

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

514
K-50



100 YIL



A.Ya.Narmanov

DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA

584
N-50

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

Abdigappar Narmanov

DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA

Bakalavriyatning matematika yo'nalishi uchun
darslik

Qayta ishlangan ikkinchi nashri

-7659-

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TOSHKENT VILOYATI CHIRCHIQ
DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI
AXBOROT RESURS MARKAZI

Toshkent

«MUMTOZ SO'Z»

2018

UO'K
KBK

Ushbu darslik universitetlarning Matematika va mexanika yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, amaldagi yangi bakalavrlar dasturi asosida yozilgan. Darslik to'rt qismdan iborat bo'lib, unda umumiy topologiya elementlari, chiziqlar va sirtlar nazariyasi, tenzor analiz elementlari yoritilgan.

Darslikdan magistr, ilmiy-tadqiqotchilar va oliy o'quv yurtlari o'qituvchilari ham foydalanishlari nazarda tutilgan.

Этот учебник написан на основе существующей программы и предназначен для направлений бакалавриата «Математика» и «Механика». Учебник состоит из четырех частей, в нем изложены элементы общей топологии, теории кривых и поверхностей, элементы тензорного анализа. Он также рассчитан для научных работников, магистрантов и преподавателей высших учебных заведений.

This tutorial was written on the basis of the existing program and is intended for undergraduate directions "Mathematics" and "Mechanics". The textbook consists of four parts; it sets out the elements of general topology, the theory of curves and surfaces, the elements of the tensor analysis. It also intended for scientists, master students and faculty in higher education.

Mas'ul muharrir:
X.F. Sharipov

Taqrizchilar:

M.Sh.Mamatov, fizika-matematika fanlari doktori, professor
R.B.Beshimov, fizika-matematika fanlari doktori

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining
2013-yil 20 dekabrda 484 sonli buyrug'iga asosan nashrga
ruxsat berilgan (Qayd etish raqami 484-125)*

ISBN 978-9943-5562-8-7

© A. Narmanov, 2018
© "MUMTOZ SO'Z", 2018.

IKKINCHI NASHRGA SO'Z BOSHI

Darslik to'rt bobdan iborat bo'lib, birinchi bob umumiy topologiya elementlariga bag'ishlangan. Ikkinchi, uchinchi boblarda chiziqlar va sirtlar nazariyasi o'rganiladi. Mexanika yo'nalishi rejasida tenzor hisobni o'rganish nazarda tutilganligini hisobga olib, to'rtinchi bobda tenzor analiz elementlari yoritilgan. Differensial geometriya kursi bo'yicha o'zbek tilidagi birinchi darslikni M.A.Sobirov va A.Y.Yusupov birgalikda yozishgan va 1965-yili chop ettirishgan. Bu darslik hajm jihatidan juda katta bo'lib, chiziqlar va sirtlar nazariyasi bo'yicha juda ko'p ma'lumotlarni o'z ichiga olgan. Undan hozir ham talabalar foydalanib kelishmoqda. Lekin keyingi vaqtda o'quv rejasining o'zgarishi, differensial geometriya fanining tez rivojlanishi hamda mustaqil Respublikamizda ta'lim sohasidagi qator qonunlarning qabul qilinishi ko'pgina fanlardan, shu jumladan, Differensial geometriyadan ham yangi darslik yozilishini taqozo qilmoqda.

Darslik muallifning O'zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakultetida o'qigan ma'ruzalari asosida yozildi. Albatta, darslikda muallifning differensial geometriya kursini o'qitishga bo'lgan o'z nuqtai nazari ifoda etilgan. Darslikning birinchi nashri kirill alifbosida 2003-yilda "Universitet" nashriyotida chop etilgan edi. O'tgan yillar davomida darslik O'zbekiston Milliy universiteti va boshqa universitetlarda o'quv jarayonida ishlatildi. Bu jarayonda darslikdagi nashriy kamchiliklar, matnni terishdagi nuqsonlar va muallif tomonidan yo'l qo'yilgan xatolar aniqlandi va tuzatildi.

Toshkent, 2018 yil, dekabr

KIRISH

“Differensial geometriya” kursida uch o‘lchamli fazodagi chiziqlar va sirtlar matematik analiz yordamida o‘rganiladi. Ma’lumki, “Analitik geometriya” kursida chiziqlar va sirtlarni o‘rganish ularning tenglamalarini tekshirish yordamida amalga oshiriladi. Shuning uchun algebraik metodlar “Analitik geometriya” kursida asosiy rol o‘ynaydi. “Differensial geometriya” kursida biz chiziq va sirtlarni tenglamalar yordamida emas, balki fazodagi ma’lum xossalarga ega bo‘lgan figuralar sifatida aniqlaymiz va ularni matematik analiz yordamida o‘rganish uchun differensialanuvchini funksiyalar yordamida parametrlaymiz. Geometriyada matematik analiz metodlarini tadbiiq qilishga Sant-Peterburg Fanlar akademiyasi a’zosi L.Eyler katta hissa qo‘shdi. U chiziqni parametrlash, sirt nuqtasida bosh yo‘nalishlar kabi muhim tushunchalarni kiritdi va juda ajoyib teoremlarni isbot qildi.

Differensial geometriyaning asosiy masalalari sistematik ravishda yoritilgan birinchi asarni Gaspar Monj yozdi. Uning «Cheksiz kichiklar analizining geometriyaga tadbiiqi» nomli kitobi 1795-yili chop etildi. G.Monjning shogirdlari D’yupen, Men’e ham sirtlar nazariyasiga katta hissa qo‘shdilar.

“Geometriya” fani XIX asrda juda tez rivojlandi. 1826-yili buyuk matematik N.I.Lobachevskiy Evklid geometriyasidan farqli geometriya mavjud ekanligini ko‘rsatdi. Bu geometriyada geodezik uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 180° dan kichikdir. Gauss 1827-yili sirtning to‘liq egriligi uning ichki geometriyasiga tegishli ekanligini isbotladi. B.Riman 1854-yili Lobachevskiy geometriyasini ham o‘z ichiga oluvchi yangi geometriyani asoslab berdi. Bu geometriya *Riman geometriyasi* deb

ataladi. Riman geometriyasida geodezik uchburchaklar ichki burchaklar yig‘indisi 180° dan katta ham, kichik ham bo‘lishi mumkin.

XX asrda differensial geometriyaning rivojlanishida chiziqlar va sirtlar o‘rniga har xil differensial strukturalar kiritilgan silliq ko‘pxilliklarni o‘rganish tendensiyasi paydo bo‘ldi va rivojlandi. Bu ob’ektlarni (silliq ko‘pxilliklarni) o‘rganish qulayligi shundaki, ular chiziqlar va sirtlar kabi Evklid fazosining qism to‘plamlari sifatida emas, balki differensial struktura kiritilgan abstrakt topologik fazolar sifatida aniqlanadi. Ko‘pxilliklar nazariyasida chiziqlar va sirtlar mos ravishda bir o‘lchamli va ikki o‘lchamli ko‘pxilliklarni tashkil etadi. Hozirgi vaqtda ko‘pxilliklar nazariyasi “Geometriya” kursining asosiy qismlaridan biri bo‘lib qoldi.

I bob

UMUMIY TOPOLOGIYA ELEMENTLARI

Bu bob "Differensial geometriya" kursini o'rganishda zarur bo'ladigan umumiy topologiyaning asosiy tushunchalariga bag'ishlangan.

§ 1. Evklid fazosidagi topologiya

Haqiqiy sonlar to'plamini R^1 bilan belgilaymiz va $n \geq 1$ uchun elementlari n ta tartiblangan haqiqiy sonlar ketma-ketligidan iborat

$$R^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) : x^i \in R^1, i=1, 2, \dots, n\}$$

to'plamda $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ va $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ nuqtalar orasidagi masofani

$$d(x, y) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + \dots + (y^n - x^n)^2}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu kiritilgan $d: R^n \times R^n \rightarrow R^1$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

1) musbat aniqlangan: ixtiyoriy $x, y \in R^n$ juftlik uchun $d(x, y) \geq 0$ bo'lib, $d(x, y) = 0$ bo'lishi uchun $x = y$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarlidir.

2) simmetrik funksiyadir: ixtiyoriy x, y juftlik uchun $d(x, y) = d(y, x)$ munosabatlar o'rinli.

3) uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi: ixtiyoriy x, y, z uchta nuqta uchun $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ tengsizlik bajariladi.

Yuqorida $d(x, y)$ funksiyaning 1, 2-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Bu shartlarning uchinchi sizga matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Quyida Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (1.2)$$

tengsizlikni isbotlab, undan yuqoridagi (1.1) tengsizlikni keltirib chiqaramiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi vektor ko'rinishda $(\vec{a}, \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$ yozish mumkin. Bu tengsizlikda (\vec{a}, \vec{b}) -ifoda $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'lib, $\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a})$, $\vec{b}^2 = (\vec{b}, \vec{b})$ belgilashlar qabul qilingan. Skalyar ko'paytmadan iborat bo'lgan va haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan $f(t) = (\vec{a} + t\vec{b})^2$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning aniqlanishiga ko'ra, $f(t) \geq 0$ munosabat o'rinlidir. Bu tengsizlikni $f(t) = \vec{a}^2 + 2t(\vec{a}, \vec{b}) + t^2 \vec{b}^2 \geq 0$ ko'rinishda yozsak, u kvadrat tengsizlikka aylanadi. Uning diskriminanti uchun $(\vec{a}, \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2 \leq 0$ tengsizlikni yoza olamiz. Endi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + \\ &+ 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikdan yuqoridagi (1.1) tengsizligi kelib chiqadi.

Endi (1.1) tengsizlikdan foydalanib, d funksiya uchun uchburchak tengsizligini isbotlaylik. Buning uchun $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, $z = (z^1, z^2, \dots, z^n)$ nuqtalar uchun $a^k = x^k - z^k$, $b^k = z^k - y^k$ belgilashlar kiritilsa, (1.1) tengsizlikdan $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ tengsizlik kelib chiqadi. Kiritilgan d funksiya bilan birgalikda R^n metrik fazo bo'ladi.