} : \frac{a^{-2/3} \sqrt{a-b}}{a \sqrt{a-b} \sqrt{b}} = \frac{(V \sqrt{a})^3 + (V \sqrt{b})^3}{a^{2/3} \sqrt{a-b}} \times$$

$$\times \frac{a^{2/3} ((V \sqrt{a})^3 - (V \sqrt{b})^3)}{\sqrt[3]{a-b}} = \frac{a^3 - b^3}{a-b} =$$

$$= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a-b} = a^2 + ab + b^2.$$

- Энди бу ифодага $a = \frac{1}{2}$ ва $b = 1,2$ қийматларини қўйиб ҳисоблаймиз:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 + (1,2)^2 = 0,25 + 0,6 + 1,44 = 2,29.$$

- Жавоб: 2,29.

2. Тенгламанинг дискриминанти нолга тенг бўлгандагина квадрат тенгламанинг илдизлари бир-бирига тенг бўлади. Шунинг учун тенгламанинг дискриминантини D орқали ифодалаб, сўнггра уни нолга тенглаймиз:

$$D = 4a^2(a^2 - 3) - 16 = 0, \text{ яъни } a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \text{ кўринишдаги биквадрат тенгламага эга бўламиз. Виет теоремасига кўра } a^2 = -1 \text{ ва } a^2 = 4. \text{ Бундан ҳақиқий илдизлар: } a = \pm 2.$$

- Жавоб: $a = \pm 2$ қийматларда.

3. $3 \log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \dots + \log_3 x^8 = 27x^{30}$.

- Тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x > 0$. Чап қисмининг даражасини куйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \dots + \log_3 x^8 =$$

$$= \log_3 x + 2 \log_3 x + 3 \log_3 x + \dots + 8 \log_3 x =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 8) \log_3 x,$$

- қавс ичидаги ифода арифметик прогрессия ҳадларининг йиғиндисидан иборат бўлгани учун:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{1+8}{2} \cdot 8 = 36.$$

Бу қийматни дастлабки тенгламага қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$3^{36 \log_3 x} = 27x^{30} \text{ ёки } 3^{10 \log_3 x^{36}} = 27x^{30}.$$

$a^{\log_a b} = b$ тенгликдан фойдаланиб, $x^{36} = 27x^{30}$ ни ҳосил қиламиз, бундан $x^{30}(x^6 - 27) = 0$. Аниқланиш соҳасини эътиборга олиб, $x = \sqrt[3]{3}$ га эга бўламиз.

Жавоб: $\sqrt[3]{3}$.

4. Дастлаб берилган тенгламани ечамиз;

$$\cos^4 \frac{3}{2}x - \sin^4 \frac{3}{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\left(\cos^2 \frac{3}{2}x - \sin^2 \frac{3}{2}x \right) \left(\cos^2 \frac{3}{2}x + \sin^2 \frac{3}{2}x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Бу аниқланган ечимлар тўпламидан $0 < x < \frac{\pi}{2}$ шартни қаноатлантирадиган ечимни ажратиб оламиз. $\forall x = \frac{\pi}{12}$ дир.

Жавоб: $\frac{\pi}{12}$.

5. Даврий ўнли қасрни оддий ўнли қаср шаклида ёзиб оламиз:

$$0,(4) = \frac{4}{9}; \quad 0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Натижада берилган тенгсизлик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left(\frac{4}{9} \right)^{x^2-1} > \left(\frac{2}{3} \right)^{x^2+6} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^{2x^2-2} > \left(\frac{2}{3} \right)^{x^2+6}.$$

$\frac{2}{3} < 1$ бўлгани учун: $2x^2 - 2 < x^2 + 6$, бундан $x^2 < 8$ ёки $|x| < \sqrt{8}$, яъни $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$. x нинг аниқланган кесмадаги бутун қийматлари $-2, -1, 0, 1, 2$ сонлардан иборат бўлади.

Жавоб: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

6. Берилган: $ABCD$ — параллелограмм, $P_{ABCD} = 44$ см, $P_{\triangle BOC} - P_{\triangle AOB} = 6$ см (43-чизма).

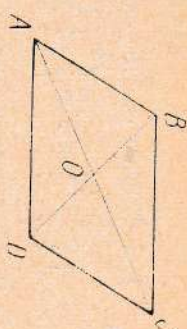
Топиш керак: AB, BC .

Еч иш. Масала шартига

қўра $P_{\triangle BOC} = P_{\triangle AOB} + 6$ ёки

$$OB + OC + BC = AO + OB + AB + 6.$$

43-чизма.



Бундан $BC = AB + 6$. Параллелограммнинг периметри $P_{ABCD} = 2AB + 2BC$ га тенг. Бу ерга BC нинг AB орқали ифодасини қўйиб, $2AB + 6 = 22$ ни топамиз. Демак, $AB = 8$ (см), $BC = 14$ см.

Жавоб: 8 см, 14 см.

Тошкент кишлоқ хўжалигини ирригацýялаш ва механизациялаш инженерлари институтини

1-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2a^2 : \sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a-b}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$\log_{10} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$$

3. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = 1, \\ \frac{x-y}{3} + \frac{x+y}{4} = 1. \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$$

5. Учбۇurchакли мўнтазам пирамида асосининг томони 10 см га тенг. Ён ёғи асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг баландлигини топинг.

2-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{a}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a}+1} - \sqrt{a}\right) \cdot (a - \sqrt{a^2})^{-1},$$

2. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} - \sqrt[3]{5 - \sqrt{x}} = 1.$$

3. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \log_x y = 8, \\ \log_{x+1}(y+23) = 3. \end{cases}$$

4. Айнитни исботланг:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

5. Берилган R радиусли шарга энг катта ҳаммаи цилиндр ички чизилган. Унинг ўлчовларини топинг.

3-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 + (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)} : \frac{1}{\sqrt{m^2 - n^2}} - 3\sqrt[4]{mn}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$4x^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0.$$

3. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 5y - 4 = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Тенгламани ечинг:

$$\cos 2x - 3 \sin x + 2 = 0.$$

5. $y = x^3 + 9x - 3$ функциянинг $[-1, 0]$ ораллиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

4-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} \cdot \left[\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \right].$$

2. Тенгламани ечинг:

$$2 \log_3 x + 9 \log_3 3 = 0.$$

3. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг:

$$3 \cos x - 4 \cos x - \sin^2 x - 2 = 0.$$

5. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4$ функциянинг $[-1, 2]$ ораллиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

5-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{m^2-1}{n^2}\right)^m \cdot \left(n + \frac{1}{m}\right)^{m-m} \cdot \left(n^2 - \frac{1}{m^2}\right)^n \cdot \left(m - \frac{1}{n}\right)^{m-n}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$x\sqrt{x} - 4\sqrt{x^2} + 4 = 0.$$

3. Системани ечинг:

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

4. Айнитни исботланг:

$$\frac{\lg 3x}{\operatorname{ctg}^2 3x - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg} 3x} = 1.$$

5. Кунидаги функциянинг критик нуқталарини топинг.

$$y = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2} x^2 + 4x + 1.$$

6-вариантнинг ечилиши

1. Берилган кушилувчини соддалаштирамиз:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2a^2 : \sqrt{a+b}\sqrt{b}}{a\sqrt{a+b}\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2(\sqrt{a})^2 + 2(\sqrt{b})^2}{a\sqrt{a+b}\sqrt{b} + b\sqrt{a+b}\sqrt{b}} = \\ & = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 + 2(\sqrt{a})^2 + 2(\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3(\sqrt{a})^3 - 3(\sqrt{a})^2\sqrt{b} + 3\sqrt{a}\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Энди иккинчи қўшнуларини соддаштирамиз:

$$\frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a-b} = \frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Бугларнинг йиғиндисини топамиз:

$$\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 3.$$

2. Барча логарифмларни 2 асосга келтирамыз. Бунинг учун $\log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a}$ формуладан фойдаланамиз. У ҳолда

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 x; \quad \log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{1}{4} \log_2 x$$

бўлиб, берилган тенглама

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 \Rightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) \log_2 x = 7$$

қўринишга келади. Бундан эса $\log_2 x = 4$ га эга бўла-
миз. Демак, $x = 2^4 = 16$.

$$3. \begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = 1, \\ \frac{x-y}{3} + \frac{x+y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-y) + 2(x+y) = 6, \\ 4(x-y) + 3(x+y) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - y = 6, \\ 7x - y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 6, \\ 7x - 5x + 6 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9, \\ x = 3. \end{cases}$$

Жавоб: {3; 9}.

4. Тенгламанинг иккала томонига $2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3}$ ни

$$\text{қўшсак, } \sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} + 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8} +$$

$$+ 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3}$$

ёки

$$1 = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \left(4 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} \right)$$

ҳосил бўлади.

$$\text{Бундан } \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}. \quad \text{Бу ердан}$$

$$\sin \frac{2x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} +$$

$$+ 2\pi n \quad \text{ёки } x = \pm \frac{\pi}{2} + 3\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

5. Масала шартига кўра:

$$\angle SDO = 45^\circ, \quad AB = BC =$$

44-чизма.

SDO учбурчак тенг ёнли эканидан (44-чизма): $DO = OS = H$. Шундай қилиб, $H = OD$, $\triangle ABC$ тенг то-
монли бўлгани учун:

$$BD = AB \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}, \quad OD =$$

$$= \frac{1}{3} BD = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Демак, } H = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Жавоб: } H = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Тошкент теўчилик ва енгил соноат институти

1-вариант

1. Тенгламалар системасини ечинг:

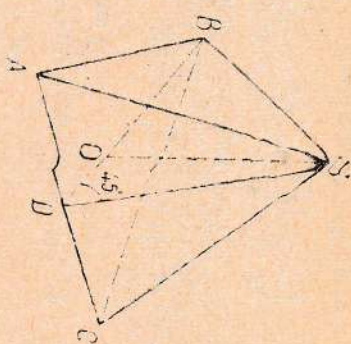
$$\begin{cases} 8x - 4y = 9, \\ 13x + 6y = -1. \end{cases}$$

2. Тенгламани ечинг:

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$$

3. Айниётни исботланг.

$$\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = -1.$$



3. Айништи исботланг:

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x.$$

4. Солдлаштиринг:

$$\left(\frac{b}{a^2 + ab} + \frac{a}{b^2 - ab} \right) \cdot \frac{a^2 b + ab^2}{a^2 - b^2}.$$

5. Кесик конуснинг ясовчиси l унинг пастки асоси текислиги билан α бурчак ташкил этади. Бу ясовчининг юқори учини унга қарама-карши турган ясовчининг пастки учи билан туташтирувчи тўғри чизик l ясовчисига перпендикуляр. Кесик конуснинг ён сиртининг топинг.

1-вариантнинг ечилиши

1. у дар олддаги коэффициентларни абсолют қийматлари бўйича тенглаштирамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани 3 га, иккинчисини 2 га кўпайтирамиз, яъни

$$\begin{cases} 8x - 4y = 9, \\ 13x + 6y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x - 12y = 27, \\ 26x + 12y = -2. \end{cases}$$

Ўлкада тенгламани ҳадма-ҳад қўшсак, $50x = 25$ бўлади. Бундан $x = \frac{1}{2}$. Энди x нинг бу қийматини биринчи тенгламага қўйиб, y ни топамиз:

$$8 \cdot \frac{1}{2} - 4y = 9 \Rightarrow 4y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Жавоб: $\{0,5; -1,25\}$.

2. Берилган тенглама $3^x - 8 = 3^{2-x}$ ёки $3^x - 8 = 3^2 \cdot 3^{-x}$ тенгламатенг кўчди бўлиб, бу ердан $3^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$. Агар $y = 3^x$ деб олсак, $y^2 - 8y - 9 = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани ечамиз: $y_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5$, бундан $y_1 = -1$ ва $y_2 = 9$. Демак, $3^x = 9 = 3^2$ бўлиб, бу ердан $x = 2$ бўлади. $3^x = -1$ тенглама эса ҳақиқий иллага эга эмас.

Жавоб: $x = 2$.

3. Айништи исботлашда иккиланган бурчакнинг синуси, косинуси ва котангенс формулаларидан фойдаланамиз.

$$\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha = -(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = -1.$$

Айниқ исботланди.

4. Аниқл биринчи қавсни солдлаштирамиз:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \\ & + \frac{(\sqrt{1-a})^2}{(\sqrt{1-a})^2} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}} = \\ & + \frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}} = \frac{1+a-\sqrt{1-a^2}}{1+a+\sqrt{1-a^2}} = \\ & = \frac{2+2\sqrt{1-a^2}}{2a} = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}. \end{aligned}$$

Энди иккинчи қавсни солдлаштирамиз ($a > 0$):

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a^2} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}.$$

Ҳосил бўлган натижаларни ўзаро кўпайтирамиз:

$$\frac{\sqrt{1-a^2}+1}{a} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} = \frac{1-a^2-1}{a^2} = -1.$$

5. Масала шартига асосан $\angle SAO = \alpha$, $ABCD$ —

томон a бўлган квадрат (45-чизма). Асос диагонаси $AC = a\sqrt{2}$, шунинг

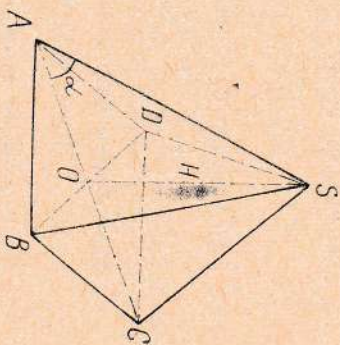
$$\text{учун } AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad \triangle AOS$$

$$\text{дан: } H = AO \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} a \times$$

$\operatorname{tg} \alpha$. Пирамиданинг ҳажми топамиз:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{асос}} \cdot H = \frac{1}{3} a^2 \times$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \operatorname{tg} \alpha.$$



45-чизма.

1-вариант

1. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{6}{y} = 20, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

2. Тенгламани ечинг:

$$1 - 3 \cdot 2^{1-x} + 2^{3-2x} = 0.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$\cos^2 x + 5 \cos x = 2 \sin^2 x.$$

4. Солдлаштиринг:

$$\left| \frac{p^2 - q^2}{pq} - \frac{1}{p+q} \left(\frac{p^2}{q} - \frac{q^2}{p} \right) \right| : \frac{p-q}{p}.$$

5. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 3 см ва 8 см бўлиб, улар орасидagi бурчак 60° га тенг. Параллелепипеднинг ён сирти 220 см^2 га тенг бўлса, унинг ҳажмини топинг.

2-вариант

1. Солдлаштиринг:

$$\left(\frac{3}{3x-y} - \frac{2}{2x+y} \right) \cdot \frac{y^2}{10y+4x} : \frac{y^2}{4x^2-y^2}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x+3}} = 2.$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$$

5. Уч бурчакли пирамиданинг учидagi текис бурчаклари тўғри бурчаклар бўлиб, ён қирылари 5 см, 6 см ва 7 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

3-вариант

1. Солдлаштиринг:

$$\left[(1 + \sqrt{1-x^2}) + 1 \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x^2} \right) : (1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 5.5.$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2 y - x y^2 = 6, \\ xy + x - y = 5. \end{cases}$$

4. Айниқтиги исботланг:

$$\frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin \alpha - \lg \alpha} = \frac{1}{2} \sin 4\alpha.$$

5. Тўғри призманинг асоси юзи 9, ўткир бурчagi α бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Катта ён ёнининг юзи Q га тенг бўлса, призма ҳажмини топинг.

4-вариант

1. Солдлаштиринг:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+x} + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0.$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\lg x + \lg 2x - \lg 3x = 0.$$

5. Тўғри бурчакли муфтазам кесик пирамиданинг боёнидаги 16 см га, асосларининг томонлари 24 см ва 40 см га тенг. Диагонал кесимининг юзини топинг.

5-вариант

1. Солдлаштиринг:

$$\left[\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} \right)^{-2} + \left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{y} \right)^{-2} \right] : \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{y}}{x-y}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

3. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - 3 = y. \end{cases}$$

4. Айниятни исботланг:

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

5. Кесик конуснинг баландлиги 6 см га, асосларнинг радиуслари 10 см ва 2 см га тенг. Кесик конуснинг тўла сиртини топинг.

1-вариантнинг ечилиши

1. $\frac{1}{x} = t$ ва $\frac{1}{y} = v$ деб белгиласак, берилган система қуйидаги қўриниши олади:

$$\begin{cases} t - 6v = 20, \\ 2t + v = 1. \end{cases}$$

Системанинг иккинчи тенгламасини 6 га қўлайтириб, биринчи тенгламага қўшамиз, натижада $13t = 26$ ҳосил бўлади, бундан $t = 2$ ни ҳосил қиламиз. Сўнгга иккинчи тенгламага t нинг ўрнига қийматини қўйиб, $v = -3$ ни топамиз. $\frac{1}{x} = 2$ ва $\frac{1}{y} = -3$ тенгламалардан $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$ ларни топамиз.

Жавоб: $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

2. $1 - 3 \cdot 2^{1-x} + 2^{3-2x} = 0$ тенгламани $1 - 3 \cdot 2 \times 2^{-x} + 2^3 \cdot 2^{-2x} = 0$ қўринишда ёзиб оламиз. $2^{-x} = t$ деб белгिलाيمиз. У ҳолда $8t^2 - 6t + 1 = 0$ ҳосил бўлади.

Бу тенглама $t_1 = \frac{1}{2}$ ва $t_2 = \frac{1}{4}$ илдизларга эга. Де-

мак, $2^{-x} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ ёки $-x = -1$, бундан $x = 1$; $2^{-x} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ ёки $-x = -2$, бундан $x = 2$.

Жавоб: $\{1; 2\}$.

4. Берилган тенгламани ечиш учун $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ шартини эътиборга олиб, уни соддалаштирсак, $3\cos^2 x + 1 - 5\cos x - 2 = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани ечиб,

$$(\cos x)_1 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6},$$

$$(\cos x)_2 = \frac{1}{3} \text{ ва } (\cos x)_2 = -2 \text{ эканини топамиз.}$$

$\cos x = \frac{1}{3}$ тенгламанинг ечими: $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Матлумки, $\cos x$ абсолют қиймати жихатдан бирдан катта бўлолмайдиган, шунинг учун $\cos x = -2$ тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Берилган алгебраик ифодани соддалаштирамиз:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{p^2 - q^2}{pq} - \frac{1}{p+q} \left(\frac{p^2}{q} - \frac{q^2}{p} \right) \right] : \frac{p-q}{p} = \\ & = \left[\frac{(p-q)(p+q)}{pq} - \frac{1}{p+q} \cdot \frac{p^3 - q^3}{pq} \right] : \frac{p-q}{p} = \\ & = \frac{p-q}{pq} \left[(p+q) - \frac{p^3 + pq + q^3}{p+q} \right] : \frac{p-q}{p} = \\ & = \frac{1}{q} \cdot \frac{p^2 + 2pq + q^2 - p^3 - pq - q^3}{p+q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{pq}{p+q} = \frac{p}{p+q}. \end{aligned}$$

5. Масала шартига

нуқра:

$$AB = CD = 3 \text{ см};$$

$$AD = BC = 8 \text{ см};$$

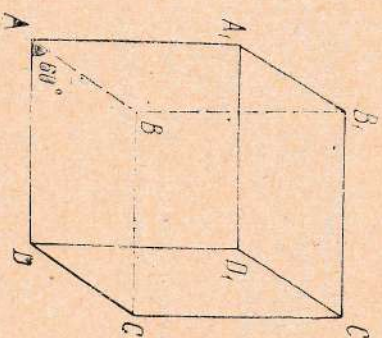
$$S_{\text{пр}} = 220 \text{ см}^2.$$

Параллелепипеднинг ҳажмининг $V = S_{\text{асос}} \cdot H$ формула бўйича топамиз (10-чизма):

$$V_{\text{пр}} = AD \cdot AB \sin 60^\circ =$$

$$= 3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

p - асос периметри бўлса,



46-чизма.

$S_{\text{ср}} = p \cdot H = 2(3+8) \cdot H = 22H$ бўлиб, $22H = 220$,
 Бундан $H = 10$. У ҳолда $V = 12\sqrt{3} \cdot 10 = 120\sqrt{3} \text{ см}^3$,
 Жавоб: $120\sqrt{3} \text{ см}^3$.

Тошкент давлат университети
 Математика факультети

1-вариант

1. Тўққизинчи ҳадининг еттинчи ҳадига кўпайтмаса
 400 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг саккин-
 зинчи ҳадини топинг.

2. Агар $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2x^2 - \frac{37}{9}x + \frac{13}{2}$ бўлса, $f'(x) = 0$
 тенгламани ечинг.

3. Тенгламани ечинг:

$$\sin x \cdot \lg \frac{x}{2} = \frac{3}{2}.$$

4. Тенгсизлиكنи ечинг:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+6x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+6}.$$

5. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг бўтуни сир-
 ти S га тенг бўлиб, ён ёқлари асос текислиги билан
 бурчак ташкил этади. Шу пирамиданинг ҳажмини то-
 пинг.

2-вариант

1. Арифметик прогрессиянинг дастлабки учта ҳади
 йиғилдиси 12 га тенг ва тўртинчи ҳади иккинчи ҳади-
 дан 4 га ортқ. Шу прогрессиянинг тўртинчи ҳадини
 топинг.

2. Агар $f(x) = \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + (3x)^2 - \frac{170}{9}x + \frac{7}{2}$ бўлса, $f'(x) =$
 $= 0$ тенгламани ечинг.

3. Тенгламани ечинг:

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{2} = 1.$$

4. Тенгсизлиكنи ечинг:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{4x-3}.$$

5. Тўда сирти S бўлган конус ясовчиси асос текис-
 лиги билан α бурчак ташкил этади. Шу конусга ички
 параллел мунтазам огтибурчакли пирамиданинг ҳаж-
 мин топинг.

3-вариант

1. Тенгламани ечинг:

$$4^x + 2^{x+1} = 80.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

3. $y = \lg(3x-1) + 2 \lg(x+1)$ функциянинг аниқ-
 ланиш соҳасини топинг.

4. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ функциянинг $[-2; 1]$ ора-
 лидан энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

5. Огти бурчакли мунтазам пирамиданинг ён қир-
 раси l га, асосига ички чизилган доиранинг диаметри
 d га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

4-вариант

1. Тенгламани ечинг:

$$9^x - 3^x = 6.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$2 \cos^2 x + 3 \sin 2x - 8 \sin^2 x = 0.$$

3. $y = \lg(2x-1) + 4 \lg(x+2)$ функциянинг аниқ-
 ланиш соҳасини топинг.

4. $f(x) = x^3 - 3x^2$ функциянинг $[1; 3]$ оралиқдати-
 дан энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

5. Огти бурчакли мунтазам призманинг ён қирраси
 l га тенг. Асосига ички чизилган доиранинг диаметри
 d га тенг. Призманинг ён сиртини топинг.

1-вариантнинг ечилиши

1. Геометрик прогрессия таърифидан:

$$b_0 = b_8 \cdot q, \quad b_8 = b_7 \cdot q, \quad b_7 = \frac{b_8}{q}.$$

Морфаларнинг шартидан: $b_8 \cdot b_7 = b_8 \cdot q \cdot \frac{b_8}{q} = b_8^2 = 400$
 ёки $b_8 = \pm 20$, бундан $b_8 = \pm 20$.

Жавоб: $\{-20; 20\}$.

2. Дастлаб $f'(x)$ ни тоғиб, сўнгра $f'(x) = 0$ тенгламани ечамиз.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left| \left(\frac{x}{3} \right)^3 + 2x^2 - \frac{37}{9}x + \frac{13}{2} \right| = \\ &= \left| \left(\frac{x}{3} \right)^3 \right| + (2x^2)' - \left(\frac{37}{9}x \right)' + \left(\frac{13}{2} \right)' = \\ &= 3 \left(\frac{x}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 4x - \frac{37}{9} = \frac{x^2 + 36x - 37}{9}. \end{aligned}$$

$x^2 + 36x - 37 = 0$ тенгламани ечамиз:

$$D = b^2 - 4ac = 36^2 + 4 \cdot 37 = 1444 = 38^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-36 \pm 38}{2} = -18 \pm 19,$$

$$x_1 = -18 + 19 = 1, \quad x_2 = -18 - 19 = -37.$$

Жавоб: $\{1; -37\}$.

3. Ушбу $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ формулани эътиборга олиб, тенгламадан бевосита топамиз:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{3}{4}, \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Жавоб: $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$4. \left(\frac{1}{2} \right)^{2x^2+6x} > \left(\frac{1}{4} \right)^{-2x+6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} \right)^{x^2+3x} > \left(\frac{1}{4} \right)^{-2x+6} \Leftrightarrow$$

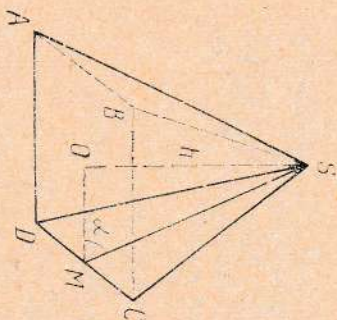
$$x^2 + 3x < -2x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+6)(x-1) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-6; 1).$$

5. Берилган $SABCD$ пирамида (47-чизма) асосининг томонини x , апофемасини l , баландлигини h десак, $S = x^2 + 2xl$ бўлади.



47-чизма.

ΔSOM дан $l = \frac{x}{2 \cos \alpha}$, демак,

$$S = \frac{2x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{S \cos \alpha}}{\sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$\text{Шунингдек, } h = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{S \cos \alpha}}{2 \sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2}}}.$$

Изоҳ: Формулаи тоғилган x ва h нинг қийматларини ҳажмининг формуласига қўямиз:

$$V = \frac{1}{3} x^2 h = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^3 \cos \alpha}{2}}.$$

$$\text{Жавоб: } V = \frac{S \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{2}}.$$

Физика факультети

1-вариант

1. Агар $a \neq \pm b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ бўлса, айниқлиги исботланган:

$$\frac{a^2 + ab^3}{a^2 + ab} + \frac{3ab - 3ab^3}{a^2 - b^2} - \frac{a^2b - b^4}{ab - b^2} = ab.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$2 \cos \frac{3}{2} x + \sin 3x = 0.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$3^{2x} - 3^x - 6 = 0.$$

4. Массаи 13 г бўлган жисм $v(t) = \frac{t^3}{13} + 2t^2$, $0 \leq t \leq 6$ вақт оралиғида горизонтал туғри чизиқ бўйича қарши-

қарши ҳаракат қилмоқда, бу ерда v — см/сек билан,

t — вақт сек. билан ўлчанади. Ҳисмга $t = 2$ сек., $t = 6$ сек. вақтларда таъсир этувчи кучни топинг.

5. Пирамиданинг асоси ён томони a га, учидати бурчаги эса α га тенг бўлган тенг ёшли учбурчакдан иборат. Барча ён қирралар асос текислиги билан бир хил φ бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажминини топинг.

2-вариант

1. Агар $a \neq \pm b$, $b \neq 0$ бўлса, айниқтни исботланг:

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + b^2} + \frac{3a^2b - 3abd^2}{a^2b - b^3} - \frac{a^3b - b^4}{ab^2 - b^3} = a.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$2 \sin \frac{3}{2}x + \sin 3x = 0.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$2^{2^x} + 2^{x^2+1} - 80 = 0.$$

4. $S(t) = \frac{t^3}{30} + \frac{t^2}{2} + 1$, $0 \leq t \leq 10$ конун бўйича горизонтал тўғри чизик бўйлаб ҳаракат қилаётган 10 г массаи моддий нуқтага $t = 10$ сек. вақтда таъсир қилувчи кучни топинг. Бу ерда S — см билан, t — сек. билан ўлчанади.

5. Пирамиданинг асоси ўткир бурчаги α бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Пирамиданинг баландлиги H га тенг. Барча ён қирралар асос текислиги билан φ бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажминини топинг.

3-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{x - x^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{1}{x^{1,5} + 1}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$1 - \cos 4x = \sin 2x.$$

3. Ҳаракатланиш конуни $S(t) = \frac{1}{6}t^6 + t^3 - 3t + 8$

нүқтаи моддий нуқтанинг $t = 1$ моментдаги тезлиги ва тезланишини топинг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2.$$

5. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томонини a , ён қирраси асос текислиги билан φ бурчакли ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажминини топинг.

4-вариант

1. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{x^{3/2} + 1}{x + x^{1/2} + 1} : \frac{1}{x^{1,5} + 1}.$$

2. Тенгламани ечинг:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2}.$$

3. Ҳаракатланиш конуни $S(t) = t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + 7$ бўлган моддий нуқтанинг $t = 2$ моментдаги тезлиги ва тезланишини топинг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7.$$

5. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томонини a , апогефа баландлик билан φ бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажминини топинг.

1-вариантнинг ечилиши

$$1. \frac{a^3 + ab^3}{a^3 + ab} + \frac{3a^2b - 3abd^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^3b - b^4}{ab - b^2} = \frac{a(a^3 + b^3)}{a(a+b)} + \frac{3ab^2(a^2 - b^2)}{b(a^2 - b^2)} - \frac{ab(a^2 - b^2)}{b(a-b)} = a^2 - ab + b^2 + 3ab - (a^2 + ab + b^2) = ab.$$

$$2. 2 \cos \frac{3}{2}x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3}{2}x + 2 \sin \frac{3}{2}x \cos \frac{3}{2}x = 0$$

$$2 \cos \frac{3}{2}x \left(1 + \sin \frac{3}{2}x \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3}{2}x = 0, \\ 1 + \sin \frac{3}{2}x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{3}{2}x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n, \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n. \end{cases}$$

Жавоб: $\left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. $3^{2x} - 3^x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^x = t, \\ t > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - t - 6 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3^x, \\ t > 0, \\ t = -2, \\ t = 3. \end{cases} \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1.$$

Жавоб: $\{1\}$.

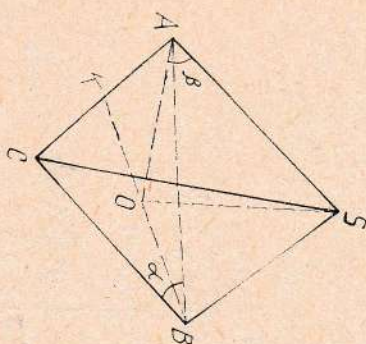
4. $F(t) = m \cdot a(t)$ ва $a(t) = v'(t) = \frac{3t^2}{13} + 4t$ ларга кўра:

$$F(2) = 13 \cdot a(2) = 13 \cdot \left(\frac{3 \cdot 2^2}{13} + 4 \cdot 2 \right) = 116 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2},$$

$$F(6) = 13 \cdot a(6) = 13 \cdot \left(\frac{3 \cdot 6^2}{13} + 4 \cdot 6 \right) = 420 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$

Жавоб: $F(2) = 116 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}; F(6) = 420 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$.

5. Берилган: $SABC$ пирамида (48-чизма).



$$|AB| = |BC| = a, \quad \angle ABC = \alpha, \quad \angle SAO = \beta.$$

Пирамидага SO багандлик ўтказамиз. O нукта $\triangle ABC$ нинг маркази, яъни медианларининг кесилиш нуктаси бўлади. $\triangle BKS$ — тўғри бурчакли. Шу учбурчакдан:

$$|KS| = a \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |AC| = 2a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

48-чизма.

Медианалар хоссасига кўра:

$$|OK| = \frac{1}{3}|BK|, \quad |BK| = a \cos \frac{\alpha}{2}, \quad |OK| = \frac{1}{3}a \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$|BO| = \frac{2}{3}a \cos \frac{\alpha}{2}. \quad \text{Булардан:}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC||BK| = \frac{1}{2}2a \cos \frac{\alpha}{2} \cdot a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha.$$

$\triangle SBO$ ҳам тўғри бурчакли, чунки SO багандлик.

Бу учбурчакдан: $|SO| = |BO| \operatorname{tg} \beta \Rightarrow |SO| = \frac{2}{3}a \cos \frac{\alpha}{2} \times$

$\times \operatorname{tg} \beta$. Булардан:

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot |SO| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha \cdot \frac{2}{3}a \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{9}a^3 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Жавоб: $\frac{1}{9}a^3 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$.

III Б О В

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1-§. Алгебра

Қуйидаги ифодаларни улар маънога эга бўладиган соҳасида соддаштиринг:

1. $\frac{\sqrt[3]{x} \sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{x^2} \sqrt{x}}}{1 + \sqrt[6]{x}}.$

2. $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{x+2-3\sqrt{x}} \cdot (x+1-2\sqrt{x}).$

3. $\frac{\sqrt{\sqrt{b}-2\sqrt{b}+1}}{(\sqrt{b}+i)(\sqrt{b}-1)}.$

4. $\left(\frac{a^{4/3} + a^{2/3}}{a + a^{1/3}} - x^{1/3} \right) \cdot [(a^{1/3} - x^{1/3})^2 + 3(a^{1/3} + x^{1/3})^2].$

5. $\left(\frac{3c^{1/6} - 2d^{1/6}}{c^{1/6} - d^{1/6}} - \frac{3}{c^{1/6} + d^{1/6}} \right) \cdot \frac{c^{2/3} + c^{1/3}d^{1/3} + d^{2/3}}{d^{5/6}}.$

6. $\frac{(x-y)^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} + \frac{x-y}{3(\sqrt{xy}-x)}.$
7. $\left(\frac{m+(m^2-n^2)^{1/2}}{m-(m^2-n^2)^{1/2}} - \frac{m-(m^2-n^2)^{1/2}}{m+(m^2-n^2)^{1/2}} \right) : \frac{4m(m^2-n^2)^{1/2}}{n^2}.$
8. $\sqrt{b^2-1} \cdot \left(\frac{b^2}{b^2-1} + 1 \right) - \frac{b(b^2-1)^{-\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{b^2-1}+b}.$
9. $\frac{\frac{3}{a^4}-2a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}} - (1+\sqrt{a}).$
10. $\frac{\frac{1}{m^{\frac{1}{4}}+2m^{-\frac{1}{4}}+m^{-\frac{3}{4}}}}{m^{-\frac{1}{4}}+m^{-\frac{3}{4}}} - \sqrt{m}.$
11. $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1} - \frac{3a^{\frac{1}{3}}-1}{a+1} \right) \cdot \frac{a+1}{a^{\frac{2}{3}}-1} + 2(a^{\frac{1}{3}}+1)^{-1}.$
12. $\left(p^{-\frac{1}{3}} + \frac{(3\sqrt{pq^2+q})(\sqrt{p^2q+p})^{-1}-1}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \right) \cdot \frac{q^2}{p^4}.$
13. $\left(\frac{4m^2n^2}{-(m-2n)^2} - \frac{(m+n)^2 \cdot m \cdot n}{4mn-m^2-4n^2} \right)^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{m-2n} \frac{\overline{mn}(n-m)}{m-2n}.$
14. $\frac{\frac{\sqrt{1-a}}{1+a} + \frac{1-a}{\sqrt{1+a}}}{\sqrt{1-a} - \frac{1}{\sqrt{1+a}}} - \frac{1}{a}.$
15. $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}} + \frac{1}{b+\sqrt{a}} \right) : \frac{0,25^{-\frac{1}{2}} a^{-2} b^{-1}}{a^{-2} - a^{-1} b^{-2}}.$
16. $\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a^2+2ab+b^2} \right) : \left(\frac{1}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2-a-b}{(a+b)^2} \right).$
17. $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1} \right) : \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}.$
18. $\left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2} \right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}.$
19. $\frac{2b+a-(4a^2-b^2) \cdot a^{-1}}{b^3+2ab^2-3a^2b} \cdot \frac{a^3b+2a^2b^2+ab^3-4a^2b^2}{a^2-b^2}.$

98. $\frac{0-x}{0+\sqrt{x}} : \left(2 + \frac{3\sqrt{x^2}}{2+\sqrt{x}} \right) + \left(\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) \times \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}.$
99. $\frac{x}{ax-2a^2} - \frac{2}{x^2+x-2ax-2a} \cdot \left(1 + \frac{3x+x^2}{3+x} \right).$
100. $\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right]^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$
101. $(a+b)^{1/3} : \sqrt{a} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$
102. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{a+b+\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}} + \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3}{a-b-\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}}.$
103. $\left(\frac{a}{a-\sqrt{ab}} - \frac{b}{\sqrt{ab}+b} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$
104. $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} - \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}+a-1} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right).$
105. $\frac{(1-a^{-2}b^2) \cdot a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}.$
106. $\frac{1}{2} [(1+\sqrt{p})^5 + (1-\sqrt{p})^5] - (p\sqrt{5}-1)^2.$
107. $\frac{2p}{(bc-a^2)+(ca-b^2)+(ab-c^2)}.$
108. $\frac{m^2}{(m-n)(m-p)} + \frac{n^2}{(n-m)(n-p)} + \frac{p^2}{(p-m)(p-n)}.$
109. $\left[\frac{3a}{(a^3-b^3) \cdot a+b} - \frac{3}{a^2+2ab+b^2} \right] : \frac{3}{a+b}.$
110. $\frac{a^{-6}-64}{4+2a^{-1}+a^{-2}} \cdot \frac{a^2}{4-4a^{-1}-a^{-2}} - \frac{4a^2(2a+1)}{1-2a}.$
111. $\left[1 - \frac{1-(a^2+b^2)}{2ab} \right] : \frac{1-(a+b)^{-1}}{1+(a+b)^{-1}} - \frac{(a-b+1)^2}{2ab}.$

$$34. \left(\frac{m\sqrt{m+2}}{\sqrt{m-2}} - \frac{2\sqrt{m-2}}{\sqrt{m+2}} - \frac{4m}{\sqrt{m-4}} \right)^{\frac{1}{2}} : \sqrt{m^2-4}.$$

$$35. \frac{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right)^2 - 1}}{\sqrt{a}}.$$

$$2\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right)^2 - 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right).$$

$$36. \frac{\left[1 - \left(\frac{m}{n} \right)^{-9} \right] \cdot m^2}{(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 + 2\sqrt{mn}}.$$

$$37. \frac{a-1}{a^{3/4} + a^{1/2}} \cdot \frac{a^{1/2} + a^{1/4}}{a^{1/2} + 1} \cdot a^{1/4} + 1.$$

$$38. a^{1/2} - \frac{a-a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} + \frac{1-a^{-2}}{a^{1/2} + a^{-1/2}} + \frac{2}{a^{3/2}}.$$

$$39. \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}} \right) \times \\ \times (\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}+2) \cdot \sqrt{0.2}.$$

$$40. \frac{(m^2-n^2)(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})}{\sqrt[3]{m^5} + \sqrt[3]{m^2n^3} - \sqrt[3]{m^3n^2} - \sqrt[3]{n^5}} - (\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}).$$

$$41. \left(\frac{3a^{-4/3}}{a^{-4/3} - 2a^{-1/3}} - \frac{a^{1/3}}{2a^{-4/3} - a^{1/3}} \right) \cdot \left(\frac{4}{1-2a} \right)^{-1}.$$

$$42. \frac{p+1}{p^{5/3} - p^{4/3} + p} - \sqrt[3]{(p^{1/3}+1)^{-1}} \cdot \frac{p^{-1}(p^{2/3}-1)}{(p^{1/3}+1)^{2/3}}.$$

$$43. \frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{bx} \right)^2}{\sqrt{bx} + 3}}{Vbx+3}.$$

$$44. \left[\frac{(V\bar{m}+1)^2 - \frac{m-V\bar{m}x}{V\bar{m}-V\bar{x}}}{(V\bar{m}+1)^3 - m\sqrt{\bar{m}+2}} \right]^{-4}.$$

$$45. \sqrt{a} \cdot \left[\frac{a + \sqrt[4]{a^3b^2} + b\sqrt[4]{ab^2} + b^2}{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2} - b \right]^{-1} - \frac{1}{\frac{-1}{a^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{b^{\frac{1}{4}}} - 1}.$$

Күрделүү теңгемаларни ечинг:

$$98. \frac{x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = 4 + \frac{x-7}{x-1}.$$

$$99. \frac{1}{x-1} + x = \frac{2x+1}{x-1}.$$

$$100. (x^3+7)(x^3+x^2+4)=0.$$

$$101. (x^3-3x+2)(x^2+7x+10)=0 \quad \text{нинг бирдан катта} \\ \text{чечимин таппиг.}$$

$$102. (3x^3+7)(6x^3+7x^2-1)=0 \quad \text{нинг бүтүн} \\ \text{чечимин таппиг.}$$

$$103. (x^3-7x)^2 - 2(x^2-7x) - 48 = 0.$$

$$104. \frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0.$$

$$105. \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 = \frac{17}{4}.$$

$$106. x^4 + \sqrt{x^2+20} = 22.$$

$$107. \sqrt{\frac{x+1}{x-4}} + \sqrt{\frac{x-4}{x+1}} = \frac{10}{3}.$$

$$108. \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1.$$

$$109. \sqrt{x^3-3x+16} - \frac{x}{3} = 4-x.$$

$$110. \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{3}{\sqrt{x+3}} = 2.$$

$$111. \frac{a}{1+x+2} = \sqrt{x-2}.$$

$$112. x^4 = \sqrt{4x^2-4x+1} + 3.$$

$$113. x^4 + 3x - 10 + 3\sqrt{x(x+3)} = 0.$$

$$114. \sqrt{10+y} = \sqrt{20} - \sqrt{10-y}.$$

$$115. \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}.$$

$$116. 2\sqrt[3]{x+5} \sqrt[6]{x-18} = 0.$$

$$117. \frac{1}{x - \sqrt{x^2-x}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2-x}} = \sqrt{3}.$$

$$66. \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x+1}} = 4.$$

$$67. \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+2} = 3.$$

$$68. \sqrt[3]{\frac{x+13}{x-13}} - \sqrt[3]{\frac{x-13}{x+13}} = \frac{10}{3}.$$

Қуйыдағы теңгаламалар системасыни ечинг:

$$69. \begin{cases} x+y=5, \\ x \cdot y=6. \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} x-y=5, \\ x \cdot y=-4. \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x+y=4. \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} x^2-4y^2=200, \\ x+2y=100. \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} \frac{10}{2x+3y} + \frac{15}{4x-y} = 8, \\ \frac{2x+3y}{15} - \frac{9}{4x-y} = 0. \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} x+4y+2\sqrt{xy}=12, \\ x+4y-2\sqrt{xy}=4. \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4. \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=336, \\ y^2+x\sqrt{xy}=112. \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=80, \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=5. \end{cases}$$

170

$$79. \begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2-z^2=20, \\ x^3+y^3-z^3=560. \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} x^2y=x+y+z, \\ x^2z=2(x-y+z), \\ y^2z=3(y-x+z). \end{cases}$$

Қуйыдағы теңгизликларни ечинг:

$$81. \frac{x-1}{3} + \frac{x-5}{3} > \frac{7x-1}{12} - \frac{5x+4}{6}.$$

$$82. x-2\left(1-\frac{1}{a}\right) < \frac{2(x+1)}{3a}.$$

А нинг теңгизликларни қаноглантйрувчи бутун
сандларни топинг:

$$83. \begin{cases} 3x-6 \leq 26, \\ 3x+4 \geq 14. \end{cases}$$

$$84. (x+2)(x+1)(x-2)(x-3) > 0.$$

$$85. 6x^2+x-2 < 0.$$

$$86. \sqrt{x^3-4x+4} + \sqrt{x^2-10x+25} > 5$$

$$87. \sqrt{9x^2-6x+1} - \sqrt{4-4x+x^2} < 7.$$

$$88. \frac{x+1}{x-2} > \frac{x+4}{2x-5}.$$

$$89. \sqrt{x^2-3x-10} > x-2.$$

$$90. \sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x.$$

$$91. \sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1.$$

$$92. \frac{x}{y} + \frac{1-x}{6} > \frac{x+1}{8}.$$

$$93. \frac{x-2}{3x+12} > 0.$$

$$94. 1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 2.$$

$$95. 6x^2-29x+30 < 0.$$

$$96. (x-5) \log_2(8+x) < 0.$$

А нинг мисолларни ечин шарт эмас, чунки бундай мисол-
лар келгусида вариантларда иштирок этмайди.

$$\log_1 (9+x)$$

$$97. \frac{10+10x}{2} > 0.$$

$$98. \frac{4x-16}{\log_4 (x+5)} > 0.$$

$$99. (x-2) \log_2 (6-x) < 0.$$

$$100. \frac{x+4}{\log_5 (8+x)} > 0.$$

$$101. 25 > 5^{\log_5 (4-3x)}.$$

$$102. \log_{81} (1,6-4x) < 0,5.$$

$$103. \log_{0,1}^2 x + 3 \log_{0,1} x > 4.$$

Куйдиги кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

$$104. 4 + \frac{2}{3x-1} = \frac{5}{3x-1}.$$

$$105. \frac{x+1}{6x-1} - \frac{x-1}{x+1} - 3\frac{1}{3} = 1.$$

$$106. 3^x \cdot 2^{x-1} - 3^{x-1} \cdot 2^x = 36.$$

$$107. 4^{x+1,5} + 7 \cdot 2^{x+1} = 4.$$

$$108. 3^{2x-3} - 9^{x-1} + 3^{2x} = 6,5.$$

$$109. 9^{3+x} + 3^{3(x+1)} = \frac{82}{9}.$$

$$110. 5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3.$$

$$111. 5^{x^2+x} \cdot 2^{x^2+x} = 4 \cdot 100x.$$

$$112. 6^{2x+4} = 3^x \cdot 2^{x+8}.$$

$$113. \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{x} + 1} = 1,5.$$

$$114. 16^{2x-1} = \frac{1}{0,25^{3x+22}}.$$

$$115. 3^{\sqrt[3]{x}} + 3^{\sqrt[3]{x-1}} - 3^{\sqrt[3]{x-2}} = 11.$$

$$116. 9^x - 2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{x+7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

172

$$117. 3^{x^2} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0.$$

$$118. \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{4}.$$

$$119. 9 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x = 6\frac{1}{7} \cdot 14^{\frac{x}{2}}.$$

$$120. 4^{x+1} - 2^{3x-2} = 30.$$

Куйдиги логарифм тенгламаларни логарифм таърифидан ва $\log_a^2 x = N$ тенгликдан фойдаланиб ҳисобланг:

$$121. \log_4 10^{24}.$$

$$122. \log_2 \sqrt[10]{27}.$$

$$123. \log_2 \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$124. \log_2 \sqrt[4]{a} \left(\sqrt[4]{\frac{a}{2}} \right).$$

$$125. \log_{10} 63.$$

$$126. 9^x - \log_3 4.$$

$$127. \log_{10} 0,1 + \log_{10} 2.$$

$$128. 10^{-16}.$$

$$129. 27^{-1} + \log_3 4.$$

$$130. 5 \cdot 10^9 - \log_{10} 25.$$

Куйдиги логарифмик тенгламаларни ечинг.

$$131. \log_2 (x+12) \cdot \log_x 2 = 1.$$

$$132. 2 \cdot \log_{\log_2 x} 2 = 1.$$

$$133. 3^{\log_3 (-5x)} = \log_6 216.$$

$$134. x^{\log_3 x(x-1)} = 5.$$

$$135. 10^{\frac{1}{10^5}} = 0,001.$$

$$136. \log_2 (0,4 \cdot \sqrt[24]{2^{x^2-40x}}) = 0.$$

$$137. \frac{1}{2} \log_2 (2x-1) + \log \sqrt{x-9} = 1.$$

$$138. \log_2 x + \log_2 (x^2-1) = 1.$$

173

$$139. \frac{1}{2} (\lg x + \lg 2) + \lg (\sqrt{2x} + 1) = \lg 6.$$

$$140. 2 \log_3 3 + 4 \log_3 7 = \log_3 x.$$

$$141. \log_2 \log_x \log_x x^2 = 0.$$

$$142. \frac{1}{\lg(x-3) - \lg 5} = \frac{1}{2}.$$

$$143. \log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6.$$

$$144. (10^{\lg x})^{\lg x} + x^{\lg x} = 20.$$

$$145. \log_2(4^{x-2} + 1) = \log_2 17 + x - 4.$$

$$146. \log_3 \left(3^{x^2-13x+34} + \frac{2}{9} \right) = -1.$$

$$147. \log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3).$$

$$148. x \lg 2 + \lg(2+2^x) = 1 + \lg 8.$$

$$149. \log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1).$$

$$150. (\sqrt{13})^{\lg x} = 13^{\lg x} \cdot 169^{\lg(x-1)}.$$

$$151. \sqrt{\log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3 x} = -1.$$

$$152. \sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10.$$

$$153. \log_{\pi} \log_2 \log_7 x = 0.$$

$$154. \sqrt{1 + \log_x \sqrt{27} \cdot \log_3 x + 1} = 0.$$

$$155. \log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2.$$

$$156. \log_2[3 \log_3(\log_2 x)] = 0.$$

$$157. \log_4(x+1) + \log_{x+1} 4 = 2,5.$$

$$158. \lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0.$$

$$159. 3\sqrt{\lg x} + 2\lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2.$$

$$160. x^{1-\lg x} = 0,01.$$

$$161. x^{\lg x-3} = 10^{\frac{10}{x}-1}.$$

$$162. x^{\lg 3x+5 \lg x} = 10^{12 \lg x}.$$

$$163. \log_3 x + \log_{\sqrt[3]{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6.$$

$$164. \begin{cases} \frac{x-z}{y+1} = \frac{1}{4}, \\ xv - 4y = x. \end{cases}$$

$$165. \begin{cases} \frac{y-3}{x+2} = \frac{1}{3}, \\ xy + 3x + 4y = 0. \end{cases}$$

$$166. \begin{cases} 2^{\log_4(3x-4)} = 8, \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x+y) = 0,5. \end{cases}$$

$$167. \begin{cases} 3^{\log_3(x-y)} = 1, \\ \log_3(2x-1) + \log_3 y = 1. \end{cases}$$

$$168. \begin{cases} 3^{\log_3(3y-2y)} = 27, \\ \log_2(2x-2y) - \log_2(5-y^2) = 1. \end{cases}$$

$$169. \begin{cases} x^y = 8, \\ \log_3 y + 2 \log_3 \log_2 x = 2. \end{cases}$$

$$170. \begin{cases} x + y \log_2 3 = 1 + 2 \log_2 3, \\ 2^x + 3^y = 11. \end{cases}$$

$$171. \begin{cases} x^2 - 2^{y+1} = 1, \\ 2x^2 + 2^{y-1} = 20. \end{cases}$$

$$172. \begin{cases} 7^x \cdot 2^y = 784, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

$$173. \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 276, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$$

$$174. \begin{cases} 2^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$$

$$175. \begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$$

$$176. \begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 243, \\ 3^x + 3^y = 36. \end{cases}$$

$$177. \begin{cases} 3^x - 5 \cdot 2^y = 17, \\ 3 \cdot 2^y + 3^x = 33. \end{cases}$$

$$178. \begin{cases} 64^x + 64^y = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$179. \begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y} = 3. \end{cases}$$

$$180. \begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 1,6, \\ 5x + 2y = 100. \end{cases}$$

$$181. \begin{cases} 10_3 x - \log_3 y = 3, \\ 10_2 x + \log_3 y = 5. \end{cases}$$

$$182. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

$$183. \begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

$$184. \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

$$185. \begin{cases} 3^y \cdot 3^{2x} = 3^4, \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = \lg 9. \end{cases}$$

$$186. \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1,5} = 0,25, \\ \sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{0,2} = 1. \end{cases}$$

Берилган система a параметрининг қандай қиймати-да ягона ечимга эга бўлади?

$$187. a) \begin{cases} -2x + y = -1, \\ 3x + ay = 2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} ax - 2y = -2, \\ x + 5y = 1. \end{cases}$$

$$188. a) \begin{cases} 2x - ay = -1, \\ 3x + 4y = -2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x - 4y = -3, \\ 2ax + 3y = 1. \end{cases}$$

Арифметик ва геометрик прогрессия-ларга доир масалалар

189. Арифметик прогрессиянинг бешинчи ҳади билан иккинчи ҳади айирмаси 12 га, биринчи ҳади 15 га тенг бўлса, арифметик прогрессиянинг нечта ҳадининг йиғиндиси 30 га тенг бўлади.

190. Бешинчи ҳади 5 га, иккинчи ҳади билан еттинчи ҳадининг йиғиндиси ҳам 5 га тенг бўлган арифметик прогрессия тўққизта ҳадининг йиғиндиси топинг.

191. Арифметик прогрессиянинг тўртинчи ҳади 9 га, тўққизинчи ҳади 6 га тенг. Бу прогрессия ҳадларининг

йиғиндиси 54 бўлиши учун унинг нечта ҳадини олиш керак?

192. Арифметик прогрессиянинг олтинчи ҳади учинчи ҳадининг 60% ини ташкил қилади, уларнинг кўпайтмаси эса 15 га тенг. Бу прогрессия ҳадларининг йиғиндиси $30\frac{1}{3}$ бўлиши учун, унинг нечта ҳадини олиш керак?

193. Геометрик прогрессиянинг маҳражи 0,5 га, дастлабки олтига ҳадининг йиғиндиси $\frac{63}{2}$ га тенг. Прогрессиянинг бешинчи ҳадини топинг.

194. Ҳамма ҳадлари мусбат сонлар бўлган геометрик прогрессиянинг олдинги учта ҳадининг йиғиндиси 168 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳади учинчи ҳадидан 24 та кам. Шу прогрессиянинг бешта ҳади йиғиндиси топинг.

195. Геометрик прогрессия еттига ҳалга эга бўлиб, олдинги учта ҳадининг йиғиндиси 26 га, охириги учта ҳадининг йиғиндиси эса 2106 га тенг бўлса, шу прогрессияни топинг.

196. Чекиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳадларининг йиғиндиси 6 га, олдинги тўртта ҳадининг йиғиндиси $5\frac{5}{8}$ га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

197. Геометрик прогрессия олдинги учта ҳадининг йиғиндиси 28 га, ундан кейинги учта ҳадининг йиғиндиси эса $3\frac{1}{2}$ га тенг. Шу прогрессиянинг саккизинчи ҳадини топинг.

198. Чекиз камаювчи геометрик прогрессия тоқ ҳадларининг йиғиндиси 36 га, жуфт ҳадларининг йиғиндиси эса 12 га тенг. Шу прогрессияни топинг.

199. Йиғиндиси 75 га тенг бўлган учта сон арифметик прогрессия ташкил қилади. Агар иккинчи сон 5 га камайтирилса, у ҳолда ҳосил бўлган учта сон геометрик прогрессия ташкил қилади. Шу сонларни топинг.

200. Шундай тўртта бутун сон топингки, биринчи ва тўртинчи соннинг йиғиндиси 66 га, иккинчи билан учинчи соннинг йиғиндиси эса 60 га тенг бўлсин ва уларнинг биринчи учтаси арифметик прогрессия, охириги учтаси эса геометрик прогрессия ташкил қилсин.

201. Геометрик прогрессия ташкил этувчи тўртта соннинг йиғиндиси 350 га тенгliğini; охириги сон эса иккинчи сондан 9 марта катта эканлигини билган ҳолда, шу тўртта сонни топинг.

202. Арифметик прогрессия ташкил қилувчи ўрта соннинг йиғиндиси 15 га тенг. Агар шу сонларга мос равишда 1,4 ва 19 сонларини қўшилса, ҳосил бўлган сонлар геометрик прогрессия ташкил қилади. Шу сонларни топинг.

203. Ўрта сон геометрик прогрессия ташкил қилади. Агар уларнинг учинчи ҳадини 64 га камайтирилса, ҳосил бўлган сонлар арифметик прогрессия ташкил қилади. Сўнгра, бу ҳосил қилинган арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳадини 8 га камайтирилса, ҳосил бўлган сонлар геометрик прогрессия ташкил қилади. Шу сонларни аниқланг.

204. Шундай тўртта мусбат сон топингки, уларнинг олдинги ўтасининг йиғиндиси 12 га тенг бўлиб арифметик прогрессия ташкил қилсин, кейинги ўтасининг йиғиндиси 19 га тенг бўлиб геометрик прогрессия ташкил қилсин.

205. Агар геометрик прогрессиянинг учинчи ҳадини 4 ни айирсак, у ҳолда олдинги ўрта ҳад махражидан 2 га тенг бўлган арифметик прогрессия ташкил қилади. Геометрик прогрессияни топинг.

206. Арифметик прогрессия ташкил қилувчи ўрта соннинг йиғиндиси 45 га тенг, агар шу сонлардан мос равишда 2,9 ва 8 сонларни айирсак, ўсувчи геометрик прогрессия ташкил қилувчи ўрта сон ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган геометрик прогрессиянинг 9 та ҳади йиғиндисини топинг.

207. Олдинги ўрта тоқ ҳадининг йиғиндиси 42 га, олдинги ўрта жуфт ҳадининг йиғиндиси 84 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг бешинчи ҳадини топинг.

208. Ўсувчи геометрик прогрессия ташкил қилувчи ўрта соннинг йиғиндиси 65 га тенг. Кичик сондан 1, каттасидан 19 айирилса, ҳосил бўлган сонлар арифметик прогрессия ташкил қилади. Шу сонларни топинг. Қуйидаги масалаларни тенглама тузиб ечинг:

209. Битта детални тайёрлаш учун биринчи ишчи иккинчи ишчига қараганда 7 минут кам сарфлайди. Агар 4 соат ичида биринчи ишчи иккинчи ишчига қараганда 28 та деталь оптик тайёрлайдиган бўлса, ҳар бир ишчи 4 соатда нечадан деталь тайёрлайди?

210. Ёғоч тайёрловчилар бригадаси бир неча кунда пилн бўйича 216 м^3 ёғоч тайёрлаши керак эди. Дастлабки уч кунда план бўйича ишланди, сўнгра ҳар кун иккилик пландан 8 м^3 ёғоч оптик тайёрланди, натижадан муддатидан бир кун олдин 232 м^3 ёғоч тайёрланиб, план ошириб бажарилди. Бригада план бўйича бир кунда неча кубометр ёғоч тайёрлаши керак эди?

211. Ишчи иккита катта ва бешта кичик деталь тайёрлагани учун 9 сўм ҳақ олди. Агар битта катта детальга тўланадиган ҳақ битта кичик деталга тўланадиган ҳақдан 30 тийин кўп бўлса, деталларнинг ҳар бирига қанчадан ҳақ тўланган?

212. Автомашина юкни 30 км масофадаги жойга олиб бориши керак эди. Аммо автомашина тайинланган вақтдан уч минут кеч йўлга чиқди ва манзилга ўз вақтида бориши учун тезлигини соатга 1 км оширди. Автомашина йўлга кечикиб чиқмаганда қандай тезлик билан юрар эди?

213. Оралари 5 километр бўлган икки пунктдан иккита автомобиль текис ҳаракат қилиб бир-бирига қараб келаётир. Биринчи автомобиль иккинчи автомобилдан a соат кейин йўлга чиққан, улар йўлнинг ўртасида учрашдилар. Агар биринчи автомобиль иккинчи автомобилга қараганда соатига b километр оптик юргани маълум бўлса, ҳар қайси автомобиль соатига неча километр йўл босади?

214. Самолёт 1125 км учгандан кейин қўнишга мажбур бўлди ва аэродромда 30 минут турди. Самолётнинг график бўйича училини таъминлаш учун унинг тезлиги $187,5 \text{ км/соатга}$ оширилди. Агар охириги аэродромлар орасидаги масофа 3000 км бўлса, самолётнинг дастлабки тезлиги қандай эди?

215. Биринчи қотишма учун A ва B металллар 2:3 нисбатда иккинчи қотишма учун A ва B металллар 4:3 нисбатда олинган. A ва B металллар тенг миқдорда қатнашган учунчи қотишмани ҳосил қилиш учун биринчи қотишманинг ҳар бир килограммида иккинчи қотишмадан неча килограмм қўшиш керак?

216. Массаси 12 кг бўлган мис билан қалай қотишмасида 45% мис бор. Қотишмадаги мис 40% ни ташкил этиши учун унга қанча қалай қўшиш керак?

217. Математикадан кириш имтиҳонинда абитуриентларнинг 25% и вариантдаги битта ҳам масалани ечмаган, 144 абитуриент ечишда хатога йўл қўйган, ҳамма

масалаларни ечганлар сонининг битта ҳам масалани ечмагандлар сонига нисбати 3:5 каби. Математикадан қанча абитуриент ижобий баҳо олган?

218. Квадрат шаклидаги ернинг юзи тўғри тўртбurchак шаклидаги иккинчи ернинг юзидан 550 м² катта. Тўғри тўртбurchак шаклидаги ернинг узунлиги, квадрат шаклидаги ер томонига қараганда 10 м узун, эни эса квадрат ер томонидан 15 м қисқа. Квадрат шаклидаги ернинг юзини топинг.

219. Тўғри тўртбurchакнинг периметри 30 см, унинг икки кўшни томонларида чизилган квадратлар юзларининг йиғиндиси 137 см². Тўғри тўртбurchакнинг томонларини топинг.

220. Иккита соннинг айирмаси 48 га, бу сонлар ўрта арифметик ва ўрта геометрик қийматларининг айирмаси эса 18 га тенг. Шу сонларни топинг.

221. Шундай бутун мусбат иккита сон топингки, бу сонлар квадратларининг айирмаси 133 га тенг бўлсин.

222. Агар икки хонали сонни ўнинг рақамлари йиғиндисига бўлсак, бўлинмада 6 ва қолдиқда 2 чиқади. Агар шу сонни ўнинг рақамлари кўпайтмасига бўлсак, бўлинмада 5 ва қолдиқда 2 чиқади. Шу сонни топинг.

2-§. Тригонометрия

Қуйидаги тригонометрик ифодаларни соддалаштиринг:

$$223. 2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos x.$$

$$224. \sin^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \cos x.$$

$$225. \frac{1 + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$226. \frac{1 + \cos(180^\circ - 2x)}{2 \sin^2 x}.$$

$$227. \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\cos(360^\circ - 2x)} - \sin^2 x.$$

$$228. \frac{\operatorname{tg}^2 x \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos 2x}.$$

$$229. \frac{2\cos^2 \alpha - 1}{1 - \sin 2\alpha} : \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

$$230. \sin 3x \cos 3x (\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x).$$

$$231. \frac{\cos \alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin \alpha}.$$

$$232. \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}.$$

$$233. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta.$$

$$234. \text{Агар } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \text{ бўлиб, } \sin \alpha = -\frac{3}{5} \text{ бўлса, } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

ни ҳисобланг.

$$235. \text{Агар } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ бўлиб, } \cos x = \frac{4}{5} \text{ бўлса, } \sin^2 x$$

ни ҳисобланг.

$$236. \text{Агар } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \text{ бўлса, } \cos^2 \alpha \text{ ни ҳисобланг.}$$

$$237. \text{Агар } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ бўлиб, } \operatorname{tg} \alpha = -1 \frac{1}{3} \text{ бўлса, } \sin \frac{\alpha}{2}$$

ни ҳисобланг.

$$238. \text{Агар } \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ ва } \operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{5} \text{ бўлса, } \sin 2\alpha + \operatorname{tg} \beta$$

ни ҳисобланг.

$$239. \text{Агар } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ бўлса, } \cos \alpha \text{ ни ҳисоб-}$$

ланг.

$$240. \text{Агар } \cos \alpha = \frac{3}{4} \text{ бўлса, } 2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{5\alpha}{2} \text{ ни ҳи-}$$

собланг.

$$241. \text{Агар } \sin \alpha = -0,28 \text{ бўлса, } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ ни ҳисобланг.}$$

$$242. \text{Агар } \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right), \sin \alpha = -\frac{12}{13} \text{ бўлса, } \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)$$

ни ҳисобланг.

$$243. \text{Агар } \alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right), \sin \alpha = -\frac{5}{6} \text{ бўлса, } \cos(\alpha -$$

-45°) ни ҳисобланг.

$$244. \text{Агар } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ва } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ бўлса, } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

ни ҳисобланг.

$$245. \text{Агар } \operatorname{tg} y = 4 \text{ бўлса, } \frac{\sin(x+y) - \sin x \cos y}{\cos(x-y) - \sin x \sin y} \text{ ни}$$

ҳисобланг.

$$246. \text{Агар } \sin 4x = \frac{1}{2} \text{ бўлса, } \frac{2\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} (1 - \operatorname{tg}^2 x) \text{ ни ҳи-}$$

собланг.

247. Агар $\operatorname{tg} x = 4$ бўлса, $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{1 + \cos x}$ ни ҳисобланг.

248. Агар $\operatorname{ctg} 2x = 2$ бўлса, $\frac{4 \sin^2 x \cos^2 x - 4(1 - \sin^2 2x)}{4 \sin^2 2x \cos^2 2x - 4 \sin^2 2x}$ ни ҳисобланг.

249. Агар $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ бўлса, $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$ ни ҳисобланг.

250. Агар $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$ бўлса, $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha$ ни ҳисобланг.

251. Агар $x = \frac{2}{3} \pi$ бўлса, $\frac{1 + \cos 2x - \sin 2x}{\cos(0,5\pi + x) + \cos x}$ ифоданинг қийматини топинг.

252. Агар $x = \pi$ бўлса, $\frac{1 + \sin(1,5\pi + 2x) - \sin 2x}{\sin x - \cos x}$ ифоданинг қийматини топинг.

253. Агар $x = \frac{1}{6} \pi$ бўлса, $\frac{1 + \sin(1,5\pi + 2x)}{\cos x + \cos(\pi + 3x)}$ ифоданинг қийматини топинг.

254. Агар $x = 0$ бўлса, $\frac{1 + \sin(0,5\pi + 2x)}{\cos^2 x (\cos x - \cos(\pi - 3x))}$ ифоданинг қийматини топинг.

255. Агар $x = \frac{1}{6} \pi$ бўлса, $\frac{\sin(\pi - x) + \cos(0,5\pi + x) \cos x}{\sin 0,5x}$ ифоданинг қийматини топинг.

256. Агар $x = -\frac{\pi}{3}$ бўлса, $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{\sin(0,5\pi + x) + \sin x}$ ифоданинг қийматини топинг.

257. Агар $x = 150^\circ$ бўлса, $\frac{1 + \sin(270^\circ + 2x)}{\cos x - \cos 3x}$ ифоданинг қийматини топинг.

258. Агар $x = 60^\circ$ бўлса, $\frac{1 + \cos 4x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg}(\pi + x)}$ ифоданинг қийматини топинг.

259. Агар $x = 60^\circ$ бўлса, $\frac{2 \operatorname{tg}(1,5\pi - x)}{\operatorname{ctg}^2 x - 1}$ ифоданинг қийматини топинг.

260. Агар $x = 240^\circ$ бўлса, $\frac{\sin 3x + \sin 5x}{2 \sin 2x}$ ифоданинг қийматини топинг.

Қуйидаги ифодаларни логарифмлаш учун қулай қў-
риништа келтиринг:

261. $1 - \sin \alpha + \cos \alpha$.

262. $2 + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha$.

263. $\cos \alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$.

264. $1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

265. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, бу ерда $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

266. $2 \sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha - 1$.

267. $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}$.

268. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 40^\circ$.

269. $\frac{\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}$.

270. $1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$.

271. $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta$.

272. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2(\alpha + \beta)$.

273. $1 - \operatorname{tg}^2 \beta$.

274. Қуйидаги айтилганни исботланг:

$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = \sin^2 \alpha$

$\operatorname{ctg}^2 \alpha$

275. $\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2(60^\circ + \alpha) = 1,5$.

276. $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

277. $\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

278. $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}$.

279. $1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha}$.

280. Агар $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1$.

281. $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta}$.

282. $\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{\cos 2\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

$$283. \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$284. \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \sin 2\alpha.$$

$$285. \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

$$286. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$$

$$287. \frac{\cos 2x + 5 \cos 3x + \cos 4x}{\sin 2x + 5 \sin 3x + \sin 4x} = \operatorname{ctg} 3x.$$

$$288. \cos^2 \varphi \sin 3\varphi = \frac{1}{4} (\sin 5\varphi + 2 \sin 3\varphi + \sin \varphi).$$

$$289. \frac{1 - \sin \alpha \cos \alpha}{(\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)} = \sec 2\alpha.$$

$$290. \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha.$$

$$291. \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha = \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha\right).$$

$$292. \sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$293. 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha = \sin 4\alpha.$$

$$294. \frac{\cos^2 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha.$$

$$295. \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$296. \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$$

$$297. \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\cos \alpha}.$$

$$298. \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 1 + \cos \alpha.$$

$$299. \sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$300. \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}.$$

$$301. \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$302. 1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha.$$

$$303. \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\alpha.$$

$$304. \frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

$$305. \sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$306. \cos^3 \alpha \cdot \sin^3 \alpha = \frac{3}{32} \sin 2\alpha - \frac{1}{32} \sin \alpha.$$

$$307. \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha.$$

$$308. (\cos \alpha - \cos^2)^2 + (\sin \alpha - \sin^2)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Құйдалағы тригонометрик теңграмалары ечінг:

$$309. \sin(x - 60^\circ) = \cos(x + 30^\circ) \text{ теңграманын } 0^\circ < x < 90^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$310. \cos 2x - 3 \sin x - 2 = 0 \text{ теңграманын } -90^\circ < x < 0^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$311. \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \text{ теңграманын } 0^\circ < x < 90^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$312. \sin(45^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1 \text{ теңграманын } 10^\circ < x < 60^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$313. \cos 2x + \cos x + 1 = 0 \text{ теңграманын } 30^\circ < x < 100^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$314. \cos 2x = 2 \sin^2 x \text{ теңграманын } 0^\circ < x < 60^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$315. 1 - \cos 2x = \sqrt{3} \sin x \text{ теңграманын } 30^\circ < x < 90^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$316. \sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} \text{ теңграманын } 0^\circ < x < 90^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$317. 1 - \sin 3x = \left(\cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{3x}{2}\right)^2 \text{ теңграманын } 0^\circ < x < 90^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$318. 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0 \text{ теңграманын } 10^\circ < x < 60^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$319. \cos^4 \frac{x}{3} - \sin^4 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \text{ теңграманын } 30^\circ < x < 90^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

$$320. \cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \cos 2x \text{ теңграманын } 0^\circ < x < 90^\circ \text{ интервалга тегишли ечимини топинг.}$$

321. $2\lg x + 3\operatorname{ctg} x = 5$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

322. $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \lg \frac{x}{2} = 2$ тенгламанинг $0 < x < 90^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

323. $\sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ) = \frac{1}{4} - \sin^2 x$ тенгламанинг $0 < x < 90^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

324. $\sin^2 \frac{x}{2} - 2\cos \frac{x}{2} + 2 = 0$ тенгламанинг $700^\circ < x < 800^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

325. $\frac{7\cos x - 3}{2\cos^2(\pi + x)} = 1$ тенгламанинг $30^\circ < x < 90^\circ$ интервалга тегишли ечимини топинг.

Тенгламаларни ечинг:

$$326. 2\sin^2 x - 3\cos x = 0.$$

$$327. \sin 3x = \cos 2x.$$

$$328. 3\sin x = 2\cos x.$$

$$329. \sin 2x = \cos 2x.$$

$$330. \sin 6x = \sin 4x.$$

$$331. \sin^3 x - 3\sin x = 0.$$

$$332. \sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

$$333. \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}.$$

$$334. \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

$$335. 2\sin x + 5\cos x = 4.$$

$$336. \sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x \cos x.$$

$$337. \cos 5x - \cos x = \sin 3x.$$

$$338. 3\sin 2x - 2\cos x = 0$$

$$339. \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0.$$

$$340. \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} = 1 - \sin x.$$

$$341. \cos x - \cos 2x - \sin 3x = 0.$$

$$342. \lg x = \lg 2x.$$

$$343. \lg x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$344. \lg\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \lg x.$$

$$345. \cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x.$$

$$346. \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x).$$

$$347. \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}.$$

$$348. \sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}.$$

$$349. \sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

$$350. \sin 3x = \cos x - \sin x.$$

$$351. 3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2.$$

$$352. \sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\sin 2x = 1.$$

$$353. 8\sin x \cos x + 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 14 = 0.$$

$$354. (\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1.$$

$$355. \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

$$356. 3\sin^2 2x - 0,5\sin 4x = 4\cos^2 2x.$$

$$357. 1 - 2\sin^2 8x = \sin 4x.$$

$$358. \frac{3\operatorname{ctg} x - 3\cos x}{\operatorname{ctg} x + \cos x} = 2(1 - \sin x).$$

$$359. 5\sin x - \sin^5 x = 0.$$

$$360. \sin 3x = \cos x - \sin x.$$

$$361. \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1.$$

$$362. \sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

$$363. (0,5)^{\cos 2x} - 0,5 = \frac{1}{4\sin^2 x}.$$

$$364. 3\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = \frac{9}{2}.$$

$$365. \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = (\sin x + \cos x)^2.$$

$$366. \sin x - \sin 2x = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$367. \sin 3x = 4\sin x \cos 2x.$$

$$368. \sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

$$369. \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}.$$

$$370. 2\log_a \cos x = \log_a \cos \frac{3x}{2} + \log_a \cos \frac{x}{2}.$$

$$371. (\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1.$$

$$372. (\sin x)^{-\sin x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x.$$

$$373. (\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x} = \operatorname{ctg} x^{\sin x}.$$

$$374. 16^{\sin x} = \sqrt[4]{\sin x}.$$

$$375. \log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$

$$376. \cos^2 3x - \operatorname{tg}^2 3x - \sin^2 3x + 1 = 0.$$

Қуйидаги тенгламалар еңтемасини ечинг:

$$377. \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$378. \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}, \\ x + y = 75^\circ. \end{cases}$$

$$379. \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$380. \begin{cases} 2^{\sin x} + \cos y = 1, \\ 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4. \end{cases}$$

$$381. \begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Қуйидаги тригонометрик тенгсизликларни ечинг:

$$382. \cos x \cos 2x > \sin x \sin 2x.$$

$$383. \sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$384. \sin x > \frac{1}{2}.$$

$$385. \cos x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$386. \sin x + \sqrt{3} \cos x < 0.$$

$$387. \sin(3x + 2) < \frac{1}{2}.$$

$$388. \lg \sin x \leq 0.$$

$$389. \cos(\sin x) > 0.$$

$$390. \sin(\cos x) < 0.$$

$$391. \sin x + \cos x < \sqrt{2}.$$

$$392. 3\cos x > 2\sin^2 x$$

$$393. \operatorname{tg}(3x - 2) < -\sqrt{3}.$$

3-§. Олий математика элементлари

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

$$395. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 11x + 2}.$$

$$396. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

$$397. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x^2 - 1}.$$

$$398. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$399. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$400. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг:

$$401. \text{ а) } y = 3x^4; \text{ б) } y = 2 \cdot x^{-5}; \text{ в) } y = 4x^{1/3}; \text{ г) } y = 5\sqrt[5]{x^3}.$$

$$402. \text{ а) } y = \frac{1}{2} x^{-\frac{2}{3}}; \text{ б) } y = 3x^2 \sqrt{x}; \text{ в) } y = \frac{2x^x}{3\sqrt{x}};$$

$$\text{ г) } y = 2\sqrt[3]{2x^3}.$$

$$403. \text{ а) } y = -\frac{1}{x^{21}}; \text{ б) } y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}}; \text{ в) } y = x^3 \sqrt{x}; \text{ г) } y = \frac{x^4}{\sqrt{x}}.$$

$$404. y = 4x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 3x.$$

$$405. y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

406. Агар $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ва $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ бўлса, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$; $f'(3)$;

$\varphi'(1)$; $\varphi'(8)$ ларни топинг.

407. а) агар $f(x) = \log_{0.6}(2+x)$ бўлса, $f'(1)$ нинг;

б) агар $\varphi(x) = \log_3(5+x)$ бўлса, $\varphi'(4)$ нинг ишорасини аниқланг.

408. а) агар $f(x) = \sin(1,5\pi + x)$ бўлса, $f'\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ нинг;

б) агар $\varphi(x) = \cos(\pi + x)$ бўлса, $\varphi'\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ нинг ишорасини аниқланг.

409. а) $f(x) = 0,2^{x-3}$; б) $f(x) = 2,5^{x-1}$; в) $f(x) = 0,5^{x-2}$;

г) $f(x) = 4^{x-1}$ функцияларнинг ҳосилалари мусбат ёки манфий бўлишини аниқланг.

410. а) агар $f(x) = 16 \ln x - 2x^2$ бўлса $f'(x) \geq 0$;

б) агар $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ бўлса, $f'(x) \leq 0$ тенгсизликларни ечинг.

411. а) агар $f(x) = 3x^2 - 6 \ln x$ бўлса, $f'(x) \leq 0$;

б) агар $f(x) = 4 \ln x - 2x^2$ бўлса, $f'(x) \geq 0$ тенгсизликларни ечинг.

412. Куйидаги функцияларнинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг.

1) $y = x^2 - 6x + 5$; 2) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

3) $y = -x^2 + 4x + 1$; 4) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$; 6) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 20$;

7) $y = \ln x^2$; 8) $y = \ln \frac{1}{x}$.

413. Куйидаги функцияларнинг берилган кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

1) $y = x^2 - 6x + 13$, $[0; 6]$;

2) $y = 8 - \frac{1}{2}x$, $[-2; 2]$;

3) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $[1; 3]$;

4) $y = 6x^2 - x^3$, $[-1; 6]$.

414. 24 сонини кўпайтмаси энг катта бўлган иккита кўшилувчига ажратинг.

415. 6 сонини шундай иккита кўшилувчига ажратингки, уларнинг квадратлари йиғиндиси энг кичик бўлсин.

416. 9 сонини шундай иккита мусбат кўпайтувчига ажратингки, уларнинг йиғиндиси энг кичик бўлсин.

417. Периметри 16 см бўлган тўғри тўртбурчакларнинг қайси бири энг кичик диагоналга эга бўлади?

418. Қўғоз varaғидан юзи 100 см² бўлган шундай тўғри тўртбурчак қирқиб олингки, бу тўғри тўртбурчакнинг периметри энг кичик бўлсин.

419. Гипотенузаси c бўлган барча тўғри бурчакли учбурчаклар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг.

420. Куйидаги интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_{-1}^1 (x^{-3} - x) dx$; 2. $\int_{-3}^1 (x^2 + 4x + 6) dx$;

3. $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x + 3) dx$; 4. $\int_1^4 (x^2 - 6x + 10) dx$;

5. $\int_{-2}^1 (x^{-1} - 2) dx$; 6. $\int_{-5}^{-2} (1 - x^2 - 6x - 5) dx$;

7. $\int_1^4 x \frac{5}{10} \sqrt{x^2} dx$; 8. $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3) dx$;

9. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx$; 10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos x dx$;

11. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \cos x dx$; 12. $\int_{\frac{2}{3}\pi}^{3\pi} \sin x dx$;

13. $\frac{1}{28} \int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 14. $\frac{2}{3} \int_1^8 \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$;

15. $\frac{5}{6} \int_1^{64} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 16. $5 \int_1^8 \sqrt{x^2} dx$;

17. $0,5 \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt{x^2}}$; 18. $\int_0^1 \frac{3}{2x+e} dx$, $(\ln 3 \approx 1,1)$;

19. $\int_0^1 \frac{2}{3-2x} dx$; 20. $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\pi} \sin(0,5\pi + 2x) dx$.

Куйилган чизиклар билан чегараланган фигура юз
ни ҳисобланг.

421. $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$,
422. $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$.
423. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$.
424. $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 4$.
425. $y = 4 - x^2$, $y = 4 - 2x$.
426. $y = 4x - x^2$, $y = x$.
427. $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$.
428. $y = -x^2 - 6x$, $y = 9$, $x = -5$.
429. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 5$.
430. $y = -x^2 + 4x + 5$, $y = 8$.
431. $y = -\frac{1}{x}$, $y = 2$, $x = -2$, $x = -1$, бунда $\ln 2 \approx 0,69$.
432. $y = x^2 - 4x + 6$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 3$.
433. $y = x^2 + 2x + 4$, $x = -2$, $x = 1$, $y = 2$.
434. $y = x^3 + 4x + 6$, $y = x + 6$.
435. $y = x^2 - 6x + 10$, $y = 10 - 2x$.
436. $y = -0,5x^2 + x + 4$, $y = 6 - x$, $x = -1$.
437. $y = -0,25x^2 - x + 3$, $y = x + 7$, $x = -1$.
438. $y = x - 8x + 18$, $y = -2x + 18$.
439. $y = -x^2 + 10x - 16$, $y = x + 2$.
440. $y = x^3$, $y = 2 - x^2$.
441. $y = x^2$, $x = y^2$.

4-§. Планиметрия

442. Асоси m ва асосидаги бурчаги α бўлган тенг
ёнли учбурчакнинг периметрини топинг.
443. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги
учидан туширилган баландлиги h га, катетларининг ги-
потенузадаги проекцияларининг айирмаси l га тенг.
Шу учбурчакнинг юзини топинг.
444. Катетлари йириндиси l га, тўғри бурчаги учи-
дан туширилган баландлиги h га тенг. бўлган тўғри
бурчакли учбурчакнинг юзини топинг.
445. Агар учбурчакнинг медианалари 12, 15 ва 21 см
га тенг бўлса, унинг юзини топинг.

446. Айланга тенг ёнли трапеция ташқи чизилган.
Бу айлананинг радиуси трапецияга ташқи чизилган ай-
лана радиусидан $\sqrt{6}$ марта кичик. Трапеция асосида-
ги бурчакни топинг.
447. Агар тенг ёнли учбурчакнинг асоси b га, ён
томонига туширилган баландлиги h га тенг бўлса,
унинг юзини топинг.

448. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 20 га, асо-
си 24 га тенг. Бу учбурчак медианаларининг кесилиш
нуқтаси билан биссектрисаларининг кесилиш нуқтаси
орасидаги масофани топинг.

449. ABC учбурчакнинг A бурчаги 2α га тенг ва
 $AC = b$, $BC = c$ бўлса, A бурчак биссектрисасининг
узунлигини топинг.

450. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасини
унга ички чизилган айлананинг уриниш нуқтаси a ва
 b кесмаларга бўлади. Агар бирор катети c га тенг бўл-
са, учбурчакнинг юзини топинг.

451. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри $2p$ га, асо-
сидаги бурчак α га тенг. Шу учбурчакка ички чизил-
ган айлана радиусини топинг.

452. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчакнинг
биссектрисаси гипотенузани a ва b га тенг кесмаларга
бўлади. Бу учбурчакнинг юзини топинг.

453. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри $2p$
га, ўткир бурчаги α га тенг. Битта учи тўғри бурчак
учи билан устма-уст тушувчи квадрат учбурчакка ич-
ки чизилган. Шу квадратнинг юзини топинг.

454. Тўғри бурчакли учбурчакка ички ва ташқи чи-
зилган айланаларнинг радиуслари мос равишда 2 см
ва 5 см га тенг. Агар айланалар маркази орасидаги
масофа 5 га тенг бўлса, учбурчакнинг катетларини то-
пинг.

455. Тўғри бурчакли трапециянинг диагоналли ён
томонига тенг. Агар унинг баландлиги 2 га ва ён то-
мони 7 га тенг бўлса, трапеция ўрта чизигининг узун-
лигини топинг.

456. Ён томонлари параллел ҳамда катта асоси би-
лан α ва β ўткир бурчаклар ҳосил қилувчи трапеция
айланага ташқи чизилган. Агар трапециянинг юзи
га тенг бўлса, шу айлана радиусини аниқланг.

457. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси c
га ва ўткир бурчакларидан бири α га тенг. Шу уч-
бурчакка ички чизилган айлана радиусини аниқланг.

458. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси b га ва ён томонига туширилган баъналдиги h га тенг. Иккита учун учбурчакка ички чизилган. Шу квадратнинг юзини аниқланг.

459. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва q га тенг. Учбурчак тўғри бурчаги биссектрисасининг узунлигини топинг.

460. Тенг ёнли трапециянинг устки асоси ён томонига тенг бўлиб, u а га, ўткир бурчаги эса α га тенг. Трапециянинг юзини топинг.

431. Тўғри бурчакли трапециянинг ўткир бурчаги α га тенг. Агар ички чизилган айлана радиуси r га тенг бўлса, трапециянинг юзини топинг.

462. R радиусли доирага ички чизилган трапециянинг диагонали трапеция ён томонлари билан α ва 2α бурчаклар ташкил қилади. Трапециянинг юзини топинг.

5-§. Стереометрия

434. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг тўла сир-ти 1714 га, асосининг томонлари 25 ва 14 га тенг бўл-са, параллелепипеднинг ён сиртини топинг.

455. Куб пастки асосининг томони орқали асос те-кислиги билан α бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказилган. Агар кесимнинг юзи S бўлса, кубнинг тўла сир-тини ва ҳажминини топинг.

466. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали d га тенг бўлиб, u асос текислиги билан α бурчак, катта ён ёғи билан эса β бурчак ташкил этади. Парал-лелепипеднинг ҳажминини топинг.

467. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали d бир учидан чиққан ёқлари билан α , β ва γ бур-чаклар ташкил этади. Шу параллелепипеднинг ҳажми-ни топинг.

468. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми V , асосининг юзи Q ва асосининг диагоналлари орасидаги ўткир бурчак α бўлса, параллелепипед диагонали би-лан асос текислиги орасидаги бурчакни топинг.

469. Параллелепипеднинг бир учидан чикувчи учта кесираси мос равишда a , b ва c га тенг. a кесира b кесирани перпендикуляр ва уларнинг ҳар бири c кесира билан φ бурчак ташкил этади. Шу параллелепипеднинг ҳажминини топинг.

470. Тўғри бурчакли параллелепипед асосининг диагонали d , асос диагоналлари орасидаги бурчак α , асо-сининг катта томонидан ўтказилган диагональ текислик билан асос текислиги орасидаги бурчак β га тенг бўл-са, параллелепипеднинг ҳажминини аниқланг.

471. Параллелепипеднинг бир учидан чикувчи учта кесираларнинг узунликлари a , b ва c бўлиб, a ва b кесира ўзаро перпендикуляр, c кесира эса уларнинг ҳар кесиреси билан α бурчак ташкил этади. c кесира билан асос текислиги орасидаги бурчакни аниқланг.

472. Параллелепипеднинг кесиралари 1 см дан. Параллелепипеднинг бир учиданги ёқларида жойлашган учта бурчак ҳам ўткир бўлиб, уларнинг ҳар қайсиси 60° га тенг. Параллелепипеднинг ҳажминини аниқланг.

473. Ён кесираси $3\sqrt{3}$ га ва асосининг томони 2 га тенг бўлган учбурчакли мунтазам призма берилган. Призма тўла сиртининг $\sqrt{3}$ га нисбатини топинг.

474. Тўғри призманинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, унинг асоси 6 га, асосидаги бурчаги 30° га тенг. Призманинг баъналдиги $\sqrt{3}$ га тенг бўлса, унинг ҳаж-минини топинг.

475. Ўртбурчакли мунтазам призманинг диагонали d бўлиб, ён ёғи билан α бурчак ташкил этади. Призма ён сиртини топинг.

476. Призманинг асоси тенг томонли учбурчакдан иборат. Призма ён ёғининг диагонали 4 га тенг ва u асоси билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Призманинг ҳажминини топинг.

477. Призма асоси тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг кичик диагонали d , катта диагонали d_2 ва бу диаго-наллар орасидаги бурчак α га тенг. Призманинг катта диагонали асос текислиги билан β бурчак ташкил қи-лади. Шу призманинг ҳажминини топинг.

478. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли уч-бурчакдан иборат бўлиб, унинг битта ўткир бурчаги α га тенг. Призманинг катта ён ёғи диагонали d ён кесираси билан β бурчак ташкил этади. Шу призманинг ҳажминини топинг.

479. Тўғри призманинг асоси учбурчак бўлиб, унга R радиусли айлана ички чизилган ва учбурчакда $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ га тенг. α бурчак қаршисидаги ёқ диагоналининг қирраси билан γ бурчак ҳосил қилади. Шу призманинг ҳажмини топинг.

480. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг бир ўткир бурчаги α ва тўғри бурчак учидан туширилган медианаси m га тенг. α бурчак қаршисидаги ёқ диагонали призманинг ён қирраси билан β бурчак ҳосил қилади. Шу призманинг ҳажмини топинг.

481. Тўғри призманинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, учбурчакнинг тенг томонлари a га, учдаги ларининг диагоналлари ўтказилган, бу диагоналлари орасидаги бурчак β га тенг. Шу призманинг ҳажмини топинг.

482. Призманинг асоси ромб бўлиб, ромбнинг томонини a ва ўткир бурчаги α га тенг. Призманинг ён қирраси b асосининг ўткир бурчак ҳосил қилувчи томонидиagonalдан ўтувчи кесимнинг юзини топинг.

483. Призма асоси тенг томонли учбурчак бўлиб, унинг томони a га тенг. Устки асоси бир учининг проекцияси пастки асос маркази устига тушади. Призма α . Призманинг ён сиртини топинг.

484. Асосининг томони 5 га тенг бўлган квадратдан иборат пирамиданинг баландлиги 3 га тенг бўлса, унинг ҳажмини топинг.

485. Пирамида асоси тенг томонли учбурчак бўлиб, унинг томони 6 га, пирамида ён қирраси эса $4\sqrt{3}$ га тенг. Асос томонидан унга қарама-қарши бўлган ён қиррача бўлган энг қисқа масофани топинг.

486. Асосининг томони 6 га тенг бўлган квадратдан иборат пирамиданинг ён ёғи асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил қилса, унинг ҳажмини топинг.

487. Пирамида асоси квадратдан иборат бўлиб, унинг пендикуляр қилиб текислик ўтказилган. Агар пирамида асосининг томони a ва асосидаги икки ёқли бурчак α бўлса, кесимнинг юзини топинг.

488. Асоси квадратдан иборат бўлган пирамиданинг

ён қирраси m га тенг бўлиб, у асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

489. Асоси квадратдан иборат пирамиданинг ён қирраси a га тенг бўлиб, у асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ён қирраси билан асосининг томони орасидаги бурчакни топинг.

490. Пирамиданинг асоси квадрат бўлиб, унинг томони a га тенг. Ён ёқларидан икkitаси асос текислигига перпендикуляр бўлиб, қолган икkitаси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамида сиртини топинг.

491. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га тенг. Ён қирраси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамида асосининг бир томони на унга қарама-қарши ётган ён қирранинг ўртасидан кесим ўтказилган. Шу кесимнинг юзини топинг.

492. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, ён қирралари асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Асосининг ён томонлари a га, учдаги бурчаги α га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

493. Олти бурчакли мунтазам пирамиданинг апофемаси n асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Шу пирамиданинг тўла сиртини топинг.

494. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h га, учдаги текис бурчак эса 2α га тенг. Пирамиданинг ён сиртини топинг.

495. Пирамиданинг асоси трапеция бўлиб, унинг параллел томонлари a ва b ($a > b$). Пирамиданинг ҳамма ён ёқлари асос текислиги билан φ бурчак ҳосил қилган. Пирамиданинг сиртини топинг.

496. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг диагонали d га, асосидаги икки ёқли бурчаги α га ва баландлиги H га тенг. Кесик пирамиданинг ҳажмини топинг.

497. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг баландлиги H га, пирамида ён қирраси ҳамда кесик пирамида диагоналининг катта асос текислиги билан ҳосил қилган бурчаклари α ва β га тенг. Кесик пирамиданинг ён сиртини топинг.

498. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари a ва b га, ён ёғининг ўткир бурчаги α га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

499. Кесик пирамиданинг асослари мунтазам учбурчаклар бўлиб, уларнинг томонлари a ва b ($a > b$) га

тенг. Ён кирралари катта асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Кесик пирамиданинг ҳажмини топинг.

500. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг апофемаси катта асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Кесик пирамида асосларининг томонлари a ва $a/\sqrt{3}$ га тенг бўлса, шу пирамиданинг тўла сиртини топинг.

501. Цилиндр ўқ кесимининг юзи 20 см^2 , асосининг радиуси 2 см бўлса, цилиндр ҳажмининг π га нисбатини топинг.

502. Цилиндр асосининг радиуси 2 га, баландлиги 7 га тенг. Шу цилиндрнинг тўла сиртига тенгдош доиранинг радиусини топинг.

503. Цилиндрнинг баландлиги h га параллел текислик ўтказиб ҳосил қилинган кесим — квадрат бўлиб, у билан цилиндр ўқи орасидаги масофани топинг.

504. Баландлиги h бўлган цилиндр, ўз ўқида параллел ва d масофадан ўтувчи текислик билан кесилган. Кесувчи текислик асос айланасидан α га тенг ёй ажратди. Шу кесимнинг юзини ҳисобланг.

505. Ясовчиси асос диаметрига тенг бўлган конуснинг баландлиги $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ га тенг бўлса, унинг тўла сиртини топинг.

506. Конуснинг ҳажми V га тенг. Ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Конуснинг ясовчисини топинг.

507. Конуснинг баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак α га тенг. Агар конус ясовчиси билан баландлигининг йиғиндиси m га тенг бўлса, унинг ҳажмини топинг.

508. Конуснинг ўзаро φ бурчак ҳосил қилувчи икки ясовчисидан ўтувчи кесим асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Агар кесимнинг юзи Q га тенг бўлса, конуснинг баландлигини топинг.

509. Конус ён сиртининг ёйилмаси бурчаги α га, ва-тарини a га тенг доиравий сектордан иборат. Шу конуснинг ҳажмини топинг.

510. Конус ён сиртининг юзи асос юзидан 3 марта катта. Конуснинг ясовчиси билан асос текислиги орасидаги бурчакни топинг.

511. Конус ўқ кесимининг учпадаги бурчак α га тенг.

Конус ён сирти ёйилмасидаги марказий бурчакни топинг.

512. Конуснинг ҳажми 16π куб бирликка тенг. Ўқ кесимининг ясовчилари орасидаги бурчак α га тенг бўлиб, конуснинг ён сиртини топинг.

513. Кесик конус ўқ кесимининг юзи унинг асослари юзларининг айырмасига тенг. Асосларининг радиуслари 5 ва 3 га тенг. Кесик конус баландлигининг π га нисбатини топинг.

514. Кесик конус ўқ кесимининг диагоналлари ўзаро перпендикуляр, ясовчиси l га тенг ва у катта асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Кесик конуснинг тўла сиртини топинг.

515. Кесик конуснинг ясовчиси l га тенг бўлиб, у асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Агар асос юзларининг нисбати $1:4$ каби бўлса, кесик конуснинг ҳажмини топинг.

516. Кесик конус асосларининг юзлари S_1 ва S_2 бўлиб, ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Кесик конуснинг ён сиртини топинг.

517. Кесик конус ўқ кесимининг диагоналлари ўзаро перпендикуляр, ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Кесик конуснинг ён сирти S га тенг бўлса, унинг баландлигини топинг.

518. Асосларининг радиуслари R ва r бўлган кесик конусда катта асос билан β бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган. Бу текислик асосларнинг ҳар биридан α ёй ажратади. Ҳосил бўлган кесимнинг юзини топинг.

519. Кесик конуста шар ички чизилган. Агар кесик конус асослари диаметрлари узунликларининг йиғиндиси шар радиусидан 5 марта катта бўлса, конус ясовчисининг асос текислиги билан ташкил этган бурчагини топинг.

520. Сиртининг юзи конус асосининг юзига тенг бўлган шар шу конуста ички чизилган. Конуснинг ўқ кесими учпадаги бурчак косинусини топинг.

521. Радиуси R , марказий бурчаги α бўлган доиравий секторнинг радиус атрофида айланishiдан ҳосил бўлган жисмининг ҳажмини топинг.

522. Конуснинг ясовчиси l га, ўқ кесимининг учпадаги бурчак 2α га тенг. Шу конуста ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг.

523. R радиусли шарни кесувчи текислик шар диа-

метри билан α бурчак ташкил қилади ва диаметри $1:3$ нисбатда икки бўлакка бўлади. Бунда шар сирини қандай бўлакларга бўлинади?

524. r радиусли шар сиртида берилган нуқтадан икки текислик ўтказилган. Биринчи текислик шарни уринма, иккинчи текислик эса биринчи текислик билан α бурчак ташкил этади. Шарда иккинчи текислик билан сил қилган кесимнинг юзини аниқланг.

525. R радиусли шар сиртидаги бир нуқтадан бир бирини тенг ва ўзаро уринувчи икки доира ўтказилган бўлиб, бу доираларнинг текисликлари орасидаги бурчак α га тенг. Шар сиртининг шу текисликлар орасидаги қисмини топинг.

526. Шар конустга ички чизилган бўлиб, уриниш чизиги шар сиртини $m:n$ нисбатда бўлади. Конус ясовчи билан унинг ўқи орасидаги оғиш бурчагини топинг.

527. Ватари a ва ёйи 120° бўлган доиравий сегмент ватаринг бир учидан ўтувчи диаметр атрофида айланми. Айланми жисмининг тўла сиртини топинг.

528. Ясовчиси билан асос текислиги орасидаги бурчак α бўлган конус ҳажмининг унга ташқи чизилган шар ҳажмига нисбатини топинг.

529. Ёйи α ва бағандлиги h бўлган доиравий сегмент асосининг бир учидан ўтувчи диаметр атрофида айланади. Айланми жисми сферик сиртини топинг.

530. Шар конустга ички чизилган бўлиб, уриниш чизиги шар сиртини $2:5$ нисбатда бўлади. Конус бағандлиги билан ясовчиси орасидаги бурчакни топинг.

ЖАВОБЛАР

1. $\sqrt{x}$. 2. 1. 3. -1 . 4. $4(a-x)$. 5. $\frac{d}{c-d}$. 6. 0. 7. 1. 8. $2\sqrt{b^2-1}$.
9. -2 . 10. 1. 11. 1. 12. 1. 13. 1. 14. 0. 15. 1. 16. 1. 17. $\frac{1-3a}{2(1+3a)}$.
18. $8(a+1)$. 19. $\frac{a-b}{a+b}$. 20. 2. 21. $\frac{1}{a}$. 22. $\frac{(x+y)^2}{4xy}$. 23. $\sqrt[3]{(a-b)^2}$.
24. 2. 25. $\frac{a+b}{Vab}$. 26. -1 . 27. $a-b$. 28. $5+\sqrt{5}$. 29. $\frac{1}{a+b+c}$.
30. 1. 31. $\frac{9}{a-b}$. 32. $1+2a$. 33. $\frac{2(a+1)^2}{a}$. 34. $\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}$. 35. 2.
36. $m-n$. 37. $\sqrt{a}$. 38. 0. 39. 1. 40. $\sqrt[3]{m^2}$. 41. 1. 42. $\frac{2}{p}$. 43. $\sqrt{bx}+$
44. 44. 81. 45. 0. 46. -5 ; $-\frac{5}{4}$. 47. 2. 48. -2 . 49. 2. 50. -1 .
51. $t = x^2 - 7x$ белгилаш киритинг. -1 ; 1; 6; 8. 52. $t = \frac{x^2+x-5}{x}$
- белгилаш киритинг. -5 ; -1 ; $-\sqrt{6}$; $-1+\sqrt{6}$; 1. 53. $t = \frac{x}{x+1}$ белгилаш киритинг. -2 ; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 1. 54. -4 ; 4. 55.
- -5 ; 5. 56. 20. 57. $-\frac{4}{5}$. 0. 58. $t = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}$ белгилаш киритинг.
59. $a \geq -4$ да $x=a+4$, $a < -4$ да ечимга эга эмас.
60. $-1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{3}$. 61. -4 ; 1. 62. -10 ; 10. 63. 7. 8. 64. 64.
65. 4. 66. 8. 67. 8. 68. -14 ; 14. 69. (2; 3). (3; 2). 70. (4; -1); (1;
- -4). 71. (1; 3). (3; 1). 72. (51; 24; 5). 73. $u = \frac{1}{2x+3y}$, $v =$
- $\frac{1}{4x-y}$ белгилаш киритинг. $(\frac{7}{8}; \frac{7}{8})$. 74. (4; 1). 75. (1; 3).
- (3; 1). 76. (0; 1). 77. (18; 2). 78. (8; 1). 79. (-2 ; -5 ; -3); (5; 2;
- (-5 ; -2 ; -3); (2; 5; 3). 80. (0; 0, 0); (0, 6; 6); (4, 0, 4); (2;

[illegible]

$$\begin{aligned}
& \cos 2\beta. \quad 309. \quad 60^\circ. \quad 310. \quad -30^\circ. \quad 311. \quad 60^\circ. \quad 312. \quad 15^\circ. \quad 313. \quad 90^\circ. \quad 314. \quad 30^\circ. \\
& \cos^2 \beta. \quad 315. \quad 60^\circ. \quad 316. \quad 45^\circ. \quad 317. \quad 60^\circ. \quad 318. \quad 30^\circ. \quad 319. \quad 60^\circ. \quad 320. \quad 30^\circ. \quad 321. \quad 60^\circ. \\
& 322. \quad 45^\circ. \quad 323. \quad 30^\circ. \quad 324. \quad 720^\circ. \quad 325. \quad 60^\circ. \quad 326. \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \quad 327. \quad \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \\
& \quad + 2\pi n. \quad 328. \quad \arccos \frac{2}{3} + \pi n. \quad 329. \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n. \quad 330. \quad \pi n; \quad \frac{\pi}{10} (2n+1) \\
& 331. \quad \pi n. \quad 332. \quad (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n. \quad 333. \quad \frac{\pi}{12} (8n+1). \quad 334. \quad \frac{\pi}{2} n; \quad \frac{\pi}{6} (2n+1) \\
& \quad + 1). \quad 335. \quad 2 \arccos \frac{2 \pm \sqrt{3}}{9} + 2\pi n. \quad 336. \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \arccos \frac{7}{4} + \pi n \\
& 337. \quad \frac{\pi}{6} n; \quad \frac{\pi}{5} n. \quad 338. \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n. \quad 339. \quad \varnothing. \quad 340. \quad 2\pi n; \quad \frac{\pi}{2} (4n+1). \quad 341. \\
& \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \frac{2}{3} \pi n. \quad 342. \quad \pi n. \quad 343. \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n. \quad 344. \quad \frac{\pi}{6} (3n+1). \\
& \quad + 1). \quad 345. \quad \frac{\pi}{8} n. \quad 346. \quad \frac{\pi}{8} (4n+1); \quad \frac{\pi}{12} (12n+1). \quad 347. \quad \pi n \pm \frac{\pi}{3}. \quad 348. \\
& \quad \frac{\pi}{8} (4n-1). \quad 349. \quad \pi n \pm \frac{\pi}{6}; \quad \pi n \pm \frac{\pi}{4}. \quad 350. \quad \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n. \\
& 351. \quad \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \arccos \frac{3}{4} + \pi n. \quad 352. \quad \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \frac{\pi}{2} (2n+1). \quad 353. \\
& \quad (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} n. \quad 354. \quad 2\pi n; \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n. \quad 355. \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n. \quad 356. \quad -\frac{\pi}{8} + \\
& \quad + \frac{\pi}{2} n. \quad 0.5 \arccos \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} n. \quad 357. \quad \frac{\pi}{40} (4n-1); \quad \frac{\pi}{24} (4n-1). \quad 358. \\
& \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n. \quad 359. \quad \pi n. \quad 360. \quad (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} n; \quad \frac{\pi}{2} + \pi n. \quad 361. \quad 2\pi n; \\
& \quad \frac{2}{3} \pi + 2\pi n. \quad 362. \quad 2\pi n; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad 363. \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n. \quad 364. \quad \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \\
& \quad 2 \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{5} + \pi n \right). \quad 365. \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \pi n. \quad 366. \quad \frac{\pi}{4} (4n-1); \quad \frac{\pi}{2} (4n+1) \\
& \quad + 1); \quad 2\pi n. \quad 367. \quad \pi n \pm \frac{\pi}{6}; \quad \pi n. \quad 368. \quad -\frac{\pi}{4} + \pi k. \quad 369. \quad \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad 2\pi k. \\
& 370. \quad 4\pi k \quad (k=2n). \quad 371. \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi n. \quad 372. \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad 373. \\
& \quad -\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} + (2n+1)\pi. \quad 374. \quad \frac{\pi}{4} + \pi n. \quad 375. \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi n. \\
& 376. \quad \frac{\pi}{3} n \pm \frac{\pi}{12}. \quad 377. \quad \left(\frac{\pi}{4} - \pi n; \pi n \right); \quad \left(\pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n \right).
\end{aligned}$$

204

$$\begin{aligned}
& 378. \quad \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \quad \frac{\pi}{4} - \pi n \right); \quad \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \frac{\pi}{6} - \pi n \right). \quad 379. \\
& \quad \left(2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; \quad 2\pi n \pm \frac{\pi}{3} \right). \quad 380. \quad \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right); \quad (\pi n - \\
& \quad - (-1)^n \frac{\pi}{6}; \quad 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}). \quad 381. \quad \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \quad \frac{\pi}{6} - \pi n \right). \quad 382. \quad -\frac{\pi}{6} + \\
& \quad + \frac{2}{3} \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi n. \quad 383. \quad -\frac{3}{4} \pi + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n. \\
& 384. \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5}{6} \pi + 2\pi n. \quad 385. \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \\
& 386. \quad 2\pi n + \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n. \quad 387. \quad \frac{2}{3} \pi n - \frac{2}{3} \pi < x < \frac{\pi}{18} - \\
& \quad - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \pi n. \quad 388. \quad 2\pi n < x < \pi (2n+1). \quad 389. \quad x - \text{ихтиёрлий сон.} \\
& 390. \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n. \quad 391. \quad x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi n. \quad 392. \quad -\frac{\pi}{3} + \\
& \quad + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \quad 393. \quad 4\pi n + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} < x < 4\pi n + \frac{5\pi}{2} - \frac{1}{2}. \\
& 394. \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \quad 395. \quad 1. \quad 396. \quad 3. \quad 397. \quad \frac{2}{3}. \quad 398. \quad \frac{3}{2}. \quad 399. \\
& 3. \quad 400. \quad \frac{1}{16}. \quad 401. \quad a) \quad 12x^3; \quad b) \quad -10x^{-6}; \quad c) \quad \frac{4}{3\sqrt{x^2}}; \quad d) \quad \frac{5}{\sqrt{x^2}}. \\
& 402. \quad a) \quad -\frac{1}{3x\sqrt{x^3}}; \quad b) \quad \frac{20}{3} x^2 \sqrt{x^3}; \quad c) \quad \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x}. \quad 403. \quad a) \quad \frac{2}{x^3}; \\
& \quad b) \quad -\frac{4}{x^2 \sqrt{x}}; \quad c) \quad \frac{20}{3} x^2 \sqrt{x^3}; \quad d) \quad \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x}. \quad 404. \quad \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \\
& \quad + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3. \quad 405. \quad -\frac{4x}{(x^2-1)^2}. \quad 406. \quad -48; \quad -\frac{1}{27}; \quad \frac{4}{3}; \quad -\frac{8}{3}. \quad 407. \\
& a) \quad f'(1) < 0; \quad b) \quad f'(4) > 0. \quad 408. \quad a) \quad f' \left(-\frac{2\pi}{3} \right) < 0; \quad b) \quad f' \left(\frac{4\pi}{3} \right) < 0. \\
& 409. \quad a) \quad f'(x) < 0; \quad b) \quad f'(x) > 0; \quad c) \quad f'(x) < 0; \quad d) \quad f'(x) > 0. \quad 410. \\
& a) \quad 0 < x \leq 2; \quad b) \quad 0 < x < 1. \quad 411. \quad a) \quad 0 < x \leq 1; \quad b) \quad 0 < x \leq 1. \quad 412. \\
& 1) \quad (-\infty; 3) - \text{камаяди}; \quad 3) \quad 10) - \text{ўсали}; \quad 2) \quad (-\infty; 1) - \text{камаяди}; \\
& 1) \quad +\infty; \quad 0) - \text{ўсали}; \quad 3) \quad (-\infty; 2) - \text{ўсали}; \quad 2) \quad +\infty; \quad +\infty) - \text{камаяди}; \\
& 4) \quad (-\infty; 0) - \text{ўсали}; \quad 0) \quad 2) - \text{камаяди}; \quad 2) \quad +\infty) - \text{ўсали}; \quad 5) \quad (-\infty; \\
& 0) - \text{камаяди}; \quad 0) \quad 1) - \text{ўсали}; \quad 1) \quad +\infty) - \text{камаяди}; \quad 6) \quad (-\infty; 2) - \\
& \text{ўсали}; \quad 2) \quad 3) - \text{камаяди}; \quad 3) \quad +\infty) - \text{ўсали}; \quad 7) \quad (-\infty; 0) - \text{камаяди}; \\
& 0) \quad 2) \quad +\infty) - \text{ўсали}; \quad 8) \quad 0) \quad +\infty) - \text{камаяди}. \quad 413. \quad 1) \quad \text{энг кат.} \quad 13, \\
& \text{энг кич.} \quad 4; \quad 2) \quad \text{энг кат.} \quad 8, \quad \text{энг кич.} \quad 6; \quad 3) \quad \text{энг кат.} \quad \frac{1}{6}; \quad \text{энг кич.}
\end{aligned}$$

205

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{2}, 4) \text{ энг. кат. } 32, \text{ энг. кич. } 0, 414, 12 \text{ ва } 12, 415, 3 \text{ ва } 3, 416, \\
& 3 \text{ ва } 3, 417. \text{ Томони } 4 \text{ см бўлган квадрат. } 418, \text{ Томони } 10 \text{ см} \\
& \text{ бўлган квадрат } 419. \text{ Томонлари } \frac{c}{\sqrt{2}} \text{ бўлган тенг ёнли учбурчак.} \\
& 420. 1) \frac{1}{8}; 2) \frac{1}{3}; 3) 15; 4) 6; 5) 1-2c; 6) 9; 7) \frac{4}{3}; 8) 9; 9) \\
& 1, 5; 10) 0,5; 11) 0,5; 12) \frac{1}{3}; 13) \frac{1}{3}; 14) 3; 15) 31; 16) 93; 17) 1,5; 18) \\
& 1; 19) 1,1; 20) 0,25. 421, 4,5. 422, 4,5. 423, 4,25. 424, \frac{5}{3}. 425, \frac{4}{3}. 426, \\
& 4,5. 427, \frac{8}{3}. 428, \frac{8}{3}. 429, \frac{32}{3}. 430, \frac{4}{3}. 431, 1,31. 432, \frac{40}{3}. 433, 6. 434, \\
& 4,5. 435, \frac{32}{3}. 436, 4,5. 437, \frac{9}{4}. 438, 36. 439, \frac{1}{2}. 440, \frac{2}{3}. 441, \frac{1}{3}. \\
& 442, m \lg \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. 443, \frac{1}{2} h \sqrt{l^2 + 4h^2}. 444, \frac{1}{2} h (\sqrt{h^2 + l^2} - h). \\
& 445, 48 \sqrt{2}. 446, \frac{\pi}{4}. 447, \frac{b^2 h}{4 \sqrt{b^2 - h^2}}. 448, \frac{2}{3}. 449, \frac{2bc \cos \alpha}{3}. \\
& 450, \frac{1}{2} c \sqrt{(a+b)^2 + c^2}. 451, \frac{p \sin 2\alpha}{8 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}. 452, \frac{ab(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}. 453, \\
& \frac{p^2 \sin^2 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \cdot (1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^4}. 454, 6 \text{ см, } 8 \text{ см. } 455, 3 \sqrt{3}. \\
& 456, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}}. 457, c \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right). \\
& 458, \frac{b^2 h^2}{(2 \sqrt{b^2 - h^2} + h)^2}. 459, \frac{ab \sqrt{2}}{a+b}. 460, 2a^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. 461, \\
& 4r^2 \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \alpha. 462, 2R^2 \sin 3\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}. 463, -2h^2 \sin 2\alpha. 464, \\
& 1014, 465, 6S \cos \alpha; \sqrt{S \cos \alpha}. 466, d^3 \sin \alpha \sin^2 \alpha \sqrt{\cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)}. \\
& 467, d^3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. 468, \operatorname{arc} \lg \left(\frac{V}{Q} \sqrt{\frac{\sin \alpha}{2Q}}\right). 469, abc \sqrt{-\cos 2\alpha}. \\
& 470, \frac{d^3 \sin \alpha \lg^3 \frac{\sin \alpha}{2}}{2}. 471, \operatorname{arc} \cos \left(\frac{2}{\sqrt{2} \cos \alpha}\right). 472, 2 \sin \alpha \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{\sin \alpha \sin 3\alpha}. 473, 20. 474, 9. 475, 4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}. 476, 6. 477, \\
& d_1 d_2^2 \sin \alpha \lg \beta. 478, \frac{1}{8} d^3 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin \beta. 479, 4R^3 \sin^2 \alpha \sin^3 \alpha \sin(\alpha + \\
& + \beta). 480, \frac{2m^3 \sin 2\alpha \sin \alpha}{\lg \beta}. 481, \frac{a^3 \sin \alpha}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \sqrt{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} \\
& - \frac{\beta}{2}. 482, 2ab \sqrt{\sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)}. 483, \sqrt{3} a^2 \lg \alpha. \\
& 484, 25. 485, 4,5. 486, 36. 487, a^2 \sin^2 \alpha. 488, \frac{1}{3} m^3 \sin 2\alpha \cos \alpha. 489, \\
& \operatorname{arc} \lg (\sqrt{2} \lg \beta). 490, \frac{\sqrt{2} a^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}. 491, \frac{a^2}{4 \sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + \lg^2 \alpha}. \\
& 492, \frac{1}{6} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \lg \beta. 493, 4 \sqrt{3} n \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. 494, 2h^2 \lg 2. 495, \\
& \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \sqrt{ab(a+b) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}. 496, \frac{H}{6} \{3(d^2 - H^2) + 2H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha\}. 497, \\
& \frac{2H^2}{\lg \beta} \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. 498, \frac{(a^3 - b^3) \sqrt{-\cos \alpha}}{6 \cos \alpha}. 499, \frac{(a^3 - b^3) \lg 2}{6}. 500, \\
& \frac{2a^2(1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha}. 501, 20. 502, 6. 503, \frac{h}{2} \lg \frac{a}{2}. 504, 2dh \lg \frac{a}{2}. 505, \\
& 4, 506, \sqrt{\frac{tv}{\pi \sin 2\alpha \cos \alpha}}. 507, \frac{\pi m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}. 508, \sqrt{\frac{Q \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\pi \sin 2\alpha}} \times \\
& \times \sqrt{\sin \alpha}. 509, \frac{a^3 \alpha^3 \sqrt{4\pi^2 - a^2}}{192\pi^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}. 510, \operatorname{arc} \lg 2 \sqrt{2}. 511, 360^\circ \sin \frac{\alpha}{2}. \\
& 512, \frac{4\pi \sqrt[3]{36 \lg^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. 513, 2. 514, 2\pi l^2 \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right). \\
& 515, \frac{7\pi^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{3}. 516, \frac{S_1 - S_2}{\cos \alpha}. 517, \sqrt{\frac{S}{\pi \sin \alpha}}. 518, \\
& \frac{(R^2 - r^2) \sin \alpha}{2 \cos \beta}. 519, \operatorname{arc} \sin \frac{4}{5}. 520, \cos \alpha = \frac{7}{25}. 521, \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

$$522. \frac{\pi l^3}{6 \cos^3 \alpha}, 523. \pi R^2 (2 - \sin \alpha) \text{ ва } \pi R^2 (2 + \sin \alpha), 524. \pi r^2 \sin^2 \alpha, \\ 525. 4\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2}, 526. \arcsin \frac{n-m}{n+m}, 527. \frac{3}{2} \pi a^2, 528. \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \times \\ \times \sin^2 \alpha, 529. 4\pi h^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}, 530. \arcsin \frac{3}{7}.$$

АДАБИЁТ

1. Антонов Н. П. ва бошқ. Элементар математикадан масалалар тўплами. "Ўқитувчи", 1974.
2. Версова Е. Е. и др. Практикум по решению математических задач. М., "Просвещение", 1979.
3. Дорфеев Г. В. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., "Наука", 1976.
4. Круликовский Н. Н. Математические задачи для абитуриентов. Томск, 1973.
5. "Математика в школе" журналл, 1975—1988 йил-ли сонлари.
6. Нестеренко Ю. В. и др. Задачи вступительных экзаменов по математике. М., "Наука", 1980.
7. Орифонова М. ва бошқ. Математикадан кўндан-маз, Тошкент, "Ўқитувчи", 1977.
8. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в вузы, под ред. М. М. Сканава М., "Высшая школа", 1988.
9. Тошкент политехника институтига кирувчилар учун математикадан методик кўрсатмалар Тошкент, 1970—1988.
10. Ципкин А. Г. Математикадан справочник. М., "Ўқитувчи", 1987.
11. Чудовский А. Н. и др. Как готовиться к письменному экзамену по математике. М., "Просвещение", 1986.
12. Шувалова Э. З. и др. Повторяй математику. М., "Высшая школа", 1969.

Алгебра

1. Даражадар ва илдиэларнинг хоссадар

1. $(+a)^n = +a^n$.
2. $(-a)^n = \begin{cases} +a^n \\ -a^n \end{cases}$
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
4. $a^n : a^m = a^{n-m}$.
5. $(a^n)^m = a^{nm}$.
6. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$.
7. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
8. $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^m = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$.
9. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

10. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

2. Квадрат тенгмадалар

1. $x^2 + px + q = 0$; $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.
- $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($a \neq 0$).
- $ax^2 + 2bx + c = 0$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ ($a \neq 0$).
2. Виет формуласи: $x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$;
 $x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}$.
3. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$;
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. Прогрессиялар

1. Арифметик прогрессия

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

a_n — прогрессиянинг n -хадди, S_n — прогрессиянинг n та хадди йиндилди, d — айирма.

2. Геометрик прогрессия

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \quad S_n = \frac{u_1 + u_n q}{1 - q} = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

n — хадлар сони, q ($q \neq 1$) — махраж.

Чексиз камаявчи прогрессияда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{u_1}{1 - q}.$$

4. Логарифмлар

а) $y = a^x$ бўлса, $\log_a y = x$ ($a > 0, a \neq 1$).
Асосий логарифмик айтият:

$$\log_a a^N = N.$$

б) Логарифмлар теоремадари:

1. $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$,
2. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$,
3. $\log a^n = n \log a$,
4. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$.

в) Логарифмининг хоссадари

1. $\log_a 1 = 0$, чунки $a^0 = 1$.
2. $\log_a a = 1$, чунки $a^1 = a$.
3. $\log_a (+\infty) = +\infty$, чунки $a^{+\infty} = \infty$.
4. $\log_a 0 = -\infty$, чунки $a^{-\infty} = 0$.
5. Агар $N > 1$ бўлса, $\log_a N > 0$, $N < 1$ бўлса, $\log_a N < 0$.
6. Мусбат асосли манфий соннинг логарифми манфуд эмас.
7. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.
8. $\frac{\log_a N}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_b M}$.
9. $\log_a N = \log_a a^N$.

5. Комбинаторика ва Нютон биноми

а) Ҷумлаштиришлар:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) \quad (n > m).$$

б) Ҷумлаштиришлар:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

8) Групидалар:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{m!}.$$

$$C_n^m = C_n^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m}.$$

$$C_n^0 = C_0^0 = 1.$$

2) Ньютон биноми:

$$1). (x+a)^n = x^n + na x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} + \dots + a^n.$$

$$2) (x-a)^n = x^n - C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} - \dots +$$

$$+ (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + (-1)^n a^n.$$

Геометрия

1. Икътёрый учбурчак (a, b, c — томонлари, α, β, γ — томонлар қаршисидаги бурчаклар, p — ярим периметр, R — ташқи чизилган айлана радиуси, r — ички чизилган айлана радиуси, S — юз, h_a a томонига туширилган баландлик):

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a; \quad S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4 \cdot S}.$$

2. Тўғри бурчакли учбурчак (a, b — катетлари; c — гипотенуза; a_c, b_c — катетларнинг гипотенузадаги проекциялари):

$$S = \frac{1}{2} ab, \quad S = \frac{1}{2} c \cdot h_c; \quad r = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c^2}{2};$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Пифагор теоремаси);}$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{c}; \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}.$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta.$$

3. Тенг томонли учбурчак:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad r = \frac{a \sqrt{3}}{2}; \quad R = \frac{a \sqrt{3}}{3}.$$

4. Икътёрый тўртбурчак (d_1 ва d_2 — диагоналлари; φ — улар орасидаги бурчак; S — юз):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi.$$

5. Параллелограмм (a ва b — томонлари; φ — улар орасидаги бурчак; h_a — a томонига туширилган баландлик):

$$S = ah_a = ab \sin \varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

6. Кадрат (d — диагональ):

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

7. Ромб:

$$S = ah_a = a^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

8. Тўғри тўртбурчак:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi.$$

9. Трапеция (a ва b — асослари; h — асослар орасидаги масофа; l — ўрта чизиги):

$$l = \frac{a+b}{2}; \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h.$$

10. Ички чизилган кўлбурчак (p — ярим периметр, r — ташқи чизилган айлана радиуси):

$$S = pr.$$

11. Мунтазам кўлбурчак (a_n — n бурчакли мунтазам кўлбурчакнинг томони; R — ташқи чизилган айлана радиуси; r — ички чизилган айлана радиуси):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R;$$

$$S = \frac{na_n r}{2}.$$

12. Айлана (r — радиус; c — айлана узунлиги; S — дора юзи):

$$C = 2\pi r; \quad S = \pi r^2.$$

13. Сектор (l — ёй узунлиги; n° — марказий бурчакнинг градус ўлчови; a — марказий бурчакнинг радиан ўлчови):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha; \quad S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$

14. Иккитўрлий призма (l — ён қирраси; p — асосининг периметри; S — асосининг юзи; H — бағандлик; $p_{\text{кес}}$ — перпендикуляр кесимининг периметри; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи; V — ҳажм):

$$S_{\text{ён}} = p_{\text{кес}} \cdot l; \quad V = S \cdot H.$$

15. Тўғри призма:

$$S_{\text{ён}} = p \cdot l.$$

16. Тўғри бурчакли параллелепипед (a, b ва c — унинг ўлчамлари; d — диагонали):

$$S_{\text{ён}} = p \cdot H, \quad V = abc, \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

17. Куб (a — қирраси):

$$V = a^3; \quad d = a\sqrt{3}.$$

18. Иккитўрлий пирамида (S — асосининг юзи; H — бағандлик; V — ҳажм):

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

19. Мунтазам пирамида (p — асосининг периметри; l — апофемаси; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи):

$$S_{\text{ён}} = \frac{1}{2} p \cdot l; \quad V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

20. Иккитўрлий кесик пирамида (S_1 ва S_2 — асосларининг юзи; h — бағандлик; V — ҳажм):

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

21. Мунтазам кесик пирамида (p_1 ва p_2 — асосларининг периметри; l — апофемаси; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи):

$$S_{\text{ён}} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) l.$$

22. Цилиндр (R — асосининг радиуси; H — бағандлик; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи; V — ҳажм):

$$S_{\text{ён}} = 2\pi R \cdot H; \quad V = \pi R^2 H.$$

23. Конус (R — асосининг радиуси; H — бағандлик; l — ясовчиси; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи; V — ҳажм):

$$S_{\text{ён}} = \pi R l; \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

24. Шар, сфера (R — шар радиуси; S — сферик сиртининг юзи; V — ҳажм):

$$S = 4\pi R^2; \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

25. Шар сегменти (R — шар радиуси; h — сегментнинг бағандлиги; S — сегментнинг сферик қисми юзи; V — ҳажм):

$$S = 2\pi R h; \quad V = \pi R^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right).$$

26. Шар сектори (R — шар радиуси; h — сегмент бағандлиги; V — ҳажм):

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Тригонометрия

1. Бурчакларнинг радиан ва градус ўлчовлари орасидаги боғлиқлиш

$$1. \quad 1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'';$$

$$2. \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,01745 \text{ рад.}$$

$$3. \quad \alpha^\circ : 180^\circ = a : \pi, \text{ бундан } a = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}.$$

α°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
a	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг элементлари орасидаги боғланишлар

1. $\alpha + \beta = 90^\circ$;
2. $a = c \sin \alpha$;
3. $a = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha$;
4. $b = c \cos \alpha$;
5. $b = c \sin \beta = a \operatorname{tg} \beta$;
6. $c^2 = a^2 + b^2$.

3. Тўғри бурчакли учбурчакларни ечиш формула-лари

№	Берила- ган	Топили керак	Форми
I	c, α	β, a, b	$\beta = 90^\circ - \alpha$; $a = c \sin \alpha$; $b = c \cos \alpha$
II	a, α	β, b, c	$\beta = 90^\circ - \alpha$; $b = a \operatorname{ctg} \alpha$; $c = \frac{a}{\sin \alpha}$
III	a, b	α, β, c	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$; $\beta = 90^\circ - \alpha$; $c = \frac{a}{\sin \alpha}$
IV	a, c	α, β, b	$\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\beta = 90^\circ - \alpha$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

4. Тригонометрик функцияларнинг шоралари ва қийматлари

Функция	Шоралар				I					
	I	II	III	IV	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	+	+	-	-	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	+	-	-	+	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞

5. Айни бир бурчакнинг тригонометрик функ-циялари орасидаги боғланишлар

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
2. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;
3. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;
4. $\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$;
5. $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$;
6. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;
7. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$;
8. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$.

6. Тригонометрик функциялар қийматларини улардан бирининг берилган қиймати бўйича ҳисоб-лаш

Функциялар орқали	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha =$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha =$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sec \alpha =$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{cosec} \alpha =$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\operatorname{ctg} \alpha}$

7. Келтириш формуллари

Функция	$-\varphi$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \mp \alpha$	$270^\circ \mp \alpha$	$360^\circ \mp \alpha$
$\sin$	$-\sin \varphi$	$+\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$
$\cos$	$+\cos \varphi$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$
$\sec$	$+\sec \varphi$	$\pm \operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$\mp \operatorname{cosec} \alpha$	$+\sec \alpha$
cosec	$-\operatorname{cosec} \varphi$	$+\sec \alpha$	$\pm \operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$\mp \operatorname{cosec} \alpha$

8. Аргументлари кўйиш формуллари

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$;
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$;
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$;
- $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}$.

9. Иккиланган, учланган ва ярим бурчакларнинг тригонометрик функциялари орасидаги боғланиш

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$;
 $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$; $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$.
- $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.
- $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$; $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$;
- $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$;

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

$$4. \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

10. Тригонометрик функциялар йиғиндисини (айирмасини) кўлайимга ва аксинча айлантириш

$$1. \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}; \quad \cos \alpha + \cos \beta =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$2. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha); \quad \cos \alpha - \sin \alpha =$$

$$= \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 \pm \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos \alpha};$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$$3. \cos m\alpha \cos n\alpha = \frac{1}{2} [\cos(m-n)\alpha + \cos(m+n)\alpha];$$

$$\sin m\alpha \sin n\alpha = \frac{1}{2} [\cos(m-n)\alpha - \cos(m+n)\alpha];$$

$$\sin m\alpha \cos n\alpha = \frac{1}{2} [\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha].$$

11. Иккитерий учбурчакнинг элементларини ҳисоблаш формуллари (a, b, c — учбурчакнинг томонлари; α, β, γ — учбурчакнинг бурчаклари; p — ярим периметри; S — юзи; R — ташқи чизилган айлана радиуси; r — ички чизилган айлана радиуси; h — баландлик.)

1. Проекциялар теоремаси:

$$\begin{aligned} a &= b \cos \gamma + c \cos \beta, \\ b &= c \cos \alpha + a \cos \gamma, \\ c &= a \cos \beta + b \cos \alpha. \end{aligned}$$

2 Синуслар теоремаси:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

3. Косинуслар теоремаси:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

4. Тангенслар теоремаси:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}; \\ \frac{b+c}{b-c} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}; \end{aligned}$$

5. Молвейда формуласи:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}; \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}; \end{aligned}$$

6. Ушбурчакнинг юзи:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma; \quad S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha};$$

$$S = \frac{r^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin \gamma}; \quad S = p^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

7. Ички ва ташқи чизилган доиранинг радиуслари формуласи

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{abc}{4S} = \frac{p}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}};$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

МУНДАРИЖА

Сўз боши	8
1 б о б. Абитурентларнинг жавобларида учрайдиган типик ҳафозалар	8
1-§. Тенгламалар	8
2-§. Тригонометрик тенглама ва айниқлар	8
3-§. Тенгламалар	16
4-§. Функциялар ва уларнинг графикалари	30
5-§. Геометрияга доир масалалар	42
6-§. Олий математика элементлари	48
1. Функциянинг лимитини ҳисоблаш	58
2. Функциянинг ҳосиласини топиш	59
3. Функциянинг ўсиши ва камайиши	60
4. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари	63
5. Бошланғич функция ва аниқ интегралнинг табиққлари	65
7-§. Математикадан қисқача концепт тузиш	67
1 б о б. Математикадан ёзма ва оғзаки имтиҳон	74
1-§. Ёзма имтиҳон	80
2-§. Оғзаки имтиҳон	80
3-§. ЭҳМ ёрдамида ёзма имтиҳон	100
Баъзи олий ўқув юртиларига кириш имтиҳонлари вариантларидан намуналар	112
1 б о б. Мушаккил ечиш учун мисол ва масалалар	140
1-§. Алгебра	165
2-§. Тригонометрия	165
3-§. Олий математика элементлари	180
4-§. Планиметрия	189
5-§. Стереометрия	192
Жавоблар	194
Адабиёт	201
Илова	209
210	

На узбекском языке

ШУКРУЛЛА ИСМАИЛОВИЧ ТАДЖИЕВ

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для слушателей
подготовительных отделений, абитуриентов

Ташкент «Ўқитувчи» 1990

Муҳаррир Х. Давидов
Расмлар муҳаррири С. Соли
Техму дрир Т. Гринякова
корректор З. Мирҳодилова

ИБ № 4953

Териниш берилди 12.09.89. Ёзишга рухсат этилди 2.01.90. Формати 84x108^{мм}
(ин. қотоз № 2. Керди 10 шпонси. Литературная гарнитура. Юкори босма ўсули-
да босилди. Шартли б. д. 11,76. Шартли кр.-отг. 11,92. Нашр. д. 7,62. Тиражи 4000.
Заказ № 8380. Бахоси 25 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 69-75-89
Область газеталарининг М. В. Морозов номидати босмаҳонаси на бирлашган наш-
риёти. Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1990.
Объединенное издательство и типографии областных газет им. М. В. Морозова.
г. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

Г 60

Тожиєв Ш. И.

Математика: Оғий ўқув юртлари тайёрлов
бўлимлари тингловчилари, абитуриентлар учун
ўқув қўлланма. — Т.: Ўқитувчи, 1990. — 224 б.

Талжиєв Ш. И. Математика: Учеб. пособие для слушателей подготовительных отделений, абитуриентов.

22.1973