

М. С. Салоҳитдинов, Г. Н. Насритдинов

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
университетларнинг ҳамда педагогика олийгоҳларининг талибалари
учун дарслик сифатида тавсия этган*

Қайта ишланган иккинчи наشري

Махсус муҳаррир ЎзР ФА нинг мухбир-аъзosi,
физика-математика фанлари доктори,
профессор Н. Ю. Сатимов

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1994

Таърифчилар:

Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг ҳақиқий аъзosi,
физика-математика фанлари доктори, профессор **Т. Д. Жўраев**,
физика-математика фанлари доктори, профессор **Х. Р. Латипов**

Муҳаррирлар:

Р. Каримов, Ю. Музаффархўжаев

Салоҳитдинов М. С., Насритдинов Г. Н.

С. 26 Олдий дифференциал тенгламалар: Ун-тларнинг ҳамда
пед. олийгоҳларининг талабалари учун дарслик сифатида
тавсия этилган (Махсус муҳаррир Н. Ю. Сатимов.) 2-қай-
та ишланган напри. — Т. : Ўзбекистон, 1994. 383 б.

1. Автордош.

ISBN 5-640-01657-4

Ушбу дарслик университетларнинг «математика» ва «амалий математи-
ка» ихтисослаклари бўйича таълим олаётган талабалари учун мўлжаллан-
ган бўлиб, ундан педагогика олийгоҳлари, олий техника ўқув юртлари
талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Дарсликда дифференциал тенгламалар назариясини баён қилиш билан
бирга, унинг амалий масалаларни ечишда татбиқ этилишига ҳам катта
эътибор берилган.

Салаҳитдинов М. С., Насритдинов Г. Н. Обыкновенные
дифференциальные уравнения.

ББК 22.161.6я 73

№ 624-93

Навоий номли Ўзбекистон
Республикаси давлат кутубхонаси.

1602070100 -04

С _____ 94
М351 (04) 94

© «ЎҚИТУВЧИ» нашриёти, Т., 1982 й.

© «ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти, Т., 1994 й.

Биринчи нашрга сўз боши

Дифференциал тенгламаларга бағишланган китоблар рус, инглиз ва бошқа тилларда кўплаб чоп этилган. Улар ичида математик олимлар Л. С. Понтрягин, В. В. Степанов, И. Г. Петровскийлар томонидан яратилган дарсликларни алоҳида қайд қилиб ўтиш лозим. Ўзбек тилида ilk дарслик академик Т. Н. Қори-Ниезий томонидан 40- йилларда ёзилган. Ўтган давр ичида дифференциал тенгламалар назарияси ва унинг татбиқ доираси кенгайиб, янада бойиди. Шу муносабат билан ўзбек тилида ҳозирги замон талабларига жавоб берадиган, амалдаги дастурларга мос келадиган дарслик ёзиш зарурати вужудга келди. Мазкур китоб шу йўлда қўйилган ilk қадам бўлиб, унга муаллифларнинг Тошкент Давлат университети математика ҳамда амалий математика ва механика факультетларида узок йиллар давомида ўқиган лекциялари асос қилиб олинди. Дарслик университетларнинг «математика» ва «амалий математика» ихтисосликлари талабалари учун мўлжалланган, лекин ундан педагогика олийгоҳлари, олий техника ўқув юртлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Дарсликда дифференциал тенгламалар назариясини баён қилиш билан бирга уларнинг амалий масалаларни ечишга татбиқ этилишига ҳам катта эътибор берилди. Бу соҳада Л. С. Понтрягиннинг рус тилида чоп этилган китобидан кенг фойдаланилди.

Физика, иқтисодиёт, биология, кимё, тиббиёт ва бошқа фанларда учрайдиган кўплаб жараёнлар дифференциал тенгламалар ёрдамида тавсифланади. Шу тенгламаларни ўрганиш билан тегишли жараёнлар ҳақида бирор маълумотга, тасаввурга эга бўламиз. Ушa дифференциал тенгламалар ўрганилаётган жараённинг математик моделидан иборат бўлади. Бу модель қанча мукаммал бўлса, дифференциал тенгламаларни ўрганиш натижасида олинган маълумотлар жараёнларни шунча тўла тавсифлайди. Шуниси қизиқки, табиатда учрайдиган турли жараёнлар бир хил дифференциал тенгламалар билан тавсифланиши мумкин. Бу эса «бир ўқ билан икки қаргани отиш» имконини беради, яъни агар бирор математик моделни тўла ўрганилса, тегишли натижадан турли жараёнларни тушунтиришда фойдаланса бўлади. Айтилган фикрлар дифференциал тенгламаларнинг умумий назарияси ва амалий масалаларни ечишга татбиқи муҳим аҳамият касб этишини англатади.

Дарслик олий ўқув юртларининг дифференциал тенгламалар бўйича мавжуд дастурлари асосида ёзилган бўлиб, баён этилган

материал тилининг равонлигига, математик жиддийлигига катта эътибор берилди. Кўпчилик мавзулар баёнига ижодий ёндашилди. Жумладан, дифференциал тенглама (тенгламалар системаси) ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги, ϵ -такрибий ечим, чегаравий масалалар, чизикли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламаларни (системаларни) ўрганишда Грин функциясидан фойдаланиш, лимит давралар, ечимларнинг тургунлиги каби катор мавзуларни санаб ўтиш мумкин.

Китобдаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга оид материални академик М. С. Салоҳитдинов, оддий дифференциал тенгламаларга оид материални эса проф. Г. Насритдинов ёзди.

Муаллифлар китоб кўлёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, ўз фикр-мулоҳазаларини билдирган китобнинг илмий муҳаррири Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг муҳбир аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор Нўъмон Юнусович Сатимовга, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг ҳақиқий аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор Т. Д. Жўраевга ва физика-математика фанлари доктори, профессор Х. Р. Латиповга ўзларининг чуқур миннатдорчиликларини изҳор этадилар.

Иккинчи нашрга сўз боши

Дарсликнинг иккинчи нашрида аввало унинг дастлабки нашрида учраган айрим ноаниқликлар тўғрилиди. Ундан ташқари баъзи материаллар бошқача баён этилди. Баъзилари эса янги материаллар билан алмаштирилди. Айрим материалларни қисқартириш мақсадга мувофиқ деб топилди.

Иккинчи нашрни тайёрлаш жараёнида ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган хамкасб дўстларимизга миннатдорчилик изҳор қиламиз.

ДАРСЛИКДА УЧРАЙДИГАН АСОСИЙ БЕЛГИЛАР

$\mathbf{R}$ (ёки $\mathbf{R}^1$) — барча хакикий сонлар тўплами.

$\mathbf{R}_+$ (ёки $\mathbf{R}_+$) — барча мусбат (манфий) хакикий сонлар тўплами.

$\mathbf{R}^2$ — сонлар текислиги, яъни $\mathbf{R}^2 = \{(a, b) : a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$.

$I \subset \mathbf{R}$ тўпланининг қисми бўлиб, у очик, ёпик, ярим очик, ярим ёпик, чекли ёки чексиз интервалдан иборат.

I_x — x нинг ўзгариш интервали.

$C(\mathbf{R})$ — $\mathbf{R}$ тўпланда узлуксиз бўлган функциялар синфи.

$C(I)$ — I интервалда узлуксиз бўлган функциялар синфи.

$C^1(\mathbf{R})$ (ёки $C^1(I)$) — $\mathbf{R}$ тўпланда (ёки I интервалда) узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи.

$\varphi(x) \in C(\mathbf{R})$ (ёки $\varphi(x) \in C(I)$) — $\varphi(x)$ функция $\mathbf{R}$ тўпланда (ёки I интервалда) узлуксиз функциялар синфига тегишли.

$\varphi(x) \in C^1(\mathbf{R})$ (ёки $\varphi(x) \in C^1(I)$) — $\varphi(x)$ функция $\mathbf{R}$ тўпланда (ёки I интервалда) узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфига тегишли.

$\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ текисликининг қисмидан иборат бўлган соҳа.

$C(\Gamma)$ — Γ соҳада узлуксиз бўлган функциялар синфи.

$C^1(\Gamma)$ — Γ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи.

$f(x, y) \in C^1(\Gamma)$ — $f(x, y)$ функция Γ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфига тегишли.

$\mathbf{R}^3 = \{(a, b, c) : a \in \mathbf{R}^1, b \in \mathbf{R}^1, c \in \mathbf{R}^1\}$.

$\mathbf{R}^k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_i \in \mathbf{R}^1, i = 1, 2, \dots, k\}$.

$D_3 \subset \mathbf{R}^3$ фазонинг қисмидан иборат соҳа.

$D_k \subset \mathbf{R}^k$ фазонинг қисмидан иборат соҳа.

$C^n(I)$ — I интервалда n марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи.

$\varphi(x) \in C^n(I)$ — $\varphi(x)$ функция I интервалда n марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфига тегишли.

КИРИШ

1-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Табиатда учрайдиган турли жараёнлар (автомобиль ҳаракати, тайёранинг учиши, физик, химик ва биологик жараёнлар ва ҳ. к.) ўз ҳаракат қонунларига эга. Баъзи жараёнлар бир хил қонун бўйича содир бўлиши мумкин, бу ҳол эса уларни ўрганиш ишини енгиллаштиради. Аммо жараёнларни тавсифлайдиган қонуиларни тўғридан-тўғри топиш ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди. Характерли микдорлар ва уларнинг ҳосилалари ёки дифференциаллари орасидаги муносабатни топиш табиатан енгил бўлади. Бунда номаълум функция ёки вектор-функция ҳосила ёки дифференциал ишораси остида қатнашган муносабат ҳосил бўлади. Жумладан, $\frac{dy}{dx} =$

$=f(x, y)$ биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади. $F(x, y, y')=0$ биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилмаган оддий дифференциал тенглама дейилса, $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$ — n -тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади. $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ — n -тартибли юқори тартибли ҳосилага нисбатан ечилган оддий дифференциал тенглама дейилади. Агар $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ ёки $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ лар $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ва $y^{(n)}$ аргументларга нисбатан чизикли функциялар бўлса, тегишли дифференциал тенглама *чизикли* дейилади. Юқоридаги дифференциал тенгламаларда номаълум функция бир аргументли деб қаралади. Аслида номаълум функция кўп аргументли бўлган ҳоллар ҳам тез-тез учрайди. Бундай ҳолда дифференциал тенглама *хусусий ҳосилали* дейилади. Ушбу $F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})=0$ тенглама биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламалардан,

$$\Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

тенглама эса иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан иборат. Қуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Лаплас тенгламаси}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (\text{Пуассон тенгламаси})$$

тенгламалар иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг муҳим хусусий ҳоллари ҳисобланади, уларда номаълум функция икки аргументлидир.

2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАГА ОЛИБ КЕЛИНАДИГАН БАЪЗИ МАСАЛАЛАР

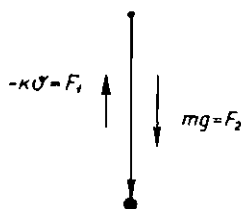
1-м а с а л а. Массаси m бўлган жисм $v(0) = v_0$ бошланғич тезлик билан бирор баландликдан ташлаб юборилган. Жисм тезлигининг ўзгариш қонунини топиш (1-чизма).

Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра:

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

бу ерда F — жисмга таъсир этаётган кучларнинг йиғиндиси (тенг таъсир этувчиси). Жисмга факат иккита куч таъсир этиши мумкин деб ҳисоблайлик: ҳавонинг қаршилик кучи $F_1 = -kv$, $k > 0$; ернинг тортиш кучи $F_2 = mg$. Шундай қилиб, математик нуктаи назардан F куч

а) F_2 га; б) F_1 га; в) $F_1 + F_2$ га тенг бўлиши мумкин.



1-чизма

а) $F = F_2$ бўлсин. Унда биринчи тартибли $m \frac{dv}{dt} = mg$ дифференциал тенгламага эгамиз. Оддий ҳисоблашлар бу тенгламада номаълум функция $v_1(t) = gt + C$ (C — ихтиёрий ўзгармас сон) кўринишда бўлишини кўрсатади. $v(0) = v_0$ бўлгани учун $C = v_0$ деб олиш мумкин, у ҳолда изланган қонун $v_1(t) = gt + v_0$ кўринишда бўлади.

б) Агар $F = F_1$ бўлса, $m \frac{dv}{dt} = -kv$, бунда $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$ экани равшан.

в) $F = F_1 + F_2$ бўлсин. Бу ҳолда ушбу $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$ ($k > 0$) дифференциал тенгламага келамиз. Номаълум функция v

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}; \quad v(0) = v_0, \quad v_2(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

кўринишда бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Равшанки, $\lim_{k \rightarrow 0} v_2(t) = v_1(t)$. Ҳақиқатан,

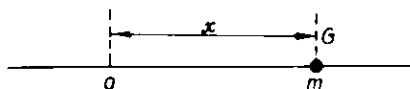
$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} v_2(t) &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 \lim_{k \rightarrow 0} e^{-\frac{k}{m}t} - \\ &- mg \lim_{k \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{k}{m}t} + 1 \right) \left(-\frac{t}{m} \right) = v_0 + gt = v_1(t). \end{aligned}$$

2-масса. Массаси m бўлган моддий нукта тўғри чизикли ҳаракат қилмоқда. Унинг ҳаракат қонунини топинг.

Ҳар бир моментда G нуктадан координата бошигача бўлган масофа x бўлса (2-чизма), нуктанинг тезлиги $\dot{x}$ ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$) бўлади.

Моддий нуктага икки ташки куч: ишқаланиш кучи $-b\dot{x}$, $b > 0$ ва таранглик кучи kx , $k > 0$ таъсир этади дейлик. Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан G нуктанинг ҳаракати

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$$

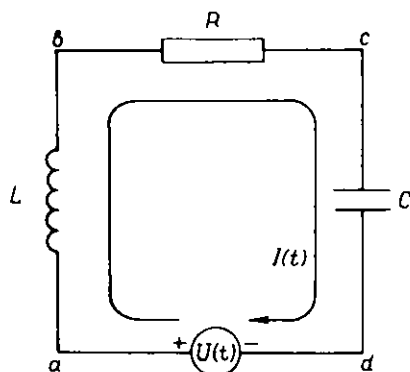


2-чизма

қонун билан содир бўлади. Бу иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир. Агар моддий нукта двигател билан таъминланган бўлиб, двигателнинг G нуктага таъсир кучи F бўлса, у ҳолда G нинг ҳаракат қонуни

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + F$$

бўлади. Кўпинча F миқдор $|F| \leq F_0 = \text{const}$ муносабатга бўйсунади.



3-чизма

3-масса. Тўртта икки қутб-ликлардан тузилган ёпик электр занжири берилган (3-чизма). Икки қутб-ликлар: ab — индуктивлик (L), bc — қаршилик (R), cd — сўғим (C); кучланиш манбаи ($U(t)$) — da . Вакт ўтиши билан ёпик электр занжирида электр токи $I(t)$ нинг ўзгариш қонунини топинг.

Кирхгофнинг биринчи қонунига кўра ([1], 83–84-бетлар)

$$I_{ab}(t) + I_{cb}(t) = 0, \quad I_{ab}(t) = I_{bc}(t).$$

Шунга ўхшаш,

$$I_{bc}(t) = I_{cd}(t), \quad I_{da}(t) = I_{ab}(t),$$

яъни

$$I_{ab}(t) = I_{bc}(t) = I_{cd}(t) = I_{da}(t) = I(t).$$

Кирхгофнинг иккинчи қонунига кўра:

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + U_{cd}(t) + U_{da}(t) = 0.$$

Энди

$$U_{ab}(t) = L \frac{dI(t)}{dt}, \quad U_{bc}(t) = RI(t).$$

$$U_{cd}(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt, \quad U_{da}(t) = -U(t)$$

муносабатлардан фойдалансак:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt - U(t) = 0.$$

Агар $U(t) \in C^1$ (C^1 – бир марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи) бўлса, у ҳолда юқоридаги тенгламанинг ҳар бир ҳаддини t бўйича дифференциаллаб, $I(t)$ нинг ўзгариш қонунини ифодаловчи

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dU(t)}{dt}$$

тенгламага келамиз. Албатта, бу масалада ҳам турли хусусий ҳолларни кўриш мумкин эди.

4-масала. Математик тебрангич (маятник)нинг ҳаракат тенгламасини келтириб чиқаринг.

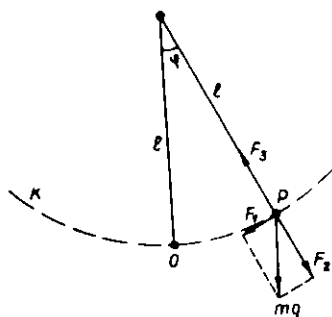
Вертикал текисликда ётган l радиусли K айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсири остида ҳаракат қилувчи m массага эга бўлган P нукта математик тебрангични тасвирлайди (4-чизма). Ҳар бир моментда P нуктанинг ўрни $\varphi(t)$ бурчак билан тўла аниқланади. Масаланинг шарт бўйича P нукта фақат оғирлик кучи таъсири остида ҳаракат қилади. Аммо бу ҳаракатда айлананинг роли бор. У P нуктани айлана бўйлаб ҳаракат қилишга мажбур этади, яъни P нуктага айлананинг ички нормали бўйича йўналган F куч билан таъсир этади. Агар тортиш кучи mg ни иккита ташкил этувчига ажратсак: $F_1 = -mg \sin \varphi$, $F_2 = -mg \cos \varphi$, у ҳолда $F_3 + F_2 = 0$ бўлади. Шундай қилиб, P га таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси $F = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 = -mg \sin \varphi$. Демак, P нуктанинг ҳаракат тенгламаси Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан

$$m l \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \text{ ёки } l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

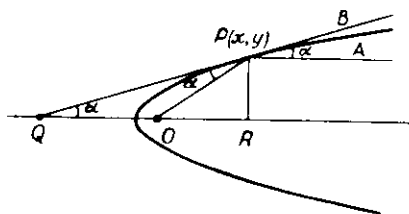
кўринишда бўлади.

5-масала. Агар ёруғлик манбаи O нуктага ўрнатилган бўлса, кўзгунинг шакли ундан қайтган нурулар горизонтал ўққа параллел бўлиши учун қандай бўлиши керак?

Горизонтал ўқни Ox , вертикал ўқни Oy дейлик. Кўзгу сиртини xOy текислиги билан кесишдан ҳосил бўлган эгри чизикни кўрамиз. $P(x, y)$ – шу чизикдаги ихтиёрий нукта бўлиб, унда олинган эгри чизикқа ўтказилган уринма билан Ox ўқининг кесишган нуктаси O бўлсин (5-чизма). Равшанки, $\angle ORQ = \angle OQP$ (чунки нурунинг тушиш ва қайтиш бурчаклари тенг бўлади, яъни $\angle APB = \angle ORQ = \alpha$). Шу сабабли, $|OQ| = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = RP$. Агар $y > 0$ десак,



4- чизма



5- чизма

$$\frac{dy}{dx} = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \text{ ёки } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}.$$

Бундан

$$-\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

дифференциал тенглама келиб чиқади. Унда номатълум функция $y(x)$ ушбу

$$y^2 = 2C \left(x + \frac{C}{2} \right), \quad C = \text{const}, \quad y > 0$$

кўринишга эга эканини текшириб кўриш қийин эмас. Бу эса $C \neq 0$ бўлгани учун параболадан иборат.

Масаланинг шартига кўра, шу эгри чизик Ox ўкига нисбатан симметрик бўлади. Шунинг учун юкоридаги функцияда $y < 0$ бўлиши ҳам мумкин. Шундай қилиб, қўйилган масалани текисликда кўрсак, ёруғлик манбаи параболанинг фокусида бўлади.

Агар параболани Ox ўқи атрофида айлантирсак, айланма параболоид ҳосил бўлади. Демак, кўзгу формаси айланма параболоиддан иборат бўлиб, O нукта унинг фокусида ётади.

6-масала. Хайвонларнинг бирор тури ўзгармас муҳитда алоҳида яшасин дейлик. Урчиш ва ўлишнинг даврийлигини ҳисобга олмай кўрилатган тур индивидуумлари сонининг ўзгариш қонунини топинг.

Масаланинг шартига кўра вақтнинг берилган кичик интервалида урчиш ва ўлишлар сони берилган моментда индивидуумлар сонига пропорционал бўлади. N индивидуумлар сонининг ўсиши кўрилатган интервалда N сонига пропорционал бўлиб, бу ўсиш интервал кичик бўлганда унинг узунлигига ҳам пропорционал бўлади. Шундай қилиб, N сон t нинг функцияси ва унинг ўсиши (яъни $\frac{dN}{dt}$) $N(t)$

га пропорционалдир. $N(t)$ функцияни узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи деб қарасак, ушбу

$$\frac{dN(t)}{dt} = \epsilon N(t), \quad N(t_0) = N_0 > 0$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз, бу ерда ϵ - пропорционаллик коэффициент (ϵ ўсиш коэффициент). Урчиш қонуни дифференциал тенглама билан берилган функциянинг кўриниши $N(t) = N_0 e^{\epsilon(t-t_0)}$ эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Бундан келиб чиқадики, вақт арифметик прогрессия бўйича ўзгарса, индивидуумлар сони геометрик прогрессия бўйича ўзгаради. Агар $\epsilon > 0$ бўлса, N ўсади; агар $\epsilon < 0$ бўлса, N камаяди. $\epsilon = 0$ бўлганда $N = \text{const}$ бўлиб, урчиш ўлишни тўла қоплайди.

Бу масалада муҳитни ўзгарувчан деб ҳисоблаш ва бу муҳитда хайвонларнинг бир неча тури яшашни деб қараш, сўнгра турларнинг орасидаги баъзи муносабатларга қараб ҳар бир тур индивидуумлари сонининг ўзгариш қонунини топиш масаласини ҳам қўйиш мумкин. Биз бунга тўхталмаймиз.

ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1.1-§. ЕЧИМ ТУШУНЧАСИ. КОШИ МАСАЛАСИНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Даставвал биз биринчи тартибли битта дифференциал тенгламани кўрамиз. Юқорида

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.1')$$

тенгламани биринчи тартибли ҳосиллага нисбатан ечилмаган оддий дифференциал тенглама деб атадик, унда x — эркин ўзгарувчи, y — унинг номаълум функцияси, $y' = \frac{dy}{dx}$ эса номаълум функциянинг

ҳосиласи. (1.1') кўринишда ёзиладиган тенгламаларни биз 3-бобда ўрганамиз. Ҳозир (1.1') нинг муҳим хусусий ҳолига тўхталамиз. (1.1') тенглама учта x , y ва y' ўзгарувчини боғлайди. Баъзи ҳолларда бу тенглама y' ни x ва y нинг функцияси сифатида аниқлайди. Бу ҳолда (1.1') тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.1)$$

дифференциал тенгламага тенг кучли бўлади. (1.1) тенглама, одатда, *ҳосиллага нисбатан ечилган* дейилади. Кўп ҳолларда (1.1) кўринишдаги тенгламаларни ўрганишнинг қулайлиги бор. Энди биз (1.1) тенглама (1.1') ни y' га нисбатан ечиш натижасида ҳосил бўлган деб қарамасдан, балки (1.1) да $f(x, y)$ функция Γ соҳада¹ берилган деб қараймиз. Мазкур бобда ана шундай дифференциал тенгламаларни ўрганамиз.

1.1-таъриф. (1.1) тенглама берилган бўлиб, унда $f(x, y)$ функция $\mathbb{R}^2$ текисликнинг Γ соҳасида аниқланган бўлсин. Агар I (очиқ, ёпиқ ёки ярим очиқ) интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция учун қуйидаги уч шарт:

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ. (x, \varphi(x)) \in \Gamma, \Gamma \subset \mathbb{R}^2, x \in I, \\ 2^\circ. \varphi(x) \in C^1(I)^{**}, \\ 3^\circ. \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)), x \in I \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

¹ Соҳа дейилганда бўш бўлмаган очиқ боғланган тўпламни тушунилади. Қайд қиламизки, агар берилган Γ тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи ва шу тўпламга тегишли бирор синик чизик мавжуд бўлса, у ҳолда Γ тўплам *боғланган* дейилади.

^{**} Агар I интервал ёпиқ бўлса, y ҳолда унинг чан учида ўнг ҳосила, ўнг учида эса чап ҳосила назарда тутилади. Аниқ ҳолларда: I ёпиқ бўлса, *оралиқ* сўзини, y очиқ ёки ярим очиқ бўлса, *интервал* сўзини ишлатамиз.

бажарилса, y ҳолда бу функция I интервалда (1.1) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.

Агар $y = \varphi(x)$, $x \in I$ функция (1.1) тенгламанинг ечими бўлса, y (1.1) тенгламани қаноатлантиради, деб ҳам айтилади.

(1.1) дифференциал тенгламанинг ҳар бир $y = \varphi(x)$ ечимига мос келган эгри чизик (яъни $y = \varphi(x)$ функциянинг графиги) шу тенгламанинг интеграл эгри чизиги (ёки соддагина, интеграл чизиги) дейилади.

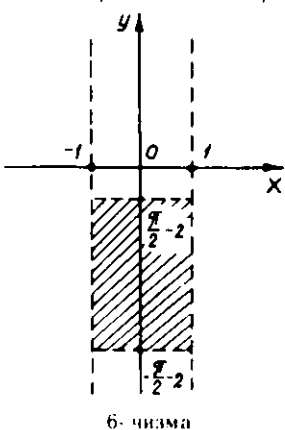
Ушбу $\frac{dy}{dx} = 2x$ тенглама учун $I = \mathbb{R}^2$ бўлиб, $\varphi(x) = x^2 + 1$ функция $\mathbb{R}^1$ тўпламда (яъни $-\infty < x < +\infty$ интервалда) ечим бўлади. Ҳақиқатан, таърифга кўра:

$$1^\circ. (x, x^2 + 1) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}^1; 2^\circ. (x^2 + 1) \in C^1(\mathbb{R}^1); 3^\circ. \frac{d(x^2 + 1)}{dx} = 2x.$$

Шунга ўхшаш, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ тенглама учун $I = (-1, 1)$ бўлиб,

$\varphi(x) = \arcsin x - 2$ функция шу $(-1, 1)$ интервалда ечим бўлади. Бу ҳолда $\Gamma = \{(x, y) : -1 < x < 1, -\frac{\pi}{2} - 2 < y < \frac{\pi}{2} - 2\}$ (6-чизма).

(1.1) тенгламанинг ечими баъзи ҳолларда ошқормас $\Phi(x, y) = 0$ кўринишда бўлса, баъзи ҳолларда параметрик $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 < t < t_1$, $x'(t) \neq 0$ кўринишда бўлиши мумкин. Хулоса қилиб айтганда, тенгламанинг берилишига қараб унинг ечими қуйидаги



6-чизма

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x); & \Phi(x, y) &= 0 \\ x &= x(t), & y &= y(t) \end{aligned}$$

кўринишлардан бирортаси орқали ёзилади.

Коши масаласининг қўйилиши: (1.1) тенглама берилган бўлиб, унда $f(x, y)$ функция $\mathbb{R}^2$ текислигининг Γ соҳасида аниқланган, узлуксиз ва I интервал x ўқидаги интервал бўлсин, x_0 ни ўз ичига оладиган I интервални ва шу I интервалда аниқланган узлуксиз дифференциалланувчи ҳамда ушбу

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. (x, \varphi(x)) &\in \Gamma (x \in I), \\ 2^\circ. \varphi'(x) &\equiv f(x, \varphi(x)) (x \in I), \\ 3^\circ. \varphi(x_0) &= y_0, (x_0, y_0) \in \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

шартларни қаноатлантирувчи $y = \varphi(x)$ функцияни топиш талаб этилади. Бу масала қисқача

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

каби ёзилади ва (1.1) тенглама учун **Коши масаласи** (ёки **бошланғич масала**) деб аталади. Юқоридаги 1^o, 2^o ва 3^o шартларни қаноатлантирадиган функция I интервалда (К) **Коши масаласининг ечими** дейилади. Яна (К) масаланинг ечими $y = \varphi(x)$ x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ёки $\varphi(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантиради, деб юритилади.

Энди Γ соҳанинг (К) масала ягона ечимга эга бўладиган (x, y) нукталаридан тузилган қисмини $D_2^* \subset \Gamma$ ($D_2 = \Gamma$) деб белгилайлик. Шунга кўра D_2^* тўпламнинг ҳар бир (x, y) нуктасидан (1.1) тенгламанинг ягона интеграл чизиги ўтади.

1.2-таъриф. (1.1) дифференциал тенглама ва x, C ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳасида аниқланган ҳамда x бўйича узлуксиз дифференциалланувчи

$$y = \varphi(x, C) \quad (1.4)$$

функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $(x, y) \in D_2^*$ нукта учун (1.4) муносабат C нинг

$$C = \psi(x, y) \quad (1.4')$$

қийматини бир қийматли аниқласа ва бу қийматни ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_x(x, C) \quad (1.4'')$$

тенгликка қўйиш натижасида (1.1) тенглама ҳосил бўлса, y ҳолда (1.4) функция (1.1) тенгламанинг D_2^* тўпланда аниқланган умумий ечими дейилади.

(1.4) функция ихтиёрий ўзгармас C га боғлиқ ва демак, (1.4) га чизиклар оиласининг тенгламаси деб қараш мумкин. Баъзида C ни параметр деб ҳам юритилади.

1.3-таъриф. (1.1) тенглама ва (1.4) чизиклар оиласи берилган бўлсин. Агар: 1) $\varphi(x, C)$ функция I интервалда x бўйича узлуксиз ҳосилга эга бўлса; 2) ҳар бир $(x, y) \in D_2^*$ нукта учун (1.4) муносабат C нинг (1.4') қийматини бир қийматли аниқласа; 3) $y = \varphi(x, \psi(x, y))$ функция (1.1) тенгламанинг ечими бўлса, y ҳолда (1.4) функция (1.1) тенгламанинг умумий ечими дейилади.

Дифференциал тенгламалар назариясида (1.1) тенгламанинг барча ечимларини топиш асосий масала ҳисобланади. Барча ечимларни топиш жараёни дифференциал тенгламани интеграллаш (ечиш) дейилади. Агар (1.1) тенгламанинг ечимини элементар функциялар ва уларнинг интеграллари ёрдамида ёзиш мумкин бўлса, y ҳолда дифференциал тенглама *квадратураларда интегралланади* дейилади.

$$\text{Агар} \quad \Phi(x, y, C) = 0 \quad (1.4''')$$

муносабат D_2^* тўпланда $y = \varphi(x, C)$ умумий ечимни аниқласа, y ҳолда (1.4''') ни (1.1) дифференциал тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади. Шундай қилиб, биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y = \varphi(x, C)$ битта ихтиёрий ўзгармас сонни ўз ичига олади. Бир параметрли силлиқ чизиклар оиласининг дифференциал тенгламаси биринчи тартибли дифференциал тенгламадан иборат.

Ҳақиқатан, (1.4) силлиқ чизиклар оиласи берилган, яъни $\varphi(x, C)$ функциянинг аниқланиш соҳасида узлуксиз $\varphi'_x(x, C)$ ва $\varphi'_C(x, C)$ ҳосилалар мавжуд бўлсин. (1.4) ни x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = \varphi'_x(x, C). \quad (1.4'')$$

Агар (1.4'') нинг ўнг томони C га боғлиқ бўлмаса, биз C ни чиқариб ташладик деб ҳисоблаб,

$$y' = \varphi'_x(x)$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Агар (1.4'') нинг ўнг томони C га боғлиқ бўлса, (1.4) нинг ўнг томони ҳам C га боғлиқ бўлади, яъни $\varphi'_x(x, C) \neq 0$. Шунинг учун (x_0, C_0) нуктанинг бирор атрофида C ни x ва y нинг функцияси $C = \psi(x, y)$ сифатида аниқлашимиз мумкин. Равшанки, x ва S лар бўйича $\psi(x, \varphi(x, C)) \equiv C$ айният ўринли. C учун топилган қийматни (1.4'') га қўйиб,

$$y' = \varphi'_x(x, \psi(x, y))$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага эга бўламиз. (1.4) функция ихтиёрий C учун шу дифференциал тенгламанинг ечими эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Юқоридаги мулоҳазалар берилган силлиқ чизиклар оиласининг дифференциал тенгламасини топиш йўлини ҳам кўрсатади.

Масалан, $y = Ce^x$ чизиклар оиласи берилган бўлсин. У ҳолда $y' = Ce^x = y$. Изланган дифференциал тенглама $y' = y$ бўлади. Равшанки, бу тенгламанинг умумий ечими: $y = Ce^x$.

(1.1) дифференциал тенгламанинг (1.4) муносабат ўз ичига олмаган ечимлари ҳам бўлиши мумкин. Биз уларга кейинроқ тўхталамиз.

Агар умумий ечим маълум бўлмаса, Коши масаласини ечиш қийинлашади. Бунда дифференциал тенглама тақрибий интеграллаш усуллари ёрдамида ечилади. Биз бу усулларга тўхталмаймиз. 2-бобда ε -тақрибий ечимни куриш билан танишамиз ҳолос.

Мисоллар. 1. $y = \sin(x + C)$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < C < +\infty$ чизиклар оиласининг дифференциал тенгламасини топилисин.

$$\begin{cases} y' = \cos(x + C), \\ y = \sin(x + C) \end{cases}$$

муносабатлардан $y'^2 + y^2 = 1$, $-\infty < x < +\infty$ дифференциал тенглама келиб чиқади.

2. $y' = y \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$, $-\infty < y < +\infty$ дифференциал тенгламанинг $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ шартни қаноатлантирадиган ечими топилисин.

Берилган тенгламанинг умумий ечими $y = C \sin x$ бўлиб, ундан шартга кўра $2 = C \sin \frac{\pi}{6}$ экан $C = 4$ бўлади. Демак, $y(x) = 4 \sin x$ функция изланган ечимдир.

1.2- §. МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАЛАРИ

«Ҳар бир (1.1) кўринишдаги дифференциал тенглама учун Коши масаласи ((1.1), (1.3)) нинг ечими борми? Агар бундай ечим бор бўлса, ягонами?» деган саволларга жавоб бериш керак бўлади.

Юқоридаги саволларга жавоб берадиган теоремалар **мавжудлик ва ягоналик теоремалари** деб юритилади. Қуйида улардан асосийларини келтирамиз.

1.1-теорема (Коши теоремаси). Агар $f(x, y)$ функция Γ соҳада аниқланган ва ўзлуксиз бўлиб, унинг y бўйича ҳусусий ҳосиласи

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ бирор $Q(Q \subset \Gamma)$ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса,

y ҳолда:

1°. (1.1) тенгламанинг x_0 ни ўз ичига оладиган бирор интервалда аниқланган ва ҳар бир берилган $(x_0, y_0) \in Q$ нуқта учун $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд.

2°. Агар (1.1) тенгламанинг иккита $y = \varphi(x)$ ва $y = \psi(x)$ ечимлари x_0 да устма-уст тушса, яъни $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$ бўлса, y ҳолда бу $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ ечимлар аниқланиш соҳаларининг умумий қисмида устма-уст тушади.

1.4-таъриф. Агар $f(x, y)$ функция Γ соҳада аниқланган бўлиб, шу функция учун шундай $L \geq 0$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $(x, y_1) \in \Gamma$, $(x, y_2) \in \Gamma$ нуқталар учун ушбу

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_2 - y_1| \quad (1)$$

тенгсизлик бажарилса, y ҳолда $f(x, y)$ функция Γ соҳада y бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради дейилади, L эса Липшиц ўзгармаси дейилади.

1.2-теорема (Коши-Пикар-Линделёф теоремаси). Агар $f(x, y)$ функция Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, Γ соҳада y бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, y ҳолда ҳар бир $(x_0, y_0) \in \Gamma$ учун шундай ўзгармас $h > 0$ сон топиладики, натижада (1.1) тенгламанинг (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $I = \{x: |x - x_0| \leq h\}$ ораліқда аниқланган ягона ечими мавжуд бўлади.

1.3-теорема (Пеано теоремаси). Агар $f(x, y)$ функция Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, y ҳолда Γ соҳанинг берилган $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтаси учун (1.1) тенгламанинг (1.3) шартни қаноатлантирадиган камида битта ечими мавжуд бўлади.

Юқоридаги теоремаларнинг қўлланилишига доир мисол кўрайлик. Ушбу

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-2) = 1 \end{cases}$$

Коши масаласида $\Gamma = \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ га кўра $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y):$

$y=0, x \in \mathbb{R}^1\}$, $Q \subset \mathbb{R}^2$ экани келиб чиқади. Равшанки, $\Gamma = Q \cup \{(x, y):$

$y=0, x \in \mathbb{R}^1\}$ ва $(-2, 1) \in Q$, $y' = y^{\frac{2}{3}}$ тенгламанинг умумий ечими

$y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ — кубик параболалардан иборат. Бундан $x = -2$;

$y = 1$ бўлганда $C = 5$ келиб чиқади. Демак, Коши масаласининг ечими $y = \left(\frac{x+5}{3}\right)^3$ бўлиб, бу ечим Q да ягонадир. Бунга ишонч

хосил қилиш учун, масалан, Коши теоремасининг шартлари берилган дифференциал тенглама учун бажарилишини текшириб чиқиш kiffoя.

Ушбу

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-2) = 0 \end{cases}$$

Коши масаласини кўрсак, унда $\Gamma = \mathbf{R}^2$ ва $(-2, 0) \in \Gamma$. Аммо $(-2, 0)$ нуктада $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ функция узлуксиз эмас. Демак, Коши теоремасининг шартни бажарилмайди. Шунинг учун ягоналикни тасдиқлаб бўлмайди. Аслида $(-2, 0)$ нуктадан ўтадиган интеграл чизиклар сони саноксиз (континуум) тўпламни ташкил этади. Ҳақиқатан, $(-2, 0)$ нуктадан $y = \left(\frac{x+2}{3}\right)^3$ кубик парабола ўтади ва у интеграл чизикдан иборат. Шу $(-2, 0)$ нуктадан $y = 0$ интеграл чизик ҳам ўтади. Шунинг учун, масалан, ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+2}{3}\right)^3, & \text{агар } x \leq -2 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } -2 \leq x \leq -k, \quad -k > -2 \text{ бўлса,} \\ \left(\frac{x+k}{3}\right)^3, & \text{агар } x \geq -k \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция берилган тенгламанинг $\mathbf{R}^2$ да аниқланган ечими бўлади. Бундан k нинг ҳар бир қийматида унга мос ечим ҳосил қилиш мумкин. k нинг $-k > -2$ тенгсизлиқни қаноатлантирадиган қийматлари саноксиз тўпламни ташкил этгани учун юқоридаги тасдиқнинг тўғрилиги келиб чиқади.

Кўрилган масалада $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$ функция $\mathbf{R}^2$ да узлуксиз. Пеано теоремаси бўйича $\mathbf{R}^2$ нинг ихтиёрий тайинланган нуктасидан берилган дифференциал тенгламанинг камида битта интеграл чизиги ўтиши керак. Юқоридаги мулоҳазаларга кўра $\mathbf{R}^2$ нинг ихтиёрий тайинланган нуктасидан саноксиз интеграл чизиклар ўтади, аммо

Q тўламда қаралган $y' = y^{\frac{2}{3}}$ дифференциал тенгламанинг бу тўламнинг ҳар бир тайинланган нуктасидан ягона интеграл чизиги ўтади.

Ушбу

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \Gamma = \{(x, y) : -1 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

дифференциал тенглама учун $y(-2) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ечим мавжуд эмас, чунки $(-2, 0) \in \Gamma$.

Мавжудлик ва ягоналик теоремаларида $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ечимлар ўзлари аниқланган интервалларнинг умумий қисмида бир хил бўлиши ҳақида гап боради. Жумладан, агар $y = \varphi(x)$ функция $I_1 = \{x : r_1 < x < r_2\}$ да, $y = \psi(x)$ функция $I_2 = \{x : s_1 < x < s_2\}$ да аниқланган ва $x_0 \in I_1 \cap I_2$ учун $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ бўлса у ҳолда

$$\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad x \in I_1 \cap I_2.$$

Лекин бу тасдиқдан зинҳор $I_1 = I_2$ экани келиб чиқмайди. Агар $I_1 \supset I_2$ бўлса, I_1 да аниқланган $y = \varphi(x)$ ечим $y = \varphi(x)$ ечимнинг давоми дейилади. Бизни, албатта, давом эттириш мумкин бўлмаган ечимлар кизиқтиради. Бундай ечимларни *давомсиз ечимлар* деб юритамиз.

Аникроғи, агар $y = \varphi(x)$ функция (1.1) тенгламанинг I_1 интервалда аниқланган ечими бўлиб, шу ечимнинг давомидан иборат бўлган ҳеч қандай ечим мавжуд бўлмаса, у ҳолда $y = \varphi(x)$ ечим давомсиз ечим дейилади.

Давомсиз ечимларнинг аниқланиш интервали I шу ечимлар аниқланишининг максимал интервали дейилади. Кейинроқ (1.12- § га қараган) ҳар бир ечим давомсиз ечимгача давом эттирилиши мумкинлиги исботланади.

Бундан кейинги мулоҳазаларда интеграл чизик сифатида давомсиз ечимнинг графиги тушунилади.

Қайд қиламизки, $y = \varphi(x)$ ечимнинг геометрик маъноси сифатида $\varphi(x)$ функциянинг графиги тушунилган эди. Энди (1.1) тенгламанинг геометрик маъносига тўхталамиз: Γ соҳанинг ҳар бир (x, y) нуктасидан $f(x, y)$ бурчак коэффициентли $l(x, y)$ тўғри чизикни ўтказамиз. Сўнгра ҳар бир (x, y) нуктада тегишли $l(x, y)$ тўғри чизик бўйлаб йўналган, Ox ўқ билан $\arctg y'$ бурчак ташкил этадиган стрелкаларни қўйиб чиқамиз. Натижада (1.1) тенгламага мос *йўналишлар майдони* ҳосил бўлади.

Ҳар бир $y = \varphi(x)$ интеграл чизик ўзининг ҳар бир $(x, \varphi(x))$ нуктасида $l(x, \varphi(x))$ тўғри чизикка уринади. Бу эса (1.1) дифференциал тенглама билан унинг ечими орасидаги боғланишни беради.

1.3-§. ИЗОКЛИНАЛАР

(1.1) дифференциал тенгламани кўрайлик. Ҳар бир $(x, y) \in \Gamma$ нукта учун $f(x, y)$ микдор (x, y) нуктадан ўтадиган интеграл чизикка (агар у мавжуд бўлса) ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. Бундан интеграл чизикларни тахминан чизишда фойдаланиш мумкин. Шу мақсадда изоклина тушунчасини киритамиз.

1.5-таъриф. *Изоклина деб текисликдаги шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтиладики, у нуқталарда берилган (1.1) дифференциал тенглама интеграл чизикларига ўтказилган уринмалар Ox ўқининг мусбат йўналиши билан бир хил бурчак ташкил этади.*

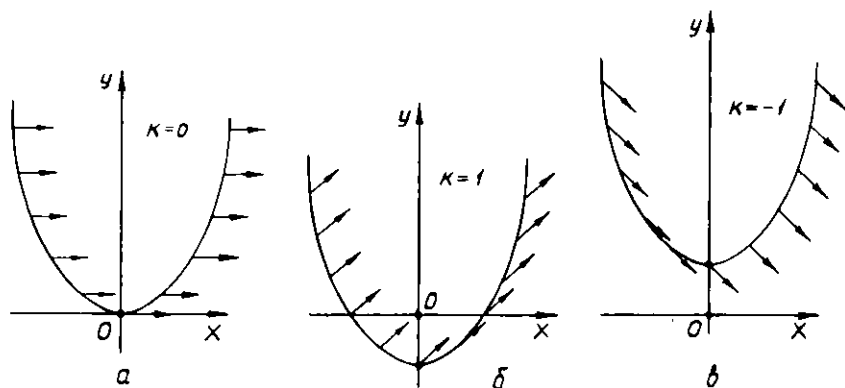
Таърифга кўра, изоклина тенгламаси

$$f(x, y) = k, \quad k = \text{const}$$

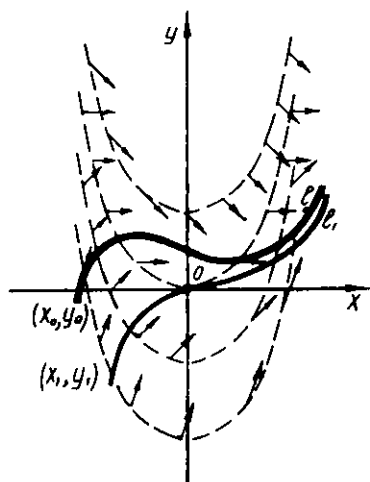
кўринишда бўлади. Аввал шу таърифга доир мисол кўрамиз.

Ушбу $y' = x^2 - y$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бунда $\Gamma = \mathbb{R}^2$ бўлиб, ихтиёрий $(x, y) \in \Gamma$ учун $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -1$. Коши теоремасига кўра $\mathbb{R}^2$ текислигининг ихтиёрий (x, y) нуктаси орқали берилган дифференциал тенгламанинг ягона интеграл чизиги ўтиши келиб чиқади. Демак, интеграл чизикларини чизиш ҳақида мулоҳаза юритиш маънога эга. Изоклина тенгламаси $x^2 - y = k, k = \text{const}$. Бу $\mathbb{R}^2$ текисликда ботиклиги юқорига қараган парабодалар оиласидан

иборат. k нинг ҳар бир қийматида тегишли изоклинага эгамиз. Жумладан, $k=0$ да $y=x^2$, $k=1$ да $y=x^2-1$, $y=-1$ да $y=x^2+1$ ва бошқалар. Равшанки, $y=x^2$ параболани интеграл чизиклар кесади ва кесишиш нукталарида интеграл чизиклар горизонтал уринмаларга



7- чизма



8- чизма

эга бўлади (7,а-чизма). Шунга ўхшаш, $y=x^2-1$ параболани кесадиган интеграл чизикларнинг ҳар бир нуктасида уринманинг бурчак коэффициенти 1 га, $y=x^2+1$ учун эса тегишли бурчак коэффициент -- 1 га тенг (7, б, в-чизма). Ҳар бир изоклина кесиб ўтишдаги йўналишларни стрелкалар билан кўрсатамиз. Натижада текисликда йўналишлар майдони ҳосил бўлади. Текисликда ихтиёрий (x, y) нуктани олайлик. Бу нуктадан ўтадиган шундай эгри чизик чизамизки, бу чизик ўзининг ҳар бир нуктасида тегишли майдон йўналишига эга бўлсин. Бу чизик (x, y) нуктадан ўтадиган интеграл чизикни тахминан тасвирлайди (8-чизма).

Ма ш к. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг интеграл чизикларини изоклиналар ёрдамида тахминан чизинг:

1. $y' = a$, $a = \text{const}$;

3. $y' = \frac{y}{x}$;

2. $y' = 2x - 1$;

4. $y' = \frac{x}{y}$.

1.4-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ СОДДА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Биз бу параграфда содда дифференциал тенгламаларнинг икки турини интеграллаш билан шуғулланамиз.

1. $\frac{dy}{dx} = f(x)$ кўринишдаги тенгламани интеграллаш. $f(x)$ функция бирор I интервалда узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда умумий ечим

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi + C, \quad x \in I, \quad x_0 \in I, \quad (C — \text{ихтиёрий ўзгармас})$$

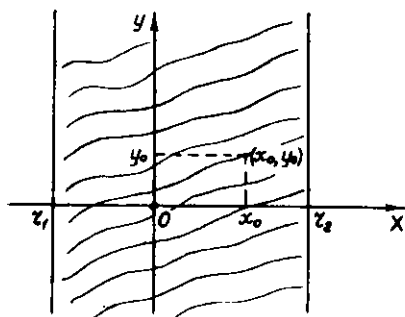
кўринишда ёзилади. Ундан $y' = f(x)$. C нинг $C=0$ қиймати тенгламанинг $y(x_0) = 0$ шартни, $C = y_0$ қиймати эса $y(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирувчи ечимига мос келади.

Берилган дифференциал тенглама учун

$$\Gamma = \{(x, y) : x \in I, -\infty < y < +\infty\}$$

(9-чизмага қаранг), унда $I = [x: r_1 < x < r_2]$.

Энди Γ соҳанинг ихтиёрий (x_0, y_0) нуқтасини олайлик. Унга $C = y_0$ тўғри келади. Бундан Γ соҳанинг ихтиёрий нуқтасидан берилган дифференциал тенгламанинг фақат битта интеграл чизиги ўтиши келиб чиқади.



9- чизма

М а ш к. Ушбу.

$$1. \frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}; \quad 2. \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad 3. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

дифференциал тенгламаларни интеграллаш ва интеграл чизикларини чизинг.

2. $\frac{dy}{dx} = g(y)$ кўринишдаги тенгламани интеграллаш. Бу тенгламада $g(y)$ функция I_y интервалда узлуксиз ва нолга айланмайди дейлик. Агар берилган тенглама ўрнига

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(y)}$$

тенгламани кўрсак, бу ҳолда $F(y) = \frac{1}{g(y)}$ функция ҳам I_y интервалда узлуксиз бўлади. Шундай экан, охириги тенглама учун аввалги

пунктдаги мулоҳазаларни юритиш мумкин. Бошқача айтганда, тегишли тенгламанинг умумий ечими

$$x(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\xi)} d\xi + C, \quad y \in I_y, \quad y_0 \in I_y \quad (C - \text{ихтиёрий ўзгармас})$$

кўринишда ёзилади.

Э с л а т м а . Юкорида кўрилган содда дифференциал тенгламаларда $f(x)$ ва $g(y)$ функциялар тегишли интервалда узлуксиз ҳамда $g(y)$ нолга айланмайди деб қаралади. Агар $f(x)$ функция I_x интервалда битта ёки бир нечта нуктада 1-тур ёки 2-тур узилишга эга бўлса, бу ҳолда берилган дифференциал тенглама учун ечим ва умумий ечим тушунчасини киритиб, «интеграл чизиклар» устида гапириш мумкин эди. Шунга ўхшаш, $g(y)$ функция I_y интервалда узлуксиз ва битта ёки бир нечта нукталарда нолга айланган ҳолда ҳам ечим тушунчаси ва «интеграл чизиклар» ҳақида фикр юритиш мумкин эди. Биз бунга тўхталмаймиз.

1.5-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (1.5)$$

кўринишдаги тенгламалар *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар* дейилади. (1.5) дифференциал тенгламани интеграллаш билан шугулланамиз.

1.4-теорема. Агар $f(x)$ функция I_x интервалда, $g(y)$ функция I_y интервалда узлуксиз бўлиб, $g(y) \neq 0, y \in I_y$ бўлса, $Q = \{(x, y) : x \in I_x, y \in I_y\}$ тўғри тўртбurchакнинг ихтиёрий берилган ички (x_0, y_0) нуктасидан (1.5) дифференциал тенгламанинг фақат битта интеграл чизиги ўтади.

И с б о т . Теоремани исботлаш учун (1.5) дифференциал тенгламанинг $(x_0, y_0) \in Q$ нуктадан ўтадиган интеграл чизиги борлигини ва унинг ягоналигини кўрсатиш кифоя. (1.5) тенгламанинг $\varphi(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y = \varphi(x)$ ечими бор деб фараз этамиз. У ҳолда

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)g(\varphi(x)), \quad (x, \varphi(x)) \in Q.$$

Бундан

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = f(x)dx, \quad (x, \varphi(x)) \in Q,$$

чунки $g(y) \neq 0, y \in I_y$. Охирги тенгликнинг икки томонини x_0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{g(\varphi(\xi))} = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

ёки

$$\int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi(\xi)}{g(\varphi(\xi))} = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

Агар $\Phi(y)$ функция $\frac{1}{g(y)}$ учун, $F(x)$ функция эса $f(x)$ учун бирор бошланғич функция бўлса, у ҳолда тенглик бундай ёзилади:

$$\Phi(\varphi(x)) - \Phi(y_0) = F(x) - F(x_0). \quad (1.6)$$

$g(y) \neq 0$, $y \in I_y$ га кўра $\Phi(y)$ функция I_y интервалда монотон функциядир, чунки $\Phi'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$. Шунинг учун (1.6) тенгликни $\varphi(x)$ га нисбатан бир қийматли ечим мумкин:

$$\varphi(x) = \Phi^{-1}[\Phi(y_0) + F(x) - F(x_0)], \quad (1.7)$$

бунда Φ^{-1} функция Φ га тескари функциядир. Демак, тегишли ечим бор деб фараз этилса, у ечимнинг ягоналиги ва (1.7) формула билан ёзиллиги исбот этилади.

Энди (1.5) дифференциал тенгламанинг $\varphi(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y = \varphi(x)$ ечими борлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан, (1.7) формула билан ифодаланган $\varphi(x)$ функция x_0 нуктанинг бирор атрофида (1.5) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Бунинг учун (1.6) ни х бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d\Phi(\varphi(x))}{d\varphi(x)} \varphi'(x) = F'(x),$$

бундан

$$\frac{1}{g(\varphi(x))} \varphi'(x) = f(x) \quad \text{ёки} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)g(\varphi(x)).$$

Равшанки, $\varphi(x_0) = \Phi^{-1}[\Phi(y_0)] = y_0$. Шундай қилиб, (1.7) функция изланган ечимдир. 1.1-теорема тўла исбот бўлди.

Э с л а т м а . Юкоридаги мулоҳазалар (1.5) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ёзишга имкон беради. Агар 1.1-теореманинг шартлари бажарилса, у ҳолда (1.5) нинг ҳамма ечимлари ушбу

$$\int_{y_0}^y d\tau = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi + C, \quad (1.8)$$

формула (C ихтиёрий ўзгармас) ёрдамида ифодаланади. Ҳақиқатан $\varphi(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирган $y = \varphi(x)$ ечим учун (1.8) дан $C = 0$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш ҳар бир ихтиёрий олинган $(x_1, y_1) \in Q$, $(x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$ нуктага C нинг факат битта қиймати мос келади.

М и с о л . Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad Q = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$$

дифференциал тенглама интеграллансин.

Бу (1.5) кўринишдаги дифференциал тенгламадан иборат. (1.8) формулага кўра

$$\int_{y_0}^y \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} + C$$

ёки

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0 = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0 + C.$$

Бундан

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y_0 - \operatorname{arctg} x_0 + C).$$

Ихтиёрий $(x, y) \in Q$ нуктадан ўтувчи интеграл чизик учун

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + C)$$

деб ёзиш мумкин.

Машик. Ушбу дифференциал тенгламалар интеграллансин:

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{y-1}, \quad y > 1;$
2. $\frac{dy}{dx} = (1+x^2) \sqrt{1-y^2}, \quad |y| < 1;$
3. $\frac{dy}{dx} = e^y \sin x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y^2}}{y} x \cos x, \quad y > 0;$
5. $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x, \quad y > 0.$

1.6-§. БИР ЖИНСЛИ ВА УНГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Бир жинсли тенгламалар.

1.6-таъриф. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.9)$$

кўринишда ёзиладиган тенглама бир жинсли дифференциал тенглама дейилади.

(1.9) тенгламада $h\left(\frac{y}{x}\right)$ функция фақат $\frac{y}{x}$ нисбатининг функцияси бўлиб, у нолини тартибли бир жинсли функциядир¹.

$h(u)$ функция $a < u < b$ интервалда аниқланган дейлик. ($a \leq u < b$, $a < u \leq b$, $a \leq u \leq b$ интерваллар учун ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш бўлади.) $x > 0$ бўлганда $h\left(\frac{y}{x}\right)$ функция $ax < y < bx$ тенгсизликлар билан аниқланган соҳада, $x < 0$ бўлганда эса $bx < y < ax$ тенгсизликлар билан аниқланган соҳада берилган бўлади. Икки ҳолда ҳам бу соҳани Γ деймиз.

1.5-теорема. Агар $h(u)$ функция $a < u < b$ интервалда узлуксиз бўлиб, шу интервалнинг барча нукталарида $h(u) \neq u$ бўлса, ҳар бир $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуктадан (1.9) дифференциал тенгламанинг фақат битта интеграл чизиги ўтади.

Исбот. $y = ux$ десак, (1.9) тенглама

$$xu' + u = h(u)$$

кўринишда ёзилади. Ундан ушбу

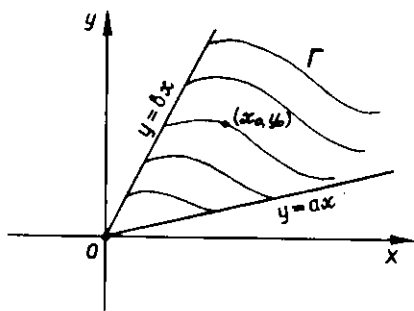
$$\frac{du}{dx} = \frac{h(u) - u}{x}$$

ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келамиз.

¹ Агар ушбу $M(k\xi, k\eta) = k^m M(\xi, \eta)$, $m \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ муносабат барча (ξ, η) лар учун ўринали булса, $M(\xi, \eta)$ функция m -тартибли бир жинсли функция дейилади. $m=0$ бўлганда $M(\xi, \eta) = M\left(1, \frac{\eta}{\xi}\right) = M^*\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$ деб ёзиш мумкин. Бир жинсли функциялар таърифини Л. Эйлер киритган.

5-§ даги белгилашларга кўра $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(u) = h(u) - u$ ва $g(u) \neq 0$, $a < u < b$. Демак, Γ соҳанинг ихтиёрий берилган (x_0, y_0) нуктасидан битта интеграл чизик ўтади (10-чизма). Умумий ечим эса (1.8) формулага кўра топилади. Ноаниқ интеграл кўринишидаги ушбу

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{h(u) - u}$$



10-чизма

муносабатдан умумий ечим формуласи

$$\ln|x| = \Phi(u) + C \text{ ёки } \ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

келиб чиқади. Бу ерда $\Phi(u)$ функция $\frac{1}{h(u) - u}$ функциянинг бирор бошлангичи. Агар $h\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$ бўлса, $h(u) = u$ ва $g(u) = 0$ бўлади.

Агар $h(u) = u$, $u = u_1, \dots, u_n$ бўлса, $\int_{u_0}^u \frac{d\xi}{h(\xi) - \xi}$ интегралнинг

$u \rightarrow u_s (s=1, 2, \dots, n)$ да яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишига қараб $u = u_s$ (яъни $y = u_s x$, $s=1, 2, \dots, n$) чизикларнинг ҳар бир нуктасидан чексиз кўп ёки битта интеграл чизик ўтади (11, а, б-чизма). Бунда ҳар бир $y = u_s x (s=1, 2, \dots, n)$ чизик (1.9) дифференциал тенгламанинг интеграл чизиғи эканини ҳисобга олиш лозим.

Машиқ. Дифференциал тенгламаларни интегралланг ва интеграл чизикларини чизинг.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; 3. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$; 5. $\frac{dy}{dx} = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$;
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; 4. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$; 6. $\frac{dy}{dx} = \cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$;

2. Бир жинсли тенгламага келтириладиган тенгламалар.

А. Ушбу

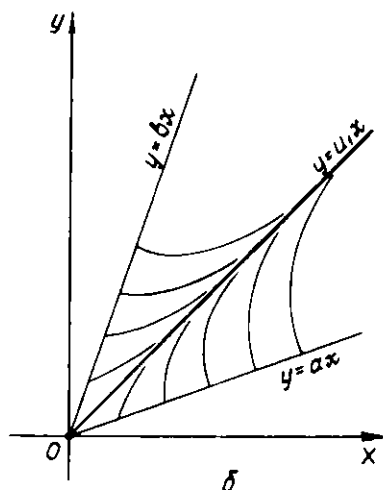
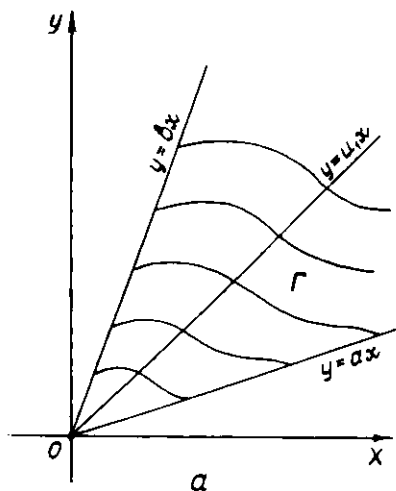
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \quad (1.10)$$

дифференциал тенгламада $f(u)$ функция бирор $a < u < b$ интервалда узлуксиз бўлсин. У ҳолда (1.10) тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтириш мумкин бўлган ҳолларни ўрганамиз.

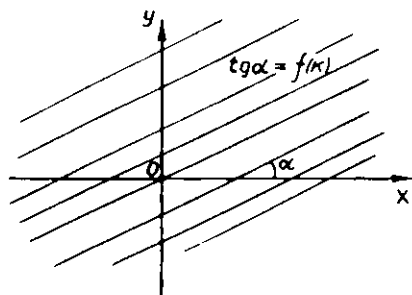
1. $c_1 = c_2 = 0$ бўлган ҳол.

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$ дифференциал тенгламага эгамиз. Агар $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлса, бу тенглама (1.9) кўринишга келади, чунки

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}\right) = f^*\left(\frac{y}{x}\right).$$



11- чизма



12- чизма

Агар $\Delta = 0$ бўлса $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ ёки $a_1 = a_2k$, $b_1 = b_2k$ деймиз. Бунда $\frac{dy}{dx} = f(k)$ га келамиз. Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y = f(k)x + C$ бўлиб, бурчак коэффициенти $f(k)$ га тенг бўлган тўғри чизиклар оиласидан иборат (12-чизма).

II. $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, яъни c_1 ва c_2 лардан камида биттаси нолдан фаркли бўлган хол.

Агар $\Delta = 0$ бўлса, у ҳолда $a_1 = a_2k$, $b_1 = b_2k$ га кўра:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right).$$

Ушбу

$$z = a_2x + b_2y \quad (1.11)$$

алмаштиришни бажарамиз, унда z — янги номатълум функция. (1.11) дан $\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx}$, кўрилатган ҳолда $b_2 = 0$ шарт 1.4-§ да кўрилган ҳолга олиб келади. Энди $b_2 \neq 0$ бўлсин.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2} \frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2}$ ни охириги дифференциал тенгламага қўйсақ,

$$\frac{1}{b_2} \frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2} = f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right)$$

ёки

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right)$$

дифференциал тенгламага келамиз.

$\Delta \neq 0$ бўлсин. Ушбу

$$\begin{cases} x = \xi + x_0, \\ y = \eta + y_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

алмаштиришни бажарамиз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}\right). \quad (1.13)$$

(1.12) алмаштиришда x_0 ва y_0 сифатида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

системанинг ечимини оламиз. Бу система ягона ечимга эга, чунки $\Delta \neq 0$. Шундай қилиб, (1.13) бундай кўринишга келади:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right).$$

Бу тенглама $\Delta \neq 0$ бўлган ҳол учун мазкур параграфнинг I қисмида кўрилган.

Хулоса қилиб айтганда, (1.10) кўринишдаги дифференциал тенглама Δ нинг қийматига қараб, масалан, $\Delta = 0$ бўлганда ё (1.11), ёки (1.12) алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага олиб келинади.

Б. Битта сунъий усулга тўхталамиз. (1.1) дифференциал тенгламада

$$y = z''' \quad (1.14)$$

алмаштириш бажарамиз, бу ерда z - янги номаълум функция, m - бирор хакикий сон:

$$\frac{dy}{dx} = mz^{m-1} \frac{dz}{dx}, \quad (mz^{m-1}) \frac{dz}{dx} = f(x, z^m),$$

бундан

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{m} z^{1-m} f(x, z^m) = g(x, z). \quad (1.15)$$

Агар m нинг бирор кийматида $g(x, z)$ функция бир жинсли бўлса, у ҳолда (1.14) алмаштириш маънога эга бўлади.

Мисол.

$$\frac{2}{3} xy y' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad |x^3| \geq y^2$$

дифференциал тенглама интеграллансин. Бу тенгламани интеграллаш учун аввал (1.14) алмаштиришни бажарамиз. Салда ҳисоблашлар

$$\frac{2}{3} x \cdot z^m m z^{m-1} \frac{dz}{dx} = \sqrt{x^6 - z^{4m}} + z^{2m}$$

ёки

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3}{2m} \frac{\sqrt{x^6 - z^{4m}} + z^{2m}}{x \cdot z^{2m-1}}$$

бўлишни кўрсатади. Бу дифференциал тенглама бир жинсли бўлиши учун $m = \frac{3}{2}$ бўлиши равшан. Шундай қилиб, $y = z^{\frac{2}{3}}$. Бундан $y = \sqrt[3]{z^2} = z \sqrt[3]{z}$, $y^2 = |z^{\frac{4}{3}}|$. Берилган дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{x^6 - z^6} + z^3}{x z^2}$$

$z = ux$ алмаштириш натижасида

$$\frac{u^2 du}{\sqrt{1 - u^6}} = \frac{dx}{x}$$

дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаб, аввал $u = \frac{z}{x}$ дан, сўнг

$z = y^{\frac{2}{3}}$ дан фойдалансак, дифференциал тенгламанинг умумий ечимини

$$\arcsin \frac{y^2}{|x^3|} = \ln C x^4$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади (ҳисоблашларни тўла бажариш китобхонага топширилади).

1.7-§. ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1.7-тариф. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \quad (1.16)$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама дейилади.

(1.16) тенгламада $a(x)$ ва $b(x)$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Демак, Γ соҳа текисликда y ихтиёрий бўлганда x га қўйилган $x \in I$ шарт билан аниқланади, яъни $\Gamma = \{(x, y) : x \in I, -\infty < y < +\infty\}$. Бу тўплам интервалнинг қандай бўлишига қараб тасма (кентлик), ярим текислик ва текисликдан иборат бўлиши мумкин.

1.6-теорема. Агар $a(x)$ ва $b(x)$ функциялар I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлса, y ҳолда Γ соҳанинг ихтиёрий олинган (x_0, y_0) , $x_0 \in I$ нуқтасидан (1.16) тенгламанинг I интервалда аниқланган битта интеграл чизиги ўтади ва y

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(x)}, \quad A(x) = \int_{x_0}^x a(\tau) d\tau \quad (1.17)$$

формула билан ифодаланади.

Исбот. Аввало (x_0, y_0) нуқтадан ўтадиган интеграл чизиқнинг мавжудлигини текширайлик. Ҳақиқатан, (1.16) дифференциал тенгламада $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ бўлиб, бу функция Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз. Ундан ташқари $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = a(x)$ ҳосила I ин-

тервалда узлуксиз. Демак, Коши теоремасига кўра Γ соҳанинг ихтиёрий олинган (x_0, y_0) нуқтасидан ўтадиган интеграл чизиқ мавжуд ва ягонадир. Энди ўша интеграл чизикни ифодаловчи функцияни излаймиз. (1.17) функция изланган функция эканини исбот этамиз. Бу функция учун $y(x_0) = y_0$ экани равшан. Унинг ҳосиласини ҳисоблайлик:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-A(x)} b(x) e^{A(x)} + \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) a(x) e^{A(x)} = b(x) + a(x)y$$

Шундай қилиб, (1.17) функция учун ечим ҳақидаги 1.4-таърифнинг шартлари ўринлидир. (1.17) формулада иштирок этган функциялар I интервалда аниқланганлигини қайд қиламиз. Демак, (1.17) функция I интервалда аниқланган ва давомсиз ечим бўлади. Бу чизикли дифференциал тенгламаларнинг муҳим хоссасидир. Теорема исбот бўлди.

1.7-теорема. (1.16) дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = \left(C + \int_{x_0}^x e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(x)}, \quad (C - \text{ихтиёрий ўзгармас}) \quad (1.17')$$

формула билан ифодаланади.

Исбот. Равшанки, (1.17') функция (1.16) тенгламанинг ечимидир. Энди (1.17') формула ҳамма ечимларни ўз ичига олишини кўрсатамиз. $y = \varphi(x)$ функция (1.16) дифференциал тенгламанинг бирор I_x интервалда аниқланган ечими бўлиб, $\xi_0 = \varphi(\tau_0)$, $\tau_0 \in I_x$, бўлсин. Юқоридаги мулоҳазалардан (1.6-теоремага қаранг) $I_x \subset I$ экани келиб чиқади. (1.17) формуладан C ни танлаш усули билан шу $y = \varphi(x)$ ечимни ҳосил қилиш мумкинлигини исботлаймиз. Унинг учун

$$\left(C + \int_{x_0}^{x_0} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(x_0)} = \xi_0$$

тенглама C га нисбатан битта ечимга эга бўлиши зарур. Кўриниб турибдики:

$$C = \xi_0 e^{-A(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau.$$

Энди $y = \varphi(x)$ ечим учун

$$\varphi(x) = \left(\xi_0 e^{-A(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau + \int_{x_0}^x e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(x)}$$

формулага эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

Юқорида исботланган (1.17) формулани иккинчи усул билан исботлайлик. Агар (1.16) дифференциал тенгламада $b(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

тенглама (1.16) га мос бир жинсли дифференциал тенглама дейилади; $b(x) \not\equiv 0$ бўлганда (1.16) тенглама биринчи тартибли чизиqli бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама дейилади. (1.18) тенгламанинг бир жинсли деб юритилиши (1.16) да $b(x) \equiv 0$ бўлиши билан боғланган бўлиб, (1.9) бир жинсли дифференциал тенгламага алоқаси йўқ.

(1.18) дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир (5-§ га қаранг). Унинг умумий ечими.

$$y = C e^{A(x)} \quad (C - \text{ихтиёрий ўзгармас}) \quad (1.19)$$

кўринишда ёзилади. Энди (1.16) тенгламанинг умумий ечимини

$$y = \psi(x) e^{A(x)} \quad (1.20)$$

кўринишда излаймиз. $\psi(x)$ бу ерда I интервалда аниқланган изланадиган функция. Тавсия этилган усулни ўзгармасни варацациялаш усули деб юритилади. Фаразга кўра, (1.20) функция (1.16) дифференциал тенгламани айниятга айлантириши лозим:

$$\psi'(x) e^{A(x)} + \psi(x) a(x) e^{A(x)} = a(x) \psi(x) e^{A(x)} + b(x)$$

ёки

$$\psi'(x) e^{A(x)} = b(x).$$

Бундан

$$\psi(x) = C + \int_{x_0}^x e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \quad (C - \text{ихтиёрий ўзгармас}).$$

$\psi(x)$ функция учун топилган ифодани (1.20) га қўйсак (1.17') формула келиб чиқади.

Мисол. 1. $y' + y \lg x = \sec x$, $\Gamma = \{(x, y) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < y < +\infty\}$, диф-

ференциал тенглама интеграллансин.

Бу тенгламада $a(x) = -\lg x$, $b(x) = \sec x$. Унинг умумий ечими (1.17') га кўра

$$y = \left(C + \int e^{\int \lg x dx} \sec x dx \right) e^{-\int \lg x dx} = \left(C + \int \frac{dx}{\cos^2 x} \right) \cos x = C \cos x + \sin x.$$

Демак, $y = C \cos x + \sin x$.

2. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \lg y + \sec y}, \quad \Gamma = \{(x, y) : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, -\infty < x < +\infty\}$$

дифференциал тенглама интеграллансин. Бу тенгламада y номаълум функция бўлиб, x эркин ўзгарувчидир. Кўриниб турибдики, берилган тенглама чизикли эмас. Агар x ва y ларнинг ролларини алмаштирсак, 1-мисолдаги дифференциал тенгламага келамиз.

1.8-§. БЕРНУЛЛИ ВА РИККАТИ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1. Бернулли тенгламаси.

1.8-таъриф. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^\alpha \quad (1.21)$$

тенглама Бернулли тенгламаси дейилади. Бу тенгламада $a(x)$ ва $b(x)$ лар бирор I интервалда аниқланган функциялар, α — бирор ҳақиқий сон ($\alpha \in \mathbb{R}$). Равшанки, агар $\alpha = 0$ бўлса, (1.16) дифференциал тенгламага эга бўламиз, агар $\alpha = 1$ бўлса.

$$\frac{dy}{dx} = [a(x) + b(x)]y$$

тенгламага келамиз. Бу эса ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Демак, Бернулли тенгламаси $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ бўлганда бизга маълум дифференциал тенгламаларга айланади. Энди $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ деб фараз этамиз.

1.8-теорема. Агар $a(x)$, $b(x)$ функциялар I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\alpha > 1$ бўлса, y ҳолда $\Gamma = \{(x, y) : x \in I, -\infty < y < +\infty\}$ соҳанинг ихтиёрий олинган (x_0, y_0) нуктасидан (1.21) тенгламанинг I интервалда аниқланган битта интеграл чизиги ўтади.

Исбот. (1.21) тенгламада $f(x, y) = a(x)y + b(x)y^\alpha$ ва $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = a(x) + \alpha b(x)y^{\alpha-1}$, $\alpha > 1$ бўлгани учун бу функция Γ да узлуксиз. Демак, Коши теоремасига кўра, Γ соҳанинг ихтиёрий (x_0, y_0) нуктасидан (1.21) дифференциал тенгламанинг битта интеграл чизиги ўтади.

Агар $y_0 = 0$ бўлса, $\alpha > 1$ бўлганда Бернулли тенгламасининг ечими $y = 0$, $x \in I$ бўлади. Бу хусусий ечимдир. Аммо $\alpha < 1$ бўлганда $\frac{\partial f}{\partial y}$ функция $y = 0$ да узилишга эга ва $(x_0, 0)$ нуктада ечимнинг ягоналиги бузилиши мумкин. Агар $0 < \alpha < 1$ бўлса, $y \equiv 0$, $x \in I$ функция махсус ечим бўлади, яъни $y \equiv 0$ нинг ҳар бир нуктаси орқали камида битта (кўрилатган ҳолда бирдан ортик) интеграл чизик

ўтади. Буни кўрсатиш учун аввал (1.21) ни $n \neq 0$; 1 да квадратура-ларда интеграллаймиз. $y \neq 0$ дейлик. Дифференциал тенгламанинг барча ҳадларини y^α га бўлиб

$$y^{1-\alpha} = z \quad (1.22)$$

алмаштиришни бажарамиз:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x),$$

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x). \quad (1.23)$$

Бу (1.23) тенглама z га нисбатан биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама. Унинг умумий ечими

$$z = \left(C + \int e^{-(1-\alpha)a(x)dx} (1-\alpha)b(x)dx \right) e^{(1-\alpha)a(x)dx} = CA(x) + B(x)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда $A(x)$, $B(x)$ лар I интервалда узлуксиз функциялар. (1.21) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = (CA(x) + B(x))^{1-\alpha}.$$

Агар $x=x_0$, $y=y_0=0$ ва $0 < \alpha < 1$ бўлса, бу формула ёрдамида ушбу

$$y = (C \cdot A(x_0) + B(x_0))^{1-\alpha} = 0.$$

тенгламадан C нинг ягона қийматини топа оламиз, яъни

$$C = -\frac{B(x_0)}{A(x_0)}. \text{ Шундай қилиб, } (x_0, 0) \text{ нуктадан } y = \left(-\frac{B(x_0)}{A(x_0)} A(x) + B(x) \right)^{1-\alpha} \neq 0 \text{ интеграл чизик ўтади.}$$

Равшанки, $0 < \alpha < 1$ бўлганда (1.21) тенглама $y \equiv 0$, $x \in I$ ечимга ҳам эга. Бу ечим ҳам $(x_0, 0)$ нуктадан ўтадиган интеграл чизикни ифодалайди. Демак, 1) Бернулли тенгламаси квадратураларда интегралланади; 2) Бернулли тенгламаси $0 < \alpha < 1$ бўлганда $y \equiv 0$, $x \in I$ махсус ечимга эга.

2. Риккати тенгламаси.

1.9-таъриф. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (1.25)$$

тенглама Риккати тенгламаси дейилади. Бунда $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\Gamma = \{(x, y); x \in I, -\infty < y < +\infty\}$. Равшанки, агар (1.25) да $a(x) \equiv 0$, $x \in I$ бўлса, чизикли тенгламага, $c(x) \equiv 0$, $x \in I$ бўлса, Бернулли тенгламасига эга бўламиз. Шунинг учун кейинги мулоҳазаларда I интервалда $a(x) \neq 0$, $c(x) \neq 0$ деб фараз этилади.

(1.25) дифференциал тенгламанинг ўнг томони Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, y бўйича узлуксиз дифференциалланувчи (чунки $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2a(x)y + b(x)$). Демак, Γ соҳада Коши теоремасининг шартлари ўринли. Γ соҳанинг ихтиёрий олинган (x_0, y_0) нуктасидан Риккати тенгламасининг битта интеграл чизиги ўтади.

Шуни қайд қиламизки, умуман айтганда, Риккати тенгламаси квадратураларда интегралланмайди. Қуйида битта хусусий ҳолни келтирамиз.

1.9-теорема. *Агар Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими маълум бўлса, бу тенглама квадратураларда интегралланади.*

Исб о т. $y = \varphi(x)$, $x \in I$ функция (1.25) тенгламанинг бирор хусусий ечими бўлсин. $y = \varphi(x) + z$ алмаштириш бажарамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} = a(x)[\varphi(x) + z]^2 + b(x)[\varphi(x) + z] + c(x).$$

Бундан, $\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv a(x)[\varphi(x)]^2 + b(x)\varphi(x) + c(x)$, $x \in I$ эканини ҳисобга олсак, ушбу

$$\frac{dz}{dx} = [2a(x)\varphi(x) + b(x)]z + a(x)z^2$$

Бернулли тенгламаси келиб чиқади. Бу тенглама эса квадратураларда интегралланади. 1.9-теорема исбот бўлди.

Мисоллар кўришда баъзи ҳолларда Риккати тенгламаси учун хусусий ечимини бирор кўринишда излаш ва уни топиш мумкин бўлади. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$$

тенглама Риккати тенгламаси бўлиб, унинг хусусий ечимини $\varphi(x) = ax + b$ кўринишда излаш мақсадга мувофиқдир. Бундан

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a, \quad a = -(ax + b)^2 + 2x(ax + b) + (5 - x^2) \quad \text{ва} \quad a = 1, \quad b = \pm 2$$

келиб чиқади. Текшириш кўрсатадики, $\varphi(x) = x + 2$ ҳам, $\varphi(x) = x - 2$ ҳам хусусий ечим бўлади. Агар $\varphi(x) = x + 2$ ни олсак, тегишли Бернулли тенгламаси

$$\frac{dz}{dx} = -4z - z^2$$

кўринишда бўлади ($y = \varphi(x) + z = x + 2 + z$ алмаштириш бажарилган).

Энди $z = \frac{1}{u}$ десак, $\frac{du}{dx} = 4u + 1$ тенгламага келамиз. Бу ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Унинг умумий ечими $4u + 1 = Ce^{4x}$ кўринишда бўлиб, $u = \frac{1}{z}$ ва $z = y - (x + 2)$ алмаштиришлар ёрдамида берилган Риккати тенгламасининг^{*)} умумий ечимини ёзамиз:

$$y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1}.$$

^{*)} Биз юқорида Риккати тенгламасини тўла ўрганмадик. Унинг турли хоссалари ҳақида, иккита ёки учта хусусий ечими маълум бўлгандаги квадратуралар ҳақида тўлароқ маълумотни В. В. Степановнинг китобидан [3] ўқиш мумкин.

Ҳар бир (1.1) кўринишдаги тенгламани символик равишда $dy - f(x, y)dx = 0$ кўринишда ёзишни келишиб оламиз. Биз ҳатто бундан умумийроқ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.26)$$

тенгламани кўрамиз. Уни биринчи тартибли ҳосиллага нисбатан ечилган *дифференциал тенгламанинг дифференциал шакли* деб юритилади. (1.26) да $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз.

1.10-таъриф. Агар (1.26) тенгламанинг чап томони бирор $U(x, y)$, $U(x, y) \in C^1(\Gamma)$ функциянинг тўлиқ дифференциалидан иборат бўлса, y ҳолда (1.26) тўлиқ дифференциалли тенглама дейилади.

Агар (1.26) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, y ҳолда (1.26) тенгламанинг (аниқроғи, $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, $N(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Gamma$ тенгламанинг) ҳар бир $y = \varphi(x)$ ечими учун $U(x, \varphi(x)) = \text{const}$ айн timer ўринли. Аксинча, бирор интервалда аниқланган ва

$$U(x, y) = C \quad (1.27)$$

тенгламадан ошқормас функция сифатида аниқланадиган ҳар бир $y = \varphi(x)$ функция (1.26) тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $y = \varphi(x)$ (1.26) тенгламанинг I интервалда аниқланган ечими бўлсин. Бунда куйидагига эгамиз:

$$M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \text{ ёки } \frac{d}{dx}U(x, \varphi(x)) = 0, x \in I.$$

Бундан $U(x, \varphi(x)) = \text{const}$ экани келиб чиқади. Энди $y = \varphi(x)$ функция $U(x, y) = C$ тенгламанинг ечими бўлсин, яъни $U(x, \varphi(x)) = C$. Буни x бўйича дифференциаллаб, тонамиз:

$$M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Бундан $y = \varphi(x)$ функция (1.26) нинг ечими экани келиб чиқади. Юқоридаги (1.26) тенгламанинг чап томони $U(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциалидан иборат бўлганда (1.27) муносабат (1.26) нинг *умумий ечими (умумий интеграли)*, $U(x, y)$ функция эса (1.26) нинг *интеграл*и дейилади. Аммо ҳар доим ҳам

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (1.28)$$

муносабат ўринли бўлавермайди.

1.10-теорема. Агар бир боғлам¹ Γ соҳада $M(x, y)$, $N(x, y)$ функциялар аниқланган бўлиб, шу соҳада $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ функциялар узлуксиз ҳамда шу Γ да $M^2 + N^2 \neq 0$ бўлса,

¹ Агар Γ соҳада ҳамма нукталари билан жойлашган, ўзаро кесишмайдиган ихтиёрий ёпиқ синик чизиқнинг барча ички нукталари ҳам шу Γ соҳага тегишли бўлса, Γ соҳа бир боғлам¹ дейилади. Бир боғлам¹ соҳа албатта боғланган соҳа бўлади, аммо ҳар бир боғланган соҳа ҳам бир боғлам¹ бўлавермайди.

у ҳолда (1.26) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1.29)$$

айният ўринли бўлиши зарур ҳам етарли.*)

Исбот. Зарурлиги. (1.26) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлсин. У ҳолда Γ соҳада аниқланган бирор $U(x, y)$ функция учун (1.28) муносабат ўринли бўлади. Шунинг учун:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Теореманинг шартига кўра

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

тенгликлардан Γ соҳада (1.29) айниятнинг тўғрилиги келиб чиқади.

Етарлилиги. Энди (1.29) айният Γ соҳада тўғри бўлсин. (1.26) дифференциал тенгламанинг тўлиқ дифференциалли эканини исбот этамиз. $M(x, y)$ функция Γ соҳада бирор $U(x, y)$ функциядан x бўйича олинган ҳосилага тенг деб қарашимиз мумкин, яъни

$$M(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (1.30)$$

Энди $U(x, y)$ функцияни шундай танлаймизки, $N(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$

тенглик ҳам ўринли бўлсин. Унинг учун (1.30) ни x_0 дан x гача интеграллаймиз:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \varphi(y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad x_0 \in I. \quad (1.31)$$

Бу $U(x, y)$ функция учун (1.30) бажарилади. Энди (1.31) ни y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} dt + \varphi'(y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad x_0 \in I.$$

(1.29) айниятдан фойдалансак:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial N(t, y)}{\partial y} dt + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

Агар $\varphi'(y) = N(x_0, y)$ деб танланса максдга эришамиз. Бу содда дифференциал тенглама бўлиб, $N(x_0, y)$ функция ихтиёрий $(x_0, y) \in \Gamma$ нуктада узлуксиз бўлгани учун (x_0, y) нуктадан ягона интеграл чизик ўтади. Масалан, $\varphi(y_0) = 0$ шартни қаноатлантирадиган ягона ечим

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds, \quad (x_0, y_0) \in \Gamma, \quad (x_0, y) \in \Gamma$$

* (1.29) шартни Л. Эйлер (1707 - 1783) топган.

формула билан ёзилади. Топишган ифодани (1.31) га қўйиб, $U(x, y)$ функция учун

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds$$

ифодани ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди. Теореманинг етарлилигини исботлаш бир вақтда тўлиқ дифференциалли тенгламаларни интеграллаш усулини ҳам беради.

Етарлиликнинг исботида интеграллаш аслида $(x_0, y_0) \in \Gamma$, $(x, y) \in \Gamma$ нукталарни туташтирувчи ихтиёрий эгри чизик бўйича олиб борилди. Бу Γ соҳа бир боғламли бўлгандагина мумкин.

Мисол. Ушбу $(x^2 + 2y)dx + (2x + y^2)dy = 0$ дифференциал тенгламанинг тўлиқ дифференциалли экани текширилсин ва интеграллансин.

Тенгламада $M = x^2 + 2y$, $N = 2x + y^2$. Бундан $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2$. Демак, тенгла-

ма тўлиқ дифференциалли. Энди уни интеграллаймиз.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + 2y \text{ дан } U = \frac{x^3}{3} + 2yx + \varphi(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = 2x + y^2, \quad \varphi'(y) = y^2,$$

$\varphi(y) = \frac{y^3}{3} + C_1$ келиб чиқади. Топишган натижани ўринга қўйсак ($C_1 = 0$ деб),

$$U(x, y) = \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{y^3}{3} = C$$

умумий ечимни топамиз.

Ушбу

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли, чунки $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$. Содда ҳисоблашлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(y), \quad U = \int M(x)dx + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi'(y), \quad \varphi'(y) = N(y).$$

Дифференциал тенгламанинг интеграл

$$U = \int M(x)dx + \int N(y)dy$$

функциядан иборат. Умумий интеграл эса

$$\Phi_1(x) + \Phi_2(y) = C$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\Phi_1(x)$ функция $M(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлса, $\Phi_2(y)$ функция $N(y)$ нинг бирор бошланғич функциясидир.

Агар (1.5) тенгламада $f(x) = M(x)$, $g(y) = -\frac{1}{N(y)}$, $N(y) \neq 0$ дейилса, юқорида кўрилган тўлиқ дифференциалли тенгламага келамиз. Демак, кўрилган дифференциал тенгламага ўзгарувчилари ажраладиган ва тўлиқ дифференциалли деб қарасак ҳам бўлаверади.

1.11-теорема. (1.26) дифференциал тенгламада $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ функциялар $P = \{(x, y) : x \in I, y \in I_y\}$, $P \subset \Gamma$ тўғри тўртбurchакда узлуксиз бўлиб, $N(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in P$ ва $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x, y) \in P$ бўлса, y ҳолда P тўпламининг ҳар бир берилган (x_0, y_0) нуқтасидан (1.26) тенгламининг фақат битта интеграл чизиги ўтади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра дифференциал тенгламанинг чап томони тўлиқ дифференциалдир, яъни $M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $N(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$, $N(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in P$ га кўра (1.26) дифференциал тенгламани

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

кўринишида ёзиш мумкин. Ундан

$$\frac{du(x, y)}{dx} = 0$$

ҳосил бўлади ($\frac{du}{dx}$ ҳосила $u(x, y)$ дан олинган тўлиқ ҳосила). Энди $y(x)$, $x \in I$, функция (1.26) тенгламанинг ечими бўлиши учун

$$u(x, y(x)) = C, \quad x \in I, \quad (1.32)$$

бўлиши зарур ва етарли. Фаразга кўра $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in P$.

Шу сабабдан, (1.32) ни $y(x)$ га нисбатан бир қийматли ечиш мумкин. C нинг $u(x_0, y_0) = C$ муносабат билан аниқланган қиймати (1.26) тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтайдиган ягона интеграл чизигини белгилайди ва у

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

формула ёрдамида ифодаланади. $u(x, y)$ функцияни излаш усули эса аввалги теоремада берилган.

1.10-§. ИНТЕГРАЛЛОВЧИ КўПАЙТУВЧИ

1. Γ соҳада аниқланган бирорта ҳам $U(x, y)$ функция учун (1.28) тенглик ўринли бўлмасин, яъни (1.26) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли бўлмасин.

1.11-т а ў р и ф. Агар Γ соҳада берилган $M(x, y)$, $N(x, y)$ ва бирор $\mu(x, y) \neq 0$ функциялар учун ушбу

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (1.33)$$

тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, (1.26) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциаллига келтириладиган тенглама, $\mu(x, y)$ функция эса унинг интегралловчи кўпайтувчиси дейилади.

Бундан кейин юритиладиган мулоҳазалар кўрсатадики, $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Γ соҳада дифференциалланувчи бўлса, интегралловчи кўпайтувчи $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтанинг етарли кичик атрофида албатта мавжуд бўлади.

1.12-теорема. Агар $0 \neq \mu(x, y) \in C^1(\Gamma)$, $M(x, y) \in C^1(\Gamma)$, $N(x, y) \in C^1(\Gamma)$ бўлиб, $y=y(x)$, $y(x_0)=y_0$ функция I интервалда аниқланган ҳамда (1.33) тенгламанинг ечими бўлса, y ҳолда ўша функция (1.26) тенгламанинг ҳам шу I интервалда аниқланган ечими бўлади.

Исбот. Шартга кўра, $\mu(x, y(x)) \neq 0$, $x \in I$ ва $y(x)$ функция (1.33) нинг ечими. Демак, ушбу

$$\mu(x, y(x))M(x, y(x)) + \mu(x, y(x))N(x, y(x))y'(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

айният ўринли. Ундан $M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) \equiv 0$, $x \in I$ аиният келиб чиқади. Бу эса $y(x)$ функция (1.26) тенгламанинг ечими эканини билдиради. Бу теоремадан (1.26) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлмаган ҳолда тегишли интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x, y) \neq 0$ ёрдамида ҳосил қилинган тўлиқ дифференциалли тенгламанинг умумий интегралли $u(x, y) = C$ берилган (1.26) тенгламанинг ҳам умумий интегралли бўлиши келиб чиқади.

2. Энди интегралловчи кўпайтувчинини тўларок ўрганамиз. (1.33) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлсин. У ҳолда Γ соҳада

$$\frac{\partial(\mu(x, y)M(x, y))}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu(x, y)N(x, y))}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (1.34)$$

айният ўринли. Бундан ҳосилаларни ҳисобласак

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

ёки

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

ёки $\mu(x, y) > 0$, $(x, y) \in \Gamma$ десак,

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (1.35)$$

муносабатга келамиз. Бу $\ln \mu(x, y)$ функцияга нисбатан биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама (12.2- ва 12.3-§ ларга қараңг). Биз учун шу (1.35) тенгламанинг бирор хусусий ечимини билиш етарли. Бундай ечим $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуктанинг етарли кичик атрофида M , N , $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ функциялар Γ соҳада узлуксиз бўлгани учун доим мавжуд (12.1-теоремага қараңг).

1.13-теорема. Агар (1.26) дифференциал тенглама $U(x, y) = C$ умумий интегралга эга бўлса, y ҳолда бу тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлади.

Исбот. Равшанки, $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy = 0$ ёки $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$,

$(x, y) \in \Gamma$ десак, $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$. Қайд қиламизки, агар $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$,

$(x, y) \in \Gamma$ бўлса, $0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0$ тенгламадан текислиқнинг ихтиёрий нуктаси ечим бўла олинши келиб чиқади, яъни бу ҳолда интегралланувчи дифференциал тенгламага эга бўламиз. Агар

$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \neq 0$, масалан, $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $(x, y) \in \Gamma$ бўлса, биз $dx=0$ ёки $x=\text{const}$ га эга бўламиз. Бу ҳолда ихтиёрий вертикал $x=\text{const}$ тўғри чизик интеграл чизик бўлади.

Иккинчи томондан, (1.26) га кўра

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

Шунинг учун

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} \quad \text{ёки} \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N}$$

Бундан

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N$$

теңликлар орқали Γ соҳада аниқланган $\mu(x, y)$ функцияни киритиш мумкин. Энди

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = dU = 0$$

муносабатлардан $\mu(x, y)$ функция (1.26) дифференциал теңлама учун интегралловчи кўпайтувчи экани келиб чиқади.

Қуйида иккита теоремани исботсиз келтирамыз.

1.14-теорема. Агар $\mu(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$ (1.26) дифференциал теңламанинг интегралловчи кўпайтувчиси бўлиб, $U(x, y)$ функция шу теңламанинг интегралли бўлса, у ҳолда ихтиёрий

$$\mu_1(x, y) = \mu(x, y)\Phi(U), \quad \Phi(U(x, y)) \in C^1(\Gamma) \quad (1.36)$$

функция ҳам интегралловчи кўпайтувчи бўлади.

1.15-теорема. (1.26) дифференциал теңламанинг ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчиси ушбу

$$\mu_1(x, y) = \Phi(U)\mu(x, y) \quad (1.36')$$

формула билан берилади, бунда $\mu(x, y)$ бирор интегралловчи кўпайтувчи, Φ эса (1.26) теңлама интегралли U нинг ихтиёрий узлуксиз функцияси.

Қайд қиламизки, бу теоремадан икки катъий фарк қилувчи μ ва μ_1 интегралловчи кўпайтувчилар маълум бўлганда дифференциал теңламанинг умумий интегралли $\frac{\mu_1}{\mu} = \text{const}$ экани келиб чиқади.

3. Интегралловчи кўпайтувчини топшнинг баъзи хусусий ҳолларига тўхталамиз. Шубҳасиз $\mu(x, y) \neq 0$, $\mu(x, y) \neq \text{const}$. Интегралловчи кўпайтувчи фақат x нинг ёки y нинг функцияси бўлган ҳоллар энг содда ҳоллар ҳисобланади.

а) $\mu(x, y) = \mu(x)$ бўлсин. Бунда (1.35) теңлама соддалашади (чунки $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$):

ёки

$$\begin{aligned} -N \frac{d\ln \mu}{dx} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\ \frac{d\ln \mu}{dx} &= \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

$\mu(x, y)$ функция учун юқорида қилинган фараз (1.37) нинг ўнг томони фақат x нинг функцияси бўлишидан иборатдир. (1.37) нинг икки томонини x_0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\mu(x) = C e^{\int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} \quad (1.38)$$

Бизни бирорта интегралловчи кўпайтувчи кизиктираётгани учун $C=1$ деса бўлади.

б) Энди $\mu(x, y) = \mu(y)$ бўлсин, (1.36) тенглама бундай кўринишга келади:

$$M \frac{d\ln \mu}{dy} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}.$$

Ундан y_0 дан y гача интеграллаш натижасида $((x, y_0) \in \Gamma, (x, y) \in \Gamma)$

$$\mu(y) = C e^{\int_{y_0}^y \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}}{M} dy} \quad (1.39)$$

ифодани топамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$$

чиққли дифференциал тенглама берилган бўлсин. Уни

$$[a(x)y + b(x)]dx + dy = 0$$

кўринишда ёзамиз. Бунда $M(x, y) = a(x)y + b(x)$, $N(x, y) = 1$. Равшани,

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = a(x), \quad \frac{a(x)}{N} = a(x).$$

Демак, $\mu = \mu(x)$. (1.38) га кўра:

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x a(z) dz} \quad (1.40)$$

Шундай қилиб, биринчи тартибли чиққли дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси (1.40) кўринишда бўлади.

2. Ушбу

$$(xy^2 + y)dx + xdy = 0$$

дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли эмас, чунки:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2(xy-1)}{xy^2-y} = \frac{2}{y}.$$

Демак, $\mu = \mu(y)$ бўлади. Шунинг учун

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$$

ёки $y_0=1$ деб $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ интегралловчи кўпайтувчига эга бўламиз.

Берилаган тенгламани интеграллаш жараёнини охирига етказиб қўямиз. Ушш $\frac{1}{y^2}$ га кўпайтириб, гўлук дифференциалли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(x - \frac{1}{y}\right) dx + \frac{x}{y^2} dy = 0.$$

Бу тенглама учун

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{y} = C$$

умумий ечим бўлади

в) $\mu(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$ дейлик. (1.26) дифференциал тенглама шу кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга бўлиши шартини чиқарамиз. (1.36) дан

$$M \cdot \frac{1}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dy} - N \cdot \frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu_1}{dx} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

ёки

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\psi_1(x) - M\psi_2(y) \quad (1.41)$$

га эгамиз, бу ерда

$$\psi_2(y) = \frac{1}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dy}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu_1}{dx}. \quad (1.42)$$

Шундай қилиб, агар $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ ифода (1.41) кўринишда ёзилиши мумкин бўлса, у ҳолда (1.26) тенглама $\mu = \mu_1(x)\mu_2(y)$ кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга бўлади, бунда $\mu_1(x)$ ва $\mu_2(y)$ функциялар (1.42) формулалар ёрдамида топилади:

$$\mu_1(x) = e^{\int \psi_1(x) dx}, \quad \mu_2(y) = e^{\int \psi_2(y) dy}.$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \\ M_2(y) \neq 0, N_1(x) \neq 0, (x, y) \in \Gamma, x \in I_1, y \in I_2$$

дифференциал тенглама $\mu_1(x) \mu_2(y)$ кўринишида интегралловчи кўпайтувчига эга. Ҳақиқатан, агар $M(x, y) = M_1(x) \cdot M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x) N_2(y)$ десак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} &= M_1(x) \frac{dM_2(y)}{dy} - N_2(y) \frac{dN_1(x)}{dx} = \\ &= M_1(x) M_2(y) \frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2(y)}{dy} - N_1(x) N_2(y) \frac{1}{N_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx} = \\ &= M(x, y) \frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2(y)}{dy} - N(x, y) \frac{1}{N_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Бундан

$$\Psi_1(x) = - \frac{1}{N_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx}, \quad \Psi_2(y) = - \frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2(y)}{dy}$$

ёки

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu_1}{dx} = - \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dx}, \quad \frac{1}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dy} = - \frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2}{dy}$$

ёки

$$\mu_1 = \frac{1}{N_1(x)}, \quad \mu_2 = \frac{1}{M_2(y)}.$$

Демак,

$$\mu(x, y) = \frac{1}{N_1(x) M_2(y)}.$$

Берилган тенгламанинг икки томонини шу функцияга кўпайтсак, ўзгарувчилари ажраладиган

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0$$

дифференциал тенгламага келамиз. Унинг умумий интеграл

$$\int_{x_0}^x \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C.$$

2. Ушбу

$$(y^4 - 4xy) dx + (2xy^3 - 3x^2) dy = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad \frac{1}{4} y^3 < x < \frac{2}{3} y^3$$

дифференциал тенглама интеграллансин.

Бу тенглама тўлиқ дифференциалли эмас, чунки

$$M = y^4 - 4xy, \quad N = 2xy^3 - 3x^2 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 - 4x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y^3 - 6x$$

муносабатлардан $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ тенгсизлик келиб чиқади.

Берилган дифференциал тенглама $\mu(x, y) = \mu_1(x) \mu_2(y)$ кўринишидаги интегралловчи кўпайтувчига эга, чунки

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} &= 4y^3 - 4x - (2y^3 - 6x) = (2xy^3 - 3x^2) \cdot \frac{2}{x} - (y^4 - 4xy) \cdot \frac{2}{y} = \\ &= N \frac{2}{x} - M \frac{2}{y}. \end{aligned}$$

Бундан $\Psi_1(x) = \frac{2}{x}$, $\Psi_2(y) = \frac{2}{y}$, ва $\mu_1(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$, $\mu_2(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = y^2$.

Демак, интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x, y) = x^2 y^2$ кўринишга эга (берилган тенгламани $\mu = x^2 y^2$ бўлганда тўлиқ дифференциаллига келтириб, сўнгра уни интеграллаш китобхонага мустақил иш ўрнида топширилади).

Маниқ бажараётганда баъзи ҳолларда интегралловчи кўпайтувчи

$$\mu(x, y) = \mu(x^0, y), \quad \mu(x, y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right), \quad \mu(x, y) = \mu(x^2 - y^2)$$

ва бошқа кўринишларда изланиши мумкин.

г) (1.26) дифференциал тенгламада $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Γ соҳада аниқланган, дифференциалланувчи ва m - тартибли бир жинсли бўлсин. У ҳолда (1.26) тенглама

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^m + y^m} \quad (1.43)$$

кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга. Ҳақиқатан,

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad N(x, y) = x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

ва

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Агар $\frac{y}{x} = u$ десак, $x^m M(1, u) dx + x^m N(1, u) (x du + u dx) = 0$ ёки

$$[x^m M(1, u) + u x^m N(1, u)] dx + x^{m+1} N(1, u) du = 0.$$

Бундан интегралловчи кўпайтувчи учун

$$\mu_1(x, y) = \frac{1}{x^{m+1} [M(1, u) + u N(1, u)]}$$

формула келиб чиқади. Берилган тенглама учун аввалги белгилашларга қайтиб, (1.43) формулани ҳосил қиламиз.

д) 1.15- теоремага кўра, (1.26) дифференциал тенгламанинг ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчиси $\mu_1(x, y) = \Phi(U) \mu(x, y)$ формула билан ёзлиниши мумкин. Бу формула интегралловчи кўпайтувчини топиш учун аввалги бўлимларда баён этилган усуллардан фарқ қиладиган усулни қўллашга олиб келади. Янги усул куйидагидан иборат: (1.26) тенгламани шартли равишда иккига бўламиз:

$$|M_1(x, y) dx + N_1(x, y) dy| + |M_2(x, y) dx + N_2(x, y) dy| = 0,$$

бунда $M_1 + M_2 = M$, $N_1 + N_2 = N$. Сўнгра ушбу

$$M_1 dx + N_1 dy = 0, \quad M_2 dx + N_2 dy = 0$$

тенгламаларни айрим-айрим кўрамиз. Албатта, бу дифференциал тенгламалар учун интегралловчи кўпайтувчини нисбатан осонлиқ билан топа оламиз, деб ҳисоблаймиз. Тегинли тенгламаларнинг интегралловчи кўпайтувчиларни мос равишда μ_1 ва μ_2 , интеграллари-

ни эса U_1 ва U_2 дейлик. У ҳолда юқоридаги формулага асосан ҳар бир дифференциал тенглама учун ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчини

$$\mu^* = \mu_1 \Phi_1(U_1), \quad \mu^* = \mu_2 \Phi_2(U_2)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Φ_1 ва Φ_2 ларнинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уларни шундай танлаймизки, ушбу

$$\mu^* = \mu^* = \mu$$

муносабат ўринли бўлсин. У ҳолда μ функция берилган (1.26) дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи бўлади. Амалда Φ_1 ёки Φ_2 функцияни 1 га тенг қилиб олиш мумкин.

Мисол. Ушбу $(xy^2 + y^4)dx + (x^2 - xy^4)dy = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $x > y^4$ дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси топилисин.

Бу тенгламани

$$d(xy) + \frac{y^4}{x} (ydx - xdy) = 0$$

кўринишида ёзиш мумкин. Ундан $\mu^* = \mu_1 \Phi_1(xy) = \Phi_1(xy) \cdot \frac{y^4}{x} (ydx - xdy) = 0$ тенгла-

ма учун $\mu_2 = \frac{1}{x^2 y^2}$ эканини ва бўлимдаги усул билан исботлаш мумкин. Энди $\mu^* = \mu^*$ бўлиши учун $\Phi_2 = 1$ десак,

$$\mu^* = \Phi_1(xy) = \frac{1}{x^2 y^2} = \mu$$

келиб чиқади. Демак, $\mu = \frac{1}{x^2 y^2}$ функция берилган дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи бўлади.

1.11-§. ПИКАР ТЕОРЕМАСИНИНГ ИСБОТИ

Аввал (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган ечимнинг мавжудлигини, сўнгра бу ечимнинг ягоналигини исботлаймиз.

Исботга бевосита ўтишдан аввал баъзи ёрдамчи тасдиқларга тўхталамиз. Γ соҳада маркази $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуктада бўлган ҳамда чегараси билан бутунлай шу соҳада жойлашган бирор P тўғри тўртбурчак қизиш мумкин (бунинг исботи ўқувчига ҳавола этилади). Унинг горизонтал томони узунлигини $2a$, вертикал томони узунлигини эса $2b$ деб белгилайлик, бунда a ва b лар мусбат чекли сонлар. Шундай қилиб, $P = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, $P \subset \Gamma$ бўлиб, P — ёпик чегараланган тўплам.

Γ да узлуксиз бўлган $f(x, y)$ функция P да ҳам узлуксиз бўлади. P ёпик, чегараланган бўлгани учун $f(x, y)$ унда чегараланган бўлади, яъни $\max_{(x,y) \in P} |f(x, y)| = M$, $M \geq 0$. Агар $M = 0$ бўлса, $f(x, y) \equiv$

$0 \forall (x, y) \in P$ бўлади. Бу ҳолда $(x, y) \in P$ учун (1.1) тенглама соддагина $\frac{dy}{dx} = 0$ кўринишини олади. Бу тенгламанинг $y(x_0) = y_0$

бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими $y(x) \equiv y_0$, $|x - x_0| \leq a$ каби ёзилади. Бундай ечим ягона экани равшан.

* Э. Пикар (1856–1941) мавжудлик теоремасини 1893 йилда кетма-кет яқинлашув усули билан исбот қилган.

Энди

$$\max_{(x, y) \in P} |f(x, y)| = M, \quad M > 0$$

бўлсин. Шу P тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий (x, y_1) ва (x, y_2) нукталари учун ҳам (L) тенгсизликнинг бажарилиши равшан (1.2-теореманинг шартига кўра). Қайд қиламизки, $(x_0, y_0) \in P$ нукта P тўғри тўртбурчакнинг марказидан иборат. Энди (1.1) дифференциал тенгламанинг (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x - x_0| \leq h, h \leq a$ ораликда аниқланган ягона ечимининг мавжудлигини исботлаймиз. Бунинг учун биринчи қадам дифференциал тенгламадан *интеграл тенгламага* ўтишдан иборат.

I. $y = \varphi(x)$ (1.1) тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган бирор ечими бўлиб, у (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирсин. Шундай экан, биз ушбу

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)) \quad (1.44)$$

айниятга эгамиз. Бу ҳолда $\varphi(x)$ функция учун $|x - x_0| \leq h$ ораликда

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \quad (1.45)$$

интеграл айният ўринли. Аксинча, агар бирор узлуксиз $\varphi(x)$ функция учун $|x - x_0| \leq h$ ораликда (1.45) айният ўринли бўлса, у ҳолда $y = \varphi(x)$ функция дифференциалланувчи, (1.1) тенгламанинг ечими ва (1.3) бошланғич шартни қаноатлантиради. Бошқача айтганда, (1.45) интеграл тенглама (1.3) бошланғич шарт билан бирга олинган (1.1) тенгламага *эквивалент*. Бу тасдиқ *эквивалентлик леммаси* деб юритилади. Уни исботлайлик.

(1.45) муносабат ўринли бўлсин. Унда $x = x_0$ деб $\varphi(x_0) = y_0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (1.45) дан (1.3) бошланғич шарт келиб чиқади. Равшанки, (1.45) айниятнинг ўнг томони x бўйича дифференциалланувчи, шунинг учун унинг чап томони ҳам x бўйича дифференциалланувчи бўлади. (1.45) ни дифференциаллаш натижа-сида (1.44) айниятни ҳосил қиламиз.

Энди (1.3) ва (1.44) муносабатлар ўринли бўлсин. (1.44) ни x_0 дан x гача интеграллаб

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан (1.3) га кўра (1.45) ни ҳосил қиламиз. Тасдиқ исботланди.

II. (1.1) дифференциал тенгламанинг (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган ечимининг мавжудлигини кўрсатиш (1.45) интеграл тенгламанинг худди шундай ечимининг мавжудлигини кўрсатишга келтирилади. Тавсия этиладиган усул ёрдамида аввало ечимнинг мавжудлиги исботланса, кейин у ечимни беритган аниқликда тақрибан қуриш мумкинлиги ҳам кўрсатилади.

Бошланғич (полюсчи) яқинлашнинг сифатида y_0 ни қабул қиламиз. Қуйидаги

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi,$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi,$$

қоида билан $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ... функцияларни кураимиз. Улар «маълум маънода» тақрибий ечимлар бўлади. Бу функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

2) Агар $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ бўлса, $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган $y_k(x)$, $k=1, 2, \dots$ функцияларнинг графиги P тўғри тўртбурчакдан чиқиб кетмайди. Ҳақиқатдан, элементар мулоҳазалар ёрдамида h нинг аниқланишига кўра қуйидаги тенгсизликларни ҳосил қиламиз:

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_1(\xi)) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_1(\xi))| d\xi \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_{n-1}(\xi))| d\xi \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

Энди $y_s(x)$ функциянинг графиги P дан чиқмайди, дейлик. Унда $\int_{x_0}^x f(\xi, y_s(\xi)) d\xi$ интеграл аниқланган ва $|y_s(x) - y_0| \leq b$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга асосан

$$|y_{s+1} - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_s(\xi)) d\xi \right| \leq \int_{x_0}^x |f(\xi, y_s(\xi))| d\xi \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b$$

муносабатга эга бўламиз. Шундай қилиб, агар бирор натурал s сони учун $y_s(x)$ функциянинг графиги P дан чиқмаса, яъни $(x, y_s(x)) \in P$, у ҳолда $s+1$ учун ҳам $(x, y_{s+1}(x)) \in P$ бўлади. Демак, қўлланилган математик индукция усули $(x, y_k(x)) \in P$, $k=1, 2, \dots$ эканини исбот этади.

3) $y_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) функциялар $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган ва узлуксиз. Ҳақиқатан, равшанки,

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi$$

функция $|x - x_0| \leq h$ ораликда узлуксиз, чунки $f(x, y)$ функция ўша ораликда узлуксиз. Шунга ўхшаш, $f(x, y_1(x))$ функция ҳам $|x - x_0| \leq h$ ораликда узлуксиз бўлгани учун $y_2(x) = y_0 +$

$$+ \int_{x_0}^x f(\xi, y_1(\xi)) d\xi$$

функция ҳам ўша ораликда узлуксиз бўлади.

Қолган $y_3(x), \dots, y_n(x), \dots$ функцияларнинг тегишли ораликда аниқланганлиги ва узлуксизлиги математик индукция усули билан осонгина исботланиши мумкин.

III. (1.46) функциялардан тузилган $\{y_k(x)\}$ функционал кетма-кетлик $|x - x_0| \leq h$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ ораликда текис яқинлашади. Бунини исботлаш учун

$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots$ (1.47) функционал қаторни кўрамиз. Равшанки, k - хусусий йиғинди $S_k(x) = y_k(x)$. Агар (1.47) қатор текис яқинлашувчи бўлса, ундан $\{y_k(x)\}$ кетма-кетликнинг тегишли ораликда текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди (1.47) қаторнинг ҳар бир ҳадини баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &\leq M|x - x_0|, \\ |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x [f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0)] d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0)| d\xi. \end{aligned}$$

Интеграл остидаги айирма учун Липшиц шартини қўлаймиз*¹⁾ ва $|y_1(x) - y_0|$ учун топилган баҳодан фойдаланамиз:

*¹⁾ Агар $L=0$ бўлса, $|x - x_0| \leq h$ ораликда $y_1(x) = y_2(x) = \dots = y_n(x) = \dots$ бўлади.

Агар $Y(x) = y_i(x)$, $i=1, 2, \dots$ десак, $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_n(\tau)) d\tau$ дан $n \rightarrow \infty$ да $y = Y(x)$ функция (1.1) тенгламанинг ечими экани келиб чиқади.

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(\xi) - y_0| d\xi \right| \leq LM \left| \int_{x_0}^x |\xi - x_0| d\xi \right| = LM \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Шунга ўхшаш,

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi))| d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi))| d\xi \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_2(\xi) - y_1(\xi)| d\xi \right| \leq \\ &\leq L^2 M \left| \int_{x_0}^x \frac{|\xi - x_0|^2}{2!} d\xi \right| = \frac{L^2 M}{3!} |x - x_0|^3. \end{aligned}$$

Математик индукция усули ёрдамида ихтиёрый натурал n учун қуйидаги тенгсизлиқни топамиз:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{L^n}{n!} M |x - x_0|^n. \quad (1.48)$$

$|x - x_0| \leq h$ ораликдан олинган x лар учун

$$|y_1(x) - y_0| \leq Mh,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq ML \frac{h^2}{2!},$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq ML^2 \frac{h^3}{3!},$$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1} \frac{h^n}{n!},$$

муносабатларга келамиз. Бундан кўринадики, (1.47) функционал қаторнинг ҳар бир ҳади мусбат ҳадли

$$|y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!} \quad (1.49)$$

сонли қаторнинг тегишли ҳадидан катта эмас. (1.49) қатор эса Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи, чунки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{h^{k-1}} \cdot \frac{1}{ML^{k-2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Lh}{k} = 0 < 1.$$

Шу сабабли, (1.47) қатор Вейерштрасс аломатига кўра $|x - x_0| \leq h$ ораликда текис яқинлашувчи ва демак, $\{y_k(x)\}$ кетма-кетлик ҳам текис яқинлашувчи бўлади. Бу кетма-кетлик ўша ораликда бирор узлуксиз $Y(x)$ функцияга текис яқинлашади, яъни

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = Y(x), \quad x_0 - h \leq x \leq x_0 + h.$$

Энди $Y(x_0) = y_0$, $(x, Y(x)) \in P$, $|x - x_0| \leq h$ эканини исбот этамиз.

Ҳақиқатан,

$$Y(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_0 = y_0, \text{ яъни } Y(x_0) = y_0.$$

Ушбу $|y_k(x) - y_0| \leq b$ тенгсизликда ($k \rightarrow \infty$ да) лимитга ўтаемиз: $|Y(x) - y_0| \leq b$. Бундан $(x, Y(x)) \in P$ келиб чиқади.

IV. $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган $Y(x)$ функция (1.45) интеграл тенгламанинг ечими эканини исботлаймиз.

Юқорида исбот этилган бўйича $\{y_k(x)\}$ кетма-кетлик $|x - x_0| \leq h$ ораликда $Y(x)$ функцияга тежис яқинлашади. Демак, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $N = N(\varepsilon)$ натурал сон топиладики, k нинг $k > N(\varepsilon)$ қийматлари учун $|x - x_0| \leq h$ ораликда ушбу

$$|y_k(x) - Y(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Лимитни шартидан фойдалансак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi)) d\xi - \int_{x_0}^x f(\xi, Y(\xi)) d\xi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_k(\xi)) - f(\xi, Y(\xi))| d\xi \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L |y_k(\xi) - Y(\xi)| d\xi \right| \leq \\ & \leq L\varepsilon |x - x_0| \leq L\varepsilon h \rightarrow 0, \text{ агар } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ бўлса.} \end{aligned}$$

Шунинг учун $k \rightarrow \infty$ да ихтиёрий x учун ушбу

$$\int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi)) d\xi \rightarrow \int_{x_0}^x f(\xi, Y(\xi)) d\xi, |x - x_0| \leq h$$

муносабат ўринли. Энди (1.46) да ($n \rightarrow \infty$ да) лимитга ўтаемиз:

$$Y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, Y(\xi)) d\xi, |x - x_0| \leq h.$$

Бундан $Y(x)$ функциянинг (1.45) интеграл тенгламанинг ёки унга эквивалент бўлган (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган ва $Y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими экани келиб чиқади.

V. Энди $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган ва $Y(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y = Y(x)$ ечим ягона эканини исбот этамиз. Фараз қилайлик, $u = Z(x)$ — ушбу $Z(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган, лекин бирор $|x - x_0| \leq d$, $d \leq a$ ораликда аниқланган ечим бўлмасин. $|x - x_0| \leq h$ ва $|x - x_0| \leq d$ ораликлар умумий x_0 нуктага эга. Уларнинг умумий қисмини $|x - x_0| \leq h^*$, $h^* = \min\{h, d\}$ деймиз. Биз шу $|x - x_0| \leq h^*$ ораликда $Y(x) \equiv Z(x)$ айниятнинг ўринли эканини исбот этамиз. Бунинг учун $|x - x_0| \leq h^*$ ораликда аниқланган $u(x) = |Y(x) - Z(x)| \geq 0$ функцияни кўрамиз. Сўнгра шундай мусбат сон ε ни оламизки, $\forall \varepsilon < \min\left(h^*, \frac{1}{L}\right)$,

$L > 0$ тенгсизлиكنи қаноатлантирсин¹⁾. Биз $Y(x) \equiv Z(x)$ айниятнинг

¹⁾ Агар $L = 0$ бўлса $u(x) = |Y(x) - Z(x)| \leq 0$ бўлади. Ундан $|x_0, x_0 + \varepsilon|$ ораликда $Y(x) \equiv Z(x)$ экани келиб чиқади.

тўғрилигини $[x_0, x_0 + \epsilon]$ ораликда кўрсатамиз. Бу ораликнинг бирор τ нуқтасида $u(x)$ функция ўзининг максимумига эришади. Уни m дейлик, яъни

$$\max u(x) = u(\tau) = m, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon].$$

Содда алмаштиришлар ёрдамида ушбуни топамиз ($x \in [x_0, x_0 + \epsilon]$):

$$\begin{aligned} u(x) &= |Y(x) - Z(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(\xi, Y(x)) d\xi - \int_{x_0}^x f(\xi, Z(\xi)) d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \epsilon_0 |f(\xi, Y(\xi)) - f(\xi, Z(\xi))| d\xi \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |Y(\xi) - Z(\xi)| d\xi \right| \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} u(\xi) d\xi \leq Lm\epsilon, \end{aligned}$$

яъни

$$u(x) \leq Lm\epsilon, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon]. \quad (1.50)$$

Агар $m=0$ бўлса, бундан $u(x) \leq 0$ келиб чиқади. Аммо $u(x) \geq 0$ (киритилиши бўйича) тенгсизликни қаноатлантиргани учун $[x_0, x_0 + \epsilon]$ дан олинган барча x лар учун охириги икки тенгсизликдан $u(x) \equiv 0$ экани келиб чиқади. Агар $m > 0$ бўлса, (1.50) да $x = \tau$ деб, $m \leq Lm\epsilon$ ёки $L\epsilon \geq 1$ га эга бўламиз. Аммо ϵ нинг танлаанишига кўра $L\epsilon < 1$. Биз шу тенгсизликка зид бўлган тенгсизликка келиб қолдик. Демак, факат $m=0$ бўлиши мумкин. Биз $[x_0, x_0 + \epsilon]$ ораликда $Y(x) \equiv Z(x)$ айниятни исбот этдик. Жумладан $Y(x_0 + \epsilon) = Z(x_0 + \epsilon)$. Бу кийматни y , дейлик. Раёпанки, $x_0 + \epsilon < x_0 + h^*$. Биз $\epsilon > 0$ ни шундай танлашимиз мумкинки, $x_0 + 2\epsilon < x_0 + h^*$ бўлади. Энди $[x_0 + \epsilon, x_0 + 2\epsilon]$ интервалда ҳам $Y(x) \equiv Z(x)$ айният ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Мулоҳазалар худди юқоридагидек бўлади. Шунга ўхшаш $\epsilon > 0$ ни кичиклаштириб бориш ҳисобига $x_0 + h^*$ га етарли яқин бўлган $x_0 + k\epsilon$ (k натурал сон) сонни ҳосил қилиш ва $[x_0 + (k-1)\epsilon, x_0 + k\epsilon]$ ораликда бир хил $Y(x_0 + (k-1)\epsilon) = Z(x_0 + (k-1)\epsilon) = y_{(k-1)\epsilon}$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган $Y(x)$ ва $Z(x)$ ечимлар устма-уст тушишини исботлаш мумкин. Шундай қилиб, $[x_0, x_0 + h^*]$ ораликда $Y(x) \equiv Z(x)$ айниятнинг ўринли экани исбот этилди. Худди шундай мулоҳазаларни $[x_0 - h^*, x_0]$ ораликда ҳам татбиқ этиш мумкин. Демак, $|x - x_0| \leq h^*$ ораликка $Y(x) \equiv Z(x)$ экани исботланди.

Эслатиб ўтаемизки, $h^* = h$ бўлганда ягоналик исбот этилди дейиш мумкин. $h^* = d$ бўлсин дейлик. Бу ҳолда $d < h$ бўлади. Агар $Y(x)$ ва $Z(x)$ лар $Y(x_0 + d) = Z(x_0 + d) = y_d$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимлар бўлса, унда $[x_0 + d, x_0 + h]$ ораликда $Y(x) \equiv Z(x)$ айният ўринли бўлади. Буни кўрсатиш учун яна юқоридагидек мулоҳаза юритиш лозим бўлади, факат $\epsilon < \min\left(h, \frac{1}{L}\right)$ дейилса етарли. Шундай мулоҳаза $[x_0 - h, x_0 - d]$ оралик учун юритилиши мумкин. Шундай қилиб, $|x - x_0| \leq h$

ораликда аниқланган ва $Y(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган ечим ягона бўлади.

VI. Биз ечимнинг мавжудлигини ва ягоналигини $|x - x_0| \leq h$ оралиқ учун исботладик. Агар бу оралиқ $y = \varphi(x)$, $\varphi(x_0) = y_0$ ечим аниқланишининг максимал оралигидан иборат бўлмаса, у ҳолда бу ечимни *давом эттириш* мумкин. Ҳақиқатан $\varphi(x_0 + h) = y_0^{(1)}$ дейлик. Равшанки, $(x_0 + h, y_0^{(1)})$ нукта Γ соҳанинг ичида ётади. Бу ҳолда чегараси билан бутунлай Γ да жойлашган

$$P^{(1)} = \{(x, y) : |x - x_0^{(1)}| \leq a_1, |y - y_0^{(1)}| \leq b_1\}$$

тўғри тўртбурчак қуриш мумкин. $0 \leq M_1 = \max_{(x, y) \in P^{(1)}} |f(x, y)|$ деймиз.

$M_1 = 0$ бўлган ҳол равшан. $M_1 > 0$ бўлсин. Агар бошланғич қийматлар сифатида $x_0^{(1)}, y_0^{(1)}$ ни қабул қилсак, исбот этилганига

кўра (1.1) тенглама $|x - x_0^{(1)}| \leq h_1$, $h_1 = \min\left\{a_1, \frac{b_1}{M}\right\}$ ораликда аниқланган ва $y(x_0^{(1)}) = y_0^{(1)}$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга бўлади. $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ оралиқнинг учи билан $I_1 = [x_0^{(1)} - h_1, x_0^{(1)} + h_1]$ оралиқнинг ўртаси устма-уст тушади (чунки $x_0^{(1)} = x_0 + h$). Шунуктада ҳар икки қурилган ечимлар бир хил қиймат қабул қилади. Ягоналикка кўра бу ечимлар $I \cap I_1$ ораликда устма-уст тушади. Аммо I_1 оралиқнинг ярми $(x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1)$ I дан ташқарида ётади. Қурилган ечим шу ораликда аввал 1 ораликда қурилган ечимнинг *давоми* бўлади, деймиз. Агар $\varphi(x_0^{(1)} + h_1) = y^{(2)}$ десак, $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}) \in \Gamma$, $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + h_1$ бўлганда $x_0^{(2)}, y_0^{(2)}$ бошланғич қийматларга эга бўлган ва $I_2 = [x_0^{(2)} - h_2, x_0^{(2)} + h_2]$, $h_2 = \min\left(a_2, \frac{b_2}{M}\right)$

ораликда олинган ягона ечимни қуриш мумкин. I_2 ҳам I_1 га нисбатан I_1 ва I оралиқларга ўхшаш жойлашган бўлади. $I_1 \cap I_2$ да янги ечим аввалги (I_1 да аниқланган) ечим билан бир хил бўлади. I_2 нинг иккинчи ярмида эса аввалги ечимнинг давомига эга бўламиз. Шунга ўхшаш мулоҳазалар x нинг қамаювчи қийматлари учун ҳам олиб борилиши мумкин. Кўрсатиш мумкинки, шундай давом эттиришлар ёрдамида Γ соҳанинг чегарасига исталганча яқин бориш мумкин, яъни ечим мавжудлигининг максимал интервалини топиш мумкин.

Шундай қилиб, 1.2-теорема тўла исбот бўлди.

VII. Энди кетма-кет яқинлашиш ёрдамида дифференциал тенгламанинг аниқ ечимини унга m -яқинлашиш билан ($y_m(x)$ билан) берилган аниқликда алмаштиришга тўхталамиз. Ушбу

$$y_m(x) + [y_{m+1}(x) - y_m(x)] + [y_{m+2}(x) - y_{m+1}(x)] + \dots$$

функционал қаторни кўрайлик. II бўлимдаги мулоҳазаларга кўра ((1.48) тенгсизликларга қаранг) бу қатор $Y(x)$ функцияга $|x - x_0| \leq h$ да текис яқинлашади. Демак, $|x - x_0| \leq h$ ораликда

$$Y(x) = y_m(x) + [y_{m+1}(x) - y_m(x)] + [y_{m+2}(x) - y_{m+1}(x)] + \dots$$

Бундан, (1.48) тенгсизликлардан фойдалансак:

$$|Y(x) - y_m(x)| \leq \frac{L^m M}{(m+1)!} |x - x_0|^{m+1} + \frac{L^{m+1} M}{(m+2)!} |x - x_0|^{m+2} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{ёки} \quad |Y(x) - y_m(x)| &\leq L^m M |x - x_0|^{m+1} \left[\frac{1}{(m+1)!} + \right. \\ &\left. + \frac{L}{(m+2)!} |x - x_0| + \frac{L^2}{(m+3)!} |x - x_0|^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.51)$$

келиб чиқади. Бу (1.51) тенгсизлик $y_m(x)$ функциянинг аниқ ечим $Y(x)$ дан фарқини баҳолайди. Агар $|x - x_0| \leq h$ эканини ҳисобга олсак, $|x - x_0| \leq h$ оралиқнинг ҳар бир нуктасида ушбу

$$|Y(x) - y_m(x)| \leq L^m M h^{m+1} \left[\frac{1}{(m+1)!} + \frac{Lh}{(m+2)!} + \frac{L^2 h^2}{(m+3)!} + \dots \right] \quad (1.52)$$

муносабат ўринли. (1.52) да M , L ва h — маълум миқдорлар, m эса талаб этилган аниқликдан топилади. Агар ҳар бир $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ нуктада $|Y(x) - y_m(x)| \leq \varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши талаб этилса, у ҳолда m ни топиш учун

$$L^m M h^{m+1} \left[\frac{1}{(m+1)!} + \frac{Lh}{(m+2)!} + \frac{L^2 h^2}{(m+3)!} + \dots \right] \leq \varepsilon \quad (1.53)$$

тенгсизлиكنи ечиш лозим бўлади. Амалда қўлланиш учун (1.51) ва (1.52) тенгсизликлар ўрнига уларга нисбатан қўполроқ, лекин қулайроқ тенгсизликлардан фойдаланилади. Ушбу

$$\varepsilon_m(x) = |Y(x) - y_m(x)|, \quad m=0,1, \dots$$

белгиланиш киритамиз. Равшанки, $m \geq 1$ бўлганда:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(x) = |Y(x) - y_m(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x [f(\xi, Y(\xi)) - f(\xi, y_{m-1}(\xi))] d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, Y(\xi)) - f(\xi, y_{m-1}(\xi))| d\xi \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x \varepsilon_{m-1}(\xi) d\xi \right|. \end{aligned}$$

Бундан

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &\leq L \left| \int_{x_0}^x \varepsilon_0(\xi) d\xi \right| \leq LM \left| \int_{x_0}^x |\xi - x_0| d\xi \right| = L^1 M \frac{|x - x_0|^2}{2!}, \\ \varepsilon_2(x) &\leq L \left| \int_{x_0}^x \varepsilon_1(\xi) d\xi \right| \leq L^2 M \left| \int_{x_0}^x \frac{|\xi - x_0|^2}{2!} d\xi \right| = L^2 M \frac{|x - x_0|^3}{3!}, \\ &\dots \\ \varepsilon_m(x) &\leq L \left| \int_{x_0}^x \varepsilon_{m-1}(\xi) d\xi \right| \leq L^m M \frac{|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad m=1,2,\dots \end{aligned}$$

Шундай қилиб, ушбу

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0(x) &\leq M|x-x_0|, \\ \epsilon_m(x) &\leq L^m M \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad m=1,2,\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

тенгсизликларга эгамиз. Бундан $|x-x_0| \leq h$ ораликда $m \rightarrow \infty$ да $\epsilon_m(x) \rightarrow 0$ қилиб чиқади.

Мисол. Кетма-кет яқинлашиш усули ёрда.

$$\frac{dy}{dx} = x-y, \quad \Gamma = P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

дифференциал тенгламанинг $f(x, y) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган тақрибий ечими топилсин. Маълум қилинишининг хатоси ҳисоблансин.

$y_0(x) = 1$ дейлик,

$$y = 1 + \int_0^x (\xi - y) d\xi$$

дан

$$y_1 = 1 + \int_0^x (\xi - 1) d\xi = 1 - x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(\xi - 1 + \xi - \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3},$$

$$y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24},$$

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}.$$

ларни ҳосил қиламиз. Берилган дифференциал тенгламанинг ўнг томони x ва y ларнинг ихтиёрый қийматларида аниқланган, узлуксиз ва y бўйича узлуксиз дифференциалланувчи. Шунинг учун бирор P тўғри тўртбурчакни олайлик:

$$P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

У ҳолда $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \max_{(x, y) \in P} |f(x, y)|$ га кўра

$$M = 2, \quad h = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Бунга ўхшаш $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ бўлганидан $L = \max_{(x, y) \in P} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = 1$ бўлади. Шундай қилиб, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$ ораликда ушбу

$$\epsilon_4(x) = |Y(x) - y_4(x)| \leq 1^4 \cdot 2 \cdot \frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{60}$$

муносабат ўринли. Шу интервалда ҳағоликни топамиз:

$$\epsilon_4 = \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \epsilon_4(x) = \frac{1}{60 \cdot 32} = \frac{1}{1920} \approx 0,0005.$$

Кўриниб турибдики, 4- яқинлашиш билан аниқ ечим $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ин-

тервалда ҳар бир x учун k пи билан $\frac{1}{1920}$ га фарк қилар экан.

Демак, $0,0005$ хатолик билан $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ораликда аниқ ечим ўрнида 4- яқинлашиш $y_4(x)$ ни олини мумкин.

Машқ. 1. $\frac{dy}{dx} = 3x - \frac{y}{x}$ дифференциал тенгламанинг

$P\{(x, y): \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ тўпладда $y(1) = 1$ шартни қаноатлантирадиган ечими

учун иккинчи яқинлашиш $y_2(x)$ топилисин ва хатолик ҳисоблансин.

2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ дифференциал тенглама учун

$$P = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

тўпладда $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи иккинчи яқинлашиш $y_2(x)$ топилисин ва хатолик ҳисоблансин.

3. $\frac{dy}{dx} = x - y^2$ дифференциал тенглама учун $P = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, -1 \leq y \leq 1\}$ тўпладда $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи учинчи яқинлашиш $y_3(x)$ топилисин ва хатолик ҳисоблансин.

4. $\frac{dy}{dx} = y, -\infty < y < \infty$ дифференциал тенглама учун $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x) \dots$

кетма-кетлик тузилсин ва $Y(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x)$ топилисин.

1.12- §. ДАВОМСИЗ ЕЧИМЛАР

1.16- теорема. (1.1) дифференциал тенглама берилган бўлиб, $f(x, y)$ ва $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ функциялар R^2 текисликнинг Γ соҳасида аниқланган ва ўзлуксиз бўлсин. У ҳолда: 1) (1.1) дифференциал тенгламанинг Γ соҳадан олинган ихтиёрий берилган x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими мавжуд; 2) агар (1.1) дифференциал тенгламанинг бирор давомсиз ечими унинг бирор бошқа ечими билан x нинг ҳеч бўлмаसा битта қийматида устма-уст тушса, y ҳолда давомсиз ечим ўша ечимнинг давоми бўлади; 3) агар (1.1) дифференциал тенгламанинг икки давомсиз ечими x нинг ҳеч бўлмаганда битта қийматида устма-уст тушса, y ҳолда бу ечимлар айнан устма-уст тушади, яъни улар умумий аниқланиш интервалига эга бўлади.

Исбот. (x_0, y_0) нукта Γ соҳанинг ихтиёрий нуктаси бўлсин. x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган шундай $y = \varphi(x)$ ечимни қура-мизки, бу ечим (1.1) дифференциал тенгламанинг ну бошланғич қийматларга эга бўлган ихтиёрий ечимининг давоми бўлади. Бу билан теореманинг 1- қисми исбот этилган бўлади.

(1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ҳар бир ечими учун ўз аниқланиш интервали бор. Бундай ечимларнинг аниқланиш интервалининг чап учлари тўпламини r_1^* , ўнг учлари тўпламини эса r_2^* дейлик. $m_1 = \inf r_1^*, m_2 = \sup r_2^* (m_1 = -\infty, m_2 = \infty$ ҳоллар ҳам бўлиши мумкин). Энди x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ва $m_1 < x < m_2$ интервалда аниқланган $y = \hat{\varphi}(x)$

ечимни кураимиз. x^* нукта шу интервалнинг ихтиёрий нуктаси бўлсин. Аниқлик учун $x_0 \leq x^*$ дейлик. m_2 сон тўпламнинг аниқ юкори чегараси бўлгани учун (1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва аниқланиш интервали x^* ни ўз ичига олган $y = \psi(x)$ ечими мавжуд. Энди $\varphi(x^*) = \psi(x^*)$ дейимиз. x^* да $\varphi(x)$ функциянинг қиймати тасодифан танланган $\psi(x)$ ечимга боғлиқ эмас. Ҳақиқатан, агар $y = \psi(x)$ ўринга $y = \chi(x)$, $\chi(x_0) = y_0$ функцияни олсак ва x^* бу функциянинг аниқланиш интервалига тегишли бўлса, у ҳолда Коши теоремасига кўра $\psi(x^*) = \chi(x^*)$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $y = \varphi(x)$ функция $m_1 < x < m_2$ интервалда бир қийматли аниқланган. Шу билан бирга $y = \varphi(x)$ функция учун $\varphi(x_0) = y_0$ ва бу функция (1.1) тенгламанинг ечими, чунки қурилишга кўра $y = \varphi(x)$ функция $m_1 < x < m_2$ интервалнинг ҳар бир x^* нуктасига яқин нукталарда (1.1) тенгламанинг бирор ечими билан бир хил бўлади.

Энди $y = \varphi(x)$ функция (1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва $r_1 < x < r_2$ интервалда аниқланган ечими бўлсин. У ҳолда $r_1 \in r_1^*$, $r_2 \in r_2^*$ ва $m_1 \leq r_1$, $r_2 \leq m_2$, $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ бўлгани учун Коши теоремасига кўра $r_1 < x < r_2$ интервалда $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Бундан $y = \varphi(x)$ ечим $y = \psi(x)$ ечимнинг $r_1 < x < r_2$ интервалдан ташқарига ($m_1 < x < m_2$ интервалгача) давоми экани келиб чиқади.

Қурилган $y = \varphi(x)$ ечим давомсиздир. Бундай бўлмасин дейлик. ($y = \psi(x)$ ечим $y = \tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми бўлсин. Унда x_0, y_0 ни $y = \psi(x)$ ечим учун бошланғич қийматлар қилиб олиш мумкин. Юкоридаги исботга кўра $y = \psi(x)$ ечим $y = \psi(x)$ ечимнинг давоми $y = \tilde{\varphi}(x)$ нинг қурилишига эътибор беринг!) Бу мулоҳазалардан $y = \varphi(x)$ ечим $y = \psi(x)$ нинг ва аксинча, $y = \psi(x)$ ечим $y = \tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми экани келиб чиқади. Демак, $y = \varphi(x)$ ечим ягона давомсиз ечим. Теореманинг 1) қисми исбот бўлди.

$y = \varphi(x)$ давомсиз ечим бўлиб, бирор бошқа $y = \tilde{\varphi}(x)$ ечим билан бирор x^* нуктада устма-уст тушин: $\varphi(x^*) = \tilde{\varphi}(x^*)$. У ҳолда x^* , y^* давомсиз $y = \varphi(x)$ ечим учун ҳам, $y = \tilde{\varphi}(x)$ учун ҳам бошланғич қийматлар бўлади. Шунинг учун юкорида исбот этилганига кўра $y = \varphi(x)$ ечим $y = \tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми бўлади. Бу билан теореманинг 2) қисми исботланди.

Агар $y = \varphi(x)$ ечим давомсиз бўлса, у ечим юкоридаги мулоҳазаларга кўра $y = \varphi(x)$ ечимнинг давоми бўлади. Шунинг учун $\varphi(x)$ ва $\tilde{\varphi}(x)$ ечимлар тўла устма-уст тушади. 3) қисм ҳам исбот бўлди. Демак, 1.16-теорема тўла исбот этилди.

Нагижалар. 1) (1.1) дифференциал тенгламанинг ихтиёрий бошланғич қийматларга эга бўлган $y = \varphi(x)$ ечими Коши теоремасининг шартлари бажарилганда давомсиз $y = \tilde{\varphi}(x)$ ечимгача давом эттирилиши мумкин. Шу маънода давомсиз ечимлар дифференциал тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олади;

2) агар Γ соҳа чегараланган бўлса, m_1 ва m_2 лар чекли бўлади;

3) агар Пикар теоремасининг шартлари фақат ҳамма нуқталари билан Γ соҳада ётган P тўғри тўртбурчакда ўринли бўлиб қолмай, балки ихтиёрий P^* , $P^* \subset \Gamma$ тўғри тўртбурчакда ўринли бўлса, у ҳолда $|x - x_0| \leq h$ оралиқда аниқланган ва x_0, y_0 бошланғич

қийматларга эга бўлган $y = \varphi(x)$ ечимни давомсиз ечимгача давом эттириш мумкин. Бунинг исботи юқоридаги теореманинг исботига асосланади;

4) агар $y = \varphi(x)$ (1.1) дифференциал тенгламанинг давомсиз ечими бўлиб, унинг мавжудлигининг максимал интервали $m_1 < x < m_2$ бўлса, y ҳолда $y = \varphi(x)$ ечим $x \rightarrow m_1$ ва $x \rightarrow m_2$ да Γ соҳанинг чегарасига интилади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - 1}, \quad -1 < y < 1$$

дифференциал тенгламанинг $\varphi(0) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган давомсиз ечими қуриلسин.

Аввало

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2 - 1} \quad \text{ва} \quad F(y) = \int_0^y (\xi^2 - 1) d\xi.$$

Берилган тенгламанинг барча ечимлари

$$F(y) = x + C \quad \text{ёки} \quad \frac{y^3}{3} - y = x + C$$

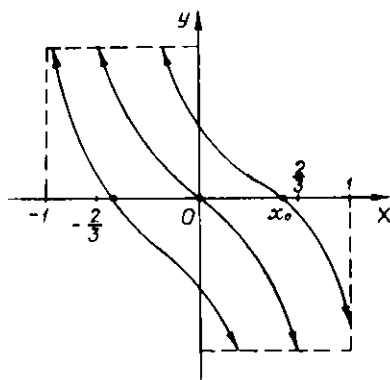
муносабат билан ёзилади. Бошланғич шартга кўра $C = 0$. Ҳавшанки, $y' \cdot (1 - y^2) = 0$ дан $y = \pm 1$, $F(-1) = \frac{2}{3}$, $F(1) = -\frac{2}{3}$. Энди $m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = -\frac{2}{3}$ дейлик. Агар x ушбу

$-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ интервалда ўлгарса, y ушбу $-1 < y < 1$ интервалда ўзгаради.

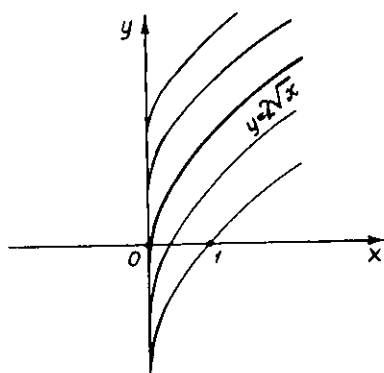
Шу $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ интервал $\frac{y^3}{3} - y = x$ ечим учун аниқланишининг максимал интервали бўлади. Демак,

$\frac{y^3}{3} - y = x$ ечим $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ интервалда давомсиз ечим бўлади.

Агар $\varphi(x_0) = 0$, $x_0 \neq 0$ бўлса, $C \neq 0$ ва $C = -x_0$. Бу ҳолда $\frac{y^3}{3} - y = x - x_0$ ечим



13-чизма



14-чизма

узунлиги $\frac{4}{3}$ га тенг бўлган аниқланган интервалга эга, яъни $-\frac{2}{3} - x_0 < x < \frac{2}{3} - x_0$, $m_1 = -\frac{2}{3} - x_0$, $m_2 = \frac{2}{3} - x_0$. Шундай қилиб, $\frac{y^3}{3} - y = x - x_0$ ечим $-\frac{2}{3} - x_0 < x < \frac{2}{3} - x_0$ интервалда давомсиз ечимдир (13-чи сизма).

Кўрилган мисолда m_1 ва m_2 лар чекли.

М а л л м а т. Ушбу $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}}$, $x > 0$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = 0$

бошлангич шартни қаноатлантирадиган давомсиз ечими топилиши ва унинг аниқланган интервали учун $m_1 = 0$, $m_2 = +\infty$ экани кўрсатилиши (14-чи сизмага қарама).

Ҳ- ТАҚРИБИЙ ЕЧИМ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ТЕНГСИЗЛИҚЛАР

2.1-§. Ҳ- ТАҚРИБИЙ ЕЧИМ. ЭЙЛЕР СИНИҚ ЧИЗИГИ

1. (1.1) дифференциал тенглама берилган бўлиб, унда $f(x, y)$ функция Γ соҳада узлуксиз бўлсин.

2.1- т а б р и ф. Агар бирор I (очик, ёпиқ, ярим очик) интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция учун ушбу тўғрда шарт:

1°. $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$, $x \in I$;

2°. $\varphi(x) \in C(I)$, $\varphi(x) \in C^1(I \setminus S)$ (буندا S тўпلام $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ функция I - тур узилишига эга бўлган ёки мавжуд бўлмаган нуқталар тўплари);

3°. $\left| \frac{d\varphi(x)}{dx} - f(x, \varphi(x)) \right| \leq \varepsilon$, $x \in I \setminus S$;

4°. S чекли тўпلام,

ўринли бўлса, y ҳолда $y = \varphi(x)$ функция I интервалда (1.1) дифференциал тенгламанинг ε - тақрибий ечими дейилади.

Таърифдан кўринадикки, $\varepsilon = 0$ ва $S = \emptyset$ бўлганда $\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x))$, $x \in I$ бўлади. Бу ҳолда 1.4- таърифда берилган ечим таърифини ҳосил қиламиз.

Қуйида биз ε - тақрибий ечимнинг мавжудлиги масаласига ўхшатамиз.

2.1- теорема. Агар $f(x, y)$ функция чегараси билан бутунлай Γ соҳада ётган $P = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ (a ва b лар чекли мусбаб сонлар) епиқ тўғри тўғрбурчакда узлуксиз бўлса, y ҳолда ихтиёрый мусбаб ε учун (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$, $h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$, $M = \max_{(x, y) \in P} |f(x, y)| \geq 0$, оралиқда $\varphi(x_0) = y_0$

бошлангич шартни қаноатлантирадиган ε - тақрибий ечими мавжуд.

И с б о т. Агар $M = 0$ бўлса, теореманинг тўғрилиги равишан. Тенгсиз ечим $|x - x_0| \leq a$ оралиқда аниқланган бўлади. Энди $M > 0$ бўлган ҳолни кўрамиз. $\varepsilon > 0$ берилган бўлсин, $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ оралиқда ε - тақрибий ечимни курамиз ($x_0 - h \leq x \leq x_0$ оралиқда тенгсиз ечим шунга ўхшаш қурилади). Ушбу

$$P_h = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\},$$

$$P_h^+ = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_0 + h, |y - y_0| \leq b\}$$

тўғри тўртбурчакларни кураимиз. Равшанки, $P_h \subset P$, $P_h^+ \subset P$. $f(x, y)$ функция ёпик P тўпламда узлуксиз бўлгани учун шу тўпламда текис узлуксиз бўлади. Демак, берилган $\varepsilon > 0$ бўйича шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, агар $(x, y) \in P$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in P$ нукталар учун

$$|x - \bar{x}| \leq \delta(\varepsilon), |y - \bar{y}| \leq \delta(\varepsilon)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса,

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq \varepsilon \quad (2.1)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу мулоҳазадан кейинроқ фойдаланамиз.

Энди $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ нукталар ёрдамида $[x_0, x_0 + h]$ орاليкини шундай n та бўлакка бўламизки, ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ ораликнинг узунлиги ушбу

$$\max |x_k - x_{k-1}| \leq \min \left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad x_n = x_0 + h$$

тенгсизликни канаотлантиради.

(x_0, y_0) нуктадан бурчак коэффициентини M ва M га тенг бўлган икки тўғри чизик ўтказиш мумкин. Бу тўғри чизиклар учун $M = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{h}$ бўлсин. Агар $h = a$ бўлса, $M = \frac{b}{a}$; $h = \frac{b}{M}$ бўлганда

$M = \frac{b}{h} = \frac{b}{\frac{b}{M}} > \frac{b}{a}$ бўлади. Демак $M \geq \frac{b}{a}$. Бундан келиб чиқадики,

M

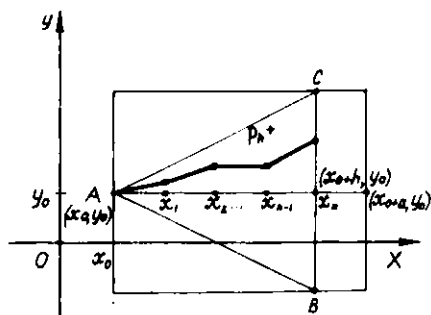
P_h^+ тўғри тўртбурчакда (x_0, y_0) нуктадан ўтувчи M ва $-M$ бурчак коэффициентли тўғри чизиклар $y = y_0 - b$ ва $y = y_0 + b$ горизонтал тўғри чизиклари билан абсциссаси $x \leq x_0 + a$, $x = x_0 + h$ бўлган нукталарда кесишишади. У нукталарни B ва C , (x_0, y_0) нуктани эса A дейлик (15-чизма). Ҳосил бўлган ABC учбурчакни P_h^{+1} , $P_h^{+1} \subset P_h^+$ деб белгилаймиз.

(x_0, y_0) нуктадан ўтувчи $f(x_0, y_0)$ бурчак коэффициентли тўғри чизикнинг

$[x_0, x_1]$ ораликка мос кесмасини чизамиз. Тўғри чизикнинг чизилган бу бўлаги P_h^{+1} учбурчакда ётиши равшан. Унинг тенгламаси $y - y_0 = f(x_0, y_0) (x - x_0)$ кўринишда, $x = x_1$ тўғри чизик билан кесишиш нуктасининг координаталари эса

$$(x_1, y_1) = (x_1, y_0 + f(x_0, y_0) (x_1 - x_0))$$

бўлади. Сўнгра (x_1, y_1) нуктадан ўтувчи $f(x_1, y_1)$ бурчак коэффициентли тўғри чизикнинг $[x_1, x_2]$ ораликка мос кесмасини чизамиз. Унинг



15-чизма

тенгласи $y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$ кўринишда, $x = x_2$ тўғри чизик билан кесилиш нуктаси координатлари эса

$$(x_2, y_2) = (x_2, y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1))$$

каби бўлади.

Шу усулда давом этсак, $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ ораликда аниқланган графиги P_h^{+1} учбурчакдан чиқмайдиган синик чизик чизиш мумкин. Унинг учларини $A_0 = A$, $A_1 = (x_1, y_1)$, ..., $A_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$, $A_n = (x_n, y_n) = (x_0 + h, y_n)$ деб белгилаймиз. Ҳосил бўлган $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ синик чизикни $q_n(x)$ дейлик. Бу функция изланган, қурилиш лозим бўлган ε -такрибий ечимдир. Шунинг исбот этамиз. 2.1-таърифнинг шартларини текширамиз.

1° шарт бажарилади, чунки $(x, q_n(x)) \in P_h^{+1} \subset P_h^+ \subset P$. Агар $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ тўплами S десак, 2° шарт $[x_0, x_0 + h] \setminus S$ тўпламда бажарилади.

Энди 3° шартни текшириш қолди. $[x_{k-1}, x_k]$ ораликни кўрамиз, $k = 1, 2, \dots, n$. Агар ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ ораликда 3° шарт бажарилса, у ҳолда $[x_0, x_0 + h]$ ораликда $y = q_n(x)$ функция учун 3° шарт бажарилади. Равшанки, $[x_{k-1}, x_k]$ ораликда

$$|x - x_{k-1}| \leq \max |x_k - x_{k-1}| \leq \min \left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M} \right) \leq \delta(\varepsilon).$$

$x_{k-1} \leq x \leq x_k$ ораликдан бирор $\tilde{x}$ ни олайлик. Шу оралик учун

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &= \varphi_n^{(k)}(x_{k-1}) + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x - x_{k-1}), \\ \varphi_n^{(k)}(\tilde{x}) &= \varphi_n^{(k)}(x_{k-1}) + f(x_{k-1}, y_{k-1})(\tilde{x} - x_{k-1}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Бундан

$$|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi_n^{(k)}(\tilde{x})| = |f(x_{k-1}, y_{k-1})| \cdot |x - \tilde{x}| \leq M|x - \tilde{x}|.$$

Агар $\tilde{x} = x_{k-1}$ бўлса,

$$\begin{aligned} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi_n^{(k)}(x_{k-1})| &\leq M|x - x_{k-1}| \leq M \min \left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M} \right) = \\ &= \min(M\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) \leq \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Демак,

$$|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi_n^{(k)}(x_{k-1})| \leq \delta(\varepsilon).$$

Маълумки, $x_{k-1} < x < x_k$ интервалда

$$\frac{d}{dx} \varphi_n^{(k)}(x) = f(x_{k-1}, y_{k-1}).$$

Энди $\left| \frac{d}{dx} \varphi_n^{(k)}(x) - f(x, \varphi_n^{(k)}(x)) \right|$ ифодани баҳолаймиз. $x_{k-1} < x < x_k$ интервалда (2.1) га кўра

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} \varphi_n^{(k)}(x) - f(x, \varphi_n^{(k)}(x)) \right| &= \\ &= |f(x_{k-1}, \varphi_n^{(k)}(x_{k-1})) - f(x, \varphi_n^{(k)}(x))| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

келиб чиқади. k га 1, 2, ..., n қийматлар берсак ҳам шу тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $[x_0, x_0 + h] \setminus S$ тўпламда 3° шарт бажарилади. 4° шарт ўз-ўзидан бажарилган.

Южорида қурилган $A_0, A_1, \dots, A_n$ синик чизик $q_n(x)$ — ϵ тақрибий ечим бўлиб, уни *Эйлер синик чизиги* дейилади.

Синик чизикнинг $A_0, A_1, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ бўлакларини

$$q_n^{(1)}(x), q_n^{(2)}(x), \dots, q_n^{(n)}(x)$$

деб белгиласак, $q_n(x) = \bigcup_{i=1}^n q_n^{(i)}(x)$ бўлади. Ҳар бир $q_n^{(i)}(x)$ нитонини

учун (2.2) формула қўлланилади. $q_n(x)$ ечимни қулайлик учун ϵ_n -тақрибий ечим деб атаймиз.

Биз ϵ_n -тақрибий ечимни P_n — тўғри тўртбурчакда қурдик. Тегишли ечим $P_n = \{(x, y) : x_0 - h \leq x \leq x_0, |y - y_0| \leq b\}$ тўпламда ҳам қурилиши мумкин. Шундай қилиб, P_h тўпламда $q_n(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган ϵ_n -тақрибий ечимни қурилади деса бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Машқ. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ дифференциал тенглама берилган бўлиб, $P = \{(x, y) : |x| \leq \pi, |y| \leq \frac{5\pi}{6}\}$, $x_0 = 0, y_0 = 0$ бўлсин. $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(\pi, \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$ бўлгани учун $P_h = \{(x, y) : |x| \leq \frac{5\pi}{6}, |y| \leq \frac{5\pi}{6}\}$, $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ оралиқни $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{\pi}{3}, x_4 = \frac{\pi}{2}, x_5 = \frac{2\pi}{3}$ нукталар билан бўлайлик. Масала бундан қўйлади:

Теоремада келтирилган усул билан $0 < x < \frac{5\pi}{6}$ оралиқда Эйлер синик чизиги $q_n(x)$ қурилиши ва $x = \frac{5\pi}{6}$ нуктага хатолик ҳисоблансин.

2.2-таъриф. Агар $|x - x_0| \leq h$ оралиқда аниқланган функцияларнинг

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (2.3)$$

функционал кетма-кетлиги учун шундай b ўзгармас сон топилсаки, барча натурал n сонлар ва $|x - x_0| \leq h$ оралиқ учун

$$|f_n(x)| \leq b$$

тенгсизлик ўринли бўлса, y ҳолда (2.3) кетма-кетлик $|x - x_0| \leq h$ оралиқда текис чегараланган дейилади.

2.3-таъриф. Агар ёниқ $|x - x_0| \leq h$ оралиқда аниқланган функциялардан гузилган (2.3) кетма-кетлик берилган бўлиб ҳар қандай $\epsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, барча n лар учун $|x' - x''| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда ушбу

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \epsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, y ҳолда (2.3) кетма-кетлик текис даражали узлуксиз дейилади.

2.2-теорема (Асколи — Арцел теоремаси). Агар (2.3) кетма-кетлик чекли $|x - x_0| \leq h$ оралиқда текис чегараланган ва текис даражали узлуксиз бўлса, y ҳолда (2.3) кетма-кетликдан ўша оралиқда текис яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратилиши мумкин.

2.3-теорема. Агар ёниқ $|x - x_0| \leq h$ оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг (2.3) кетма-кетлиги шу оралиқда текис яқинла-

шувчи бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик текис чегараланган ва текис даражали ўзлуксиз бўлади.

Бу теоремаларнинг исботи математик анализ дарсликларида бор бўлганидан унга тўхталмаймиз. Аммо бу теоремалардан келгусида фойдаланамиз.

Энди ϵ -такрибий ечим тушунчасидан фойдаланиб, 1-бобдаги Неано теоремасини (1.3-теоремани) исботлаймиз.

1.3-теореманинг исботи. Шундай $\{\epsilon_n\}$, $\epsilon_n > 0$ сонлар кетма-кетлигини оламизки, $n \rightarrow \infty$ да $\epsilon_n \rightarrow 0$ бўлади, 2.1-теоремага кўра (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$ oralikda аниқланган $q_n(x) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва графиги P_h гўнгалдан чиқмайдиган ϵ_n -такрибий ечимни бор ва бирор $\tilde{x}$, $x_0 - h \leq \tilde{x} \leq x_0 + h$ учун

$$|q_n(x) - q_n(\tilde{x})| \leq M|x - \tilde{x}| \quad (2.4)$$

ўринли. Энди $\tilde{x} = x_0$ дейлик. У ҳолда $|x - x_0| \leq h \leq \frac{b}{M}$. Шунинг учун

$$|q_n(x) - q_n(x_0)| \leq M|x - x_0| \leq M \frac{b}{M} = b.$$

Ушбу

$$|q_n(x) - y_0| \geq |q_n(x)| - |y_0|$$

тенгсизликдан

$$|q_n(x)| \leq |y_0| + b$$

келиб чиқади. Бу $\{q_n(x)\}$ кетма-кетлиқнинг текис чегараланганлигини тасдиқлайди. Юқоридаги мулоҳазалардан $\{q_n(x)\}$ кетма-кетликка 2.2-теоремани қўллаш мумкин.

$\{q_{n_k}(x)\}$ кетма-кетлик $\{q_n(x)\}$ кетма-кетликдан ажратилган ва бирор ўзлуксиз $q(x)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлсин. Қулайлик учун $\{q_{n_k}(x)\}$ қисмий кетма-кетлик учун ҳам $\{q_n(x)\}$ белгини ишлатаверамиз.

(2.4) дан $n \rightarrow \infty$ да $|q(x) - q(\tilde{x})| \leq M|x - \tilde{x}|$, ϵ_n -такрибий ечим учун тегишли интеграл тенгламани ёзамиз:

$$q_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (f(\xi, q_n(\xi)) + \Lambda_n(\xi)) d\xi, \quad (2.5)$$

бу ерда $|\Lambda_n(x)| = \left| \frac{dq_n(x)}{dx} - f(x, q_n(x)) \right| \leq \epsilon_n$, $x \in \{ |x - x_0| \leq h \} \setminus S$, $\Lambda_n(x) = 0$, $x \in S$. Энди $\{q_n(x)\}$ қисмий кетма-кетлиқни олайлик: $q_{n_k}(x) \rightarrow q(x)$. (2.5) га асосан $q_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (f(\xi, q_{n_k}(\xi)) + \Lambda_{n_k}(\xi)) d\xi$ ни ва $k \rightarrow \infty$ да $\epsilon_n \rightarrow 0$ эканлини ҳисобга олсак:

$$q(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, q(\xi)) d\xi.$$

Бундан $\varphi(x_0) = y_0$. $f(x, y)$ функция P да узлуксиз бўлгани ан $\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x))$. Демак $\varphi(x)$ функция $\varphi(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантиради ва $|x - x_0| \leq h$ ораликда (1.1) дифференциал тенгламанинг ечими. Теорема исбот бўлди.

2. 2.4- теорема. (1.1) дифференциал тенгламада $f(x, y)$ функция $P(P \subset \Gamma)$ тўғри тўртбурчакда y бўйича L константа билан Липшиц шартини қаноатлантирсин. Агар $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ функциялар I интервалда (1.1) тенгламанинг мос равишда ε_1 - ва ε_2 - тақрибий ечимлари бўлиб, I интервалдан олинган бирор τ учун ва ҳақиқий сон $\delta \geq 0$ учун

$$|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| \leq \delta \quad (2.6)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, y ҳолда I интервалнинг барча нуқталарида

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \delta e^{L|x-\tau|} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|x-\tau|} - 1), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (2.7)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот: Аввал $\tau \leq x, x \in I$ интервални кўрайлик ($x \leq \tau, x \in I$ ҳолда мулоҳазалар шунга ўхшаш бўлади). $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар ε_1 - ва ε_2 - тақрибий ечим бўлгани учун $\{x: \tau \leq x, x \in I\} \setminus S$ тўпламда

$$\left| \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - f(x, \varphi_1(x)) \right| \leq \varepsilon_1,$$

$$\left| \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - f(x, \varphi_2(x)) \right| \leq \varepsilon_2$$

ўринли бўлади. Бу тенгсизликларнинг икки томонини τ дан x гача интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_1(x) - \varphi_1(\tau) - \int_{\tau}^x f(\xi, \varphi_1(\xi)) d\xi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau}^x \left| \frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi} - f(\xi, \varphi_1(\xi)) \right| d\xi \right| \leq \varepsilon_1(x - \tau), \\ & \left| \varphi_2(x) - \varphi_2(\tau) - \int_{\tau}^x f(\xi, \varphi_2(\xi)) d\xi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau}^x \left| \frac{d\varphi_2(\xi)}{d\xi} - f(\xi, \varphi_2(\xi)) \right| d\xi \right| \leq \varepsilon_2(x - \tau). \end{aligned}$$

Ҳар икки тенгсизлиkning ўнг ва чап томонларини ҳадма-ҳад кўшиб, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \tilde{q}(x)$, $|\tilde{q}(x)| = q(x)$ десак ва маълум $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ тенгсизликдан фойдалансак, қуйидагига эга бўламиз:

$$|\tilde{q}(x) - \tilde{q}(\tau) - \int_{\tau}^x [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))] d\xi| \leq \varepsilon(x - \tau).$$

Бундан

$$|\tilde{q}(x)| - |\tilde{q}(\tau)| - \left| \int_{\tau}^x [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))] d\xi \right| \leq |q(x) -$$

$$-q(\tau) - \int_{\tau}^x |f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))| d\xi$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун

$$q(x) \leq q(\tau) + \int_{\tau}^x |f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))| d\xi + \varepsilon(x - \tau)$$

муносабат келиб чиқади. $f(x, y)$ функция Липшиц шартини

канонатлантиради. Шунинг учун $q(x) \leq q(\tau) + L \int_{\tau}^x q(\xi) d\xi + \varepsilon(x - \tau)$.

Агар охириги тенгсизликда $\psi(x) = q(\tau) + \varepsilon(x - \tau)$, $\varphi(\xi) = q(\xi)$, $\chi = L$ деб, кейинги параграфда исботланадиган (2.9) тенгсизликни қўлласак ва $q(\tau) \leq \delta$ эканини ҳисобга олсак, ушбу $q(x) \leq \delta e^{L(x-\tau)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(x-\tau)} - 1)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Биз (2.7) муносабатни $\tau \leq x$, $x \in I$ ҳол учун исботладик. Агар $x \leq \tau$, $x \in I$ бўлса, тегишли интеграллашлар x дан τ гача олиб борилади ва

$$q(x) \leq \delta e^{-L(x-\tau)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{-L(x-\tau)} - 1)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Икки ҳолни умумлаштириб ёзсак, (2.7) муносабатга келамиз. 2.4-теорема исбот бўлди.

1-натижа. Агар ε_1 -тақрибий ечим учун $\varphi_1(x) \equiv Y(x)$, $x \in I$ ($\varepsilon_1 = 0$) бўлиб, $Y(x)$ (1.1) дифференциал тенгламанинг аниқ ечими бўлса, y ҳолда $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ да $\varphi_2(x) \rightarrow Y(x)$ бўлади.

$$\chi(x) = 0 \quad (2.7) \text{ дан } |Y(x) - \varphi_2(x)| \leq \delta e^{L(x-\tau)} + \frac{\varepsilon_2}{L}(e^{L(x-\tau)} - 1).$$

Агар $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ бўлса, изланган муносабат ҳосил бўлади.

2-натижа. (2.7) тенгсизликдан ягоналикни исботлашда фойдаланиш мумкин.

Ушбу $y = \varphi_1(x)$ ва $y = \varphi_2(x)$ функциялар (1.1) дифференциал тенгламанинг бир хил x_0 , y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва тегишли I_1 , I_2 интервалларда аниқланган икки аниқ ечими бўлсин. Равшанки, $x_0 \in I_1 \cap I_2$, $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$. Шунинг учун $|\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)| \leq \delta$ дан $\delta = 0$ экани, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ларнинг аниқ ечимлигидан $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ экани келиб чиқади (2.7) га кўра $I_1 \cap I_2$ интервалда $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

2.2-§. ИНТЕГРАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Мазкур бандда баъзи муҳим интеграл тенгсизликлар ва уларнинг қўлланилиши билан шугулланамиз.

1. 2.5-теорема. Агар $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда аниқланган ва қзлуксиз $\varphi(x) \geq 0$, $\psi(x) \geq 0$ ва $\chi(x) \geq 0$ функциялар учун

$$\varphi(x) \leq \psi(x) + \int_{r_1}^x \chi(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

муносабат ўринли бўлса, улар учун $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда ушбу

$$\varphi(x) \leq \psi(x) + \int_{r_1}^x \chi(\xi) \psi(\xi) \exp\left(\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du\right) d\xi \quad (2.9)$$

муносабат ўринли бўлса, улар учун $r_1 \leq (x) \leq r_2$ оралиқда ушбу

$$q(x) \leq \psi(x) + \int_{r_1}^x \chi(\xi) \psi(\xi) \exp\left(\int_{r_1}^x \chi(u) du\right) d\xi \quad (2.9)$$

муносабат ҳам ўринли бўлади. (2.9) тенгсизлик Гронволл-Беллман тенгсизлиги деб аталади.

Насбот. $q(x) = \int_{r_1}^x \chi(\xi) q(\xi) d\xi$ деб белгилаймиз. Равшанки,

$q(r_1) = 0$. Бундан $\frac{dq(x)}{dx} = \chi(x) q(x)$ келиб чиқади. Энди

$$\begin{cases} \frac{dq(x)}{dx} = \chi(x) q(x), \\ \chi(x) q(x) = \chi(x) \int_{r_1}^x \chi(s) q(s) ds \end{cases}$$

системани кўрайлик. Биринчи тенгламанинг чап ва ўнг томонларидан мос равишда иккинчисини айириб, (2.8) дан фойдалансак,

$$\frac{dq(x)}{dx} - \chi(x) q(x) \leq \chi(x) \psi(x).$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини $\exp\left(\int_{r_1}^x \chi(u) du\right)$ га кўпайтириб, r_1

дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_{r_1}^x \frac{dq(\xi)}{d\xi} e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} d\xi - \int_{r_1}^x \chi(\xi) q(\xi) e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} d\xi \leq \int_{r_1}^x \chi(\xi) \psi(\xi) e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} d\xi.$$

Чап томондаги биринчи интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} q(\xi) e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} \Big|_{r_1}^x + \int_{r_1}^x q(\xi) \chi(\xi) e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} d\xi - \\ \int_{r_1}^x \chi(\xi) q(\xi) e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} d\xi \leq \int_{r_1}^x \chi(\xi) \psi(\xi) e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} d\xi. \end{aligned}$$

Бундан

$$q(x) e^{\int_{r_1}^x \chi(u) du} \leq \int_{r_1}^x \chi(\xi) \psi(\xi) e^{\int_{r_1}^{\xi} \chi(u) du} d\xi$$

келиб чиқади. Энди бу тенгсизликнинг икки томонини $e^{-\int_{r_1}^x \chi(u) du}$ га бўлсак,

$$\begin{aligned}
 q(x) &\leq e^{-\int_{r_1}^x \gamma(u) du} \int_{r_1}^x \chi(\xi) \Psi(\xi) e^{-\int_{r_1}^{\xi} \gamma(u) du} d\xi = \int_{r_1}^x \chi(\xi) \Psi(\xi) e^{-\int_{r_1}^{\xi} \gamma(u) du - \int_{\xi}^x \gamma(u) du} d\xi = \\
 &= \int_{r_1}^x \chi(\xi) \Psi(\xi) e^{-\int_{r_1}^x \gamma(u) du} d\xi = \int_{r_1}^x \chi(\xi) \Psi(\xi) e^{-\int_{r_1}^x \gamma(u) du} d\xi.
 \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$q(x) \leq \int_{r_1}^x \chi(\xi) \Psi(\xi) e^{-\int_{r_1}^{\xi} \gamma(u) du} d\xi.$$

(2.8) дан $q(x) \geq \varphi(x) - \psi(x)$ бўлгани учун охириги муносабат (2.9) нинг ўзидир.

Биз қуйида Гронуолл — Беллман тенгсизлигининг тез-тез учраб турадиган икки хусусий ҳолини таъкидлаб ўтамиз.

2.6-теорема. Агар $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда аниқланган, узлуксиз $\varphi(x) \geq 0$, $\chi(x) \geq 0$ функциялар ва бирор ўзгармас сон $C \geq 0$ учун

$$\varphi(x) \leq C + \int_{r_1}^x \chi(\xi) \Psi(\xi) d\xi \quad (2.10)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда шу $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда

$$\varphi(x) \leq C \exp \int_{r_1}^x \chi(\xi) d\xi \quad (2.11)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу тенгсизлик Гронуолл тенгсизлиги деб юритилади.

2.7-теорема. Агар $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз $\varphi(x)$ функция учун $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ ихтиёрий ўзгармас бўлганда

$$\varphi(x) \leq \int_{r_1}^x (\alpha \varphi(\xi) + \beta) d\xi \quad (2.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда

$$1) \quad \varphi(x) \leq \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(x-r_1)} - 1) \quad (\text{агар } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ бўлса}); \quad (2.13)$$

$$2) \quad \varphi(x) \leq \beta(x - r_1) \quad (\text{агар } \alpha = 0, \beta > 0 \text{ бўлса}) \quad (2.14)$$

тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади.

2. Энди Гронуолл тенгсизлиги қўлланиладиган ягоналикни исботлашга доир масала кўрайлик. Бирор $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда аниқланган $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар мос равишда ушбу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq T$$

Коши масалаларининг ечими бўлсин, бунда $f(t, x) \in C(I)$. Бу ҳолда ушбу

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

интеграл айниятлар ўринли. Бундан қуйидагига эга бўламиз:

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds.$$

(C, Lip) деб $t_0 \leq t \leq T$ ораликда узлуксиз ва иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини қаноатлантирадиган икки аргументли функциялар тўпламини белгилайлик. Агар $f(t, x) \in (C, \text{Lip})$, яъни $k > 0$ ва $(t, x_1) \in I$, $(t, x_2) \in I$ учун

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда юқоридаги тенгсизлиكنи

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t k|x(s) - y(s)| ds$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар $|x_0 - y_0| = z(t_0) = C$, $|x(s) - y(s)| = z(s)$, $|x(t) - y(t)| = z(t)$ десак, $t \geq t_0$ бўлгани учун

$$z(t) \leq C + \int_{t_0}^t kz(s) ds$$

тенгсизликка Гронуолл тенгсизлигини татбиқ этиб, ушбу

$$z(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t k ds} = Ce^{k(t-t_0)}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бундан $x(t_0) = y(t_0) = x_0$, $|x_0 - y_0| = z(t_0) = C = 0$ ва охириги тенгсизликдан $z(t) \equiv 0$, яъни $x(t) \equiv y(t)$ айният келиб чиқади.

Агар $t_0 \leq t \leq T$ ораликда шундай узлуксиз $k(t) \geq 0$ функция мавжуд бўлсаки, $(t, x_1) \in I$, $(t, x_2) \in I$ нукталар учун ушбу

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k(t)|x_1 - x_2|$$

тенгсизлик ўринли бўлса, аввалгидек мулоҳазалар ёрдамида

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t k(\tau)|x(s) - y(s)| ds$$

тенгсизликка келамиз. Бундан Гронуолл тенгсизлигини татбиқ этиб

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t k(\tau) |x(s) - y(s)| ds$$

тенгсизликка келамиз. Бундан Гронуолл тенгсизлигини татбик этиб

$$|x(t) - y(t)| \leq C e^{\int_{t_0}^t k(s) ds}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Агар $C = |x_0 - y_0| = 0$ бўлса, бундан $x(t) \equiv y(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ айният келиб чиқади.

Мазкур банд сўғида ягоналик ҳақидаги яна бир муҳим теоремани келтирамиз.

Ягоналик теоремаси. Агар $f(x, y) \in C$, $(x, y) \in I'$ бўлиб, $(x_0, y_0) \in I'$ нуқтанинг бирор атрофида ушбу

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| (x - x_0) \leq k |y_2 - y_1|, \quad 0 < k \leq 1 \quad (2.16)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (1.1) тенглама $y(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган кўпи билан битта ечимга эга.

Бу теоремани 1909 йилда $0 < k < 1$ учун Розенблат, 1926 йилда $k = 1$ учун Нагумо (юқоридаги тенгсизлик катъий бўлганда) исботлаган, ва нихоят, 1928 йилда Перрон теоремани $|x - x_0| \leq \alpha$ учун

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| (x - x_0) \leq |y_2 - y_1| \quad (2.16)$$

тенгсизлик бажарилганда исботлаган.

И с б о т. Дифференциал тенгламанинг $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ ечимлари $|x - x_0| \leq \alpha$ ораликда аниқланган ва бир хил бошланғич қийматларга эга бўлсин, яъни $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$.

$$F(x) = \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

деб белгилайлик. Равшанки, Лопиталь қондасини қўллаб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(x) - \psi'(x)}{1} = f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0.$$

Шунинг учун (агар $F(x_0) = 0$ деб ҳисобласак) $F(x)$ функция $|x - x_0| \leq \alpha$ ораликда узлуксиз ва $x = x_0$ да нолга тенг бўлади. Шу $F(x)$ функция $|x - x_0| \leq \alpha$ да айнан нолга тенг эканини исботлаймиз. Фараз этайлик, $F(x) \neq 0$, $|x - x_0| \leq \alpha$ бўлсин. У ҳолда $|x - x_0| \leq \alpha$ да шундай x_* нуқта топиладики, унда $|F(x)|$ функция ўзининг максимумига эришади, уни Q дейлик. Равшанки, $0 < Q \neq 0$. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, (2.16) га кўра

$$\begin{aligned} 0 < Q &= \left| \frac{\varphi(x_*) - \psi(x_*)}{x_* - x_0} \right| = \frac{1}{x_* - x_0} \left| \int_{x_0}^{x_*} [f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))] dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|x_* - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x_*} \left| \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x - x_0} \right| dx \right| = \frac{1}{|x_* - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x_*} |F(x)| dx \right|. \end{aligned}$$

$F(x)$ функция $|x - x_0| \leq \alpha$ ораликда ўзгармас бўлмагани учун

$$\frac{1}{|x_* - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x_*} |F(x)| dx \right| < Q$$

бўлади, шунинг учун $Q < Q$. Бу зиддиятлик теоремани исбот этади.

2.3- §. БИТТА МУҲИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГСИЗЛИК ҲАҚИДА

Бизга ушбу

$$\dot{x} \leq a(t)x + b(t) \quad (2.17)$$

дифференциал тенгсизлик берилган бўлсин, унда $a(t) \in C(I)$, $b(t) \in C(I)$, $I = \{t: t_0 \leq t \leq t_1\}$.

2.4-гаъриф. Агар I оралиқда аниқланган $x = \varphi(t)$ функция учун

1°. $\varphi(t) \in C^1(I)$,

2°. $\dot{\varphi}(t) \leq a(t)\varphi(t) + b(t)$

шартлар ўринли бўлса, шу $x = \varphi(t)$ функция (2.17) дифференциал тенгсизлиkning I да аниқланган ечими дейилади.

2.8- теорема. Агар $x = \varphi(t)$, $\varphi(t_0) \leq x_0$, функция (2.17) дифференциал тенгсизлиkning I оралиқда аниқланган ечими бўлса, у ҳолда шу ечим учун ушбу

$$\varphi(t) \leq \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi} d\tau \right) e^{-\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi} \quad (2.18)$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Ушбу $\xi(t) \leq 0 \forall t \in I$, $\xi(t) \in C(I)$ шартларни қаноатлантирадиган шундай $\xi(t)$ функция мавжудки,

$$\dot{\psi}(t) = a(t)\varphi(t) + [b(t) + \xi(t)]$$

тенглик ўринли бўлади. Бу эса биринчи тартибли чизикли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама. Уни интеграллаб топамиз ($\varphi(t_0) = x_0$):

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \left(x_0 + \int_{t_0}^t [b(\tau) + \xi(\tau)] e^{\int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi} d\tau \right) e^{-\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi} = \\ &= \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi} d\tau \right) e^{-\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi} + \left(\int_{t_0}^t \xi(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi} d\tau \right) e^{-\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi} \end{aligned}$$

Бундан $\xi(t)$ функция номузбат бўлгани учун изланган (2.18) тенгсизлик келиб чиқади.

Мазкур (2.18) тенгсизлиكنи бошқа усул билан исботласа ҳам бўлади. Унинг учун (2.17) нинг икки томонини $e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$ га кўпайтириб, t_0 дан t гача интеграллаш етарли.

2.4-§. $\frac{dy}{dx} = f(x)$ КЎРИНИШДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

ТЕНГЛАМАНИ ГРАФИК ИНТЕГРАЛЛАШ

Мазкур бандда дифференциал тенгламани бевосита интеграллаш билан эмас, балки унинг ечимининг баъзи хоссаларини дифференциал тенгламанинг ўнг томонига қараб ўрганамиз. Бу соҳада француз математиги Анри Пуанкаре [7], рус математиги А. М. Ляпунов [8] ва бошқалар «Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси» деб аталган назария яратганлар. 10-11-бобларда «сифат» назариясига доир баъзи маълумотлар берилади.

Ҳозир биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган оддий дифференциал тенгламанинг ўнг томони фақат эркин ўзгарувчига боғлиқ бўлиб, *y* функция ўз графиги билан берилган ҳолда дифференциал тенглама ечимининг хоссаларини ўрганамиз.

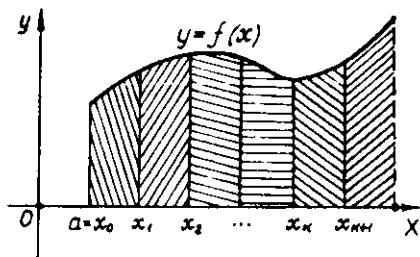
1. Аввал функцияларни график интеграллаш билан шуғулланамиз. Бу аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш мавзусига мансубдир.

Масаланинг қўйилиши: Бирор $a \leq x \leq b$ ораликда узлуксиз $f(x)$ функциянинг графиги бўйича бошланғичининг, яъни $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, $a < x \leq b$ функциянинг графиги чизилсин.

Бошқача айтганда, шундай $y = F(x)$ чизикни ясаш лозимки, унинг ҳар бир x га мос келган ординатаси асоси $[a, x]$ кесмадан иборат ва $y = f(x)$ чизиги билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзига тенг бўлсин.

Ушбу $F(a) = 0$ тенгликка кўра, қурилиши лозим бўлган функция графиги $x = a$ нуктада абсцисса ўқини кесиб ўтади. Бу $F(x)$ нинг графиги ҳақида дастлабки маълумот.

Энди $[a, x]$ кесмани $a = x_0, x_1, \dots (x_0 < x_1 < \dots)$ нукталар билан бўлакларга бўламиз. Бўлиш нукталари тўпламига $f(x)$ функциянинг характерли нукталарини (экстремум ва бурилиш нукталарини,



16-чизма

нолларини, бурчакли нукталарини) киритиш лозим. Бўлиш нукталаридан ордината ўқиға параллел чизиклар ўтказамиз. Улар $y=f(x)$ чизиги билан кесишиб, эгри чизикли трапециялар ҳосил қилади (16-чизма). Ўрта қиймат ҳақида теоремага кўра $[x_k, x_{k+1}]$ кесмада шундай ξ_{k+1} нукта топиладики,

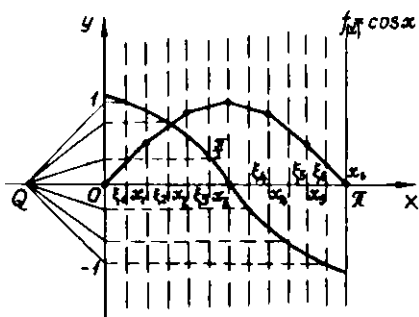
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = f(\xi_{k+1}) (x_{k+1} - x_k), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

муносабат ўринли бўлади. Шунга асосан қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \int_a^{x_1} f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = F(x_0) + f(\xi_1) (x_1 - x_0), \\ F(x_2) &= \int_a^{x_2} f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_1) + f(\xi_2) (x_2 - x_1), \\ &\dots \dots \dots (2.19) \\ F(x_i) &= \int_a^{x_i} f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \\ &= F(x_{i-1}) + f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

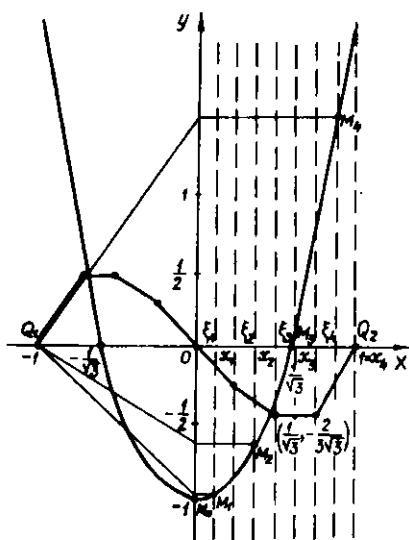
Равшанки, ҳар бир $F(x_{i-1})$, $i=1, 2, \dots$ микдор учун $F(x_i)$ микдорни топиш мумкин. Энди бошланғич $F(x)$ функциянинг $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ нукталардаги қийматларини топиб, $(x_0, F(x_0)), (x_1, F(x_1)), \dots, (x_k, F(x_k)), \dots$ нукталарни ясаймиз ва уларни тўғри чизик кесмаси билан туташтирамиз. Синик чизик ҳосил бўлади. Шу синик чизик бошланғич функциянинг тахминий графиги бўлади. $[a, x]$ кесманинг бўлиш нукталари тўпламига $f(x)$ функциянинг характерли нукталари киритилгани учун $F(x)$ функциянинг тахминий графиги ҳам тегишли характерли нукталарга эга бўлади. Қайд қиламизки, бўлиш нукталарини канча яқин қилиб олинса, $F(x)$ функциянинг графиги шунча аниқ бўлади.

Қўйилган масала ечимини охирига етказиш учун $(x_i, F(x_i))$, $i=0, 1, 2, \dots$ нукталарни ясаш билан шуғулланамиз. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$ нукталарга мос келган ва $y=f(x)$ чизикда ётувчи нукталарни $M_1(\xi_1, f(\xi_1)), M_2(\xi_2, f(\xi_2)), \dots$ деб белгилайлик. Уларни ордината ўқиға проекциялаймиз. Натижада $M'_1(0, f(\xi_1)), M'_2(0, f(\xi_2)), \dots$ нукталар ҳосил бўлади. Бу нукталарни қўтб деб аталувчи $Q, Q=(1, q)$, $|q|=1$ нукта билан туташтирамиз. Ҳосил бўлган нурларни $QM'_1, QM'_2, \dots$ деймиз. Энди $F(x)$ функция графигини $N_0N_1N_2, \dots$ синик чизиги билан алмаштирамиз. Бу ерда $N_0=N_0(x_0, 0)$, $N_1=N_1(x_1,$

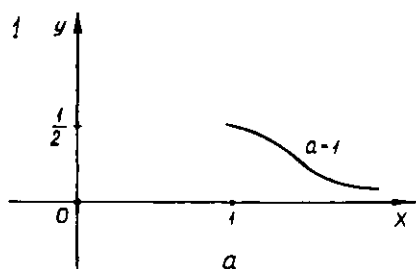


18- чизма

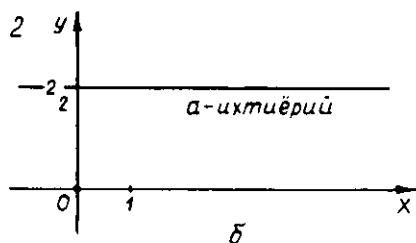
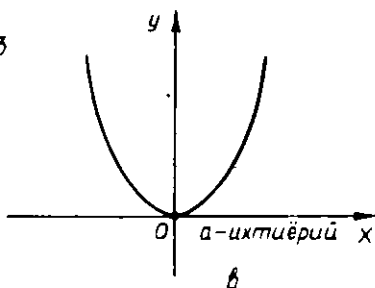
кўринишда дифференциал тенглама берилган бўлиб, унда $f(x)$ функция бирор $a \leq x \leq b$ ораликда узлуксиз графиги билан берилган бўлсин.



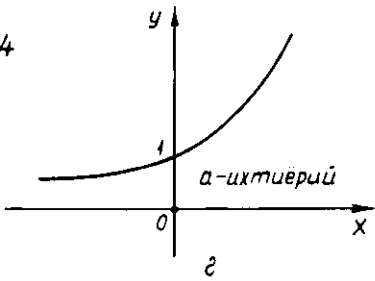
19- чизма



3



4



20- чизма.

Масаланинг қўйилиши: (2.20) дифференциал тенгламанинг $\Gamma = \{(x, y) : a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$ соҳанинг (x_0, y_0) нуктасидан ўтадиган интеграл чизиги тахминан чизилсин ва бу интеграл чизикнинг характерли хоссалари текширилсин.

Масалани ечиш учун аввал $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$, $a < x \leq b$ ни чизиш керак. Буни биз

билимиз. Сўнгра $F(x_0) = \int_a^{x_0} f(\xi) d\xi$ бўлганидан $y(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi + C_0$

формулада $C_0 = y_0 - \int_a^{x_0} f(\xi) d\xi$ бўлади. Шундай қилиб, $y(x) = C_0 + \int_a^x f(\xi) d\xi$ дан кўринадики, $F(x)$ функциянинг чизилган графигини ордината ўқи бўйича C_0 ўзгармасга силжитсак, (2.20) дифференциал тенгламанинг (x_0, y_0) нуктадан ўтадиган интеграл чизиги тахминий чизилган бўлади. Агар $x_0 = a$ бўлса, $C_0 = y_0$ бўлади.

Чизилган интеграл чизиқнинг экстремум нукталари $f(x)$ функция графигининг абсцисса ўқини кесиб ўтган нукталарига мос келади (18, 19-чизмаларга қараңг). $f(x)$ функция графигининг экстремум нукталарига $F(x)$ функциянинг бурилиш нукталари мос келади. Агар бирор $r_1 < x < r_2$ ораликда $f(x)$ функция камаювчи бўлса, ўша ораликда $f'(x) < 0$, бинобарин, $F''(x) < 0$ бўлади. Демак, $r_1 < x < r_2$ ораликда $F(x)$ функция графигининг кавариклиги юқорига қараган. $f'(x) > 0$ бўлганда эса тескариси бўлади. Шунга ўхшаш, агар бирор $r_1 < x < r_2$ ораликда $f'(x) < 0$ бўлиб, $r_1 < x < r_1^*$, $r_1^* < r_2$ да $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $r_1 < x < r_2^*$ да $F'(x) = f(x) > 0$ ва $F(x)$ функция ўсувчи, акс ҳолда эса камаювчи бўлади.

18- чизмада $0 \leq x \leq \pi$ ораликда графиги билан берилган $y = \cos x$ функция учун $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, $y(0) = 1$ Коши масаласи тақрибан ечилган.

19- чизмада эса $r_1 < x < r_2$, $r_1 < -1$, $r_2 > 1$ интервалда графиги билан берилган $f(x) = 3x^2 - 1$ функция учун $\frac{dy}{dx} = 6x$, $y(0) = -1$ Коши масаласи тахминан ечилган.

Э с л а т м а . Аниқлик катта бўлмагани учун баён этилган усул билан (2.20) кўринишдаги дифференциал тенгламаларни интеграллаш унча мақсадга мувофиқ эмас. Аммо кўп соҳаларда (физика, химия, биология ва б.) функция турли асбоблар ёрдамида график усулда аниқланиши мумкин. Шунда дифференциал тенгламаларни график интеграллашга тўғри келади. Албатта, техникада айтилган масалаларни кўзда тутиб турли интеграторлар яратилган, улар $f(x)$ функциянинг графиги бўйича

дарҳол $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ функциянинг графигини чизиб беради. Интеграторлар-

нинг конструкцияси (2.20) кўринишдаги дифференциал тенгламаларни график интеграллаш назариясига асосланган.

М а ш қ . Унг томони 20(а, б, в, г)-чизмада берилган чизиқлардан иборат бўлган $\frac{dy}{dx} = f(x)$ дифференциал тенгламани график интегралланг (унда $a = x_0$ дейилиши кулай).

ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

3.1-§. ЕЧИМ ВА УМУМИЙ ЕЧИМ ТУШУНЧАСИ. КОШИ МАСАЛАСИ

1. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар ушбу

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3.1)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда F уч аргументли функция бўлиб, уч ўлчовли фазонинг очик D_3 тўпламида (D_3 соҳада) аниқланган. Агар бу тўпламни $\mathbf{R}^2$ текислигига ортогонал проекцияласак, $\mathbf{R}^2$ да бирор очик Γ тўплам (Γ соҳа) ҳосил бўлади.

3.1-таъриф. (3.1) дифференциал тенглама берилган бўлиб, $F(x, y, y')$ функциянинг $\mathbf{R}^3$ фазонинг D_3 соҳасида аниқланган бўлсин. Агар I (очик, ёпиқ ёки ярим очик) интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция учун қуйидаги учта шарт:

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. & (x, \varphi(x)) \in \Gamma, \quad x \in I, \quad (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D_3, \quad \Gamma \subset \mathbf{R}^2, \quad D_3 \subset \mathbf{R}^3; \\ 2^\circ. & \varphi(x) \in C^1(I); \\ 3^\circ. & F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \quad x \in I \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

бажарилса, бу функция I интервалда (3.1) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади. (3.1) тенгламанинг ечимига мос эгри чизиқ (яъни $y = \varphi(x)$ функциянинг графиги) унинг интеграл эгри чизиги (ёки соддагина интеграл чизиги) дейилади.

Агар параметрик кўринишда берилган $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I_1$ (I_1 — параметр t нинг ўзгариш соҳаси ёпиқ, очик, ярим очик интервалдан иборат) функция учун $x'(t) \neq 0$, $t \in I_1$ бўлиб, қуйидаги учта шарт:

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. & (x(t), y(t)) \in \Gamma, \quad \left(x(t), y(t), \frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \in D_3, \quad t \in I_1; \\ 2^\circ. & y(t) \in C^1(I_1), \quad x(t) \in C^1(I_1); \\ 3^\circ. & F\left(x(t), y(t), \frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \equiv 0, \quad t \in I_1 \end{aligned} \right\}$$

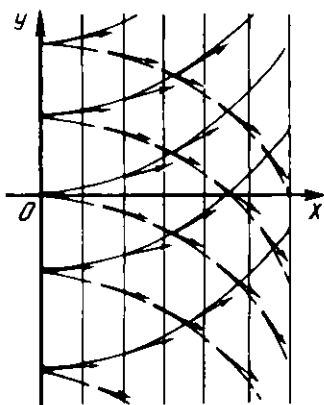
бажарилса, y ҳолда $x = x(t)$, $y = y(t)$ функция I_1 интервалда (3.1) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади. Баъзи ҳолларда ечимни шу кўринишда излаш ёки ёзиш қулай бўлади.

(3.1) дифференциал тенглама учун ҳам (1.1) дифференциал тенглама учун айтилганидек ечим уч: $y = \varphi(x)$; $\Phi(x, y) = 0$; $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in I_1$) кўринишдан биттаси орқали изланади.

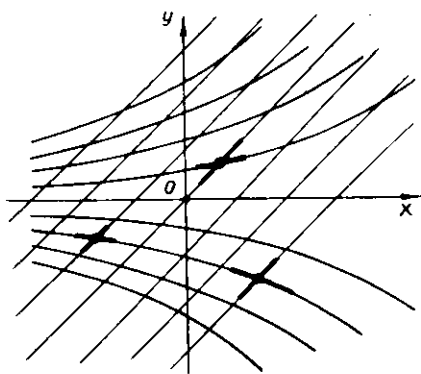
Агар (3.1) дифференциал тенглама y га нисбатан бир қийматли ечилиши мумкин бўлса, y ҳолда (1.1) дифференциал тенгламага келамиз ва 1-бобдаги барча мулоҳазалардан фойдаланишимиз мумкин. Аммо (3.1) доим бир қийматли ечилавермайди.

(3.1) дифференциал тенглама очик Γ тўпламининг ҳар бир (x, y) нуктасида y' нинг битта ёки бир нечта қийматларини аниқласин дейлик. Ҳар бир (x, y) нуктада y' дан фойдаланиб битта ёки бир нечта бирлик вектор чизамиз. Натижада йўналишлар майдони ҳосил бўлади. Энди интеграл чизикларнинг тақрибий тасвирини олишимиз мумкин. Ечим тушунчасини мустаҳкамлаш учун мисоллар кўрайлик:

Мисоллар. 1. Ушбу $y'^2 - x^2 = 0$, $D_1 = \{(x, y, y') : 0 \leq x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty\}$ дифференциал тенглама учун $y' = \pm x$, $0 \leq x < +\infty$. Ордината ўқига нисбатан ўнг ярим текисликнинг ҳар бир (x, y) нуктасида $y' = x$ ва $y' = -x$ дифференциал тенгламаларнинг фақат биттадан интеграл чизиклари ўтади (21-чизма). Аввал йўналишлар майдонини чизиш кийин эмас. Бирлик векторни $y' = x$ учун туташ чизиклар билан, $y' = -x$ учун эса пунктирлар билан белгилаймиз (21-чизма).



21- чизма



22- чизма

Сўнгра бу йўналишлар бўйича интеграл чизикларни чизамиз. Албатта қулайлик учун аввал $(x=k$ ва $x=-k$, k - ҳақиқий сон) изоклиналарни чизиб чиқиш керак.

$y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = -\frac{x^2}{2} + C$ функциялар C нинг ҳар бир қийматида 3.1-таърифнинг

барча шартларини қаноатлантиришини ва ечим бўлишини текшириш кийин эмас.

2. Ушбу

$$y'' - (1+y)y' + y = 0, D_2 = \{(x, y, y') : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty\}$$

дифференциал тенглама учун $y' = 1$ ва $y' = y$. Улардан биринчиси бурчак коэффициенти 1 га тенг тўғри чизиклар оиласини ифодаласа, иккинчиси $y = Ce^x$ экспоненциал функциялар оиласини ифодалайди (22-чизма). $y = x + C$ ва $y = Ce^x$ функциялар C нинг ҳар бир қийматида 3.1-таърифнинг шартларини қаноатлантиришини осонгина текшириш мумкин.

Умумий ечим тушунчасини киритишдан аввал (3.1) тенглама учун Коши масаласини кўямиз.

Коши масаласи: (3.1) дифференциал тенгламанинг $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in \Gamma$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин ёки геометрик нуқтаи назардан, (3.1) дифференциал тенгламанинг $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтадан ўtuvчи интеграл чизиги кўрсатилсин.

(3.1) дифференциал тенглама y' га нисбатан ечилиши мумкин дейлик. У ҳолда (x_0, y_0) нуктанинг бирор атрофида y' учун бир неча ҳақиқий қийматларни (ҳақиқий функцияларни) топамиз:

$$y' = f_k(x, y), \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

Агар ҳар бир $f_k(x, y)$ ($k=1, 2, \dots, m$) функция бирор мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартларини қаноатлантирса, у ҳолда (x_0, y_0) нуктадан (3.1) дифференциал тенгламанинг m та интеграл чизиги ўтади. Баъзи $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_{2n}}$ ($k_{2n} \leq m$) функциялар комплекс бўлса, у ҳолда биз фақат $f_{k_{2n+1}}, \dots, f_m$ функциялар билан иш кўра-

миз. Бу ҳолда (x_0, y_0) нуктадан тегишли дифференциал тенгламанинг $m - k_{2n}$ та интеграл чизиги ўтади.

Агар (3.1) дифференциал тенгламанинг ҳақиқий $f_1(x, y), \dots, f_k(x, y)$ ($k \leq m$) функцияларга мос келган ва (x_0, y_0) нуктада унинг интеграл чизиқларига ўтказилган уринмалар турли бурчак коэффициентларига эга бўлса, у ҳолда Коши масаласи ягона ечимга эга дейилади.

М а с а л а н . 1-мисолда кўрилган $y'^2 - x^2 = 0$ дифференциал тенглама учун ҳар бир $(0, y)$ (y - ихтиёрий) нуктадан иккита интеграл чизик ўтади ва уларнинг уринмалари горизонтал тўғри чизиклардан иборат. Демак, оордината ўқининг ихтиёрий нуктаси учун Коши масаласи ягона ечимга эга эмас. Аммо ўнг ярим текисликнинг ихтиёрий нуктаси учун Коши масаласининг ечими ягонадир.

3. Ушбу

$$y'^3 - e^x y'^2 + x^2 y' - x^2 e^x = 0, \quad D_1 = \mathbb{R}^3$$

дифференциал тенгламани кўрайлик. Уни $(y' - e^x)(y'^2 + x^2) = 0$ кўринишга келтириш мумкин. Бундан $y' - e^x = 0$, $y'^2 + x^2 = 0$ дифференциал тенгламалар келиб чиқади. Иккинчи дифференциал тенгламани y' га нисбатан ҳисаб: $y' = ix$, $y' = -ix$ (i - мавҳум бирлик). Демак, $f_1(x, y) = e^x$, $f_2(x, y) = ix$, $f_3(x, y) = -ix$. Равшанки, $y' - e^x = 0$ дан $y = e^x + C$ ва тенгсизликнинг ихтиёрий нуктаси учун Коши масаласи ягона ечимга эга бўлиб, ихтиёрий берилган (x_0, y_0) нуктадан берилган дифференциал тенгламанинг фақат ягона интеграл чизиги ўтади.

3.2- т а ъ р и ф . (3.1) дифференциал тенглама (x_0, y_0) нуктанинг бирор атрофида y' га нисбатан ечилиши мумкин, яъни (3.3) тенгламаларга ажралади дейлик. Агар ҳар бир (3.3) тенглама

$$y = \varphi_k(x, C), \quad k=1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

умумий ечимга ёки

$$\Phi_k(x, y) = C, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad C \text{ — ихтиёрий ўзгармас} \quad (3.5)$$

умумий интегралга эга бўлса, у ҳолда (3.4) умумий ечимлар тўплами (ёки (3.5) умумий интеграллар тўплами) берилган (3.1) дифференциал тенгламанинг умумий ечими (ёки умумий интеграл) дейилади.

Киритилган таъриф (3.1) тенглама y' га нисбатан чексиз кўп ечимга эга бўлган ҳол учун ҳам ўринли бўлади 1-мисолда $y'^2 - x^2 = 0$ эди. Ундан $0 \leq x < +\infty$ интервалда $y' = x$, $y' = -x$ бўлиб, биринчисининг умумий ечими $y = \frac{x^2}{2} + C$, иккинчисиники эса

$y = -\frac{x^2}{2} + C$ бўлади. Берилган тенгламанинг умумий ечими

$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad y = -\frac{x^2}{2} + C$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sin y' = 0, \quad D_1 = \mathbb{R}^1$$

дифференциал тенгламани кўрайлик. Ундан $y' = kx$ (k — бутун) ва $y = kx + C$ келиб чиқади. Умумий ечим ушбу

$y = C, y = -\pi x + C, y = \pi x + C, \dots, y = -n\pi x + C, y = n\pi x + C, \dots$ (n — натурал сон) чексиз кўп функциялар тўпламидан иборат.

3.3-таъриф. Агар (3.1) тенгламанинг бирор I интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ ечимининг ҳар бир нуқтасида Қоши масаласи ягона ечимга эга бўлса, y ҳолда $y = \varphi(x)$ ($x \in I$) ечим берилган тенгламанинг хусусий ечими дейилади. 1- ва 2-мисолларда мос равишда $y = -\frac{x^2}{2}, y = \frac{x^2}{2}, y = x, y = e^x$ функциялар тегишли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларидир.

Юқоридаги таърифлар муносабати билан **махсус ечим** тушунчасини киритиш лозим бўлади.

3.4-таъриф. Агар $y = \varphi(x)$, функция (3.1) тенгламанинг I интервалда аниқланган ечими бўлиб, $y = \varphi(x), x \in I$ функция билан тавсифланадиган интеграл чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан $y = \varphi(x), x \in I$ интеграл чизиқдан ташқари шу нуқтада y билан бир хил йўналишга эга бўладиган, аммо ўша нуқтанинг ихтиёрий атрофида ундан фарқ қиладиган яна бошқа интеграл чизиқ ўтса, y ҳолда $y = \varphi(x), x \in I$ ечим (3.1) тенгламанинг I интервалда аниқланган **махсус ечими** дейилади.

Махсус ечимларга 3.4-§ да алоҳида тўхталамиз.

1-мисолни $-\infty < x < +\infty$ интервалда кўрсак, ордината ўқининг ҳар бир нуқтасидан горизонтал уринмага эга бўлган икки интеграл чизиқ ўтади. Аммо Oy ўқи берилган дифференциал тенгламанинг ечими эмас. Демак, ўша мисолда махсус ечим йўқ.

Мисол. $(y')^3 = y^2, D_3 = \{(x, y, y') : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \leq y' < +\infty\}$ дифференциал тенгламани $y' = y^{\frac{2}{3}}$ кўринишда ёзиш мумкин. Маълумки, абсцисса ўқи (яъни $y = 0$ чизиқ) ва $y = \frac{(x+C)^3}{27}$ кубик параболалар бу тенглама учун интеграл чизиқ бўлиб хизмат қилади. Аммо $y = 0$ чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан бир хил йўналишда иккита интеграл чизиқ ўтади. Шунинг учун $y = 0$ махсус ечимдир.

3.2-§. КВАДРАТУРАЛАРДА ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ БАЪЗИ ТЕНГЛАМАЛАР

1. n -даражали биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$F(x, y, y') = a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0, \quad (3.6)$$

$a_0(x, y) \neq 0$ кўринишда ёзилади. Бу y' га нисбатан n -даражали тенгламадир. Агар $n = 1$ бўлса, $a_0(x, y)y' + a_1(x, y) = 0$ ёки $a_0(x, y) \neq 0$ бўлгани учун $y' = \frac{a_1(x, y)}{a_0(x, y)} = f(x, y)$ бўлади, яъни (1.1) дифференциал тенгламага келамиз. Албатта, (3.6) дифференциал тенгламада $a_0(x, y), a_1(x, y), \dots, a_n(x, y)$ функциялар бирор очик I

тўпلامда аниқланган ва узлуксиз. Энг содда ҳолда $a_i(x, y) = b_i = \text{const} (i=0, 1, \dots, n)$ бўлиб, ушбу

$$F(y') = b_0(y')^n + b_1(y')^{n-1} + \dots + b_{n-1}y' + b_n = 0$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг y' га нисбатан ҳақиқий ечимларини $k_i (i=1, 2, \dots, m, m \leq n)$ дейлик. У ҳолда $y' = k_i$ дан $y = k_i x + C$ ёки $k_i = \frac{y-C}{x}$ келиб чиқади. Шунинг учун $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$

берилган дифференциал тенгламанинг умумий интегралли бўлади.

Агар $a_0(x, y), \dots, a_n(x, y)$ функциялар очик Γ тўпلامда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда (3.6) тенгламани y' га нисбатан ечиб, улардан ҳақиқий қийматларни олсак, қуйидаги

$$y' = f_k(x, y), \quad k=1, 2, \dots, m, \quad m \leq n$$

дифференциал тенгламаларга эга бўламиз. Кейинги мулоҳазалар $f_k(x, y)$ функцияларга боғлиқ бўлади. Бу функциялар учун Γ тўпلامда Коши теоремасининг шартлари бажарилади дейлик. Унда бу тўпلامнинг ҳар бир нуктасида Коши масаласи ягона ечимга эга бўлади. Шунинг қайд қиламизки, Γ тўпلام $f_1, f_2, \dots, f_m$ функциялар аниқланиш соҳалари $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ нинг қесинимасидан иборат, яъни

$$\Gamma = \bigcap_{i=1}^m \Gamma_i.$$

Мисоллар. 1. $(y')^5 + \sqrt{3}(y')^4 - y' - \sqrt{3} = 0$ дифференциал тенгламани кўрайлик. У y' га нисбатан 5- даражали. Бу тенгламани $((y')^2 + 1)((y')^2 - 1) \cdot (y' + \sqrt{3}) = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Равшанки, унинг ҳақиқий ечимлари $y' = 1, y' = -1, y' = -\sqrt{3}$ бўлади. Аммо дифференциал тенгламанинг интеграллини битта

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5 + \sqrt{3}\left(\frac{y-C}{x}\right)^4 - \left(\frac{y-C}{x}\right) - \sqrt{3} = 0$$

формула билан ёзиш мумкин. Бунда $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \mathbb{R}^2$. Демак, юқоридаги тенглама учун $\mathbb{R}^2$ текислигининг ихтиёрий (x_0, y_0) нуктасида Коши масаласи ягона ечимга эга.

2. Ушбу y' га нисбатан иккинчи даражали

$$(y')^2 - (2x + \cos x)y' + 2x \cos x = 0$$

дифференциал тенгламадан

$$y' = 2x, \quad y' = \cos x$$

келиб чиқади. Бундан берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = x^2 + C, \quad y = \sin x + C$$

бўлади. 2- мисолда $\Gamma_1 = \mathbb{R}^2, \Gamma_2 = \mathbb{R}^2$ ва $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \mathbb{R}^2$ да ягоналик хоссаси ўринли. Худди шунингдек,

$$(y')^2 - \left(e^x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)y' + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad D = \{(x, y) : -1 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

$(DC\mathbb{R}^2)$ дифференциал тенглама учун $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \mathbb{R}^2 \cap D = D$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас.

Агар $F(y') = 0$ дифференциал тенгламанинг y' га нисбатан илдиэлари бирор интервалли тўла қопласи, у ҳолда тегишли дифференциал тенглама $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$

интегралдан фаркли ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин. Жумладан, $y' - |y'| = 0$ дифференциал тенглама учун $0 \leq k < +\infty$ интервалда $y' = k$. Ундан $y = kx + C$ ($0 \leq k < +\infty$) келиб чиқади. Бу интеграл чизиклардан фаркли яна $y = x^\alpha$ ($0 \leq x < +\infty$, $\alpha > 1$) интеграл чизиклар ҳам мавжуд.

2. Номаълум функцияни ўз ичига олмаган

$$F(x, y') = 0 \quad (3.7)$$

кўринишдаги дифференциал тенгламаларни кўрамиз. Агар (3.7) тенгламани y' га нисбатан ечиш мумкин бўлса, у ҳолда бирор I интервалда узлуксиз $f_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) функциялар учун $y' = f_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) тенгламаларга келамиз. Ундан $y = \int f_k(x) dx + C$ ($k=1, 2, \dots$). Бу ечимлар тўплами умумий ечим бўлади.

Баъзи ҳолларда (3.7) тенгламани y' га нисбатан ечишга қараганда x га нисбатан ечиш осонроқ бўлади. Бунда $x = \psi_i(y')$ ($i=1, 2, \dots$) дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаш учун қуйидагича иш кўрамиз: аввал $y' = p$ деймиз. Равшанки, $dy = y' dx = p dx$, $dx = d(\psi_i(p)) = \psi'_i(p) dp$. Шунинг учун $dy = d\psi'_i(p) dp$ бўлади. Бундан

$$\begin{cases} y = \int p \psi'_i(p) dp + C, \\ x = \psi_i(p), \quad i=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.8)$$

келиб чиқади. (3.8) формулада p - параметр вазифасини ўтаяпти. Демак, (3.8) ечим умумий ечим бўлади.

Мисоллар. 1. $(y')^2 - \frac{1}{1-x^2} = 0$, $|x| < 1$ дифференциал тенгламани кўрайлик.

Уни y' га нисбатан ечиш осонроқ. Шунинг учун ушбуга эгамиз:

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Ундан $y = \arcsin x + C$, $y = -\arcsin x + C$ ни ҳосил қиламиз. Бу умумий ечимлар тўплами берилган дифференциал тенглама учун умумий ечим бўлади.

2. Ушбу $e^{1+(y')^2} - x^2 = 0$ дифференциал тенгламани x га нисбатан ечайлик:

$$x = \pm e^{\frac{1+(y')^2}{2}}.$$

Солда ҳисоблашларни бажариб,

$$dx = \pm p e^{\frac{1+p^2}{2}} dp, \quad dy = \pm p^2 e^{\frac{1+p^2}{2}} dp, \quad y = \pm \left(p e^{\frac{1+p^2}{2}} - \int e^{\frac{1+p^2}{2}} dp \right) + C$$

ларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, ушбу

$$\begin{aligned} x &= e^{\frac{1+p^2}{2}}, \quad y = p e^{\frac{1+p^2}{2}} - \int e^{\frac{1+p^2}{2}} dp + C, \\ x &= -e^{\frac{1+p^2}{2}}, \quad y = -p e^{\frac{1+p^2}{2}} + \int e^{\frac{1+p^2}{2}} dp + C; \end{aligned}$$

умумий ечимлар тўплами берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

3. Эркин ўзгарувчини ўз ичига олмаган

$$F(y, y') = 0 \quad (3.9)$$

кўринишдаги дифференциал тенгламалар ҳам ё y' га ёки y га нисбатан осонроқ ечилади дейлик. Биринчи ҳолда $y' = f_k(y)$ ($k=1, 2, \dots$) дифференциал тенгламаларга келамиз. Агар $f_k(y) \neq 0$, $y \in I_y$ бўлса, $\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + C$ ($k=1, 2, \dots$) ечимларга эга бўламиз. Агар

$f_k(y) = 0$ тенглама $y = b_m$ ($m=1, 2, \dots$) илдишларга эга бўлса, у ҳолда $y = b_m$, $m=1, 2, \dots$ функциялар ҳам (3.9) нинг ечими бўлади.

Энди (3.9) тенглама y га нисбатан ечилган бўлсин: $y = \psi_l(y')$, $l=1, 2, \dots$. Яна $y' = p$ деймиз ва $dx = \frac{1}{p} dy$, $dy = \psi'_l(p) dp$ ни ҳосил қиламиз. Шунинг учун $p \neq 0$ бўлганда $dx = \frac{1}{p} \psi'_l(p) dp$ бўлади. Буни интеграллашдан ҳосил бўлган

$$x = \int \frac{1}{p} \psi'_l(p) dp + C, \quad y = \psi_l(p), \quad l=1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

ечимлар тўплами (3.9) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Агар $p=0$ ёки $y'=0$, демак, $y = \alpha_i$ ($i=1, 2, \dots$) лар тенгламанинг хақиқий илдишлари бўлса, юқорида $dy = p dx$ ни p га бўлиб, $y = \alpha_i$ ечимларни йўқотган бўлар эдик. Аммо $y = \alpha_i$ ечимлар (3.10) ечимлар орасида йўқ ва демак, улар махсус ечим бўлиши мумкин. Агар

$p \rightarrow +0$ ($p \rightarrow -0$) бўлганда $\int_{p_1}^p \frac{1}{\xi} \psi'_l(\xi) d\xi$ (ёки $\int_p^{p_2} \frac{1}{\xi} \psi'_l(\xi) d\xi$) интеграл

яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y = \alpha_i$ ечимлар махсус бўлади. Акс ҳолда, яъни юқоридаги икки интеграл узоклашувчи бўлганда тегиншли ечимлар махсус бўлмайди.

Мисоллар. 1. Ушбу $ye^{y'} = (y')^2$ дифференциал тенгламани y га нисбатан ечамиз. Бундан $y = (y')^2 e^{-y'}$, $y' = p$, $y = p^2 e^{-p}$, $dy = (2pe^{-p} - p^2 e^{-p}) dp$, $dx = \frac{dy}{p} = (2e^{-p} - pe^{-p}) dp$. Охирги муносабатни интегралласак, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x = e^{-p}(p-1) + C, \\ y = p^2 e^{-p}. \end{cases}$$

Агар $y^2 e^{2y'} = (y')^4$ дифференциал тенглама берилган бўлса, ундан $y = \pm (y')^2 e^{-y'}$ келиб чиқади. Бу ҳолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x = e^{-p}(p-1) + C, \\ y = p^2 e^{-p} \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x = -e^{-p}(p-1) + C, \\ y = -p^2 e^{-p} \end{cases}$$

умумий ечимлар тўпламидан иборат бўлади.

2. $(y')^2 e^{2y} = y^{-2}$ дифференциал тенглама куйидаги $y' = +y^{-1} e^{-y}$ ва $y' = -y^{-1} e^{-y}$ дифференциал тенгламаларга эквивалент. Бундан $ye^y dy = \pm dx$ ёки $(y-1)e^y = \pm x + C$ умумий ечимга эга бўламиз.

4. Энди (3.1) дифференциал тенглама ё x га ёки y га нисбатан осонлик билан ечиладиган ҳолларни кўрайлик.

а) (3.1) тенгламани ушбу

$$x = \Phi_k(y, y'), \quad k=1, 2, \dots \quad (3.11)$$

кўринишда ёзилган бўлсин. Яна $y' = p$ деб параметр киритамиз. (3.11) муносабатнинг икки томонини y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p}.$$

Бундан

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial p} \neq 0. \quad (3.12)$$

(3.12) тенгламанинг ўнг томони y ва p нинг функцияси, демак, биз $\frac{dp}{dy} = f_k(y, p)$ кўринишдаги дифференциал тенгламага келдик. Унинг умумий ечими $p = \psi_k(y, C)$ дейилса, (3.11) дан $x = \Phi_k(y, \psi_k(y, C))$ ҳосил бўлади. Бу ечимлар тўплами умумий ечим бўлади.

б) (3.1) тенглама

$$y = \Phi_k(x, y'), \quad k=1, 2, \dots \quad (3.13)$$

кўринишда ёзилган дейлик. $y' = p$ деб, ундан ва (3.12) дан

$$p = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi_k}{\partial p}}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial p} \neq 0$$

га эга бўламиз. Охирги тенглама $\frac{dp}{dx} = f_k(x, p)$ кўринишдаги тенглама бўлиб, унинг умумий ечимини $p = \psi_k(x, C)$, $k=1, 2, \dots$ деб ёзамиз. (3.13) га кўра берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y = \Phi_k(x, \psi_k(x, C))$ каби ёзилади.

Кўрилган а) ва б) ҳолларда $x = \Phi_k(y')$, $y = \Phi_k(y')$ тенгламалар хусусий ҳол бўлиб, улар учун мулоҳазалар янада содда бўлишини аввалги бандларда кўрдик.

Мисоллар. 1. $x(y')^2 = y$, $x > 0$ дифференциал тенглама y га нисбатан ечилган. $p = y'$, $y = xp^2$, $p = p^2 + 2xp \frac{dp}{dx}$ десак, ўзгарувчилари ажраладиган $\frac{dp}{dx} = \frac{1-p}{2x}$

($p \neq 0$) дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Уни интеграллаб $\left(p = 1 - \frac{C}{\sqrt{x}}\right)$, бе-

рилган тенгламага қўйсак, унинг умумий ечими: $y = x \left(1 - \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2$ кўринишда ёзилади. Равшанки, $y = 0$ ҳам ечим бўлиб, у махсус ечимдир.

2. $y(y')^3 + x - 1 = 0$, $y \neq 0$ дифференциал тенгламани x га нисбатан ечамиз: $x = 1 - y(y')^3$, $y' = p(y)$ десак, ҳисоблашлар

$$x = 1 - y(y')^4, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = -p^3 - 3p^2 y \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{1+p^4}{3p^3 y}$$

бўлишини кўрсатади. Бу дифференциал тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{1}{4} \frac{d(1+p^4)}{1+p^4} = -\frac{dy}{3y}, \quad \frac{1}{4} \ln(1+p^4) = -\frac{1}{3} \ln|y| + \ln C$$

ёки $(1+p^4)^{\frac{1}{4}} = \frac{C}{\sqrt[3]{|y|}}$. Бундан $p^3 = \sqrt[4]{\left(\frac{C^4}{\sqrt[3]{y^4}} - 1\right)^3}$ ни ҳосил қиламиз. Энди

берилган тенгламага p^3 учун топилган ифодани қўйсақ,

$$(1-x)^{\frac{4}{3}} + \sqrt[3]{y^4} = C_0, \quad C_0 = C^4$$

умумий ечимга келамиз.

5. (3.1) дифференциал тенгламада $F(x, y, y')$ функция x ва y га нисбатан m -даражали бир жинсли функция бўлса, у ҳолда (3.1) ни бундай ёзиш мумкин:

$$x^m F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0 \quad \text{ёки} \quad F\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}. \quad (3.14)$$

Бу тенгламани p га нисбатан ечиш осон бўлган ҳолга тўхталмай-миз.

(3.14) да y ўрнига янги номаълум функция $z(x)$ ни $y = xz(x)$ каби қиритсак, $F(z, p) = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Уни z га нисбатан ечиш қулай бўлсин дейлик: $z = \psi_k(p)$, $k = 1, 2, \dots$. Ушбу

$$\begin{aligned} dy &= zdx + xdz, \quad dy = \psi_k(p)dx + x\psi'_k(p)dp, \\ dy &= pdx, \quad pdx = \psi'_k(p)dx + x\psi'_k(p)dp \end{aligned}$$

хисоблашлардан сўнг x ва p ларга нисбатан $\frac{dx}{x} = \frac{\psi'_k(p)dp}{p - \psi_k(p)}$ диффе-

ренциал тенгламага келамиз. Агар $\frac{\psi_k(p)}{p - \psi_k(p)}$ функциянинг бошлан-

гич функцияси $\chi_k(p)$ дейилса, охириги дифференциал тенгламадан $x = Ce^{\chi_k(p)}$ ҳосил бўлади. $z(x) = \frac{y}{x}$ бўлганидан $y = x\psi_k(p)$,

$x = Ce^{\chi_k(p)}$ ($k = 1, 2, \dots$) муносабатлар берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ифодалайди.

Мисол. 4-банддаги 1-мисолда $x(y')^2 = y$, $x > 0$ дифференциал тенглама кўрилган эди. Бу тенгламани $F(x, y, y') = x(y')^2 - y = 0$ кўринишда ёзсак, $F(x, y, y')$ функция x ва y га нисбатан 1-даражали бир жинсли функция экани кўриниб турибди. Энди бу дифференциал тенгламани шу 5-банддаги усул билан интеграллаймиз. Тенгламани

$$x \left[(y')^2 - \frac{y}{x} \right] = 0 \quad \text{ёки} \quad x \left(p^2 - \frac{y}{x} \right) = 0, \quad p = y'$$

кўринишда ёзамиз. $y = xz$ десак, $p^2 - z = 0$ га келамиз. Ундан $z = p^2 \equiv \psi(p)$, $\psi'(p) = 2p$ ни ҳосил қиламиз. Энди тегишли

$$\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{p-p^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{dx}{x} = \frac{2dp}{1-p}, \quad p \neq 1$$

дифференциал тенгламага эгамиз. Интеграллаш натижасида $p = 1 - \frac{C}{\sqrt{x}}$ формула-
ни, ундан $y = x \left(1 - \frac{C}{\sqrt{x}} \right)^2$, $x > 0$ умумий ечимни тонамиз.

6. Юкоридаги бандларда $y' = p$ деб параметр киритдик. Умуман айтганда, параметрни янада умумийроқ усул билан киритиш қулай бўлган ҳоллар ҳам бўлади. Шу муносабат билан *параметр киритишнинг умумий усули* билан танишамиз.

Маълумки, $Ax + By + Cy' + D = 0$ дифференциал тенглама x, y, y' ўзгарувчиларнинг фазоси R^3 да текисликни, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{c^2} - 1 = 0$

дифференциал тенглама шу R^3 да эллипсоидни аниқлайди. Баъзи ҳолларда берилган сиртнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиш мумкин бўлади. $F(x, y, y') = 0$ сирт тенгламаси ушбу $x = \psi(u, v)$, $y = \chi(u, v)$, $y' = \omega(u, v)$ (u, v параметрлар) параметрик кўринишда ёзилган бўлсин. У ҳолда

$$F(\psi(u, v), \chi(u, v), \omega(u, v)) = 0$$

тенгламага эгамиз. Агар ψ, χ, ω функциялар бирор очик T тўпلامда аниқланган ва дифференциалланувчи бўлса, унда

$$dx = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial \chi}{\partial u} du + \frac{\partial \chi}{\partial v} dv$$

бўлади. Энди $\frac{dy}{dx} = \omega(u, v)$ бўлгани учун

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} du + \frac{\partial \chi}{\partial v} dv = \omega(u, v) \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right]$$

тенглама u ва v параметрлар орасидаги дифференциал боғланишни тасвирлайди. Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial u} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du = \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) dv.$$

Агар $\frac{\partial \chi}{\partial u} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial u} \neq 0$ бўлса, u ни номаълум функция, v ни эса эркин ўзгарувчи деб, ушбу

$$\frac{du}{dv} = \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) / \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \quad (3.15)$$

ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламага келамиз. Шунга ўхшаш, агар $\omega \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \neq 0$ бўлса, v ҳолда ушбу

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) / \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) \quad (3.15')$$

дифференциал тенгламага келамиз.

Агар (3.15) ёки (3.15') дифференциал тенглама квадратураларда интегралланса, u ҳолда берилган (3.1) дифференциал тенглама ҳам интегралланади. Ҳақиқатан, агар (3.15) тенгламанинг умумий ечими $u = u(v, c)$ бўлса,

$$\begin{cases} u = u(v, C), \\ x = \psi(u(v, C), v), \\ y = \chi(u(v, C), v) \end{cases}$$

(бу ерда v - параметр, C - ихтиёрий ўзгармас) (3.1) тенглама ечимининг параметрик кўриниши бўлади. (3.15') учун умумий ечим

$$\begin{cases} v = v(u, C), \\ x = \psi(u, v(u, C)), \\ y = \chi(u, v(u, C)) \end{cases}$$

кўринишда (бу ерда u - параметр, C - ихтиёрий ўзгармас) бўлади.

Масалан, $F(x, y, y') = 0$ тенглама $y = f(x, y')$ кўринишда ёзилиши мумкин бўлганда $u = x$, $v = y'$; $x = f(y, y')$ кўринишда ёзилганда эса $u = y$, $v = y'$ дейилиши лозим. Биринчи ҳолда ($x = x$, $y = f(x, v)$,

$y' = v$) $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial f}$ дифференциал тенгламага, иккинчи ҳолда эса

($x = f(y, v)$, $y = y$, $y' = v$)

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{v \frac{\partial f}{\partial v}}{1 - v \frac{\partial f}{\partial y}}$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз.

7. Параметр киритишнинг умумий усулини қўллашга доир муҳим мисол кўрамиз. Агар $\psi(y')$, $\chi(y')$ функциялар бирор интервалда дифференциалланувчи бўлса,

$$y = x\psi(y') + \chi(y') \quad (3.16)$$

дифференциал тенглама Лагранж тенгламаси деб юритилади. Бу тенглама квадратураларда интегралланади. Ҳақиқатан, $y' = p$ десак, $y = x\psi(p) + \chi(p)$ бўлади. Энди буни x бўйича дифференциаллаб,

$$p = \psi(p) + x\psi'(p) \frac{dp}{dx} + \chi'(p) \frac{dp}{dx}$$

ёки

$$p - \psi(p) = [x\psi'(p) + \chi'(p)] \frac{dp}{dx} \quad (3.17)$$

га эга бўламиз. Агар $\frac{dp}{dx} = 0$ бўлса, у ҳолда $p = p_0$ ($p_0 = \text{const}$). Бу

юқоридаги дифференциал тенглама $p = \psi(p)$ кўринишга келганда содир бўлади. Демак, $p = p_0$ бўлганда $p - \psi(p) = 0$ тенглама шу $p = p_0$ ечимга эга бўлади ва ушбу $y = x\psi(p_0) + \chi(p_0)$, $i = 1, 2, \dots$ тўғри чизикларни ҳосил қиламиз.

Агар $\frac{dp}{dx} \neq 0$ бўлса, (3.17) тенглама номатълум x га нисбатан ушбу

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\psi'(p)}{p - \psi(p)} x + \frac{\chi'(p)}{p - \psi(p)} \quad (3.18)$$

биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламадан иборат. Унинг умумий ечими $\Phi(x, p, C) = 0$ бўлади. Берилган дифференциал тенглама умумий ечимининг параметрик кўриниши бундай:

$$\begin{cases} \Phi(x, p, C) = 0, \\ y = x\psi(p) + \chi(p), \quad p - \text{параметр.} \end{cases}$$

Агар $p - \psi(p) \neq 0$ бўлса, у ҳолда (3.16) тенгламада параметрларни

$$x = x, \quad y = \psi(p) + \chi(p), \quad y' = p$$

каби киритсак, (3.15) дифференциал тенглама ўрнида (3.18) дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Агар $p - \psi(p) \equiv 0$ бўлса, тенгламани $\frac{dp}{dx}$ га бўлганда $p = C$ ($C = \text{const}$) ечим (яъни $y = \psi(C) + \chi(C)$ ечим) йўқотилади. Аммо бундай ҳолда берилган дифференциал тенглама ушбу

$$y = xy' + \chi(y') \quad (3.19)$$

кўринишга келади. Бу тенглама *Клеро тенгламаси* деб юритилади.

Унинг икки томонини x бўйича дифференциалласак, $p = p + x \frac{dp}{dx} +$

$+\chi'(p) \frac{dp}{dx}$ ёки $(x + \chi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$ га эга бўламиз. Бундан

$\frac{dp}{dx} = 0$ (демак, $p = C$) ёки $x + \chi'(p) = 0$ келиб чиқади. Биринчи

ҳолда умумий ечим $y = Cx + \chi(C)$ кўринишда ёзилса, иккинчи ҳолда эса

$$\begin{cases} y = xp + \chi(p), \\ x + \chi'(p) = 0, \quad p - \text{параметр} \end{cases} \quad (3.20)$$

кўринишда бўлади. $y = Cx + \chi(C)$ тўғри чизиклар оиласининг ўрамаси (3.20) чизикдан иборат (3.5-таърифга қаранг).

Мисоллар. 1. $y = xy' - y'$ Клеро тенгламаси берилган бўлсин. Унинг умумий ечими, яъни бир параметрли интеграл тўғри чизиклар оиласи $y = Cx - C$ кўринишда бўлади. $y = C(x - 1)$ дан кўриниши, бу $(1, 0)$ нуктадан ўтадиган тўғри чизиклар дастаси бўлиб, унинг ўрамаси шу $(1, 0)$ нуктанинг ўзи (агар $y = Cx + \chi(C)$ тўғри чизиклар оиласи дастани ташкил этса, ўрама битта нуктадан иборат бўлиши ҳам мумкин) бўлади (3.5-таърифга қаранг).

2. Энди ушбу $y = 2xy' - y'$ Лагранж тенгламасини кўрайлик. Агар $y' = p$ десак $y = 2xp - p$ бўлади. Ундан

$$p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}, \quad (2x - 1) \frac{dp}{dx} = -p$$

келиб чиқади, уни $\frac{dp}{dx}$ га бўлсак:

$$-p \frac{dx}{dp} = 2x - 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p}, \quad p \neq 0.$$

Уни интегралласак: $x = \frac{C}{p^2} + \frac{1}{2}$. Демак, берилган тенглама умумий ечимининг

параметрик ёзилиши бундай бўлади:

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} + \frac{1}{2}, \\ y = 2xp - p. \end{cases}$$

Биз $p=0$ ҳолни кўрайлик, ундан $y=C$ (берилган тенгламага кўра $C=0$), яъни $y=0$ келиб чиқади. Бу $y=0$ ечим махсус бўлиши эҳтимоли бор. Уни 3. 4- § да кўрамиз.

3.3- §. ЕЧИМНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

3.1- теорема. Агар (3.1) дифференциал тенгламада $F(x, y, y')$ функция учун ушбу иккита шарт:

$$1^{\circ}. F(x_0, y_0, y') = 0 \quad (3.21)$$

тенгламанинг бирор ҳақиқий илдизи y'_0 учун $(x_0, y_0, y'_0) \in D_3((x_0, y_0) \in \Gamma)$ нуқтанинг бирор D^n атрофида $F(x, y, y')$ функция узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;

$$2^{\circ}. F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$$

бажарилса, y ҳолда шундай $h > 0$ мавжуд бўладики, (3.1) дифференциал тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$ оралиқда аниқланган $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ шартларни қаноатлантирувчи ягона $y = y(x)$ ечими мавжуд.

Исбот. Ошкормас функциялар ҳақидаги маълум теоремага кўра (3.1) тенглама D_3 да y' ни бир қийматли функция сифатида аниқлайди, яъни

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.22)$$

бунда $f(x, y)$ функция ёпик $\bar{\Gamma}_0$ ($\bar{\Gamma}_0 \subset \Gamma$) тўпلامда узлуксиз, биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $f(x_0, y_0) = y'_0$, $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$. Шунинг учун $f(x, y)$ функция ёпик Γ_0 тўпلامда y бўйича Лишниц шартини қаноатлантиради. Демак, (3.22) дифференциал тенглама Пикар теоремасига асосан $|x - x_0| \leq h$ оралиқда аниқланган ягона $y = y(x)$ ечимга эга бўлиб, $y(x_0) = y_0$ бўлади. Худди шу ечимга (3.1) тенглама ҳам эга. Энди $y'(x_0) = y'_0$ эканини кўрсатайлик. Ҳақиқатан, (3.22) тенглама $y = y(x)$ учун айниятга айланади: $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$, $|x - x_0| \leq h$.

Агар $x = x_0$ бўлса, $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = y'_0$.

3.1- натижа. 3.1- теореманинг шартига кўра (x_0, y_0, y'_0) нуқтанинг $\bar{D}_3^n$ атрофида $\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \neq 0$, $\left| \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial x} \right| \leq A$, $0 < A = \text{const}$.

3.2- натижа. Агар (3.21) тенглама бир неча ҳақиқий y'_i ($i = 1, 2, \dots, m$) илдишларга эга бўлса, ҳар бир (x_0, y_0, y'_i) нуқтанинг ёпик $\bar{D}_3^n$ атрофида (3.1) дифференциал тенглама y' ни бир қийматли аниқлайди, яъни $y' = f_i(x, y)$. Шу билан бирга ҳар бир i ($1 \leq i \leq m$) учун тегишли дифференциал тенглама $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$ нуқтадан ўтувчи ягона интеграл чизикка эга. Бошқача айтганда, (x_0, y_0) нуқтадан m та йўналиш бўйича фақат m та интеграл чизик ўтади.

Агар (x_0, y_0) нуктада Коши масаласи ягона ечимга эга бўлса, у нуктани *оддий нукта* дейилади. Бу нуктага мос ечимни *оддий ечим*, интеграл чизикни эса *оддий интеграл чизик* дейилади.

Шунга ўхшаш, агар (x_0, y_0) нуктада Коши масаласи учун ягоналик ўринли бўлмаса (3.4-таърифга қаранг), у ҳолда бу нукта (3.1) дифференциал тенгламанинг *махсус нуктаси* дейилади. Махсус нукталар тўплами *махсус ечим* бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Махсус ечим графиги *махсус интеграл чизик* дейилади.

Демак, (x_0, y_0, y'_0) нуктанинг етарли кичик ёпиқ атрофида 3.1-теореманинг бирор шarti бузилганда махсус нуктага эга бўлишимиз мумкин. 3.1-теорема фақат етарли шartни белгиллагани учун (x_0, y_0, y'_0) нукта айtilган ҳолда махсус бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Шу муносабат билан махсус нукта ва махсус ечим тушунчаларига мукаммал тўхталамиз.

3.4-§. МАХСУС НУКТА ВА МАХСУС ЕЧИМ

1. Аввал махсус нукта тушунчасига тўхталамиз. Бунда (3.1) дифференциал тенглама y' га нисбатан ечилиши мумкин деб қараймиз: $y' = f(x, y)$. Агар $f(x, y)$ функция P ёпиқ тўғри тўртбурчакда узлуксиз бўлиб, y бўйича Липшиц шartини қаноатлантирса, у ҳолда Пикар теоремасига кўра $(x_0, y_0) \in P$ нуктадан ягона интеграл чизик ўтади.

Энди $f(x, y)$ функция P нинг (x_0, y_0) дан бошқа ҳамма нукталарида узлуксиз бўлиб, (x_0, y_0) нуктада узлуксиз бўлмасин. Унда куйидаги ҳоллар рўй беради:

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$, A — чекли ҳақиқий сон;

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$ (аниқ ишорали чексиз);

3) $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада лимитга эга эмас.

1) ҳолда $f(x_0, y_0) = A$ деб, $f(x, y)$ функция кийматларини тўлдирсак, P да узлуксиз функцияга келамиз.

2) ҳолда эса $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$ тенгламани ҳам кўриб $\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$ деб, $\frac{1}{f(x, y)}$ функциянинг кийматини тўлдирамиз. Бунда яна Пикар теоремасини қўллаш мумкин ва дифференциал тенгламанинг интеграл чизиги (x_0, y_0) нуктада вертикал уринмага эга бўлади.

3) ҳолда (x_0, y_0) нукта яккаланган *махсус нукта* дейилади. Шундай нукталар атрофида интеграл чизикларнинг сифат хоссаларини ўрганиш мумкин бўлиб, бу дифференциал тенгламалар назарияси қўлланиладиган барча соҳаларда керак бўлади. Яккаланган нукталар атрофида интеграл чизикларни ўрганиш ҳар жихатдан мураккаб. $f(x, y)$ функция каср-чизикли бўлганда баъзи интеграл чизикларни чизамиз. Шундай қилиб, ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \quad (3.23)$$

(бунда a, b, c ва d лар — хақикий сонлар) дифференциал тенгламани кўрайлик. Унг томондаги функция учун $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ бўлганда $(0,0)$ нукта яккаланган махсус нуктадир. Унинг атрофида интеграл чизикларни текшираимиз. Δ ни (3.23) тенгламанинг детерминанти деб юртамиз.

Агар $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$ характеристик тенглама ҳар хил хақикий λ_1, λ_2 ечимларга эга бўлиб, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ бўлса (масалан, $\lambda_1 \neq 0$ бўлса), у ҳолда (3.23) тенгламани чизикли махсусмас алмаштириш ёрдамида

$$\frac{dv}{du} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{v}{u} \quad (3.24)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ундан

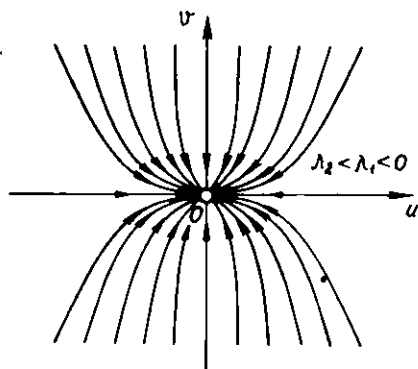
$$v = C|u|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (C — \text{ихтиёрий ўзгармас}) \quad (3.25)$$

келиб чиқади. λ_1 ҳамда λ_2 ларнинг ҳар бири нолдан фарқли ва бир хил ишорали ёки турли ишорали бўлишига қараб мос равишда *туғун* ёки *эгар* расмларига эга бўламиз (23- ва 24- чизмалар). Агар $\lambda_1 < 0$ бўлганда $\lambda_2 = 0$ бўлса, $v = c$ горизонтал интеграл чизикларга эга бўламизки, $(0, C)$ нукталар тўплами махсус нукталар тўплами бўлади (25- чизма).

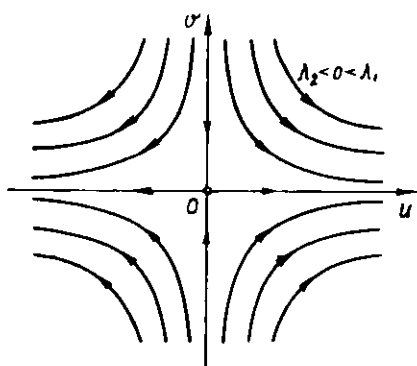
Юқоридаги 23-, 24-, 25- чизмалар λ_1 ва λ_2 ларнинг маълум қийматлари учун келтирилган.

Характеристик тенглама бир жуфт қўшма комплекс $\alpha \pm i\beta$ илдизга эга бўлсин. У ҳолда (3.23) тенгламани

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta u + \alpha v}{\alpha u - \beta v} \quad (3.26)$$



23- чизма



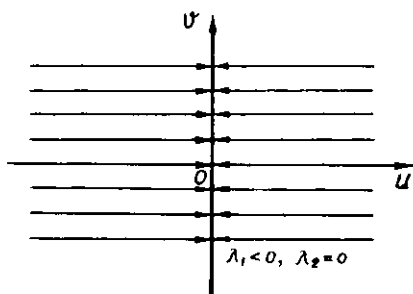
24- чизма

кўринишга келтириш мумкин. Бу бир жинсли дифференциал тенглама бўлиб, уни интеграллаш мумкин:

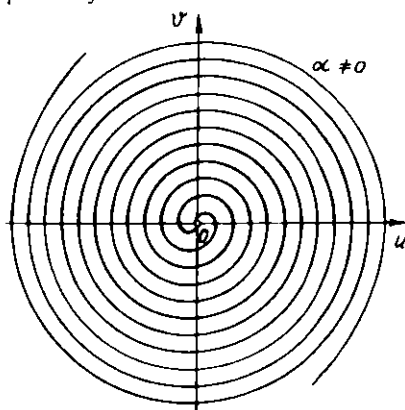
$$r = Ce^{\frac{v}{\alpha}},$$

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{v}{u}, \quad C > 0.$$

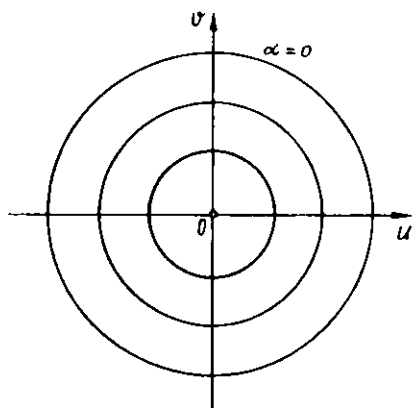
Бу формула $\alpha \neq 0$ бўлганда логарифмик спиралларни, $\alpha = 0$ бўлганда эса, концентрик айланаларни белгилайди (26, 27- чизмалар). Яна $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ҳоллар учун ҳам чизмаларни келтириш мумкин.



25- чизма



26- чизма



27- чизма

Агар $f(x, y)$ функция каср чизиқли бўлмаса, яккаланган махсус нукта атрофида интеграл чизиқларни ўрганиш масаласи анча мураккаб бўлиб, у «дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси» да ўрганилади.

2. Энди биринчи тартибли ҳосиллага нисбатан ечилган дифференциал тенгламаларнинг махсус ечимларини чуқурроқ ўрганамиз.

Маълумки, агар $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ тенгламада $f(x, y)$ функция бирор ёниқ чегараланган $P (P \subset \Gamma)$ тўпламда узлуксиз ва y бўйича узлуксиз хусусий ҳосиллага эга бўлиб, шу P да $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ функция ҳам узлуксиз бўлса,

$$\max_{(x, y) \in P} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = L < +\infty$$

га эгамиз ва Пикар теоремасига кўра ҳар бир $(x_0, y_0) \in P$ нуктадан дифференциал тенгламанинг ягона интеграл чизиғи ўтади. Демак, P тўпламда махсус интеграл чизик бўлмайди. Масалан, P тўғри тўртбурчакда аниқланган $f(x, y)$ функция y бўйича кўпхад бўлиб,

y шу P да узлуксиз бўлса, P тўпламда махсус ечим бўлмайди. Агар $f(x, y) = \begin{matrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{matrix}$ кўринишда бўлиб, $f_1(x, y)$ ва $f_2(x, y)$ функциялар

x ва y ларга нисбатан кўпхад ва P тўпламда узлуксиз (яна $f_2(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in P$) бўлса, y ҳолда P тўпламда фақат оддий интеграл чизиклар бўлади. Бу P ёпик тўғри тўртбучакда Пикар теоремасининг шартлари бажарилишидан келиб чиқади. Шундай қилиб, махсус ечим Пикар теоремасининг шартлари бузилган нукталар тўпламида мавжуд бўлиши мумкин. Агар $f(x, y)$ функция P тўпламда y бўйича чекли хусусий ҳосилага эга бўлса, y ҳолда бу функция P да y бўйича Липшиц шартини қаноатлантиришини 1- бобда айтиб ўтган эдик.

Энди P тўпламда $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ҳосила чегараланмаган нукталар ҳам бор бўлсин дейлик. Бундай нукталар тўпламини P' деб белгилаймиз (равшанки, $P' \subset P$). P' тўпламининг нукталари

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = +\infty \quad (3.27)$$

муносабатни қаноатлантирадиган нукталардан иборатдир. Шу P' тўпламнинг нукталари махсус ечимдан иборат бўлиши мумкин. Махсус ечимни топиш учун қуйидаги қондани тавсия этамиз:

1) (3.27) шарт бажариладиган нукталар тўплами топилади;

2) бу тўплам нукталарининг геометрик ўрни $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ тенгламанинг ечими бўлиши ёки бўлмаслиги текширилади;

3) айтилган ечим бор бўлса, унда ягоналик бузилиши ёки бузилмаслиги текширилади.

Агар бирор $y = \varphi(x)$, $x \in I$ ечим учун унинг ҳар бир нуктасида (3.27) шарт бажарилса ва ягоналик бузилса (3.4- таърифга қаранг), унда бу ечим махсус ечим бўлади.

Мисоллар. 1. 1- бобда кўрилган $y' = y^{\frac{1}{3}}$ дифференциал тенглама учун $(a, 0)$ нуктада (a - ихтиёрий ҳақиқий сон) $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{2}{3} \left| y^{-\frac{2}{3}} \right|$ ҳосила чегараланмаган.

Шу ҳосила чегараланмаган нукталар тўплами $P' = \{(x, y) : y = 0, x - \text{ихтиёрий}\}$ дан иборат бўлиб, $y = 0$ берилган тенгламанинг ечимидан иборат. Бу ечимнинг ҳар бир нуктасида ягоналик бузилишини кўрсатган эдик. Демак, $y = 0$ (абсцисса ўқи) берилган дифференциал тенглама учун *махсус ечим* бўлади.

2. Ушбу $y' = y^{\frac{2}{3}} + 1$, $-\infty < y < +\infty$ дифференциал тенглама учун ҳам $(a, 0)$ нукта атрофида $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{2}{3} \left| y^{-\frac{1}{3}} \right|$ чегараланмаган, аммо $y = 0$ ечим эмас. y ҳолда $y = 0$ чизик махсус ечим ҳам бўла олмайди, демак, берилган тенгламанинг махсус ечими йўқ.

3. Бу бандда ҳосилага нисбатан ечилмаган дифференциал тенгламалар учун махсус ечим мавжудлиги масаласи билан шуғулланамиз.

Биз махсус ечимни топишнинг икки усули билан танишамиз:

а) (3.1) тенглама учун 3.1- теорема шартларидан камида биттаси бажарилмаган, б) (3.1) дифференциал тенгламанинг умумий ечими маълум.

а) Асосан $F(x, y, y')$ функция D_3 соҳада узлуксиз ва узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда махсус ечим 3.1- теореманинг 2- шарты бузиладиган нукталар тўпламидан иборат бўлиши мумкин. Бошқача айтганда, $p = \frac{dy}{dx}$ параметрни киритсак,

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

системани қаноатлантирадиган (x, y) нукталар тўпламидан иборат бўлиши мумкин. Бу тўпламни D_3^0 дейлик. Агар (3.28) системанинг тенгламалари *биргаликда* бўлмаса, у ҳолда D_3^0 тўплам бўш бўлади (яъни $D_3^0 = \emptyset$). Агар $D_3^0 \neq \emptyset$ бўлса, бу тўплам нукталарининг геометрик ўрнини текшириш керак. Шу геометрик ўрин (3.1) дифференциал тенгламанинг p — *дискриминант чизиги* дейилади. Уни $\varphi_i^p(x)$ ($i=1, 2, \dots, m$) деб белгилайлик. $\varphi_i^p(x)$ чизиклар ечим бўлиши ҳам, қисман ечим бўлиши ҳам ва бутунлай ечим бўлмаслиги ҳам мумкин. Бундай ҳолда келиб чиқади:

1) p — дискриминант чизиклар (яъни $\varphi_i^p(x)$ чизиклар) топилади;

2) топилган p — дискриминант чизиклар ечим (ёки қисман ечим) бўлиши текширилади.

3) p — дискриминант чизикларнинг ечим бўлган шохчаларида ягоналик ўринли бўлиши ёки ўринли бўлмаслиги текширилади.

(3.28) дан p — дискриминант чизиклар учун (p ни чиқариб ташлагандан кейин) $\varphi_i(x, y) = 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) тенгламалар келиб чиқади. Агар бирор (x_0, y_0) нуктада $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \neq 0$ бўлса, тенгламаларни шу нуктанинг етарли кичик атрофида y га нисбатан ечиб, $y = \varphi_i(x)$ кўринишида ёзиш мумкин.

Агар бирор $y = \varphi_i(x)$ функция ёки $\varphi_i(x, y) = 0$ ошқормас тенглама p — дискриминант чизикларни белгилаб, бу чизик (3.1) дифференциал тенгламанинг ечими бўлса ва унинг ҳар бир нуктасида ягоналик ҳоссаси бузилса, у ҳолда тегишли чизик махсус интеграл чизик бўлади.

Мисоллар. 1. $(y')^2 = y^4$ дифференциал тенглама учун ушбу

$$\begin{cases} F(x, y, p) = p^2 - y^4 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p} = 2p = 0 \end{cases}$$

системага эгамиз. Ундаи $y=0$ келиб чиқади. Бу p — дискриминант чизикдир. Салла мулоҳазалар кўрсатадики, бу чизик берилган тенгламанинг ечими бўлиб, унинг ҳар бир нуктасидан бир йўналишда камида икки интеграл чизик (3.4- таърифга к.) ўтади (бигаси — $y=0$, иккинчиси — кубик парабола). Шундай қилиб, $y=0$ махсус ечимдир.

2. Аввал 3.2- § да кўрилган $y = 2xy' - y'$ Лагранж тенгламасини оламиз. Бу тенгламанинг махсус ечими йўқлигини кўрсатамиз. Тегишли

$$\begin{cases} F(x, y, p) = y - 2xp + p = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p} = -2x + 1 = 0 \end{cases}$$

системадан $y=0$, $x=\frac{1}{2}$ келиб чиқади. Бу нукта $y=0$ ечимда ётади ва $y=0$ ечим ихтиёрий x лар учун аниқланган. Аммо юқоридаги система x нинг $x=\frac{1}{2}$ қиймати-дагина биргаликда бўлади. Демак, $y=0$ ечим махсусмас.

3. Энди $y-2xy'+(y')^2=0$ тенглама берилган бўлсин. Ушбу

$$\begin{cases} y-2xp+p^2=0, \\ -2x+2p=0 \end{cases}$$

системадан $p=x$ келиб чиқади. p дискриминант чизигининг тенгламаси $y-2x \cdot x+x^2=0$ ёки $y=x^2$ бўлади. Аммо бу парабола берилган тенгламанинг интеграл чизиги эмас, чунки $x^2-2x(x^2)'+((x^2)')^2 \neq 0$.

Демак, $y=x^2$ парабола махсус ечим бўла олмайди. Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x=\frac{C}{p^2}+\frac{2}{3}p, \\ y=2xp-p^2 \quad (p \text{ — параметр, } C \text{ — ихтиёрий ўзгармас}) \end{cases}$$

кўринишда ёзилади.

3.2- теорема. Агар $F(x, y, p)$, $p=\frac{dy}{dx}$ функция бирор ёпиқ $\bar{D}_3^0 (\bar{D}_3^0 \subset D_3)$ тўпلامда аниқланган, узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, шу $\bar{D}_3^0$ да $\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial y} \neq 0$ бўлса, y ҳолда (3.1) дифференциал тенгламанинг p — дискриминант чизиги шу тенгламанинг ечими бўлиши учун ушбу

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial x} + p \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial y} = 0 \quad (3.29)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. p — дискриминант чизик ечим бўлсин ва унинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиш мумкин деб фараз этайлик, яъни

$$x=x(p), \quad y=y(p) \quad (p \text{ — параметр}),$$

бу ерда $x(p)$, $y(p)$ функциялар дифференциалланувчи. Биз ушбу

$$F(x, y, p)=0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p}=0, \quad p=\frac{dy}{dx}$$

муносабатларга эгамиз. Юқоридаги фаразга кўра $F(x(p), y(p), p)=0$. Ундан p бўйича тўлиқ ҳосила олсак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x(p), y(p), p)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dp} + \frac{\partial F(x(p), y(p), p)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dp} + \\ + \frac{\partial F(x(p), y(p), p)}{\partial p} = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

ёки $\frac{\partial F}{\partial p}=0$ бўлгани учун (3.29) келиб чиқади.

Етарлилиги. $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y}=0$ муносабатлар ўринли бўлсин. Биринчи икkitасидан y ва p ларни x нинг функцияси

сифатида топамиз: $y=y(x)$, $p=p(x)$. Бу $y(x)$ функция (3.1) тенгла-
манинг ечими эканини кўрсатамиз. Унинг учун $F=0$ ни яна x бўйича
дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F(x, y(x), p(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y(x), p(x))}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \\ + \frac{\partial F(x, y(x), p(x))}{\partial p} \frac{dp}{dx} = 0.$$

Бундан (3.29) ни ҳисобга олсак, $\frac{dy(x)}{dx} = p(x)$ келиб чиқади. Шу
билан бирга: $F(x, y(x), p(x)) = F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) = 0$. Демак, $y =$
 $= y(x)$ функция ечим экан.

4. 3- мисолда кўрилган $y - 2xy' + (y')^2 = 0$ дифференциал тенгла-
ма учун $y = x^2 - p$ парабола дискриминант чизик бўлиб, ечим эмас
эди. Бўни ҳозирги усул билан текширайлик. Ҳақиқатан, $F(x, y, p) =$
 $= y - 2xp + p^2$, $\frac{\partial F}{\partial p} = -2x + 2p$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial x} = -2p$ муносабат-
ларга кура $\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} = -2p + p \cdot 1 = -p \neq 0$. 3.2- теореманинг

шарти бажарилмади. 1- мисолда кўрилган $(y')^2 - y' = 0$ дифферен-
циал тенглама учун $F = p^2 - y'$, $\frac{\partial F}{\partial p} = 2p$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} =$
 $= -\frac{4}{3} y'$ ва $\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} = 0 + p\left(-\frac{4}{3} y'\right)$. Аммо $\frac{\partial F}{\partial p} = 2p = 0$

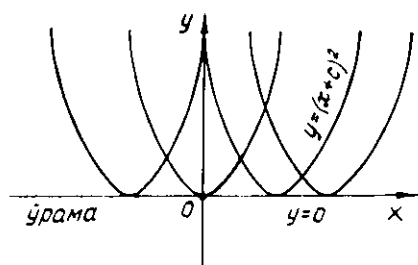
дан $p=0$ келиб чиқади. Шунинг учун охириги ифода айнан нолга тенг.
Демак, $y=0$ (p - дискриминант чизик) махсус ечим бўлади.

б) 3.5- таъриф. Ушбу

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (3.31)$$

бир параметрли силлиқ чизиклар ои-
ласи берилган бўлиб, $C \in [C_1, C_2]$
бўлсин. Агар бирор l чизик ўзи-
нинг ҳар бир нуқтасида (3.31)
оила чизикларидан бирортаси би-
лан умумий уринмага эга бўлса,
 y ҳолда l чизик (3.31) оиланинг
ўрамаси дейилади.

Ушбу $y = (x+C)^2$ парабола-
лар оиласи учун $y=0$ чизиги
ўрама бўлади (28- чизма). Аммо
ҳар қандай силлиқ чизиклар оила-
си ҳам ўрамага эга булавермайди.



28- чизма

3.3- теорема. (3.31) бир параметрли силлиқ чизиклар оиласи
берилган бўлиб, $\Phi(x, y, C)$ функция бирор $\bar{D}_3^0$, $\bar{D}_3^0 \subset D_3$ тўпламда
аниқланган, узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга
ҳамда

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \quad (3.31')$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда тенгламаси

$$x=x(t), y=y(t), x(t) \in c^1[t_1, t_2], y(t) \in c^1[t_1, t_2] \quad (3.32)$$

параметрик кўринишда берилган чизик (3.31) силлиқ чизиклар оиласининг ўрамаси бўлиши учун унинг ҳар бир нуқтасида ушибу

$$\begin{cases} \Phi(x(t), y(t), C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x(t), y(t), C)}{\partial C} = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

тенгламалар қанотлантирилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. (3.31) оила тенгламаси (3.32) билан ёзилган ўрамага эга бўлсин. t параметр $[t_1, t_2]$ ораликда ўзгарганда ўрама (3.31) оиланинг турли чизикларига уриниб боради, яъни t ўзгариши билан C ўзгариб боради. Шунинг учун $C=C(t)$ деб қараш лозим. Албатта, $t \in [t_1, t_2]$ да $C'(t) \neq 0$, акс ҳолда (яъни $C'(t)=0$, $t \in [t_1^0, t_2^0] \subset [t_1, t_2]$ бўлса) $[t_1^0, t_2^0] \subset [t_1, t_2]$ ораликдан олинган t қийматларида ўрама тегишли оиланинг фақат битта чизигига уринади. Демак, $[t_1^0, t_2^0]$ ўрама ўша чизик билан устма-уст тушади. Бу (3.32) чизикнинг ўрама эканига зид. Шундай қилиб, $C'(t) \neq 0$, $t \in [t_1, t_2]$. Энди (3.32) ни (3.31) га қўйсак, $\Phi(x(t), y(t), C(t)) \equiv 0$ айният ҳосил бўлади. Айниятнинг чап томонидаги функциядан t бўйича тўлиқ ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{dC}{dt} = 0. \quad (3.34)$$

Энди (3.31) оила чизигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффицентини k деб, уни топайлик. Равшанки, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$ бўлганда

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ дан } \frac{dy}{dx} = k = - \frac{\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y}},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0 \text{ бўлганда } \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y} = 0 \text{ дан } \frac{dx}{dy} = k' = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} \right)$$

келиб чиқади. (3.31') тенгсизликка кўра бурчак коэффицент аниқланган. Шунга ўхшаш, ўрамага ўтказилган уринма бурчак коэффицентини k_1 десак,

$$k_1 = \frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \left(k'_1 = \frac{x'(t)}{y'(t)} \right)$$

бўлади. Аммо $k=k_1$ бўлгани учун (3.31) ни ҳисобга олиб

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'(t) = 0$$

муносабатга эга бўламиз. Бу тенглик ва $C'(t) \neq 0, t \in [t_1, t_2]$ га кўра (3.34) дан $\frac{\partial \Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial C} = 0$ келиб чиқади. Зарурлик исбот этилди.

Етарлилиги. Агар бирор (3.32) чизикнинг нукталарида (3.31') тенгсизлик ўринли бўлиб, (3.33) муносабатлар каноатлантирилса, у ҳолда (3.32) чизик (3.31) оиланинг ўрамаси бўлади. Шунинг исбот этамиз.

Ҳақиқатан, $\frac{\partial \Phi(x(t), y(t), C)}{\partial y} \neq 0, t \in [t_1, t_2]$ дейлик. Энди (3.33) система тенгламаларидан биринчисини t бўйича дифференциаллаймиз. Натижада (3.33) нинг иккинчи айниятини ҳисобга олиб,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'(t) = 0$$

ёки

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}$$

муносабатга келамиз. Бундан тегишли нуктада (3.32) чизик (3.31) оиланинг чизиги билан бир хил бурчак коэффициентига эга экани келиб чиқади. Етарлилиги исбот этилди.

(3.33) система аниқлайдиган чизик (3.31) оиланинг C дискриминант чизиги дейилади.

Берилган силлиқ чизиклар оиласининг ўрамасини топиш учун қуйидаги қонда келиб чиқади:

1) (3.33) системадан C ни чиқариб ташлаб, C дискриминант чизик топилади;

2) топилган C - дискриминант чизикдан

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (3.35)$$

тенгламаларни каноатлантирадиган (x, y) нукталарни чиқариб ташланади. C дискриминант чизикнинг қолган қисми берилган оиланинг ўрамаси бўлади. Агар (3.35) системанинг тенгламалари биргаликда бўлмаса, у ҳолда C -- дискриминант чизик тўлалигича ўрамадан иборат бўлади. Агар C -- дискриминант чизикнинг ҳар бир нуктасида (3.35) ўринли бўлса, у ҳолда берилган оиланинг ўрамаси мавжуд эмас.

Мисол. $y = \sqrt[4]{\frac{(y')^2}{4y}} \left(x \sqrt[4]{\frac{(y')^2}{4y}} - 1 \right)^2$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Уни интеграллаш учун x га нисбатан ечим осон. Бу ҳолда тегишли усул билан ҳисоблашлар олиб борсак, умумий ечим ушбу $y - C^4 x^2 + 2C^2 x - C = 0$ кўринишида топилади. C дискриминант чизикни топайлик. Ушбу

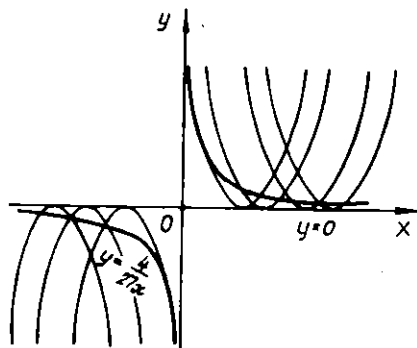
$$\begin{cases} y - C^4 x^2 + 2C^2 x - C = 0, \\ -3C^2 x^2 + 4Cx - 1 = 0 \end{cases}$$

системанинг иккинчи тенгламасидан $x \neq 0$ бўлганда $C = \frac{1}{3x}$ ва $C = \frac{1}{x}$. Энди C учун топилган икки ифодани ҳам системанинг биринчи тенгламасига қўйсак, икки C дискриминант чизик, яъни

$$y=0, x \neq 0; y = \frac{4}{27x}; x \neq 0 \quad (3.36)$$

чизиклар ҳосил бўлади. Улардан бири абсцисса ўқи бўлса, иккинчиси шохчалари I- ва 3- квадрантларда жойлашган гиперболодан иборат (29- чизма).

Энди топишган (3.36) C — дискриминант чизиклар ўрама ёки ўрама эмаслигини текшираемиз. Кўрилатган ҳолда $\Phi = y - C^3x^2 + 2C^2x - C$. Ундан $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2C^3x + 2C^2$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 \neq 0$. Демак, (3.36) даги ҳар икки чизик ҳам ўрамадир.



29- чизма

3.4- теорема. (3.31) силлиқ чизиклар оиласи (3.1) дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлиб, ўша чизиклар оиласи ўрамага эга бўлса, у ҳолда бу ўрама (3.1) тенгламанинг махсус ечими бўлади.

Исбот. Ўраманинг тенгламаси $F_1(x, y) = 0$ (ёки $y = F_2(x)$) кўринишда бўлсин. Унда ихтиёрий (x_0, y_0) нуктани оламиз, яъни $(x_0, y_0) \in l$, l — ўрама. Олинган нуктада ўрамага ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти k шу нуктадан ўтувчи интеграл чизиклардан бирортасига ўтказилган уринма бурчак коэффициенти

k_1 билан устма-уст тушади. Демак, l — ўрама (3.1) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Шундай қилиб, (x_0, y_0) ихтиёрий бўлгани учун l — ўраманинг ҳар бир нуктасидан шу l чизиги ва (3.31) оиланинг битта чизиги ўтади. Бундан l — ўрама (3.1) дифференциал тенгламанинг махсус ечими экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Юқорида қўрилган мисолда умумий ечим $y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0$ кўринишда бўлиб, шу чизиклар оиласи учун $y=0$, $y = \frac{4}{27x}$ чизиклар ўрама экани кўрсатилган эди. Демак, бу чизиклар тегишли дифференциал тенгламанинг махсус ечимлари бўлади (29- чизма).

Юқоридаги мулоҳазалардан равшанки, дифференциал тенгламанинг барча ечимларини топиш учун унинг умумий ечимини ва агар мавжуд бўлса, махсус ечимларини топиш лозимдир.

М а ш к. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг барча ечимлари топилин:

$$1. y' = \sqrt{1-y^2}, |y| < 1;$$

$$3. x-y = \frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3, D_3 = R^3;$$

$$2. y' = \sqrt[3]{(y-x)^2 + 5}, D_3 = R^3;$$

$$4. (2xy' - y)^2 - 4x^3 = 0, x \geq 0;$$

$$5. x^2(y')^2 - 2xyy' + 2xy = 0, xy \leq 0, x \neq 0, y' \leq 1.$$

3.5-§. ИЗОГОНАЛ ВА ОРТОГОНАЛ ТРАЕКТОРИЯЛАР

3.6-таъриф. Агар текисликда бир параметрли силлиқ l чизиклар оиласи

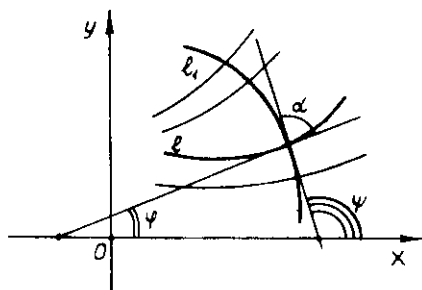
$$\Phi(x, y, a) = 0 \quad (a \text{ параметр}) \quad (3.37)$$

берилган бўлса, y ҳолда бу оила чизикларини ўзгармас α бурчак остида кесиб ўтувчи l_1 чизик берилган (3.37) оиланинг изогонал траекторияси дейилади. Таърифга кўра l ва l_1 чизикларнинг кесинган нуқтасида уларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак α га тенг.

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлса, изогонал траектория ортогонал траектория деб юритилади.

Энди берилган (3.37) оиланинг изогонал траекторияларини топиш билан шуғулланамиз. Шунинг кайди қилиб ўтамизки, $\alpha = 0$ бўлганда биз тегишли оила учун ўрамага эга эдик ва бу ўрамалар мавжуд бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин эди. Кўрилатган ҳолда (яъни $\alpha \neq 0$ бўлганда) берилган силлиқ чизиклар оиласининг изогонал траекториялари мавжуд ва бу траекториялар тўплами чексиз тўпландир. Бу тўпланин Φ_1 , (3.37) чизиклар оиласини эса Φ_a деб белгилаймиз.

Аввал $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ бўлсин. Φ_1 тўпландан бирор l_1 чизикни олайлик. Унда ўзгарувчи координаталар x_1, y_1 бўлсин. (3.37) оиланинг дифференциал тенгламаси тузилади. Уни биз биламиз. $\operatorname{tg} \alpha = k$ дейлик. Агар $\operatorname{tg} \psi$ (3.37) оила чизигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини бўлса,



30-чизма

$$\operatorname{tg}(\psi - \eta) = \operatorname{tg} \alpha = k \quad \text{ёки} \quad 1 + \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dy}{dx} = k \quad (3.38)$$

бўлади (30-чизма). Бундан

$$\frac{\partial \Phi(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{\partial \Phi(x_1, y_1, a)}{\partial x_1} = k, \quad (3.39)$$

Агар $\Phi(x_1, y_1, a) = 0$ ва (3.39) муносабатлардан параметр a ни чиқариб ташласак,

$$F\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}\right) = 0 \quad (3.40)$$

дифференциал тенгламага келамиз. Бунда $x_1 = x, y_1 = y$ дейиш мумкин. (3.40) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини

$\Psi(x_1, y_1, C) = 0$ десак, биз (3.37) оиланинг изогонал траекториялари тўплами Φ_1 ни ҳосил қиламиз.

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ ва $\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{ctg} \varphi$, $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-1}{\frac{dy}{dx}}$ бўла-

ди. Демак, $\Phi(x_1, y_1, a) = 0$ ва $\frac{\partial \Phi(x_1, y_1, a)}{\partial x_1} \frac{dy_1}{dx_1} - \frac{\partial \Phi(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} = 0$

тенгламалардан a ни чиқариб, ортогонал траекторияларнинг дифференциал тенгласини топамиз. Уни интеграллаб, ортогонал траекториялар оиласини топиш мумкин.

Агар силлиқ чизиклар оиласининг дифференциал тенгласи топилган ёки берилган бўлса, у ҳолда изогонал ва ортогонал траекторияларнинг дифференциал тенгласини топиш осонлашади. Ҳақиқатан, (3.37) оиланинг дифференциал тенгласи

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (3.41)$$

бўлсин. У ҳолда (3.38) дан:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k \frac{dy_1}{dx_1} + 1}$$

Буни (3.41) га қўйсақ ($x = x_1$, $y = y_1$ деб)

$$F\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k \frac{dy_1}{dx_1} + 1}\right) = 0 \quad (3.42)$$

ҳосил бўлади. Биз изланган дифференциал тенгламага эгамиз. Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$ ни (3.41) га қўямиз:

$$F\left(x_1, y_1, -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0. \quad (3.43)$$

Мисол. $y = ax$ тўғри чизиклар оиласининг изогонал ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) траекторияларини топайлик. Берилган оиланинг дифференциал тенгласи (3.43) га қўра:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \text{ Бундан } \operatorname{tg} \alpha = k \text{ десак: } \frac{\frac{dy}{dx} - k}{k \frac{dy}{dx} + 1} = -\frac{x}{y} \text{ ёки } k(ydx - xdy) = xdx + ydy.$$

$$\begin{aligned} \text{Охирги муносабатнинг икки томонини } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ га бўламиз: } k \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \\ = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}. \text{ Бундан } k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln C \text{ ёки } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \varphi \end{aligned}$$

$\sqrt{x^2 + y^2} = r$ дейилса, $r = Ce^{k\alpha}$, $C > 0$ формулага келамиз. Бу логарифмик спираллар оиласидан иборат (31-чизма). Кўрилган чизиклар оиласининг ортогонал траекториялари маркази координата бошида бўлган концентрик айланалардан иборат бўлишини кўрсатиш кийин эмас.

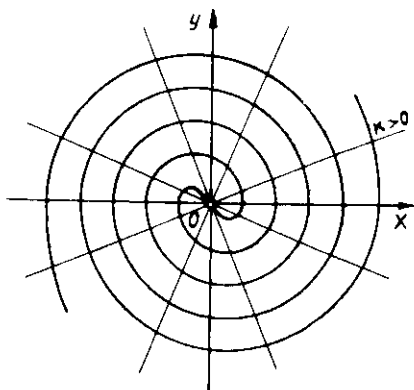
$\alpha = 0$ бўлганда изогонал траекториялар тўлаими битта нуктадан (координата бошидан) иборат бўлиб, у нукта тегишли дифференциал тенгламанинг яқкаланган махсус нуктаси бўлади.

М а ш қ л а р .

1. Ушбу $y = ax^2$ парабодалар оиласининг ортогонал ва изогонал траекториялари топилсин;

2. Ушбу $y = \frac{a}{x}$, $a > 0$ гиперболалар

оиласининг ортогонал ва изогонал траекториялари топилсин.



31-чизма

4-б о б

n -ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

4.1-§. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР ВА МАВЖУДЛИК ТЕОРЕМАЛАРИ

Ушбу

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4.1)$$

кўринишдаги тенглама n -тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади. Бу ерда $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функция $(n+2)$ ўлчовли R^{n+2} фазонинг D_{n+2} соҳасида аниқланган. Кўп ҳолларда (4.1) тенглама ушбу

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4.2)$$

кўринишга келтирилади. Бу тенглама юқори тартибли ҳосиллага нисбатан ечилган ёки каноник кўринишдаги n -тартибли оддий дифференциал тенглама деб юритилади. (4.2) тенгламада $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция $(n+1)$ ўлчовли R^{n+1} фазонинг D_{n+1} соҳасида аниқланган.

Агар (4.1) ва (4.2) да $n=1$ бўлса, биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламага эга бўламиз. Бу ҳолни 1- ва 3-бобларда кўрганимиз. Энди $n \geq 2$ бўлсин.

1. Аввал (4.2) дифференциал тенгламани чуқурроқ ўрганамиз.

4. 1-т а ъ р и ф . (4.2) тенглама берилган бўлиб, $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция R^{n+1} фазонинг D_{n+1} соҳасида аниқланган бўлсин. Агар I интервалда аниқланган бирор $y = \varphi(x)$ функция учун қуйидаги учта

тенгликка қўйиш натижасида айнан (4.2) тенглама ҳосил бўлса, у ҳолда (4.4) функция (4.2) тенгламанинг D_{n+1} соҳада аниқланган умумий ечими дейилади.

Шундай қилиб, (4.2) дифференциал тенгламанинг умумий ечими n та ихтиёрий ўзгармас соини ўз ичига олади.

(4.2) дифференциал тенгламанинг барча ечимларини топиш асосий масаладир. Умумий ечим формуласи (4.4) ни олайлик. Унда $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга маълум қийматлар берсак, тегишли ечим ҳосил бўлади. Умуман айтганда, (4.2) тенгламанинг (4.4) формула ўз ичига олмаган ечимлари ҳам бўлиши мумкин. Иккита мисол кўраимиз.

Мисоллар. 1. $y'' = x$, $D_3 = R^1$ тенглама учун $y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$ функция умумий ечим бўлади. Ҳақиқатан, $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$, $y'' = x$ ҳосилалардан охиргисида C_1 ва C_2

лар катнашмайди, у муносабат берилган тенглама билан устма-уст тушади. Умумий ечим формуласи тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олади.

2. $y'' = \frac{(y')^2}{y}$, $D_3 = \{(x, y, y') : -\infty < x < +\infty, y > 0, -\infty < y' < +\infty\}$ дифференциал тенглама учун $y = e^{C_1x + C_2}$ функция умумий ечим бўлади. Ҳақиқатан, $y' =$

$= C_1 e^{C_1x + C_2}$, $y'' = C_1^2 e^{C_1x + C_2}$ экан $y' = C_1 y$, $y'' = C_1 y = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 y = \frac{(y')^2}{y}$. Бу охирги муносабат берилган дифференциал тенглама билан устма-уст тушади. Аммо умумий ечим формуласи берилган тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олмайди. Кўрилатгани ҳолда $y = C$ ($C = \text{const} \neq 0$) функция ҳам ечимдир. Бу ечим умумий ечим формуласи $y = e^{C_1x + C_2}$ дан C_1 ва C_2 ларнинг биронта ҳам қийматида ҳосил бўлмайди.

Эслатма. n тартибли дифференциал тенгламалар учун ҳам махсус ечим топиш усулини киритиш мумкин эди, аммо у анча мураккаб. Шу сабабдан биз унга тўхталмаймиз (4.1- натижага қаранг).

(4.2) дифференциал тенгламанинг унинг умумий ечими формуласи (4.4) дан $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга қийматлар бериб ҳосил қилинадиган ҳар бир ечими (4.2) тенгламанинг *хусусий ечими* дейилади.

Хусусий ечимни излаш *Коши масаласининг ечимини* излашга келади.

Агар (4.2) тенглама, $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ нукта ва ушбу

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (4.8)$$

муносабатлар берилган бўлса, (4.2) дифференциал тенгламанинг (4.8) тенгликларни қаноатлантирадиган ечимини излаш (4.2) тенглама учун *Коши масаласи* дейилади. Унда (4.8) тенгликлар бошланғич шарт, $x_0, y, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ қийматлар эса бошланғич қийматлар деб юритилади. $n=2$ бўлганда Коши масаласи аниқ геометрик маънога эга. Масалан, $y'' = f(x, y, y')$ тенглама учун $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ шартни қаноатлантирувчи интеграл чизик тегишли соҳанинг (x_0, y_0) нуктасидан берилган y'_0 бурчак коэффициентли уриима билан ўтиши лозим.

Агар (4.2) дифференциал тенгламанинг умумий ечими (4.4) маълум бўлса, тегишли Коши масаласини ечиш учун ушбу

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) &= y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) &= y'_0, \\ &\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

тенгламалар системасини $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга нисбатан ечиш керак бўлади. Бу система ягона ечимга эга бўлиши, биттадан ортиқ ечимга эга бўлиши ёки умуман ечимга эга бўлмаслиги мумкин. (4.9) система ягона ечимга эга бўлганда (4.2), (4.8) Коши масаласи ягона ечимга эга дейилади. Акс ҳолда тегишли Коши масаласида ягоналик бузилган бўлади.

Агар (4.2) дифференциал тенгламанинг хусусий ечими $\Phi(x, y) = 0$ кўринишда берилса, бу муносабат берилган дифференциал тенгламанинг *интеграл*и деб аталади. Агар умумий ечим $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ кўринишда ёзилган бўлса, бу муносабат (4.2) тенгламанинг *умумий интеграл*и дейилади.

(4.2) дифференциал тенгламанинг барча (хусусий ва махсус) ечимларини топиш дифференциал тенгламани интеграллаш жараёни бўлади. Тенгламани интеграллаш жараёни ноаниқ интегралларни ҳисоблашга келганда дифференциал тенглама квадратураларда интегралланади дейилади.

Энди юқорида келтирилган таърифларга мисол кўрайлик.

Мисол. $y'' + \omega^2 y = 0$ дифференциал тенглама иккинчи тартибли бўлиб, унинг умумий ечими $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ бўлади.

Агар $y'' + \omega^2 y = 0$ дифференциал тенглама учун $y(0) = 1, y'(0) = -1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимни топиш талаб қилинса, умумий ечимдан фойдаланиб, $1 = y(0) = C_1; -1 = y'(0) = C_2 \omega$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан: $C_1 = 1; C_2 = -\frac{1}{\omega}, \omega \neq 0$. Демак, аниқланган (ягона) ечим $y = \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \sin \omega x$ бўлади.

2. Энди (4.2) дифференциал тенглама учун ечимнинг мавжудлик ва ягоналик теоремаларини келтирамыз.

4.1-теорема (Коши теоремаси). Агар (4.2) дифференциал тенгламада ушбу $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ функциялар $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда:

1°. (4.2) дифференциал тенгламанинг бирор I интервалда аниқланган, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд.

2°. Агар $y = \varphi(x), x \in I_1$ ва $y = \psi(x), x \in I_2$ функцияларнинг ҳар бири (4.2) дифференциал тенгламанинг ечими бўлиб, берилган x_0 учун $\varphi(x_0) = \psi(x_0), \varphi'(x_0) = \psi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0)$ бўлса, бу $y = \varphi(x)$ ва $y = \psi(x)$ ечимлар аниқланиш соҳаларининг умумий қисмида устма-уст тушади. Бошқача айтганда, агар $x_0 \in I_1 \cap I_2$ нуктада $\varphi^{(i)}(x_0) = \psi^{(i)}(x_0), i = 0, 1, \dots, n-1$ бўлса, у ҳолда $I_1 \cap I_2$ интервалда $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ бўлади.

4.3- таъриф. Агар $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ соҳада аниқланган бўлиб, бу функция учун шундай $L \geq 0$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}) \in D_{n+1}, (x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ нуқталар учун ушбу

$$|f(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} |y_1^{(i)} - y_2^{(i)}|, \quad L \geq 0 \quad (L)$$

тенгсизлик бажарилса, y ҳолда $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция D_{n+1} соҳада $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради дейилади. L эса Липшиц ўзгармаси дейилади.

4.2- теорема (Коши — Пикар — Линделёф теоремаси). Агар $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу D_{n+1} соҳада $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, y ҳолда ҳар бир $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ нуқта учун шундай ўзгармас $h > 0$ сон топиладики, натижада (4.2) тенгламанинг (4.8) бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ва $I = \{x: |x - x_0| \leq h\}$ оралиқда аниқланган яғони ечими мавжуд бўлади.

4.3- теорема (Пеано теоремаси). Агар $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция D_{n+1} соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ бўлса, y ҳолда (4.2) дифференциал тенгламанинг (4.8) бошланғич шартларни қаноатлантирадиган камида битта ечими мавжуд.

Биз бу теоремаларнинг исботини келтирмаймиз. Сабаби, (4.2) кўринишдаги n - тартибли дифференциал тенгламаларни n та $y_1, y_2, \dots, y_n$ номатълум функция қиритиш билан нормал система деб юритиладиган (8.3) кўринишдаги (8- бобга қ.) системага келтириш мумкин. Бундай системалар учун мавжудлик ва яғоналик ҳақидаги теоремалар 8- бобда қаралади.

Бу бандда юқори ҳосилага нисбатан ечилмаган (4.1) дифференциал тенгламани ўрганамиз.

3. 4.4- таъриф. (4.1) дифференциал тенглама берилган бўлиб, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функция R^{n+2} фазонинг бирор D_{n+2} соҳасида аниқланган бўлсин. Агар I интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция учун қуйидаги учта шарт

$$1^\circ. \varphi(x) \in C^n(I);$$

$$2^\circ. (x, \varphi(x)) \in D_2, (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in D_{n+2}$$

$$D_{n+2} \subset R^{n+2}, x \in I;$$

$$3^\circ. F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, x \in I$$

бажарилса, y ҳолда бу функция I интервалда (4.1) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.

Хар бир ечимнинг графиги тенгламанинг интеграл эгри чизиги (кискагина, интеграл чизиги) дейилади ва унинг графиги R^2 фазонинг D_{n+2} соҳасида чизилади.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламалардаги каби бу ҳолда ҳам ечим параметрик кўринишда ёзилиши ёки изланиши мумкин.

Агар (4.1) дифференциал тенглама $y^{(n)}$ га нисбатан бир кийматли ечилса, (4.2) дифференциал тенгламага келамиз. Умуман айтганда, (4.2) тенглама $y^{(n)}$ нинг бир неча, ҳатто чексиз кўп кийматини аниқлаши мумкин. Жумладан, $(y'')^2 - x^1 = 0$, $x > 0$ дифференциал тенглама y'' нинг иккита $y'' = \pm x^{\frac{1}{2}}$ кийматини, $y'' + |y'| = 0$ дифференциал тенглама эса y'' нинг $-\infty < y'' \leq 0$ интервалини қоплайдиган кийматларини аниқлайди.

Текшириб кўриш мумкинки, бу тенгламалар учун $y = \pm \frac{x^1}{12}$, $-\infty < x < +\infty$ ва $y = -\frac{ax^2}{2}$ лар мос равишда (a ихтиёрий мусбат ҳақиқий сон) ечим бўлади.

(4.1) дифференциал тенглама учун ҳам Коши масаласини қўйиш мумкин: (4.1) дифференциал тенгламанинг $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

(4.1) дифференциал тенглама $y^{(n)}$ га нисбатан ечилиши мумкин дейлик. У ҳолда $M_0 = (x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ нуктанинг бирор атрофида ушбу

$$y^{(n)} = f_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad k=1, 2, \dots \quad (4.10)$$

муносабатларга эга бўламиз. Агар (4.10) дифференциал тенгламаларнинг ҳар бири учун ечимнинг мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартлари бажарилса, у ҳолда M_0 нуктада Коши масаласи ягона ечимга эга дейилади.

4.4-теорема. Агар (4.1) дифференциал тенгламада $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функция учун қуйидаги икки шарт:

$$1. F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

тенгламанинг бирор ҳақиқий илдиизи $y_0^{(n)}$ учун $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}) \in D_{n+2}$ нуктанинг бирор D_{n+2}^0 атрофида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функция узлуксиз ва 1-тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;

$$2. \frac{\partial F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)})}{\partial y^{(n)}} \neq 0$$

бажарилса, у ҳолда ҳар бир $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}) \in D_{n+2}$ нукта учун шундай мусбат h сон мавжуд бўладики, (4.1) дифференциал тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$ оралиқда аниқланган, (4.8) шартни ва яна $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ муносабатни қаноатлантирадиган ягона $y = y(x)$ ечими мавжуд.

Бу теорема 3.1-теоремага ўхшаш исботланади.

4.1-н а т и ж а. 4.4. теоремага кўра $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)})$ нуктанинг

D^0 атрофида $\frac{\partial F(x, y, y', \dots, y^{(n)})}{\partial y^{(n)}} \neq 0, \left| \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right| \leq A, i=0, 1, \dots, n-1$.

Демак, ягоналик бузиладиган нукталар тўплами

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0$$

муносабатларни қаноатлантиради. Тегинчи нукталар *махсус нукталар* дейлади. Махсус нукталар тўплами махсус ечим бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин.

4.5-таъриф. (4.1) дифференциал тенглама $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n)}_0)$ нуктанинг бирор $\tilde{x}$ атрофида $y^{(n)}$ га нисбатан ечилиши, яъни (4.10) тенгламаларга ажратилиши мумкин дейлик. Агар ҳар бир (4.10) тенглама

$$y = \psi_k(x, C_1, C_2, \dots, C_n), k=1, 2, \dots \quad (4.11)$$

кўринишда умумий ечимга (ёки

$$\Phi_k(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, k=1, 2, \dots \quad (4.12)$$

умумий интегралга) эга бўлса, y ҳолда (4.11) умумий ечимлар тўплами (ёки (4.12) умумий интеграллар тўплами) (4.1) дифференциал тенгламанинг умумий ечими (ёки умумий интеграли) дейлади.

Мисоллар. 1. $(y'')^2 - x^4 = 0, x > 0$ дифференциал тенглама учун ихтиёрий (x_0, y_0, y'_0, y''_0) , $y''_0 \neq 0$ нукта атрофида иккита $y'' = x^2, y'' = -x^2$ дифференциал тенгламага эгамиз. Мас равишда уларнинг умумий ечимлари $y = \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2, y = -\frac{x^4}{12} + C_1x + C_2$.

Улар биргаликда берилган тенгламанинг умумий ечимини беради.

2. $\cos y'' = 0$ дифференциал тенглама учун $y'' = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k$ — бутун сон. Ундан $y = \left(\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$. Энди k га барча қийматлар бериб, умумий ечимлар тўпламини олсак, берилган тенгламанинг умумий ечими чиқади.

4.2-§. n -ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КВАДРАТУРАДА ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ БАЪЗИ ТУРЛАРИ

1. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги тенглама. Мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартлари бажарилиши учун $f(x)$ функция бирор I интервалда узлуксиз бўлиши етарли. Шундай деб фараз этайлик. У ҳолда дифференциал тенгламани n марта кетма-кет интеграллаб, умумий ечимни топиш мумкин:

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_1}^{x_2} \dots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx dx \dots dx}_{n-1 \text{ та}} + \underbrace{\frac{C_1}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1}}_{n-1 \text{ та}} + \frac{C_2}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} + \dots + C_{n-1} (x-x_0) + C_n.$$

Бунинг математик анализдаги Дирихле формуласи ёрдамида соддарок

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(z) (x-z)^{n-1} dz + \frac{C_1}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \dots + C_n \quad (4.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (4.13) формула $y^{(n)} = f(x)$ тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олади ва умумий ечим бўлади. Махсус ечимлар йўқ. Коши масаласининг ечими бундай ёзилади:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \dots + y_0' (x-x_0) + y_0.$$

Бу формулада $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ микдорларни ихтиёрий деб қараш мумкин. У ҳолда бу формула *Коши формасидаги умумий ечим* бўлади.

2. $F(x, y^{(n)}) = 0$ кўринишдаги тенглама. Агар бу тенгламани $y^{(n)}$ га нисбатан ечиш мумкин бўлса (яъни $y^{(n)} = f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$) у ҳолда бу тенгламаларни интеграллаб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

$F(x, y^{(n)}) = 0$ тенглама $y^{(n)}$ га нисбатан ечилмасин дейлик. x ва $y^{(n)}$ лар параметрик кўринишда ёзилиши мумкин, деб фараз этамиз, яъни $x = \psi(t)$, $y^{(n)} = \chi(t)$. У ҳолда $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$ га кўра $dy^{(n-1)} = \chi(t) \psi'(t) dt$. Бундан:

$$y^{(n-1)} = \chi_1(t, C_1), y^{(n-2)} = \chi_2(t, C_1, C_2), \dots, \\ y = \chi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Шундай қилиб, умумий ечим $x = \psi(t)$, $y = \chi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$ бўлади.

3. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ кўринишдаги тенглама. а) Тенгламани $y^{(n)}$ га нисбатан ечиш мумкин бўлсин: $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. Агар $z = y^{(n-1)}$ десак, $z' = f(z)$ га келамиз. Бу ўзгарувчилари ажраладиган биринчи тартибли дифференциал тенглама. Унинг умумий ечими $x = C_1 +$

$+\int \frac{dz}{f(z)}$ бўлади. Бу тенглик z га нисбатан ечилиши мумкин бўлгани

ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Агар уни z га нисбатан ечиш мумкин бўлса (яъни $z = \psi_1(x, C_1)$), у ҳолда $y^{(n-1)} = \psi_1(x, C_1)$ дан $y = \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ умумий ечим келиб чиқади. Мабодо юқоридаги тенглик z га нисбатан ечилмаса, параметр киритиш усулидан фойдаланилади.

б) Тенгламани $y^{(n)}$ га нисбатан ечиш мумкин эмас, аммо $y^{(n)} = \chi(t)$, $y^{(n-1)} = \psi(t)$ - параметрик ифода маълум дейлик. У ҳолда

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx \text{ дан } dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t) dt}{\chi(t)} \text{ ва } x = \int \frac{\psi'(t) dt}{\chi(t)} + C_1 \text{ кел-}$$

либ чиқади. Энди $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx$ дан $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx + C_2 =$

$= \int \psi(t) \cdot \frac{\psi'(t)}{\chi(t)} dt + C_2$ ни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш мулоҳазалар юритиб,

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)} dx, \dots, dy = y' dx$$

тенгликларни интеграллаймиз ва $y = \int y' dx + C_n$ дан y учун параметрик ифодани топамиз. Маълумки, x нинг параметрик ифодасида битта

(C_1) ихтиёрий ўзгармас, $y^{(n-2)}$ да ҳам битта (C_2), $y^{(n-3)}$ да иккита (C_2 ва C_3), ..., $y^{(n-(n-1))}$ да $n-2$ та, y да эса $n-1$ та ихтиёрий ўзгармас қатнашади. У ҳолда x ва y ларнинг параметрик ифодаларида n та ихтиёрий ўзгармас қатнашади. Демак,

$$x = \int \frac{\Psi'(t)dt}{\chi(t)} + C_1, \quad y = \int y'dx + C_n$$

умумий ечим бўлади.

4. $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ кўринишдаги тенглама. Ушбу $y^{(n-2)} = z$ алмаштириш берилган тенгламани $F(z, z'') = 0$ кўринишга олиб келади.

а) Охириги тенгламани z'' га нисбатан ечиш мумкин бўлсин: $z'' = f(z)$. Бу тенглама 1-бандда кўрилган усул билан интегралланади. Бошқача усули қуйидагича: унинг икки томонини $2z'$ га кўпайтурсак, $d(z')^2 = 2f(z)dz$ бўлади, ундан $(z')^2 = 2 \int f(z)dz + C_1$ келиб чиқади. Энди уни интеграллаб, ушбу $\int \pm \sqrt{2f(z)}dz + C_1 = x + C_2$ формулага келамиз. z ўрнига $y^{(n-2)}$ ни қўйсак, $\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2) = 0$. Бу тенглама 2-бандда кўрилган дифференциал тенглама кўринишига ўхшаш. Уни интегралласак, яна $n-2$ та ихтиёрий ўзгармас қатнашади ва берилган тенгламанинг умумий ечими ҳосил бўлади.

б) Берилган тенглама $y^{(n)}$ га нисбатан ечилмасин, аммо $y^{(n-2)} = \Psi(t)$, $y^{(n)} = \chi(t)$ параметрик ифода маълум дейлик. Маълумки, $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$. Бу тенгликлардан $\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}}$ ёки $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)} = \chi(t)\Psi'(t)dt$ муноса-

бат келиб чиқади. Бундан $y^{(n-1)} = \pm \sqrt{2} \int \chi(t)\Psi'(t)dt + C_2$. Кейинги мулоҳазалар 2-банддаги каби бўлади. x учун топиладиган ифодада икки ихтиёрий ўзгармас (C_1 ва C_2) қатнашади. Охириги тенгламани кетма-кет интеграллаб борсак, яна $C_3, C_4, \dots, C_n$ — ихтиёрий ўзгармаслар иштирок этади. Умумий ечимни бундай ёзиш мумкин:

$$x = \int \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} + C_1 = \int \frac{\Psi'(t)dt}{\pm \sqrt{2}\chi(t)\Psi'(t)} + C_1,$$

$$y = \Phi(t, C_2, C_3, \dots, C_n).$$

5. $F(y^{(n)}) = (y^{(n)})^k + a_1(y^{(n)})^{k-1} + \dots + a_{n-1}(y^{(n)}) + a_n = 0$, $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$ кўринишдаги тенглама. Бу дифференциал тенгламани $y^{(n)}$ га нисбатан k -тартибли алгебраик тенглама деб қараймиз. Унинг ҳақиқий илдизлари $p_1, p_2, \dots, p_s$, $s \leq k$ бўлсин. У ҳолда $y^{(n)} = p_j$, $j = 1, 2, \dots, s$ дифференциал тенгламани n марта интегралласак,

$$y = p_i \frac{x^n}{n!} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-2} \frac{x^2}{2!} + C_{n-1}x + C_n$$

Хусусан, агар (4.14) муносабат фақат битта ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олса, уни (4.1) дифференциал тенгламанинг биринчи интеграли дейилади

Кўриниб турибдики, (4.14) муносабат k -тартибли дифференциал тенгламалар. Уни интегралласак, яъни k та $C_1, C_2, \dots, C_k$ ихтиёрий ўзгармаслар иштирок этади. (4.14) тенгламанинг ечими ўзидаги $n-k$ та $C_{k+1}, \dots, C_n$ ўзгармаслар билан бирга ҳаммаси бўлиб n та ихтиёрий ўзгармасга эга бўлади. Бу ечим (4.1) тенгламанинг умумий ечими бўлади. Агар $y = q(x)$, $x \in I$ функция (4.14) тенгламанинг ечими, яъни $q(x) \in C^k(I)$, $\psi_{n-k}(x) \equiv 0$ бўлиб, $q(x) \in C^n(I)$ бўлса, у ҳолда I интервалда $y = q(x)$ функция (4.1) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $q(x)$ функция учун (4.14) ва (4.15) муносабатлар аниқ айланади. Оралик интеграл таърифига кўра бу $y = q(x)$ функция (4.1) тенгламанинг ҳам ечими бўлади. Шундай қилиб, бирор (4.1) дифференциал тенгламанинг оралик интеграллари маълум бўлса, берилган тенгламани интеграллаш масаласи тартиби ундан наст бўлган дифференциал тенгламани интеграллашга келади. Ҳатто, агар (4.1) дифференциал тенгламанинг n та биринчи интегралли

$$\psi_1(x, y, y', \dots, y^{n-1}, C_1) = 0, \dots, \psi_n(x, y, y', \dots, y^{n-1}, C_n) = 0$$

маълум бўлса, у ҳолда бу муносабатлардан $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ ларни чиқариб, берилган тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қилиш мумкин.

Мисол. $y'' - 2yy' = 0$ дифференциал тенгламанинг биринчи интеграллини топиш осон. Уни $y'' = \frac{d}{dx}(y')$ кўринишда ёзсак, биринчи интеграл $y' = y^2 + C_1$ келиб чиқади.

Яна интеграллаб, $C_1 > 0$ бўлганда $\frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$, $C_1 < 0$ бўлганда эса,

$$1. \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \ln \frac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}} = x + C_2 \text{ умумий интегралли ҳосил қиламиз.}$$

2. Бу бандда кўриладиган дифференциал тенгламаларни интеграллаш масаласи аввал оралик интегралли топишга, сўнгра шу оралик интеграл билан берилган дифференциал тенгламани интеграллашга олиб келинади.

а) n -тартибли дифференциал тенгламада номатълум функция y ва унинг кетма-кет келган ҳосиллари $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$ катнашмасин дейлик. У ҳолда дифференциал тенглама

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

кўринишда ёзилади. Бу ҳолда $y^{(k)} = z$ дейилса, $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$ ($n-k$)-тартибли дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Уни интеграллаш мумкин десак, $\Phi(x, z, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0$ умумий ечим бўлади. Энди $z = y^{(k)}$ бўлгани учун $\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бу k -тартибли дифференциал тенгламани интегралласак умумий ечимга эга бўламиз.

б) Агар n -тартибли дифференциал тенгламада эркин ўзгарувчи ошкор ҳолда катнашмаса, яъни тенглама $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ кўри-

нишда бўлса, y ни янги эрки ўзгарувчи, $p = \frac{dy}{dx}$ ни янги номаълум функция деб, ушбу алмаштиришни бажарамиз ($x \rightarrow y, y \rightarrow p$):

$$y' = p, \\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d^2p}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = p \left[p \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right] = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2, \dots$$

Бу ҳисоблашлар ёрдамида $\frac{d^k y}{dx^k}$ микдор $p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{k-1} p}{dy^{k-1}}$ микдорлар орқали ифодаланишни математик индукция усули билан кўрсатиш мумкин. Шу алмаштиришни бажарсак, $(k-1)$ -тартибли

$$F_1 \left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{k-1} p}{dy^{k-1}} \right) = 0$$

дифференциал тенгламага келамиз. Демак, кўрилатган ҳолда дифференциал тенгламанинг тартибини биттага камайтириш мумкин. Агар ҳосил бўлган тенгламанинг умумий ечими

$$\Phi(y, p, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0 \text{ ёки } \Phi \left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, \dots, C_{n-1} \right) = 0$$

бўлса, шу муносабат берилган $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ тенгламанинг оралик интегралли бўлади. Энди берилган дифференциал тенгламанинг умумий интеграллини топиш учун унинг оралик интеграллини биринчи тартибли дифференциал тенглама сифатида интеграллаш кифоя.

в) (4.1) дифференциал тенгламада $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функция $y, y', \dots, y^{(n)}$ ларга нисбатан m -тартибли бир жинсли функция бўлсин, яъни ушбу

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

айният ўринли бўлсин. Бу ҳолда агар $y > 0$ бўлса ($y < 0$ ҳол ҳам шунга ўхшаш кўрилади), y ҳолда янги номаълум функция $z(x)$ ни киритиш йўли билан берилган дифференциал тенглама тартибини биттага камайтириш мумкин. Ҳақиқатан,

$$y = e^{\int z(x) dx} \quad (4.16)$$

дейлик. Кетма-кет дифференциаллаб, топамиз:

$$y' = z e^{\int z dx}, \quad y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}, \quad y''' = (z'' + 3zz' + z^3) e^{\int z dx} \dots$$

Математик индукция усули билан ихтиёрий j учун

$$y^{(j)} = (z^{(j-1)} + a_1^{(j-1)}(z) z^{(j-2)} + \dots + a_{j-2}^{(j-1)}(z) z^2 + a_{j-1}^{(j-1)}(z)) e^{\int z dx}$$

формулани исбот этиш мумкин, унда $a_1^{(j)}(z), \dots, a_{j-1}^{(j)}(z)$ функциялар z нинг бутун функциялари. Энди топилган ифодаларни (4.1) тенгламага қўямиз ва янги ўзгарувчи z га нисбатан $n-1$ -тартибли ушбу

$$F(x, e^{\frac{1}{2}dx}, ze^{\frac{1}{2}dx}, (z' + z^2)e^{\frac{1}{2}dx}, \dots, (z^{(n-1)} + a_1^n(z)z^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}^n(z))e^{\frac{1}{2}dx} = e^{\frac{m}{2}dx} F(x, 1, z, z' + z^2, \dots, z^{(n-1)} + a_1^n(z)z^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}^n(z)) = 0$$

дифференциал тенгламага келамиз. Агар бу тенгламани интеграллаш мумкин бўлса, унинг умумий интеграли

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0, \quad \Phi\left(x, \frac{y'}{y}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right) = 0$$

берилган (4.1) тенгламанинг оралик интеграли бўлади (чунки (4.16) формуладан $z = \frac{y'}{y}$ ва ушбу $\Phi\left(x, \frac{y'}{y}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right) = 0$ оралик интегралга келамиз). Бу биринчи тартибли дифференциал тенгламадир. Уни интегралласак, яна битта C_n ихтиёрий ўзгармас қатнашади.

Баъзи ҳолларда F функциянинг бир жинслилиги эркин ўзгарувчига нисбатан ҳам ўринли бўлиб, берилган (4.1) дифференциал тенгламани $F_1(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny) = 0$ кўринишда ёзилса, ушбу

$$F_1(kx, ky, kdx, kdy, kd^2y, \dots, kd^ny) = \\ = k^m F_1(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny)$$

айният бажарилади. Бу ҳолда ҳам эркин ўзгарувчини, ҳам номаълум функцияни алмаштирилади. Агар $x = e^x$, $y = ue^x$ (ξ — янги эркин ўзгарувчи, u — янги номаълум функция) алмаштириш бажарилса, эркин ўзгарувчини ўз ичига ошқор олмаган n -тартибли дифференциал тенгламага келамиз. Бундай тенгламаларнинг эса тартибини биттага камайтириш мумкин. Агар $x < 0$ бўлса, $x = -e^x$, $y = ue^x$ каби алмаштириш бажарилади.

Шунга ўхшаш, F функция умумлашган бир жинсли бўлган ҳолни (бу ҳолда x ва $dx - 1$ ўлчовли, $y, dy, d^2y, \dots - m$ ўлчовли, демак $\frac{dy}{dx} - (m-1)$ ўлчовли, $\frac{d^2y}{dx^2} - (m-2)$ ўлчовли ва ҳ.к.) ҳам кўриш мумкин. Бунда $x = e^x$, $y = ue^x$ алмаштириш (4.1) тенгламани эркин ўзгарувчи ξ ни ўз ичига олмаган n -тартибли дифференциал тенгламага олиб келади. Унинг тартибини биттага камайтириш мумкин.

г) Агар (4.1) дифференциал тенгламада $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функция бирор $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, яъни ушбу $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда (4.1) тенгламанинг битта биринчи интеграли $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1$ кўринишда ёзилади. Бу эса, ўз навбатида берилган дифференциал тенгламага қараганда тартиби битта кам $(n-1)$ -тартибли дифференциал тенгламадир.

1-бобда 1-тартибли тўлиқ дифференциалга келтириладиган тенгламаларни кўрган эдик. n -тартибли дифференциал тенгламаларнинг баъзи турлари ҳам интегралловчи кўпайтувчига кўпайтириш усули билан тўлиқ дифференциалга келтирилиши мумкин, яъни

$$\begin{aligned} \mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) &= \\ &= \frac{d}{dx} \Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Бу ҳолда μ функцияни излашнинг умумийроқ усули йўқ. Қўйинча берилган дифференциал тенгламанинг махсус кўриниши μ ни топишга имкон беради.

Масалан, юқори тартибли ҳосилга нисбатан ечилган дифференциал тенглама $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ учун унинг ўнг томонини тўлиқ дифференциалга келтириш кифоя. Ҳақиқатан, агар $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})$ бўлса, у ҳолда $\frac{d}{dx} (y^{(n-1)}) =$

$= \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})$ деб ёзиш мумкин. Бундан биринчи интеграл $y^{(n-1)} = \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) + C$ келиб чиқади. $n = 2$ бўлганда $y'' + a(x, y)y' + b(x, y) = 0$ дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли бўлиши учун $a(x, y)y' + b(x, y)$ ифода тўлиқ дифференциал бўлиши лозим. Бунинг учун $\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}$ аниқланинч бажарилиши зарур ва етарли.

Қуйида кўрилган ҳолларга мисол келтираемиз.

Мисоллар. 1. Ушбу $yy'' - (y')^2 - (y')^4 = 0$ дифференциал тенглама эркин ўзгарувчинини ўз ичига олмайд. Шунинг учун $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ десак, биринчи тартибли $yp \frac{dp}{dy} - p^2 - p^4 = 0$ дифференциал тенгламага келамиз.

2. Ушбу $x^2 yy'' - x^2 (y')^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0$ тенглама y, y', y'' ларга нисбатан иккинчи тартибли бир жинсли. Шунинг учун (4.23) алмаштиришни бажарамиз:

$$x^2 e^{k_2 dx} (z' + z^2) e^{k_2 dx} - x^2 z^2 e^{2k_2 dx} - 5x e^{k_2 dx} \cdot z e^{k_2 dx} + 4e^{2k_2 dx} = 0$$

ёки

$$x^2 (z' + z^2) - x^2 z^2 - 5xz + 4 = 0.$$

Бундан биринчи тартибли чиқиққан $z' = \frac{5}{x} z - \frac{4}{x^2}$ дифференциал тенглама ҳосил

бўлади. Уни интегралласак, биринчи интеграл $z = C_1 x^5 + \frac{2}{3x}$ топилади. Энди (4.16)

га кўра $y(x)$ ни ҳисоблаймиз: $y = C_2 \sqrt{x^2 e^{\frac{1}{6} \ln^3 x}}$.

3. Ушбу $-1 + \frac{yy'''}{y'y''} - 4(y')^2 = 0$ дифференциал тенглама учинчи тартибли бўлиб, уни $\mu = y'y''$ га кўпайтсак, тўлиқ дифференциалга келади. Ҳақиқатан, кўпайтириш натижасида $(y' \neq 0, y'' \neq 0)$

$$-y'y'' + yy''' - 4(y')^3 y'' = 0$$

ҳосил бўлади. Бунинг

$$(y'y'' + yy''') - 2y'y'' - 4(y')^3 y'' = 0$$

ёки

$$\frac{d}{dx} (yy'') - \frac{d}{dx} (y')^2 - \frac{d}{dx} (y')^4 = 0$$

каби ёзамиз. Энди кўринадики, дифференциал тенгламанинг чап томони тўлиқ дифференциалга келди. Демак, биринчи интегрални ёзамиз: $yy'' - (y')^2 - (y')^4 = C_1$.

4.4-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ГРАФИК ИНТЕГРАЛЛАШ

Биз 2-бобда биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни тақрибий интеграллаш хақида баъзи маълумотларни ўргандик. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни ҳам тақрибий интеграллаш усули мавжуд. Бу мавзунини «Ҳисоблаш методлари» предмети чуқур ўрганади. Мазкур параграфда иккинчи тартибли ҳосиллага нисбатан ечилган дифференциал тенгламалар учун график интеграллаш усули билан танишамиз.

Бунинг учун аввал иккинчи тартибли ҳосиллага нисбатан ечилган тенгламанинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Ушбу

$$y'' = f(x, y, y') \quad (4.17)$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб, $f(x, y, y')$ функция R^3 фазосининг бирор очик D_3 тўпламида аниқланган ва узлуксиз бўлсин. D_3 тўпламининг x, y ўзгарувчиларининг R^2 текислигига проекцияси D_2 бўлсин: $pr_{xy} D_3 = D_2 \subset R^2$. Энди $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ дейлик.

Интеграл чизикларининг бирор нуктасида эгрилик радиуси $R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|}$ формула билан аниқланади. Маълумки, агар $y'' < 0$ бўлса кабариклик юқорига, $y'' > 0$ бўлса кабариклик пастга қараган бўлади. Содиқ ҳисоблашларни бажарамиз:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi, \quad 1 + (y')^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad (1 + (y')^2)^{3/2} = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|}.$$

Шунга кўра

$$|y''| = \frac{1}{R |\cos^3 \varphi|}.$$

Демак, (4.17) тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{R |\cos^3 \varphi|} = |f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)|$$

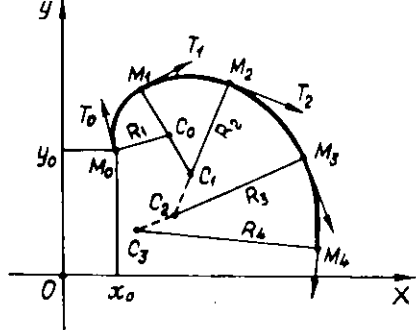
ёки

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot |f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)|} \quad (4.18)$$

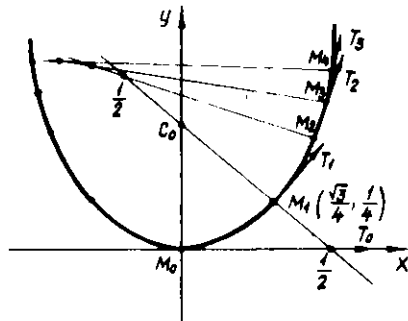
Тўлароқ ёзсак:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| |f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)|}, & \text{агар } y'' > 0 \text{ бўлса,} \\ R = -\frac{1}{|\cos^3 \varphi| |f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)|}, & \text{агар } y'' < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

Топилган (4.18) формуладан қуйидаги натижа келиб чиқади: агар интеграл чизикда бирор (x, y) нукта ва шу нуктада унга ўтказилган уринимнинг йўналиши берилган бўлса, у ҳолда (4.17) дифференциал



32- чизма



33- чизма

тенглама (x, y) нуктада интеграл чизикнинг эгрилик радиусини аниқлайди.

Юқоридаги мулоҳазалардан фойдаланиб, интеграл чизикни тақрибий ясаш билан шугулланамиз. Бошланғич шарт, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ бўлсин. Координаталарни x_0, y_0 бўлган нуктани M_0 дейлик. Шу M_0 нуктадан $y'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi = y'_0$ йўналишда $M_0 T_0$ нур ўтказамиз (32-чизма). Сўнггра (4.18) формула бўйича R_0 ни ҳисоблаймиз. $M_0 T_0$ йўналишга перпендикуляр ўтказамиз. Агар $f(x_0, y_0, \operatorname{tg} \varphi) < 0$ бўлса, ўша перпендикулярда M_0 дан R_0 масофада шундай C_0 нуктани оламизки, $M_0 T_0$ нурни соат мили ҳаракатига қарши йўналишда $\frac{\pi}{2}$ бурчакка бурсак, $M_0 C_0$ кесма ётган нур ҳосил бўлади. Агар $f(x_0, y_0,$

$\operatorname{tg} \varphi) < 0$ бўлса, аксинча иш тутамиз (32-чизмада $f < 0$ бўлган ҳол чизилган). Энди маркази C_0 нуктада бўлган R_0 радиусли $M_0 M_1$ ёй чизамиз. Бу ёй $M_0 T_0$ йўналишда олинади. Албатта, $M_0 M_1$ ёй узунлиги қанча кичик бўлса шунча яхши. $M_1 = M_1(x_1, y_1)$ ва $M_1 T_1$ эса $M_0 M_1$ ёйга M_1 нуктада ўтказилган уринма йўналиши бўлсин.

Яна (4.18) формула ёрдамида R_1 ни ҳисоблаш мумкин. $M_1 T_1$ га перпендикуляр ўтказиб, $f(x_1, y_1, \operatorname{tg} \varphi_1)$ нинг ишорасига қараб ўша перпендикулярда M_1 дан R_1 масофада C_1 нуктани ясаймиз. C_1 нуктани марказ қилиб, R_1 радиус билан $M_1 M_2$ ёй чизамиз. M_2 нуктани M_1 нуктага «яқин» қилиб оламиз. Кейин бу мулоҳазаларни давом эттириб, маълум $[x_0, a]$ ораликда бўлақлари айлана ёйларида иборат $M_0 M_1 \dots M_k$ силлик чизик чизамиз. Бу чизик $[x_0, a]$ ораликда интеграл чизикнинг тақрибий тасвиридир. Агар $k \rightarrow \infty$ да лимитга ўтилса, $\lim_{k \rightarrow \infty} M_0 M_1 \dots M_k = \varphi(x)$, $x \in [x_0, a]$ келиб чиқади ($\varphi(x)$ — интеграл

чизик). Бунинг исботига тўхталмаймиз.

Ушбу $y'' = 2$ содда ҳолда $f(x, y, y') = 2 > 0$, $y'' > 0$. Энди $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирган интеграл чизикни юқоридаги усул билан тақрибий чизиш қийин эмас (33-чизма). Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, $f(0, 0, 0) = 2$, $R_0 = \frac{1}{2}$. $M_0 T_0$ — абсцисса ўқининг мусбат йўналиши, $\varphi_0 = 0$, $f(x_1, y_1, \operatorname{tg} \varphi_1) = 2$, $M_1(x_1, y_1) =$

$=M_1\left(\begin{matrix} \sqrt{3} & 1 \\ 4 & 4 \end{matrix}\right), \operatorname{tg} q_1 = \sqrt{3}, R_1 > \frac{1}{2}$ ва ҳоказо (33-чизма). Шунга ўхшаш ясашларни M_0T_0 абсцисса ўқининг манфий йўналиши бўлган ҳолда ҳам бажариш мумкин. Сезиш мумкинки, ҳосил бўлган силлик чизик $y=x^2$ параболанинг тақрибий тасвири бўлади. Аслида ҳам берилган бошланғич шартни каноатлантирадиган ечим $y=x^2$ параболдан иборат.

Маъл. 1. $y''=x$ дифференциал тенгламанинг $y(0)=0, y'(0)=0$ шартни каноатлантирадиган интеграл чизиги $(-3, +3)$ интервалда тақрибий чизилсин.

2. $y''=y'$ дифференциал тенгламанинг $y(0)=0, y'(0)=1$ шартни каноатлантирадиган интеграл чизиги $(-3, +3)$ интервалда тақрибий чизилсин.

5-боб

n-ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

5.1-§. n-ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ УМУМИЙ ХОССАЛАРИ

1. *n*-тартибли дифференциал тенгламаларнинг муҳим хусусий ҳоли *n*-тартибли чизикли дифференциал тенгламалар бўлиб, улар

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x) \quad (5.1)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда $p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x), g(x)$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $g(x)$ функция (5.1) тенгламанинг ўнг томони ёки эркин ҳади, $p_1(x), \dots, p_n(x)$ функциялар эса унинг коэффициентлари деб юритилади.

Агар (5.1) тенгламада $g(x)$ функция I интервалда айнан нолга тенг бўлмаса, у ҳолда (5.1) тенглама *чизикли бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади. Агар $g(x) \equiv 0, x \in I$ бўлса, мос дифференциал тенглама

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (5.2)$$

чизикли бир жинсли тенглама дейилади.

Энди (5.1) дифференциал тенглама учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги билан шуғулланамиз. (5.1) тенгламани юқори ҳосиллага нисбатан ечиш мумкин:

$$y^{(n)} = g(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \dots - p_n(x)y. \quad (5.3)$$

4-бобдаги белгилашга кўра

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = g(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_n(x)y, \quad (5.4)$$

Бу функция $D_{n+1} = \{(x, y, \dots, y^{(n-1)}) : x \in I, -\infty < y^{(i)} < +\infty, i=0, 1, \dots, n-1\}$ соҳада аниқланган. Агар $p_1(x), \dots, p_n(x), g(x)$ функциялар $[x_1, x_2] \subset I$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда (5.4) функция тегишли D_{n+1} соҳада узлуксиз ва $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ лар бўйича Липшиц шартини каноатлантиради. Ҳақиқатан, f функция $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ лар бўйича $-\infty < y^{(i)} < +\infty (i=0, 1, \dots, n-1)$ интервалда узлуксиз ва узлуксиз ҳосилаларга эга, чунки $\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = -p_{n-i}(x)$ ва $p_{n-i}(x)$

$|x_1, x_2|$ да узлуксиз. Агар $\max_{x \in [x_1, x_2]} \left| \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \right| z = L_i, L_i \geq 0, i=0, 1, \dots, n-1,$

$\max(L_0, L_1, \dots, L_{n-1}) = L \geq 0$ десак, f функция $\{x_1, x_2\}$ да $y', \dots, y^{(n-1)}$ лар бўйича L константа билан Липшиц шартини қаноатлантиради. Бундан $x_0 \in [x_1, x_2]$ учун (5.1) тенглама $y(x_0) = y_0, y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$ шартини қаноатлантирадиган ягона ечимга эгаллиги келиб чиқади. Аммо бу ечим $\{x_1, x_2\}$ оралиқда аниқланган бўладими? деган савол туғилади. Пикар теоремасига кўра тегишли ечим $|x - x_0| \leq h$ да аниқланган бўлиб, $h = \min \left(a, \frac{b}{\max(M, |y_0|, |y_0'|, \dots, |y_0^{(n-1)}|)} \right)$ бўлади.

Бунда $|f| \leq M, M > 0, |y^{(i)} - y_0^{(i)}| \leq b, i=0, 1, \dots, n-1$. Кўрилатган (5.1) чизикли дифференциал тенглама учун b етарли катта бўлиши мумкин. Шунга ўхшаш $M, |y|, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|$ микдорлар $|x - x_0| \leq a$ оралиқда f функция ва $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ лар канчалик тез ўсишига боғлиқ. Шунинг учун (5.1) тенглама ечимининг аниқланиш интервали Пикар теоремаси ёрдамида яна тўларок аниқланиши лозим. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема 9-бобда кўрилади. Унда кўрамизки, (5.1) дифференциал тенгламанинг тегишли бошланғич шартин қаноатлантирадиган ечимнинг коэффицентлари ва ўнг томони I интервалда аниқланган бўлади. Бошқача айтганда, 5.1 чизикли дифференциал тенглама учун I интервал ечим *мавжудлигининг максимал интервали*, тегишли ечим эса давомсиз бўлади. Бу n -тартибли чизикли дифференциал тенгламаларнинг муҳим хоссасидир.

Агар алоҳида айтилмаган бўлса, кейинги мулоҳазаларда $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ коэффицентлар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз деб фараз этилади.

2. Энди (5.1) дифференциал тенгламанинг яна муҳим икки хоссасига кескача тўхталамиз.

1) Эркин ўзгарувчини алмаштириш натижасида (5.1) дифференциал тенглама яна чизикли дифференциал тенгламага ўтади.

Агар $x = \psi(\xi), \psi(\xi) \in C^n, \psi'(\xi) \neq 0$ алмаштиришни бажарсак, бевосита ҳисоблашларни амалга ошириб, ушбу

$$\frac{1}{|\psi'(\xi)|^n} \frac{d^n y}{d\xi^n} + b_1(\xi) \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(\xi) \frac{dy}{d\xi} + b_n(\xi) y = g(\psi(\xi))$$

кўринишдаги тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг чап ва ўнг томонларини $|\psi'(\xi)|^n$ га кўпайтириб, яна (5.1) турдаги дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз.

2) Номаълум функцияни чизикли алмаштириш натижасида (5.1) тенглама яна чизикли дифференциал тенгламага ўтади.

Агар $y = u(x)z + v(x), u(x) \in C^n, v(x) \in C^n, u(x) \neq 0$ алмаштиришни бажарсак, (5.1) тенглама яна шу турдаги тенгламага ўтади. Бунга бевосита ҳисоблашлар ёрдамида ишончи мумкин. Эслатиб ўтамизки, $v(x) \neq 0$ бўлганда бир жинсли чизикли дифференциал тенглама, умуман айтганда, яна бир жинсли тенгламага ўтмайди. Агар $v(x) \equiv 0$ бўлса, $y = u(x)z$ алмаштириш бир жинсли тенгламани яна бир жинслига ўтказати. Шу алмаштиришдан z бўйича дифференциал

тенгламада $z^{(n-1)}$ ҳосилани чиқариб ташлашда ҳам фойдаланилади. Бунинг учун $z^{(n-1)}$ ҳосила олдидаги коэффициент $u(x)$ ни танлаш ҳисобига нолга айланиши лозим. Ҳақиқатан, $y = u(x)z$ алмаштириш натижасида (5.2) чизикли бир жинсли тенглама ушбу

$$u(x)z^{(n)} + (nu'(x) + p_1(x)u(x))z^{(n-1)} + \dots = 0$$

тенгламага келади. Бундан $nu'(x) + p_1(x)u(x)$ ни нолга тенгласак, биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган $nu'(x) + p_1(x)u(x) = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бизга тегишли алмаштириш учун бирор $u(x)$ функция етарли бўлганидан уни

$$u(x) = e^{-\int p_1(x) dx} \quad (5.4)$$

5.2- §. n -ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛИ БИР ЖИНСЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Энди (5.2) дифференциал тенгламани алоҳида ўрганайлик. Номатлум функция $y(x)$ га нисбатан (5.2) тенгламанинг чап томонида кўрсатилган амаллар (дифференциаллаш, $p_i(x)$ функцияларга кўпайтириш ва қўйиш) қўлланиш натижаси n -тартибли чизикли дифференциал оператор деб юритилади ва $L[y]$ деб белгиланади, яъни:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \quad (5.5)$$

Бу оператор ёрдамида (5.1) ва (5.2) тенгламалар

$$L[y] = g(x), \quad (5.1')$$

$$L[y] = 0 \quad (5.2')$$

кўринишда ёзилади.

Киритилган $L[y]$ операторнинг қуйидаги муҳим икки хоссаси бор:

1°). $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, $y_1 \in C^n$, $y_2 \in C^n$; 2°). $L[Cy] = CL[y]$, $y \in C^n$, $C = \text{const}$. Бу хоссалар аслида ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функциялари учун ҳам ўринли, C ҳам комплекс сон бўлиши мумкин. Аммо бу ҳақда тўла маълумот 5.4- § да берилади. Биринчи хоссани исбот этиш учун (5.5) ифодадаги y ва унинг ҳосилалари ўрнига $y_1 + y_2$ ва унинг ҳосилаларининг қўямиз:

$$\begin{aligned} L[y_1 + y_2] &= (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) = \\ &= (y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1) + \\ &+ (y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2) = \\ &= L[y_1] + L[y_2]. \end{aligned}$$

Бу хоссадан ушбу

$$L\left[\sum_{i=1}^k y_i\right] = \sum_{i=1}^k L[y_i], \quad y_i \in C^n \quad (k - \text{ихтиёрий натурал сон})$$

формуланинг тўғрилиги келиб чиқади.

Иккинчи хосса ҳам биринчиси каби исбот этилади. Юқоридаги икки хоссадан ушбу натижа келиб чиқади:

$$L\left[\sum_{i=1}^k C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^k C_i L[y_i], \quad (5.6)$$

бу ерда $C_1, C_2, \dots, C_k$ — ихтиёрий ўзгармас сонлар. $L[y]$ операторнинг юқорида келтирилган хоссаларига асосланиб муҳим теоремаларни исбот этиш мумкин.

5.1-теорема. Агар $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ функциялар I интервалда (5.2') тенгламанинг ечимлари бўлса, y ҳолда $y = y_1(x) + y_2(x)$ функция ҳам I интервалда (5.2') нинг ечими бўлади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$. Бундан 1° хоссага кўра $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0$. Теорема исбот бўлди.

5.2-теорема. Агар $y_1(x)$ функция I интервалда (5.2') нинг ечими бўлса, y ҳолда $Cy_1(x)$ (C — ихтиёрий ўзгармас) функция ҳам шу I интервалда (5.2) тенгламанинг ечими бўлади.

Исбот. Шартга кўра $L[y_1] = 0$. 2° хоссага кўра бундан $L[Cy_1] = CL[y_1] = 0$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

5.1-натижа. Агар $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ функциялар I интервалда (5.2') тенгламанинг ечими бўлса, y ҳолда шу интервалда $\sum_{i=1}^k C_i y_i(x)$ функция ҳам (5.2') нинг ечими бўлади.

и. 1

Исботи 5.1- ва 5.2-теоремалардан келиб чиқади.

5.3-теорема. Агар коэффициентлари $p_i(x)$, $x \in I$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ҳақиқий бўлган (5.2') тенглама $y(x) = u(x) + iv(x)$ комплекс ечимга эга бўлса, y ҳолда $u(x)$ ва $v(x)$, $x \in I$ функцияларнинг ҳар бири (5.2') тенгламанинг ечими бўлади.

Исбот. $L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$ дан $L[u(x)] + iL[v(x)] = 0$ га эга бўламиз. Бу айният бажарилиши учун $L[u(x)] \equiv 0$, $L[v(x)] \equiv 0$ бўлиши зарур ва етарли. Теорема исбот бўлди.

Агар 5.1-натижада $k = n$ бўлса, y ҳолда n та ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олган

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (5.7)$$

функция ҳам (5.2') тенгламанинг ечими бўлади. (5.2') тенглама n -тартибли бўлганидан унинг умумий ечими формуласи n та ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олиши лозимлигини биз 4-бобдан биламиз. Ундай бўлса, (5.7) формула билан берилган функция (5.2') тенглама учун умумий ечим бўла оладими? Бу саволга жавоб $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ечимлар орасидаги муносабатга боғлиқ.

2. Бирор I интервалда аниқланган $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ функциялар берилган бўлсин.

5.1-таъриф. Агар бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлсаки, I интервалда ушбу

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_k \varphi_k(x) \equiv 0 \quad (5.8)$$

айният ўринли бўлса, y ҳолда $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ функциялар I интервалда чизиқли боғлиқ дейилади.

Агар юқорида айтилган $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ сонлар мавжуд бўлмаса, яъни (5.8) айният ўзгармасларнинг фақат нолга тенг қийматларидагина ўринли бўлса, y ҳолда $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ функциялар I интервалда чизиқли эркин дейилади.

5.2-натижа. Агар I интервалда $\varphi_i(x) \equiv 0$, $1 \leq i \leq k$ бўлса, y ҳолда $\varphi_1(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_k(x)$ функциялар I интервалда чизиқли боғлиқ бўлади. Ҳақиқатан,

$$C_i \neq 0, C_1 = C_2 = \dots = C_{i-1} = C_{i+1} = \dots = C_k = 0$$

деб тайласак, $\sum_{i=1}^k C_i^2 \neq 0$ ва $C_i q_i(x) \equiv 0$ бўлади.

Агар $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ — баъзи комплекс сонлар, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ лар x га нисбатан кўнхадлар бўлса, ушбу

$$F(x) = f_1(x)e^{i_1 x} + f_2(x)e^{i_2 x} + \dots + f_m(x)e^{i_m x} \quad (*)$$

кўринишда ёзиладиган ҳар бир $F(x)$ функция *квазикўнхад* дейилади.

5.1- л е м м а . Ушбу $F(x) = f_1(x)e^{i_1 x} + f_2(x)e^{i_2 x} + \dots + f_m(x)e^{i_m x}$ квазикўнхад берилган ва $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ лар ўзаро турли сонлар бўлсин. Агар шу квазикўнхад бирор I интервалда айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда ҳамма $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ кўнхадлар айнан нолга тенг бўлади.

И с б о т . Исботни m сонни бўйича индукция билан исботлаймиз. m сонни квазикўнхаднинг тартиби деб атаймиз. $m=1$ бўлганда 5.1-лемма тўғри, чунки бу ҳолда $F(x) = f_1(x)e^{i_1 x}$ ва $f_1(x)e^{i_1 x} \equiv 0$, $x \in I$ айниятдан $f_1(x) \equiv 0$, $x \in I$ келиб чиқади. Энди $m-1$ дан $m(m \geq 2)$ га индуктив ўтишни бажарамиз. Агар $F(x)$ квазикўнхад I интервалда айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда бу натижа ушбу

$$G(x) = p^{i_1 + 1} (F(x)e^{-i_1 x})$$

квазикўнхад учун ҳам ўринли (бу ерда p — дифференциаллаш оператори, I эса $f_m(x)$ кўнхаднинг даражаси). Бевосита ҳисоблаш ёрдамида

$$G(x) = g_1(x)e^{(i_1 - i_m)x} + g_2(x)e^{(i_2 - i_m)x} + \dots + g_{m-1}(x)e^{(i_{m-1} - i_m)x}$$

ни кўрагани мумкин, бунда

$$g_i(x) = (p + \lambda_i - \lambda_m)^{i-1} f_i(x), i = 1, 2, \dots, m-1.$$

$G(x)$ квазикўнхаднинг тартиби $m-1$ га тенг. Шу $G(x)$ квазикўнхад I интервалда айнан нолга тенг бўлгани учун индукция фаразига кўра барча $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{m-1}(x)$ кўнхадлар I да айнан нолга тенг. Фараз этайлик, $f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)$ кўнхадлардан биронтаси, масалан, $f_1(x)$ нолга тенг бўлмасин, яъни $f_1(x) \neq 0, x \in I$. Шу $f_1(x)$ кўнхаднинг даражаси k бўлсин, яъни $f_1(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$, бунда $a_0 \neq 0$. Бевосита текшириш мумкинки:

$$g_1(x) = (p + \lambda_1 - \lambda_m)^{i-1} f_1(x) = (\lambda_1 - \lambda_m)^{i-1} a_0 x^k + \dots$$

Энди $g_1(x) \equiv 0, x \in I$ айниятга кўра $(\lambda_1 - \lambda_m)^{i-1} a_0 = 0$ тенгликка эга бўламиз. Аммо $\lambda_1 \neq \lambda_m$ га кўра бундан $a_0 = 0$ келиб чиқади. Бу зиддият $f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)$ кўнхадлар I да айнан нолга тенглигини исботлайди. Демак, $F(x) = f_m(x)e^{i_m x}$ га эгамиз. Бундан $F(x) \equiv 0$ бўлиши учун $f_m(x)$ кўнхаднинг барча коэффицентлари нолга тенглиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $F(x) \equiv 0, x \in I$ айният ўринли бўлса, $f_m(x) \equiv 0, x \in I$ айниятлар ҳам ўринли бўлиши исбот этилди. 5.1-лемма исботланди.

Мисоллар. 1. Ушбу $1, x, x^2, \dots, x^k$ функциялар $(-\infty, +\infty)$ интервалда аниқланган бўлиб, улар шу интервалда чизикли эркин. Бу тасдиқ ихтиёрий, чекли интервалда ҳам ўринали.

Агар тескарисининг фараз этсак, бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ лар (яъни $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \neq 0$) учун кўрилатган чекли ёки чексиз интервалдан олинган x нинг

барча қийматларида

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k = 0$$

айният ўринали бўлиши керак. Аммо алгебранинг асосий теоремасига кўра бу тенглик x нинг кўп бўлса k та қийматидагина ўринали. Бу зиддият юқоридagi фикрни исботлайди.

2. Ушбу

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}, k_i \neq k_j, i \neq j$$

функциялар исталган I интервалда чизикли эркин.

Буни исбот этиш учун шу функциялар I интервалда чизикли боғлиқ бўлсин дейлик, яъни бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар мавжудки, I интервалда

$$F(x) = \alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \dots + \alpha_n e^{k_n x} = 0$$

айният ўринали. Бу айниятнинг чап томонида турган функция квазиқўшхад бўлиб, унда $f_1(x) = \alpha_1, \dots, f_n(x) = \alpha_n$. 5-леммага кўра $F(x) \equiv 0$ айният бажарилса, ундan $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ келиб чиқади. Бу эса $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ларнинг танланishiга зид. Демак, берилган функциялар I интервалда чизикли эркин.

3. Агар $k_i \neq k_j, i \neq j$ бўлса, ушбу

$$\left. \begin{aligned} & e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, x^{s_1-1} e^{k_1 x}, \\ & e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, \dots, x^{s_2-1} e^{k_2 x}, \\ & \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ & e^{k_p x}, x e^{k_p x}, \dots, x^{s_p-1} e^{k_p x} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

функциялар ихтиёрий I интервалда чизикли эркин. Улар чизикли боғлиқ бўлсин дейлик. Бу ҳолда бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, N = s_1 +$

$+ \dots + s_p + p$ сонлар мавжуд бўладики, (5.9) нинг 1-йўд функцияларининг мос равишда $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ га, 2-йўд функцияларининг $\alpha_{s_1+1}, \alpha_{s_1+2}, \dots, \alpha_{s_1+s_2+1}$ га ва

х.к. охириги шул функцияларининг $\alpha_{s_1+s_2+\dots+s_{p-1}+p+1}, \dots, \alpha_{s_1+s_2+\dots+s_p+p+1}$ га

кўпайтириб кўшсак, натижада ушбу

$$F(x) = Q_1(x)e^{k_1 x} + Q_2(x)e^{k_2 x} + \dots + Q_p(x)e^{k_p x} \equiv 0$$

айниятни ҳосил қиламиз. Бу ерда $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_p(x)$ лар мос равишда дaртиби $s_1, s_2, \dots, s_p$ лардан иборат бўлган қўшхадлардир. Яна 1-леммага кўра шу айниятдан $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_p(x)$ қўшхадлар I интервалда айнан нолга тенг бўлиши келиб чиқади, яъни барча $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ сонлар нолга тенг бўлиши келиб чиқади. Бу эса зиддият. Демак, (5.9) функциялар системаси I интервалда чизикли эркин функциялар системасидan иборат.

4. Ихтиёрий I интервалда ушбу $1, \cos x, \cos^2 \frac{x}{2}$ функциялар чизикли боғлиқдир.

Ҳақиқатан, $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \cos x + \alpha_3 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \equiv 0$ ифодада $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -2$ дейилса,

тригонометриядаги $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ (буида x — ихтиёрий) айният ҳосил бўлади.

М а л к . 1. Иккинчи I интервалда $q_1(x) = \cos x$, $q_2(x) = \sin x$ функциялар чизикли эркин экани исботлансин.

2. Иккинчи I интервалда $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = \sin x$, $q_3(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ функциялар чизикли боғлиқ экани исботлансин.

3. Қандай интервалда $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = \lg' x$, $q_3(x) = \sec' x$ функциялар чизикли боғлиқ бўлади?

4. Ушбу $q_1(x) = x$, $q_2(x) = 2x$, $q_3(x) = \arcsin x$ функциялар чизикли эркинми ёки боғлиқми? Қандай интервалда?

3. Юқорида функцияларнинг чизикли боғлиқлиги ва эркинлиги текширилди. Текшириш таъриф бўйича олиб борилди. Агар $q_1(x), \dots, q_k(x)$ функциялар I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлишидан ташқари яна баъзи шартларни қаноатлантирса, текшириш соддалашади. Шу мақсадда $q_1(x), \dots, q_k(x)$ функциялар I интервалда $(k-1)$ -тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин, дейлик, яъни $q_i(x) \in C^{k-1}(I)$. Ушбу

$$W(x) = W[q_1, q_2, \dots, q_k] = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_k \\ q_1' & q_2' & \dots & q_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(k-1)} & q_2^{(k-1)} & \dots & q_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

детерминант *Вронский детерминанти* ёки *вронскиан* дейилади.

5.4- теорема. Агар $q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x)$ функциялар I интервалда чизикли боғлиқ бўлиб, $(k-1)$ -тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда I интервалда бу функциялардан тузилган Вронский детерминанти айнан нолга тенг бўлади.

И с б о т . Теореманинг шартига кўра, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \neq 0$ лар учун I интервалда

$$\alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \dots + \alpha_k q_k(x) \equiv 0$$

айният ўринли. Уни $(k-1)$ марта дифференциаллаб,

$$\alpha_1 q_1'(x) + \alpha_2 q_2'(x) + \dots + \alpha_k q_k'(x) \equiv 0,$$

$$\alpha_1 q_1^{(k-1)}(x) + \alpha_2 q_2^{(k-1)}(x) + \dots + \alpha_k q_k^{(k-1)}(x) \equiv 0,$$

айниятларни ҳосил қиламиз. Бу айниятларни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ларга нисбатан тенгламаларнинг бир жинсли системаси деб қараш мумкин.

Аммо $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \neq 0$ бўлгани учун бу система тривиалмас (тривиал бўлмаган) ечимга эга. Алгебрадаги маълум теоремадан системанинг

детерминанти (яъни Вронский детерминанти) айнан нолга тенг бўлиши келиб чиқади.

Э с л а т м а . Небои этилган теорема функцияларнинг чизикли боғлиқ бўлиши учун фақат зарурий шартни беради. Бошқача айтганда, агар бирор I интервалда $(k-1)$ марта узлуксиз дифференциалланувчи $q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x)$ функциялардан тузилган Вронский детерминанти айнан нолга тенг бўлса, бундан

у функцияларнинг чизикли боғлиқлиги, умуман айтганда, келиб чиқмайди.

Масалан, куйидаги якки функцияни олайлик (34-чизма)

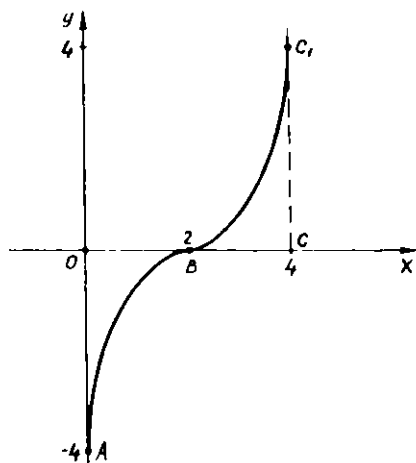
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -(x-2)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & 2 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad \begin{matrix} (34\text{-чизмада} \\ ABC \text{ чизиғи}) \end{matrix}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad \begin{matrix} (34\text{-чизмада} \\ OBC_1 \text{ чизиғи}). \end{matrix}$$

Бу функциялар учун $W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = 0, 0 \leq x \leq 4$. Аввало

бевосита ҳисоблаб кўриш мумкинки, узлуксиз $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ функциялар учун $\varphi_1'(2) = \varphi_1'(2)$, $\varphi_2'(2) = \varphi_2'(2)$. Демак, φ_1 ва φ_2 функциялар $x=2$ нуктада, шу билан бирга $0 \leq x \leq 4$ ораликда узлуксиз дифференциалланувчи. Қолаверса, $0 \leq x \leq 2$ да

$$W = \begin{vmatrix} -(x-2)^2 & 0 \\ -2(x-2) & 0 \end{vmatrix} = 0, 2 \leq x \leq 4 \text{ да } W = \begin{vmatrix} 0 & (x-2)^2 \\ 0 & 2(x-2) \end{vmatrix} = 0.$$



34-чизма

Демак, $0 \leq x \leq 4$ ораликда $W[\varphi_1, \varphi_2] = 0$. Аммо $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ функциялар шу ораликда чизикли эркин (34-чизма). Ҳақиқатан, $0 \leq x \leq 2$ ораликда $\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) = 0$ айниятдан $\alpha_1 = 0$, $2 \leq x \leq 4$ ораликда шу айниятдан $\alpha_2 = 0$ келиб чиқади.

4. 5.5-теорема. Агар $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ функциялар (5.2) тенгламининг I интервалда аниқланган ва тегишли бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимлари бўлиб, улардан тузилган Вронский детерминанти бирор $x=x_0$, $x_0 \in I$ нуктада нолга тенг бўлса, у ҳолда I интервалда $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n] = 0$ ва $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ функциялар чизикли боғлиқ бўлади.

Юқорида исбот этилган 5.4-теорема чизикли боғлиқликнинг зарурий шартини, бу 5.5-теорема эса етарли шартни беради.

Исбот. Ушбу тенгламаларни кўрамиз:

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(x_0) + \alpha_2 \varphi_2(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 \varphi_1'(x_0) + \alpha_2 \varphi_2'(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x_0) = 0, \\ \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 \varphi_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

ечимлар чизикли эркин. Аммо $W(x_0) \neq 0$ бўлса, $W(x) \neq 0$, $x \in I$ бўлиши ҳам келиб чиқади. Ҳақиқатан, агар $W(x_1) = 0$, $x_1 \neq x_0$ бўлса, бундан I да $W(x) \equiv 0$, масалан, $x = x_0$ да ҳам $W(x_0) = 0$ экани чиқади, бу эса $W(x_0) \neq 0$ га зид.

Зарурлиги. $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ функциялар I интервалда (5.2') тенгламанинг чизикли эркин ечимлари бўлсин. Y ҳолда $W(x_0) \neq 0$ бўлади. Акс ҳолда $W(x_0) = 0$ дан $W(x) \equiv 0$, $x \in I$ ва демак, $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ ечимларнинг чизикли боғлиқлиги келиб чиқар эди. Теорема тўла исбот бўлди.

5. Ушбу $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ функциялар I интервалда (5.2') тенгламанинг $(x_0 \in I)$

$$\begin{aligned} q_1(x_0) &= 1, \quad q_2(x_0) = 0, \quad \dots, \quad q_n(x_0) = 0, \\ q_1'(x_0) &= 0, \quad q_2'(x_0) = 1, \quad \dots, \quad q_n'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

$$q_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad q_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \dots, \quad q_n^{(n-1)}(x_0) = 1,$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимлари бўлсин. Энди (5.2') тенгламани

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \dots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y$$

кўринишида ёзсак, бу тенгламанинг ўнг томони $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ларга нисбатан ихтиёрий соҳада $D_{n+2} \subset R^{n+2}$ соҳада Пикар теоремасининг юқоридаги шартларининг ҳар бирини қаноатлантирадиган ягона ечими мавжуд. Шунинг учун

$$W[q_1(x_0), \dots, q_n(x_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

тенгензликка кўра n -гартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг n та чизикли эркин ечимлари мавжуд.

Энди умумий ечим ҳақидаги теоремани келтирамиз.

5.7-теорема. Агар $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ функциялар (5.2') дифференциал тенгламанинг I интервалда аниқланган чизикли эркин ечимлари бўлса, y ҳолда умумий ечим ушбу

$$y = C_1 q_1(x) + C_2 q_2(x) + \dots + C_n q_n(x) \quad (5.14)$$

($C_1, C_2, \dots, C_n$ — ихтиёрий ўзгармаслар) формула билан ёзилади.

Исбот. $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ функциялар I интервалда чизикли эркин бўлгани учун $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, $x \in I$. Масалан, $x_0 \in I$ нуктада ҳам $W(x_0) \neq 0$. Энди $y = q(x)$, $x \in I$ функция (5.2') тенгламанинг ихтиёрий бошланғич шартин, яъни

$$q(x_0) = y_0, \quad q'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad q^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

муносабатларини қаноатлантирадиган ечими бўлсин. Буида янги ҳолини қаран лозим бўлади. Аввало I интервалда $q(x) \equiv 0$ бўлиши мумкин. Бу ечим (5.14) формуладан ($C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ бўлганда) ҳосил бўлади. Энди $q(x) \not\equiv 0$, $x \in I$ бўлсин. (5.14) га кўра:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 q_1(x_0) + C_2 q_2(x_0) + \dots + C_n q_n(x_0), \\ y'_0 = C_1 q_1'(x_0) + C_2 q_2'(x_0) + \dots + C_n q_n'(x_0), \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} = C_1 q_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 q_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n q_n^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \quad (5.15)$$

Кўрилатгани ҳолда (5.15) система $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга нисбатан детерминанти $W(x_0) \neq 0$ бўлган бир жинсли бўлмаган системадир. Бу система ягона $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ ечимга эга. Демак, $q(x) = C_1^0 q_1(x) + C_2^0 q_2(x) + \dots + C_n^0 q_n(x)$. Олинган $q(x)$ ечим ихтиёрий бошланғич шартни қаноатлантирадиган ҳолда (тривиалмас) ечим бўлгани учун (5.14) формула умумий ечим формуласидир. Теорема исбот бўлди.

Биз юқорида n та чизикли эркин ечимлар (5.2') тенглама учун) мавжудлигини кўрсатдик. Бундан (5.2') тенгламанинг чизикли эркин ечимлари максимал сон n дан кам эмаслиги келиб чиқади. Аммо n -тартибли чизикли бир жинсли (5.2') тенгламанинг чизикли эркин ечимлари сон n дан ортиқ бўла олмайди. Ҳақиқатан, исбот этиш учун (5.2') тенгламанинг ихтиёрий $(n+1)$ та ечими чизикли боғлиқ эканини исбот этиш етарли.

$q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x), q_{n+1}(x), x \in I$ функциялар (5.2') тенгламанинг ечимлари бўлсин. Агар $q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x), x \in I$ функциялар чизикли эркин бўлса, у ҳолда юқорида исботланган 5.7-теоремага кўра шундан $C_1, C_2, \dots, C_n$ узгармас сонлар топилдики, ушбу

$$q_{n+1}(x) = C_1^0 q_1(x) + C_2^0 q_2(x) + \dots + C_n^0 q_n(x), \quad x \in I$$

айниятга эга бўламиз. Бундан $q_1(x), \dots, q_{n+1}(x)$ ечимлар I интервалда чизикли боғлиқ экани келиб чиқади. Агар $q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x)$ функциялар I да чизикли боғлиқ бўлса, у ҳолда

$$\alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \dots + \alpha_n q_n(x) \equiv 0, \quad x \in I, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$$

айният ўринали. Демак,

$$\alpha_1 q_1(x) + \dots + \alpha_n q_n(x) + 0 \cdot q_{n+1}(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

айният ҳам ўринали. Бундан яна $q_1(x), \dots, q_{n+1}(x)$ ечимларнинг I интервалда чизикли боғлиқлиги келиб чиқади.

Маъна. Агар $q_1(x), q_2(x), \dots, q_{n+1}(x)$ функциялар I интервалда (5.2') тенгламанинг ихтиёрий $(n+1)$ та ечими бўлса, у ҳолда шу I интервалда проевексия $W[q_1, \dots, q_{n+1}] = 0$ эканини исботлан.

5.2-таъриф. *n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг чизикли эркин ечимлари $q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x), x \in I$ ечимларнинг фундаментал системаси дейилади.*

Бу таърифга ва 5.7-теоремага кўра бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш учун фундаментал системага тегишли ҳамма ечимларни ихтиёрий узгармасларга кўпайтириб қўйиш керак.

Мисоллар. 1. $y'' + k^2 y = 0$, $k \neq 0$ тенглама учун $q_1(x) = \cos kx$, $q_2(x) = \sin kx$ функциялар ихтиёрий I интервалда ечим бўлади. Бу функцияларнинг Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k \sin kx & k \cos kx \end{vmatrix} = k \neq 0$$

Демак, $\cos kx$ ва $\sin kx$ фундаментал системани ташкил этади. У ҳолда умумий ечим бундай ёзилади:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

2. $y''' - k^2 y' = 0$, $k > 0$ тенглама учун $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = e^{kx}$, $q_3(x) = e^{-kx}$ функциялар ихтиёрий I интервалда фундаментал система бўлади. Ҳақиқатан, бу функцияларнинг ечим эканини бевосита текшириб билиш мумкин. Энди вронскиани ҳисоблайлик:

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{kx} & e^{-kx} \\ 0 & k e^{kx} & -k e^{-kx} \\ 0 & k^2 e^{kx} & k^2 e^{-kx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k e^{kx} & -k e^{-kx} \\ k^2 e^{kx} & k^2 e^{-kx} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2k^4 \neq 0 \quad (k > 0).$$

Демак, 1 , e^{kx} , e^{-kx} функциялар фундаментал системани ташкил этади. Шунинг учун умумий ечим

$$y = C_1 + C_2 e^{kx} + C_3 e^{-kx}$$

кўринишда ёзилади

3. Ушбу

$$q_1(x) = \begin{cases} -(x-2)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & 2 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad q_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

функциялар $0 \leq x \leq 4$ оралиқда дифференциалланувчи ва чиқиқли эркли. Аммо улар коэффициентлари $[0,4]$ да узлуксиз бўлган бирорта ҳам дифференциал тенгламанинг ечими эмас (34-чизма). Масалан, $q_1(x)$ функцияни текширайлик. Агар бу функция бирор иккинчи тартибли чиқиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг ечими бўлса, $x_0 = 3$ нуктада $q_1(3) = 0$, $q_1'(3) = 0$ бошланғич шартларни олишимиз мумкин. Бундай ечим ягона бўлиши керак. Иккинчи томондан, $x_0 = 3$ нуктада тривиал ечим $q(x) \equiv 0$ учун ҳам $q(x) = 0$, $q'(3) = 0$ бошланғич шартлар бажарилиши лозим. Бу мавжудлик ва ягоналик теоремасига зид. Шунга ўхшаш, $q_2(x)$ функция ҳам ҳеч бир иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламанинг ечими эмас. Чунки $y = q_1(x)$ ва $y = q_2(x)$ функциялар $x = 2$ нуктада иккинчи тартибли ҳосиллага эга эмас. Ҳақиқатан,

$$q_1''(2) = -2, \quad q_1'(2) = 0; \quad q_2''(2) = 0, \quad q_2'(2) = 2$$

Яна шунга қайт қиламизки, бу $q_1(x)$ ва $q_2(x)$ функциялар учинчи тартибли чиқиқли дифференциал тенгламанинг ечими бўли олмайди, чунки $q_1(x)$ ва $q_2(x)$ функцияларнинг $x = 2$ нуктадаги учинчи ва ундан юқори тартибли ҳосилалари мавжуд эмас.

6. 5.8- теорема. Агар бирор I интервалда аниқланган $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ функциялар чиқиқли эркли бўлиб, n марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциялар ягона n -тартибли чиқиқли бир жинсли дифференциал тенглама ечимларининг фундаментал системаси бўлади.

Исбот. Берилган фундаментал системага ушбу иккита чиқиқли бир жинсли дифференциал тенглама мос келсин дейлик:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (5.16)$$

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \dots + q_n(x)y = 0, \quad (5.17)$$

бу ерда $p_i(x) \in C(I)$, $q_i(x) \in C(I)$, $i=1, 2, \dots, n$. Энди $p_i(x) \equiv q_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, $x \in I$ эканини исботлаймиз. Унинг учун (5.16) дан (5.17) ни ҳадма-ҳад анираимиз:

$$|p_1(x) - q_1(x)|y^{(n-1)} + \dots + |p_n(x) - q_n(x)|y = 0. \quad (5.18)$$

Бу дифференциал тенглама ҳам (5.16), (5.17) тенгламалар каби $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ ечимларга эга. (5.18) тенгламада бирор j ($1 \leq j \leq n$) учун $p_j(x_0) - q_j(x_0) \neq 0$, $x_0 \in I$ бўлсин. Y ҳолда $p_j(x) - q_j(x)$ коэффициент x нинг етарли кичик атрофида нолдан фарқли бўлади. Демак, x_0 нинг етарли кичик атрофида $p_1(x) - q_1(x) \neq 0$ бўлганда (5.18) тенглама $(n-1)$ тартибли бўлади ва у n та чизикли эркин $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ ечимларга эга бўлиши керак. Бу зиддиятдир. Шундай қилиб, $p_i(x) \equiv q_i(x)$, $x \in I$.

Фундаментал система мос чизикли бир жинсли дифференциал тенгламани тўла аниқлагани учун бу дифференциал тенгламани топиш масаласини қўйиш мумкин.

Энди $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ функциялар I интервалда аниқланган бўлиб, ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этсин дейлик. Ихтиёрый $q(x)$, $x \in I$ ечим шу функциялар билан чизикли боғлиқ бўлгани учун $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$, $q(x)$ функциялардан тузилган вронскиан айнан нолга тенг бўлади ($y_1 = q_1(x)$, $y = q(x)$):

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.19)$$

Аслида биз изланган дифференциал тенгламани ёздик. Бу тенглама чизикли бир жинсли эканига ишониш учун (5.19) даги детерминантни охириги устун элементлари бўйича ёямиз:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n]y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \dots +$$

$$+ (-1)^n \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} y = 0. \quad (5.20)$$

Равшанки, чизикли эркин ечимлар учун $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$. Шунинг учун (5.20) тенгламанинг ҳамма ҳадларининг $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ га

бўламиз. Натижада (5.2) кўринишдаги тенглама ҳосил бўлади. Масалан, (5.2) даги $p_1(x)$ учун ушбу

$$p_1(x) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W[y_1, \dots, y_n]}$$

муносабат чиқади. Бундан вронскианн учун муҳим формула чиқариш мумкин. Унинг учун аввал

$$\frac{d}{dx} W(x) = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

айният ўрнили эканига ишонч ҳосил қиламиз. Ўшбу элементлари бўйича детерминант ҳосиласини оламиз:

$$\frac{d}{dx} W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Равшанки, вронскианннинг ҳосиласи n та n -тартибли детерминантлар йигиндисидан иборат бўлиб охиригисидан аввалги $(n-1)$ тасининг ҳар бири 2 та бир хил йўл элементларга эга. Шунинг учун улар нолга тенг бўлиб, фақат охириги детерминант қолади. Бу эса изланган детерминантдир. Шундай қилиб, ушбу $p_1(x) = - \frac{W'(x)}{W(x)}$ формула

хосил бўлади. Уни биринчи тартибли ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенглама каби интеграллаймиз:

$$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x p_1(z) dz}, \quad x_0 \in I, \quad x \in I.$$

Бундан $x=x_0$ да $C=W(x_0)$. Демак,

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(z) dz} \quad (5.21)$$

формулага яямиз. Бу формула *Остроградский — Лиувиль* номи билан аталади. Остроградский — Лиувиль формуласидан аввалдан маълум натижа (яъни $W(x_0) \neq 0$ бўлганда $W(x) \neq 0$, $x \in I$; $W(x_0) = 0$ бўлса, $W(x) = 0$, $x \in I$ экани келиб чиқади.

Яна бу формуладан иккинчи тартибли чиққан дифференциал тенгламаларни уларнинг битта хусусий ечими маълум бўлганда интеграллаш учун фойдаланилади. Ҳақиқатан,

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

тенгламанинг хусусий ечими $y = \Psi(x) \neq 0$, $x \in I$ бўлсин. (5.21) формулага кўра

$$\begin{vmatrix} \Psi(x) & y \\ \Psi'(x) & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p_1(x) dx} \quad \text{ёки} \quad \Psi(x)y' - y\Psi'(x) = C_1 e^{-\int p_1(x) dx}$$

Бу биринчи тартибли дифференциал тенглама бўлиб, унинг чан томони $\mu = \frac{1}{\Psi^2(x)}$ га кўпайтирилиши натижасида тўлиқ дифференциалга келади, яъни

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\Psi(x)} \right) = \frac{C_1}{\Psi^2(x)} e^{-\int p_1(x) dx}.$$

Бундан:

$$\frac{y}{\Psi(x)} = \int \frac{C_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{\Psi^2(x)} dx + C_2$$

ёки

$$y = C_1 \Psi(x) \int \frac{1}{\Psi^2(x)} e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_2 \Psi(x)$$

келиб чиқади.

Эслатмалар. 1) Исталган чизикли бир жинсли дифференциал тенгламалар (албатта коэффициентлари I да узлуксиз бўлган) чексиз кўп фундаментал системаларга эга.

2) Агар $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$ функциялар ихтиёрий n -мarta узлуксиз дифференциалланувчи чизикли эркин бўлса, у ҳолда бу функцияларга мос чизикли бир жинсли дифференциал тенгламада $y^{(n)}$ олддаги коэффициент $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ нолдан фаркли бўлсин деб шарт қўйилиши лозим. Акс ҳолда $W(x) = 0$ тенгламани кааноатлантирадиган нукталар тегишли дифференциал тенгламанинг махсус нукталари бўлади.

Мисол. Фундаментал системаси $\varphi_1(x) = \cos \omega x, \varphi_2(x) = \sin \omega x$ бўлган дифференциал тенглама тузилсин. (5.20) формулага кўра

$$\begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x & y \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x & y' \\ -\omega^2 \cos \omega x & -\omega^2 \sin \omega x & y'' \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega^2 \cos \omega x & -\omega^2 \sin \omega x \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \\ -\omega^2 \cos \omega x & -\omega^2 \sin \omega x \end{vmatrix} y = 0.$$

Бундан:

$$\omega y'' + \omega^3 y = 0 \text{ ёки } y'' + \omega^2 y = 0.$$

Шунга ўхшаш фундаментал системаси $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = \cos x$ бўлган дифференциал тенглама $x \neq k\pi$ (k - бутун сон) да $y'' - (\operatorname{ctg} x)y' = 0$ дифференциал тенгламадан иборат эканини кўрсатиш мумкин.

7. Бу бандда чизикли бир жинсли тенгламаларнинг тартибини камайтириш масаласи билан шуғулланамиз.

(5.2) тенглама $y, y', \dots, y^{(n)}$ ларга нисбатан биринчи тартибли бир жинсли бўлгани учун $y = e^{\int \omega(x) dx}$ алмаштириш (4-боб, 4-§ га қаранг) тенгламанинг тартибини биттага камайтиради. Аммо ҳосил бўлган дифференциал тенглама z га нисбатан чизикли бўлмайди. Бу қўпинча мақсадга мувофиқ бўлмайди. Шу муносабат билан бошқа усулни, яъни баъзи хусусий ечимлар маълум бўлганда тенглама тартибини камайтириш усулини баён этамиз.

5.9-теорема. Агар n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг r та чизикли эркин хусусий ечимлари маълум бўлса, у ҳолда тенгламанинг тартиби r бирликка камайтирилиши мумкин.

Исбот. Маълумки, n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламани интеграллаш учун унинг n та чизикли эркин ечимларини (ечимларининг фундаментал системасини) топиш керак. (5.7-теоремага қаранг). Мазкур теоремада r та чизикли эркин ечимлар маълум бўлган ҳол кўриляпти. Бунда, маълумки, $r \leq n$. Агар $r = n$ бўлса, ечимларнинг фундаментал системаси маълум бўлади ва умумий ечимни бевосита ёзиш мумкин. Теореманинг тасдиғига кўра, $r < n$ бўлган дифференциал тенгламани интеграллаш масаласи $(n-r)$ -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламани интеграллаш масаласига келтирилади. Агар $(n-r)$ -тартибли тенгламанинг $(n-r)$ та чизикли эркин ечимлари топилса, бу билан берилган тенгламанинг фундаментал системаси топилади.

Энди биз $r < n$ бўлган тенглама тартибини r бирликка камайтириш билан шуғулланамиз.

Ушбу $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x), x \in I$ функциялар (5.2') тенгламанинг чизикли эркин ечимлари бўлсин. Аввал I да $\varphi_1(x) \neq 0$ деб,

$u = \left(\frac{y}{q_1(x)} \right)$ (бунда u янги номаълум функция) алмаштириш бажарамиз. Унинг учун $z = \frac{y}{q_1(x)}$ ёки $y = q_1(x)z$ дейлик. Энди охириги

алмаштиришни бажарсак 5.2. § да айтилганидек, тенглама яна n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламага келади:

$$q_1(x)z^{(n)} + q_1'(x)z^{(n-1)} + \dots + q_{n-1}'(x)z' + l[q_1(x)]z = 0$$

Аmmo $l[q_1(x)] \equiv 0$ бўлгани учун, $z' = u$ деб тенгламанинг ҳамма ҳадларини $q_1(x)$ га бўлсак, u га нисбатан $(n-1)$ -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенглама

$$u^{(n-1)} + q_1(x)u^{(n-2)} + \dots + q_{n-1}(x)u = 0 \quad (5.22)$$

ҳосил бўлади. Бу (5.22) тенглама $(r-1)$ та чизикли эркин ечимларга эга. Улар қуйидагича ёзилади:

$$\left(\frac{q_2(x)}{q_1(x)} \right)', \left(\frac{q_3(x)}{q_1(x)} \right)', \dots, \left(\frac{q_r(x)}{q_1(x)} \right)'.$$

Ҳақиқатан, улар чизикли боғлиқ бўлсин дейлик. Унда $\sum_{i=1}^r \alpha_i^2 \neq 0$

бўлганда

$$\alpha_2 \left(\frac{q_2(x)}{q_1(x)} \right)' + \alpha_3 \left(\frac{q_3(x)}{q_1(x)} \right)' + \dots + \alpha_r \left(\frac{q_r(x)}{q_1(x)} \right)' = 0.$$

бўлади. Энди бу тенгликни интегралласак:

$$\alpha_2 \frac{q_2(x)}{q_1(x)} + \alpha_3 \frac{q_3(x)}{q_1(x)} + \dots + \alpha_r \frac{q_r(x)}{q_1(x)} = -\alpha_1.$$

муносабатга келамиз (бунда α_1 — интеграллаш ўзгармаси). Буни $\alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \dots + \alpha_r q_r(x) = 0$, $x \in I$ деб ёзсак, $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_r(x)$ функцияларнинг чизикли эркинлиги ҳақидаги фаразга зид бўлади. Шундай қилиб, (5.22) тенглама $(r-1)$ та чизикли эркин ечимларга эга.

(5.22) дифференциал тенгламага яна юқоридаги мулоҳазаларни қўллаб, тартибини биттага камайтираимиз. Шу усул билан берилган тенгламанинг тартибини r га камайтириш мумкин. Теорема исботланди.

Мисол. Агар $q_1(x) = \cos \omega x$, $-\frac{\pi}{2\omega} < x < \frac{\pi}{2\omega}$ ($\omega > 0$) ҳиссаси ечим бўлса,

$y'' + \omega^2 y = 0$ тенгламанинг умумий ечими топилин. $y = (\cos \omega x)z$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$y' = (\cos \omega x)z' - \omega(\sin \omega x)z,$$

$$y'' = (\cos \omega x)z'' - \omega(\sin \omega x)z' - \omega(\sin \omega x)z' - \omega^2(\cos \omega x)z.$$

Бу ифодаларни берилган тенгламага қўямиз

$$(\cos \omega x)z'' - 2\omega(\sin \omega x)z' - \omega^2(\cos \omega x)z + \omega^2(\cos \omega x)z = 0.$$

Энди $z' = u$ десак, ушбу

$$(\cos \omega x)u' - 2\omega(\sin \omega x)u = 0$$

биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{u'}{u} = 2\omega \operatorname{tg} \omega x,$$

$$\ln|u| = 2\omega \int (\operatorname{tg} \omega x) dx + \ln C_1 = -2\ln|\cos \omega x| + \ln C_1; u = \frac{C_1}{\cos^2 \omega x}, \quad z' = u \quad \text{бўлгани учун}$$

$$z' = \frac{C_1}{\cos^2 \omega x} \quad \text{дан} \quad z = \frac{C_1}{\omega} \operatorname{tg} \omega x + C_2. \quad \text{Агар} \quad \frac{C_1}{\omega} = C_1 \quad \text{десак,} \quad y = (\cos \omega x) z = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x \quad \text{келиб чиқади. Бу берилган тенгламанинг умумий ечимидир (6-банддаги 1-мисолга қараган).}$$

5.3-§. n-ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. n-тартибли чизикли бир жинсли бўлмаган тенгламалар бир жинсли тенгламалардан ўнг томонида $g(x)$ функция борлиги билан фарқ қилади. Шунинг учун (5.1) тенгламанинг умумий ечими ҳақида фикр юритишда (5.2) тенглама ечимлари ҳақидаги тасдиқлардан фойдаланамиз.

5.10-теорема. Агар $y = \psi(x)$, $x \in I$ функция (5.1) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирор хусусий ечими бўлиб, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$ функциялар тегишли (5.2) бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси бўлса, y ҳолда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими унинг хусусий ечими $\psi(x)$ билан тегишли бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x)$ айгинисидан иборат бўлади, яъни:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) + \psi(x). \quad (5.23)$$

Исбот. $\psi(x)$ функция (5.1) нинг ечими бўлгани учун $L[\psi(x)] = g(x)$ бўлади. Энди (5.1) тенгламада

$$y = z + \psi(x) \quad (5.24)$$

алмаштириш бажарайлик. Бундан:

$$g(x) = L[y] = L[z + \psi(x)] = L[z] + L[\psi(x)] = L[z] + g(x).$$

Демак, $L[z] = 0$. Бу (5.1) га мос бир жинсли тенгламадир. Агар $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$ функциялар фундаментал система бўлса,

$$z = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \quad \text{ечим} \quad (5.2) \quad \text{тенгламанинг умумий ечими бўлади.}$$

У ҳолда (5.1) тенгламанинг умумий ечимини топиш учун (5.24) алмаштиришда z ўрнига ифодасини қўйиш kiffoя.

Ҳақиқатан, $y = \chi(x)$ (5.1) тенгламанинг I да аниқланган ва ихтиёрый бошланғич шартин (яъни $\chi(x_0) = y_0$, $\chi'(x_0) = y'_0$, ..., $\chi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$) муносабатларни) қаноатлантирадиган ечими бўлсин. (5.23) формуланинг икки томонидан $(n-1)$ -тартибгача ҳосилалар олиб, ўшбуга эга бўламиз ($x = x_0$ да):

$$\left\{ \begin{aligned} y_0 &= \sum_{i=1}^n C_i y_{i0} + \psi_0, \\ y'_0 &= \sum_{i=1}^n C_i y'_{i0} + \psi'_0, \\ . &. \\ y^{(n-1)}_0 &= \sum_{i=1}^n C_i y^{(n-1)}_{i0} + \psi^{(n-1)}_0. \end{aligned} \right. \quad (5.25)$$

Агар $y_0^{(i)} = \varphi_0^{(i)}, i=0, 1, \dots, n-1$ бўлса, (5.25) дан $W(x_0) \neq 0$ бўлгани учун $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ келиб чиқади. Бу бир жинсли тенгламанинг тривиал ечимига тўғри келади. Шунинг учун $\chi(x) \equiv \varphi(x), x \in I$ бўлади. Бу ҳол қизиқ эмас. Энди $y_0^{(i)} \neq \varphi_0^{(i)}, 0 \leq i \leq n-1$ бўлсин. Равшанки, бир жинсли бўлмаган тенглама тривиал ечимга эга эмас, шу сабабдан $y_0^{(i)} \neq 0, i=0, 1, \dots, n-1$. Демак, (5.25) тенглама $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга нисбатан n та биринчи тартибли алгебраик тенгламаларнинг бир жинсли бўлмаган системасидан иборат. Бу системанинг детерминанти $W(x_0) \neq 0$. Шунинг учун у ягона $C_1^n, C_2^n, \dots, C_n^n$ ечимга эга. Демак, ушбу

$$\chi(x) \equiv \sum_{i=1}^n C_i^0 \psi_i(x) + \varphi(x), \quad x \in I$$

айниятга эга бўламиз. Шундай қилиб, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ бошланғич қийматлар ихтиёрий бўлганидан (5.23) формула умумий ечимдан иборат бўлади. Теорема исбот бўлди.

5.3- натижа. Агар қизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг битта хусусий ечими маълум бўлса, уни интеграллаш масаласи тегишли бир жинсли дифференциал тенгламани интеграллашга келиди.

5.4 - натижа. Агар чириккли бир жинсли бўлмаган тенглама-
нинг r та хусусий ечими $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_r(x), x \in I$ маълум бўлиб,

$$\psi_1(x) - \psi_k(x), \psi_2(x) - \psi_k(x), \dots, \psi_{k-1}(x) - \psi_k(x), \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x), \dots, \psi_r(x) - \psi_k(x), 1 \leq k \leq r$$

функциялар чиқиқли эркин бўлса, бир жинсли бўлмаган тенгламани интеграллаш $(n-r+1)$ -тартибли бир жинсли тенгламани интеграллашга келади.

Исбот. $y = \psi_k(x) + z$ десак, $z = y - \psi_k(x)$ бўлади. Бунда z бир жинсли тенгламанинг ечими. Шунинг учун $y = \psi_1(x)$, $y = \psi_2(x)$, ..., $y = \psi_{k-1}(x)$, $y = \psi_{k+1}(x)$, ..., $y = \psi_r(x)$ десак, бир жинсли тенгламанинг $r-1$ та ечимини, яъни

$$z_1 = \psi_1(x) - \psi_k(x), z_2 = \psi_2(x) - \psi_k(x), \dots, z_{k-1} = \psi_{k-1}(x) - \psi_k(x),$$

$$z_{k+1} = \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x), \dots, z_r = \psi_r(x) - \psi_k(x)$$

есимларни ҳосил қиламиз. Бу есимлар чизикли эркин бўлганда тегишли бир жинсли тенгламанинг тартиби $r-1$ га камайтирилиши мумкин. Натижа исбот этилди.

2. Мазкур бандда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишда муҳим роль ўйнайдиган *Лагранжнинг ўзгармасни вариациялаш* усули билан танишамиз.

Маълумки, бир жинсли тенглама учун умумий ечим унинг чизикли эркли ечимлари орқали (5.14) формула билан ёзилар эди. Ж. Лагранж (5.14) формулада C_i лар ўрнига $\sigma_i(x)$ функцияларни қўйиб, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечимини

$$y = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i(x) \quad (5.26)$$

кўринишда излаш усулини берган. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечимини (5.26) кўринишда излаш мумкинлиги, яъни $\sigma_i(x)$ функцияларни бир қийматли топиш мумкинлиги (ундай функцияларнинг мавжудлиги) қуйидаги ҳисоблашлардан кўринади.

(5.26) функция ва унинг $(n-1)$ -тартибгача ҳосилалари маълум шартларни қаноатлантириши $\sigma_i(x)$ функцияларнинг мавжуд бўлиши учун етарли бўлади. Ҳақиқатан (5.26) нинг ҳосиласини ҳисоблайлик:

$$y' = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i'(x) + \sum_{i=1}^n \sigma_i'(x) \varphi_i(x).$$

Бунда

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i'(x) \varphi_i(x) = 0 \quad (5.27_1)$$

деймиз. Иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$y'' = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i''(x) + \sum_{i=1}^n \sigma_i'(x) \varphi_i'(x).$$

Энди

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i''(x) = 0 \quad (5.27_2)$$

деймиз. Шунга ўхшаш, $(n-1)$ -тартибгача ҳосилаларни ҳисобласак:

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^n \sigma_i'(x) \varphi_i^{(n-2)}(x),$$

бунда

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i'(x) \varphi_i^{(n-2)}(x) = 0 \quad (5.27_{n-1})$$

деб оламиз. Навбатдаги $y^{(n)}$ ни ҳисоблаймиз:

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n \sigma_i'(x) \varphi_i^{(n-1)}(x).$$

Юқоридаги (5.27₁), ..., (5.27_{n-1}) тенгламаларни ҳосил қилишда чизикли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламадан фойдалан-

мадик. $\sigma'_i(x)$ учун охирги муносабатни топишда ундан фойдаланамиз. (5.1) тенгламага юкоридаги ҳисоблашлардан $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ларнинг ифодаларини қўямиз:

$$\left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n \sigma'_i(x) \varphi_i^{(n-1)}(x) \right] + p_1(x) \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i^{(n-1)}(x) \right] + \\ + p_2(x) \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i^{(n-2)}(x) \right] + \dots + p_{n-1}(x) \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i(x) \right] + \\ + p_n(x) \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i(x) \right] = g(x)$$

ёки

$$\sum_{i=1}^n \sigma'_i(x) \varphi_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \{ \varphi_i^{(n)}(x) + p_1 \varphi_i^{(n-1)}(x) + \dots + \\ + p_{n-1}(x) \varphi_i(x) + p_n(x) \varphi_i(x) \} = g(x).$$

Аммо бундан $\varphi_i(x), i=1, 2, \dots, n$ функциялар I да $L[y]=0$ тенгламанинг ечими бўлгани сабабли, ушбу

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \varphi_i^{(n-1)}(x) = g(x) \quad (5.27_n)$$

муносабат ҳосил бўлади. Шундай қилиб, (5.27_i), $i=1, 2, \dots, n$ системага эгамиз. $g(x) \not\equiv 0$ дан бу система $\sigma'_i(x), i=1, 2, \dots, n$ ларга нисбатан бир жинсли эмас. Унинг детерминанти $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n] \neq 0, x \in I$. Шунинг учун $\sigma'_1, \dots, \sigma'_n$ ларни бир қийматли топамиз:

$$\sigma'_i(x) = \delta_i(x), i=1, 2, \dots, n, x \in I.$$

Бундан:

$$\sigma_i(x) = \int \delta_i(x) dx + C_i.$$

Топилган ифодани (5.26) га қўямиз:

$$y = \varphi_1(x) \{ \int \delta_1(x) dx + \dots + \varphi_n(x) \{ \int \delta_n(x) dx + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \}. \quad (5.28)$$

Бу (5.1) тенгламанинг умумий ечимидир. Ундан $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ бўлганда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ушбу

$$y = \varphi_1(x) \int \delta_1(x) dx + \dots + \varphi_n(x) \int \delta_n(x) dx \quad (5.29)$$

хусусий ечимини топиш мумкин.

Шундай қилиб, агар бир жинсли дифференциал тенгламанинг n та чизикли эркин ечимлари маълум бўлса, (5.27_i), $i=1, 2, \dots, n$ системани тузиб, ундан $\delta_1(x), \dots, \delta_n(x)$ ларни, сўнгра (5.29) формула ёрдамида бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу $y'' + \omega^2 y = ax$, $\omega \neq 0$, $a \neq 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими ёзилсин.

Мос бир жинсли тенглама $y'' + \omega^2 y = 0$ аввал кўрилган бўлиб, унинг фундаментал системаси $\cos \omega x$, $\sin \omega x$ функциялардан иборат ва демак, умумий ечими $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ эди. Бир жинсли бўлмаган тенглама учун $y = \frac{a}{\omega^2} x$ функция

хусусий ечим бўлади. Бунга бевосита ҳисоблаб кўриб ишониш мумкин. 5.10-теоремага кўра берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{a}{\omega^2} x.$$

1- мисолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ўзгармасни вариациялаш усули билан топайлик. Ечим $y = \sigma_1(x) \cos \omega x + \sigma_2(x) \sin \omega x$ кўринишда изланади. $\sigma_1'(x)$, $\sigma_2'(x)$ лар учун система бундай ёзилади:

$$\begin{cases} \sigma_1'(x) \cos \omega x + \sigma_2'(x) \sin \omega x = 0, \\ -\sigma_1'(x) \omega \sin \omega x + \sigma_2'(x) \omega \cos \omega x = ax \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \sigma_1'(x) \cos \omega x + \sigma_2'(x) \sin \omega x = 0, \\ \sigma_1'(x) \sin \omega x - \sigma_2'(x) \cos \omega x = -\frac{ax}{\omega}. \end{cases}$$

Бундан

$$\sigma_1'(x) = -\frac{ax}{\omega} \sin \omega(x), \quad \sigma_2'(x) = \frac{ax}{\omega} \cos \omega x.$$

Интеграллаш натижасида ушбу

$$\begin{cases} \sigma_1(x) = -\frac{ax}{\omega^2} \cos \omega x - \frac{a}{\omega^3} \sin \omega x + \bar{C}_1, \\ \sigma_2(x) = \frac{ax}{\omega^2} \sin \omega x + \frac{a}{\omega^3} \cos \omega x + \bar{C}_2 \end{cases}$$

функцияларни топамиз. Энди бу ифодаларни ўз ўрнига қўйсак, аввалдан маълум формулага келамиз:

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{ax}{\omega^2} \cos \omega x - \frac{a}{\omega^3} \sin \omega x + \bar{C}_1 \right) \cos \omega x + \left(\frac{ax}{\omega^2} \sin \omega x + \frac{a}{\omega^3} \cos \omega x + \bar{C}_2 \right) \sin \omega x = \\ &= \bar{C}_1 \cos \omega x + \bar{C}_2 \sin \omega x + \frac{ax}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Бундан хусусий ечим яна $\frac{ax}{\omega^2}$ дан иборатлиги кўриниб турибди.

2. Юқоридаги мисолда хусусий ечимни танлаш мумкин эди. Аммо ҳамма ҳолларда ҳам бу осон бўлавермайди. Ҳақиқатда ўзгармасни вариациялаш усулининг аҳамияти алоҳида кўринади. Шу мақсадда ушбу

$$y'' + (\operatorname{tg} x) y' = \frac{1}{\cos x}, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

дифференциал тенгламани олайлик. Унга мос

$$y'' + (\operatorname{tg} x) y' = 0$$

бир жинсли тенглама оsonгина интегралланади. Агар уни $\frac{y''}{y'} = -\operatorname{tg} x$ ёки

$\frac{d}{dx} (\ln y') = -\operatorname{tg} x$ деб ёзсак, биринчи интеграл $\ln|y'| = \ln|\cos x| + \ln C_1$ ёки

$y' = C_1 \cos x$ кўринишда ёзилади. Энди умумий ечимни (бир жинсли тенглама учун) топа оламиз: $y = C_1 \sin x + C_2$. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топиш учун ечимни $y = \sigma_1(x) \sin x + \sigma_2(x)$ кўринишда излаймиз. Бу ҳолда $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = 1$. Шунинг учун $\varphi_1'(x) = \cos x$, $\varphi_2'(x) = 0$. Энди $\sigma_1'(x)$, $\sigma_2'(x)$ лар учун системани ёзамиз:

$$\begin{cases} \sigma_1'(x) \sin x + \sigma_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ \sigma_1'(x) \cos x + \sigma_2'(x) \cdot 0 = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Бундан $\sigma_1'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$, $\sigma_2'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ келиб чиқади.

Энди $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ лар учун ушбу

$$\sigma_1(x) = \operatorname{tg} x + C_1, \sigma_2(x) = -\frac{1}{\cos x} + C_2$$

ифодаларни топамиз. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими бундай ёзилади:

$$y = \sigma_1(x) \sin x + \sigma_2(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} + \tilde{C}_1 \sin x + \tilde{C}_2 = -\cos x + \tilde{C}_1 \sin x + C_2.$$

3. Энди бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг *Коши* усули билан танишамиз.

Чизикли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама (5.1) нинг коэффициентлари $p_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) ва ўнг томони $g(x)$ бирор $a \leq x \leq b$ oralikda узлуксиз бўлсин. Мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси маълум бўлсин деб фараз этамиз. У ҳолда бир жинсли тенгламанинг ξ параметрга bog'liq бўлган шундай $K(x, \xi)$ ечимини тузиш мумкинки, у ечим ушбу

$$K(\xi, \xi) = 0, K_x(\xi, \xi) = 0, \dots, K_{x^{(n-2)}}(\xi, \xi) = 0, K_{x^{(n-1)}}(\xi, \xi) = 1 \quad (5.30)$$

бошланғич шартни қаноатлантиради. Шу $K(x, \xi)$ ечим оркали бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими

$$\psi(x) = \int_a^x K(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad (5.31)$$

формула ёрдамида топилиши мумкин. Буни исбот этиш учун $L[\psi(x)] = g(x)$ эканини кўрсатиш лозим. Ҳақиқатан, $\psi(x)$ функциядан кетма-кет ҳосилалар олиб, (5.30) шартдан фойдаланамиз:

$$\psi'(x) = K(x, x) g(x) + \int_a^x K'_x(x, \xi) g(\xi) d\xi = \int_a^x K'_x(x, \xi) g(\xi) d\xi,$$

$$\psi''(x) = K'_x(x, x) g(x) + \int_a^x K''_{xx}(x, \xi) g(\xi) d\xi = \int_a^x K''_{xx}(x, \xi) g(\xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned}\psi^{(n-1)}(x) &= K_{x^{(n-1)}}^{(n-1)}(x, x)g(x) + \int_a^x K_{x^{(n-1)}}^{(n-1)}(x, \xi)g(\xi)d\xi = \\ &= \int_a^x K_{x^{(n-1)}}^{(n-1)}(x, \xi)g(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(x) &= K_{x^{(n)}}^{(n)}(x, x)g(x) + \int_a^x K_{x^{(n)}}^{(n)}(x, \xi)g(\xi)d\xi = \\ &= g(x) + \int_a^x K_{x^{(n)}}^{(n)}(x, \xi)g(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Топилган ифодаларни (5.1) тенгламанинг чап томонига қўямиз:

$$\begin{aligned}g(x) + \int_a^x K_{x^{(1)}}^{(1)}(x, \xi)g(\xi)d\xi + p_1(x) \int_a^x K_{x^{(1)}}^{(1)}(x, \xi)g(\xi)d\xi + \\ + \dots + p_n(x) \int_a^x K(x, \xi)g(\xi)d\xi = g(x) + \int_a^x [K_{x^{(n)}}^{(n)}(x, \xi) + \\ + p_1(x)K_{x^{(n-1)}}^{(n-1)}(x, \xi) + \dots + p_n(x)K(x, \xi)]g(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Қавс ичидаги ифода нолга тенг, чунки $K(x, \xi)$ функция мос бир жинсли тенгламанинг хусусий ечими. Бундан $\psi(x)$ функциянинг бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими экани келиб чиқади. Равшанки, $\psi(x)$ ва унинг ҳосилалари учун ушбу

$$\psi(a) = 0, \psi^{(i)}(a) = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$$

шарт бажарилади. Бу шарт бир жинсли тенглама тривиал ечими учун ёзиладиган шартдан фарқ қилмаса-да, бир жинсли бўлмаган тенгламада $\psi(x) \neq 0, a \leq x \leq b$ бўлади. Акс ҳолда $g(x) \equiv 0$ тенгсизлик билан зиддият ҳосил бўлади.

Энди (5.31) формулани бошқача кўринишда ёзамиз. Унинг учун ушбу

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq \xi, \\ K(x, \xi), & \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (5.32)$$

функцияни киритамиз. Равшанки, $G(\xi, \xi) = 0, a \leq \xi \leq b$. Ундан ташқари $x = \xi$ нуктада (5.30) шартга кўра:

$$\begin{aligned}G_{x^{(i)}}^{(i)}(\xi + 0, \xi) = G_{x^{(i)}}^{(i)}(\xi - 0, \xi) = 0, i = 1, 2, \dots, n-2, \\ G_{x^{(n-1)}}^{(n-1)}(\xi + 0, \xi) + G_{x^{(n-1)}}^{(n-1)}(\xi - 0, \xi) = 1.\end{aligned}$$

Охирги муносабатда (5.32), (5.30) га асосан:

$$G_{\xi}^{(n-1)}(\xi+0, \xi) = 1, \quad G_{\xi}^{(n-1)}(\xi-0, \xi) = 0.$$

Чизикли бир жинсли дифференциал тенгламалар учун келтирилган хоссаларга эга бўлган $G(x, \xi)$ функция Коши масаласи учун *Грин функцияси* дейилади. (5.32) формуладан фойдаланиб, (5.31) формулани аниқ интеграл шаклида бундай

$$\psi(x) = \int_a^b G(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad (5.33)$$

ёзини мумкин. Бу формула *Коши формуласи* дейилади.

Мисол. Ушбу $y'' + (\lg x)y' = \frac{1}{\cos x}$, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечими Грин функцияси ёрдамида топилсин. Маълумки, (2-банддаги 2- мисол) мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси $1, \sin x$ лардан иборат бўлиб, умумий ечими эса $y = C_1 + C_2 \sin x$. Энди тегишли $K(x, \xi)$ ечимни

$$K(x, \xi) = \psi_1(\xi) + 1 + \psi_2(\xi) \sin x$$

кўринишда излаймиз, бунда $K(\xi, \xi) = 0$, $K'_x(\xi, \xi) = 1$ бўлиб, $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ ларни шу шартдан фойдаланиб топил оламиз.

$$\begin{aligned} \text{Хақиқатан: } K(\xi, \xi) &= \psi_1(\xi) + \psi_2(\xi) \sin \xi = 0, \\ K'_x(\xi, \xi) &= \psi_2(\xi) \cos \xi = 1. \end{aligned}$$

Бу системани ечиб, ушбуни толамиз:

$$\psi_2(\xi) = -\frac{1}{\cos \xi}, \quad \psi_1(\xi) = -\operatorname{tg} \xi.$$

Шундай қилиб, $K(x, \xi) = -\operatorname{tg} \xi + \frac{1}{\cos \xi} \sin x$.

Энди (5.31) формула бўйича хусусий ечимни толамиз:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^x \left[-\operatorname{tg} \xi + \frac{1}{\cos \xi} \sin x \right] \frac{1}{\cos \xi} d\xi = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin \xi}{\cos^2 \xi} d\xi + \sin x \int_{-\frac{\pi}{4}}^x \frac{d\xi}{\cos^2 \xi} = \\ &= -\frac{1}{\cos \xi} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^x + \sin x \operatorname{tg} \xi \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^x = - \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} \right] + \\ &+ \sin x \left[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} - \cos x + \sin x. \end{aligned}$$

Маълумки. $y'' + \omega^2 y = ax$, $\omega \neq 0$, $a \neq 0$ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими Грин функцияси ёрдамида топилсин.

4. Агар (5.1) тенгламада ўнг томонидаги $g(x)$ функция ушбу

$$g(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad f_i(x) \in C(I)$$

кўринишда бўлса, $L[y] = \sum_{i=1}^s f_i(x)$ тенгламанинг хусусий ечимини

топиш учун s та $L[y] = f_1(x)$, $L[y] = f_2(x)$, ..., $L[y] = f_s(x)$ тенгламанинг ҳар бири учун алоҳида-алоҳида хусусий ечим топамиз. Улар мос равишда $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_s(x)$ функциялардан иборат бўлсин.

У ҳолда берилган тенгламанинг хусусий ечимини $\sum_{i=1}^s \psi_i(x)$ деб

ёзиш мумкин. Ҳақиқатан, фараз бўйича $L[\psi_i] = f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Шунинг учун $L\left[\sum_{i=1}^s \psi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^s L[\psi_i] = \sum_{i=1}^s f_i(x) = g(x)$. Демак,

$\sum_{i=1}^s f_i(x)$ — бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими.

М а ш к. 1. Агар мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси e^x ва e^{-x} бўлса, ушбу $y'' - y = e^{2x} + x - 1$ тенгламанинг хусусий ва умумий ечимлари топилсин.

2. Агар мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси 1 , $\cos x$, $\sin x$ бўлса, ушбу $y''' + y' = x + \cos 2x$ тенгламанинг хусусий ва умумий ечимлари топилсин.

6- б о б

n- ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Чизикли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламалар чизикли дифференциал тенгламаларнинг муҳим хусусий ҳоли бўлиб, улар элементар функцияларда охиригача интегралланади. Мазкур бобда чизикли ўзгармас коэффицентли тенгламаларни ва унга келтириладиган ўзгарувчи коэффицентли чизикли тенгламаларни ўрганамиз. Аввал комплекс дифференциал тенгламаларга тўхта- ламиз.

6.1- §. КОМПЛЕКС ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Агар чизикли дифференциал тенгламаларда коэффицентлари ҳақиқий функциялар бўлса, тенглама *ҳақиқий чизикли дифференциал тенглама* дейилади. Коэффицентлари комплекс функциялардан иборат бўлса, тегишли тенглама *комплекс чизикли дифференциал тенглама* деб юритилади. Кўпинча, коэффицентлари ўзгармас бўлган чизикли дифференциал тенгламаларнинг комплекс ечимларини топиб, сўнгра ундан ҳақиқий ечимларни ажратиб олиш қулайроқ бўлади. Шу муносабат билан баъзи тушунчалар киритамиз.

6.1- т а ъ р и ф. Агар бирор I интервалда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ ҳақиқий аргументли ҳақиқий функциялар берилган бўлиб, шу интервалдан олинган t нинг ҳар бир қийматига ушбу

$$\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$$

комплекс сон мос қўйилган бўлса, у ҳолда I интервалда ҳақиқий аргументли комплекс функция $\chi(t)$ берилган дейилади. $\varphi(t)$ функция

$\chi(t)$ функциянинг ҳақиқий қисми, $\psi(t)$ функция эса унинг мавҳум қисми дейилади.

Агар $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар I интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда комплекс функция $\chi(t)$ ҳам I интервалда узлуксиз дейилади. Комплекс функциянинг дифференциалланувчилиги тушунчаси ҳам шунга ўхшаш қиритилади. Аниқроғи, агар I да $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $\chi(t)$ функция ҳам I да дифференциалланувчи дейилади ва $\dot{\chi}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t)$ деб ҳисобланади. Бунда функция ишорасининг устидаги нукта t бўйича ҳосилани билдиради. Равшанки, комплекс функциялар учун ҳам ушбу

$$\frac{d}{dt}(\chi_1(t) + \chi_2(t)) = \dot{\chi}_1(t) + \dot{\chi}_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}(\chi_1(t) \cdot \chi_2(t)) = \dot{\chi}_1(t)\chi_2(t) + \chi_1(t)\dot{\chi}_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\chi_1(t)}{\chi_2(t)}\right) = \frac{\dot{\chi}_1(t)\chi_2(t) - \chi_1(t)\dot{\chi}_2(t)}{\chi_2^2(t)}, \quad \chi_2(t) \neq 0$$

формулалар ўринли. Бунга бевосита ҳисоблаш йўли билан ишониш мумкин. Ушбу n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенглама

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{z} + a_0z = 0 \quad (6.1)$$

берилган бўлиб, коэффицентлари I интервалда аниқланган ва узлуксиз функциялар бўлсин.

6.2-т а ў р и ф. Агар $z = \chi(t)$ функция $I_1 \subset I$ интервалда аниқланган бўлиб, қуйидаги икки шарт:

$$1^\circ. \chi(t) \in C^n(I_1),$$

$$2^\circ. \chi^{(n)}(t) + a_{n-1}\chi^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{\chi}(t) + a_0\chi(t) \equiv 0, \quad t \in I_1$$

бажарилса, у ҳолда $z = \chi(t)$ функция I_1 интервалда (6.1) тенгламанинг ечими дейилади.

6.1-теорема. $t_0, z_0, \dot{z}_0, \dots, z_0^{(n-1)}$ лар бошлангич қийматларнинг ихтиёрий системаси бўлсин. У ҳолда 1) (6.1) тенгламанинг ушбу $\chi(t_0) = z_0, \dot{\chi}(t_0) = \dot{z}_0, \dots, \chi^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)}$ бошлангич шартни қаноатлантирадиган ва I интервалда аниқланган ягона $z = \chi(t)$ ечими мавжуд; 2) бир хил бошлангич шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий икки $\chi_1(t), \chi_2(t)$ ечим I интервалда устма-уст тушади.

Бу теореманинг исботи 4.1-теореманинг исботидан келиб чиқади. Ҳақиқатан, $z = x + iy$ алмаштириш бажарайлик. У ҳолда (6.1) тенглама ушбу иккита n -тартибли

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \\ \dot{y} = g(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \end{cases} \quad (6.2)$$

дифференциал тенгламага ажралади. Унда f ва g функциялар $x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ ўзгарувчиларга нисбатан коэффициентлари узлуксиз чизикли функциялардир. Аниқроғи, (6.1) да $a_1 = a'_1 + ia''_1, \dots, a_n = a'_n + ia''_n$ десак, f ва g функциялар бундай

$$f = - \sum_{i=1}^n (a'_i x^{(n-i)} - a''_i y^{(n-i)}),$$

$$g = - \sum_{i=1}^n (a'_i x^{(n-i)} + a''_i y^{(n-i)})$$

кўринишга эга бўлади. 9-бобда кўрамизки, $a'_i, a''_i, i=1, 2, \dots, n$ функциялар I интервалда узлуксиз бўлгани учун

$\frac{\partial f}{\partial x^{(n-i)}}, \frac{\partial g}{\partial x^{(n-i)}}, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-i)}}, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-i)}}, i=1, 2, \dots, n$ функциялар ҳам шу интервалда узлуксиз бўлганидан (6.2) система тегишли бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга.

Иккинчи томондан, агар $a'_i \in C^n, a''_i \in C^n$ бўлса, (6.2) системанинг, масалан, биринчи тенгламасини кетма-кет n марта дифференциаллаб, системанинг иккинчи тенгламасидан фойдалансак, $x^{(n)}, x^{(n+1)}, \dots, x^{(2n)}$ ва $y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots, y^{(2n)}$ лар учун ёзилган $(n+2)$ та тенгламага эга бўламиз. Агар тегишли якобиан нолдан фаркли бўлса, $(n+2)$ та муносабатдан $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$ ($(n+1)$ та) ўзгарувчиларни чиқариш мумкин бўлади. Натижада x га нисбатан $2n$ -тартибли чизикли дифференциал тенгламага келамиз. Агар a'_i, a''_i лар ўзгармас бўлса, у ҳолда тегишли якобиан ўзгармас детерминантдан иборат бўлади.

2. Қуйида экспоненциал комплекс функцияларнинг баъзи хоссалари билан танишамиз. Аввал $\omega = u + iv$ ихтиёрий комплекс функция бўлганда $e^\omega = e^u (\cos v + i \sin v)$ деб ёзамиз. Бу формулани ушбу

$$e^\omega = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \dots + \frac{\omega^n}{n!} + \dots$$

қатор ёрдамида исботлаш мумкин. Равшанки, $e^\omega = e^u$. Ҳақиқатан,

$$e^\omega = e^u (\cos v + i \sin v) = e^{u-iv} = e^v.$$

Энди ушбу

$$e^{\omega_1} e^{\omega_2} = e^{\omega_1 + \omega_2}, \quad \omega_1 = u_1 + iv_1, \quad \omega_2 = u_2 + iv_2 \quad (6.3)$$

формулани исбот этамиз. Сอดда ҳисоблашлар

$$\begin{aligned} e^{\omega_1} e^{\omega_2} &= e^{u_1} (\cos v_1 + i \sin v_1) \cdot e^{u_2} (\cos v_2 + i \sin v_2) = \\ &= e^{u_1 + u_2} [(\cos v_1 \cos v_2 - \sin v_1 \sin v_2) + i(\sin v_1 \cos v_2 + \cos v_1 \sin v_2)] = \\ &= e^{u_1 + u_2} [\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2)] = e^{(u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)} = e^{\omega_1 + \omega_2} \end{aligned}$$

бўлишини кўрсатади. Ушбу

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \lambda = \mu + iv \quad (6.4)$$

муҳим формулани исбот этайлик. Аввал $\lambda = iv$ бўлсин. У ҳолда:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{ivt} &= \frac{d}{dt}(\cos vt + i \sin vt) = -v \sin vt + iv \cos vt = \\ &= iv(\cos vt + i \sin vt) = iv e^{ivt}.\end{aligned}$$

Энди $\lambda = \mu + iv$ бўлсин. Унда (6.3) формуладан фойдалансак:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(\mu + iv)t} &= \frac{d}{dt}e^{\mu t}e^{ivt} = \frac{d}{dt}(e^{\mu t}) \cdot e^{ivt} + e^{\mu t} \frac{d}{dt}(e^{ivt}) = \\ &= \mu e^{\mu t}e^{ivt} + e^{\mu t} \cdot iv e^{ivt} = (\mu + iv)e^{\mu t + ivt} = \lambda e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Исбот этилган (6.3) ва (6.4) формуладан кейинги мулоҳазаларимизда тез-тез фойдаланамиз.

3. Ушбу

$$\dot{z} = \lambda z, \quad \lambda = \mu + iv, \quad z = x + iy$$

тенглама учун $z = Ce^{\lambda t}$ (C — ихтиёрий комплекс ўзгармас) функция ечим бўлади. Агар $z(0) = z_0$ деса, $C = z_0$ ва $z = z_0 e^{\lambda t}$ бўлади. $z_0 = r e^{i\alpha}$, $r \geq 0$ (α — ҳақиқий сон) бўлганда

$$z = r e^{i\alpha} e^{\lambda t} = r e^{\lambda t + i\alpha}.$$

Берилган тенгламани бундай ёзамиз:

$$\dot{x} + i\dot{y} = (\mu + iv)(x + iy) = (\mu x - v y) + i(v x + \mu y)$$

ёки

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - v y, \\ \dot{y} = v x + \mu y. \end{cases} \quad (6.5)$$

Бу системанинг ихтиёрий $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ечими комплекс тенгламанинг ихтиёрий ечими билан қуйидагича боғланган бўлади:

$$\begin{aligned}\varphi(t) + i\psi(t) &= r e^{\lambda t + i\alpha} = r e^{(\mu + iv)t + i\alpha} = r e^{\mu t + i(vt + \alpha)} = \\ &= r e^{i\alpha} [\cos(vt + \alpha) + i \sin(vt + \alpha)].\end{aligned}$$

Бундан:

$$x = \varphi(t) = r e^{\mu t} \cos(vt + \alpha), \quad y = \psi(t) = r e^{\mu t} \sin(vt + \alpha).$$

Шунга ўхшаш $\dot{z} = iz^2$ комплекс дифференциал тенглама содда ҳисоблашлар ёрдамида қуйидаги икки ҳақиқий

$$\dot{x} = -2xy, \quad \dot{y} = x^2 - y^2$$

дифференциал тенгламага ажралади.

6.2-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

4- бобда n - тартибли дифференциал тенгламаларнинг баъзи интегралланувчи турларини кўрганда қўпинча $\frac{dy}{dx} = p$ белгилашдан фой-

даланган эдик. Бунда y — номаълум ҳақиқий функция эди. Энди номаълум функция сифатида ҳақиқий аргументли ихтиёрий z (ҳақиқий ёки комплекс) функцияни оламиз. Масалан, ҳақиқий аргументни t деса, $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($x(t)$, $y(t)$ — ҳақиқий функциялар) деб ёзилиши мумкин. Агар бирор I интервалда $y(t) \equiv 0$ бўлса, шу оралиқда $z(t) = x(t)$ функция ҳақиқий бўлади.

Ушбу бобда z функциядан t бўйича олинган ҳосилани $pz = \frac{d}{dt} z$ деб, дифференциаллаш операторини символик равишда $\frac{d}{dt} = p$ деб белгилаймиз. Худди шундай $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) = p^2, \dots, \frac{d^k}{dt^k} = p^k$ символларни киритсак, шу символлар ёрдамида $\frac{dz}{dt} = pz, \frac{d^2 z}{dt^2} = p^2 z, \dots, \frac{d^k z}{dt^k} = p^k z$ муносабатларга эга бўламиз. (6.1) дифференциал тенгламанинг чап томонини $L(z)$ деб белгиласак, уни киритилган символлар орқали ёзиш мумкин (унда $a_i = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$ деймиз):

$$\begin{aligned} L(z) &= z + a_1 \overset{(n)}{z} + \dots + a_{n-1} \overset{(n-1)}{z} + a_n z = \\ &= p^n z + a_1 p^{n-1} z + \dots + a_{n-1} p z + a_n z = \\ &= (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) z = L(p) z. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, (6.1) тенгламани

$$L(p) z = 0 \quad (6.1')$$

деб ёзамиз, бунда $a_i = \text{const}$ бўлгани учун $L(p)$ n -тартибли алгебраик кўпхад.

Қуйида дифференциаллаш оператори p га нисбатан $L(p)$ кўпхаднинг икки хоссаси билан танишамиз.

А) $L(p)$ ва $M(p)$ — дифференциаллаш операторлари p га нисбатан ихтиёрий кўпхад, z_1, z_2, z лар эса t нинг функциялари бўлса, у ҳолда ушбу

1. $L(p)(z_1 + z_2) = L(p)z_1 + L(p)z_2$,
2. $(L(p) + M(p))z = L(p)z + M(p)z$,
3. $L(p)(M(p)z) = (L(p)M(p))z$

айниятлар ўринли. Бевосита ҳисоблашларни бажариб, бунга ишониш мумкин.

Б) Агар $L(p)$ кўпхад p га нисбатан бирор кўпхад бўлса, ушбу

$$L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t} \quad (6.6)$$

формула ўринли, бунда λ — ҳақиқий ёки комплекс сон.

Исбот. Биз юқорида $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ формулани исбот этган эдик.

Демак, $pe^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$. Равшанки, $p^2 e^{\lambda t} = p(pe^{\lambda t}) = p(\lambda e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \dots, p^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$. Шунинг учун $L(p)e^{\lambda t} = p^n e^{\lambda t} + a_1 p^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} p e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = L(\lambda)e^{\lambda t}$.

(6.6) формула исбот этилди.

Агар λ сон $L(p)$ кўпхаднинг илдизи бўлса, (6.6) формулага кўра $e^{\lambda t}$ функция (6.1') тенгламанинг ечими бўлади. Шу муносабат билан $L(p)$ кўпхад (6.1') тенгламанинг *характеристик кўпхади дейилади*.

Энди (6.1') тенгламанинг умумий ечимини (комплекс ечимини) ёзишга тўхталайлик. Бунда икки ҳол юз беради: 1. Характеристик

Вандермонд детерминантидан иборат бўлиб, у нолдан фаркли, шунга кўра (6.9) дан $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларни топа оламиз. $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ лар (6.9) системанинг ечими бўлсин. У ҳолда

$$z^*(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{z_i^* t}$$

бўлади. Олинган $z = z^*(t)$ ечим ихтиёрий бўлгани учун (6.7) формула умумий ечим формуласи экани келиб чиқади.

Агар (6.1) тенгламанинг $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентлари ҳақиқий бўлса, шу тенгламанинг барча комплекс ечимлари ичидан ҳақиқий ечимларини ажратиб олиш масаласини қўямиз.

(6.1) дифференциал тенгламанинг $L(p) = 0$ нинг илдизларига, яъни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_k \neq \lambda_i, k \neq i$ ларга мос келган ечимларини

$$z_1 = e^{z_1 t}, z_2 = e^{z_2 t}, \dots, z_n = e^{z_n t} \quad (6.10)$$

дейлик. Бизни (6.7) формула ҳақиқий ечимларни бериши учун комплекс ўзгармаларининг қабул қиладиган қийматлари қизикти ради.

Фараз этайлик: $z_1 = z_2, \dots, z_{2k-1} = z_{2k}; z_i = z_i, i = 2k+1, \dots, n$.

Бошқача айтганда, (6.10) функциялардан $2k, k \leq \frac{n}{2}$ таси қўшма комплекс функция бўлиб, қолган $(n-2k)$ таси ҳақиқий функциялардир.

6.1 лемма. Агар (6.7) формулада қўшма комплекс ечимлар олдидаги коэффициентлар ҳам қўшма комплекс бўлиб, ҳақиқий ечимлар олдидаги коэффициентлар ҳақиқий бўлса, у ҳолда тегишли формула ҳақиқий ечимни аниқлайди.

Исбот. Бирор $z_{2s-1} = z_{2s} \quad (1 \leq s \leq k)$ муносабатини олайлик.

У ҳолда $z_{2s} = e^{\lambda_{2s} t}$ бўлади. Агар $\lambda_{2s} = \mu_{2s} + i\nu_{2s}$ десак:

$$z_{2s} = e^{\mu_{2s} t} (\cos \nu_{2s} t + i \sin \nu_{2s} t), \quad z_{2s-1} = e^{\mu_{2s} t} (\cos \nu_{2s} t - i \sin \nu_{2s} t).$$

Энди $C_{2s} = C'_{2s} + iC''_{2s}, C_{2s-1} = C'_{2s} - iC''_{2s}$ бўлса,

$$\begin{aligned} C_{2s-1} e^{z_{2s-1} t} + C_{2s} e^{z_{2s} t} &= (C'_{2s} - iC''_{2s}) e^{\mu_{2s} t} (\cos \nu_{2s} t - i \sin \nu_{2s} t) + \\ &+ (C'_{2s} + iC''_{2s}) e^{\mu_{2s} t} (\cos \nu_{2s} t + i \sin \nu_{2s} t) = \\ &= e^{\mu_{2s} t} [C'_{2s} \cos \nu_{2s} t - C''_{2s} \sin \nu_{2s} t + i(C'_{2s} \sin \nu_{2s} t + C''_{2s} \cos \nu_{2s} t) + \\ &+ C'_{2s} \cos \nu_{2s} t - C''_{2s} \sin \nu_{2s} t - i(C'_{2s} \sin \nu_{2s} t + C''_{2s} \cos \nu_{2s} t)] = \\ &= e^{\mu_{2s} t} (2C'_{2s} \cos \nu_{2s} t - 2C''_{2s} \sin \nu_{2s} t) \end{aligned}$$

бўлади. Охирги ифода ҳақиқий функциядир. Бундан ушбу

$$\sum_{s=1}^k (C_{2s-1} e^{z_{2s-1} t} + C_{2s} e^{z_{2s} t}) = \sum_{s=1}^k e^{\mu_{2s} t} (2C'_{2s} \cos \nu_{2s} t - 2C''_{2s} \sin \nu_{2s} t) \quad (6.11)$$

муносабатнинг ўринли экани ва унинг ўнг томонидаги функция ҳақиқий экани келиб чиқади. $\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n$ лар ҳақиқий бўлгани учун ҳақиқий $C_{2k+1}, \dots, C_n$ коэффицентлар орқали тузилган

$$C_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

йигинди ҳам ҳақиқий бўлади.

Шундай қилиб, ушбу

$$z = \sum_{i=1}^k (C_{2N-1} e^{\lambda_{2N-1}t} + C_{2N} e^{\lambda_{2N}t}) + \sum_{i=2k+1}^n C_N e^{\lambda_N t} \quad (6.12)$$

функция ҳақиқийдир. Лемма исбот этилди.

Ҳақиқий $C_2', C_{2,2}', \dots, C_{2k}', C_2'', C_{2,2}'', \dots, C_{2k}''$ коэффицентлар ихтиёрий бўлгани учун (6.11) муносабатдан фойдаланиб, (6.12) формулани куйидаги

$$z = \sum_{i=1}^k e^{i\lambda_i t} (C_i \cos v_i t + C_i' \sin v_i t) + \sum_{i=2k+1}^n C_i e^{i\lambda_i t} \quad (6.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Унда n та ихтиёрий ҳақиқий

$$C_1, C_2, \dots, C_k, C_1', C_2', \dots, C_k', C_{2k+1}, \dots, C_n$$

ўзгармаслар қатнашган.

Бу (6.13) формулага (6.1') тенгламанинг коэффицентлари ҳақиқий бўлганда унинг фундаментал системасини топиш йўли билан ҳам келиш мумкин. Текшириш қийин эмаски, ушбу

$$\left. \begin{aligned} e^{i\lambda_1 t} \cos v_1 t, e^{i\lambda_2 t} \cos v_2 t, \dots, e^{i\lambda_{2k} t} \cos v_{2k} t, \\ e^{i\lambda_1 t} \sin v_1 t, e^{i\lambda_2 t} \sin v_2 t, \dots, e^{i\lambda_{2k} t} \sin v_{2k} t, \\ e^{i\lambda_{2k+1} t}, e^{i\lambda_{2k+2} t}, \dots, e^{i\lambda_n t} \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

функциялар $-\infty < t < +\infty$ интервалда (6.1') тенгламанинг чизикли эркин ечимларидан иборат. Демак, улар (6.1') тенгламанинг фундаментал системасини ташкил этади. Шунинг учун умумий ечимни (6.13) кўринишда ёзса бўлади.

Равшанки, характеристик тенгламанинг барча илдизлари ҳақиқий оддий бўлганда умумий ечим $z = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$ (C_i — ҳақиқий, λ_i — ҳақиқий) кўринишда ёзилади.

6.1-эслатма. (6.13) формуладаги биринчи йигиндини $\sum_{i=1}^k \rho_i e^{i\lambda_i t} \cos(v_i t + \alpha_i)$.

$\rho_i > 0$ каби ёзиш ҳам мумкин. Унда α_i ($i=1, 2, \dots, k$) лар ихтиёрий ўзгармас. Баъзи ҳолларда шу кўриниш қулайроқ бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу $z'' - z = 0$ тенгламанинг умумий ечими топилсин. Аввал умумий комплекс ечимни топайлик. Характеристик тенглама $p^2 - 1 = 0$ кўринишда бўлиб, илдизлари $p_1 = -1$, $p_2 = 1$ бўлади.

Агар $L(p) \equiv ap + b$, $a \neq 0$ бўлса ҳам шундай иш тутамиз:

$$(ap + b)(e^{\lambda t} f(t)) = ap(e^{\lambda t} f(t)) + be^{\lambda t} f(t) = ae^{\lambda t} (p + \lambda) f(t) + be^{\lambda t} f(t) = e^{\lambda t} [a(p + \lambda) + b] f(t).$$

Шундай қилиб, (6.17) формула $L(p)$ кўпхад тартиби $n = 1$ бўлганда исбот этилди. n -тартибли кўпхад учун (6.17) ни исбот этиш учун математик индукцияни қўлаймиз. Ўша формула $(n - 1)$ -тартибли ($n \geq 2$) кўпхад учун ўринли бўлсин, дейлик. У ҳолда n -тартибли $L(p)$ кўпхад учун (6.17) формулани исбот этамиз. $L(p)$ кўпхадни $L(p) = L_1(p) L_2(p)$ кўринишида ёзамиз. Бунда $L_1(p)$ кўпхад биринчи тартибли, $L_2(p)$ эса $(n - 1)$ -тартибли кўпхад. Фараз бўйича $L_1(p)$ ва $L_2(p)$ кўпхадлар учун формула тўғри. Шу сабабли қуйидагига эгамиз:

$$L(p)(e^{\lambda t} f(t)) = L_1(p) L_2(p)(e^{\lambda t} f(t)) = L_1(p)(e^{\lambda t} L_2(p + \lambda) f(t)) = \\ = L_1(p)(e^{\lambda t} F(t)), \quad F(t) = L_2(p + \lambda) f(t)$$

ёки

$$L(p)(e^{\lambda t} f(t)) = L_1(p)(e^{\lambda t} F(t)) = e^{\lambda t} L_1(p + \lambda) F(t) = \\ = e^{\lambda t} L_1(p + \lambda) L_2(p + \lambda) f(t) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t).$$

(6.17) формула исбот бўлди.

6.3-л е м м а. Агар $L(p)$ кўпхад p символга нисбатан ихтиёрий кўпхад, $\omega_r(t)$ эса ушбу $\omega_r(t) = L(p) t^r e^{\lambda t}$ (λ — комплекс сон) формула билан аниқланган ҳақиқий аргумент t нинг функцияси бўлиб, λ сон $L(p)$ кўпхаднинг k каррали илдизи бўлса, у ҳолда $\omega_0(t) \equiv 0$, $\omega_1(t) \equiv 0$, ..., $\omega_{k-1}(t) \equiv 0$ айниятлар ўринли; аксинча, агар $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$, ..., $\omega_{k-1}(t)$ функциялар t нинг $t = t_0$ қийматида нолга тенг, яъни

$$\omega_0(t_0) = \omega_1(t_0) = \dots = \omega_{k-1}(t_0) = 0 \quad (6.18)$$

бўлса, у ҳолда λ сон $L(p)$ кўпхаднинг s ($s \geq k$) каррали илдизи бўлади.

Исбот. 6.2-леммага кўра $f(t) = t^r$ бўлганда

$$\omega_r(t) = L(p) t^r e^{\lambda t} = e^{\lambda t} L(p + \lambda) t^r \quad (6.19)$$

лемманинг биринчи қисмини исбот этамиз. λ сони $L(p)$ кўпхаднинг k каррали илдизи бўлсин. Унда $L(p)$ ни $L(p) = M(p)(p - \lambda)^k$ ($M(p)$ тартиби $(n - k)$ бўлган кўпхад) кўринишида ёзиш мумкин. Агар p ни $p + \lambda$ га алмаштираёқ,

$$L(p + \lambda) = M(p + \lambda) p^k \quad (6.20)$$

формулага келамиз. $L(p + \lambda)$ учун топилган бу ифодани (6.19) га қўямиз:

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t} M(p + \lambda) (p^k t^r), \quad r = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Аммо $p^k t^r = 0$, чунки $r < k$. Шунинг учун $\omega_r(t) \equiv 0$, $r = 0, 1, \dots, k - 1$.

Энди лемманинг иккинчи қисмини исбот этайлик. (6.18) сонли тенгликлар ўринли бўлсин. Равшанки, $L(p + \lambda) = (p + \lambda)^n + a_1(p + \lambda)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p + \lambda) + a_n$. Кавсларни очиб чиқиб, ҳосил бўлган кўпхадни

$$L(p + \lambda) = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + p^n, \quad b_n = 1 \quad (6.21)$$

кўринишда ёзамиз. Энди $p=0$ бўлсин. У ҳолда $t=t_0$ да (6.19) дан

$$\omega_0(t_0) = e^{\lambda_0} L(p+\lambda) \cdot 1, \quad f(t) = 1$$

ёки $L(p+1) \cdot 1 = b_0$ бўлгани учун ((6.21) га кўра)

$$\omega_0(t_0) = e^{\lambda_0} b_0.$$

Аммо (6.18) га кўра $\omega_0(t_0)=0$. Демак, $b_0=0$. Шунга ўхшаш, $b_0=b_1=\dots=b_{r-1}=0$, $r \leq k-1$ бўлсин дейлик. У ҳолда (6.19) ва (6.21) ларга кўра:

$$\omega_r(t_0) = e^{\lambda_0} r! b_r$$

Бундан (6.18) га асосан $b_r=0$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$b_0=b_1=\dots=b_{k-1}=0 \text{ ва } L(p+\lambda) \text{ кўпхад ушбу } L(p+\lambda) = \\ = b_k p^k + b_{k+1} p^{k+1} + \dots + b_n p^n = (b_k + b_{k+1} p + \dots + \\ + b_n p^{n-k}) p^k = M_1(p) p^k$$

кўринишга эга. Энди p ни $p-\lambda$ га алмаштирамиз:

$$L(p) = M_1(p-\lambda) (p-\lambda)^k.$$

Бу ифодадан $p=\lambda$ сон $L(p)$ кўпхаднинг карраси k дан кам бўлмаган илдизи экани келиб чиқади. Қайд қиламизки, $M_1(p-\lambda)$ кўпхад учун λ яна илдиз бўлиши эҳтимоли бор. Бу, масалан, $b_k=0$ бўлганда содир бўлади. Лемманинг иккинчи қисми ҳам исбот этилди. Демак, лемма тўла исботланди.

Энди 6.3-теореманинг исботига ўтамиз. 6.3-лемманинг биринчи қисмига асосан (6.15) функциялар $L(p)z=0$ тенгламанинг ечими бўлади. (6.16) формула умумий комплекс ечим эканини исбот этамиз. $z=z^*(t)$ функция (6.1') тенгламанинг $z^*(t_0)=z_0, \dot{z}^*(t_0)=\dot{z}_0, \dots, z^{(n-1)}(t_0)=z_0^{(n-1)}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими бўлсин.

Бу ечим $-\infty < t < +\infty$ интервалда аниқланган. $C_1, C_2, \dots, C_n$ комплекс ўзгармасларни топиш учун ушбу

$$C_1 z_1^{(s)}(t_0) + C_2 z_2^{(s)}(t_0) + \dots + C_n z_n^{(s)}(t_0) = z_0^{(s)}, \\ s=0, 1, \dots, n-1 \quad (6.22)$$

системага эгамиз. Бу системадан $C_1, \dots, C_n$ ларнинг ягона қийматларини топиш учун унинг детерминанти

$$d = \begin{vmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \dots & z_n(t_0) \\ \dot{z}_1(t_0) & \dot{z}_2(t_0) & \dots & \dot{z}_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(t_0) & z_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & z_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

нолдан фаркли бўлиши етарли. Фараз этайлик, $d=0$ бўлсин, яъни шу детерминантнинг, масалан, йўллари чизикли боғлиқ. У ҳолда бу

детерминантни шундай ўзгартириш мумкинки, натижада ҳосил бўлган детерминантнинг у ёки бу йўл элементлари нолга тенг бўлади.

Ҳақиқатан, шундай $1 = b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, \sum_{j=1}^n b_j^2 \neq 0$ ўзгармасларни

оламизки, 1-йўл элементларини b_{n-1} га, 2-йўл элементларини b_{n-2} га, $\dots$, охириги йўл элементларини b_0 ($b_0=1$) га кўпайтириб қўшсак, натижада ҳосил бўлган детерминантнинг, масалан, 1-йўл элементлари нолга тенг бўлади. 1-йўл j -устун элементини ёзайлик:

$$z_j^{(n-1)}(t_0) + b_1 z_j^{(n-2)}(t_0) + \dots + b_{n-2} z_j(t_0) + b_{n-1} z_j(t_0) = 0.$$

Бу сонли тенглакни яна

$$M(p)z_j|_{t=t_0} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (6.23)$$

деб ёзса бўлади. Унда $M(p) = p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \dots + b_{n-2} p + b_{n-1}$. 6.3-леммага кўра (6.23) дан $j=1, 2, \dots, k_1$ бўлганда λ_1 сон $M(p)$ кўнхаднинг камида k_1 каррали, $j=k_1+1, k_1+2, \dots, k_1+k_2$ бўлганда λ_2 сони $M(p)$ нинг камида k_2 каррали илдизи, шунга ўхшаш мулоҳаза билан, λ_m сони $j=k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+1, \dots, k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+k_m=n$ бўлганда $M(p)$ кўнхаднинг камида k_m каррали илдизи экани келиб чиқади. Бундан $M(p)$ кўнхад тартиби $n-1$ бўлишига қарамасдан камида n та илдизи бор деган хулосага келамиз. Бу зиддият $d=0$ деган фараздан чиқди. Демак, (6.22) системанинг ечимини $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ десак,

$$z^*(t) = \sum_{i=1}^n C_i^0 z_i(t)$$

формулага келамиз. Теорема исбот этилди.

6.2-эслатма. (6.1') тенгламанинг умумий комплекс ечими (6.16) формула билан ёзилса ҳам уни амалда қулай кўринишида, яъни

$$z(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t} \quad (6.24)$$

шаклда ёзиш мумкин. Бунда $f_i(t)$ тартиби k_i дан юқори бўлмаган кўнхад бўлиб, унинг коэффицентлари ҳар бир ечим учун тўла аниқланади.

Агар $L(p)z=0$ тенгламанинг коэффицентлари ҳақиқий ўзгармас бўлса, кўрилатган ҳолда ҳам тенгламанинг комплекс ечимлари ичидан ҳақиқий ечимларни ажратиб олиш масаласини қўйиш мумкин. Бунда 6.1-леммага ўхшаш леммани келтириш ва исботлаш мумкин. Қуйидаги мулоҳазалар фикримизни тасдиқлайди.

Фараз этайлик,

$$\lambda_1 = \lambda_2, \bar{\lambda}_3 = \lambda_4, \dots, \lambda_{2s-1} = \lambda_{2s}, \\ \bar{\lambda}_{2s+1} = \lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_m = \lambda_m.$$

Кўриш кийин эмаски, ушбу $t^{\delta} e^{\lambda_{2j-1} t}$ ва $t^{\delta} e^{\lambda_{2j} t}$, $\delta=0, 1, \dots, k_{2j-1}-1$ ($j=1, 2, \dots, s$) функциялар ўзаро қўшма комплекс ечимларни ташкил этади. Агар 6.1-леммада айтилганидек, шу қўшма комплекс ечимлар

олдидаги коэффициентлар ҳам қўшма комплекс сон бўлса, у ҳолда $z = \sum_{i=1}^n C_i z^i$ формула ҳақиқий ечимни беради. Ҳақиқатан,

$\lambda_{2j-1} = \mu_{2j-1} + i\nu_{2j-1}$, $C_{2j-1} = C'_{2j-1} + iC''_{2j-1}$, $C_{2j-1}^- = C_{2j} = C'_{2j-1} - iC''_{2j-1}$ бўлса, содда ҳисоблашлар

$$\begin{aligned} & C_{2j-1} t^{\delta} e^{\lambda_{2j-1} t} + C_{2j-1}^- t^{\delta} e^{\bar{\lambda}_{2j-1} t} = \\ & = t^{\delta} e^{\lambda_{2j-1} t} (2C'_{2j-1} \cos \nu_{2j-1} t - 2C''_{2j-1} \sin \nu_{2j-1} t) \end{aligned}$$

эканини кўрсатади. Бу охириги ифода ҳақиқий функция. Демак, (6.1') тенглама учун қўрилатган ҳолда ушбу

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s \sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}} (C_{2j-1} t^{\delta} e^{\lambda_{2j-1} t} + C_{2j-1}^- t^{\delta} e^{\bar{\lambda}_{2j-1} t}) = \\ & = \sum_{j=1}^s \sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}} t^{\delta} e^{\mu_{2j-1} t} (2C'_{2j-1} \cos \nu_{2j-1} t - 2C''_{2j-1} \sin \nu_{2j-1} t) \end{aligned} \quad (6.25)$$

формула ўринли. Энди умумий ҳақиқий ечимни ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} z = & \sum_{j=1}^s \sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}} t^{\delta} e^{\mu_{2j-1} t} (2C'_{2j-1} \cos \nu_{2j-1} t - 2C''_{2j-1} \sin \nu_{2j-1} t) + \\ & + \left\{ f_{k_{2s+1}}(t) e^{\lambda_{2s+1} t} + f_{k_{2s+2}}(t) e^{\lambda_{2s+2} t} + \dots + f_{k_m}(t) e^{\lambda_m t} \right\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

бундай f_{k_q} функция тартиби $k_q - 1$, $q = 2s, \dots, m$ дан юкори бўлмаган ҳақиқий коэффициентли қўлхад.

Бу формулани яна ушбу

$$\begin{aligned} z = & \sum_{j=1}^s \sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}} t^{\delta} e^{\mu_{2j-1} t} [\rho_{2j-1} \cos(\nu_{2j-1} t + \alpha_{2j-1}) + \\ & + \sum_{i=2s+1}^m f_{k_i}(t) e^{\lambda_i t}], \quad \rho_{2s-1} > 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

(6.26) формулада n та ҳақиқий ўзгармас катнашган, чунки ундаги биринчи йигиндида $2k_1 + 2k_3 + \dots + 2k_{2s-1}$ та, ўрта қавс ичида эса $k_{2s+1} + k_{2s+2} + \dots + k_m$ та ихтиёрий ўзгармас бўлиб, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ва $k_1 = k_2$, $k_3 = k_4$, $\dots$, $k_{2s-1} = k_{2s}$ бўлгани учун $2k_1 + 2k_3 + \dots + 2k_{2s-1} + k_{2s+1} + k_{2s+2} + \dots + k_m = n$ бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + z = 0$$

тенгламанинг умумий комплекс ва ҳақиқий ечимлари топилсин.

Характеристик тенглама

$$L(p) = p^2 + 2p + 1 = 0$$

кўринишга эга. Ундан $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$, демак, умумий комплекс ечим: $z = C_1 + (C_2 + C_3 t) e^{-t}$, C_1, C_2, C_3 — комплекс сонлар, чунки $\lambda = -1$ икки қаррали илдиз ва ечимлар системаси:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = t e^{-t}, \quad z_3 = e^{-t}.$$

Умумий ҳақиқий ечим ҳам шунга ўхшаш $z = C_1' + (C_2' + C_3't)e^{-t}$ (C_1', C_2', C_3' ҳақиқий сонлар) кўринишда ёзилади.

2. Ушбу

$$\stackrel{(5)}{z} + 2 \stackrel{(3)}{z} + \dot{z} = 0$$

тенгламанинг умумий комплекс ва ҳақиқий ечимлари топилсин.

Мос характеристик тенглама

$$L(p) = p^3 + 2p^2 + p = 0$$

бўлиб, $L(p) = p(p^2 + 1)^2$ дан унинг илдизлари $p_1 = 0$, $p_2 = i$, $p_3 = -i$. Бунда $p_2 = i$ ва $p_3 = -i$ илдизлар икки қаррали. Энди умумий комплекс ечимни ёзамиз:

$$z = C_1 + (C_2 + C_3t)e^{it} + (C_4 + C_5t)e^{-it}.$$

Умумий ҳақиқий ечим эса (6.26), (6.27) формулага асосан

$$z = C_1 + (C_2 + C_3t)\cos t + (C_4 + C_5t)\sin t$$

ёки

$$z = C_1 + \rho_1 \cos(t + \alpha_1) + \rho_2 \cos(t + \alpha_2), \quad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0$$

кўринишда ёзилади.

6.3. §. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$\stackrel{(n)}{z} + a_1 \stackrel{(n-1)}{z} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z = F(t) \quad (6.28)$$

дифференциал тенгламада $a_1, a_2, \dots, a_n$ ўзгармас коэффицентлар бўлиб, $F(t)$ функция I интервалда аниқланган узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда, биламизки, берилган тенгламанинг ихтиёрий ечими мавжудлигининг максимал интервали шу I интервалдан иборат бўлади. Бу бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топиш усуллари бизга маълум. Агар (6.28) тенгламанинг бирор хусусий ечимини билсак, шу тенгламанинг умумий ечимини ёза оламиз. Ҳақиқатан, тегишли бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини доим топа оламиз, чунки унинг коэффицентлари ўзгармас ва $L(p) = 0$ тенгламанинг илдизларини топа оламиз. Энди 5.10-теоремани қўллаш қолади. Мазкур параграфда (6.28) тенгламанинг ўнг томони, яъни $F(t)$ функция махсус кўринишда бўлганда хусусий ечимни излаш билан шугулланамиз. Аниқроғи, $F(t)$ функция *квазикўпхад* (квазиполином) бўлган ҳолни кўрамиз.

Агар $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ комплекс сонлар, $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ функциялар t га нисбатан кўпхадлар бўлса, у ҳолда ушбу

$$F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t} \quad (6.29)$$

функция *квазикўпхад* дейилар эди (117-бетга қ.).

Энди $F(t)$ квазикўпхад бўлганда

$$L(p)z = F(t) \quad (6.28')$$

тенгламанинг хусусий ечимини $z^*(t)$ десак, бу ечим ушбу

$$L(p)z = f_j(t)e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (6.30)$$

тенгламаларнинг мос хусусий ечимлари $z_1^*(t), z_2^*(t), \dots, z_m^*(t)$ йиғиндисидан иборат, яъни $z^*(t) = \sum_{i=1}^m z_i^*(t)$. Шунинг учун мулоҳазаларни $F(t) = f(t)e^{i\lambda t}$ бўлган ҳолда олиб бориш етарли. Асосий натижа қуйидаги теорема билан берилади.

6.4-теорема. Ушбу

$$L(p)z = f(t)e^{i\lambda t} \quad (6.31)$$

бир жинсли бўлмаган тенгламани кўрайлик, унда $f(t)$ кўпхад t га нисбатан r -тартибли кўпхад, λ — комплекс сон. Агар $L(\lambda) \neq 0$ бўлса, $k=0$ ва $L(\lambda)=0$ бўлса, λ сони k каррали илдиз бўлсин. У ҳолда (6.31) тенгламанинг

$$z = t^k g(t)e^{i\lambda t} \quad (6.32)$$

кўринишида хусусий ечими мавжуд, унда $g(t)$ кўпхад r -тартибли номуаълум коэффициентли кўпхад. Бу $g(t)$ кўпхаднинг коэффициентлари номуаълум коэффициентлар усули билан топилиши мумкин.

Исбот. $f(t)$ ва $g(t)$ кўпхадларни

$$f(t) = a_0 t^r + f^*(t), \quad (6.33)$$

$$f^*(t) = a_1 t^{r-1} + \dots + a_{r-1} t + a_r,$$

$$g(t) = b_0 t^r + g^*(t),$$

$$g^*(t) = b_1 t^{r-1} + \dots + b_{r-1} t + b_r, \quad (6.34)$$

кўринишида ёзамиз. Энди λ сон $L(\lambda)=0$ тенгламанинг k каррали илдизи бўлгани учун $L(p)$ кўпхадни

$$L(p) = M(p)(p-\lambda)^k \quad (6.35)$$

каби ёзиш мумкин. Фаразга кўра $M(\lambda) \neq 0$. Акс ҳолда, λ сони k дан кўпроқ каррали бўлар эди. Агар (6.32) функция (6.31) тенгламанинг ечими бўлса, $L(p)(e^{i\lambda t} t^k g(t)) = e^{i\lambda t} L(p+\lambda) t^k g(t) \equiv e^{i\lambda t} f(t)$ шарт бажарилиши лозим. Бу шартни яна

$$L(p+\lambda) t^k g(t) = f(t) \quad (6.36)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Энди $M(p)$ да p ни $p+\lambda$ га алмаштирсак, $M(p+\lambda)$ кўпхадга эга бўламиз. Равшанки, $M(p+\lambda)|_{p=0} = M(\lambda) \neq 0$. Шунинг учун $M(p+\lambda)$ ни

$$M(p+\lambda) = M(\lambda) + M^*(p)p \quad (6.37)$$

деб ёзамиз. (6.35) да p ни $p+\lambda$ га алмаштирсак,

$$L(p+\lambda) = M(p+\lambda)p^k = M(\lambda)p^k + M^*(p)p^{k+1} \quad (6.38)$$

муносабатга келамиз. (6.33), (6.34), (6.38) лардан фойдаланиб, (6.36) шартни қуйидагича ёзамиз. Аввал (6.36) нинг чап томонини ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} L(p+\lambda) t^k g(t) &= L(p+\lambda) t^k (b_0 t^r + g^*(t)) = \\ &= L(p+\lambda) t^k b_0 t^r + L(p+\lambda) t^k g^*(t) = \\ &= b_0 [M(\lambda) p^k + M^*(p) p^{k+1}] t^{k+r} + L(p+\lambda) t^k g^*(t) = \\ &= b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} + b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r} + L(p+\lambda) t^k g^*(t). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, (6.36) шарт бундай ёзилади:

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} + b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r} + L(p+\lambda) t^k g^*(t) = a_0 t^r + f^*(t) \quad (6.39)$$

Ўнг томонда t^r нинг коэффициентни a_0 . Чап томонда $p^k t^{k+r} = (k+r)(k+r-1)\dots(r+1)t^r$ бўлгани учун тегишли коэффициент $b_0 M(\lambda)(k+r)(k+r-1)\dots(r+1)$ бўлади. Бу коэффициентларни тенглаштириб $b_0 M(\lambda)(k+r)(k+r-1)\dots(r+1) = a_0$ ни, ундан $M(\lambda) \neq 0$ бўлгани учун b_0 ни бир қийматли топамиз, яъни:

$$b_0 = \frac{a_0}{(k+r)(k+r-1)\dots(r+1)M(\lambda)} \quad (6.40)$$

Агар b_0 шу (6.40) формула билан топилди десак, (6.39) муносабат ушбу

$$b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r} + L(p+\lambda) t^k g^*(t) = f^*(t)$$

ёки

$$L(p+\lambda) g^*(t) = f^*(t) - b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r} \quad (6.41)$$

кўриниши олади. Бу тенглиkning ўнг томонида $(r-1)$ -тартибли маълум кўпхад, чап томонида эса $(r-1)$ -тартибли номаълум кўпхад турибди. Шу (6.41) муносабатга яна аввалги (6.36) муносабат учун бажарилган амалларни қўлласак, t^{r-1} нинг олдидаги коэффициентларни тенглаб b_1 ни бир қийматли топамиз. Шунга ўхшаш, $b_2, \dots, b_{r-1}$ ларни ҳам бир қийматли топиш мумкин. Бу мулоҳазалар (6.31) тенгламанинг (6.32) кўринишида ечими борлигини исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу $\ddot{z} + z = 2t^2 - 1$ тенгламанинг хусусий ечими топилсин.

Тенгламанинг ўнг томони иккинчи тартибли кўпхад бўлиб, у квазикўпхаднинг хусусий кўринишидир. Бунда $f(t) = 2t^2 - 1$, $\lambda = 0$. Мос бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $L(p) = p^2 + 1 = 0$. Ушбу $\lambda_1, 2 = \pm i$ илдизларга эга. 6.4-теоремага кўра $k=0$, $\lambda=0$, $r=2$ ва хусусий ечим

$$z = b_0 t^2 + b_1 t + b_2$$

кўринишида изланган лозим (6.36) шарт қуйидагича ёзилади:

$$|(p+\lambda)^2 + 1| (b_0 t^2 + b_1 t + b_2) = 2t^2 - 1$$

ёки

$$(p^2 + 1)(b_0 t^2 + b_1 t + b_2) = 2t^2 - 1$$

ёки

$$2b_0 + b_0 t^2 + b_1 t + b_2 = 2t^2 - 1.$$

Бундан $2b_0 + b_2 = -1$, $b_1 = 0$, $b_0 = 2$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $b_0 = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = -5$ ва хусусий ечим $z = 2t^2 - 5$ функциядан иборат. Берилган тенгламанинг умумий ҳақиқий ечими

$$z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 5$$

кўринишида ёзилади.

2. Ушбу $\ddot{z} - z = 2e^t$ тенгламанинг хусусий ечими топилсин.

Бу тенгламада $F(t) = 2e^t$ бўлиб, $f(t) = 2$, $\lambda = 1$. Мос бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $L(p) = p^2 - 1 = 0$ бўлиб, $\lambda_{1,2} = \pm 1$. 6.4-теоремага кўра $k=1$, $r=0$, $\lambda=1$. Шунинг учун хусусий ечим

$$z = b_0 t e^t, \quad g(t) = b_0$$

кўринишда изланади. Бу ҳолда (6.36) шарт қуйидагича ёзилади:

$$[(p+1)^2 - 1]b_0 t = 2 \text{ ёки } b_0(p^2 + 2p)t = 2 \text{ ёки } 2b_0 = 2.$$

Бундан $b_0 = 1$. Демак, $z = te^t$. Шунинг учун берилган тенгламанинг ҳақиқий умумий ечими

$$z = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + te^t$$

каби ёзилади.

3. Ушбу $\ddot{z} + z = t \cos^2 \frac{t}{2}$ тенгламанинг хусусий ечими топилсин.

Тенгламанинг ўнг томонини ўзгартирамиз:

$$F(t) = t \cos^2 \frac{t}{2} = t \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t \cos t.$$

Аввал $L(p)z = \frac{1}{2} t$ тенгламанинг, сўنгра $L(p)z = \frac{1}{2} t \cos t$ тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз. $F_1(t) = \frac{1}{2} t$ бўлсин. Равшанки, $L(p) = 0$ тенгламанинг ялғизла-
ри $\lambda_{1,2} = \pm i$. 6.4-теоремага кўра $k=0$, $\lambda=0$, $r=1$, $f(t) = \frac{1}{2} t$. Шунинг учун хусусий
ечим

$$z_1 = b_0 t + b_1$$

кўринишда изланади. (6.36) шарт бу ҳолда қуйидагини беради:

$$[(p+0)^2 + 1](b_0 t + b_1) = \frac{1}{2} t.$$

Бундан $b_0 t + b_1 = \frac{1}{2} t$ ёки $b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$. Демак, $z_1 = \frac{1}{2} t$.

Энди $F_2(t) = \frac{1}{2} t \cos t$ бўлсин. Бу ҳолда функциянинг кўринишини Эйлер формула-
сидан фойдаланиб ўзгартирамиз. Маълумки:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Демак, $F_2(t) = \frac{1}{4} t e^{it} + \frac{1}{4} t e^{-it} = F_2'(t) + F_2''(t)$. Агар $z(t)$ функция $L(p)z = F_2'(t)$,

$L(p)z = p^2 + 1$ тенгламанинг ечими бўлса, $z(t)$ ($z(t)$ нинг кўшмаси) функция ҳам

$$L(p)z = F_2''(t)$$

тенгламанинг ечими бўлади. Бу равишан. Шунинг учун бу тенгламалардан биринчисини
кўриш етарли. Шундай қилиб,

$$\ddot{z} + z = \frac{1}{4} t e^{it}$$

тенгламани кўрамиз. Бу ҳолда $r=1$, $k=1$, $\lambda=i$, $f(t) = \frac{1}{4} t$. Демак, 6.4-теоремага
кўра хусусий ечимни

$$z_2' = t(b_0 t + b_1) e^{it}$$

кўринишда излаймиз. (6.36) шарт қуйидаги кўринишини олади:

$$[(p+i)^2 + 1]t(b_0 t + b_1) = \frac{1}{4} t$$

ёки

$$(p^2 + 2pi)(b_0 t^2 + b_1 t) = \frac{1}{4} t$$

Қавсларни очиб чиксак:

$$2b_0 + 4b_0 i t + 2b_1 i = \frac{1}{4} t,$$

бундан

$$b_0 = -\frac{1}{16} i, \quad b_1 = \frac{1}{16}.$$

Шундай қилиб, $z_2' = t \left(-\frac{1}{16} i t + \frac{1}{16} \right) e^{it}$. Равшанки, $L(p)z = F_2'(t)$ тенгламанинг хусусий ечими $z_2'' = \ddot{z}_2 = t \left(\frac{1}{16} i t + \frac{1}{16} e^{-it} \right)$ бўлади. Энди $F_2 = \frac{1}{2} t \cos t$ бўлган ҳолда хусусий ечимни топиш учун z_2' ва z_2'' ларни қўшиб оламиз:

$$\begin{aligned} z_2' + z_2'' &= \frac{1}{16} (t - t^2 i) e^{it} + \frac{1}{16} (t + t^2 i) e^{-it} = \\ &= \frac{1}{16} t (e^{it} + e^{-it}) - \frac{1}{16} t^2 i (e^{it} - e^{-it}) = \\ &= \frac{t}{8} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + \frac{t^2}{8} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{t}{8} \cos t + \frac{t^2}{8} \sin t. \end{aligned}$$

Шундай қилиб:

$$z_2 = \frac{t}{8} \cos t + \frac{t^2}{8} \sin t.$$

Демак, берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$z = z_1 + z_2 = \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} t \cos t + \frac{1}{8} t^2 \sin t,$$

умумий ҳақиқий ечими эса,

$$z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} t \cos t + \frac{1}{8} t^2 \sin t.$$

6.3-э с л а т м а. Агар $F(t)$ функция қуйидаги

$$F(t) = \sin t \cdot \cos 2t \cdot e^{it}$$

кўринишда бўлса, бу функцияни квазикўпхаднинг умумий шаклида ёзамиз:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \cdot \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} e^{it} = \\ &= -\frac{1}{4} i e^{(4+3i)t} - \frac{1}{4} i e^{(4-i)t} + \frac{1}{4} i e^{(4+i)t} + \frac{1}{4} i e^{(4-3i)t}. \end{aligned}$$

Бу мулоҳазалар $L(p)z = F(t)$ тенгламада $F(t)$ функция келтирилган ва шунга ўхшаш кўринишларда бўлганда хусусий ечимни топишга 6.4-теоремани қўллаш имконини беради.

М а ш к. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечими топилин:

1. $\ddot{z} + z = \cos t \cdot e^{it}$;
2. $\ddot{z} - z = \sin t \cdot \cos 2t$;
3. $\ddot{z} - 3\ddot{z} + 3\dot{z} - z = (t^2 + t) \sin t \cdot e^{it}$;
4. $\ddot{z} - z = t \cos te^{it}$.

Биз 6.3- § да (6.28) тенгламанинг хусусий ечимини танлаш усули билан танишдик. Бунда тенгламанинг ўнг томонидаги $F(t)$ функциянинг кўриниши асосий роль ўйнайди. Агар тенгламанинг коэффициентлари хақикий бўлиб, $F(t)$ функция гармоник бўлса, яъни $F(t) = r \cos(\omega t + \alpha)$ бўлса, у ҳолда

$$L(p)x = r \cos(\omega t + \alpha), \quad r \geq 0 \quad (6.42)$$

тенгламанинг хусусий ечимини излаш учун *комплекс амплитудалар* усулини қўллаш мумкин.

Маълумки, ушбу

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (x - \text{хақикий функция}) \quad (6.43)$$

тенглама *гармоник осциллятор тенгламаси* деб аталади ва умумий ечими гармоник функциядан иборат бўлади, яъни:

$$x = r \cos(\omega t + \alpha), \quad r \geq 0, \quad (6.44)$$

Бунда r — тебраниш амплитудаси, α — унинг бошланғич фазаси, ω — ҳоҳ тебраниш частотаси дейилади. Бир секунддаги тебранишлар сони $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. (6.44) функция *гармоник тебраниш* жараёнини ифода-

лайди. Тебраниш жараёнлари техника ва физиканинг, биология ва химиянинг ҳамда бошқа фанларнинг турли бўлимларида муҳим роль ўйнайди. Шунинг учун гармоник жараёнларни чуқурроқ ўрганиш мақсадида комплекс амплитудалар усулининг баёнига ўтамиз.

1. Хақикий гармоник функция (6.44) билан бирга унга мос комплекс гармоник функцияни, яъни ушбу

$$\rho e^{i\omega t} \quad (6.45)$$

функцияни ҳам кўрамиз, унда:

$$\rho = r e^{i\alpha}, \quad r \geq 0. \quad (6.46)$$

Равшанки, $r = |\rho|$, $\rho e^{i\omega t} = r e^{i(\omega t + \alpha)} = r \cos(\omega t + \alpha) + i r \sin(\omega t + \alpha)$, яъни (6.45) нинг хақикий қисми (6.44) функция билан устма-уст тушади. (6.46) комплекс сон *комплекс амплитуда* дейилади.

Энди $L(p)$ кўпхаднинг коэффициентлари хақикий бўлсин. (6.42) тенгламани ечиш учун аввал

$$L(p)z = \rho e^{i\omega t} \quad (6.47)$$

тенгламани ечиш тавсия этилади. Агар $z = x + iy$ шу (6.47) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда x ҳам (6.42) тенгламанинг ечими бўлади. $L(i\omega) \neq 0$ деб фараз этиб, (6.47) тенгламанинг хусусий ечимини комплекс гармоник функция, яъни

$$z = \sigma e^{i\omega t}, \quad \sigma = s e^{i\beta} \quad (6.48)$$

кўринишда излаймиз. Бу функцияни (6.47) тенгламага кўямиз. (6.6) формулага кўра:

$$\sigma L(i\omega) e^{i\omega t} = \rho e^{i\omega t},$$

бундан

$$\sigma = \frac{p}{L(i\omega)} \quad (6.49)$$

Равшанки

$$s = |\sigma| = \frac{|p|}{|L(i\omega)|} = \frac{r}{|L(i\omega)|}.$$

Энди (6.49) га σ ва p нинг ифодаларини қўйсак,

$$se^{i\beta} = \frac{re^{i\alpha}}{L(i\omega)}$$

формулага келамиз. Ундан s ўрнига қийматини қўйиб, сўнгга β ни топиш мумкин. Демак, (6.48) функция тўла аниқланди. Комплекс амплитудалар усули ана шундан иборат. Энди ҳақиқий ечимни, яъни (6.42) тенгламанинг ҳақиқий хусусий ечимини ажратиб олиш учун (6.48) функцияни бундай ёзамиз:

$$z = \sigma e^{i\omega t} = se^{i\beta} e^{i\omega t} = se^{i(\omega t + \beta)} = s \cos(\omega t + \beta) + i s \sin(\omega t + \beta).$$

Бундан кўринадики, (6.42) тенгламанинг хусусий ечими

$$x = \frac{r}{|L(i\omega)|} \cos(\omega t + \beta)$$

кўринишда изланиши лозим экан.

2. Баён этилган усулни ташки гармоник куч таъсиридаги гармоник осцилляторнинг тенгласига татбиқ этамиз. Айтилган осциллятор тенгласи ушбу

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = r \cos(\omega t + \alpha) \quad (6.50)$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламанинг ўрнига тегишли комплекс тенгламани қўрамиз:

$$\ddot{z} + \omega_1^2 z = re^{i(\omega t + \alpha)}. \quad (6.51)$$

а) $\omega \neq \omega_1$. У ҳолда (6.51) тенглама $z = \sigma e^{i\omega t}$ кўринишда хусусий ечимга эга. (6.49) формулага кўра $\sigma = \frac{p}{L(i\omega)} = \frac{re^{i\alpha}}{\omega_1^2 - \omega^2}$, $s = \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}$.

Шунинг учун (6.50) тенгламанинг хусусий ечими

$$x = \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \beta) \quad (6.52)$$

кўринишда ёзилади. Бунда β сон қуйидагича аниқланади. Ушбу

$$\frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} e^{i\beta} = \frac{r}{\omega_1^2 - \omega^2} e^{i\alpha}$$

тенгликдан 1) $\omega_1 > \omega$ бўлса, $\alpha = \beta$ бўлади; 2) $\omega_1 < \omega$ бўлса, $\frac{r}{\omega^2 - \omega_1^2} e^{i\beta} = \frac{r}{\omega_1^2 - \omega^2} e^{i(\alpha + \pi)}$ дан $\beta = \alpha + \pi$ келиб чиқади.

Бу ҳолда (6.50) тенгламанинг умумий ечими

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \beta)$$

каби ёзилади, унда $r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ — мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими.

б) $\omega = \omega_1$. Бу ҳолда 6.4-теоремага кўра хусусий ечимни $z = \sigma_1 t e^{i\omega t}$ (σ_1 — комплекс сон) кўринишда излаш лозим. (6.36) шар $f(t) = r e^{i\alpha}$, $k=1$, $\lambda = i\omega$, $g(t) = \sigma_1$ бўлгани учун қуйидагича ёзилади:

$$[(p + i\omega)^2 + \omega^2] \sigma_1 t = r e^{i\alpha},$$

бундан:

$$\sigma_1 = \frac{r e^{i\alpha}}{2i\omega}.$$

Демак, тегишли хусусий ечим бундай ёзилади:

$$z = \frac{r t e^{i(\omega t + \alpha)}}{2i\omega} = - \frac{r t i e^{i(\omega t + \alpha)}}{2\omega} = \frac{r t}{2\omega} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \times \\ \times e^{i(\omega t + \alpha)} = \frac{r t}{2\omega} e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} = \frac{r t}{2\omega} e^{i(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})}.$$

Бундан (6.50) тенгламанинг $\omega = \omega_1$ бўлганда хусусий ечими келиб чикади, яъни

$$x = \frac{r t}{2\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{r t}{2\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Бу формуладан кўринадики, t вақт ортган сари $\frac{r t}{2\omega}$ амплитуда чексиз ортиб боради. Аммо реал ҳолатларда амплитуда чексиз ортиб бора олмас-да, асбобнинг ёки бошқа бир қурилманинг конструкциясига қараб қўнгилсиз ҳодисалар ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳодиса *резонанс ҳодисаси* дейилади.

6.5-§. ТЕБРАНМА ЭЛЕКТР ЗАНЖИРИ

1.2-§ да кўрилган 3-масала электр занжирига тегишли эди. Унда тўртта икки кутбликлардан ташкил топган ёпиқ электр занжири кўрилиб, занжирда электр токи $I(t)$ нинг ўзгариш қонунини топиш масаласи қўйилган эди. $I(t)$ функция учун ушбу

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dU(t)}{dt} \quad (6.53)$$

иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламага ёғамиз. Бу тенгламада L , R , C лар мусбат ўзгармаслар бўлиб, мос равишда индуктивлик, қаршилик ва сизимни билдиради. $U(t)$ функция эса қучланиш манбаидир.

Дифференциаллаш оператори ёрдамида (6.53) тенгламани ёзамиз:

$$\left(L p^2 + R p + \frac{1}{C} \right) I(t) = p U(t). \quad (6.53')$$

* (6.53') тенгламада индуктивлик L билан оператор $L(p)$ ни фарқ қилиш керак.

Бунда $L(p) = Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}$. Ушбу $z(p) = \frac{L(p)}{p} = Lp + R + \frac{1}{Cp}$ функция *операцион қаршилик*, унга тескари функция, яъни $C(p) = \frac{1}{z(p)} = \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1}$ функция эса *операцион ўтказувчанлик* дейилади.

Агар электр занжирида актив элемент, яъни кучланиш манбаи олиб ташланса, пассив электр занжири ҳосил бўлади ва ток кучининг ўзгаришини текшириш учун ушбу

$$(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})I(t) = 0 \quad (6.54)$$

тенгламага эга бўламиз. Албатта, аввал электр занжирида ток кучи бўлмаган бўлса, бу тенглама учун ечим тривиал, яъни $I(t) \equiv 0$ бўлади. Агар мазкур электр занжирида ток бор деб фараз этилса, у ҳолда вақт ўтиши билан бу токнинг ўзгаришини ўрганишимиз мумкин. Ҳақиқатан, (6.54) тенгламага мос

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0 \quad (6.55)$$

характеристик тенглама илдизларини λ_1, λ_2 дейлик. У ҳолда:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}.$$

Дискриминантни Δ деб белгилаймиз. Уни $\Delta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$ деб ёзса бўлади. Агар $\Delta < 0$ бўлса, (6.54) тенгламанинг ечимлари *тебранма* характерга эга бўлади, $\Delta > 0$ бўлганда эса *апериодик* бўлади.

$\Delta < 0$ бўлган ҳолга мос келган электр занжири *тебранма электр занжири* деб юритилади. Бундай электр занжирида қаршилик бўлмаган ҳол (фақат назарий) айниқса қизикдир. Агар шундай фараз этсак, электр занжири тенгламаси

$$(p^2 + \frac{1}{LC})I(t) = 0 \quad (6.56)$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$I(t) = r_1 \cos(\omega_1 t + \beta), \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

каби ёзилади. Бундан кўринадики, пассив электр занжирида қаршилик бўлмаса, *сўнмас тебранишлар* юз беради. Сўнмас тебранишлар частотаси, яъни 2π секунддаги тебранишлар сони $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ бўлади. Шунинг учун ω_1 миқдор пассив электр занжирининг *хос частотаси* дейилади.

Энди электр занжирида актив элемент бор бўлсин. Тебранма электр занжирида кучланиш манбаи $U(t)$ функция гармоник функция бўлган ҳолни кўрамиз, яъни $U(t) = r \cos \omega t$, $r > 0$ (бунда r — ҳақиқий амплитуда). Комплекс амплитудалар усулини қўллаш учун $U(t) = r e^{i\omega t}$ деймиз. У ҳолда (6.53') тенгламанинг ўнг томони $pU(t) = p(r e^{i\omega t}) = i r \omega e^{i\omega t}$, яъни комплекс амплитудали гармоник функция бўлади. Хусусий ечимни $I(t) = \sigma e^{i\omega t}$ кўринишда излаймиз. Бунда комплекс амплитуда σ қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\sigma = \frac{r}{L(i\omega)} = \frac{i r \omega}{i R \omega + \left(-L \omega^2 + \frac{1}{C} \right)} = \frac{r}{R + i \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)}.$$

Бундан ҳақиқий амплитуда S учун ушбу

$$S = |\sigma| = \frac{r}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2}}$$

ифода келиб чиқади. Агар $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ бўлса, S амплитуда ўзининг максимумига эришади. Бу ҳолда S ва r орасида ушбу $S = \frac{r}{R}$ муносабат бўлади. Бошқа ҳолларда $S < \frac{r}{R}$ бўлади. Бу ҳодиса ҳам *резонанс* деб аталиб, у билан дастлаб аввалги параграфда танишган эдик.

6.6-§. ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. Ўзгармас коэффицентлига келтириладиган чизикли дифференциал тенгламаларнинг барча синфлари маълум эмас. Албатта, тенгламани ўзгармас коэффицентлига келтириш учун шундай алмаштириш бажариш керакки, натижада чизиклилик бузилмай қолсин. Бундай алмаштиришлар, биламизки, ё номаълум функцияни $y = u(x)z$ деб ёки эркин ўзгарувчини $x = \chi(t)$ ($t = \psi(x)$) деб алмаштиришдан иборат бўлиши мумкин. Биз қуйида тенглама ўзгармас коэффицентлига келиши учун зарурий шарт билан танишамиз. Бу шартни чиқариш учун $t = \psi(x)$ алмаштириш бажарамиз. Содда ҳисоблашлар қуйидагича бўлишини кўрсатади:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} \psi'(x),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{d\tau^2} (\psi'(x))^2 + \frac{dy}{d\tau} \psi''(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n y}{d\tau^n} (\psi'(x))^n + \dots + \frac{dy}{d\tau} \psi^{(n)}(x).$$

Топилган ифодаларни ушбу

$L(p)y = g(x)$, $L(p)y = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$ тенгламага қўйсак, $\psi'(x) \neq 0$, $x = \psi^{-1}(\tau)$ бўлганда

$$\frac{d^n y}{d\tau^n} + Q_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d\tau^{n-1}} + \dots + Q_{n-1}(x) \frac{dy}{d\tau} + \frac{a_n(x)}{(\psi'(x))^n} y = g(x)$$

тенгламага эга бўламиз. Унда $Q_1(x)$, $\dots$, $Q_{n-1}(x)$, $a_n(x)$, $g(x)$ функцияларнинг аргументи x ўрнига $x = \psi^{-1}(\tau)$ ифода қўйилиши керак. Агар берилган $L(p)y = g(x)$ тенглама $\tau = \psi(x)$ алмаштириш билан ўзгармас коэффициентлига келиши мумкин бўлса, у ҳолда куйидаги

$$Q_1(x) = \text{const}, Q_2(x) = \text{const}, \dots, Q_{n-1}(x) = \text{const},$$

$$Q_n(x) = \frac{a_n(x)}{(\psi'(x))^n} = A^{-n} = \text{const}$$

муносабатлар ўринали бўлади. Охириги муносабатдан

$$\tau = \psi(x) = A \int \sqrt[n]{a_n(x)} dx \quad (6.57)$$

формула келиб чиқади.

6.5-теорема. Эркин ўзгарувчи x ни $\tau = \psi(x)$, $\psi'(x) \neq 0$ алмаштириш натижасида $L(p)y = g(x)$ тенглама ўзгармас коэффициентлига келиши учун (6.57) формулининг ўринали бўлиши зарур.

Ҳақиқатан, (6.57) формула ўринали бўлганда $Q_n(x) = A^{-n} = \text{const}$ бўлади. Аммо $Q_1(x)$, $\dots$, $Q_{n-1}(x)$ функциялар ўзгармас бўлиши шарт эмас. Баъзи чизикли ўзгарувчи коэффициентли тенгламалар учун бу (6.57) формула билан алмаштириш барча $Q_1(x)$, $\dots$, $Q_{n-1}(x)$, $Q_n(x)$ коэффициентларнинг ўзгармас бўлишининг ҳам зарурий, ҳам етарли шarti бўлади. Бундай тенгламаларга Эйлернинг бир жинсли ҳамда бир жинсли бўлмаган тенгламалари, Чебишев тенгламаси ва бошқалар мисол бўла олади.

Аввал куйидаги

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

Чебишев тенгламасини кўрайлик. Агар $x \neq \pm 1$ бўлса, уни яна бундай

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{n^2}{1-x^2} y = 0$$

ёзиш мумкин. Бунда $a_1(x) = -\frac{x}{1-x^2}$, $a_2(x) = \frac{n^2}{1-x^2}$. Энди (6.57)

формулага кўра

$$\tau = \psi(x) = A \int \sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}} dx = An \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = An \arcsin x + C.$$

Соддалик учун $A=1$, $C=0$ дейлик. Бу ҳолда $\tau=\psi(x)=n \arcsin x$. Иккинчи тартибли чизикли бир жинсли тенглама

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0$$

учун $\tau=\psi(x)$ алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + Q_1(x) \frac{dy}{d\tau} + Q_2(x) y = 0$$

тенглама коэффицентлари қуйидаги

$$Q_1(x) = \frac{\psi''(x) + a_1(x)\psi'(x)}{(\psi'(x))^2}, \quad Q_2(x) = \frac{a_2(x)}{(\psi'(x))^2} \quad (6.58)$$

формула билан ёзилади. Буни бевосита ҳисоблаб чиқиш мумкин. Қўрилатган ҳолда:

$$\psi'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \psi''(x) = -\frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Шунинг учун:

$$Q_1(x) = \frac{\frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}} + \left(-\frac{x}{1-x^2}\right) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{n^2}{1-x^2}} = 0,$$

$$Q_2(x) = \frac{\frac{n^2}{1-x^2}}{\frac{n^2}{1-x^2}} = 1$$

Демак, $\tau=n \arcsin x$ алмаштириш натижасида Чебишев тенгламаси

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + y = 0$$

кўринишга келади. Бу тенгламанинг фундаментал системаси $y_1(\tau) = \cos \tau$, $y_2(\tau) = \sin \tau$ бўлиб, $\tau=n \arcsin x$ бўйича эски эркли ўзгарувчига қайтсак, $y_1(x) = \cos n \arcsin x$, $y_2(x) = \sin n \arcsin x$ бўлади. Амалда кўпроқ $A=-1$, $C=0$ деб олинади. Бунда $\psi(x) = n \arccos x$ келиб чиқади. Шунинг учун фундаментал системани

$$y_1(x) = \cos n \arccos x, \quad y_2(x) = \sin n \arccos x$$

деб ёзиш мумкин. Чебишев тенгламасининг умумий ечими

$$y(x) = C_1 \cos n \arccos x + C_2 \sin n \arccos x$$

каби ёзилади.

Маълумки, $\cos \arccos x = x$ ва $\cos n\varphi$ функция n бутун бўлганда $\cos \varphi$ нинг n -тартибли кўнҳади кўринишида ёзилади. Шунинг учун $\cos n \arccos x$ функция n бутун бўлса, x га нисбатан n -тартибли кўнҳад бўлади. Бу кўнҳад *Чебишев кўнҳади* дейилади ва

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

тарзда белгиланади.

Эйлер тенгламаларига ўтишдан аввал таъкидлаб ўтамизки, номуалум функцияни $y = u(x)z$ алмаштириш натижасида ўзгармас коэффициентлига келадиган тенгламалар учун (6.57) турдаги зарурий шарт мавжуд эмас. Шунинг учун 6.5-теорема натижа бермаганда фақат танлаш йўли билан турли алмаштиришлар бажариб, берилган тенгламани текшириб кўрилади.

Қуйидаги

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \quad x > 0$$

тенглама *Бессель тенгламаси* деб юритилади. Агар $n = \frac{1}{2}$ бўлса,

$y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ алмаштириш бу тенгламани

$$z'' + z = 0$$

кўринишга олиб келади. Унинг фундаментал системаси $z_1 = \cos x$, $z_2 = \sin x$ бўлиб, эски номуалум функцияга қайтганда $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$,

$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ бўлади. Демак, $n = \frac{1}{2}$ бўлганда Бессель тенгламаси ўзгармас коэффициентлига келади ва умумий ечими

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

кўринишда ёзилади.

2. Бу бўлимда ўзгармас коэффициентлига келадиган тенгламаларнинг *Эйлер тенгламаси* деб аталувчи *синфини* кўрамиз.

Ушбу

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \quad x > 0 \quad (6.59)$$

(бунда $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$) n -тартибли чизикли ўзгарувчи коэффициентли махсус тенглама *Эйлернинг бир жинсли тенгламаси* дейилади.

(6.57) формула бўйича (6.59) тенгламани x^n га бўлиб юбориб,

$$\tau = \psi(x) = A \int_x^n \sqrt[n]{a_n} dx = A \sqrt[n]{a_n} \ln x + C$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $C=0$, $A = \frac{1}{n \sqrt[n]{a_n}}$ бўлса, энг содда

$$\tau = \ln x \quad (6.60)$$

алмаштиришга эга бўламиз. (6.60) дан $x = e^\tau$. Агар $x < 0$ бўлса $\tau = \ln|x|$ ва $x = -e^\tau$ деб ёзамиз. Биз $x > 0$ ҳолни кўрамиз.

Эйлернинг бир жинсли тенгламаси $x=e^t$ алмаштириш натижасида ўзгармас коэффициентли тенгламага келади. Ҳақиқатан, аввал $\frac{d^m y}{dx^m}$, $m=1,2, \dots, n$ ҳосилаларни t бўйича олинган ҳосилалар билан ифодалаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

m -тартибли ҳосила учун ушбу

$$\frac{d^m y}{dx^m} = e^{-mt} \left(\frac{d^m y}{dt^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + \alpha_{m-1} \frac{dy}{dt} \right)$$

формула ўринли бўлишини кўрсатиш қийинмас, унда $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ лар ўзгармас. Уни индукция йўли билан исботлайлик. $m=s+1$ учун ўнга формула ўринли бўлса, $m=s+1$ учун ҳам ўринли эканини кўрсатамиз. Равшанки,

$$\frac{d^{s+1} y}{dx^{s+1}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^s y}{dx^s} \right) = \frac{d}{dt} \left[e^{-st} \left(\frac{d^s y}{dt^s} + \alpha_1 \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + \dots + \alpha_{s-1} \frac{dy}{dt} \right) \right] \frac{dt}{dx} = e^{-(s+1)t} \left[\frac{d^{s+1} y}{dt^{s+1}} + (\alpha_1 - s) \frac{d^s y}{dt^s} + \dots + (-1)s\alpha_{s-1} \frac{dy}{dt} \right].$$

Ҳосил бўлган ифода юқоридаги фикрни исботлайди.

Энди ҳар бир $\frac{d^m y}{dx^m}$ ($m=1,2, \dots, n$) ҳосила учун топилган ифодани (6.59) тенгламага қўйсак, тегишли ҳад

$$\begin{aligned} a_{n-m} x^m \frac{d^m y}{dx^m} &= a_{n-m} e^{mt} e^{-mt} \left(\frac{d^m y}{dt^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + \alpha_{m-1} \frac{dy}{dt} \right) = \\ &= a_{n-m} \left(\frac{d^m y}{dt^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + \alpha_{m-1} \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

кўринишда ёзилади. Бундан кўринадикки, натижада биз ўзгармас коэффициентли тенгламага келамиз.

Шундай қилиб, Эйлернинг бир жинсли тенгламаси ўзгармас коэффициентлига келиши учун эркин ўзгарувчини (6.57) формула ёрдамида алмаштириш зарур ва етарли. Ҳосил бўладиган тенгламани

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0 \quad (6.61)$$

($b_1, \dots, b_n$ лар ўзгармас) кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг хусусий ечимлари характеристик тенгламанинг қаррали илдизлари бўлмаса, $e^{mt} = (e^t)^m = x^m$ кўринишда бўлади. m ни топниш учун

$$m^n + b_1 m^{n-1} + \dots + b_{n-1} m + b_n = 0$$

тенгламани ечиш керак. Аммо $b_1, b_2, \dots, b_n$ коэффициентларни топиш анча ҳисоблашни талаб қилади. Бу амалда қулай эмас. Қулай усулни кўрсатайлик.

(6.59) тенгламанинг хусусий ечимини $y = x^k$ кўринишда излаймиз. Ундан ҳосилалар олиб, яъни

$$x^m \frac{d^m}{dx^m} (x^k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)x^k, \quad m \leq k,$$

сўнгра (6.59) га қўйсак, қуйидаги алгебраик тенглама ҳосил бўлади:

$$k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\dots(k-n+2) + \dots + a_{n-2} k(k-1) + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (6.62)$$

Бу k га нисбатан n -тартибли бўлиб, уни *Эйлер тенгламасининг характеристик тенгламаси* дейилади. Агар $x^k = e^{k \ln x}$ эканини ҳисобга олсак, характеристик тенгламанинг илдизларига қараб аввал Эйлер тенгламасининг комплекс ечимини, сўнгра ҳақиқий ечимини ёзишимиз мумкин. Агар фақат умумий ҳақиқий ечим сўралган бўлса, умумий комплекс ечимни ёзиб ўтирмасдан бирданига умумий ҳақиқий ечимни ҳам ёзиш мумкин. Буни 6.5-§ дан биламиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$x^4 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Эйлер тенгламасининг умумий ҳақиқий ечми топилисин.

Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) - 2k + 3 = 0$$

ёки

$$(k+2)(k-1)^2 = 0.$$

Бундан $k_1 = -2$, $k_{2,3} = 1$. Демак, $k=1$ — икки қаррали илдиз.

Берилаган дифференциал тенгламанинг фундаментал системаси:

$$x^{-2}, x, x \ln x (e^{-2t}, e^t, te^t).$$

Шунинг учун умумий ҳақиқий ечим

$$y = C_1 \cdot \frac{1}{x^2} + C_2 x + C_3 x \ln x$$

каби ёзилади.

6.4-э с л а т м а. Қуйидаги

$$(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 (ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} (ax+b) \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

кўринишдаги тенглама ҳам $ax+b=e^t$, $t=\ln(ax+b)$, $ax+b>0$ алмаштириш ёрдамида коэффициентлари ўзгармас тенгламага келтирилади.

6.5-э с л а т м а. Ушбу

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x), \quad x>0 \quad (6.63)$$

тенглама *Эйлернинг бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаси* дейилади. Юқорида баён этилган усул билан, яъни эркин ўзгарувчини $t=\ln x$, $x=e^t$ алмаштириш

ёрдамида бу бир жинсли бўлмаган тенглама ҳам коэффициентлари ўзгармас бир жинсли бўлмаган тенгламага желтирилади. Фарқи шундаки, ўнг томондаги $F(x)$ функция аргументида x ўрнига e^x қўйилади.

2. Ушбу

$$x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x, \quad x > 0$$

тенгламанинг умумий ҳақиқий ечими топилсин.

Мас бир жинсли тенглама

$$x^2 y'' - xy' + 2y = 0$$

каби, характеристик тенглама эса

$$k(k-1) - k + 2 = 0$$

каби ёзилади. Бундан $k^2 - 2k + 2 = 0$ келиб чиқади. Унинг илдизлари $k_{1,2} = 1 \pm i$. Бир жинсли тенгламанинг умумий ҳақиқий ечими:

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x).$$

Энди бир жинсли бўлмаган тенгламани кўрайлик. Унда $F(x) = x \ln x$ бўлиб, $F(e^x) = te^x$ бўлади. Равшанки, хусусий ечимни $y = (at + b)e^x = x(a \ln x + b)$ кўринишда излаш лозим. Тегишли ҳосилаларни ҳисоблаб, берилган тенгламага қўямиз:

$$y' = a \ln x + b + x \cdot \frac{a}{x} = a \ln x + b + a, \quad y'' = \frac{a}{x},$$

$$x^2 \left(\frac{a}{x} \right) - x(a \ln x + b + a) + 2x(a \ln x + b) = x \ln x$$

ёки

$$ax - ax \ln x - (a+b)x + 2ax \ln x + 2bx = x \ln x$$

ёки

$$ax \ln x + bx = x \ln x.$$

Бундан $a=1$, $b=0$ келиб чиқади. Шундай қилиб хусусий ечим $y = x \ln x$ функциядан иборат. Демак, берилган бир жинсли бўлмаган Эйлер тенгламасининг умумий ҳақиқий ечими

$$y = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x) + x \ln x$$

каби ёзилади.

6.6 Э с л а т м а . Юқоридаги 2-мисолда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини ўнг томонга қараб изладик ва топдик.

Қайд қилимизки, агар (6.63) тенгламанинг ўнг томонидаги $F(x)$ функция (6.29) функция каби қўйишдаги

$$F(x) = \sum_{i=1}^m f_i(\ln x) x^{\lambda_i}$$

кўринишда ёзилган квазикўпхаддан иборат бўлса, у ҳолда 6.4-теоремадан фойдаланиб хусусий ечимни излаш мумкин.

ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ЕЧИМЛАРИНИНГ НОЛЛАРИ ҲАҚИДА. ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

7.1-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КЎРИНИШИНИ СОДДАЛАШТИРИШ

Иккинчи тартибли чизикли бир жинсли тенгламаларни

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (7.1)$$

ёки

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (7.1')$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $P(x)$, $Q(x)$, $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз. Маълумки, бу тенгламалар $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $x_0 \in I$ шартли канон-атлантирадиган ягона ечимга эга. Шу ечимнинг хоссаларини чуқурроқ ўрганиш учун кўпинча тенгламани «содалаштириш», аниқроғи, бошқача кўринишда ёзиш қулай бўлади.

Ушбу

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0, \quad (7.2)$$

$p(x) \in C^1(I)$, $q(x) \in C(I)$ тенглама иккинчи тартибли ўзига қўшма дифференциал тенглама дейилади.

7.1- л е м м а . Ҳар қандай иккинчи тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламани x нинг бирор $\mu(x)$, $x \in I$ функциясига кўпайтириш йўли билан ўзига қўшма кўринишга келтириш мумкин.

И с б о т . (7.2) тенгламада ҳосилани очиб ёзсак:

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Унда y' олдидаги коэффициент y'' олдидаги коэффициентнинг ҳосиласидан иборат. Бу ўзига қўшма тенгламаларнинг ўзига хос хоссасидир. Биз шундан фойдаланамиз.

(7.1') тенгламанинг чап ва ўнг томонини мос равишда I интервалда узлуксиз дифференциалланувчи бирор $\mu(x)$ функцияга кўпайтирамиз:

$$\mu(x)a_0(x)y'' + \mu(x)a_1(x)y' + \mu(x)a_2(x)y = 0.$$

Ҳосил бўлган тенглама ўзига қўшма бўлиши учун

$$\frac{d}{dx} (\mu(x)a_0(x)) = \mu(x)a_1(x), \quad x \in I$$

айният ўринли бўлиши зарур ва етарли. Бу равшан. Топилган айният $\mu(x)$ функцияга нисбатан биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламадан иборат. Уни интеграллаймиз. Унинг учун тенгламани

$$a_0(x) \frac{d\mu}{dx} + a_0'(x)\mu = \mu a_1(x)$$

ёки

$$a_0(x) \frac{d\mu}{dx} = (a_1(x) - a'_0(x)) \mu$$

каби ёзамиз ($a_0(x) \neq 0, x \in I$). У ҳолда биз ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эга бўламиз. Интеграллаш натижасида

$$\mu(x) = \frac{1}{a_0(x)} e^{\int_{a_0(x)}^{a_1(x)} dx} \quad (7.3)$$

функцняни топамиз. Буни тегишли тенгламага қўйсак,

$$\frac{d}{dx} \left(e^{\int_{a_0(x)}^{a_1(x)} dx} \frac{dy}{dx} \right) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int_{a_0(x)}^{a_1(x)} dx} y = 0$$

муносабат ҳосил бўлади. (7.2) тенглама такқослаш куйидагича бўлишини кўрсатади:

$$p(x) = e^{\int_{a_0(x)}^{a_1(x)} dx} > 0, \quad q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int_{a_0(x)}^{a_1(x)} dx}.$$

Лемма исбот бўлди.

7.2- лемма. Эркин ўзгарувчини алмаштириш усули билан ихтиёрий иккинчи тартибли чизикли бир жинсли тенгламани ушбу

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (7.4)$$

кўринишга келтириш мумкин, бунда $Q(x) \in C(I)$.

Исбот. 7.1- леммага кўра ихтиёрий иккинчи тартибли чизикли бир жинсли тенглама (7.2) кўринишга келтирилган деб қарашимиз мумкин. Энди (7.2) да $p(x) > 0, x \in I$ бўлгани учун

$$d\xi = \frac{dx}{p(x)}, \quad \text{ёки} \quad \xi = \int \frac{dx}{p(x)}$$

алмаштиришни бажарамиз. Бу алмаштириш формуласидан

$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p(x)} > 0$ бўлгани учун ξ ўзгарувчи x нинг монотон ўсувчи

функциясиدير. Бундан чиқадики, x ҳам ξ нинг узлуксиз ва дифференциалланувчи функцияси сифатида I интервалга мос келган

I_ξ интервалда аниқланади. Уни $x = \chi(\xi)$ десак, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{dy}{d\xi}$ бўлади. Равшанки:

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(p(x) \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{1}{p(x)} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{d\xi} \right).$$

Шунинг учун (7.2) тенгламани

$$\frac{1}{p(x)} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{d\xi} \right) + q(x)y = 0 \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} + Q(\xi)y = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $Q(\xi) = p(\chi(\xi))q(\chi(\xi))$. Аввалги (7.1') тенглама коэффициентлари орқали куйидагини ёзамиз:

$$d\xi = e^{\int_{a_0(x)}^{a_1(x)} dx}, \quad Q(\xi) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{2 \int_{a_0(x)}^{a_1(x)} dx} \Big|_{x=\chi(\xi)}.$$

Лемма исбот бўлди.

7.3- л е м м а . Номаълум функцияни чизиқли алмаштириш усули билан ихтиёрый иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани (7.4) кўринишга келтириш мумкин.

И с б о т . (7.1) тенгламада

$$y = u(x)z \quad (7.5)$$

алмаштиришни бажарамиз. Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблайлик:

$$y' = u(x)z' + u'(x)z, \quad y'' = u(x)z'' + 2u'(x)z' + u''(x)z.$$

Топилган ифодаларни (7.1) тенгламага қўямиз:

$$u(x)z'' + (2u'(x) + P(x)u(x))z' + (u''(x)P(x)u'(x) + Q(x)u(x))z = 0.$$

Энди z' олдидagi коэффициентни нолга тенглаштириб, ушбу

$$2u' + P(x)u = 0$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаб, ушбу

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx}$$

функцияни топамиз. Содда ҳисоблашлар

$$u'(x) = -\frac{1}{2} P(x) e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx},$$

$$u''(x) = \left(\frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) \right) e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx}$$

бўлишини кўрсатади. Энди бу ифодаларни z га нисбатан тенгламага қўйиб, соддалаштирсак

$$z'' + \left(-\frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) + Q(x) \right) z = 0 \quad (7.6)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу (7.4) кўринишдаги тенгламадир.

(7.6) тенгламада $I(x) = -\frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) + Q(x)$ функция (7.1)

тенгламанинг инварианти дейилади. Лемма исбот бўлди.

7.1- э с л а т м а . (7.5) алмаштириш ёрдамида n -тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламаларни янги номаълум функцияга нисбатан $(n-1)$ тартибли ҳосила қатнашмайдиган n -тартибли чизиқли бир жинсли тенгламага келтириш мумкин.

$$xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$$

тенгламани ўзига қўшма тенгламага келтирилсин.

Бу ҳолда $a_0(x) = x$, $a_1(x) = \frac{1}{2}$, $a_2(x) = -1$, $-\infty < x < \infty$.

Биз тенгламанинг коэффициентларини x нинг $x > 0$ қийматларида кўрамиз. (7.3) формулага кўра $x > 0$ бўлганда

$$\mu(x) = \frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{2x} dx} = \frac{1}{x} e^{\ln \sqrt{x}} + \ln C = \frac{C \sqrt{x}}{x} = \frac{C}{\sqrt{x}}. \text{ Бунда соддалик учун } C=1 \text{ десак,}$$

$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ бўлади. Берилган тенгламанинг чап ва ўнг томонларини шу

$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функцияга кўпайтурсак,

$$\sqrt{x} y'' + \frac{1}{2\sqrt{x}} y' - \frac{1}{\sqrt{x}} y = 0 \text{ ёки } (\sqrt{x} y')' - \frac{1}{\sqrt{x}} y = 0$$

тенгламага келамиз. Энди тенгламани (7.4) кўринишга келтирайлик. Унинг учун

$$p(x) = \sqrt{x}, \quad q(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ бўлганидан } d\xi = \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ ёки } \xi = 2\sqrt{x} \text{ алмаштиришни бажарамиз. Равшанки:}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{2}{\xi}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{2}{\xi} \frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{2}{\xi^2} \frac{dy}{d\xi} \right) \frac{2}{\xi}. \end{aligned}$$

Бу ифодаларни тенгламага қўйсак, $\frac{d^2y}{d\xi^2} - y = 0$ тенгламага келамиз. Унинг умумий

ҳақиқий ечими $y = C_1 e^{\xi} + C_2 e^{-\xi}$ ёки аввалги эркин ўзгарувчига қайтсак $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$, $x > 0$ кўринишда ёзилади.

Кўрилган мисолда тенгламани икки марта ўзгартириш уни квадратураларда интегралланувчи тенгламага олиб келди. Аммо буни аввалдан билиш қийин.

7.2-§. ТЕБРАНУВЧИ ВА ТЕБРАНМАС ЕЧИМЛАР

7.1-таъриф. Агар оддий дифференциал тенгламанинг I интервалда аниқланган тривиалмас ечими шу интервалда биттадан ортиқ нолга эга бўлмаса, y ҳолда бу ечим I интервалда тебранмас ечим дейилади, акс ҳолда тегинчи ечим тебранувчи ечим дейилади.

Мисол сифатида аввал гармоник осциллятор тенгламаси $y'' + \omega^2 y = 0$ ни кўрайлик ((6.43) га қаранг). Бу тенгламанинг ихтиёрий ечими $y = r \cos(\omega x + \alpha)$ ($r \geq 0$) ((6.44) га қаранг) билан берилади. $\cos(\omega x + \alpha) = 0$ тригонометрик тенгламанинг барча ечимлари $\omega x_k + \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k бутун) ёки $x_k = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega}$ формула билан

ёзилади. Бундан $x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\omega}$. Демак, гармоник функциянинг ноллари ўзаро тенг узоклашган бўлиб, ихтиёрий кетма-кет келган ноллари

орасидаги масофа $\frac{\pi}{\omega}$ га тенг. Шунинг ҳам айтиш керакки, гармоник функция ноллари чексиз тўплами, аниқроғи, санокли ^{*)} тўплами ташкил этади. Узунлиги $\frac{\pi}{\omega}$ дан ортик бўлган интервалда ечимнинг камида битта ноли, узунлиги $\frac{\pi}{\omega}$ дан кам бўлган интервалда эса (ошиб борса) битта ноли, узунлиги $\frac{2\pi}{\omega}$ дан ортик бўлган интервалда камида 2 та ноли бор ва ҳ. к.

Агар гармоник осциллятор тенгламасининг $r_1 < x < r_2$, $r_2 - r_1 < \frac{\pi}{\omega}$ интервалда кўрилса, унинг ечими шу интервалда тебранмас бўлади. $r_1 < x < r_2$, $r_2 - r_1 \geq \frac{2\pi}{\omega}$ интервалда эса ечим тебранувчи бўлади.

Энди $y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \geq 0$ тенгламани олайлик. Унинг умумий ҳақиқий ечими $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ (C_1, C_2 — ҳақиқий сонлар) каби ёзилади. Бу ечим $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган бўлиб, шу интервалда биттадан ортик нолга эга эмас. Бунда тривиалмас ечимлар, яъни $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ бўлган ҳол назарда тутилади. Агар $\omega > 0$, $C_1 \cdot C_2 < 0$ бўлса, $C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} = 0$ тенглама ушбу $x = \frac{1}{2\omega} \ln \left| -\frac{C_2}{C_1} \right|$ ечимга эга бўлади. Акс ҳолда кўрсатилган

тенглама ечимга эга эмас. Шундай қилиб, кўрилатган дифференциал тенгламанинг ихтиёрий тривиалмас ечими тебранмас ечим бўлади.

Юқорида кўрилган иккита дифференциал тенгламани битта $y'' + qy = 0$, $q = \text{const}$ тенглама шаклида ёзсак $q \leq 0$ бўлса, тенгламанинг тривиалмас ечимлари ихтиёрий интервалда тебранмас бўлиб, $q > 0$ бўлганда етарли катта интервалда тебранувчи бўлади. Бу мулоҳазаларни $y'' + Q(x)y = 0$ тенгламага татбиқ этиб, умумлаштирамиз ((7.4) га қаранг).

7.1-теорема. Агар x нинг I интервалдан олинган барча қийматларида $Q(x) \leq 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, y ҳолда (7.4) тенглама ечимлари шу интервалда тебранмас бўлади.

Исб.т. (7.4) тенгламанинг бирор $y = \varphi(x)$ ечими I интервалда камида иккита нолга эга бўлсин дейлик. $\varphi(x)$ функциянинг кетма-кет келган ноллари $x_0 \in I$, $x_1 \in I$, $x_0 < x_1$ бўлсин. Демак, $\varphi(x) \neq 0$, $x_0 < x < x_1$. Шунинг айтиб ўтамизки, тривиалмас $y = \varphi(x)$ ечимнинг ноллари яққаланган бўлади. Бошқача айтганда, бу ечимнинг ҳар бир x^* ноли шундай $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ интервалга эгаки, бу интервалда ечимнинг бошқа ноллари бўлмайди. Акс ҳолда x^* нуктада $\varphi(x^*) = 0$ бўлиб, x^* нукта нолларнинг қуюқланиш (лимит) нуктаси бўлар эди. Бунда ушбу

^{*)} Агар бирор A тўпланининг элементларига натурал сонлар тўплами N нинг элементлари ўзаро бир қийматли мос келтирилиши мумкин бўлса, A тўплам санокли тўплам дейилади.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \quad \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x^*)}{x_n - x^*} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x^*)}{x_n - x^*} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x^* + h) - \varphi(x^*)}{h} = \varphi'(x^*) = 0 \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x^*) = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0)$$

муносабатларга эга бўламиз. Демак, (7.4) тенгламанинг $y = \varphi(x)$ ечими $\varphi(x^*) = 0$, $\varphi'(x^*) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантиради ва шунинг учун I интервалда $\varphi(x) \equiv 0$ бўлади. Бу $\varphi(x) \neq 0$, $x \in I$ деган фаразга зид.

Энди $\varphi(x) > 0$, $x_0 < x < x_1$ дейлик ($\varphi(x) < 0$, $x_0 < x < x_1$ ҳол шунга ўхшаш кўрилади). $\varphi(x_0) = 0$ бўлгани учун $\varphi'(x_0) > 0$ бўлади. (7.4) тенгламада $Q(x) \leq 0$, $x \in I$ ва демак,

$$Q(x) \leq 0, \quad x_0 < x < x_1, \quad \varphi'(x) = -Q(x)\varphi(x) \geq 0, \quad x_0 < x < x_1.$$

Бундан $\varphi'(x)$ функция $x_0 < x < x_1$ интервалда камаймайдиган функция экани келиб чиқади. Чекли айирмалар ҳақидаги теоремага кўра $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x_1 - x_0) = \varphi'(x_0)(x_1 - x_0) > 0$, яъни $\varphi(x_1) > 0$. Бу тенгсизлик x_1 нуқта $\varphi(x)$ функциянинг ноли эканига зид. Теорема исбот бўлди.

Мисол сифатида ушбу $y'' - xy = 0$ Эйри тенгламасини олайлик. Унда $Q(x) = -x$ бўлиб, $0 \leq x < +\infty$ интервалда унинг барча ечимлари тебранмас бўлади.

7.2-теорема (Штурм теоремаси) *Агар x_0 ва x_1 нуқталар бирор иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенглама ечимининг кетма-кет келган иккита ноли бўлса, у ҳолда бу ечим билан чизикли эркин ихтиёрий бошқа ечимнинг шу x_0 ва x_1 ноллар орасида аниқ битта ноли бўлади.*

Исбот. x_0 ва x_1 нолларга эга бўлган ечимни $\varphi_1(x)$, бу $\varphi_1(x)$ ечим билан чизикли эркин ечимни $\varphi_2(x)$ деймиз. Аввал $\varphi_2(x)$ ечим x_0 ва x_1 лар орасида нолга эга эмас деб фараз қиламиз, яъни $\varphi_2(x) \neq 0$, $x \in (x_0, x_1)$. Маълумки, $\varphi_1(x_0) = \varphi_1(x_1) = 0$. Шартга кўра $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар чизикли эркин бўлгани учун $\varphi_2(x_0) \neq 0$, $\varphi_2(x_1) \neq 0$. $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функцияларнинг вронскианини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = W(x)$$

ёки $\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = W(x)$, $W(x) \neq 0$. Бу тенгликнинг икки томонини $\varphi_2^2(x)$ га бўламиз:

$$\frac{\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)} = \frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)}$$

ёки

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \right) = \frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)}.$$

Ундан x_0 дан x_1 гача интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$-\left(\frac{q_1(x)}{q_2(x)}\right)\bigg|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{q_2^2} dx.$$

Бу тенгликнинг чап томони $\varphi_1(x_0) = \varphi_1(x_1) = 0$, $\varphi_2(x) \neq 0$, $x \in [x_0, x_1]$ бўлгани учун нолга тенг, аммо ўнг томони нолдан фаркли. Ҳақиқатан, $W(x) \neq 0$ ва демак, (x_0, x_1) интервалда ўз ишорасини саклайди, шунингдек $\varphi_2^2(x) > 0$: $x \in [x_0, x_1]$. Шундай қилиб, зиддиятга келдик. Бу эса (x_0, x_1) интервалда $\varphi_2(x)$ функция камида битта нолга эга деган натижани беради. Энди шу функция (x_0, x_1) да иккита нолга эга бўла олмаслигини исбот этамиз. Шу мақсадда (x_0, x_1) интервалда $\varphi_2(x)$ функция иккита нолга эга бўлсин дейлик, яъни $\varphi_2(t_0) = \varphi_2(t_1) = 0$, $x_0 < t_0 < t_1 < x_1$. Теореманинг исбот этилган биринчи қисмига кўра $\varphi_2(x)$ билан чизикли эркин $\varphi_1(x)$ ечимнинг (t_0, t_1) интервалда ва демак (x_0, x_1) интервалда камида битта ноли бўлиши лозим. Бу зиддият, чунки $\varphi_1(x)$ учун x_0 ва x_1 лар иккита кетма-кет келган ноллар бўлиб, (x_0, x_1) интервалда $\varphi_1(x) \neq 0$. Худди шу сабабли $\varphi_2(x)$ функция (x_0, x_1) интервалда иккитадан ортиқ нолга ҳам эга бўла олмайди. Теорема исбот бўлди.

7.1 натижа. Агар бирор I интервалда чизикли бир жинсли тенгламанинг бирор ечими иккитадан ортиқ нолга эга бўлса, у ҳолда тегишли тенгламанинг барча ечимлари шу I интервалда камида иккита нолга эга бўлади, демак, барча ечимлар шу интервалда тебранувчи бўлади.

7.2 теорема ва 7.1 натижа ушбу $y'' + \omega^2 y = 0$ тенгламанинг ечимларида осонгина текширилади.

Исбот. Бир жинсли тенгламанинг тривиалмас ечими $y_1(x)$ I интервалда иккитадан ортиқ нолга эга бўлсин. Масалан, $y_1(x)$ ечимнинг ноллари учта x_0, x_1 ва x_2 бўлсин, яъни $y_1(x_0) = y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$ ва $x_0 \in I$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$. Энди бир жинсли тенгламанинг тривиалмас ва $y_1(x)$ дан фаркли ихтиёрий ечимини $y_2(x)$ дейлик. Агар $y_2(x)$ ечим $y_1(x)$ ечим билан чизикли боғлиқ бўлса, у ҳолда $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $x \in I$ бўлади. Аммо $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимлар тривиалмас ечим бўлгани учун $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, чунки агар $\alpha_1 = 0$ бўлса, $\alpha_2 y_2(x) \equiv 0$, $x \in I$ айниятдан $\alpha_2 = 0$ келиб чиқади; шунга ўхшаш, агар $\alpha_2 = 0$ бўлса, $\alpha_1 y_1(x) \equiv 0$, $x \in I$ айниятдан $\alpha_1 = 0$ келиб чиқади. Бу эса $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ муносабатга зид. Шундай

қилиб, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$. Шунинг учун $y_2(x) \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_1(x)$, $x \in I$. Бун

дан $y_2(x)$ ечимнинг ноллари $y_1(x)$ ечимнинг ноллари билан устма-уст тушиши келиб чиқади. Демак, $y_1(x)$ тебранувчи бўлганидан $y_2(x)$ ечим ҳам тебранувчи бўлади.

Энди $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимлар чизикли эркин бўлсин. У ҳолда Штурм теоремасига кўра $y_2(x)$ ечим (x_0, x_1) ва (x_1, x_2) интервалларда биттадан нолга, яъни $y_2(x)$ ечим I интервалда иккита нолга эга бўлади. Демак, $y_2(x)$ ечим I интервалда тебранувчи. Агар $y_1(x)$ ечимнинг ноллари учтадан кўп бўлса, у ҳолда шу ечимдан фаркли

ихтиёрий тривиалмас ечим I интервалда иккитадан кўп нолга эга бўлади. 7.1- натижа исбот бўлди.

7.3- теорема (такқослаш теоремаси). *Агар ушбу иккита*

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q_1(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (7.7)$$

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q_2(x)y = 0, \quad p(x) > 0, \quad x \in I \quad (7.8)$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб, I интервалда $q_1(x) \leq q_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (7.7) тенгламанинг бирор ечимининг кетма-кет келган иккита ноли орасида (7.8) тенглама ихтиёрий ечимининг камида битта ноли ётади.

Исбот. (7.7) тенгламанинг бирор $y = \varphi_1(x)$, $x \in I$ ечимининг кетма-кет келган ноллари $x_0 \in I$, $x_1 \in I$, $x_0 < x_1$ бўлсин. Шартга кўра, $[x_0, x_1] \subset I$ ораликда ҳам $q_1(x) \leq q_2(x)$ тенгсизлик бажарилади. Фараз этайлик, $\varphi_2(x)$, $x \in I$ функция (7.8) тенгламанинг $[x_0, x_1]$ ораликда бирорта ҳам ноли бўлмаган ечими бўлсин, яъни $\varphi_2(x) \neq 0$, $x \in [x_0, x_1]$. Аниқлик учун $\varphi_2(x) > 0$, $x \in [x_0, x_1]$, $\varphi_1(x) \geq 0$, $x \in [x_0, x_1]$ дейлик (бошқа ҳоллар шунга ўхшаш кўрилади). $\varphi_1(x_0) = \varphi_1(x_1) = 0$, $\varphi_1(x) \geq 0$, $x \in [x_0, x_1]$ бўлгани учун $\varphi_1'(x_0) > 0$, $\varphi_1'(x_1) < 0$ тенгсизликлар ўринли. Акс ҳолда, яъни агар $\varphi_1'(x_0) = 0$ бўлса, $\varphi_1(x_0) = 0$ бўлганидан $\varphi_1(x) \equiv 0$ га эга бўлар эдик.

Энди (7.7) ва (7.8) тенгламаларда мос равишда $y \equiv \varphi_1(x)$ ва $y \equiv \varphi_2(x)$ деймиз. Ҳосил бўлган айниятларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда $\varphi_2(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларга кўпайтириб, иккинчисидан биринчисини айирамиз:

$$[q_2(x) - q_1(x)]\varphi_1(x)\varphi_2(x) = \varphi_2(x) \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \right] - \varphi_1(x) \times \\ \times \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \left(\varphi_2(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \varphi_1(x) \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \right) \right]. \quad (7.9)$$

Ҳосил бўлган тенгликнинг икки томонини x_0 дан x_1 гача интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^{x_1} [q_2(x) - q_1(x)]\varphi_1(x)\varphi_2(x) dx = \\ = p(x_1)\varphi_2(x_1) \frac{d\varphi_1(x_1)}{dx} - p(x_0)\varphi_2(x_0) \frac{d\varphi_1(x_0)}{dx}. \quad (7.10)$$

Бу тенгликнинг чап томони манфий эмас, аммо ўнг томони манфий. Зиддиятга келдик. Теорема исбот бўлди.

Шуни айтиб ўтамизки, исбот этилган теоремадан аввалги Штурм теоремасини келтириб чиқариш мумкин. Бунинг учун (7.7) тенгламанинг ечими шу ечим билан чизиқли эркли бўлган бошқа ечим билан такқосланиши етарлидир.

М а ш к. Таккослаш теоремасини тенглама (7.4) кўринишида ёзилганда ҳам исбот этинг (унда $Q_1(x) \leq Q_2(x)$, $y'' + Q_1(x)y = 0$, $y'' + Q_2(x)y = 0$).

7.2- н а т и ж а. Агар (7.7) ва (7.8) тенгламалар учун мос равишда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ ечимлар умумий x_0 нолга эга бўлиб, $\varphi_1(x)$ ечимнинг x_0 дан кейинги навбатдаги ноли x_1 , $x_0 \leq x_1$ орасидаги интервалда $q_2(x) > q_1(x)$ тенгсизлик ўринли бўладиган нуқталар мавжуд бўлиб, қолган нуқталарда $q_2(x) \geq q_1(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\varphi_2(x)$ ечимнинг навбатдаги ноли x_1 нуқтадан чапда жойлашган бўлади.

И с б о т. $\varphi_2(x)$ нинг x_0 дан ўнгдаги навбатдаги нолини x^* дейлик. Агар $x^* = x_1$ бўлсин десак, (7.10) формулада зиддият ҳосил бўлади, чунки $\varphi_2(x^*) = 0$, $\varphi_2(x_0) = 0$ дан формуланинг ўнг томони нолга тенг, чап томони эса мусбат бўлади. Энди $x^* > x_1$ бўлсин. Бу ҳолда $\varphi_2(x^*) = 0$, $\varphi_2(x_1) > 0$ ва (7.10) нинг ўнг томони манфий, чап томони эса мусбат сондан иборат. Яна зиддиятга эгамиз. Натижа исбот бўлди.

7.4- теорема (Сонли таккослаш теоремаси). Агар бирор I интервалда $q_1(x) < q_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар шу интервалда аниқланган ва мос равишда (7.7), (7.8) тенгламаларнинг бир хил бошланғич шартни, яъни

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0, \quad \varphi'_1(x_0) = \varphi'_2(x_0) = y'_0 \quad (7.11)$$

муносабатларни қаноатлантирадиган ечимлари бўлса, у ҳолда x_0 дан ўнгда $\varphi_2(x)$ ечим нолга айланмайдиган интервалда ушбу

$$|\varphi_1(x)| > |\varphi_2(x)| \quad (7.12)$$

тенгсизлик ўринли. Шунингдек, $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ функция $x = x_0$ бўлганда қабул қиладиган I қийматидан бошлаб ўсади.

И с б о т. (7.11) бошланғич шартга кўра

$$p(x_0) \left[\varphi_2(x_0) \frac{d\varphi_1(x_0)}{dx} - \varphi_1(x_0) \frac{d\varphi_2(x_0)}{dx} \right] = 0.$$

Энди (7.9) айниятни x_0 дан x гача ($x > x_0$) интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} p(x) \left[\varphi_2(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \varphi_1(x) \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \right] = \\ = \int_{x_0}^x [q_2(x) - q_1(x)] \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Бу муносабатнинг ўнг томони мусбатлигини кўрсатамиз. (7.11) шартга кўра $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ нолга тенг бўла олмайди ва x_0 билан $x(x > x_0)$ орасида ишорасини ўзгартирмайди. $x = x_0$ нуктада $\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0) = y_0 \cdot y'_0 = y_0^2$. Бундан, агар $y_0 \neq 0$ бўлса, $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$ функция $x = x_0$ нуқтадан ўнгдаги етарли кичик атрофда мусбат бўлиши келиб чиқади. Агар $y_0 = 0$ бўлса, $\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0) = 0$ бўлади. Бу ҳолда албатта $y'_0 \neq 0$ ва x_0 дан ўнгдаги бирор етарли кичик атрофда яна $\varphi_1(x)\varphi_2(x) > 0$ эканини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, $x > x_0$ бўлган-

да ушбу $\frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)}{(x-x_0)^2}$ функцияни олайлик. Бу функциянинг $x \rightarrow x_0 + 0$ да лимитини ҳисоблаймиз ($\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)}{(x-x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\varphi_1(x)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\varphi_2(x)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\varphi_2(x) - \varphi_2(x_0)}{x-x_0} = \varphi_1'(x_0) \cdot \varphi_2'(x_0) = (y_0')^2 > 0. \end{aligned}$$

Бундан юқоридаги тасдиқнинг исботи келиб чиқади.

Шундай қилиб, (7.13) муносабатнинг ўнг томони x_0 нинг бирор ўнг атрофида мусбат. Шунинг учун x_0 дан ўнгда $p(x) > 0$ бўлгани учун:

$$\varphi_2(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \varphi_1(x) \frac{d\varphi_2(x)}{dx} > 0 \quad \text{ёки} \quad \varphi_2^2(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \right) > 0.$$

Бундан $\varphi_2(x) \neq 0$, $x > x_0$ бўлгани учун $\frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \right) > 0$ экани, яъни

$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ функциянинг $x > x_0$ да ўсувчи экани келиб чиқади.

Равшанки, $y_0 \neq 0$ бўлганда $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x)} = 1$ ва $y_0 = 0$ бўлганда ж

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)} = \frac{y_0'}{y_0'} = 1.$$

Демак, агар $x > x_0$ бўлса, $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} > 1$. Бундан (7.12) тенгликнинг исботи келиб чиқади.

7.2-э с л а т м а . Агар x_0 дан ўнгда бирор интервалда $q_1(x)$ ва $q_2(x)$ функциялар айланиб юрган тенг бўлмаган, $q_2(x) > q_1(x)$ тенгсизлигини ундан кучсизроқ $q_2(x) \geq q_1(x)$ тенгсизлик билан алмаштириш мумкин.

7.3-э с л а т м а . 7.4-теоремадан 7.2 натижанинг исботи кўриниб туради.

7.5-теорема*. Агар дифференциал тенглама

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (7.14)$$

кўринишда берилган бўлиб, $a_1(x)$, $a_2(x)$ коэффицентлар бирор $r_1 \leq x \leq r_2$ оралиқда узлуксиз ва

$$|a_1(x)| \leq M_1, \quad |a_2(x)| \leq M_2 \quad (7.15)$$

бўлса, y ҳолда (7.14) тенгламанинг ҳар бир тривиалмас ечимининг кетма-кет ихтиёрий иккита ноли орасидаги масофа h учун

* Мазкур теорема муаллифларга тегишли. Бу теоремадан $\sigma = 6$ бўлганда Валле Пуссен теоремаси ([15], 122-бетга қаранг) келиб чиқади.

$$h \geq \sqrt{\frac{\sigma^2 M_1^2 + 16\sigma M_2}{4M_2}}, \text{ агар } M_2 > 0, \\ 0 < \sigma \leq \pi^2 \text{ бўлса,} \quad (7.16)$$

$$h \geq \frac{2}{M_1}, \text{ агар } M_2 = 0 \text{ бўлса,} \quad (7.16')$$

$$h \geq \sqrt{\frac{\sigma}{M_2}}, \text{ агар } M_1 = 0 \text{ бўлса,} \quad (7.16'')$$

$$h = +\infty, \text{ агар } M_1 = 0, M_2 = 0 \text{ бўлса.} \quad (7.16''')$$

Исбот. Аввал $M_1 = 0, M_2 = 0$ ҳолни кўрайлик. Бунда биз (7.14) тенглама ўрнига $y'' = 0$ га эгамиз. Унинг умумий ечими $y = C_1 x + C_2$ (C_1, C_2 — ўзгармаслар) каби ёзилади. Агар $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ бўлса, бу ечим тривиалмас. Агар $C_1 = 0$ ва $C_2 \neq 0$ бўлса, $y_2 = C_2$ ечим битта ҳам нолга эга эмас. Агар $C_1 \neq 0, (C_2 —$ ихтиёрий) бўлса, у ҳолда $y = C_1 x + C_2$ ечим горизонтал бўлмаган тўғри чизикни тасвирлайди. Бу чизик фақат битта нуқтада абсцисса ўқини кесиб ўтади, яъни тегишли чизикли функция фақат битта нолга эга. Ҳар икки кўрилган ҳолда $h = +\infty$ деб ёзинишга келишамиз.

(7.16), (7.16') ва (7.16'') тенгсизликлар h учун қуйи баҳони беради. Уларни исботлаш учун ёрдамчи мулоҳазалар юритамиз. Бошқача айтганда, $[0, h]$ ораликда узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи $\varphi(x)$ функция учун қуйидаги

$$h\varphi(x) = \int_0^x \xi \varphi'(\xi) d\xi - \int_x^h (h - \xi) \varphi'(\xi) d\xi + \int_0^h \varphi(\xi) d\xi \quad (7.17)$$

айиниятнинг ўринли эканини кўрсатамиз. Равшанки,

$$\int_0^x \xi \varphi'(\xi) d\xi = x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(\xi) d\xi, \\ \int_0^h (h - \xi) \varphi'(\xi) d\xi = -(h - x)\varphi(x) + \int_x^h \varphi(\xi) d\xi.$$

Бу тенгликларнинг биринчисидан иккинчисини мос равишда айирсак, (7.17) келиб чиқади.

Энди (7.14) тенгламанинг бирор $y(x)$ ечимини олайлик. $x = 0$ ва $x = h$ унинг кетма-кет келган иккита нули бўлсин (ноллари ихтиёрий қилиб (яъни $x_0 \neq 0, x_1 = x_0 + h$) танланса ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш бўлади). Агар (7.17) айиниятида $\varphi(x) \equiv y'(x)$ бўлса, $y(0) = y(h) = 0$ бўлгани учун

$$\int_0^h \varphi(\xi) d\xi = \int_0^h y'(\xi) d\xi = y(h) - y(0) = 0$$

ўринли ва ушбу

$$hy'(x) = \int_0^x \xi y''(\xi) d\xi - \int_x^h (h - \xi) y''(\xi) d\xi$$

айниятга эга бўлаемиз. Бундаги $y''(\xi)$ ўрнига (7.14) дан $y''(\xi) = -a_1(\xi)y'(\xi) - a_2(\xi)y(\xi)$ ифодани қўямиз:

$$hy'(x) = - \int_0^x \xi a_1(\xi) y'(\xi) d\xi + \int_x^h (h-\xi) a_1(\xi) y'(\xi) d\xi - \\ - \int_0^x \xi a_2(\xi) y(\xi) d\xi + \int_x^h (h-\xi) a_2(\xi) y(\xi) d\xi. \quad (7.18)$$

$\max_{x \in [0, h]} |y'(x)| = \mu$ деб белгилаймиз. $y(x)$ функция $x=0$ ва $x=h$ да

нолга айлангани учун $[0, h]$ ораликда бир вақтда

$$|y(\xi)| \leq \mu \xi, \quad |y(\xi)| \leq \mu(h-\xi)$$

тенгсизликларнинг ҳар бири бажарилади. Ҳақиқатан, $y(x)$ функция учун $x=0$ ва $x=h$ нукта атрофида Лагранж формасида қолдик ҳад билан Тейлор формуласини ($y(0)=y(h)=0$ эканини ҳисобга олган ҳолда) ёзамиз:

$$y(x) = y'(0)x, \quad 0 < \theta < 1, \\ y(x) = y'(h + \theta(x-h))(x-h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Бундан

$$|y(x)| = |y'(0x)| |x| \leq \mu x, \quad x \in [0, h],$$

$$|y(x)| = |y'(h + \theta(x-h))| |x-h| \leq \mu(h-x), \quad x \in [-, h]$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликлардан $[0, h]$ ораликда ушбу

$$|y(\xi)| \leq \mu \min(\xi, h-\xi) \begin{cases} \mu \xi, & \text{агар } 0 \leq \xi \leq \frac{h}{2} \text{ бўлса,} \\ \mu(h-\xi), & \text{агар } \frac{h}{2} \leq \xi \leq h \text{ бўлса} \end{cases}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди (7.18) ифоданинг охириги икки ҳадини баҳолайлик:

$$\left| \int_0^x \xi a_2(\xi) y(\xi) d\xi \right| + \left| \int_x^h (h-\xi) a_2(\xi) y(\xi) d\xi \right| \leq \\ \leq M_2 \mu \left[\int_0^{\frac{h}{2}} \xi_2 d\xi + \int_{\frac{h}{2}}^h (h-\xi)^2 d\xi \right] = M_2 \mu \cdot \frac{h^2}{12}.$$

Шунга кўра (7.18) учун ушбу тенгсизликка келамиз:

$$|y'(x)| \leq M_1 \mu \frac{h}{2} + M_2 \mu \frac{h^2}{12} \quad (0 \leq x \leq h).$$

Охириги тенгсизлик $y'(x)$ га максимум берадиган нуктада ҳам ўринли. Шунинг учун

$$\mu \leq M_1 \mu_2^h + M_2 \mu_{12}^h \leq M_1 \mu_2^h + M_2 \mu_\sigma^h, \quad 0 < \sigma \leq \pi^2 < 12$$

ёки

$$M_2 \frac{h^2}{\sigma} + M_1 \frac{h}{2} - 1 \geq 0 \quad (7.19)$$

тенгсизликка эгамиз. $M_2 \frac{h^2}{\sigma} + \frac{M_1}{2} h - 1 = 0$ квадрат тенглама ушбу

$$-\sigma M_1 + \frac{\sqrt{\sigma^2 M_1^2 + 16\sigma M_2}}{4M_2}, \quad -\sigma M_1 + \frac{\sqrt{\sigma^2 M_1^2 + 16\sigma M_2}}{4M_2}$$

илдизларга эга. Юқоридagi квадрат тенгсизлиكنинг ечими ($h > 0$)

$$h \geq \frac{\sqrt{\sigma^2 M_1^2 + 16\sigma M_2} - \sigma M_1}{4M_2}$$

кўринишда ёзилади. Агар $M_2 = 0$ бўлса, (7.19) дан (7.16') тенгсизлик келиб чиқади. Агар $M_1 = 0$, $M_2 > 0$ бўлса, (7.19) дан $h \geq \sqrt{\frac{\sigma}{M_2}}$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Эслатиб ўтамизки, $M_1 = 0$, $M_2 = 0$ бўлганда $y'' = 0$ тенгламага келинади. Аммо унинг ечимлари $y = C_1 x + C_2$ тўғри чизиклардан иборат бўлиб, $y \neq 0$, яъни $C_1 + C_2 \neq 0$ бўлганда $y = C_1 x + C_2$ тўғри чизик биттадан ортқ нолга эга бўла олмайди. Демак, ечим тебранмас бўлади. Биз кўраётган масала эса тебранувчи ечимларга тегишлидир. Теорема исбот этилди.

Мисол. Гармоник осциллятор тенгламасини, яъни ушбу $y'' + \omega^2 y = 0$ тенгламани олайлик. Унинг умумий ҳақиқий ечими $y = r \cos(\omega t + \alpha)$ ($r > 0$) функциядан иборат. Ноллари орасидаги масофалар тенг бўлиб, $\frac{\pi}{\omega}$ дан иборат. Ҳақиқатан, $\cos(\omega t + \alpha)$

функциянинг ноллари $t_k = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi - \alpha \right)$ формула билан ёзилади (k — бутун сон).

Бундан $t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\omega}$. Бу тенгламада $M_1 = 0$, $M_2 = \omega^2$. Шунинг учун (7.16'') тенгсизликка кўра

$$\frac{\pi}{\omega} - h \geq \sqrt{\frac{\sigma}{M_2}} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\omega}$$

келиб чиқади.

Исбот этилган теорема кетма-кет келган ноллар орасидаги масофани бир томондан қуйидан баҳолайди. Штурм теоремасидан фойдаланиб, айрилган масофа учун икки томонлама экстремал (кучайтириб бўлмайдиган) баҳо чиқариш мумкин.

7.6- теорема. Ушбу

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (7.4)$$

дифференциал тенгламада $Q(x)$ функция I интервалда аниқланган, узлуксиз ва

$$m^2 \leq Q(x) \leq M^2, \quad m > 0, \quad M > 0 \quad (7.20)$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда (7.14) тенглама ечимининг кетма-кет келган иккита ноли орасидаги масофа h учун

$$\frac{\pi}{M} \leq h \leq \frac{\pi}{m} \quad (7.21)$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Бу теоремани исботлашда таққослаш теоремасидан кенг фойдаланамиз. Унинг учун аввал қуйидаги

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + m^2 y = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + M^2 y = 0 \quad (7.22)$$

ўзгармас коэффициентли тенгламаларни оламиз. Уларнинг умумий ечимлари мос равишда

$$y = A_1 \sin m(x - \alpha_1), \quad y = A_2 \sin M(x - \alpha_2)$$

кўринишда ёзилади. Фараз этайлик, $x_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ нукта (7.4), (7.22) тенгламаларнинг бирор ечимларининг ноли бўлсин, яъни у ечимларни мос равишда $\varphi(x)$, $\varphi_m(x)$, $\varphi_M(x)$ деб белгиласак, $\varphi(x_0) = \varphi_m(x_0) = \varphi_M(x_0) = 0$ бўлади. $\varphi_m(x)$ ва $\varphi_M(x)$ ечимларнинг навбатдаги ноллари мос равишда $x_0 + \frac{n\pi}{m}$, $x_0 + \frac{n\pi}{M}$ (n - бутун сон) фор-

мулалар билан топилади. $\varphi(x)$ функциянинг x_0 дан ўнгдаги навбатдаги нолини x_1 дейлик. Унда $x_1 - x_0 = h$ бўлади. (7.20) тенгсизликдан таққослаш теоремасига кўра (7.4) тенглама $\varphi(x)$ ечимининг ихтиёрий кетма-кет келган иккита x_0 , x_1 ($x_0 < x_1$) ноллари орасида $\varphi_m(x)$ функциянинг камида битта ноли ётади. Аммо $\varphi_M(x)$ функциянинг x_0 дан ўнгдаги навбатдаги ноли $x_0 + \frac{\pi}{M}$ бўлгани учун

$x_0 + \frac{\pi}{M} \leq x_1$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга ўхшаш, $\varphi_m(x)$ ечимнинг

x_0 ва $x_0 + \frac{\pi}{m}$ ноллари орасида $\varphi(x)$ функциянинг камида битта ноли

бўлади, яъни $x_0 \leq x_1 \leq x_0 + \frac{\pi}{m}$. Топишган икки тенгсизликни бирлаш-

тириб, $\frac{\pi}{M} \leq x_1 - x_0 \leq \frac{\pi}{m}$ ни, яъни (7.21) тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Теорема исбот бўлди.

(7.21) тенгсизликни янада кучайтириш мумкин эмас, яъни $\left[\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{m} \right]$ оралиқни кичрайтириш мумкин эмас. Бунинг боиси, $Q(x)$

функция ўзгармас бўлганда (7.21) тенгсизлик ўрнига $h = \frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{m}$ тенгликка эришамиз.

Мисол сифатида яна гармоник тебранишларни олсак, $M = m = \omega$ бўлгани учун (7.21) дан $h = \pi/\omega$ келиб чиқади.

Берилган тенглама ечимлари тебранувчи бўлса, кўрилатган ораликда ечимнинг ноллари сони хақида фикр юритиш мумкин.

7.7-теорема (Кнезер теоремаси). Агар (7.4) тенгламада $Q(x)$ функция $x_0 \leq x < +\infty$ интервалда $0 < Q(x) \leq \frac{1}{4x^2}$ тенгсизликни

қаноатлантирса, у ҳолда (7.4) тенгламанинг ихтиёрий тривиалмас ечими $x_0 \leq x < +\infty$ интервалда чексиз кўп нолларга эга бўла олмайди; агар $x_1 \leq x < +\infty$ интервалда $Q(x)$ функция

$\frac{1+\alpha}{4x^2} < Q(x)$ ($\alpha = \text{const} > 0$) тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда ихтиёрий тривиалмас ечим $x_1 \leq x < +\infty$ интервалда чексиз кўп нолларга эга бўлади.

Исбот. Таккослаш теоремасини қўллаш мақсадида

$$y'' + \frac{a^2}{x^2} y = 0 \quad (a \neq 0, x > 0) \quad (7.23)$$

Эйлер тенгламасини олайлик. Бунда $Q(x) = \frac{a^2}{x^2} > 0$ бўлгани учун

(7.23) тенглама ечимлари тебранма характерга эга бўлиши ҳам мумкин. Тегишли характеристик тенглама $k(k-1) + a^2 = 0$ ёки $k^2 - k + a^2 = 0$, унинг илдизлари эса $k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$. Бундан кў-

ринадики, $a^2 > \frac{1}{4}$ бўлганда Эйлер тенгламасининг ечимлари тебранма характерга эга бўлади. Шу ҳолда умумий ечим

$$y = C_1 \sqrt{x} \cos\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right) + \\ + C_2 \sqrt{x} \sin\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right), \quad 1 < x < +\infty$$

кўринишда ёзилади. Шундай қилиб, (7.23) тенгламанинг ечимлари $a^2 \leq \frac{1}{4}$ бўлганда $(1, +\infty)$ интервалда тебранмас, $a^2 > \frac{1}{4}$ бўлганда эса шу интервалда тебранувчи ва чексиз кўп нолларга эга бўлади.

Энди ушбу

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0 \quad (x \geq x_0), \quad (7.24)$$

$$y'' + \frac{1+\alpha}{4x^2} y = 0 \quad (\alpha > 0, x \geq x_1) \quad (7.25)$$

тенгламаларни кўрамиз. Улардан биринчисида (7.23) га кўра $a^2 = \frac{1}{4}$, иккинчисида эса $a^2 = \frac{1+\alpha}{4} > \frac{1}{4}$.

Агар $0 < Q(x) \leq \frac{1}{4x^2}$ ($x \geq x_0$) тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

(7.4) тенглама ихтиёрий ечимининг кетма-кет келган иккита ноли орасида (7.24) тенглама ечимининг камида битта ноли ётгани лозим.

Бу бўлиши мумкин эмас, чунки (7.24) тенгламанинг ечимлари тебранмас. Демак, бу ҳолда $x_0 \leq x < +\infty$ интервалда (7.4) тенглама ечими чексиз кўп нолларга эга бўла олмайди.

Агар $Q(x) > \frac{1+\alpha}{4x^2}$, $\alpha > 0$, $x \geq x_1$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

да ечимлари тебранувчи бўлган (7.25) тенглама ихтиёрий ечимнинг кетма-кет келган иккита ноли орасида (7.4) тенглама ечимининг камида битта ноли ётади. Бундан $(x_1, +\infty)$ интервалда (7.4) тенглама ечимлари чексиз кўп нолларга эга экани келиб чиқади.

7.4-эслатма. Кнезер теоремасидан кўринадики, агар $0 < Q(x) \leq \frac{1}{4x^2}$ тенг-

сизликда $x \rightarrow \infty$ да $Q(x)$ функция нолга етарлича тез яқинлашса, у ҳолда тегишли ечимлар тебранмас бўлади. Аммо агар $Q(x) \equiv 0$ бўлса, равишанки, $y'' = 0$ тенгламанинг фундаментал системаси $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x$ функциялардан иборат. Агар $Q(x)$ функция $x \rightarrow \infty$ да нолга етарлича тез яқинлашса, $Q(x)$ функциянинг ишорасидан қатъи назар x нинг етарлича катти қийматларида $y'' + Q(x)y = 0$ тенгламанинг фундаментал системаси $\{q_1(x) = 1, q_2(x) = x\}$ системадан «ким» фарқ қилади. Бу Шлет теоремаси деб юритилади.

Мисол. Ушбу $y'' + \frac{y}{x^4} = 0$ тенгламада $Q(x) = \frac{1}{x^4}$ бўлиб, унинг фундаментал системаси $\{1, x\}$ га x нинг етарлича катти қийматларида яқин эканини кўрсатамиз.

Бу тенгламада $y = e^{\int z dx}$, $\frac{y'}{y} = -z$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада $z' = z^2 + \frac{1}{x^4}$ Риккати тенгламасига келамиз. Унинг умумий ечими $z = \frac{1}{x^2} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}$ ([3] га қаранг). $\frac{y'}{y} = -z$ бўлгани учун

$$y = Ax \sin\left(\frac{1}{x} + C\right) = C_1 x \sin \frac{1}{x} + C_2 x \cos \frac{1}{x}.$$

Равшанки:

$$x \sin \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{5!} \frac{1}{x^4} - \dots = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$x \cos \frac{1}{x} = x - \frac{1}{2!} \frac{1}{x} + \frac{1}{4!} \frac{1}{x^3} - \dots = x + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Бу ерда $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ функция учун $O\left(\frac{1}{x^2}\right) / \frac{1}{x^2}$ каср $x \rightarrow \infty$ да чегараланган.

Шундай қилиб, фундаментал система сифатида

$$q_1(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad q_2(x) = x + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

функцияларга эгамиз.

7.3-§. ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1. Чегаравий масалаларнинг қўйилиши. Биз аввалги бобларда биринчи ва юқори тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи билан шугулландик. Бу масаланинг геометрик

маъноси берилган нуктадан ўтадиган интеграл чизикни излашдан иборат эди. Шу интеграл чизик яна бошқа шартларни қаноатлантирадими ёки йўқми, бу бизни қизиқтирмас эди.

Агар I интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ($n \geq 1$) дифференциал тенгламанинг ушбу

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, x_0 \in I \quad (7.26)$$

шартни қаноатлантирадиган ечими бўлса, тенгламанинг шу $y = \varphi(x)$ ечими яна

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) = y_1, \varphi'(x_1) = y'_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_1) = \\ = y_1^{(n-1)}, x_0 \neq x_1, x \in I \end{aligned} \quad (7.27)$$

шартни ҳам қаноатлантирадими, деган савол туғилади. Бунда $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функциянинг аниқланиш соҳаси очик D_{n+1} тўпламдан иборат бўлиб, $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$, $(x_1, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ шартлар албатта бажарилади. Акс ҳолда қўйилган саволнинг маъноси бўлмайди.

Саволга жавоб бериш учун (7.26) шарт билан тўла аниқланган маълум $y = \varphi(x)$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_1$ нуктада ҳисоблаб, (7.27) шартни текшириш лозим. Савол доим юқоридаги каби қўйилмаслиги ҳам мумкин. Номатълум функция ва ҳосилаларининг $x = x_0$ ва $x = x_1$ нукталардаги қийматларидан тузилган n та муносабат бажарилишини талаб этиш ҳам мумкин. Шу муносабат билан қуйидаги масалани қўямиз.

Чегаравий масаланинг қўйилиши: агар ушбу

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4.2)$$

тенглама ва

$$\begin{aligned} g_i(x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0); x_1, y(x_1), \\ \dots, y^{(n-1)}(x_1)) = 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

($x_0 \in I$, $x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$, $i = 1, 2, \dots, n$) муносабатлар берилган бўлса, (4.2) тенгламанинг шу (7.28) муносабатларни қаноатлантирадиган ечимини излаш *чегаравий масала* дейилади. Бу масала Коши масаласига қараганда умумий бўлиб, ундан $g_i = y^{(i-1)}(x_0) - y_0^{(i-1)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ бўлганда Коши масаласи келиб чиқади. Агар $n = 2$ бўлиб,

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= y(x_0) - y_0 = 0, \\ g_2 &= y(x_1) - y_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

бўлса, иккинчи тартибли тенгламанинг интеграл чизиги *бошланғич* $y(x_0) = y_0$ ва *туғал* $y(x_1) = y_1$ шартни қаноатлантириши лозим бўлади. Яна, агар $n = 2$ бўлиб

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \\ g_2 &= \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

бўлса, бу ҳам тез-тез учрайдиган чегаравий масаланинг шартидан иборат. Баъзи ҳолларда *ечим даврийлигининг чегаравий шarti* деб юритилувчи ($n=2$)

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= y(x_0) - y_0 = 0, \\ g_2 &= y(x_1) - y_0 = 0 \quad y_1 = y_0 \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

шарт ҳам учрайди.

Мисол сифатида 4.5-§ да кўрилган масалани олиш мумкин. У масалада абсцисса ўқи бўйлаб унинг мусбат йўналишида ҳаракат қилаётган объект (нукта) 1 чоракда ҳаракат қилиши мумкин бўлган нукта томонидан қувланиши кўрилган эди. Қувловчининг тезлиги v , қочувчиники эса a эди. Агар $v > a$ бўлса, чекли T вақтда қувловчи қочувчини қувиб етиши исбот этилган. Қувловчининг дифференциал тенгламаси эса

$$y'' = \frac{a}{v} \frac{(y')^2}{y} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad y > 0 \quad (4.29)$$

кўринишда. Агар $y(x_0) = y_0 > 0$, $y(x_1) = 0$, $x_1 = x_0 + y_0 \frac{av}{v^2 - a^2}$ десак,

чегаравий масалага (қувловчи учун) келамиз. (4.29) тенгламанинг умумий ечими

$$x = \frac{1}{2C_1 \left(1 + \frac{a}{v}\right)} (C_1 y)^{1 + \frac{a}{v}} - \frac{1}{2C_1 \left(1 - \frac{a}{v}\right)} (C_1 y)^{1 - \frac{a}{v}} + C_2.$$

бўлгани учун чегаравий шартлардан $C_1 = \frac{1}{y_0}$, $C_2 = y_0 \frac{av}{v^2 - a^2} + x_0$ келиб чиқади. Демак,

$$x = \frac{y_0}{2 \left(1 + \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 + \frac{a}{v}} - \frac{y_0}{2 \left(1 - \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 - \frac{a}{v}} + y_0 \frac{av}{v^2 - a^2} + x_0$$

ечим чегаравий масала шартларини қаноатлантиради.

2. Бир жинсли чегаравий масала. Чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги муҳим роль ўйнайди. Бу мавзуга тегишли баъзи маълумотларни баён этиш учун (7.28) муносабатларда g_i функциялар ўз аргументларига нисбатан қизиқли шаклдан иборат бўлган ҳолни кўрамиз. Аниқроғи g_i функциялар қуйидаги

$$\begin{aligned} g_i(y) &= \alpha_0^{(i)} y(x_0) + \alpha_1^{(i)} y'(x_0) + \dots + \alpha_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)}(x_0) + \\ &+ \beta_0^{(i)} y(x_1) + \beta_1^{(i)} y'(x_1) + \dots + \beta_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)}(x_1) - A_i = \\ &g_i^{(0)}(y) + A_i = 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

(бунда $\alpha_j^{(i)}$, $\beta_j^{(i)}$, A_i , $i=1, 2, \dots, n$; $j=0, 1, \dots, n-1$ ўзгармас)

кўринишда бўлсин. Агар $A_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) бўлса, қўйилган масала бир жинсли чегаравий масала дейилади. Агар $\sum_{i=1}^n A_i^2 \neq 0$

бўлса, у бир жинсли бўлмаган масала бўлади.

n - тартибли чизикли бир жинсли

$$L(p)y = 0 \quad (*)$$

тенглама ва (7.32) чегаравий шартлар берилган бўлсин, $(*)$ ва (7.32) муносабатларни $A_i = 0$ бўлганда каноатлантирадиган $y(x) \in C^{(n)}$ функцияни топиш масаласи $(*)$ тенглама учун бир жинсли чегаравий масала дейилади.

Равшанки, ҳар бир бир жинсли чегаравий масала камида битта тривиал ечимга, яъни $y(x) \equiv 0$, $x \in [x_0, x_1]$ ечимга эга. Аммо бир жинсли чегаравий масала тривиал бўлмаган ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин. Шу муносабат билан қуйидаги теоремани келтирамиз.

7.8- теорема. Агар $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), x \in [x_0, x_1]$ функциялар $(*)$ тенгламанинг чизикли эркин ечимлари бўлса, у ҳолда $L(p)y = 0$, $g_i''(y) = 0$ масала тривиалмас ечимга эга бўлиши учун

$$D = \begin{vmatrix} g_1''(y_1) & g_1''(y_2) & \dots & g_1''(y_n) \\ g_2''(y_1) & g_2''(y_2) & \dots & g_2''(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n''(y_1) & g_n''(y_2) & \dots & g_n''(y_n) \end{vmatrix} \quad (7.33)$$

детерминантнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Теореманинг шартига кўра $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялар $[x_0, x_1]$ ораликда чизикли эркин ечимлар. Шунинг учун $\sum_{i=1}^n C_i^2 \neq 0$ бўлганда $(*)$ тенгламанинг барча ечимлари

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x)$$

формула билан берилади. Жумладан, $g_i''(y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ шартин каноатлантирувчи ечимни ҳам шу формула билан берилади. Шу сабабли

$$g_i'' \left(\sum_{j=1}^n C_j y_j(x) \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.34)$$

муносабатларга эгамиз, яъни

$$\sum_{j=1}^n C_j g_i''(y_j(x)) = 0$$

аниқланган бўлиб, $[x_0, x_1]$ оралиқдан олинган ҳар бир ξ учун x нинг функцияси сифатида қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

1°. $G(x, \xi)$ функция x ва ξ бўйича $[x_0, x_1]$ оралиқда узлуксиз, x бўйича $(n-2)$ - тартибгача узлуксиз дифференциалланувчи;

2°. $[x_0, x_1]$ дан олинган ихтиёрый тайинланган ξ учун $G(x, \xi)$ функция x бўйича $[x_0, \xi]$ ва $[\xi, x_1]$ оралиқларнинг ҳар бирида $(n-1)$ - ва n - тартибли ҳосилаларга ҳам эга, аммо $(n-1)$ - тартибли ҳосиласи $x=\xi$ нуқтада чекли ўзилишга эга, яъни:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi+0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi-0, \xi) = \frac{1}{a_0(\xi)}; \quad (7.38)$$

3°. $[x_0, \xi]$ ва $[\xi, x_1]$ интервалларнинг ҳар бирида x нинг функцияси сифатида $G(x, \xi)$ функция (7.37) муносабатларни қаноатлантиради, яъни $L(p)G(x, \xi) \equiv 0$, $\mathcal{L}^i(G(x, \xi)) \equiv 0$, $i=1, 2, \dots, n$.

7.9- теорема. Агар (7.37) чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, y ҳолда шу масала учун ягона Грин функцияси мавжуд.

Исбот. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ функциялар $L(p)y = 0$ тенгламанинг физикли эркин ечимлари бўлсин. У ҳолда бу тенгламанинг барча ечимлари $y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ формула билан ёзилади. Шунинг учун $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларнинг бирор кийматида бу формуладан $G(x, \xi)$ функцияни ҳосил қила олесак, теорема исбот бўлган бўлади. Агар Грин функцияси мавжуд бўлса, $x_0 \leq x < \xi$ интервалда

$$G(x, \xi) = a_1(\xi)y_1(x) + a_2(\xi)y_2(x) + \dots + a_n(\xi)y_n(x),$$

$\xi < x \leq x_1$ интервалда эса

$$G(x, \xi) = b_1(\xi)y_1(x) + b_2(\xi)y_2(x) + \dots + b_n(\xi)y_n(x)$$

муносабатлар ўринли бўлиши керак. Бундан $(n-2)$ - тартибгача ҳосилалари узлуксиз бўлгани учун $x=\xi$ бўлганда ушбу

$$\begin{aligned} |a_1(\xi)y_1(\xi) + \dots + a_n(\xi)y_n(\xi)| - |b_1(\xi)y_1(\xi) + \dots + b_n(\xi)y_n(\xi)| &= 0, \\ |a_1(\xi)y'_1(\xi) + \dots + a_n(\xi)y'_n(\xi)| - |b_1(\xi)y'_1(\xi) + \dots + b_n(\xi)y'_n(\xi)| &= 0, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} |a_1(\xi)y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + a_n(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)| - \\ - |b_1(\xi)y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + b_n(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)| &= 0 \end{aligned}$$

тенгликларга эга бўлаемиз; $(n-1)$ - тартибли ҳосила учун эса

$$\begin{aligned} |a_1(\xi)y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)| - \\ - |b_1(\xi)y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + b_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)| = - \frac{1}{a_0(\xi)} \end{aligned}$$

тенгликка эгамиз. Агар $C_v(\xi) = b_v(\xi) - a_v(\xi)$ десак, юқоридаги тенгликлар қуйидагича ёзилади:

бўлса, (7.41) дан $b_i^0(\xi) = C_i^0(\xi)$, $a_i^0(\xi) = 0$ келиб чиқади. Бу ҳолда теореманинг исботи равшан. Энди $g_i^n(y_i(x)) \neq 0$ ҳолни кўрайлик. Бунда 7.8-теоремага кўра (7.41) системанинг детерминанти $\{b_1, b_2, \dots, b_n$ ларга нисбатан) нолдан фарқли. Демак, $b_1(\xi), \dots, b_n(\xi)$ ларнинг ягона қийматини топа оламиз. Ҳама қийматларни $b_1^0(\xi), b_2^0(\xi), \dots, b_n^0(\xi)$ десак, $a_1^0(\xi), a_2^0(\xi), \dots, a_n^0(\xi)$ лар $a_i^0(\xi) = b_i^0(\xi) - C_i^0(\xi)$ формулалар билан топилади. $a_i(\xi)$ ва $b_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, n$ лар учун топилган қийматларни тегишли ифодага қўйсак, $G(x, \xi)$ учун

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i^0(\xi) y_i(x), & x_0 \leq x < \xi, \\ \sum_{i=1}^n b_i^0(\xi) y_i(x), & \xi \leq x < x_1, \end{cases} \quad (7.42)$$

формулага эга бўламиз. Шундай қилиб, Грин функциясининг мавжудлиги ва ягоналиги исбот этилди. Бу теореманинг исботи тегишли Грин функциясини қуриш усулини ҳам ўз ичига олади.

Бир жинсли чегаравий масала қизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама учун қўйилган бўлсин, яъни ушбу

$$L(p)y = f(x), \quad g_i^0(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.43)$$

масала қўрилатган бўлсин. Бу масаланинг ечимини қуйидаги теорема беради

7.10-теорема. *Агар (7.37) масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда $[x_0, x_1]$ оралиқда узлуксиз бўлган ихтиёрый $f(x)$ функция учун (7.43) масаланинг ечими мавжуд. Бу ечим ушбу*

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (G(x, \xi) \text{ Грин функцияси}) \quad (7.44)$$

формула билан ифодаланади

Исбот. (7.44) формула билан аниқланган бирор $y(x)$ функцияни олайлик. Бу функция (7.43) масаланинг ечими эканини, яъни ушбу

$$L(p)y(x) \equiv f(x) \quad (7.45)$$

$$g_i^0(y(x)) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.46)$$

айниятлар ўринли эканини исботлаймиз. Аввал (7.46) ни кўрсатайлик. $G(x, \xi)$ функциянинг таърифига кўра олинган $y(x)$ функция $(n-2)$ -тартибгача узлуксиз дифференциалланувчи. Шунинг учун ҳосилаларни

$$y^{(v)}(x) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^v G(x, \xi)}{\partial x^v} f(\xi) d\xi, \quad v = 1, 2, \dots, n-2 \quad (7.47)$$

каби ёзиш мумкин. (7.47) формулани $v = n-2$ да қуйидагича ёзамиз:

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^x \frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi) d\xi + \int_x^{x_1} \frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi) d\xi.$$

Бундан яна x бўйича ҳосила оламиз:

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^x \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi + \left(\frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} \right) \Big|_{\xi=x} f(x) + \\ &+ \int_x^{x_1} \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi - \left(\frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} \right) \Big|_{\xi=x+0} f(x). \end{aligned}$$

Аммо $\frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}}$ функция $x=\xi$ нуктада узлуксиз бўлгани учун охириги ифода соддалашади:

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^x \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi + \int_x^{x_1} \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Бу формуладан яна бир марта дифференциаллаб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \int_{x_0}^x \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi + \left(\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right) \Big|_{\xi=x-0} f(x) + \\ &+ \int_x^{x_1} \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi - \left(\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right) \Big|_{\xi=x+0} f(x) = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi + \frac{1}{a_0(x)} f(x). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Маълумки, $g_i^{(j)}(y)$ ифода $y(x)$ ва унинг $(n-1)$ - тартибгача ҳосилаларининг $x=x_0$ ва $x=x_1$ нуктадаги қийматларини ўз ичига олади. Шунга кўра, (7.44) (7.47), (7.48) лардан содда ўзгартиришлар ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} g_i^{(j)}(y) &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(i)} y^{(j)}(x_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(i)} y^{(j)}(x_1) = 0 + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(i)} y^{(j)}(x_1) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(i)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^j G(x, \xi)}{\partial x^j} f(\xi) d\xi = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(i)} \frac{\partial^j G(x, \xi)}{\partial x^j} \right) f(\xi) d\xi = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} g_i^{(j)}(G(x, \xi)) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

$G(x, \xi)$ функция таъриф бўйича $g_i^n(y) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) чегаравий шартни қаноатлантиради, яъни $g_i^n(G(x, \xi)) \equiv 0$. Шунинг учун охириги интеграл нолга тенг ва $g_i^n(y(x)) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ муносабатларга эгамиз. Бундан олинган $y(x)$ функция $[x_0, x_1]$ ораликда, чегаравий шартларни қаноатлантириши келиб чиқади. Демак, (7.46) исбот этилди. Энди (7.45) ни исбот этамиз. Теореманинг шартига кўра (7.37) масала фақат тривиал ечимга эга. 7.9-теоремадан $L(p)G(x, \xi) \equiv 0$ экани чиқади. Шунинг учун олинган $y(x)$ функция ҳосилаларининг ўрнига (7.47), (7.48), (7.49) формулалардан фойдаланиб, ўз ифодасини $L(p)y$ дифференциал ифодага кўямиз:

$$\begin{aligned} L(p)y(x) &= a_0(x) \left[\int_{x_0}^{\xi} \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi + a_0(x) f(x) \right] + \\ &+ a_1(x) \int_{x_0}^{\xi} \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi + \dots + \\ &+ a_{n-1}(x) \int_{x_0}^{\xi} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} f(\xi) d\xi + a_n(x) \int_{x_0}^{\xi} G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \\ &= \int_{x_0}^{\xi} \left[a_0(x) \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} + a_1(x) \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} + \dots + \right. \\ &+ a_{n-1}(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} + a_n(x) G(x, \xi) \left. \right] f(\xi) d\xi + f(x) = \\ &= \int_{x_0}^{\xi} \underbrace{(L(p)G(x, \xi))}_{\equiv 0} f(\xi) d\xi + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Демак, (x_0, ξ) интервалда $L(p)y(x) \equiv f(x)$ айният ўринли. Шунга ўхшаш (ξ, x_1) интервалда ҳам шу айният ўринли экани кўрсатилади. Шундай қилиб, $[x_0, x_1]$ интервалда узлуксиз $f(x)$ функция учун олинган $y(x)$ функция (7.43) чегаравий масаланинг ечими бўлади. Теорема исбот бўлди.

4. Бир жинсли бўлмаган чегаравий масала. (7.32) формулада $\sum_{i=0}^n A_i^2 \neq 0$ бўлсин. Биз бир жинсли бўлмаган чегаравий масalani кўрайлик. Бу ҳолда асосий хулосани қуйидаги теорема ифода этади.

7.11-теорема. *Ушбу $L(p)y=0$ тенглама бир жинсли бўлмаган шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга бўлиши учун мос бир жинсли чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. Бир жинсли бўлмаган чегаравий масаланинг ечими $y(x)$ функция бўлсин. Унда $L(p)y(x) \equiv 0$, $x \in [x_0,$

$x_1 g_i(y(x)) - A_i \equiv 0$ айниятлар ўринли бўлади. Бир жинсли дифференциал тевгламанинг фундаментал системаси $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялардан иборат бўлсин. У ҳолда ихтиёрий ечим $y = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x)$ формула билан ёзилади. Ўзгармас $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларнинг бирор қийматида $y(x)$ ечим ҳосил бўлсин дейлик, яъни $y(x) = \sum_{i=1}^n C_i^0 y_i(x)$. Бу функцияни бир жинсли бўлмаган чегаравий шартга қўямиз. Содда ўзгартиришлар натижасида қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(n)} \left(\sum_{v=1}^n C_v^0 y_v(x_0) \right)^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{(n)} \left(\sum_{v=1}^n C_v^0 y_v(x_1) \right)^{(n)} - A_i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(n)} \left(\sum_{v=1}^n C_v^0 y_v^{(n)}(x_0) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{(n)} \left(\sum_{v=1}^n C_v^0 y_v^{(n)}(x_1) \right) - A_i = \\ &= \sum_{v=1}^n C_v^0 \left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(n)} y_v^{(n)}(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{(n)} y_v^{(n)}(x_1) \right] - A_i = \sum_{v=1}^n C_v^0 g_v^0(y_v) - A_i. \end{aligned}$$

Демак, ушбу

$$\sum_{v=1}^n C_v^0 g_v^0(y_v) = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.50)$$

системага эгамиз. Бу системанинг детерминанти $D \neq 0$ ((7.33) га қаранг), чунки $\sum_{i=1}^n (C_i^0)^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^n A_i^2 \neq 0$. Аммо $D \neq 0$ бўлганда мос бир жинсли чегаравий масала 7.8-теоремага кўра фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Етарлиликни. Бир жинсли чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлсин. У ҳолда $D \neq 0$ бўлади. Демак, (7.50) га кўра бир жинсли бўлмаган чегаравий масала ягона тривиалмас ечимга эга, чунки (7.50) дан $\sum_{v=1}^n C_v^0 \neq 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $C_1,$

$C_2, \dots, C_n$ ўзгармаслар бир қийматли топилади. Теорема тўла исбот бўлди.

7.3- натижа. Агар бир жинсли бўлмаган чегаравий масала иккита $y = \varphi_1(x)$ ва $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \not\equiv \varphi_2(x)$ ечимга эга бўлса, y ҳолда $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ функция мос бир жинсли чегаравий масаланинг тривиалмас ечими бўлади; аксинча, агар бир жинсли чегаравий масала тривиалмас ечимларга эга бўлса, y ҳолда бир

жинсли бўлмаган чегаравий масала ё биронта ҳам ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимларга эга бўлади.

Исбот. Аввал натижанинг биринчи қисмини исботлаймиз.

Равшанки, $L(p)\varphi_1(x) \equiv 0$, $L(p)\varphi_2(x) \equiv 0$ ва демак, $L(p)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \equiv 0$, яна шунга ўхшаш $g_i^0(\varphi_1(x)) = A_i$, $g_i^0(\varphi_2(x)) = A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) муносабатлардан $g_i^0(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \equiv 0$ келиб чиқади. Шунинг учун $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ функция бир жинсли чегаравий масала $L(p)y = 0$, $g_i^0(y) = 0$ учун тривиалмас ечим бўлади.

Энди, агар бир жинсли чегаравий масала тривиалмас $y = y(x) \not\equiv 0$, $x \in [x_0, x_1]$ ечимга эга бўлса, $D = 0$ бўлади ((7.33) га қаранг). У ҳолда (7.50) система ё ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади. Натижа исбот этилди.

Энди чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламани олайлик, яъни $L(p)y = f(x)$, шу билан бирга бир жинсли бўлмаган чегаравий шарт ҳам берилган бўлсин. Бошқача айтганда, ушбу

$$\begin{cases} L(p)y = f(x), \\ g_i^0(y) = A_i, \quad \sum_{i=1}^n A_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7.51)$$

бир жинсли бўлмаган чегаравий масалани кўрайлик. Бу масаланинг ечими хақида фикр юритиш учун аввал $g_i^0(\eta(x)) = A_i$ шартни қаноатлантирадиган ихтиёрый $\eta(x) \in C^1[x_0, x_1]$ функцияни оламиз. Сўнгра $z(x) = y(x) - \eta(x)$ алмаштиришни бажарамиз. Бу $\eta(x)$ функция учун

$$g_i^0(z(x)) = g_i^0(y(x) - \eta(x)) = g_i^0(y(x)) - g_i^0(\eta(x)) \equiv 0,$$

яъни

$$g_i^0(z(x)) \equiv 0 \quad (7.52)$$

бир жинсли чегаравий шартга эга бўламиз. Берилган дифференциал тенглама ($z(x)$ функцияга нисбатан)

$$L(p)\eta(x) + z(x) = f(x)$$

ёки

$$L(p)z(x) = f(x) - L(p)\eta(x) = F(x) \quad (7.53)$$

кўринишга келади. Энди (7.53), (7.52) бир жинсли чегаравий масалани кўриш мумкин. 7.10-теоремага кўра, агар $L(p)z(x) = 0$, $g_i^0(z(x)) = 0$ масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда $[x_0, x_1]$ ораликда узлуксиз бўлган ихтиёрый $F(x) = f(x) - L(p)\eta(x)$ функция учун (7.53), (7.52) масаланинг ечими мавжуд ва

$$Z(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) F(\xi) d\xi \quad (7.54)$$

кўринишда ёзилади. Агар $\eta(x)$ функция мос бир жинсли тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $L(p)\eta(x) \equiv 0$, $F(x) = f(x)$ бўлади ва

(7.54) формула $z(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) f(\xi) d\xi$ кўринишда ёзилиши мум-

кин.

Шундай қилиб куйидаги теорема исбот этилди.

7.12-теорема. Бизга (7.51) бир жинсли бўлмаган чегаравий масала берилган бўлсин. $[x_0, x_1]$ оралиқда узлуксиз бўлган ва $g_i^0(y) = A_i$ бир жинсли бўлмаган чегаравий шартни қаноатлантирадиган ихтиёрый функцияни $\eta(x)$ дейлик. У ҳолда, агар $L(p)(y(x) - \eta(x)) = 0$, $g_i^0(y(x) - \eta(x)) = 0$ масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда (7.51) масала ечимга эга ва бу ечим ушбу

$$y(x) = \eta(x) + \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) F(\xi) d\xi \quad (7.54')$$

(бунда $F(x) = f(x) - L(p)\eta(x)$) формула билан берилади. Агар $L(p)\eta(x) \equiv 0$, $g_i^0(\eta(x)) = A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда $F(x) = f(x)$ ва (7.51) масаланинг ечими

$$y(x) = \eta(x) + \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (7.54'')$$

кўринишда ёзилади

7.4-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОРНИНГ ХОС КИЙМАТЛАРИ ВА ХОС ФУНКЦИЯЛАРИ

1. Бир жинсли чизикли тенглама учун хос қиймат ва хос функция тушунчаси.

7.3-таъриф. Агар шундай $0 \neq y(x) \in C^n(I)$ функция топилсаки, бу функция учун ушбу

$$L(p)y(x) \equiv \lambda y(x), \quad x \in I \quad (7.55)$$

айният ўринли бўлса, у ҳолда λ сон $L(p)$ операторнинг хос қиймати, $y(x)$ функциянинг ўзи эса $L(p)$ операторнинг хос функцияси дейилади.

Ушбу бир жинсли чегаравий масалани, яъни

$$L(p)y = \lambda y, \quad g_i^0(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.56)$$

масалани кўрайлик. Шу масаланинг тривиалмас ечимларига мос келган λ нинг қийматлари $L(p)$ операторнинг хос қийматлари, тегишли тривиалмас ечимлар эса хос функциялари дейилади.

Агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$, $x \in I$ функциялар λ нинг битта қийматига мос келган тривиалмас ечим, яъни хос функциялар бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг чизикли комбинацияси ҳам λ га мос келган хос функция бўлади. Ҳақиқатан, агар

$$L(p)y_1(x) \equiv \lambda y_1(x), \quad L(p)y_2(x) \equiv \lambda y_2(x), \quad x \in I$$

айниятлар ўрнили бўлса, ундан

$$L(p)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) \equiv \lambda(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))$$

келиб чиқади. Аммо $L(p)y = \lambda y$ бир жинсли тенглама чизикли эркин ечимлари n та (n — тенгламанинг тартиби) бўлгани учун ушбу

$$L(p)\left(\sum_{i=1}^k C_i y_i\right) \equiv \lambda\left(\sum_{i=1}^k C_i y_i(x)\right), \quad x \in I$$

айният k нинг $k \leq n$ тенгсизликини қаноатлантирадиган қийматлари учун тўғри бўлади. Агар $k > n$ бўлса, чизикли бир жинсли тенгламанинг ихтиёрий $n+1$ та, демак k та ($k > n$) ечими чизикли

боғлиқ бўлгани учун $\sum_{i=1}^k C_i y_i(x) \equiv 0, x \in I$ айниятга келамиз. Бундан

олинган λ сонга тривиал ечим мос келиши чиқади. Бу эса ҳос қиймат ва ҳос функция таърифига зид.

7.8- теоремага кўра, (7.56) масала тривиалмас ечимга эга бўлиши учун ушбу

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} g_1^0(y_1) & g_1^0(y_2) & \dots & g_1^0(y_n) \\ g_2^0(y_1) & g_2^0(y_2) & \dots & g_2^0(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n^0(y_1) & g_n^0(y_2) & \dots & g_n^0(y_n) \end{vmatrix} \quad (7.57)$$

((7.33) га қаранг) детерминант нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Бунда $D(\lambda)$ функция λ га нисбатан бутун аналитик функция бўлиб ^{*}), у $L(p)$ операторнинг *характеристик детерминанти* дейилади. Бу ўринда тушунарли бўлиши учун (7.55) тенгламанинг

$$y_j^{(v-1)}(x_0, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{агар } j \neq v, \\ 1, & \text{агар } j = v \end{cases} \quad (7.58)$$

(бунда $j, v=1, 2, \dots, n$) бошлангич шартларни қаноатлантирувчи фундаментал системасини

$$y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda) \quad (7.59)$$

деб белгилайлик. У ҳолда I интервалдан олинган x нинг ҳар бир тайин (муайян) қийматларида (7.59) функциялар λ нинг бутун аналитик функциялари бўлади. Шу сабабдан $D(\lambda)$ ҳам аналитик функциядир.

Оқоридаги фикрлар ва мураккаб бўлмаган мулоҳазалар ёрдамида ушбу теореманинг ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

7.13- теорема. 1) $D(\lambda)$ функциянинг ноллари $L(p)$ операторнинг ҳос қийматларидан иборат; 2) агар $D(\lambda)$ функция айнан нолга тенг

^{*} Агар бирор I интервалда аниқланган $\chi(x)$ функция шу интервалнинг ҳар бир x_0 нуктаси атрофида $x=x_0$ нинг даражалари бўйича шу функцияга яқинлашувчи даражали каторга ёйилса, у ҳолда $\chi(x)$ функция I интервалда *аналитик функция* дейилади.

бўлмаса, у ҳолда $L(p)$ операторнинг ҳос қийматлари sanoқли тўплам бўлиб, улар чекли лимит нуқтага эга бўла олмайди.

Айтиб ўтавикки, агар $D(\lambda)$ функциянинг ноли бўлмаса, у ҳолда $L(p)$ оператор ҳос қийматларга эга бўла олмайди. Аммо λ ҳос қиймат $D(\lambda)$ нинг каррали ноли бўлиши мумкин.

Агар λ_0 сон $D(\lambda)$ функциянинг оддий ноли бўлса, бу λ_0 сон $L(p)$ операторнинг оддий ҳос қиймати дейилади.

2. Бир жинсли бўлмаган чизикли тенглама учун ҳос қиймат ва ҳос функция тушунчаси. Ушбу

$$\left. \begin{aligned} L(p)y &= \lambda y + f(x), \\ g_i''(y) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

масалани кўрайлик, бунда λ - бирор параметр, $f(x)$ функция $L(p)$ оператор коэффициентларининг аниқланиш интервалида аниқланган ва узлуксиз. Бу масала учун ҳос қиймат ва ҳос функция тушунчаси тегишли (7.56) масала учун киритилган тушунчанинг ўзгичаси бўлади. Бу ҳолда асосий натижа қуйидаги теорема билан ифодаланади.

7.14-теорема. λ нинг ҳос қийматлардан фарқ қиладиган барча қийматлари учун $f(x)$ ихтиёрый узлуксиз бўлганда (7.60) масала ечимга эга.

Исбот. Теореманинг шарти бўйича аввал $L(p)y = \lambda y$, $g_i''(y) = 0$ масалани кўриб, тегишли $\lambda_j'' (j = 1, 2, \dots)$ ларни топайлик. У ҳолда $L(p)y_j(x) = \lambda_j''(y_j(x))$, $g_i''(y_j(x)) = 0$ бўлади. Энди $\lambda \neq \lambda_j''$ учун (7.60) масала ечимга эга экани равшан, чунки у (7.45) (7.46) масалага келади. Ҳақиқатан:

$$\begin{aligned} L(p)y - \lambda y &= a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + \\ &+ a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y - \lambda y = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \\ &+ \dots + a_{n-1}(x)y' + (a_n(x) - \lambda)y = L_0(p)y, \end{aligned}$$

бунда

$$L_0(p) = a_0(x)p^n + \dots + a_{n-1}(x)p + (a_n(x) - \lambda).$$

Шундай қилиб, $\lambda \neq \lambda_j''$ бўлганда (7.60) масала ушбу

$$\left. \begin{aligned} L_0(p)y &= f(x) \\ g_i''(y) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (7.45_0)$$

масалага келади. Демак, 7.10-теоремага кўра (7.60) масала ечимга эга. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

чегаравий масалани ечайлик.

Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

каби ёзилади. Бундан чегаравий шартлардан фойдаланиб, ҳос кийматларни ва ҳос функцияларни топишимиз мумкин. Чегаравий шартларни бундай ёзайлик:

$$g_1^0(y) = y(0) - y(1) = 0,$$

$$g_2^0(y) = y'(0) - y'(1) = 0.$$

Берилган дифференциал тенгламанинг фундаментал системаси $y_1 = \cos \sqrt{\lambda} x$, $y_2 = \sin \sqrt{\lambda} x$ функциялардан иборат. Шунинг учун қуйидагиларга эгамиз:

$$g_1^0(y_1) = y_1(0) - y_1(1) = 1 - \cos \sqrt{\lambda},$$

$$g_1^0(y_2) = y_2(0) - y_2(1) = -\sin \sqrt{\lambda},$$

$$g_2^0(y_1) = y_1'(0) - y_1'(1) = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda},$$

$$g_2^0(y_2) = y_2'(0) - y_2'(1) = \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}.$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Охири тенгламадан $(1 - \cos \sqrt{\lambda})^2 + \sin^2 \sqrt{\lambda} = 0$ ёки $\cos \sqrt{\lambda} = 1$ келиб чиқади. Бундан $\sqrt{\lambda} = 2k\pi$ ёки $\lambda_k = (2k\pi)^2$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Демак, $k \neq 0$ бўлганда ҳар бир ҳос киймат λ_k учун икки чизикли эркин ҳос функция $\cos(2k\pi)x$, $\sin(2k\pi)x$ тўғри келади, яъни ҳар бир ҳос киймат λ_k икки каррали ҳос кийматдир. Агар $k=0$ бўлса, $\lambda_0 = 0$ бўлади. Бу ҳос кийматга ўзгармас қўнайтувчи аниқлигида $y \equiv 1$ ҳос функция тўғри келади, яъни $\lambda_0=0$ бир каррали ҳос кийматдир.

2. Ушбу

$$-y'' = \lambda y + f(x), \quad y(0) = A_0, \quad y(l) = A_1, \quad 0 \leq x \leq l$$

чегаравий масалани кўрайлик. Моҳ бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал системаси $y_1(x) = \cos \sqrt{\lambda} x$, $y_2(x) = \sin \sqrt{\lambda} x$ функциялардан иборат.

$D(\lambda)$ детерминантни тузамиз. Агар $g_1^0(y) = y(0)$, $g_2^0(y) = y(l)$ эканини ҳисобга олсак:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda} l & \sin \sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda} l.$$

Бундан $D(\lambda) = 0$ тенгламанинг ядизлари $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k=1, 2, \dots$. Шу ҳос кийматлар учун берилган масалада ($f(x) \neq 0$ ҳолда) ё мавжудлик бузилади ёки ечимнинг ягоналиги бузилади. 7.14-теоремага кўра λ нинг $\lambda \neq \lambda_k$ кийматлари учун берилган масала ечимга эга. Энди

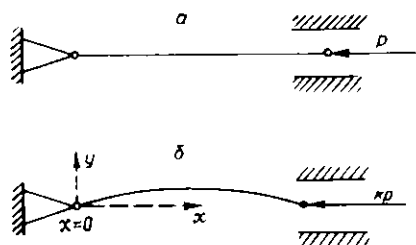
$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

бир жинсли чегаравий масалани ечимиз.

Маълумки, берилган тенгламанинг умумий ечими $y = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$ кўринишда ёзилади. Ундан

$$C_1 = 0, \quad C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

ёки $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ бўлиши лозимлиги туфайли $\sin \sqrt{\lambda} x = 0$ дан яна $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k=1, 2, \dots$ келиб чиқади. Шунинг учун берилган чегаравий масаланинг ечими $y = C_2 \sin \frac{k\pi}{l} x$ (C_2 — ихтиёрий ўзгармас) функциядан иборат бўлади. Равшанки, агар $l = \pi$ бўлса, $\lambda_k = k^2$ бўлади. Ечимнинг кўриниши $y = C_2 \sin kx$ каби бўлади.



35- чизма

стержень нуктасининг кўндаланг силжиши белгиланса, бу x нинг функцияси бўлади, яъни $y = y(x)$, $0 < x \leq l$. Иккита учи маҳкамланган (кўндалангига силжиди) бўлгани учун $y(0) = y(l) = 0$ бўлади. Материаллар қаршилиги курсидан маълумки, $y(x)$ функция катта аниқликда ушбу $y'' + \frac{P}{EI}y = 0$ дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Унда E ва I мос равишда стержень материалининг *Юнг модули* ва кўндаланг қесимининг *инерция моменти*.

Бу тенгламани ва чегаравий шартни

$$-y'' = \frac{P}{EI}y, \quad y(0) = y(l) = 0$$

кўринишда ёзсак, бир жинсли чегаравий масалага келамиз.

Таърифга кўра, $\frac{P}{EI} < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ бўлганда юқоридаги масала факат тривиал ечимга эга, яъни бу ҳолда стерженининг эгилиши рўй бермайди. P кучни орттира бориб, $\frac{P_{кр}}{EI} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ тенгликка эришилса, қўйилган масала факат тривиал ечимгагина эга бўлиб қолмай, тривиалмас ечимга ҳам эга бўлади; ўша ечим $y = C \sin \frac{\pi}{l}x$ кўринишда бўлади. Бу ҳолда стерженининг эгилиши рўй беради. $P_{кр}$ кучни топиб ўрнига қўямиз:

$$P_{кр} = EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Бу ифода 1757 йилда Л. Эйлер томонидан топилган.

8-БОБ

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

8.1-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

n - тартибли оддий дифференциал тенгламалар 4- бобда кўрилган эди. Унда номаълум функция битта $y(x)$ бўлиб, тенгламада унинг ҳосилалари иштирак этар эди ((4.1) ва (4.2) ларга қаранг). Агар номаълум функциялар n та бўлиб, улар битта эркин ўзгарувчининг функциялари бўлса, қуйидаги n та дифференциал тенгламани кўриш мумкин:

Биз биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасига эгамиз. Бундай системалар текшириш, интеграллаш учун анча кулай хусусиятларга эга. Биз юкорида ушбу

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

детерминанти шартга кўра нолдан фарқли. Шунинг учун (8.8) система фақат тривиал ечимга эга, яъни ушбу

$$\varphi'_2 \equiv f_2, \varphi'_3 \equiv f_3, \dots, \varphi'_n \equiv f_n$$

айниятга эгамиз. Энди $\varphi'_1 \equiv f_1$ бўлгани учун $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялар системаси (8.3) системанинг ечими экани келиб чиқади. Демак, (8.3) система билан (8.6) тенглама эквивалентдир.

Қайд қилиб ўтаминки, агар (8.3) системада f_1 функция $y_2, y_3, \dots, y_n$ ларга боғлиқ бўлмаса, бу системани y_1 га нисбатан n - тартибли битта дифференциал тенгламага келтириб бўлмайди. Бу ҳолда $y'_1 = f_1(x, y_1)$ бўлганидан

$$f_1(x, y_1) = F_1(x, y_1), y'_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 = F_2(x, y_1), \dots,$$

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1)$$

ларга эгамиз. Аммо бу $F_1, F_2, \dots, F_n$ функциялар $y_2, y_3, \dots, y_n$ ларга боғлиқ бўлмагани учун,

$$\begin{aligned} D(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}) \\ D(y_2, y_3, \dots, y_n) \equiv 0 \end{aligned}$$

айниятга келамиз. Тўғри, $y_1^{(n)} = F_n(x, y_1)$ тенглама y_1 га нисбатан n - тартибли, аммо у (8.3) системага эквивалент эмас! Бундан кўринадики, берилган системани ихтиёрий $y_i (1 \leq i \leq n)$ га нисбатан n - тартибли битта тенгламага келтириш, умуман айтганда, мумкин эмас. Агар бирор y_i учун

$$\begin{aligned} D(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}) \\ D(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \neq 0 \end{aligned}$$

бўлса, у ҳолда шу y_i функцияга нисбатан n - тартибли битта дифференциал тенгламани ҳосил қила оламиз.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = -y_1 \end{cases}$$

система учун $y_1 = \cos x, y_2 = -\sin x$ функциялар системаси ечим бўлади. Бу ҳолда $D_1 = R^1$ бўлиб, 8.1 таърифнинг шартлари $\cos x$ ва $-\sin x$ лар учун $-\infty < x < \infty$ интервалда бажарилади. Берилган системани битта иккинчи тартибли тенгламага келтириш осон. Унинг учун системанинг биринчи тенгламасини дифференциаллаймиз ва иккинчисидан фойдаланамиз:

$$y''_1 = y'_2 = -y_1 \text{ ёки } y''_1 + y_1 = 0.$$

Равшанки, $F_1 = y_2, F_2 = y'_2 (= -y_1)$ бўлганидан $\frac{D(F_1)}{D(y_2)} = \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 1 \neq 0$ ва $y'_1 = F_1$

(яъни $y'_1 = y_2$) дан y_2 учун ифодани $y''_1 = F_2$ ёки $y''_1 = y'_2$ тенгламага қўйиш лозим. Шу сабабли юқоридаги $y''_1 + y_1 = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг умумий ечими $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, y_2 = +y'_1$ бўлгани учун $y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган системанинг ихтиёрий ечими

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

формула билан ёзилади.

$$\begin{cases} C_1 \cos x + C_2 \sin x = y_1, \\ C_1 \sin x - C_2 \cos x = -y_2 \end{cases}$$

бир жишли бўлмаган чизикли алгебраик тенгламалар системасидан (унинг детерминанти (-1) га тенг) $C_1 = y_1 \cos x - y_2 \sin x$, $C_2 = y_2 \cos x + y_1 \sin x$ га эгамиз. Бу нфодаларни $y'_1 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $y'_2 = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$ тенгликларга қўямиз:

$$\begin{aligned} y'_1 &= -(y_1 \cos x - y_2 \sin x) \sin x + (y_2 \cos x + y_1 \sin x) \cos x = \\ &= -y_1 \cos x \sin x + y_2 \sin^2 x + y_2 \cos^2 x + y_1 \sin x \cos x = y_2; \\ y'_2 &= -(y_1 \cos x - y_2 \sin x) \cos x - (y_2 \cos x + y_1 \sin x) \sin x = \\ &= -y_1 \cos^2 x + y_2 \sin x \cos x - y_2 \cos x \sin x - y_1 \sin^2 x = -y_1 \end{aligned}$$

Бундан кўринадики, берилган система келиб чиқди.

Юқорида киритилган D_{n+1}^* соҳанинг ҳар бир нуктасидан (8.3) системанинг ягона интеграл чизиги ўтади. Умумий ечим таърифига кўра $C_1, C_2, \dots, C_n$ узгармасларининг турли қийматларида биз системанинг тегишли ечимларини ҳосил қиламиз. Бу ечимларни *хусусий ечим* дейилади. Ҳар бир хусусий ечим учун, яъни

$$\begin{aligned} y_1 &= q_1(x, C_1^0, \dots, C_n^0), \quad y_2 = q_2(x, C_1^0, \dots, C_n^0), \quad \dots, \\ y_n &= q_n(x, C_1^0, \dots, C_n^0) \end{aligned}$$

ечим учун ушбу $f(x, q_1(x, C_1^0, \dots, C_n^0), \dots, q_n(x, C_1^0, \dots, C_n^0)) \in D_{n+1}^*$ тегишлилик шарти бажарилади. $(n+1)$ ўлчовли D_{n+1}^* соҳа хусусий ечимларнинг графикларидан иборат бўлган интеграл чизиклар билан қопланган, яъни D_{n+1}^* соҳанинг ихтиёрий $(x, y_1, \dots, y_n)$ нуктасидан ягона интеграл чизик ўтади (таъриф бўйича).

Энди D_{n+1} соҳанинг D_{n+1}^* соҳага тегишли бўлмаган нукталарини, яъни ушбу $D_{n+1} \setminus D_{n+1}^* = D^0$ соҳанинг нукталарини текширайлик. Бу D^0 соҳанинг нукталаридан ё битта ҳам интеграл чизик ўтмайди, ёки биттадан ортиқ интеграл чизик ўтади. Аммо биз (8.3) системанинг ўнг томони D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлган ҳолни кўраймиз. Бу ҳолда ҳар бир $(x, y_1, \dots, y_n) \in D_{n+1}$ нуктадан, демак, ҳар бир $(x, y_1, \dots, y_n) \in D^0$ нуктадан камида битта интеграл чизик ўтади. Биз кўраётган ҳолда D^0 соҳанинг ҳар бир нуктасидан биттадан ортиқ интеграл чизик ўтади, яъни D^0 соҳанинг ҳар бир нуктасида ечимнинг ягоналиги шарти бузилади. Ҳар бир нуктасида ечимнинг ягоналиги ҳоссаи бузиладиган ечимлар системанинг *махсус ечим*и дейилади (система учун ҳам 3.4-таърифга ўхшаш таъриф киритиш мумкин).

$f_k(x, y_1, \dots, y_n)$, $k=1, 2, \dots, n$ функциялар ёпиқ $D_{n+1}^* = \overline{D_{n+1}^*}$ тўпلامда қаралапти дейлик. Ечимнинг ягоналиги бузиладиган нукталар шу тўпلامнинг чегарасида ётади, чунки белгилан бўйича D_{n+1}^* тўпلامда умумий ечим аниқланган ва демак, бу тўпلامнинг биронта ҳам ички нуктасидан махсус ечимнинг графиги* ўт-

* Умумий ва махсус ечимлар ҳақидаги тўла маълумотни Н. П. Ерутинини китобидан ўқини мумкин [12].

майди. Агар $\partial \bar{D}_{n+1}$ деб D_{n+1} тўпламнинг чегарасини белгиласак, юқорида киритилган D° тўплам асосан шу $\partial \bar{D}_{n+1}$ дан иборат бўлади, яъни $D^\circ = \partial D_{n+1}$. Бу ҳолда $D_{n+1}^* = D_{n+1}$ (очиқ тўплам), $D^\circ = \bar{D}_{n+1} \setminus D_{n+1}^*$. Махсус ечим ихтиёрий ўзгармасларни ҳам ўз ичига олиши мумкин. Аммо у ечимлар $(n+1)$ ўлчовли тўплам чегарасида ётгани учун ихтиёрий ўзгармаслар сони n дан кам бўлади.

$$\text{Мисол. Ушбу } \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}, \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad y \geq 0$$

системанинг умумий ва махсус ечимлари топилин.

Бу системанинг умумий ечими

$$y = (t + C_1)^2, \quad x = \frac{(t + C_1)^3}{3} + C_2$$

формула билан ёзилади. Буни таърифга кўра бевосита ҳисоблаб билиш мумкин. Аммо $y=0$, $x=C$ (C ихтиёрий ўзгармас) функциялар ҳам ечим ва умумий ечим формуласидан C_1 ва C_2 ларнинг биронта ҳам қийматида ҳосил бўлмайди. Демак, $y=0$, $x=C$ махсус ечимдир. $f_1(t, x, y) = 2\sqrt{y}$, $f_2(t, x, y) = y$ функциялар учун $\bar{D}_2 = \{(t, x, y) : -\infty < x < \infty, y \geq 0\}$. Бу тўплам ёпик, унинг чегараси $\partial D_2 = \{y=0\}$. Махсус ечим шу чегарада ётади ва битта ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олади.

Яна D_{n+1}^* соҳага қайтайлик. Шу соҳага тегишли ҳар бир $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in D_{n+1}^*$ нукта учун ягона $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ қийматлар мос келади, ва ақсинча, $x = x_0$ бўлганда $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ ларга ягона $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ лар мос келади. Шунинг учун баъзи ҳолларда ечимни

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \quad k=1, 2, \dots, n \quad (8.14)$$

кўринишда ҳам ёзилади. Бу ерда $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ лар ихтиёрий бўлгани учун (8.14) кўринишда ёзилган ечимни *Коши формасида ёзилган умумий ечим* дейилади.

8.2-§. НОРМАЛ СИСТЕМА УЧУН МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАЛАРИ

Биз (8.5) система учун мавжудлик ва ягоналик теоремалари билан танишамиз. Аввал (8.3) системани (ёзувни анча қулайлаштирадиган) вектор шаклда ёзамиз:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (8.15)$$

$$\text{бунда } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} \quad \text{лар устун векторлар. Баъ-}$$

зи ҳолларда яна координаталар ёрдамида ёзишга қайтамиз. Вектор шаклда умумий ечим

$$y = \varphi(x, C) \text{ ёки } y = \varphi(x, x_0, y^0)$$

кўринишда, хусусий ечим эса $y = \varphi(x)$ ёки x_0, y^0 лар тайинланган бўлса, $y = \varphi(x, x_0, y^0)$ кўринишда ёзилади. $f(x, y)$ вектор-функциядан y вектор бўйича олинган ҳосила $\frac{\partial f}{\partial y}$ ушбу

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

матрицадан иборат.

8.1-теорема (Коши теоремаси). Агар (8.3) системада $f_1, \dots, f_n$ функциялар $(n+1)$ ўлчовли D_{n+1} соҳада аниқланган ва ўзлуксиз бўлиб, бу функцияларнинг $y_1, \dots, y_n$ лар бўйича ҳосиласи, яъни $\frac{\partial f_i(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) функциялар Q_{n+1} ($Q_{n+1} \subset D_{n+1}$)

соҳада аниқланган ва ўзлуксиз бўлса, y ҳолда:

1°. (8.3) системанинг бирор I интервалда аниқланган ва ихтиёрый тайинланган $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in Q_{n+1}$ нуқта учун $\varphi_i(x_0) = y_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд;

2°. Агар $\varphi(x), x \in I_1$ ва $\psi(x), x \in I_2$ вектор-функцияларнинг ҳар бири (8.15) тенгламанинг ечими бўлиб, $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y^0, y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)^*$ шарт бажарилса, y ҳолда бу $y = \varphi(x)$ ва $y = \psi(x)$ ечимлар аниқланиш интервалларининг умумий қисмида устма-уст тушади, яъни

$$\varphi(x) \equiv \psi(x), x \in I_1 \cap I_2.$$

8.3-таъриф. Агар $f_1(x, y_1, \dots, y_n), f_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ функциялар D_{n+1} соҳада аниқланган бўлиб, шу функциялар учун шундай $L \geq 0$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрый икки $(x, y^{(1)}) \in D_{n+1}, (x, y^{(2)}) \in D_{n+1}$ нуқта учун ушбу

$$|f_i(x, y^{(1)}) - f_i(x, y^{(2)})| \leq L \left(\sum_{j=1}^n |y_j^{(1)} - y_j^{(2)}| \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (8.16)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, y ҳолда тегишли функциялар D_{n+1} соҳада $y_1, y_2, \dots, y_n$ лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради дейилади, L эса Липшиц ўзгармаси дейилади (4.3-таърифга қаранг).

8.2-теорема (Коши — Пикар — Линделёф теоремаси). Агар $f(x, y)$ вектор-функция D_{n+1} соҳада аниқланган ва ўзлуксиз бўлиб,

шу D_{n+1} соҳада $y_1, \dots, y_n$ лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда ҳар бир $(x_0, y^0) \in D_{n+1}$ учун шундай ўзгармас $h > 0$ сон топиладики, натижада (8.3) системанинг $(x_0, y^0_1, \dots, y^0_n) \in D_{n+1}$ бўлганда $\varphi(x_0) = y^0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $I = \{x: |x - x_0| \leq h\}$ ораликда аниқланган ягона ечими мавжуд бўлади.

8.3-теорема (Пеано теоремаси). Агар $j(x, y)$ вектор-функция $(n+1)$ ўлчовли D_{n+1} соҳада аниқланган ва ўзлуксиз бўлиб, $(x_0, y^0) \in D_{n+1}$ бўлса, у ҳолда (8.15) тенгламанинг $y(x_0) = y^0$ шартни қаноатлантирадиган камида битта ечими мавжуд бўлади.

Куйида биз 8.2-теореманинг исботига тўхталамиз. Бунда 1-бобнинг 11-§идаги скаляр тенглама учун Пикар теоремасининг исботида юритилган мулоҳазалар умумлаштирилади.

D_{n+1} соҳада маркази $(x_0, y^0) \in D_{n+1}$ нуктада бўлган ва чегараси билан бутунлай шу соҳада жойлашган бирор $(n+1)$ — тартибли P_{n+1} параллелепипед (гиперпараллелепипед) чизиш мумкин (исботи ўқувчига ҳавола). Унинг абсцисса ўқиға параллел кйрраси узунлигини $2a$, қолган n та ўқларға параллел кйрралари узунлигини мос равишда $2b_1, \dots, 2b_n$ деб белгилаймиз, бунда a ва b_i , $i=1, n$ лар чекли мусбат сонлар. Шундай қилиб,

$$P_{n+1} = \{(x, y_1, \dots, y_n) : |x - x_0| \leq a, |y_i - y^0_i| \leq b_i, i=1, n\},$$

$P_{n+1} \subset D_{n+1}$ ва P_{n+1} — ёник, чегараланган тўплам. D_{n+1} соҳада ўзлуксиз бўлган $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ (қисқача, $f_i(x, y)$), $i=1, n$ функциялар P_{n+1} да ҳам ўзлуксиз бўлади. P_{n+1} ёник, чегараланган бўлгани учун $f_i(x, y)$ функция унда чегараланган бўлади, яъни $\max_{(x, y) \in P_{n+1}} |f_i(x, y)| = M_i$, $M_i \geq 0$. Агар барча $M_1, M_2, \dots, M_n$ сонлар

бараварига нолға тенг бўлса, $f_i(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in P_{n+1}$ бўлади ҳам-да (8.3) система содда $\frac{dy_1}{dx} = 0, \frac{dy_2}{dx} = 0, \dots, \frac{dy_n}{dx} = 0$ кўринишда ёзилади. Ундан $y_1(x) = C_1, y_2(x) = C_2, \dots, y_n(x) = C_n$ келиб чиқади. (8.9) шартни қаноатлантирадиган ечим эса, вектор кўринишда $y(x) \equiv y^0$ каби ёзилади. Демак, (8.3) системанинг $|x - x_0| \leq a$ ораликда аниқланган ва (8.9) шартни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва ягона. Теорема бу ҳолда исбот этилди.

Энди $M_1, M_2, \dots, M_n$ сонлар бараварига нолға тенг бўлмасин. Ушбу $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, $h = \min\left\{a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}\right\}$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда теореманинг исботи бир неча босқичда амалға оширилади.

1. Агар $y = \varphi(x)$, $|x - x_0| \leq h$, вектор-функция (8.15) вектор-тенгламанинг (8.9) шартни қаноатлантирадиган ечими бўлса,

у ҳолда $|x - x_0| \leq h$ ораликда $\frac{dq(x)}{dx} \equiv f(x, q(x))$ вектор-айният ўринли бўлади. Бу ҳолда $|x - x_0| \leq h$ ораликда ушбу

$$q(x) \equiv y^0 + \int_{x_0}^x f(\tau, q(\tau)) d\tau \quad (8.17)$$

вектор-айният ҳам ўринли бўлади ва асосан, агар бирор узлуксиз $y = q(x)$ вектор-функция учун $|x - x_0| \leq h$ ораликда (8.17) аиният ўринли бўлса, унда $y = q(x)$ вектор-функция дифференциалланувчи бўлади, шу билан бирга у (8.15) вектор-тенгламанинг (8.9) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлади. Шундай қилиб, (8.15) вектор-тенглама (8.9) шарт билан бирга олинган (8.17) аиниётга эквивалент. Бу тасдиқларнинг исботи 1-бобдаги скаляр дифференциал тенгламага оид тегишли тасдиқларнинг исботига ўхшаш.

II. Теоремани Пикарнинг кетма-кет яқинлашши усули билан исботлаймиз. Бунда аввал «ечимга яқинлашшилар» деб аталадиган вектор-функциялар курилади.

Бошланғич яқинлашши сифатида y^0 векторни оламиз. Кейинги яқинлашшилар (вектор-функциялар) куйидагича курилади:

$$y^j(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y^{j-1}(\tau)) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, y^0(x) \equiv y^0. \quad (8.18)$$

Курилган $y^1(x), y^2(x), \dots, y^n(x), \dots$ вектор-функциялар маълум хоссаларга эга:

1. $y^j(x_0) = y^0, j = 1, 2, \dots$, яъни ҳар бир $y^j(x)$ вектор-функция (8.9) шартни қаноатлантиради;

2. Ҳар бир $y = y^j(x), j = 1, 2, \dots$ функциянинг графиги $|x - x_0| \leq h$ ораликда P_{n+1} дан чиқиб кетмайди. Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned} |y^j(x) - y^0| &= \left| \int_{x_0}^x f_i(\tau, y^{j-1}(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_i(\tau, y^{j-1}(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &\leq M_i |x - x_0| \leq Mh \leq M \frac{b_i}{M} = b_i, \quad i = 1, n; \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Математик индукция усули билан ихтиёрий s сон учун $|y^s(x) - y^0| \leq b_i$ тенгсизлик ўринли бўлганда $s+1$ сон учун $|y^{s+1}(x) - y^0| \leq b_i$ тенгсизлик ҳам ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, $(x, y^j(x)) \in P_{n+1}, |x - x_0| \leq h, j = 1, 2, \dots$

3. $y = y^j(x), j = 1, 2, \dots$ вектор-функциялар $|x - x_0| \leq h$ ораликда узлуксиз. Бу тасдиқ 1-бобдаги тегишли тасдиққа ўхшаш исботланади.

III. Энди (8.18) вектор-функциялардан n та $\{y^k(x)\}, i = 1, n,$

функционал кетма-кетлик тузамиз. Улар $|x - x_0| \leq h$ ораликда текис яқинлашувчи. Бунини кўрсатиш учун ушбу n та ($i = 1, n$)

$$y_i^0 + (y_i^1(x) - y_i^0) + (y_i^2(x) - y_i^1(x)) + \dots + (y_i^k(x) - y_i^{k-1}(x)) + \dots \quad (8.19)$$

функционал қатор тузамиз. Бу қаторларнинг ҳар бири $|x - x_0| \leq h$ ораликда текис яқинлашади.

Ҳақиқатан, (8.19) қаторнинг хусусий йиғиндиси $s_i(x) = y_i^k(x)$. Агар биз (8.19) қаторнинг $|x - x_0| \leq h$ ораликда текис яқинлашувчи эканини кўрсатсак, бундан $\{y_i^k(x)\}$, $i = 1, n$, кетма-кетликнинг ҳам шу ораликда текис яқинлашувчилиги келиб чиқади. Шу мақсадда (8.19) қаторнинг ҳар бир ҳадини баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} |y_i^1(x) - y_i^0| &= \left| \int_{x_0}^x f_i(\tau, y_i^0) d\tau \right| \leq M_i |x - x_0|; \\ |y_i^2(x) - y_i^1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f_i(\tau, y_i^1(\tau)) - f_i(\tau, y_i^0)] d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x [f_i(\tau, y_i^1(\tau)) - f_i(\tau, y_i^0)] d\tau \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_i^1(\tau) - y_i^0| d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left(\sum_{i=1}^n M_i \right) \left| \int_{x_0}^x |\tau - x_0| d\tau \right| = LM_0 \frac{|x - x_0|^2}{2}, \end{aligned}$$

бу ерда $M_0 = \sum_{i=1}^n M_i$;

$$\begin{aligned} |y^3(x) - y^2(x)| &\leq M_0 L(nL) \frac{|x - x_0|^3}{3!}; \\ |y^k(x) - y^{k-1}(x)| &\leq M_0 L(nL)^{k-2} \frac{|x - x_0|^k}{k!}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ушбу

$$(|y_i^0| + M_i h) + \sum_{k=2}^{\infty} M_0 L(nL)^{k-2} \frac{h^k}{k!}, \quad i = 1, n,$$

сояли қаторни кўрамиз. Бу қатор Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи. Ҳақиқатан,

$$a_k = M_0 L(nL)^{k-2} \frac{h^k}{k!}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{nLh}{k+1} = 0 < 1.$$

Шу сабабли Вейерштрасс теоремасига кўра кўрилайётган (8.19) функционал қатор ва демак, $\{y_i^k(x)\}$, $i = 1, n$, функционал кетма-кетлик

ҳам $|x - x_0| \leq h$ ораликда бирор узлуксиз $Y_i(x)$ функцияга текис яқинлашади. Шундай қилиб,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k(x) = Y_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.20)$$

муносабатни ёзиш мумкин, (8.18) тенгликларга кўра $Y_i(x_0) = y_i^0$. Агар $|y_i^k(x) - y_i^0| \leq b_i$ тенгсизликда $k \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, $|Y_i(x) - y_i^0| \leq b_i$ тенгсизлик келиб чиқади. Агар $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ функциялардан тузилган вектор-функцияни $Y(x)$ деб белгиласак, юқоридаги тенгсизлик $(x, Y(x)) \in P_{n+1}$ тегишлилик ўринли эканини кўрсатади.

IV. Топилган $y = Y(x)$ вектор-функция (8.17) тенгламанинг ечими эканини исбот этамиз. Аввало қайд қилиб ўтамизки, $\{y_i^k(x)\}$, $i = 1, \dots, n$, кетма-кетлик $|x - x_0| \leq h$ ораликда $y = Y(x)$ функцияга текис яқинлашади. Шунинг учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон берилганда ҳам шундай $N = N(\varepsilon) > 0$ сон топиладики, k нинг $k > N(\varepsilon)$ тенгсизликини қаноатлантирадиган барча қийматлари учун $|x - x_0| \leq h$ ораликда

$$|y_i^k(x) - Y_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди бундан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^x f_i(\tau, y^k(\tau)) d\tau - \int_{x_0}^x f_i(\tau, Y(\tau)) d\tau \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{x_0}^x |f_i(\tau, y^k(\tau)) - f_i(\tau, Y(\tau))| d\tau \right| \leq \\ & \leq L \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n |y_i^k(\tau) - Y_i(\tau)| d\tau \leq Lnh\varepsilon. \end{aligned}$$

Бундан $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_i(\tau, y^k(\tau)) d\tau = \int_{x_0}^x f_i(\tau, Y(\tau)) d\tau$ келиб чиқади. Шунинг учун (8.18) да $j \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак,

$$Y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f(\tau, Y(\tau)) d\tau, \quad |x - x_0| \leq h,$$

тенгликка эга бўламиз. Бу эса, $y = Y(x)$ вектор-функция (8.17) вектор-тенгламанинг ёки, барибир, (8.15) вектор-тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$ ораликда аниқланган ва $Y(x_0) = y^0$ шартни қаноатлантирадиган ечими эканини аниқлатади.

Агар $L = 0$ бўлса ҳам мулоҳазалар ўринли, фақат $y_i^k(x) \equiv Y_i(x)$ ва $\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k(x) = Y_i(x)$ бўлади ва тегишли $y = Y(x)$ вектор-функция ечим бўлади.

V. Ниҳоят, топилган $y = Y(x)$ ечим ягона эканини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $y = Y(x)$, $|x - x_0| \leq h$ ечимдан фарк қиладиган яна битта $y = Z(x)$, $|x - x_0| \leq d$, $d \neq h$, $d \leq a$, $Z(x_0) = y^0$ ечим бор бўлсин. $h = \min\{h, d\}$ дейлик. Биз $|x - x_0| \leq h$ ораликда $y = Y(x)$ ва $y = Z(x)$ вектор-функцияларни қўраимиз. Тавлашга қўра $Y(x) \neq Z(x)$, $|x - x_0| \leq h_*$. Ушбу $u(x) = \sum_{i=1}^n |Y_i(x) - Z_i(x)| \geq 0$ функцияни қарай-

миз. $\epsilon < \min\left(h_*, \frac{1}{nl}\right)$, $L > 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $\epsilon > 0$ сонни оламиз. $[x_0, x_0 + \epsilon]$ ораликда ($[x_0 - \epsilon, x_0]$ ораликда ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш) узлуксиз бўлган $u(x)$ функция шу оралиқнинг бирор δ нуқтасида ўзининг энг катта қийматига эришадиган $u(\delta) = \max_{x \in [x_0, x_0 + \epsilon]} u(x) = m \geq 0$. Сodat ҳисоблашлар ёрдамида

тонамиз:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^n |Y_i(x) - Z_i(x)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_0}^x f_i(\tau, Y(\tau)) - \right. \\ &\quad \left. - f_i(\tau, Z(\tau)) d\tau \right| \leq L \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \left(\sum_{i=1}^n |Y_i(\tau) - Z_i(\tau)| \right) d\tau \right| \leq \\ &\leq L \sum_{i=1}^n (m\epsilon) = Lnm\epsilon. \end{aligned}$$

(агар $L=0$ бўлса, $Y_i(x) \equiv Z_i(x)$, $x \in [x_0, x_0 + \epsilon]$ бўлади).

Демак,

$$u(x) \leq Lnm\epsilon, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon]. \quad (8.21)$$

Агар $m=0$ бўлса, $u(x) \leq 0$ бўлади. Аммо $u(x) \geq 0$ бўлгани учун $u(x) \equiv 0$ бўлади. Агар $m > 0$ бўлса, (8.21) да $x = \delta \in [x_0, x_0 + \epsilon]$ деб, $m \leq Lnm\epsilon$ ёки $Ln\epsilon \geq 1$ тенгсизликка эга бўламиз. Ундan $\epsilon \geq \frac{1}{nl}$ келиб чиқади. Бу эса, юқорида ϵ соннинг танланишига зид.

Демак, m сон учун фақат $m=0$ ҳол содир бўлиши мумкин. Шундай қилиб, $[x_0, x_0 + \epsilon]$ ораликда $u(x) \equiv 0$, яъни $Y_i(x) \equiv Z_i(x)$ ўринли. Бу эса дастлабки фаразга зид. Демак, $y = Y(x)$ ечимдан фарк қиладиган ва $Y(x_0) = Z(x_0) = y^0$ шартни қаноатлантирадиган иккинчи $y = Z(x)$ ечим мавжуд эмас экан. Ҳудди шундай мулоҳазаларни $[x_0 - \epsilon, x_0]$ оралик учун ҳам олиб бориш мумкин. Шундай қилиб, $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ ораликда ягоналик исбот этилди. Ечимни давом эттириш ёрдамида $|x - x_0| \leq h$ ораликда ҳам ягоналикни исботлаш мумкин.

Шу билан 8.2-теорема тўлиқ исбот этилди.

Нормал система учун ҳам ҳосиллага нисбатан ечилган биринчи тартибли битта тенгламадаги каби ϵ - тақрибий ечим тушуничасини киритамиз. Аввал вектор-функция нормасини киритайлик.

Агар $y = q(x)$ вектор-функция бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлса, унинг нормаси $\|q(x)\|$ қуйидагича

$$\|q(x)\| = \max_{x \in I} |q(x)|$$

аниқланади.

8.4- таъриф. (8.15) вектор-тенглама берилган бўлиб, унда $f(x, y)$ вектор-функция D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлсин. Агар бирор I интервалда аниқланган $y = q(x)$ вектор-функция учун ушбу тўртта шарт:

1°. $(x, q(x)) \in D_{n+1}$, $x \in I$;

2°. $q(x) \in C^1$, $x \in I \setminus S$, бунда S тўплам $\frac{dq(x)}{dx}$ ҳосила I - тур узил-лишга эга бўлган ёки мавжуд бўлмаган нуқталар тўпи;

3°. $\left\| \frac{dq(x)}{dx} - f(x, q(x)) \right\| \leq \epsilon$, $x \in I \setminus S$;

4°. S чекли тўплам, ўринли бўлса, y ҳолда $y = q(x)$ вектор-функция I интервалда (8.15) вектор-тенгламанинг ϵ - тақрибий ечими дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, агар $\epsilon = 0$ ва $S = \emptyset$ бўлса, $q(x) \in C^1$, $x \in I$ ва $\frac{dq(x)}{dx} = f(x, q(x))$, $x \in I$ бўлади. Бу ҳолда биз система учун ечим таърифига эга бўламиз.

8.4- теорема. Агар (8.15) вектор-тенгламада $f(x, y)$ вектор-функция ҳамма нуқталари билан D_{n+1} соҳада жойлашган $(n+1)$ - тартибли чегараланган P_{n+1} параллелепипедда (8.2- теоремага к.) узлуксиз бўлса, y ҳолда $\epsilon > 0$ сон қандай бўлмасин (8.15) вектор-тенгламанинг $|x - x_0| \leq h$ ($h = \min \left(a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M} \right)$, $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, $M_i = \max_{(x, y) \in P_{n+1}} |f_i(x, y)|$, $\sum_{i=1}^n M_i^2 \neq 0$) оралиқда $\varphi(x_0) = y_0$

бошланғич шартни қаноатлантирадиган ϵ - тақрибий ечими $y = q(x)$ мавжуд.

Исботи скаляр тенглама учун айтилган 2.1- теореманинг исботига ўхшаш.

8.4-§. ЕЧИМНИНГ БОШЛАНҒИЧ ҚИЯМАТ ВА ПАРАМЕТРЛАРГА УЗЛУКСИЗ БОҒЛИҚЛИГИ

1. Дастлабки маълумотлар. Аввалги параграфда бошланғич қийматлари x_0, y_0 бўлган ечимни $q(x, x_0, y_0)$ деб белгиладик. Бу вектор-функция $(n+2)$ ўлчовли соҳада аниқланган бўлиб, x, x_0, y_0 ,

... , y_n^0 ларнинг функцияси дир, x бўйича тегишли интервалда узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи бўлган бу вектор-функция x_0 ва $y_1^0, \dots, y_n^0$ ларга қандай боғланган? - деган савол туғилади.

Ушбу

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y^0 \end{cases} \quad (8.15)$$

$$(8.9)$$

Коши масаласида $x = \xi - x_0$, $y = \eta - y^0$ алмаштиришни бажарамиз, натижада юқоридаги масала қуйидаги

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{d\xi} = f(\xi - x_0, \eta - y^0), \\ \eta(0) = 0 \end{cases}$$

Коши масаласига келади, буьда бошланғич қийматлар тайинланган; $\xi = 0$, $\eta = 0$. (8.15) вектор-тенгламани $\frac{d\eta}{d\xi} = f(\xi - x_0, \eta - y^0)$ каби ёзиб, x_0 , y^0 ларни параметрлар деб қараб, ечимнинг шу параметрларга боғлиқлигини текшириш мумкин. Шу усул билан ечимнинг бошланғич қийматларга боғлиқлигини текшириш тегишли ечимнинг параметрларга боғлиқлигини текширишга келтирилади.

2. Ечимнинг параметрларга узлуксиз боғлиқлиги. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \quad (8.22)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)^*, \mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)^*,$$

вектор дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг ўнг томони $f(x, y, \mu)$ вектор-функция $(n + l + 1)$ ўлчовли R^{n+l+1} фазонинг бирор очик D_{n+l+1} соҳасида аниқланган ва узлуксиз, шу билан бирга

$$\frac{\partial f_i(x, y, \mu)}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (8.23)$$

функциялар ҳам ўша D_{n+l+1} соҳада узлуксиз. R^{n+l+1} фазонинг нуқталарини (x, y, μ) деб белгилаймиз. x_0 ва y^0 бошланғич қийматларни тайинлаймиз. M билан μ параметрнинг шундай қийматлари тўпламини белгилаймизки, (x_0, y^0, μ) нуқта D_{n+l+1} соҳага тегишли бўлади. Демак, агар $\mu \in M$ бўлса, u ҳолда $(x_0, y^0, \mu) \in D_{n+l+1}$ бўлади ва аксинча, агар $(x_0, y^0, \mu) \in D_{n+l+1}$ бўлса, u ҳолда $\mu \in M$ бўлади.

Кирилган M тўплам очик. Ҳар бир $(\mu_1, \dots, \mu_r) \in M$ нуқтага (8.41) вектор-тенгламанинг x_0, y^0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва $m_1(\mu) < x < m_2(\mu)$ интервалда аниқланган давомсиз ечим $\varphi(x, \mu)$ мос келади (1-бў, 12-§ даги мулоҳазалар вектор-тенглама учун ҳам ўринли). Шу $\varphi(x, \mu)$ ечим аниқланган тўплами T дейлик. Бу тўплам x, μ жуфтликлар тўплами бўлиб, унда $\varphi(x, \mu)$ аниқланган.

Демак, T тўпламнинг нуқталари учун $\mu \in M$, $m_1(\mu) < x < m_2(\mu)$ муносабатлар ўринли. M тўплам l ўлчовли, T тўплам эса $(l+1)$ ўлчовлидир. Энди ечимнинг параметрларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақида теоремани баён этамиз:

8.6-теорема. *T тўплам очик тўпламдир. Вектор-функция $\varphi(x, \mu)$ эса T тўпламда узлуксиздир.*

Теореманинг исботини [1] китобдан ўқишни тавсия қиламиз.

3. Ечимнинг бошланғич қийматларга узлуксиз боғлиқлиги. Бизга (8.15) вектор-дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ вектор-функция $(n+1)$ ўлчовли R^{n+1} фазонинг

бирор D_{n+1} соҳасида аниқланган ва хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ билан шу D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлсин. D_{n+1} соҳанинг ҳар бир (ξ, η) нуқтасига (8.15) вектор-тенгламанинг $x_0 = \xi$, $y_0 = \eta$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $m_1(\xi, \eta) < x < m_2(\xi, \eta)$ интервалда аниқланган давомсиз ечими $\varphi(x, \xi, \eta)$ мос келади. $x, \xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ўзгарувчилар фазосининг D_{n+1} соҳага тегишли (ξ, η) нуқталарга ва $m_1(\xi, \eta) < x < m_2(\xi, \eta)$ тенгсизлиқни қаноатлантирадиган x ларга мос келган (x, ξ, η) нуқталардан тузилган тўламни S деб белгилаймиз. Энди ечимнинг бошланғич қийматларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақида теоремани келтирамиз.

8.7-теорема. (8.15) вектор тенгламанинг ξ, η бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими $\varphi(x, \xi, \eta)$ аниқланган S тўлам $x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n$ ўзгарувчилар фазосида очикдир. $\varphi(x, \xi, \eta)$ вектор-функция барча аргументлари бўйича S тўламда узлуксиздир.

Бу теоремани исбот этиш ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида тайинланган бошланғич қийматларга эга бўлган ечимнинг параметрларга боғлиқлигини текширишга олиб келинади, сўнгра 8.6-теоремани қўлланилади.

8.5-§. ЕЧИМНИНГ БОШЛАНҒИЧ ҚИЯМАТ ВА ПАРАМЕТРЛАР БЎЙИЧА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИЛИГИ

1. Ечимнинг параметрлар бўйича дифференциалланувчилиги. Бизга (8.22) вектор-дифференциал тенглама берилган бўлиб,

$$f_i(x, y, \mu), \quad \frac{\partial f_i(x, y, \mu)}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial f_i(x, y, \mu)}{\partial \mu_k}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \\ k = 1, 2, \dots, l$$

функциялар $(n+1+1)$ ўлчовли очик D_{n+l+1} соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

8.8-теорема. Агар (8.22) вектор-дифференциал тенгламада $f(x, y, \mu)$ вектор-функция ва унинг y ва μ лар бўйича барча хусусий ҳосилалари $(n+1+1)$ ўлчовли D_{n+l+1} соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, y ҳолда берилган тенгламанинг T тўламда аниқланган $\varphi(x, \mu)$ ечими учун $\frac{\partial \varphi_i(x, \mu)}{\partial \mu_k}$, $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, l$ хусусий

ҳосилалар шу тўпلامда аниқланган ва узлуксиз бўлади. Ундан ташқари $\frac{\partial^2 \varphi_i(x, y)}{\partial x \partial y_k}, i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, l$ аралаш ҳосилалар ҳам T тўпلامда аниқланган, узлуксиз ва дифференциаллаш тартибига боғлиқ бўлмайди.

Теореманинг исботини [1] китобдан ўқишни тавсия қиламиз.

2. Ечимнинг бошланғич қийматлар бўйича дифференциалланувчилиги. Аввалги параграфдаги каби (8.15) вектор тенгламани кўрамиз. Унинг ўнг томони, яъни $f(x, y)$ вектор-функция очик D_{n+1} соҳада аниқланган ва хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, i, j=1, 2, \dots, n$ билан шу D_{n+1} соҳада узлуксиз. D_{n+1} соҳада олинган (ξ, η) нукта учун ξ ни $\xi=x_0$ деб тайинлаймиз, η эса ўзгарувчи бўлиб қолаверади.

8.9-теорема. (8.15) вектор тенглама берилган бўлиб, $q(x, x_0, \eta) = \varphi(x, \eta) = (\varphi_1(x, \eta), \dots, \varphi_n(x, \eta))$ функция унинг (x_0, η) бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими бўлсин. У ҳолда 8.7-теоремадан $\varphi(x, \eta)$ функциянинг $x, \eta_1, \dots, \eta_n$ ўзгарувчилар фазосининг бирор очик S' тўпلاميда аниқланган ва узлуксизлиги келиб чиқади. Шу билан бирга S' тўпلامда ушбу $\frac{\partial \varphi_i(x, \eta)}{\partial \eta_j}; i, j=1, 2, \dots, n$ хусусий ҳосилалар мавжуд ва узлуксиз; бундан ташқари, шу S' тўпلامда $\frac{\partial^2 \varphi_i(x, \eta)}{\partial x \partial \eta_j}, i, j=1, 2, \dots, n$ аралаш ҳосилалар узлуксиз ва дифференциаллаш тартибига боғлиқ эмас.

Бу теоремани исбот этиш ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида ечимнинг параметрлар бўйича дифференциалланувчилиги ҳолини исбот этишга келтирилади ва 8.8-теорема қўлланилади.

3. Вариацияли тенгламалар системаси. (8.15) вектор тенглама берилган бўлиб, $q(x, \eta) = (\varphi_1(x, \eta), \varphi_2(x, \eta), \dots, \varphi_n(x, \eta))$ вектор-функция шу тенгламанинг (x_0, η) бошланғич қийматларга эга бўлган ва $\eta=y_0$ бўлганда $m_1 < x < m_2$ интервалда аниқланган давомсиз ечими бўлсин. 8.9-теоремага асосан $\eta=y_0$ нуктада ҳисобланган ва $m_1 < x < m_2$ интервалда аниқланган хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} \varphi_i(x, y^0) = \psi_i^{(j)}(x) \quad (8.24)$$

мавжуд. Ушбу

$$f_i^j(x, y) = \frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_j}, \quad f_i^j(x) = f_i^j(x, q(x, y^0))$$

белгилашларни киритамиз. Бунда $f_i^j(x)$ функциялар $m_1 < x < m_2$ интервалда аниқланган. Қуйидаги

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^n f_i^j(x) z_j, \quad i=1, 2, \dots, \quad (8.25)$$

чизиқли тенгламалар системаси $m_1 < x < m_2$ интервалда аниқланган бўлиб, *вариацияли тенгламалар системаси* (бошланғич қийматлар бўйича) дейилади. Ушбу $z_1 = \varphi_1^i(x), \dots, z_n = \varphi_n^i(x)$ функциялар (8.25) системанинг

$$\varphi_i^j(x_0) = \delta_i^j, \delta_i^i = 0, i \neq j, \delta_i^i = 1, i = j \quad (8.26)$$

бошланғич қийматларга эга бўлган ечими бўлади, бунда δ_i^j — *Кronecker символи* деб юритилади. Бу тасдиқни исботлаш бевосита ҳисоблаш билан олиб борилади. Аниқроғи, $y = \varphi(x, \eta)$ функция (8.15) га қўйилади, сўнггра ҳосил бўлган айниятни η_i лар бўйича дифференциалланади. Кронеcker символи (8.26) ушбу (8.24) ва $\varphi_i(x, \eta) = \eta_i$ муносабатлардан келиб чиқади.

8.6-§. НОРМАЛ СИСТЕМАНИНГ ИНТЕГРАЛЛАРИ

1. Системанинг биринчи интеграллари. (8.15) вектор-дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ вектор-функция $(n+1)$ ўлчовли R^{n+1} фазосининг бирор D_{n+1} соҳасида аниқ-

ланган ва хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, \dots, n$, билан бирга

D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлсин.

8.5-тариф. D_{n+1} соҳада унинг қисмидан иборат бўлган бирор очиқ G_1 тўплам олинган бўлсин. Агар $u(x, y_1, \dots, y_n) = u(x, y)$ функция шу G_1 тўпламда аниқланган ва хусусий ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлиб, (8.15) тенгламанинг графиги G тўпламда жойлашган ихтиёрый $y = \varphi(x)$ ечимини шу $u(x, y)$ функция аргументига қўйганда x бўйича ўзгармас ҳосил бўлса (яъни $u(x, \varphi(x))$ функция x га эмас, $\varphi(x)$ функциянинг танланишига боғлиқ бўлса), y ҳолда $u(x, y)$ функция (8.15) вектор-тенгламанинг биринчи интеграли дейилади.

Демак, агар $u(x, y)$ биринчи интеграл бўлиб, $\varphi(x), (x, \varphi(x)) \in G$, вектор-функция ечим бўлса, y ҳолда

$$u(x, \varphi(x)) = C_q (C_q = \text{const})$$

деб ёзиш мумкин. Одатда ўзгармас соннинг индекси q ни ёзиб ўтирилмайди.

Агар $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири (8.15) тенгламанинг биринчи интеграли бўлиб, $u_i(x, y) = C_i, (x, y) \in G$ муносабатлар $y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n), i = 1, \dots, n$ умумий ечимни аниқласа, y ҳолда шу функциялар системаси берилган тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади. Умумий интеграл учун ушбу

$$\begin{cases} u_1(x, \varphi(x)) = C_1, \\ u_2(x, \varphi(x)) = C_2, \\ \dots \\ u_n(x, \varphi(x)) = C_n \end{cases} \quad (8.27)$$

муносабатлар ўринли (бунда $y = \varphi(x)$, $x \in I$, $(x, \varphi(x)) \in G$, ... ихтиёрий ечим).

8.10-теорема. *Алсусий ҳосилалари билан G тўпламда аниқланган ва узлуксиз $u(x, y)$ функция (8.15) тенгламанинг биринчи интегралли бўлиши учун қуйидаги*

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x, y)}{\partial y_i} f_i(x, y) = 0 \quad (8.28)$$

муносабатнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $u(x, y)$ функция (8.15) тенгламанинг биринчи интегралли бўлсин. Бу функция учун (8.28) шартнинг бажарилишини кўрсатамиз. Шундай ихтиёрий тайинланган $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ векторни оламизки, $(x, \eta) \in G$ бўлиб, $y = \varphi(x, \eta)$ функция (8.15) тенгламанинг $\varphi(\xi, \eta) = \eta$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлсин. У ҳолда $u(x, \varphi(x, \eta))$ функцияни дифференциаллаб, $u(x, \varphi(x, \eta)) = C$ эканини ҳисобга олиб, $x = \xi$ да қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} u(x, \varphi(x, \eta)) \Big|_{x=\xi} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x, \eta))}{\partial y_1} \cdot \frac{dq_1(x, \eta)}{dx} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\partial u(x, \varphi(x, \eta))}{\partial y_n} \cdot \frac{dq_n(x, \eta)}{dx} \right) \Big|_{x=\xi} = \\ &= \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial y_i} f_i(\xi, \eta). \end{aligned}$$

(ξ, η) нукта G тўпламнинг ихтиёрий нуктаси бўлгани учун G тўпламда (8.28) муносабат бажарилади.

Етарлилиги. Энди (8.28) муносабат $u(x, y)$ функция учун ўринли бўлиб, $y = \varphi(x)$ — (8.15) тенгламанинг графиги G тўпламда жойлашган ечими бўлсин. У ҳолда $u(x, y)$ га $y = \varphi(x)$ ни қўйиб, яъни $v(x) = u(x, \varphi(x))$, ҳосил бўлган функцияни дифференциаллаймиз ва (8.28) ни ҳисобга оламиз:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial y_i} f_i(x, \varphi(x)) = 0.$$

Бундан $v(x) = u(x, \varphi(x))$ функция x га боғлиқ эмаслиги келиб чиқади, яъни $u(x, \varphi(x)) = C$. Теорема исбот бўлди.

Энди биринчи интегралларнинг нуқтада эркилиги тушунчасини киритамиз.

8.6-таъриф. Агар (8.15) тенгламанинг G тўпламда аниқланган k та $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_k(x, y)$ биринчи интеграллари $(a, b) \in G$, $f(a, b) \neq 0$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, ушбу

$$\left(\frac{\partial u_i(a, b)}{\partial y_j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
& \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})} \Big|_{y=b} = \frac{\begin{vmatrix} f_1(b) & \delta_1^1 & \delta_1^2 & \dots & \delta_1^{n-1} \\ f_2(b) & \delta_2^1 & \delta_2^2 & \dots & \delta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(b) & \delta_{n-1}^1 & \delta_{n-1}^2 & \dots & \delta_{n-1}^{n-1} \\ f_n(b) & \delta_n^1 & \delta_n^2 & \dots & \delta_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(b) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_2(b) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(b) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_n(b) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}} = (-1)^{n+1} f_n(b) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\text{-та устун}} \Big\} (n-1)\text{-та йўл} \\
& = (-1)^{n+1} f_n(b) \neq 0.
\end{aligned}$$

Шу сабабли (8.31) система $y \neq b$ бўлганда ҳам ечимга эга. Уни қуйидагича ёзамиз:

$$\xi_1 = u_1(y), \xi_2 = u_2(y), \dots, \xi_{n-1} = u_{n-1}(y), x = v(y). \quad (8.33)$$

Шу $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ функциялар (8.29) тенгламанинг биринчи интеграллари бўлиб, b нуктада эркин интеграллардир. Ҳақиқатан $D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ якобианин b нуктада текширайлик. (8.30) система-

нинг якобианин b нуктада ҳисоблаганмиз. Бу якобиан эса b нуктада бирга тенг, чунки $\begin{pmatrix} D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \\ D(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}$ матрица бирлик матрица-

дан иборат. Демак, $u_1, \dots, u_{n-1}$ функциялар b нуктада эркин. Энди бу функциялар (8.29) тенгламанинг биринчи интеграллари эканини исботлаймиз. (8.33) муносабатлардан

$$u_i(y(x, \xi)) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8.34)$$

Аммо ҳосил бўлган $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ миқдорлар x га боғлиқ эмас. Демак, u_i функциялар биринчи интеграллардир. Теорема исбот бўлди.

8.12- теорема. Ушбу

$$u_{k+1}(y), \dots, u_n(y) \quad (8.35)$$

функциялар (8.29) вектор-тенгламанинг $b, b \in \bar{G}$ нуктада $(n-k)$ та эркин биринчи интеграллари бўлсин. Шу (8.35) функциялар ёрдамида (8.29) тенгламанинг тартибини $(n-k)$ га камийтириш, яъни берилган (8.29) тенгламани тартиби k бўлган нормал системага келтириш мумкин.

Исбот. (8.35) биринчи интеграллар эркин бўлгани учун ушбу $\begin{pmatrix} \partial u_i(b) \\ \partial y_j \end{pmatrix}, i = k+1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ функционал матрица

ранги $(n-k)$ га тенг бўлган квадрат матрицага эга. Аниқлик учун $\begin{pmatrix} \partial u_i(b) \\ \partial y_i \end{pmatrix}$, $i, j = k+1, \dots, n$ матрицанинг ранги $(n-k)$ дейлик. Шу матрицанинг детерминанти нолдан фарқли. Энди b нукта атрофида янги ўзгарувчиларни киритамиз:

$$z_1 = y_1, \dots, z_k = y_k, z_{k+1} = u_{k+1}(y), \dots, z_n = u_n(y). \quad (8.36)$$

(8.29) вектор-тенглама янги $z_1, \dots, z_n$ ўзгарувчилар ёрдамида бундай ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \frac{dy_1}{dx} = \\ &= f_1(z_1, \dots, z_k, \Psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n), \dots, \Psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n)), \\ \frac{dz_2}{dx} &= \frac{dy_2}{dx} = \\ &= f_2(z_1, \dots, z_k, \Psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n), \dots, \Psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n)), \\ &\dots \\ \frac{dz_k}{dx} &= \frac{dy_k}{dx} = \\ &= f_k(z_1, \dots, z_k, \Psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n), \dots, \Psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n)), \\ \frac{dz_{k+1}}{dx} &= \\ &= \frac{\partial u_{k+1}(z_1, \dots, z_k, \Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n)}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_{k+1}(z_1, \dots, z_k, \Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n)}{\partial y_i} y_i, \\ &\dots \\ \frac{dz_n}{dx} &= \\ &= \frac{\partial u_n(z_1, \dots, z_k, \Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n)}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_n(z_1, \dots, z_k, \Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n)}{\partial y_i} y_i. \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Бу системада $\Psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n) = y_{k+1}, \dots, \Psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n) = y_n$ лар (8.36) функцияларнинг охириги $(n-k)$ тасидан топилган. (Бу $\Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n$ функцияларнинг аргументлари (8.37) системада қисқалик учун ёзилмаган). (8.37) системани қисқача

$$\frac{dz_i}{dx} = g_i(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.38)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Теореманинг шартига кўра (8.36) дан $i = k+1, \dots, n$ бўлганда

$$\frac{dz_i}{dx} = \frac{d}{dx} u_i(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i(y)}{\partial y_j} f_j(y) = 0,$$

иккинчи *биринчи* *иқра*л топилади. Топишган биринчи интеграллар эркин. Ҳақиқатан, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \neq 0$, чунки, бизни тривиалмас ечим қилиқтиради. Шунинг учун ушбу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \frac{\partial u_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \frac{\partial u_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial y_1} & \frac{\partial u_3}{\partial y_2} & \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги 2 га тенг. Агар (8.39) системанинг биринчи тенгламасини u_2 га, иккинчисини u_1 га қўнайтириб, қўшсак,

$$\frac{d}{dx} (y_1, y_2) = y_2 y_3 - y_2^2 + y_1^2 - y_1 y_3$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш

$$\frac{d}{dx} (y_1, y_3) = y_3^2 - y_2 y_3 + y_1 y_2 - y_1^2, \quad \frac{d}{dx} (y_2, y_3) = y_1 y_3 - y_3^2 + y_2^2 - y_1 y_2$$

муносабатларни ҳам ҳосил қилиш мумкин. Топишган тенглакларни мос равишда қўшсак:

$$\frac{d}{dx} (y_1, y_2 + y_1, y_3 + y_2 y_3) = 0,$$

яъни

$$u_3 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = C_3. \quad (8.42)$$

яна битта биринчи интегралга эга бўламиз. Энди топишган учта биринчи интеграл эркини ёки йўқми, шунини текшираемиз. Унинг учун ушбу якобиани ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ y_2 + y_3 & y_1 + y_3 & y_1 + y_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2y_1 & 2(y_2 - y_1) & 2(y_3 - y_1) \\ y_2 + y_3 & y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Демак, $\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} \equiv 0$. Шундай қилиб, топишган учта биринчи интеграл эркин эмас экан. Шунинг учун улар умумий интеграл бўла олмайди. Учинчи эркин биринчи интегрални топиш учун (8.40) ва (8.41) лардан y_1, y_2 ларни топамиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} (C_1 - y_3 - \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2}), \\ y_2 &= \frac{1}{2} (C_1 - y_3 + \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2}). \end{aligned}$$

Бу ифодаларни (8.39) системанинг охириги тенгламасига қўямиз:

$$\frac{dy_3}{dx} = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2}.$$

Бу биринчи тартибли квадрататурада интегралланган *дифференциал* тенглама. Уни интеграллаб, топамиз:

$$\arcsin \frac{3y_3 - C_1}{\sqrt{6C_2 - 2C_1^2}} - \sqrt{3} x = C_3$$

Энди C_1 ва C_2 лар ўрнига (8.40) ва (8.41) лардан y_3 фодасини қўйсак,

$$u_3 = \arcsin \frac{2y_3 - y_1 - y_2}{2\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3}} \quad 3x = C_4 \quad (8.43)$$

учинчи биринчи интегрални топиш мумкин. Текшириш қийинмаски, (8.40), (8.41) ва (8.43) муносабатлар билан аниқланган биринчи интеграллар эркин бўлади. Демак, шу учта биринчи интеграл (8.39) системанинг умумий интегралини беради.

Нормал системанинг симметрик кўриниши. Нормал системанинг симметрик кўриниши деб ушбу

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{dx_2}{F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{aligned} \quad (8.44)$$

системага айтилади. Бу системада ҳамма $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчилар номаълум функция бўлиб, улар *тег ҳуқуқлидир*. Аммо бизга таниш бўлган

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \dots, y_n); \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \right. \quad (8.45)$$

системада ҳамма ўзгарувчилар *тег ҳуқуқли эмас*. Унда x — эркин ўзгарувчи, $y_1, \dots, y_n$ лар эса номаълум функциялардир. Шундай бўлса ҳам (8.45) нормал системани симметрик кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1} &= \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \\ &= \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Бу (8.46) системани *нормал системага мос келган симметрик кўринишдаги система* дейилади. Бу (8.46) системада энди ҳамма ўзгарувчилар тег ҳуқуқлидир.

Нормал системанинг симметрик кўриниши берилган нормал системанинг интегралланувчи комбинацияларини, шу билан бирга биринчи интегралларини топишда муҳим роль ўйнайди. Бу жараёнда ҳамма ўзгарувчилар тег ҳуқуқли бўлгани учун энг қулайини эркин ўзгарувчи деб эълон қилинади. Шунга мос равишда биринчи интеграллар топилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$$

системанинг умумий интегрални топилади.

Қўшнча симметрик кўринишда ёзилган нормал системаларни интеграллаш та теңгасларнинг ушбу элементар хоссасидан фойдаланиши мумкин бўлади:

Агар $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_p}{b_p} = \delta$ бўлса, у ҳолда ихтиёрый $k_1, k_2, \dots, k_p$ лар учун қуйидаги

$$\begin{aligned} k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_p a_p &= \delta \\ k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_p b_p &= \delta \end{aligned}$$

муносабат ўринли. Бунинг исботи содда. Агар $a_1 = \delta b_1, \dots, a_p = \delta b_p$ эканини ҳисобга олсак,

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_p a_p}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_p b_p} = \frac{\delta(k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_p b_p)}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_p b_p} = \delta.$$

Берилган системани интеграллашда шу хоссадан фойдаланиши мақсадга мувофиқ. Садда ҳисоблашлар ёрдамида

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{d(y-z)}{y-z} \quad \text{ва} \quad \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = -\frac{d(x-y)}{x-y}$$

теңгасмаларга эга бўламиз. Улардан иккита биринчи интеграллар топиш мумкин:

$$x-y = C_1 (y-z),$$

$$(x+y+z)(x-y)^2 = C_2.$$

Бу биринчи интеграллар симметрик кўринишда ёзилган иккинчи тартибли системанинг умумий интегралини беради.

2. Қуйидаги

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

система берилган бўлса,

$$\frac{x+y}{z+x} = C_1, \quad \frac{z-y}{x+y} = C_2$$

функциялар биринчи интеграллар экани кўрсатилсин ва уларнинг эркин ёки эркин эмаслиги текширилсин.

Агар берилган системада x ни эркин ўзгарувчи деб эъдон қилсак, у системани ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

нормал система кўринишда ёзиш мумкин. Бу системанинг теңгасмалари ўзгарувчиларни ажраладиган биринчи тартибли теңгасмалардир. Интеграллаш натижасида

$$y = C_1 x, \quad z = C_2 x$$

ларни топамиз. Биз иккита биринчи интегрални топдик. Улар эркин, чунки $u_1 = \frac{y}{x}$.

$u_2 = \frac{z}{x}$ ва $x \neq 0$ да

$$\frac{D(u_1, u_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} \neq 0.$$

Демак, топишган биринчи интеграллар умумий интегралдан иборат.

Энди юкорида ёзилган $u_1 = \frac{x+y}{z+x}$ ва $u_2 = \frac{z-y}{x+y}$ функциялар ҳам биринчи интеграл эканини кўрсатамиз. Бу функциялардан берилган системани ҳисобга олиб, x бўйича ҳосила оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)(z+x) - (x+y)\left(\frac{dz}{dx} + 1\right)}{(z+x)^2} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{y}{x}\right)(z+x) - (x+y)\left(\frac{z}{x} + 1\right)}{(z+x)^2} = \frac{(x+y) - (x+y)}{x(z+x)} = 0, \end{aligned}$$

$$z+x \neq 0, \quad x \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dx} &= \frac{\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx}\right)(x+y) - (z-y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right)(x+y) - (z-y)\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{(x+y)^2} = \frac{(z-y)[(x+y) - (x+y)]}{x(x+y)^2} = 0, \end{aligned}$$

$$x+y \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Бундан кўринадики, u_1 ва u_2 функциялар биринчи интегралдир. Энди бу функцияларнинг эркин эканлигини исботлаймиз. Унинг учун тегишли якобиани ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{D(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z))}{D(y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{z+x}{(z+x)^2} & -\frac{x+y}{(z+x)^2} \\ -\frac{(x+y) - (z-y)}{(x+y)^2} & \frac{x+y}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{z+x} & -\frac{x+y}{(z+x)^2} \\ -\frac{x+z}{(x+y)^2} & \frac{1}{x+y} \end{vmatrix} = \frac{1}{(x+y)(z+x)} - \frac{(x+y)(x+z)}{(x+y)^2(z+x)^2} = 0. \end{aligned}$$

Демак, u_1 ва u_2 биринчи интеграллар эркин эмас. Кўриш кийин эмаски, улар орасида

$$u_1 = \frac{1}{u_2 + 1} \text{ муносабат ўринли. Ҳақиқатан: } u_2 + 1 = \frac{z-y}{x+y} + 1 = \frac{z+x}{x+y} = \frac{1}{u_1}.$$

ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ

Агар 8- бобда ўрганилган дифференциал тенгламаларнинг нормал системасида $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ функциялар $y_1, y_2, \dots, y_n$ аргументлари бўйича чизиқли, яъни $f_i(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j + b_i(x), i=1, 2, \dots, n$ кўринишда бўлса, биз нормал системаларнинг муҳим хусусий кўринишга эга бўламиз. Бундай системаларни *чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси*, қисқача, *чизиқли система* деб юритилади.

9.1- § . УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР, МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАСИ

Ушбу

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j + b_i(x), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9.1)$$

система *чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси* дейилади. Бунда $a_{ij}(x)$ функциялар *системанинг коэффициентлари*, $b_i(x)$ функциялар эса *озод ҳадлари* дейилади. Барча $a_{ij}(x), b_i(x), i, j=1, 2, \dots, n$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз. Агар $a_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}$ бўлса, у ҳолда (9.1) система *чизиқли ўзгармас коэффициентли* деб юритилади. Бундай системаларни алоҳида ўрганамиз. Қулайлик учун ушбу белгилашларни киритамиз:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))^* \quad (9.2)$$

(бунда * белги транспонирлашни англатади). Шу $A(x)$ матрица ва $b(x)$ устун-вектор ёрдамида (9.1) система

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + b(x) \quad (9.3)$$

кўринишда ёзилади. Агар система (9.3) кўринишда ёзилган бўлса, у вектор-матрица кўринишида берилган дейилади.

Агар $b(x) \not\equiv 0$, $x \in I$ муносабат ўринли бўлса, (9.3) тенглама чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама дейилади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \quad (9.4)$$

тенглама эса чизиқли бир жинсли бўлмаган (9.3) тенгламага мос чизиқли бир жинсли тенглама дейилади.

Агар $A(x)$ матрицанинг барча элементлари, яъни $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ функциялар бирор I интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда $A(x)$ матрица шу I интервалда узлуксиз дейилади. Яна $b(x)$ векторнинг координаталари бирор I интервалда узлуксиз бўлганда, шу $b(x)$ вектор I интервалда узлуксиз деб юритилади.

9.1-теорема. Бизга (9.3) вектор-матрицали чизиқли система берилган бўлиб, $A(x)$ матрица ва $b(x)$ вектор-функция бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда ихтиёрий бошланғич қийматлар

$$x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0, x_0 \in I \text{ ёки қисқача } x_0, y^0, x_0 \in I \quad (9.5)$$

учун (9.3) тенгламанинг шу бошланғич қийматларга эга бўлган ва I интервалда аниқланган ягона ечими мавжуд.

Хусусан, агар $A(x)$ ва $b(x)$ лар $-\infty < x < +\infty$ интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда ҳам ихтиёрий (9.5) бошланғич қийматларга эга бўлган ва шу $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган ягона ечим мавжуд бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи 8.1-теоремадан келиб чиқади. Ундаги $f(x, y)$ вектор-функция кўрилатган ҳолда $f(x, y) = A(x)y + b(x)$ вектор-функциядан иборат. Равшанки, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = A(x)$

$\left(\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_j} = a_{ij}(x), i, j = 1, n \right)$ ва $A(x)$ матрицанинг барча $a_{ij}(x)$ элементлари I интервалда узлуксиз.

Шуниси муҳимки, чизиқли системалар учун ечимнинг аниқланиш интервали $A(x)$ ва $b(x)$ ларнинг аниқланиш интервали билан бир хил. Демак, шу I интервал ечим мавжудлигининг максимал интервали бўлади.

Бошқача айтганда, (9.1) системанинг ечими I интервалда аниқланган давомсиз ечим бўлади. Бу чизиқли системаларнинг муҳим хоссаларидан биридир.

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1$$

иккинчи тартибли чизиқли система берилган бўлиб, бошланғич қийматлар $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ бўлсин. Теоремада қўлланилган усул билан шу Коши масаласининг ечимини

топамиз. Сอดда ҳисоблашлар кўрсатадики, $q^{(0)} = \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ десак, қуйидаги

ларга эга бўламиз: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$q^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} q^{(2)}(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -\frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{x^2}{2!} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{(4)}(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 - \frac{\tau^2}{2!} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{2!} \\ \tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - \frac{x^3}{3!} \\ \frac{x^2}{2!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{x^3}{3!} \\ 1 - \frac{x^2}{2!} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{(4)}(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau - \frac{\tau^3}{3!} \\ 1 - \frac{\tau^2}{2!} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^x \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{2!} \\ -\tau + \frac{\tau^3}{3!} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} x - \frac{x^3}{3!} \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{(2i)}(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau - \frac{\tau^3}{3!} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{\tau^{2i-1}}{(2i-1)!} \\ 1 - \frac{\tau^2}{2!} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{\tau^{2i-2}}{(2i-2)!} \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$q^{(2i+1)}(x) = \binom{0}{1} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \end{pmatrix} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} x - \frac{x^4}{3!} + \dots + (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \end{pmatrix}.$$

Бу нфодадлардан

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, -\infty < x < +\infty$$

келиб чиқади. $q(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ функция тегишли бошланғич шартни қаноатлантиради:
 $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$.

9.2- §. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ СИСТЕМАЛАР

1. Чизикли оператор ва унинг хоссалари. Мазкур параграфда (9.4) кўринишда ёзилган системаларни, яъни чизикли бир жинсли системаларни ўрганамиз.

Кейинги мулоҳазаларнинг қулайлиги учун L операторни

$$L(y) = \frac{dy}{dx} - A(x)y \quad (9.6)$$

тенглик ёрдамида киритамиз. Агар $p = \frac{d}{dx}$ ва E — бирлик $n \times n$ матрица бўлса, (9.6) ни яна ушбу

$$L(p)y = (pE - A(x))y$$

кўринишда ёзиш мумкин. Киритилган L оператор ёрдамида (9.4) тенглама ушбу содда:

$$L(y) = 0 \text{ ёки } L(p)y = 0 \quad (9.4')$$

кўринишда ёзилади.

Аввал $L(p)$ операторнинг хоссаларини ўрганамиз:

1- х о с с а. Агар C — ихтиёрий ўзгармас сон бўлса,

$$L(Cy) = CL(y)$$

айният ўринли.

Ҳақиқатан,

$$L(Cy) = \frac{d(Cy)}{dx} - A(x)(Cy) = C \frac{dy}{dx} - CA(x)y = CL(y).$$

2- х о с с а. Агар $C_1, C_2, \dots, C_m$ — ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлса,

$$L\left(\sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^m C_i L(y^{(i)})$$

айиният ўринли, бунда $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}$ бирор вектор-функциялар.

Ҳақиқатан, содда мулоҳазалар ёрдамида топамиз:

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}\right) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}\right) - A(x) \left(\sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m C_i \left(\frac{d}{dx} y^{(i)}\right) - \sum_{i=1}^m C_i (A(x) y^{(i)}) = \sum_{i=1}^m C_i \left(\frac{d}{dx} y^{(i)} - A(x) y^{(i)}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m C_i L(y^{(i)}). \end{aligned}$$

Бу ҳоссалардан фойдаланиб қуйидаги теоремаларни исботлаймиз.

9.2- теорема. Агар $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)$ вектор-функцияларнинг ҳар бири бирор I интервалда (9.4) тенгламанинг ечими бўлса, y ҳолда бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси ҳам ечим бўлади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра $L(\varphi^{(i)}(x)) = 0, x \in I, i = 1, \dots, m$. Шунинг учун 2- ҳоссадан фойдалансак:

$$L\left(\sum_{i=1}^m C_i \varphi^{(i)}(x)\right) = \sum_{i=1}^m C_i L(\varphi^{(i)}(x)) \equiv 0.$$

9.3- теорема. Агар $y = \varphi(x)$ вектор-функция (9.4) тенгламанинг бирор I интервалда аниқланган ва $\varphi(x_0) = 0, x_0 \in I$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлса, y ҳолда I интервалда $\varphi(x)$ функция айнан нолга тенг бўлади, яъни $\varphi(x) = 0, x \in I$.

Исбот. (9.4) тенгламанинг тривиал $y = 0$ ечими мавжуд. Аммо теореманинг шартда қайд қилинган $y = \varphi(x)$ ечим шу тривиал ечим билан бир хил бошланғич қийматларга эга. Шунинг учун чизиқли системалар учун мавжудлик ва ягоналик теоремасига кўра $y = \varphi(x)$ ечим тривиал ечим билан бутун I интервалда устма-уст тушади, яъни $\varphi(x) \equiv 0, x \in I$.

9.4- теорема. Агар (9.4) тенгламада $A(x)$ матрица ҳақиқий бўлиб, шу тенглама $y = \varphi(x) + ig(x), x \in I$ комплекс ечимга эга бўлса, y ҳолда ҳар бир $\varphi(x), g(x), x \in I$ ҳақиқий вектор-функциялар ҳам (9.4) тенгламанинг ечими бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан, шарт бўйича $L(\varphi(x) + ig(x)) = 0, x \in I$. Бундан 1- ва 2- ҳоссаларга кўра

$$L(\varphi(x) + ig(x)) = L(\varphi(x)) + iL(g(x)) = 0, x \in I.$$

Аммо комплекс функция нолга тенг бўлиши учун унинг ҳақиқий ва мавҳум қисми нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Шунинг учун $L(\varphi(x)) \equiv 0, L(g(x)) \equiv 0, x \in I$.

2. Вектор функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эркинлиги. Кейинги мулоҳазаларда муҳим роль ўйнайдиган вектор-функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эркинлиги тушуничасини киритамиз.

9.1- таъриф. Агар бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлсаки, улар учун бирор I интервалда ушбу $\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + \dots + \alpha_k \varphi^{(k)}(x) \equiv 0$ айният ўринли бўлса, у ҳолда

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x), \varphi^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}$$

вектор-функциялар I интервалда чизикли боғлиқ дейилади. Агар юқоридаги айният фақат $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ бўлгандасина ўринли бўлса, у ҳолда $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)$ вектор-функциялар I интервалда чизикли эркин дейилади.

9.1- таърифдан кўринадики, агар $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)$ вектор-функциялардан бирортаси, масалан $\varphi^{(i)}(x)$, $1 \leq i \leq k$ вектор-функция ноль вектор-функция бўлса, у ҳолда $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)$ функциялар чизикли боғлиқ бўлади. Буни исбот этиш учун $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \dots = \alpha_k = 0$, $\alpha_i \neq 0$ деб танлаш етарли.

Мисол. Ушбу $\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$, $\varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ векторлар ихтиёрий I интервалда чизикли эркин. Ҳақиқатан, улар чизикли боғлиқ бўлсин дейлик. У ҳолда α_1, α_2 , $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ сонлар учун I интервалда $\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) \equiv 0$ $x \in I$ ёки

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos x - \alpha_2 \sin x \equiv 0, & x \in I; \\ \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \equiv 0, & x \in I \end{cases}$$

айниятлар ўринли бўлиши керак. Аммо I интервалдан олинган ихтиёрий x учун α_1 ва α_2 ларга нисбатан ушбу

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos x - \alpha_2 \sin x = 0, \\ \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0 \end{cases}$$

система матричасининг детерминанти 1 га тенг. Шунинг учун бу система ихтиёрий $x \in I$ учун фақат тривиал ечимга эга бўлади, яъни $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Бу тегишли вектор-функциялар чизикли боғлиқ бўлсин деган фараздан келиб чиққан зиддият. Демак, олинган вектор-функциялар чизикли эркин.

Энди ушбу

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(m)}(x), \varphi^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(j)}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(j)}(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (9.7)$$

вектор-функциялар бирор I да аниқланган бўлиб, (9.4) тенгламанинг ечимлари бўлсин. Қуйидаги теорема ўринли.

9.5- теорема. Агар x нинг I интервалдан олинган камида битта x_0 , $x_0 \in I$ қиймати учун

$$\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(2)}(x_0), \dots, \varphi^{(m)}(x_0) \quad (9.8)$$

векторлар чизикли боғлиқ бўлса, у ҳолда (9.7) ечимлар I интервалда чизикли боғлиқ бўлади. Бошқача айтганда, агар (9.7) ечимлар

I да чизикли эркин бўлса, *y* ҳолда *x* нинг *I* интервалдан олинган биронта ҳам қийматида (9.7) ечимлар чизикли боғлиқ бўлмайди.

И с б о т . (9.8) векторлар чизикли боғлиқ бўлсин, яъни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \neq 0$ сонлар учун

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x_0) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x_0) + \dots + \alpha_m \varphi^{(m)}(x_0) = 0$$

тенглик ўринли. Энди.

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + \dots + \alpha_m \varphi^{(m)}(x)$$

деб белгилайлик. 9.2- теоремага кўра шу $\varphi(x)$ вектор-функция ҳам (9.4) тенгламанинг ечими бўлади. Аммо $\varphi(x)$ функция теореманинг шартига кўра $x=x_0$ нуктада нолга тенг. Шунинг учун 9.3- теоремага кўра $\varphi(x) \equiv 0, x \in I$, яъни $\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \dots + \alpha_m \varphi^{(m)}(x) \equiv 0, x \in I$. Теорема исбот бўлди.

3. Ечимларнинг фундаментал системаси.

9.2- таъриф. Агар бирор *I* интервалда аниқланган

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x), \varphi^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}, i=1, \dots, n \quad (9.9)$$

вектор-функциялар системаси (9.4) тенгламанинг чизикли эркин вектор ечимлари системасини ташкил этса, *y* ҳолда бу система ечимларнинг фундаментал системаси, ёки қисқача, фундаментал система дейилади.

9.6- теорема. Дифференциал тенгламаларнинг чизикли бир жинсли системаси учун фундаментал система мавжуд.

И с б о т . Чизикли бир жинсли (9.4) системани оламиз. Яна бирор $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ ўзгармас векторлар системаси чизикли эркин бўлсин. Ўзгармас векторларнинг бундай системаси мавжуд. Буни

$$\text{кўрсатиш учун } a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, a^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ деб танлаш}$$

етарли, чунки бу векторлардан тузилган матрица детерминанти нолдан фарқли (1 га тенг). Энди ушбу

$$\varphi^{(1)}(x_0) = a^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}(x_0) = a^{(n)}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган (9.9) ечимлар системасини кўрамиз. Танлашга кўра $\varphi^{(1)}(x_0), \dots, \varphi^{(n)}(x_0)$ векторлар чизикли эркин. Демак, 9.5- теоремага асосан (9.9) ечимлар системаси чизикли эркин, яъни шу ечимлар системаси фундаментал системани ташкил этади.

кийматида нолга айланмайди. Ҳақиқатан, $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$, $x \in I$ вектор-функциялар чизикли эркин бўлгани учун ушбу

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \dots + \alpha_n \varphi^{(n)}(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

айният фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ бўлгандагина ўринли. I интервалдан олинган ихтиёрий тайинланган x учун $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i^{(j)}(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$ системани $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ларга нисбатан) кўрайлик. У бир жинсли бўлиб, фақат тривиал $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ечимга эга. Демак, бу системанинг детерминанти учун $W(x) \neq 0$, $x \in I$ муносабат ўринли.

Бу мулоҳазалардан юқоридаги ечимлар чизикли боғлиқ бўлса, $W(x) \equiv 0$, $x \in I$ айният ўринли бўлиши келиб чиқади. Ечимлар фундаментал системани ташкил этса, тегишли (9.12) матрица интеграл матрица ёки фундаментал матрица деб юритилади.

Энди $Z(x)$ матрицанинг устуналари (9.4) тенгламанинг ечимлари бўлгани учун шу $Z(x)$ матрица ушбу

$$\frac{dZ}{dx} = A(x) Z \quad (9.13)$$

матрицали тенгламанинг ечими бўлади. Агар (9.13) матрицали тенгламанинг детерминанти нолдан фарқли матрицали ечимини топсак, бу билан (9.4) вектор-матрицали тенгламанинг фундаментал системасини топган бўламиз. Аввал (9.13) матрицали тенгламанинг битта хоссасини келтирамиз:

9.1- л е м м а. Агар $Z^*(x)$ матрица (9.13) тенгламанинг I интервалда аниқланган бирор матрицали ечими бўлса, у ҳолда тартиби n бўлган ихтиёрий ўзгармас C матрица учун $Z^*(x)C$ матрица ҳам ечим бўлади.

Исботи жуда содда. Ҳақиқатан, (9.13) тенгламанинг икки томонини ўнгдан C матрицага кўпайтирамиз:

$$\frac{dZ^*(x)}{dx} C \equiv A(x) Z^*(x) C$$

ёки $C = \text{const}$ бўлгани учун

$$\frac{d(Z^*(x)C)}{dx} \equiv A(x) (Z^*(x)C).$$

Бундан 9.1-лемманинг исботи келиб чиқади.

Э с л а т м а. (9.13) матрицали тенгламанинг ихтиёрий матрицали ечими ZC (C ихтиёрий $n \times n$ -матрица) фундаментал матрица бўливермайди.

9.8 - теорема. Агар $Z(x)$ матрица I интервалда аниқланган узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланадиган ихтиёрий $\varphi^{(j)}(x)$, $j = 1, \dots, n$ вектор ечимлардан тузилган бўлиб, детерминанти I да нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу $Z(x)$ матрица (9.4) чизикли тенгламанинг I интервалда аниқланган фундаментал системаси бўлади.

И с б о т. Аввало $\det Z(x) \neq 0$, $x \in I$. Шунинг учун $Z(x)$ матрица фундаментал бўлади. $Z(x)$ матрица ечим бўлгани учун ушбу

$$\frac{dZ(x)}{dx} \equiv A(x) Z(x), \quad x \in I \quad (9.14)$$

айниятга эгамиз. Бунда $Z(x)$ матрицанинг детерминанти шарт бўйича полдан фаркли. Шунинг учун бу матрицага тескари $Z^{-1}(x)$ матрица мавжуд, яъни ушбу

$$Z(x) Z^{-1}(x) = Z^{-1}(x) Z(x) = E$$

(E - бирлик матрица) тенгликни канонатлантирадиган $Z^{-1}(x)$ матрица мавжуд. Бунда $Z^{-1}(x)$ матрица, масалан,

$$Z^{-1}(x) = \frac{1}{\det Z(x)} \cdot \begin{pmatrix} Z_{11}(x) & \dots & Z_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}(x) & \dots & Z_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

формула билан топилиши мумкин, бунда $Z_{ij}(x)$ — $Z(x)$ матрицанинг $\varphi_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$ элементининг алгебраик тўлдирувчиси. Энди (9.14) айниятнинг икки томонини ўнгдан $Z^{-1}(x)$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{dZ(x)}{dx} \cdot Z^{-1}(x) \equiv A(x). \quad (9.16)$$

Бу айниятдан $A(x)$ матрицанинг $a_{ij}(x)$ элементлари ягона усул билан аниқланади. $\frac{dZ(x)}{dx}$ ва $Z^{-1}(x)$ матрицаларнинг элементлари I интервалда узлуксиз бўлгани учун $A(x)$ матрицанинг элементлари ҳам шу интервалда узлуксиз. Теорема исбот этилди.

5. Остроградский — Лиувиль формуласи.

9.9- теорема. Агар (9.13) матрицали тенгламада $A(x)$ матрица I интервалда узлуксиз бўлиб, $Z(x)$ матрица (9.13) тенгламанинг шу интервалда аниқланган матрицали ечими бўлса, у ҳолда I интервалдан олинган ихтиёрый x ва x_0 лар учун ушбу

$$\det Z(x) = \det Z(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{Sp} A(\tau) d\tau} \quad (9.17)$$

формула ўринли. Бунда $\text{Sp} A(\tau)$ белги $A(\tau)$ матрицанинг бош диагонал элементлари йигиндисидан иборат бўлиб, $A(\tau)$ матрицанинг изи дейилади.

(9.17) формулани Остроградский — Лиувиль *) формуласи деб юритилади. Уни Вронский детерминанти оркали ҳам ёзиш мумкин:

* Остроградский — Лиувиль формуласи иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар учун 1827 йилда Н. Абель томонидан, n тартибли чизикли дифференциал тенгламалар учун 1838 йилда Ж. Лиувиль томонидан, системалар учун умумий ҳолда М. В. Остроградский томонидан чиқарилган.

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{Sp} A(t) dt} \quad (9.17)$$

Исбот. (9.17) формулани исботлаш учун $W(x)$ детерминантдан x бўйича ҳосила оламиз. Анализдан маълумки, $W(x)$ нинг ҳосиласи

$$\frac{dW(x)}{dx} = W_1(x) + \dots + W_n(x) \quad (9.18)$$

формула билан ҳисобланади. Бу формулада W_i — n -тартибли детерминант бўлиб, $W(x)$ детерминантдан i -йўли билан фарк қилади. Бу i -йўл эса $W(x)$ нинг i -йўл элементларини дифференциаллаш билан ҳосил қилинади. Албатта, i -йўл ўрнига i -устун тўғрисида гапирсак ҳам мулоҳазалар ўринли бўлаверади. Энди $W_i(x)$ ни ёзайлик:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \dots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \dots & z_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z'_{i1}(x) & z'_{i2}(x) & \dots & z'_{in}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \dots & z_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Бунда i -йўлдаги ҳосилалар ўрнига (9.13) матрицали тенгламанинг координаталар орқали ёзилишини назарда тутиб, тегишли нфодаларни қўямиз:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \dots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \dots & z_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{l=1}^n a_{li} z_{l1}(x) & \sum_{l=1}^n a_{li} z_{l2}(x) & \dots & \sum_{l=1}^n a_{li} z_{ln}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \dots & z_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Энди i -дан бошқа ҳар бир k -йўл, $k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ элементларини тегишли a_{ik} га кўпайтириб, i -йўл элементларидан айириб ташлаймиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \dots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \dots & z_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{in} z_{i1}(x) & a_{in} z_{i2}(x) & \dots & a_{in} z_{in}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \dots & z_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{in} W(x), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Шундай қилиб, (9.18) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{dW(x)}{dx} = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) W(x) \text{ ёки } \frac{dW(x)}{dx} = (S_p A) W(x). \quad (9.19)$$

Биз Вронский детерминанти учун биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламани ҳосил қилдик. Бу ўзгарувчилари ажраландиған тенглама. Шунинг учун (9.19) тенгламанинг $W(x_0) = W_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечими (9.17) формула билан ёзилади. Демак, Остроградский – Лиувиль формуласи исбот бўлди.

9.10-теорема. Бирор $Z(x)$, $n \times n$ матрица (9.13) тенгламанинг I интервалда аниқланган ечими бўлсин. Бу $Z(x)$ матрица фундаментал бўлиши учун ушбу

$$\det Z(x) = W(x) \neq 0, \quad x \in I$$

муносабатнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

9.1-натижа. Агар $Z(x)$ матрица (9.13) тенгламанинг I интервалда аниқланган фундаментал матрицаси бўлса, у ҳолда ихтиёрий махсусмас (яъни детерминанти нолдан фарқли) C $n \times n$ -матрица учун $Z(x)C$ матрица ҳам (9.13) тенгламанинг фундаментал матрицаси бўлади.

Исбот. $\det Z(t) C = \det Z(t) \det C \neq 0$ (9.1-леммага қараи).

$$\text{9.2-натижа. Агар } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \text{ ихтиёрий } (n \times 1)\text{-вектор бўлса,}$$

фундаментал матрица орқали (9.4) вектор-матрицали тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = Z(x)C$$

кўринишда ёзилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y'_1 = -y_2, \quad y'_2 = y_1$$

система учун

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \text{ ва } y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

вектор-функциялар $-\infty < x < +\infty$ интервалда ечим бўлади. Буни бевосита текшириб кўриш мумкин, $y^{(1)}(x)$ ва $y^{(2)}(x)$ ечимлар фундаментал системани ташкил этади. Ҳақиқатан, бу ечимлардан Вронский детерминантини тузамиз:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Демак, $W(x) \neq 0$, $-\infty < x < +\infty$. Шунинг учун $y^{(1)}(x)$ ва $y^{(2)}(x)$ ечимлар фун-

даментал системани ташкил этади. Берилган системада $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Шундай қилиб, $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ матрица

$$\frac{dZ}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z \quad (9.21)$$

матрицали тенгламанинг фундаментал матричаси бўлади. Энди фундаментал матричаси

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

бўлган чизикли бир жинсли системани тузайлик. Равшанки,

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}.$$

Энди $Z^{-1}(x)$ матрицани топамиз: аввало

$$\det Z(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \text{ алгебранг тўлдирувчилар}$$

$$A_{11} = \cos x, A_{21} = \sin x, A_{12} = -\sin x, A_{22} = \cos x.$$

Шунинг учун $Z^{-1}(x) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$. Бундан

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{dZ(x)}{dx} Z^{-1}(x) = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Шундай қилиб, берилган фундаментал матрицага ягона матрицали дифференциал тенглама мос келади ва у (9.21) тенглама билан устма-уст тушади. (9.21) матрицали тенгламанинг умумий ечими $Z(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} C$ кўринишда, берилган нормал

системанинг умумий ечими эса $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = y(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} C =$
 $= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x - C_2 \sin x \\ C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}$ кўринишда ёзилади.

2. Қуйдаги $y_1' = y_2, y_2' = -y_1 + 2y_2$ система учун

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ (x+1)e^x \end{pmatrix}$$

вектор-функциялар $-\infty < x < +\infty$ интервалда ечим бўлади. Шу билан бирга бу вектор-функциялар фундаментал системани ташкил этади, чунки улардан тузилган вронскиан нолдан фаркли:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

Шунинг учун умумий счим

$$y(x) = C_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} xe^x \\ (x+1)e^x \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади. Берилган система ўрнига матрицали тенгламани, яъни

$$\frac{dZ}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Z \quad (9.22)$$

тенгламани кўрамиз. Энди фундаментал матричаси $Z(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}$ бўлган матрицали тенглама тузамиз. Ҳақиқатки, $\det Z(x) = e^{2x}$, $A_{11}(x) = (x+1)e^x$, $A_{12}(x) = -e^x$, $A_{21}(x) = -xe^x$, $A_{22}(x) = e^x$. Шунинг учун

$$A(x) = \frac{dZ(x)}{dx} \quad Z^{-1}(x) = \begin{pmatrix} e^x & (x+1)e^x \\ e^x & (x+2)e^x \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (x+1)e^x & -xe^x \\ -e^x & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ 1 & x+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Демак, $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Шундай қилиб, (9.22) тенглама берилган фундаментал матрицанинг ягона дифференциал тенгламасидир.

Энди берилган фундаментал матрица бўйича *чизиқли системани тузиш йўлини* кўрсатамиз.

Ушбу $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$ функциялар I интервалда чирик эркин функциялар бўлиб, шу интервалда дифференциалланувчи функция бўлсин. Яна $y(x)$ ҳам I интервалда аниқланган, узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлсин. Агар $y^{(k)}(x), k=1, \dots, n$ ва $y(x)$ функциялар бирор чирик системанинг ечими бўлса, v ҳолда қуйидаги айниқларни ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n, \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} (0)_1 \\ \vdots \\ (0)_2 \end{pmatrix} \quad (0)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1^{(1)}}{dx} &= a_{11} y_1^{(1)} + a_{12} y_2^{(1)} + \dots + a_{1n} y_n^{(1)} \\ &\vdots \\ \frac{dy_n^{(1)}}{dx} &= a_{n1} y_1^{(1)} + a_{n2} y_2^{(1)} + \dots + a_{nn} y_n^{(1)} \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} (1_1) \\ \vdots \\ (1_n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1^{(n)}}{dx} &= a_{11} y_1^{(n)} + a_{12} y_2^{(n)} + \dots + a_{1n} y_n^{(n)} \\ &\vdots \\ \frac{dy_n^{(n)}}{dx} &= a_{n1} y_1^{(n)} + a_{n2} y_2^{(n)} + \dots + a_{nn} y_n^{(n)} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (n_1) \\ \vdots \\ (n) \end{matrix}$$

бўлганда (9.23) муносабатлар ҳосиласи олдидаги коэффициент Вронский детерминантдан иборат биринчи тартибли чизикли бир жинсли тенгламалар системасидир.

Юқорида кўрилган 1- ва 2- мисоллар учун берилган фундаментал системага мос чизикли системани шу усул билан чиқариш мумкин.

9.3- §. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН СИСТЕМАЛАР

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + b(x) \quad (9.3)$$

система берилган бўлсин. Бунда $A(x)$ квадрат матрица ва $b(x) \neq 0$ устун вектор I интервалда аниқланган ва узлуксиз. Чизикли L оператори ёрдамида (9.3) система

$$L(y) = b(x) \quad (9.3')$$

кўринишда ёзилади.

9.11- теорема. Агар $\psi(x)$, $x \in I$ вектор-функция бир жинсли бўлмаган (9.3) тенгламанинг бирор ечими бўлиб, $\varphi(x)$, $x \in I$ вектор-функция унга мос бир жинсли (9.4) тенгламанинг бирор ечими бўлса, у ҳолда шу вектор-функциялар йиғиндисини $\varphi(x) + \psi(x)$ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими бўлади.

Исбот. Бевосита $L(\varphi(x) + \psi(x))$ ни ҳисоблаймиз. $L(\varphi(x)) \equiv 0$. $L(\psi(x)) \equiv b(x)$ эканини ҳисобга олсак, ушбу $L(\varphi(x) + \psi(x)) = L(\varphi(x)) + L(\psi(x)) \equiv 0 + b(x)$ айният теоремани исбот этади.

9.12- теорема (умумий ечим ҳақида). Чизикли бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечими u нинг бирор хусусий ечими билан мос бир жинсли система умумий ечимининг йиғиндисидан иборат.

Исбот. Агар бир жинсли (9.4) системанинг фундаментал матричасини $Z(x)$, бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини $\psi(x)$ десак, теореманинг тасдиқи бўйича бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечими

$$y(x) = Z(x)C + \psi(x)$$

(C - ихтиёрий ўзгармас устун вектор) кўринишда ёзилади. 9.11- теоремага кўра $Z(x)C + \psi(x)$ вектор-функция (9.3) тенгламанинг ечими. Энди бу ечим умумий эканини исботлаймиз. $y = y^0(x)$, $x \in I$ вектор-функция (9.3) тенгламанинг $\psi(x)$ дан фаркли ихтиёрий ечими бўлсин. У ҳолда ягона C^0 ўзгармас вектор учун I интервалда

$$y^0(x) \equiv Z(x)C^0 + \psi(x)$$

айният ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, $y^0(x)$ функция $y^0(x_0) = y^0$, $\psi(x)$ функция $\psi(x_0) = \psi^0$ бошланғич шартни қаноатлантирсин. Ушбу

$$y^0 = Z(x_0)C + \psi^0$$

ёки

$$Z(x_0)C = y^0 - \psi^0, \quad \sum_{i=1}^n (y_i^0 - \psi_i^0)^2 \neq 0$$

вектор-тенгламани кўрамыз. Бундан $Z(x_0)$ матрицага тескари матрица мавжудлиги учун (чунки $\det Z(x_0) = W_0 \neq 0$) ягона C^∞ ни топамиз:

$$C' = Z^{-1}(x_0) (y' - \psi_0).$$

Шундай қилиб, $y^0(x)$ функция учун

$$y^0(x) \equiv Z(x) Z^{-1}(x_0) (y^0 - \psi^0) + \psi(x)$$

формулага эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

Машқда муҳим роль ўйнайдиган яна икки теоремани келтирамыз.

9.13- теорема. Агар ушбу

$$L(y) = \sum_{m=1}^k b^{(m)}(x), \quad \begin{pmatrix} b_1^{(m)}(x) \\ \vdots \\ b_n^{(m)}(x) \end{pmatrix} = b^{(m)}(x) \in C(I) \quad (9.24)$$

бир жинсли бўлмаган тенглама берилган бўлиб, $\psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \dots, \psi^{(k)}(x)$ вектор-функциялар I интервалда мос равишда

$$L(y) = b^{(1)}(x), L(y) = b^{(2)}(x), \dots, L(y) = b^{(k)}(x) \quad (9.25)$$

тенгламаларнинг ечимлари бўлса, у ҳолда I интервалда

$$\psi(x) = \psi^{(1)}(x) + \psi^{(2)}(x) + \dots + \psi^{(k)}(x) \quad (9.26)$$

вектор-функция берилган (9.24) тенгламанинг ечими бўлади.

И с б о т. Теореманинг шarti бўйича қуйидаги

$$L(\psi^{(m)}(x)) \equiv b^{(m)}(x), \quad x \in I, m = 1, 2, \dots, k$$

айниятларга эгамиз. L операторнинг хоссасига асосан топамиз:

$$L(\psi(x)) = L\left(\sum_{m=1}^k \psi^{(m)}(x)\right) = \sum_{m=1}^k L(\psi^{(m)}(x)) \equiv \sum_{m=1}^k b^{(m)}(x).$$

Теорема исбот бўлди.

9.14- теорема. Агар $b(x) = b^{(1)}(x) + ib^{(2)}(x)$, $x \in I$ комплекс вектор-функция бўлиб, ушбу

$$L(y) = b^{(1)}(x) + ib^{(2)}(x)$$

тенглама чизиқли оператор L нинг коэффициентлари ҳақиқий бўлганда $y = \psi^{(1)}(x) + i\psi^{(2)}(x)$ комплекс вектор-ечимга эга бўлса, у ҳолда $\psi^{(1)}(x)$ ва $\psi^{(2)}(x)$ вектор-функциялар мос равишда

$$L(y) = b^{(1)}(x), L(y) = b^{(2)}(x)$$

тенгламаларнинг ечими бўлади.

Исбот. Биз ушбу

$$L(\psi^{(1)}(x) + i\psi^{(2)}(x)) \equiv b^{(1)}(x) + ib^{(2)}(x), \quad x \in I$$

айниятга эгамиз. Бундан

$$L(\psi^{(1)}(x)) + iL(\psi^{(2)}(x)) \equiv b^{(1)}(x) + ib^{(2)}(x)$$

ёки

$$L(\psi^{(1)}(x)) \equiv b^{(1)}(x), \quad L(\psi^{(2)}(x)) \equiv b^{(2)}(x)$$

айниятлар келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

1. Ўзгармасни вариациялаш усули. Коши формуласи. Бу усулни Ж. Лагранж номи билан аталади. Унинг мазмунини баён қиламиз.

Ушбу

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$$

функциялар I интервалда (9.4) тенгламанинг фундаментал системаси бўлсин. (9.3) тенгламанинг (яъни бир жинсли бўлмаган тенгламанинг) ечимини қуйидаги

$$y = \sigma_1(x) \varphi^{(1)}(x) + \sigma_2(x) \varphi^{(2)}(x) + \dots + \sigma_n(x) \varphi^{(n)}(x) \quad (9.27)$$

($\sigma_i(x)$, $x \in I$, $i = 1, 2, \dots, n$ -бирор нomaълум скаляр функциялар) кўринишда излаймиз. Бу (9.27) функция (9.3) тенгламанинг ечими бўлиши учун аввало $\sigma_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ функциялар I интервалда дифференциалланувчи бўлиши зарур. Қолган шартларни (9.27) функция ечим бўлиши шартидан чиқарамиз. Шунинг учун (9.27) функцияни (9.3) тенгламага қўямиз:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\sigma_i(x)}{dx} \varphi^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) L(\varphi^{(i)}(x)) = b(x).$$

Аммо $L(\varphi^{(i)}(x)) \equiv 0$ бўлганидан қуйидагига эгамиз:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\sigma_i(x)}{dx} \varphi^{(i)}(x) = b(x). \quad (9.28)$$

Топилган вектор-тенглама скаляр функциялар $\frac{d\sigma_1(x)}{dx}, \dots, \frac{d\sigma_n(x)}{dx}$

учун чиқиқли бир жинсли бўлмаган тенгламадир. Унинг детерминанти вронскиандан иборат. $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ вектор-функциялар I да фундаментал системани ташкил этгани учун бу вронскиан полдан фарқли. Демак, (9.28) вектор-тенгламадан

$\frac{d\sigma_i(x)}{dx}$, $i = 1, 2, \dots, n$ функцияларнинг ягона ифодасини топамиз:

$$\frac{d\sigma_i(x)}{dx} = \delta_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in I.$$

Бундан

$$\sigma_i(x) = \int_{x_0}^x \delta_i(\tau) d\tau + \bar{C}_i, \quad x \in I, \quad x_0 \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

($C_1, C_2, \dots, C_n$ -ихтиёрий ўзгармаслар). Топилган ифодаларни (9.27) га қўямиз:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i \varphi^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^n \varphi^{(i)}(x) \int_{x_0}^x \delta_i(\tau) d\tau. \quad (9.29)$$

Топилган ифодада $C_1, \dots, C_n$ лар ихтиёрий ўзгармас бўлгани учун $\sum_{i=1}^n C_i \varphi^{(i)}(x) = \varphi(x)$ вектор-функция (9.4) тенгламанинг умумий

ечими бўлади. $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi^{(i)}(x) \int_{x_0}^x \delta_i(\tau) d\tau$ вектор-функция эса

бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимидир.

Шундай қилиб, умумий ечим ҳақидаги 9.12-теоремага асосан (9.29) формула (9.3) тенгламанинг умумий ечимини ифодалайди.

Ўзгармасни вариациялаш усулидан бир жинсли бўлмаган тенглама учун Коши масаласини ҳал қилишда ҳам фойдаланиш мумкин. Ҳақиқатан, бизга ушбу

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + b(x), \quad x \in I, \quad y(x_0) = y^0 \quad (9.30)$$

масала берилган бўлсин. (9.4) тенгламанинг $x = x_0$ бўлганда бирлик матрицага айланувчи фундаментал матрицасини $Z(x, x_0)$ дейлик. Демак, $Z(x_0, x_0) = E$. Бундай матрица (9.4) тенгламанинг *нормал фундаментал матрицаси* дейилади. Агар узлуксиз дифференциалланувчи номатълум $\sigma(x)$ вектор-функция учун $\sigma(x_0) = y^0$ тенглик бажарилсин десак, (9.30) масаланинг ечимини

$$y(x) = Z(x, x_0) \sigma(x) \quad (9.31)$$

кўринишда излаш мумкин. Аввало $y(x_0) = Z(x_0, x_0) \sigma(x_0) = E y^0 = y^0$. Энди (9.31) вектор-функциядан ҳосила олиб, (9.30) га қўямиз:

$$\frac{dZ(x, x_0)}{dx} \sigma(x) + Z(x, x_0) \frac{d\sigma(x)}{dx} = A(x) Z(x, x_0) \sigma(x) + b(x).$$

Бундан

$$\frac{dZ(x, x_0)}{dx} \equiv A(x) Z(x, x_0)$$

айниятга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$Z(x, x_0) \frac{d\sigma(x)}{dx} = b(x).$$

Бу тенгликнинг икки томонини чапдан $Z^{-1}(x, x_0)$ матрицага кўпайтирамиз:

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = Z^{-1}(x, x_0) b(x).$$

Энди x_0 дан x гача ($x \in I, x_0 \in I$) интеграллаб топамиз:

$$\sigma(x) = \sigma(x_0) + \int_{x_0}^x Z^{-1}(\tau, x_0) b(\tau) d\tau. \quad (9.32)$$

Топилган ифодани (9.31) га қўйсак, қуйидаги формулага келамиз:

$$y(x) = Z(x, x_0) \left(y'' + \int_{x_0}^x Z^{-1}(\tau, x_0) b(\tau) d\tau \right)$$

ёки

$$y(x) = Z(x, x_0) y'' + \int_{x_0}^x Z(x, x_0) Z^{-1}(\tau, x_0) b(\tau) d\tau. \quad (9.33)$$

Бу (9.33) формула (9.30) масаланинг ечимини беради ва Коши формуласи деб аталади.

Агар (9.33) формулада y'' вектор ихтиёрий бўлса, бу формула чизикли тенгламанинг умумий ечимини беради. Унда $\varphi(x) = Z(x, x_0)y''$ мос бир жинсли чизикли тенгламанинг умумий ечими бўлиб,

$\varphi(x) = \int_{x_0}^x Z(x, x_0) Z^{-1}(\tau, x_0) b(\tau) d\tau$ вектор-функция эса чизикли

бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими бўлади. $\varphi(x)$ вектор-функция хусусий ечим эканини бевосита ҳисоблаб текшириш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x)}{dx} &= \frac{dZ(x, x_0)}{dx} \int_{x_0}^x Z^{-1}(\tau, x_0) b(\tau) d\tau + \\ &+ Z(x, x_0) Z^{-1}(x, x_0) b(x) = A(x) Z(x, x_0) \int_{x_0}^x Z^{-1}(\tau, x_0) b(\tau) d\tau + \\ &+ b(x) = A(x) \int_{x_0}^x Z(x, x_0) Z^{-1}(\tau, x_0) b(\tau) d\tau + b(x) = \\ &= A(x) \varphi(x) + b(x). \end{aligned}$$

Коши формуласини яна солда кўринишда ёзиш мумкин. Бунинг учун ушбу

$$\begin{aligned} Z(x, \tau) &\equiv Z(x, x_0) Z^{-1}(\tau, x_0), \\ x \in I, x_0 \in I, \tau \in I, \tau \leq x \end{aligned} \quad (9.34)$$

айниятни небот этамиз. Қуйидаги

$$\Phi^{(1)}(x) = Z(x, \tau), \quad \Phi^{(2)}(x) = Z(x, x_0) Z^{-1}(\tau, x_0)$$

белгилашларни киритамиз. Равшанки,

$$\Phi^{(1)}(\tau) = Z(\tau, \tau) = E, \quad \Phi^{(2)}(\tau) = Z(\tau, x_0) Z^{-1}(\tau, x_0) = E,$$

демак,

$$\Phi^{(1)}(\tau) = \Phi^{(2)}(\tau). \quad (9.35)$$

Шубҳасиз, $\Phi^{(1)}(x)$ матрица (9.13) тенгламанинг ечими, $\Phi^{(2)}(x)$ матрица ҳам шу (9.13) тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $Z^{-1}(\tau, x_0) = C$ деб белгиласак, бу матрица x га боғлиқ бўлмагани

учун 9.1- леммага кўра $Z(x, x_0)$ C матрица ҳам ечим бўлади. Шундай қилиб, ечимнинг мавжудлиги ҳақидаги 9.1- теоремага асосан, $\Phi^{(1)}(x) \equiv \Phi^{(2)}(x)$, $x \in I$ айният, ва демак, (9.34) айният ўринли.

Шу (9.34) айниятдан фойдаланиб, (9.33) формулани

$$y(x) = Z(x, x_0) y^0 + \int_{x_0}^x Z(x, \tau) b(\tau) d\tau \quad (9.36)$$

кўринишда ҳам ёзса бўлади.

2. Чизикли бир жинсли бўлмаган системанинг ечимини юқоридан баҳолаш. Бу бандда баъзи табиий шартлар бажарилганда чизикли бир жинсли бўлмаган системанинг ечимини юқоридан баҳолаймиз. (9.3) тенгламада $A(x)$ матрицанинг нормасини бундай аниқлаймиз:

$$\|A(x)\| = \sup |A(x)|, \quad |A(x)| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)|, \quad q_1 \leq x \leq q_2.$$

9.2- л е м м а . Агар $y = y(x)$ вектор-функция $q_1 \leq x \leq q_2$ оралиқда (9.3) тенгламанинг $y(x_0) = y^0$, $q_1 \leq x_0 \leq q_1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлса, у ҳолда $q_1 \leq x \leq q_2$ оралиқда ушбу

$$|y(x)| \leq \|y^0\| + \int_{x_0}^x \|b(\tau)\| e^{\int_{x_0}^{\tau} \|A(s)\| ds} d\tau \quad (9.37)$$

тенгсизлик ўринли.

Мисол. Ушбу чизикли бир жинсли бўлмаган

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + 1, \\ y_2' = y_1 + \sin x, \end{cases} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

системанинг умумий ечими топилсин.

Мас бир жинсли системанинг фундаментал системаси 9.2-§. 1- мисолда топилган эди:

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Энди бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини излаймиз. Бунинг учун ўзгармасли вариациялаш усулини қўлланамиз, яъни ечимни (9.32) кўринишда ёзамиз.

Унда $y^{(1)}(x) = \psi^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x) = \psi^{(2)}(x)$ бўлиб, $\frac{d\sigma_i(x)}{dx}$, $i = 1, 2$ функциялар учун

(9.33) системадан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} \cos x \frac{d\sigma_1}{dx} - \sin x \frac{d\sigma_2}{dx} = 1, \\ \sin x \frac{d\sigma_1}{dx} + \cos x \frac{d\sigma_2}{dx} = \sin x. \end{cases}$$

Езилган системанинг детерминанти 1 га тенг. Шунинг учун:

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = \begin{vmatrix} 1 & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x + \sin^2 x,$$

$$\frac{d\sigma_2}{dx} = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ \sin x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cos x - \sin x;$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \int (\cos x + \sin^2 x) dx = \int \left(\cos x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= \sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= \int (\sin x \cos x - \sin x) dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \sin x \right) dx = \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + \cos x + C_2. \end{aligned}$$

Энди берилган системанинг умумий ечимини ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + \right. \\ &\quad \left. + \cos x \right) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9.4-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ СИСТЕМАЛАР

1. Характеристик тенглама. (9.4) тенгламада A матрица ўзгармас бўлсин. Бу ҳолда биз ушбу

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad A = \text{const} \quad (9.38)$$

чизикли ўзгармас коэффицентли бир жинсли вектор-матрицали тенгламага эгамиз. Агар $L = A - pE$, $p = \frac{d}{dx}$ оператордан фойдалансак, (9.38) тенгламани ушбу

$$(A - pE) y = 0 \quad (9.39)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда E — бирлик матрица. Равшанки, $A - pE = L(p)$ ва бу $L(p)$ оператор p га нисбатан n — тартибли матрицадан иборат. Уни координаталарда ёзамиз:

$$L(p) = \begin{pmatrix} a_{11} - p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - p \end{pmatrix}. \quad (9.40)$$

Демак, (9.38) ни яна

$$L(p) y = 0 \quad (9.41)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди $\det L(p) = D(p)$ деб белгилаймиз. Шу $D(p)$ детерминант ёрдамида тузилган тенглама (9.38) тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. Кейинги мулоҳазаларимиз *характеристик тенгламанинг* илдизларига караб (9.38) тенгламанинг n та чизикли эркин вектор-ечимларини топишга бағишланган бўлади. Бунинг учун биз аввал (9.38) тенгламага ёки барибир, $L(p)y = 0$ тенгламага нисбатан умумийроқ чизикли бир жинсли системани интеграллаш усули билан шугулланамиз. Бу усул *чиқариш* усули номи билан аталади.

2. Чиқариш усули. Ушбу

$$L(p) = \begin{pmatrix} L_{11}(p) & L_{12}(p) & \dots & L_{1n}(p) \\ L_{21}(p) & L_{22}(p) & \dots & L_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1}(p) & L_{n2}(p) & \dots & L_{nn}(p) \end{pmatrix} \quad (9.42)$$

матрица берилган бўлиб, унда ҳар бир $L_{is}(p)$ элементларга нисбатан бирор тартибли кўпхад бўлсин. Жумладан, агар $L_{is}(p) = a_{is}$, $i \neq s$, $L_{ii}(p) = a_{ii} \cdot p$ бўлса, (9.42) матрица юқорида кўрилган (9.40) матрица билан устма-уст тушади. Энди

$$L(p)y = f(x) \quad (9.43)$$

вектор-матрицали тенгламани кўрамиз, унда

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

бўлиб $f(x)$ вектор-функция бирор I интервалда аниқланган ва кераклича дифференциалланувчи. (9.43) тенглама координаталарда ёзилса, $L_{is}(p)y_i$ ифода y_i ва унинг ҳосилаларининг чизикли комбинациясидан иборат. Номатълум функциялар сонини тенгламалар сонига тенг. Агар бирор $L_{is}(p) \neq 0$ бўлиб, (9.42) матрицанинг қолган элементлари айнан нолга тенг бўлса, y ҳолда биз y_s га нисбатан бирор тартибли чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган (ўнг томони $f_s(x)$ бўлган) битта тенгламага эга бўламиз. Бу ҳолни 6-бобда тўла ўрганамиз. Берилган (9.43) тенгламанинг тартиби бундай аниқланади. $L_{11}(p), L_{21}(p), \dots, L_{n1}(p)$ кўпхадларнинг энг катта тартиби q_1 , $L_{12}(p), L_{22}(p), \dots, L_{n2}(p)$ кўпхадларнинг энг катта тартиби q_2 ва ҳ. к. $L_{1n}(p), L_{2n}(p), \dots, L_{nn}(p)$ кўпхадларнинг энг катта тартиби эса q_n дейилса, системанинг тартиби $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ формула билан аниқланади.

$L(p)$ матрицанинг детерминантини $D(p)$, $L_{is}(p)$ элементнинг алгебраик тўлдирувчисини (яъни тегишли ишораси билан олинган минорини) $M_{is}(p)$ дейлик. У ҳолда олий алгебра курсидан маълумки, $D(p)$ детерминант алгебраик тўлдирувчилар орқали бундай ёзилади:

$$\sum_{j=1}^n M_{ji}(p) L_{ji}(p) = \delta_{ii} D(p), \quad (9.44)$$

бунда δ_{ii} — Кронеккер симболи (8.32) га қаранг). (9.43) тенгламани координаталарда ёзамиз:

$$\sum_{j=1}^n L_{ji}(p) y_j = f_i(x), \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (9.43')$$

Энди $y(x)$ вектор-функция шу (9.43') системанинг бирор ечими бўлиб, етарлича тартибгача дифференциалланувчи бўлсин. (9.43') системанинг икки томонини ҳар бир j учун $M_{ji}(p)$ га кўпайтириб, j бўйича йиғиндисини оламиз:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ji}(p) L_{ji}(p) y_j(x) = \sum_{i=1}^n M_{ji}(p) f_i(x).$$

(9.44) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$D(p) y_i(x) = \sum_{j=1}^n M_{ji}(p) f_j(x), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (9.45)$$

Бу системанинг ўнг томонида $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функцияларнинг ва уларнинг маълум тартибгача ҳосилаларининг йиғиндиси турибди, уни $F_i(x)$ дейлик. У ҳолда

$$D(p) y_i(x) = F_i(x) \quad (9.46)$$

тенгламага келамиз, бунда $F_i(x)$ функция I интервалда аниқланган узлуксиз функция деб қаралади. Ҳақиқат, $D(p)$ — бирор кўпхад (p га нисбатан). Бу $D(p)$ — чизикли дифференциал оператордан иборат. Шунинг учун (9.46) тенглама y_i га нисбатан бирор тартибли чизикли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламадир. Бундай тенгламаларни интеграллашни биз биламиз. Баён этилган усул берилган (9.43) системани ҳар бири биттадан номаълум функцияни ўз ичига олган n та чизикли дифференциал тенгламалар системасига келтиради. Чикариш усулининг мазмуни ана шундан иборат.

(9.43) тенгламанинг ҳар бир ечими $y(x)$ учун $y_i(x)$ функция (9.46) тенгламанинг ечими бўлади. Аммо шу (9.46) тенгламаларнинг ихтиёрий ечими (9.43) тенгламанинг ечими бўлиши шарт эмас.

Амалда ҳар бир (9.46) тенглама умумий ечими орасидан интеграллаш формуласини танлаш ҳисобига (9.43) тенгламанинг ечими топилади.

Чикариш усулини $f(x) \equiv 0, x \in I$ бўлган ҳолга, яъни ушбу

$$L(p) y = 0 \quad (9.47)$$

(бунда $L(p)$ — (9.42) матрица) бир жинсли системани интеграллашга татбиқ этамиз. $L(p)$ матрицанинг детерминанти $D(p)$ айнан нолга тенг бўлмасин ва $\lambda - D(p)$ кўпхаднинг k қаррали илдизи бўлсин. У ҳолда (9.47) тенгламанинг ечимини

$$y = g(x) e^{\lambda x}, \quad (9.48)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

кўринишда излаймиз, бунда $g_1(x), \dots, g_n(x)$ функциялар тартиби $(k-1)$, коэффициентлари номатълум бўлган кўпхадлардир. Энди (9.48) функцияни (9.47) тенгламага қўямиз:

$$0 = L(p) g(x) e^{\lambda x} = e^{\lambda x} L(p + \lambda) g(x). \quad (9.49)$$

Бу муносабатнинг тўғрилиги (6.17) формуладан келиб чиқади. Факат (6.17) формулада $L(p)$ кўпхад эди. Бизнинг ҳолда $L(p)$ элементлари кўпхадлардан иборат матрица. Шу $L(p)$ матрицани $g(x)e^{\lambda x}$ векторга кўпайтириб, ҳосил бўлган векторнинг ҳар бир координатасига ўша (6.17) формулани татбиқ этилса, юқоридаги муносабат чиқади. Энди (9.49) дан, $e^{\lambda x}$ га қисқартириб, топамиз:

$$L(p + \lambda) g(x) = 0. \quad (9.50)$$

Шундай қилиб, (9.48) вектор-функция (9.47) тенгламанинг ечими бўлиши учун $g_1(x), \dots, g_n(x)$ кўпхадлар (9.50) муносабатни қаноатлантириши зарур ва етарли. Агар (9.50) ни координаталарда ёзсак:

$$\sum_{s=1}^n L_{sj}(p + \lambda) g_s(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.51)$$

Ҳар бир j , $1 \leq j \leq n$ учун (9.51) тенгламада чап томони $k-1$ тартибли кўпхаддан иборат. x нинг барча даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштириб, $g_j(x)$ кўпхаднинг коэффициентлари учун k та чизикли бир жинсли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Демак, чиқариш усули бир жинсли (9.47) тенгламанинг ечимини излаш масаласини чизикли бир жинсли алгебраик тенгламалар системасини ечишга олиб келади.

(9.47) тенгламанинг умумий ечимини излаш масаласини қуйидаги теорема ечиб беради.

9.15-теорема. (9.47) тенглама берилган бўлиб, унда $D(p) = \det L(p)$ детерминант айнан нолга тенг бўлмасин ва $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m - D(p)$ кўпхаднинг мос равишда $k_1, k_2, \dots, k_m$ қаррали турли илдишлари бўлсин. У ҳолда (9.47) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги

$$y = g^{(1)}(x) e^{\lambda_1 x} + g^{(2)}(x) e^{\lambda_2 x} + \dots + g^{(m)}(x) e^{\lambda_m x} \quad (9.52)$$

кўринишда ёзилади, бунда $g^{(i)}(x) = (g_1^{(i)}(x), \dots, g_n^{(i)}(x))^*$ ва $g_i^{(i)}(x)$ тартиби, $k_i - 1$ бўлган кўпхад. Бундан кўринадики, (9.47) тенгламанинг ҳар бир ечими x нинг барча қийматларида, яъни $-\infty < x < +\infty$ оралиқда аниқланган бўлади.

И с б о т. Равшанки, ҳар бир (9.48) кўринишдаги ечим $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган. Шунинг учун (9.52) формула билан ёзилган ечим ҳам шу $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган

бўлади. Энди (9.52) формула умумий ечимни ифода этишини кўрсатамиз. Аввал (9.52) функция ечим эканини исботлаймиз. Бунинг учун (9.52) функцияни (9.47) тенгламага кўямиз. Агар ҳар бир $g^{(s)}(x)e^{\lambda_s x}$ вектор-функцияни (9.48) га кўра ечим эканини ҳисобга олсак,

$$L(p)(g^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + g^{(m)}(x)e^{\lambda_m x}) = \\ = e^{\lambda_1 x} L(p + \lambda_1)g^{(1)}(x) + \dots + e^{\lambda_m x} L(p + \lambda_m)g^{(m)}(x) = 0$$

тенгликка келамиз. Энди (9.52) формула умумий ечимлигини кўрсатиш қолди.

Бирор I интервалда аниқланган $y(x)$ вектор-функция (9.47) тенгламанинг ечими бўлсин. У ҳолда уни (9.52) кўринишда ёзиш мумкин. Ҳақиқатан, $y(x)$ функциянинг ҳар бир координатаси $D(p)y_s(x) = 0$ тенгламани қаноатлантиради ва демак, (6.24) формулага асосан $y_s(x)$ функция ушбу

$$y_s(x) = \sum_{i=1}^m g_{is}(x) e^{\lambda_i x}, \quad s=1, 2, \dots, n \quad (9.53)$$

кўринишда ёзилиши мумкин, бунда $y_{is}(x)$ кўнҳад $(k_i - 1)$ - тартибли, λ_i -характеристик тенгламанинг (яъни $D(p)=0$ тенгламанинг) k_i қаррали илдизи. Шундай қилиб, ҳар бир координатаси (9.53) кўринишда ёзиладиган $y(x)$ вектор-функция ҳам (9.52) кўринишда ёзилади. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y'' + y_1 - y_2 = 0, \quad y''_1 - y'_1 - y_1 = 0$$

системани чиқариш усули билан ечамиз. Уни

$$\begin{cases} (p+1)y_1 - y_2 = 0, \\ p^2 y_1 - (p+1)y_2 = 0 \end{cases}$$

кўринишда ёзсак, $D(p)$ детерминант учун топамиз:

$$D(p) = \begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ p^2 & -(p+1) \end{vmatrix} = -(p+1)^2 + p^2 = -2p - 1.$$

Кўринадики, $D(p)$ - биричи тартибли кўнҳад. Унинг илдизи $\lambda = -\frac{1}{2}$. Демак, бе-

рилган системанинг ечимини $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{-\frac{1}{2}x} \\ Be^{-\frac{1}{2}x} \end{pmatrix}$ кўринишда излаш лозим.

Тегишли ҳосилалар олиб системага кўямиз:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} Ae^{-\frac{1}{2}x} + Ae^{-\frac{1}{2}x} - Be^{-\frac{1}{2}x} = 0, \\ \frac{1}{4} Ae^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} Be^{-\frac{1}{2}x} - Be^{-\frac{1}{2}x} = 0. \end{cases}$$

Бундан $e^{\frac{1}{2}x}$ га қисқартириб топамиз:

$$\frac{A}{2} - B = 0, \quad \frac{1}{4} A - \frac{1}{2} B = 0.$$

Бу икки тенгламадан бири иккинчисидан ҳосил қилиниши мумкин. Шунинг учун биз битта икки номатълумли тенгламага эгамиз. Унда $B = C$ — ихтиёрий ўзгармас қилиб танланса, $A = 2C$ бўлади. Демак, берилган системанинг умумий ечими

$$y = \begin{pmatrix} 2Ce^{\frac{1}{2}x} \\ Ce^{\frac{1}{2}x} \end{pmatrix} \quad (C \text{ — ихтиёрий ўзгармас}) \text{ кўриништа эга}$$

2. Яна бундай

$$\begin{cases} y_1'' + 5y_1' + 2y_2' + y_2 = 0, \\ 3y_1'' + 5y_1' + y_2' + 3y_2 = 0 \end{cases}$$

системани ҳам кўрайлик. Уни

$$\begin{cases} (p^2 + 5p)y_1 + (2p + 1)y_2 = 0, \\ (3p^2 + 5p)y_1 + (p + 3)y_2 = 0 \end{cases}$$

кўринишда ёзиб, детерминантини топамиз:

$$\begin{aligned} D(p) &= \begin{vmatrix} p^2 + 5p & 2p + 1 \\ 3p^2 + 5p & p + 3 \end{vmatrix} = (p^2 + 5p)(p + 3) - (2p + 1)(3p^2 + 5p) = \\ &= p^3 + 8p^2 + 15p - 6p^3 - 3p^2 - 10p - 5 = -5p^3 + 5p^2 + 5p - 5 = \\ &= -5(p - 1)^2(p + 1). \end{aligned}$$

Бундан $D(p)$ кўпхаднинг яддизларини топамиз: $\lambda_1 = 1$ (икки қаррали), $\lambda_2 = -1$. Кўринадик, $y^{(1)}$ ва $y^{(2)}$ векторларни қуйидагича ятлаш лозим.

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1 x)e^x \\ (a_2 + b_2 x)e^x \end{pmatrix}; \quad y^{(2)} = \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 e^{-x} \\ d_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

Солда ҳисоблашлар ёрдамида шунн топамиз:

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 x)e^x \\ (-2C_1 - C_2 - 2C_2 x)e^x \end{pmatrix}; \quad y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} C_3 e^{-x} \\ 4C_3 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Демак, умумий ечим

$$y(x) = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-x} \\ (-2C_1 - C_2 - 2C_2 x)e^x + 4C_3 e^{-x} \end{pmatrix}$$

каби ёзилади.

3. Чикариш усулининг қизикли бир жинсли ўзгармас коэффициентли нормал системани интеграллашга таъбиқи. Чикариш усулини (9.38) тенгламани интеграллашга татбиқ этамиз. Бу ҳолда $L(p)$ матрица (9.40) кўринишда бўлиб,

$$L_{ij}(p) = a_{ij} - p\delta_{ij}, \quad j, s = 1, 2, \dots, n$$

δ_{ij} Кронеккер симболи ва $D(p)$ детерминант $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, n$) матрицанинг характеристик детерминанти (ёки тегишли характеристик тенгламаси) бўлади. Кейинги мулоҳазалар $D(p)$ кўпхаднинг илдизлари оддий ва қаррали бўлишига боғлиқ. Шунинг учун куйидаги икки ҳолни алоҳида кўрамиз.

1) $D(p)$ кўпхаднинг илдизлари ҳар хил. Шу кўпхаднинг илдизлари $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ бўлсин. У ҳолда бу илдизлар оддий, яъни ҳар хил бўлгани учун λ_i илдизга мос ечим

$$y^{(i)} = g^{(i)} e^{\lambda_i x} \quad (9.54)$$

кўринишда изланади, бунда $g^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_n^{(i)})^*$ у с т у н ўзгармас вектор бу $y^{(i)}$ векторни (9.38) тенгламага қўямиз:

$$\lambda_i g^{(i)} e^{\lambda_i x} = A g^{(i)} e^{\lambda_i x}.$$

Энди $e^{\lambda_i x}$ га қисқартириб, топамиз: $A g^{(i)} = \lambda_i g^{(i)}$. Бундан $g^{(i)}$ вектор A матрицанинг λ_i хос сонига*¹ (характеристик сонига) мос хос вектори экани келиб чиқади. Юқоридаги тенглик $g^{(i)}$ векторга коллинеар бўлган барча векторлар учун бажарилади. Шунинг учун бирор тайинланган $h^{(i)}$ векторни олиб, $g^{(i)} = C_i h^{(i)}$ (C_i ихтиёрий ўзгармас) каби танлаймиз. 9.7-теоремага кўра кўриляётган ҳолда чизикли бир жинсли ўзгармас коэффициентли системанинг умумий ечимини

$$y = C_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n h^{(n)} e^{\lambda_n x} \quad (9.55)$$

кўринишда ёзилади. Шундай қилиб, куйидаги теорема исбот этилди:

9.16-теорема. (9.38) тенгламада A матрицанинг хос сонлари $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ лар ҳар хил бўлиб, $h^{(1)}, \dots, h^{(n)}$ — уларга мос хос векторлар бўлсин. У ҳолда (9.55) вектор-функция (9.38) тенгламанинг умумий ечимини ифода этади.

Э с л а т м а . Юқоридаги мулоҳазаларда A матрица, умуман айтганда, комплекс элементларга эга эди. Агар A матрица ҳақиқий бўлса, у ҳолда хос векторларни шундай танлаш лозимки, ҳақиқий хос сонларга ҳақиқий хос векторлар, қўшма-комплекс хос сонларга қўшма-комплекс хос векторлар мос келсин. Бу ҳолда натижада қўшма-комплекс ечимлар олдидаги ихтиёрий ўзгармасларни қўшма-комплекс, ҳақиқий ечимлар олдидаги коэффициентларни ҳақиқий қилиб танланса, ҳақиқий умумий ечимга эга бўламиз.

Келгусида биз A матрица ҳақиқий бўлган ҳолни кўрамиз.

*) Агар ўзгармас A матрица учун $Ah = \lambda h$ тенглик бажарилса, у ҳолда λ сон A матрицанинг хос сони, h вектор эса λ га мос хос вектор дейилади [1].

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_1$$

системани интеграллаш сўралган бўлсин. Бунда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Бу $D(\lambda)$ кўпхаднинг илдизлари $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ ҳақиқий ва ҳар хил. Шунинг учун

$$y^{(1)} = h^{(1)} e^{-x}, \quad y^{(2)} = h^{(2)} e^x, \quad h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

ечимларни излаймиз, бунда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ ҳақиқий ҳос векторлар. Равшанки,

$Ah^{(1)} = \lambda_1 h^{(1)}$ тенглик қуйидаги системага эквивалент:

$$\begin{cases} -\lambda_1 h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = 0, \\ h_1^{(1)} - \lambda_1 h_2^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = 0, \\ h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Ҳар икки тенглама бир хил бўлгани учун $h_1^{(1)} = 1$ десак, $h_2^{(1)} = -1$ бўлади. Демак, $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Шунга ўхшаш $Ah^{(2)} = \lambda_2 h^{(2)}$ ўрнига

$$\begin{cases} -h_2 h_1^{(2)} + h_2^{(2)} = 0, \\ h_1^{(2)} - \lambda_2 h_2^{(2)} = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} -h_1^{(2)} + h_2^{(2)} = 0, \\ h_1^{(2)} - h_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

системага эгамиз. Бундан $h_1^{(2)} = 1, h_2^{(2)} = 1$ деб танланса бўлади. Демак,

$h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Шундай қилиб, берилган системанинг умумий ечими

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^x \\ -C_1 e^{-x} + C_2 e^x \end{pmatrix}$$

каби ёзилади, бунда C_1 ва C_2 — ҳақиқий ихтиёрий ўзгармас сонлар.

2. Энди қуйидаги

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1$$

системани интеграллайлик. Унда A матрица ҳақиқий бўлиб,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

$D(\lambda)$ кўпхаднинг илдизлари $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = -i, \lambda_1 = i$ ҳос сонга мос $h^{(1)}$ ҳос векторни

$$\begin{cases} -ih_1^{(1)} + h_2^{(1)} = 0, \\ -h_1^{(1)} - ih_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

системадан толамиз. Бу системанинг тенгламалари эквивалент бўлгани учун $-h_1^{(1)} - ih_2^{(1)} = 0$ дан $h_2^{(1)} = 1, h_1^{(1)} = -i$ дейиш мумкин. Демак,

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$y = (C_1 + iC_2) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} + (C_1 - iC_2) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix}$$

кўринишда ёзилади. Бу ифодани соддалаштириб чиқилса (e^{ix} ва e^{-ix} учун Эйлер формуласидан фойдаланиб),

$$y = \begin{pmatrix} 2C_1 \sin x + 2C_2 \cos x \\ 2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_2 \cos x + \tilde{C}_1 \sin x \\ \tilde{C}_1 \cos x - \tilde{C}_2 \sin x \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = 2C_1, \quad \tilde{C}_2 = 2C_2$$

вектор-функцияни ҳосил киламиз. Амалда бирорта ҳос векторни, масалан, $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ ни олиб, тегишли экспоненциал функцияга (бизда e^{-it} га) кўнайтириб чиқилади:

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos x - i \sin x) = \begin{pmatrix} \sin x + i \cos x \\ \cos x - i \sin x \end{pmatrix}.$$

Бундан $\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ вектор-функциялар ечим экани келиб чиқади, чунки $\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ комплекс вектор-функция ечим. Демак, умумий ечим

$$y = C_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ C_1 \cos x - C_2 \sin x \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади.

2) $D(p)$ кўпхаднинг илдизлари каррали. Шу кўпхаднинг турли илдизларини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, m < n$ дейлик. Бунда λ_1 илдиз q_1 каррали, $\lambda_2 - q_2$ каррали, $\dots, \lambda_m - q_m$ каррали бўлсин. Равшанки, $q_1 + q_2 + \dots + q_m = n$ бўлади.

9.15- теоремага асосан умумий ечим (9.52) формула билан ёзилади. Бу формулада ҳар бир $g^{(i)}(x)$ вектор-функция координатлари тартиби $(q_i - 1)$ га тенг бўлган кўпхадлардан иборат. Бу кўпхаднинг q_i та коэффицентларини $g^{(i)}(x) e^{\lambda_i x}$ функция чизиқли бир жинсли системанинг ечими эканидан фойдаланиб топамиз. Бошқача айтганда, $g^{(i)}(x)$ кўпхаднинг коэффицентларини ўзгармас коэффицентлар усули билан топамиз. Масалан, $g^{(i)}(x)$ -вектор-функцияни бундай ёзайлик:

$$g_{(x)}^{(j)} = \begin{bmatrix} g_1^{(j)}(x) \\ g_2^{(j)}(x) \\ \vdots \\ g_n^{(j)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10}^{(j)} + \alpha_{11}^{(j)}x + \dots + \alpha_{1q_1-1}^{(j)}x^{q_1-1} \\ \alpha_{20}^{(j)} + \alpha_{21}^{(j)}x + \dots + \alpha_{2q_2-1}^{(j)}x^{q_2-1} \\ \vdots \\ \alpha_{n_0}^{(j)} + \alpha_{n_1}^{(j)}x + \dots + \alpha_{n_{q_i}-1}^{(j)}x^{q_i-1} \end{bmatrix} =$$

Энди $g^{(n)} e^{jx}$ ни (9.38) га қўямиз:

$$\frac{d}{dx} (g^{(n)}(x)) e^{jx} + g^{(n)}(x) \lambda_i e^{jx} = A (\alpha_{0i}^{(n)} x + \dots + \alpha_{q_i-1}^{(n)} x^{q_i-1}), \quad (9.56)$$

$$\alpha_k^{(n)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k}^{(n)} \\ \alpha_{2k}^{(n)} \\ \vdots \\ \alpha_{nk}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad k=0, 1, \dots, q_i-1.$$

Ҳосил бўлган (9.56) вектор-тенгламанинг икки томонида x нинг бир хил даражалари олдидagi коэффициентларни тенглаштирак, $g^{(n)} x$ векторининг ҳар бир координатаси ролини ўйнаётган қўнҳаднинг коэффициентларини топамиз. Бу коэффициентлар учун чизикли бир жинсли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз.

Аслида (*) вектор қўнҳаднинг тартиби q_i-1 дан кам бўлиши мумкин. Агар q_i каррали λ_i илдизга m_i ($m_i < q_i$) та чизикли эркин ҳос векторлар мос келса, у ҳолда $g^{(n)}(x)$ ни ушбу

$$g^{(n)}(x) = \alpha_{0i}^{(n)} + \alpha_{1i}^{(n)} x + \dots + \alpha_{q_i-m_i}^{(n)} x^{q_i-m_i} \quad (**)$$

кўринишида излаш лозим. Тегинли ҳос векторлар сонини топиш учун $D(\lambda_i)$ детерминантни ёзамиз. Унинг тартиби n . Тегинли матрица ранги r бўлади. Шубҳасиз $r < n$, чунки $D(\lambda_i) = 0$. Шунинг учун $m_i = n - r$ бўлади. Агар q_i каррали λ_i илдизга q_i та чизикли эркин ҳос векторлар мос келса, $m_i = n - r$ бўлади ва (*) ҳолга эга бўламиз ([3], 288–289 бетларга қаранг).

Мисол. Ушбу

$$y_1' = -y_1, \quad y_2' = y_1 - y_2$$

системанинг матрицаси $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, характеристик детерминанти

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2. \text{ Демак, } D(\lambda) = 0; \text{ тенглама } \lambda_{1,2} = -1$$

бита икки каррали илдизга эга. Ундай бўлса, ечимни $y_1 = (ax+b)e^{-x}$, $y_2 = (cx+d)e^{-x}$ кўринишида излашди. Тегинли ҳосилларни олиб, берилган систематга қўямиз ва e^{-x} га ҳосил бўлган тенгликларини икки томонини бўлиб юборамиз:

$$\begin{cases} a = -(ax+b) & (ax+b), \\ c = -(cx+d) = (ax+b) - (cx+d) \end{cases}$$

Бу системадан

$$\begin{cases} a = b = -b, \\ -a = -a \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} c = d = b - d, \\ -c = a - c \end{cases}$$

тенгликларни топамиз. Булардан $a=0$, $b=-c=C_1$, $d=C_2$ (C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас) қийматларга эга бўламиз. Шундай қилиб, берилган системанинг умумий ечими

$$y_1 = C_1 e^{-x}, \quad y_2 = (C_1 x + C_2) e^{-x}$$

кўринишида ёзилади.

$$\text{Машиқ. 1. Ушбу} \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2. \end{cases}$$

система интеграллансин. Бунда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$ бўлган ҳоллар алоҳида текширилсин.

2. Қуйидаги

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_2, \\ y_2' = by_1 + ay_2. \end{cases}$$

система интеграллансин (унда $b \neq 0$).

9.5-§. ЧИЗИКЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН СИСТЕМАЛАР

Чизикли бир жинсли бўлмаган системаларда A матрица ўзгармас бўлган ҳолни алоҳида ўрганамиз. Бизга ушбу

$$\frac{dy}{dx} = Ay + b(x), \quad A = \text{const} \quad (9.57)$$

чизикли ўзгармас коэффицентли (ўзгармас матрицали) вектор-матрицали тенглама берилган бўлсин. Унда $b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ век-

тор-функция бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз функция. Бу ҳолда (9.57) системага мўх бир жинсли системанинг умумий ечимига кўра Лагранжийинг ўзгармасни вариациялаш усули ёрдамида бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини топиш мумкин. Қолаверса, (9.57) системани интеграллаш учун Коши формуласини қўллаш мумкин ((9.33) формулага қаранг).

Агар бир жинсли бўлмаган системада $b(x)$ вектор-функция ихтиёрий бўлмай, унинг ҳар бир координатаси квазикўпхаддан иборат бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини топиш ва 9.12-теоремадан фойдаланиб умумий ечимини ёзиш мумкин. Биз мазкур параграфда хусусий ечимни топиш (ташлаш) билан шуғулланамиз.

Биз квазикўпхаднинг таърифини 6-бобда берган эдик ((6.29) га қ.).

Энди $b(x)$ вектор-функциянинг ҳар бир $b_j(x)$, $j=1, 2, \dots, n$ координатаси квазикўпхад бўлсин, яъни

$$b_j(x) = b_j^{(1)}(x) e^{\lambda_1 x} + b_j^{(2)}(x) e^{\lambda_2 x} + \dots + b_j^{(m)}(x) e^{\lambda_m x}, \quad (9.58)$$

бунда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ лар ўзаро ҳар хил ҳақиқий ёки комплекс сонлар, $b_j^{(k)}(x)$, $k=1, 2, \dots, m$ -бирор кўпхад. Агар 9.13-теорема кўзда тутилса, $b_j(x) = P_{m_j}(x) e^{\lambda_j x}$, $P_{m_j}(x)$, $j=1, 2, \dots, n$ тартиби m_j бўлган кўпхад деб мулоҳазалар юритиш ётарли.

Хусусий вектор-ечимнинг кўринишини ёзиш учун $\max\{m_1, m_2, \dots, m_n\} = m$ дейлик.

1) γ сон мос бир жинсли системанинг матрицаси учун хос сон эмас, яъни $L(\gamma) \neq 0$. Бу ҳолда хусусий ечим қуйидаги

$$\psi_j(x) = y_j(x) = Q_m^{(j)}(x) e^{\gamma x}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (9.59)$$

($Q_m^{(j)}(x)$ — m -тартибли кўпхад) кўринишда изланади. Номатълум $Q_m^{(j)}(x)$, $j=1, 2, \dots, n$ кўпхаднинг коэффицентлари номатълум коэффицентлар усули билан топилади.

2) γ сони мос бир жинсли системанинг характеристик тенгламаси учун s каррали илдиз.

Хусусий ечим ушбу

$$\psi_j(x) = Q_{m+s}^{(j)}(x) e^{\gamma x}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (9.60)$$

($Q_{m+s}^{(j)}(x)$ -тартиби $(m+s)$ га тенг кўпхад) кўринишда изланади. Қайд қилиб ўтамизки, хусусий ечим $\psi_j(x) = x^s Q_m^{(j)}(x) e^{\gamma x}$ кўринишда эмас, (9.60) кўринишда изланиши лозим. Бу ҳолда ҳам кўпхаднинг коэффицентлари аниқмас коэффицентлар усули билан топилади*.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + xe^{3x}, \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

система интегралласин. Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Бундан $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Демак, $\lambda = 3$ -икки каррали илдиз. Мос бир жинсли системани олайлик:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Кўралаётган ҳолда бу бир жинсли системанинг ечимини

$$y_1 = (ax + b) e^{3x}, \quad y_2 = (cx + d) e^{3x}$$

кўринишда излаймиз. Олдин ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} y_1' &= ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x} = e^{3x}(3ax + a + 3b), \\ y_2' &= e^{3x}(3cx + c + 3d). \end{aligned}$$

Бу ифодаларни бир жинсли системага қўямиз:

$$\begin{aligned} e^{3x}(3ax + a + 3b) - 2(ax + b)e^{3x} - (cx + d)e^{3x}, \\ e^{3x}(3cx + c + 3d) = (ax + b)e^{3x} + 4(cx + d)e^{3x}. \end{aligned}$$

Натижада қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} 3ax + (a + 3b) &= (2a + c)x + (2b + d), \\ 3cx + (c + 3d) &= (a + 4c)x + (b + 4d). \end{aligned}$$

* Мос равишда (9.59) ёки (9.60) кўринишдаги хусусий ечимларнинг мавжудлиги бевосита ҳисоблашлар ёрдамида исботланади.

Бундан

$$\begin{cases} 3a=2a-c, \\ a+3b=2b-d, \\ 3c=a+4c \\ c+3d=b+4d \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} a=-c, \\ a+b=-d, \\ a=-c, \\ c=b+d \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} a=C_1, \\ c=-C_1 \\ b=C_2, \\ d=-(C_1+C_2), \end{cases}$$

бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрый хакикий ўзгармаслар.

Шундай қилиб, бир жинсли системанинг умумий ечимини

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 x + C_2) e^{3x}, \\ y_2 = -(C_1 x + C_1 + C_2) e^{3x} \end{cases}$$

каби ёзилади.

Энди бир жинсли бўлмаган системани текшираемиз. Бу системада

$$b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ва (9.58) квазикўнхад учун бизнинг ҳолда } \lambda_1 = \lambda_2 = 3,$$

$m_1 = 1, \gamma = 3$ сон характеристик тенгламанинг икки қаррали илдизи ва $m+s=$
 $=3$ бўлгани учун бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини

$$\begin{cases} y_1 = (a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4) e^{3x}, \\ y_2 = (b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4) e^{3x} \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. Аввал биринчи тартибли ҳосилалар оламиз:

$$y_1' = e^{3x} (3a_1 x^3 + 3a_2 x^2 + 3a_3 x + 3a_4 + 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3),$$

$$y_2' = e^{3x} (3b_1 x^3 + 3b_2 x^2 + 3b_3 x + 3b_4 + 3b_1 x^2 + 2b_2 x + b_3).$$

Бу ифодаларни берилган бир жинсли бўлмаган системага қўямиз ва ҳосил бўлган тенгликларнинг икки томонини e^{3x} га қисқартираемиз:

$$\begin{cases} 3a_1 x^3 + (3a_2 + 3a_1) x^2 + (3a_3 + 2a_2) x + (3a_4 + a_3) = \\ = (2a_1 - b_1) x^3 + (2a_2 - b_2) x^2 + (2a_3 - b_3 + 1) x + (2a_4 - b_4), \\ 3b_1 x^3 + (3b_2 + 3b_1) x^2 + (3b_3 + 2b_2) x + (3b_4 + b_3) = \\ = (a_1 + 4b_1) x^3 + (a_2 + 4b_2) x^2 + (a_3 + 4b_3) x + (a_4 + 4b_4). \end{cases}$$

Энди тенгликларда x нинг бир хил даражалари олдидан (чап ва ўнг томонда) коэффициентларини тенглаштираемиз:

$$\begin{cases} 3a_1 = 2a_1 - b_1, \\ 3a_2 + 3a_1 = 2a_2 - b_2, \\ 3a_3 + 2a_2 = 2a_3 - b_3 + 1, \\ 3a_4 + a_3 = 2a_4 - b_4, \end{cases} \quad \begin{cases} 3b_1 = a_1 + 4b_1, \\ 3b_2 + 3b_1 = a_2 + 4b_2, \\ 3b_3 + 2b_2 = a_3 + 4b_3, \\ 3b_4 + b_3 = a_4 + 4b_4. \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} a_1 = -b_1, \\ a_2 + 3a_1 = -b_2, \\ a_3 + 2a_2 = -b_3 + 1, \\ a_4 + a_3 = -b_4, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = a_1 + b_1, \\ 3b_1 = a_2 + b_2, \\ 2b_2 = a_3 + b_3, \\ b_3 = a_4 + b_4. \end{cases}$$

Бу икки чиққин системанинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 + b_2 = -3a_1, \quad a_2 + b_2 = 3b_1, \quad a_1 = -b_1$$

келиб чиқади, учинчи тенгламалардан $a_1 + b_1 = 2b_2$, $a_1 + b_1 = 1 - 2a_2$ ёки $2b_2 = 1 -$

$2a_2$, $a_2 + b_2 = \frac{1}{2}$ ни топамиз. Шунинг учун юқоридagi муносабатлардан фойдалансак, $-3a_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{6}$ ва $b_1 = \frac{1}{6}$ бўлади. Энди ушбу $a_1 + b_1 = -a_1$, $a_1 + b_1 = b_1$ тенгликлардан $-a_1 = b_1$ ёки $a_1 + b_1 = 0$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда $a_1 + b_1 = 1 - 2a_2$, $a_1 + b_1 = 2b_2$ лардан $b_2 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ ни топниш мумкин. Аммо $a_1 + b_1 = 0$ дан бошқа шу миқдорларни бoлaйдиган муносабат қoлмагани учун улардан бирини ихтиёрй, яъни хусусан (бирага бошқа қийматларнинг кераги ҳам йўқ) $b_1 = 0$, демак, $a_1 = 0$ деб танлаймиз. Шунинг учун $a_1 + b_1 = 0$ бўлади. Бундан юқоридagига ухшаш $a_1 = b_1 = 0$ деб oламиз. Хулоса қилиб oламиз:

$$a_1 = -\frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_4 = 0, \\ b_1 = \frac{1}{6}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = b_4 = 0$$

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечими

$$y_1 = \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right)e^{ix}, \quad y_2 = \frac{1}{6}x^3e^{3ix},$$

умумий ечими эса

$$\begin{cases} y_1 = (C_1x + C_2)e^{ix} + \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right)e^{ix}, \\ y_2 = -(C_1x + C_1 + C_2)e^{ix} + \frac{1}{6}x^3e^{3ix} \end{cases}$$

кўринишга эга.

2. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + e^{3ix} \sin x, \\ y_2' = y_1 + 4y_2 + xe^{ix} \cos x \end{cases}$$

система интегралланиш

1- мисoлда мос бир жинсли системанинг умумий ечими топилган. Энди бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини топниш билан шуғулланамиз. Қурылаган ҳолда $b(x) = \begin{pmatrix} e^{3ix} \sin x \\ xe^{ix} \cos x \end{pmatrix}$ ва $m_1 = 1$, $\gamma \neq \lambda_1 = 3$, чунки $\gamma = 3 + i$. Шунинг учун тенгликни ҳақиқий хусусий ечим

$$y_1 = e^{-ix} [(a_1x + a_2) \cos x + (a_3x + a_4) \sin x], \\ y_2 = e^{-ix} [(b_1x + b_2) \cos x + (b_3x + b_4) \sin x]$$

кўринишда изланиши мумкин.

Энди номатлум коэффициентлар усули билан $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ ларни топамиз. Агар y_1 ва y_2 лардан ҳосила oлиб, берилаган бир жинсли бўлмаган системага қўйсак, қуйдагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} 3|(a_1x+a_2)\cos x+(a_3x+a_4)\sin x|+a_1\cos x-(a_1x+a_2)\sin x+ \\ +a_3\sin x+(a_3x+a_4)\cos x=2|(a_1x+a_2)\cos x+(a_3x+a_4)\sin x|- \\ -(b_1x+b_2)\cos x+(b_3x+b_4)\sin x|+\sin x, \\ 3|(b_1x+b_2)\cos x+(b_3x+b_4)\sin x|+b_1\cos x-(b_1x+b_2)\sin x+ \\ +b_3\sin x+(b_3x+b_4)\cos x=(a_1x+a_2)\cos x+(a_3x+a_4)\sin x+4|(b_1x+ \\ +b_2)\cos x+(b_3x+b_4)\sin x|+x\cos x. \end{cases}$$

Агар бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларида $\cos x$ ва $\sin x$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак, яна бундай системага келамиз:

$$\begin{cases} 3(a_1x+a_2)+a_1+a_3x+a_4=2(a_1x+a_2)-(b_1x+b_2), \\ 3(a_3x+a_4)-(a_1x+a_2)+a_3=2(a_3x+a_4)-(b_3x+b_4)+1, \\ 3(b_1x+b_2)+b_1+(b_3x+b_4)=(a_1x+a_2)+4(b_1x+b_2)+x, \\ 3(b_3x+b_4)-(b_1x+b_2)+b_3=(a_3x+a_4)+4(b_3x+b_4). \end{cases}$$

Энди бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларида x нинг олдидаги коэффициентларни ўзаро ва овоз хадларни ҳам ўзаро тенглаштирамиз:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3a_1+a_3=2a_1-b_1, & (1) \quad a_1+b_1=-a_3, \\ 3a_2+a_1+a_4=2a_2-b_2, & (2) \quad a_2+b_2=-a_1-a_4, \\ 3a_3-a_1=2a_3-b_3, & (3) \quad a_3+b_3=a_1, \\ 3a_4-a_2+a_3=2a_4-b_4+1, & (4) \quad a_4+b_4=1+a_2-a_3, \\ 3b_1+b_3=a_1+4b_1+1, & (5) \quad a_1+b_1=b_3+1, \\ 3b_2+b_1+b_4=a_2+4b_2, & (6) \quad a_2+b_2=b_1+b_4, \\ 3b_3-b_1=a_3+4b_3, & (7) \quad a_3+b_3=-b_1, \\ 3b_4-b_2+b_3=a_4+4b_4, & (8) \quad a_4+b_4=-b_2+b_3. \end{array} \right\} \quad \text{ёки}$$

Охириги системада (1) ва (5) дан $a_1+b_1=1$, шунинг учун (7) дан $b_1=-1$, (3) дан $a_1=1$ келиб чиқади. Бундан равшанки, $a_1+b_1=0$, демак, (1) дан $a_3=0$. Энди (3) дан $b_3=a_1=1$. (2) билан (6) дан $a_4+b_4=0$ демак, (4) дан $a_2=-1$, (8) дан $b_2=1$ келиб чиқади. (6) дан $b_4=1$ ва $a_4+b_4=0$ дан $a_4=-1$ ни топамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -1, \\ b_1 &= -1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 1. \end{aligned}$$

Хусусий ечимни ёзамиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{3x} [(x-1)\cos x - \sin x], \\ y_2 &= e^{3x} [(-x+1)\cos x + (x+1)\sin x]. \end{aligned}$$

Агар

$$g_i = y_i(x_0) - y_i^0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

бўлса, (9.62) чегаравий шарт Коши масаласининг шартига айланади

2. Бир жинсли чегаравий масала. Энди (9.62) муносабатларда g_i функциялар қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} g_1(y) &= (\alpha_1^{(1)}, y(x_0)) + (\alpha_2^{(1)}, y(x_1)) - A_1 = g_1^0(y) - A_1, \\ g_n(y) &= (\alpha_1^{(n)}, y(x_0)) + (\alpha_2^{(n)}, y(x_1)) - A_n = g_n^0(y) - A_n, \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

бунда $\alpha_i^{(j)} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \alpha_{i2}^{(j)}, \dots, \alpha_{in}^{(j)})^*$, $i=1, 2$; $j=1, \dots, n$ ўзгармас векторлар, $A_1, \dots, A_n$ ўзгармас сонлар, (α, y) кавслар скаляр кўпайтмани билдиради. Агар $A_1 = \dots = A_n = 0$ бўлса, масала *бир жинсли чегаравий масала* дейилади. Акс ҳолда биз *бир жинсли бўлмаган чегаравий масалага* эгамиз.

Кейинги мулоҳазаларни чизикли тенгламаларнинг нормал системаси учун юритамиз. Бизга ушбу

$$L(p)y=0 \quad (9.4')$$

бир жинсли нормал система берилган бўлиб, чегаравий шарт

$$g_s^0(y)=0, \quad s=1, 2, \dots, n \quad (9.64)$$

кўринишда бўлсин. Бошқача айтганда, бир жинсли нормал система учун бир жинсли чегаравий масала қўйилган бўлсин. Мухим теоремани келтирайлик.

9.17- теорема. Агар $y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)$, ..., $y^{(m)}(x)$ вектор-функциялар бирор I интервалда (9.4) тенгламанинг чизикли эркин ечимлари бўлса, y ҳолда $L(p)y=0$, $g_s^0(y)=0$, $s=1, \dots, n$ чегаравий масала тривиалмас ечимга эга бўлиши учун ушбу

$$D = \begin{vmatrix} g_1^0(y^{(1)}) & g_1^0(y^{(2)}) & \dots & g_1^0(y^{(m)}) \\ g_2^0(y^{(1)}) & g_2^0(y^{(2)}) & \dots & g_2^0(y^{(m)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n^0(y^{(1)}) & g_n^0(y^{(2)}) & \dots & g_n^0(y^{(m)}) \end{vmatrix}$$

детерминантнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Теореманинг исботи 7.8- теореманинг исботи каби.

Бир жинсли чегаравий масала ҳақида яна 7.5 ва 7.6- эслатмаларни бир жинсли система учун ҳам айтиш мумкин. 7- бобдаги каби бир жинсли чегаравий масала учун Грин функциясини киритиш мумкин. Бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини шу Грин функцияси орқали ёзиш ҳам мумкин. Шунга ўхшаш, чизикли вектор-дифференциал оператор L учун ҳос сонлар ва ҳос вектор-функциялар тушунчасини киритиш, қолаверса, бир жинсли бўлмаган чегаравий масалаларни ҳам ўрганишимиз мумкин эди. Аммо бу масалаларни

уларни (10.2) кўринишдаги нормал мухтор системалар учун исбот этамиз.

Бундан кейинги мулохазаларимизда (10.3) вектор-тенглама $f(x)$ вектор-функция бирор D_n соҳада аниқланган ва биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан узлуксиз деб фараз этамиз.

10.1-теорема. *Агар (10.3) нормал мухтор вектор-тенглама берилган бўлиб, $x = \varphi(t)$ вектор-функция унинг бирор ечими бўлса, у ҳолда ихтиёрий ўзгармас C лар учун $x = \varphi(t) = \varphi(t + C)$ вектор-функция ҳам (10.3) тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича содда ҳисоблашлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

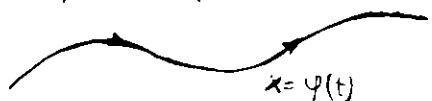
$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_*(t) &= \frac{d}{dt} \varphi_*(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t + C) = \frac{d}{d(t+C)} \varphi(t + C) \frac{d(t+C)}{dt} = \\ &= \dot{\varphi}(t + C) \cdot 1 = \varphi(t + C).\end{aligned}$$

Энди $\varphi_*(t)$ функция (10.3) тенгламанинг ечими эканини исботлаемиз. Теореманинг шартига кўра $x = \varphi(t)$ функция (10.3) тенгламанинг бирор ечими, демак, ушбу $\varphi(t) \equiv f(\varphi(t))$ айният ўринли. Бунда t ни $t + C$ га алмаштирсак, $\varphi(t + C) \equiv f(\varphi(t + C))$ айниятга эга бўламиз. Топилган муносабатдан

$$\dot{\varphi}_*(t) = \dot{\varphi}(t + C) = f(\varphi(t + C)) = f(\varphi_*(t)).$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

2. Мухтор системаларнинг жумладан, (10.2) системанинг ҳар бир $x = \varphi(x)$ вектор-ечимиغا n -ўлчовли фазода $(x_1, \dots, x_n) = x$ нуктанинг



36-чизма

ҳаракатини мос келтирамиз. Ҳаракат давомида x нукта ўша фазода бирор чизик чизади. Шу чизикни x нуктанинг *ҳаракат траекторияси* деб атаймиз. Мухтор системаларда нуктанинг ҳаракати тўғрисида

тўлиқ маълумотга эга бўлиш учун нуктанинг фақат траекториясини бериш етарли эмас, бунинг учун траекторияда, ҳеч бўлмаса, ҳаракат йўналишини ҳам бериш лозим (36-чизма).

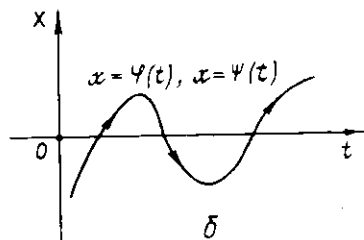
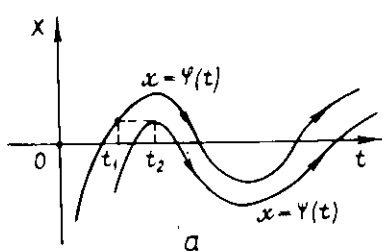
10.2-теорема. *Агар $x = \varphi(t)$ ва $x = \psi(t)$ вектор-функциялар (10.3) тенгламанинг икки ихтиёрий ечими бўлса, у ҳолда бу ечимлар ё бирорта ҳам нуқтада кесилишмайди ёки бутунлай ўстма-ўст тушади. Бошқача айтганда, агар $t_1 \neq t_2$ бўлиб, $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(t) \equiv \varphi(t + C)$, $C = t_1 - t_2$ муносабат ўринли бўлади (37-а, б чизма).*

Исбот. Теоремани исбот этиш учун $\varphi(t)$ ечим билан бирга $\varphi_*(t) = \varphi(t + C)$, $C = t_1 - t_2$ ечимни ҳам кўрамиз. Бундан

$$\varphi_*(t_2) = \varphi(t_2 + C) = \varphi(t_2 + t_1 - t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2),$$

яъни

$$\varphi_*(t_2) = \psi(t_2).$$



37- чизма

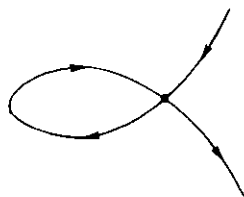
Шундай қилиб, (10.3) тенгламанинг иккита $x = \varphi(t)$ ва $x = \psi(t)$ ечимлари бир хил бошланғич қийматларга эга. Демак, Коши теоремасининг шартлари бажарилади ва ягоналик ўринли, яъни $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ ечимлар устма-уст тушади (аникланиш интервалларининг умумий қисмида). Бу эса теоремани исбот этади. Агар $t_1 = t_2$ бўлса, теореманинг натижаси тривиал бўлади.

10.2-§. МУХТОР СИСТЕМА ТРАЕКТОРИЯСИНИНГ МУҲИМ ХОССАСИ

Мухтор системанинг алоҳида олинган битта $x = \varphi(t)$ траекторияси ўз-ўзини кеса оладими, яъни 38-чизмада кўрсатилган ҳол юз берадими ёки йўқми, деган савол кўяйлик. Бу саволга жавоб мухтор системанинг учинчи муҳим хоссасини очиб беради.

10.3-теорема. $x = \varphi(t)$ функция (10.3) тенгламанинг $r_1 < t < r_2$ интервалда аниқланган бирор ечими бўлсин. Агар $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $t_1 \neq t_2$ ва $r_1 < t_1 < r_2$, $r_1 < t_2 < r_2$ бўлса, у ҳолда шу $x = \varphi(t)$ ечимни $-\infty < t < +\infty$ интервалда давом эттириш мумкин.

Исбот. 10.1-теоремага кўра $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ бўлгани учун $x = \varphi(t+C)$, $C = t_1 - t_2$ функция ҳам ечим бўлади ва ушбу $\varphi(t) \equiv \varphi(t+C)$, $r_1 < t < r_2$ айният ўринли. Бу айниятдан $\varphi(x)$ функция $r_1 < t < r_2$ интервалда аниқлангани учун $\varphi(t+C)$ функция $r_1 - |C| < t < r_2 + |C|$ интервалда аниқланган бўлади. Ҳақиқатан, $r_1 < t+C < r_2$ тенгсизликдан $C > 0$ бўлганда $r_1 - C < t < r_2$ ва демак, ечимни r_1 дан чапга C миқдорга давом эттириш мумкин; шунга ўхшаш, $C < 0$ бўлганда $r_1 < t < r_2 - C$, яъни ечимни r_2 дан ўнгга $-C = |C|$ миқдорга давом эттириш мумкин бўлади. Ҳар икки ҳолни бирлаштириб ечимни $r_1 - |C| < t < r_2 + |C|$ интервалга давом эттириш мумкинлигини қайд қиламиз. Шу интервалда аниқланган $\varphi^{(1)}(t)$ ечим учун барибир $\varphi^{(1)}(t) \equiv \varphi^{(1)}(t+C)$ айният ўринли. $\varphi^{(1)}(t+C) = \varphi^{(1)}(t)$ десак, $\varphi^{(1)}(t_1) = \varphi^{(1)}(t_1+C) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, яъни $\varphi^{(1)}(t_1) = \varphi(t_2)$, бундан аввалгидек $\varphi^{(1)}(t+C) \equiv \varphi^{(1)}(t)$ экани келиб чиқади. $\varphi^{(1)}(t)$ функция $r_1 - |C| < t < r_2 + |C|$ интервалда аниқланган бўлгани учун охириги айниятдан фойдаланиб мавжудлик интервалини янада кенгайтириш мумкин. Бошқача айтганда, $r_1 - 2|C| < t < r_2 + 2|C|$ интервалда



38- чизма

аникланган ечимни куриш мумкин. Тегинли ечимни $\varphi^{(2)}(t)$ деб белгилаймиз. Шунга ўхшаш, мавжудлик интервали $r_1 - k|C| < t < r_2 + k|C|$ дан иборат бўлган $\varphi^{(k)}(t)$ ечимни куриш мумкин. Юқоридаги тенгсизликда $k \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, $-\infty < t < +\infty$ интервал ҳосил бўлади (r_1 ва r_2 лар қандай бўлишидан қатъи назар). Шу интервалда аникланган ечимни $\varphi^0(t)$ деймиз. Шундай қилиб, теорема исбот бўлди. Аммо исбот давомида мухтор системанинг ҳар қандай траекторияси чекли вақтда чексизга кетиб қолмаслигидан фойдаланилди. Аслида кўриляётган ҳолда шундай. Шу муносабат билан қуйида старли шартни берадиган лемма келтирамыз.

10.1-л е м м а. Агар D_n соҳада $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ функциялар барча аргументлари бўйича чекланган хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда (10.3) мухтор системанинг ҳеч қандай траекторияси чекли вақтда чексизга кетиб қолмайди, яъни ушибу

$$\lim_{t \rightarrow \tau} |\varphi(x)| = \infty, \quad |\varphi(t)| = \sqrt{\varphi_1^2(t) + \dots + \varphi_n^2(t)}$$

муносабат ўринли бўли олмайди.

И с б о т. Лемманинг шартига кўра $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right| \leq M, i, j = 1, 2, \dots, n,$
 $0 < M$ — чекли сон. Энди $f_i(x)$ функция учун $x=0$ нукта атрофида Лагранж формуласини ёзамиз:

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i(0, x)}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial f_i(0, x)}{\partial x_n} x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{бунда}$$

$0 < \theta_i < 1, \theta_i x = y \in D_n, |f(0)| = C$ деймиз. $\left| \frac{\partial f(0, x)}{\partial x_i} \right|$ модулли ба-
 ҳолайлик:

$$\left| \frac{\partial f(0, x)}{\partial x_i} \right| = + \sqrt{\left(\frac{\partial f_1(0, x)}{\partial x_i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f_n(0, x)}{\partial x_i} \right)^2} \leq \sqrt{n} M.$$

Бундан фойдаланиб, $f(x)$ вектор-функциянинг модулини баҳолаш мумкин. Ҳақиқатан, равшанки

$$\begin{aligned} |f_i(x)| &\leq C + \sqrt{n} M \sum_{i=1}^n |x_i| \leq c \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n} M \sum_{i=1}^n |x_i| = \\ &= \sqrt{n} \left(C + M \sum_{i=1}^n |x_i| \right) \leq N \sqrt{n} \left(1 + \sum_{i=1}^n |x_i| \right), \end{aligned}$$

бунда $N = \max(C, M)$. Бу тенгсизликдан фойдаланиб тонамиз:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x)} \leq \sqrt{n^2 N^2 \left(1 + \sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2} = \\ &= nN \left(1 + \sum_{i=1}^n |x_i| \right). \end{aligned}$$

Фараз этайлик, $r_1 < x < r_2 + \sum_{m=1}^k |C_m|$ интервалда аниқланган ва $t \rightarrow \tau = r_2 + \sum_{m=1}^k |C_m|$ да чексизликка интилувчи $x = \varphi(t)$ ечим мавжуд, яъни $t \rightarrow \tau$ да $|\varphi(t)| \rightarrow \infty$ ($\tau = r_1 - \sum_{m=1}^k |C_m|$ бўлганда ҳам исбот шунга ўхшаш бўлади). У ҳолда шундай $\tau_* < \tau$ топиладики, $\tau_* \leq t < \tau$ интервалда $|\varphi(t)| > 1$ бўлади. Шунинг учун $\tau_* \leq t < \tau$ интервалда қуйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} |\dot{\varphi}(t)| &\leq |\dot{q}_1(t)| + |\dot{q}_2(t)| + \dots + |\dot{q}_n(t)| \leq \\ &\leq Nn \sqrt{n} \left(1 + \sum_{i=1}^n |\varphi_i(t)| \right) \leq n(n+1)N \sqrt{n} |\varphi(t)|. \end{aligned}$$

Бундан

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)| \leq \frac{|\dot{\varphi}(t)|}{|\varphi(t)|} \leq n(n+1)N \sqrt{n}, \quad \tau_* \leq t < \tau.$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини τ_* дан t гача интеграллаб топамиз:

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(\tau_*)| e^{n(n+1)N \sqrt{n}(t - \tau_*)}, \quad \tau_* \leq t < \tau.$$

Аmmo

$$t \rightarrow \tau \text{ да } |\varphi(t)| \leq |\varphi(\tau_*)| e^{n(n+1)N \sqrt{n}(t - \tau_*)}$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, унинг ўнг томонидаги ифода мусбат чекли сондир. Бу эса фаразимишга зид. Демак, чекли вақтда $x = \varphi(x)$ траектория чексизга кета олмайди. Лемма исбот этилди.

Кейинги мулохазаларда шу лемманинг шартлари ёки бошқа старли шарт бажарилган деб қараб, $x = \varphi(t)$ ечим $-\infty < t < +\infty$ интервалда аниқланган деб ҳисобланади. Хусусан, 10.3-теоремада

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \quad t_1 \neq t_2$$

бўлгани учун

$$\varphi(t) = \varphi(t + C_1) = \dots = \varphi\left(t + \sum_{i=1}^k C_i\right)$$

айният бажарилади ва $\varphi(t)$ функция $t \rightarrow \tau$ (τ -чекли сон) да чексизга интилмайди. Аслида $\varphi(t)$ ечим чекли вақтда чексизга интилмаслиги учун $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $t_1 \neq t_2$ муносабатнинг бажарилиши ҳам старли шартлардан биридир.

Навбагдаги теоремада ҳам мухтор системанинг ечими $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $t_1 \neq t_2$ бўлганда $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган деб ҳисобланади.

10.4-теорема (мувозанат ҳолат ва ёпик траекториялар ҳақида). Агар (10.3) тенгламанинг бирор $\varphi(t)$ ечими учун $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $t_1 \neq t_2$ тенглик бажарилса, қуйидаги бири иккинчисини инкор этидиган икки ҳол икк бирини мумкин:

1) барча t лар учун

$$\varphi(t) \equiv a, \quad a = \text{const}, \quad a \in D_n;$$

2) шундай мусбат сон T мавжудки, ихтиёрый t учун

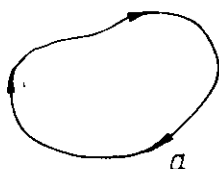
$$\varphi(t+T) = \varphi(t)$$

тенглик бажарилиб, $0 < |\tau_1 - \tau_2| < T$ бўлганда

$$\varphi(\tau_1) \neq \varphi(\tau_2)$$

тенгсизлик ўринли.

1) ҳолда вақт ўтиши билан $\varphi(t)$ нукта ҳаракат қилмайди, у доим



39-чизма

$$x = a$$

$$\delta$$

D_n тўпламнинг a нуктасида бўлади. Шу $\varphi(t)$ ечим ва a нукта (10.3) тенгламанинг, яъни нормал муҳтор системанинг мувозанат ҳолати ёки мувозанат нуқтаси дейилади. Баъзида уни тинчланиш нуқтаси деб ҳам аталади (39, б-чизма);

2) ҳолда $x = \varphi(t)$ ечим даврий ечим, унинг графиги ёпиқ траектория ёки цикл (даври) деб аталади (39, а-чизма).

10.4-теореманинг исботи. Ушбу

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C) \quad (10.4)$$

айният ўринли бўладиган ҳар бир $C \neq 0$ сон $x = \varphi(t)$ ечимнинг даври дейилади. Шу $x = \varphi(t)$ ечимнинг барча даврларидан тузилган тўплам F бўлсин. Ҳозир бу сонли тўпламнинг баъзи хоссаларини текширамиз.

1°. Агар $C \in F$ бўлса, $-C \in F$ бўлади. Ҳақиқатан (10.4) да t ни $t-C$ га алмаштирамиз: $\varphi(t-C) \equiv \varphi(t)$. Бундан $-C \in F$ келиб чиқади.

2°. Агар $\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_i)$, $i=1, 2, \dots, k$, $C_i \in F$ бўлса, у ҳолда

$$\varphi(t) \equiv \varphi\left(t + \sum_{i=1}^k C_i\right), \quad \text{яъни} \quad \sum_{i=1}^k C_i \in F \text{ бўлади. Ҳақиқатан,}$$

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_1),$$

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_2) \equiv \varphi(t+C_1+C_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_{k-1}) \equiv \varphi(t+C_{k-2}+C_{k-1}) \equiv \dots \equiv \varphi\left(t + \sum_{i=1}^{k-1} C_i\right),$$

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_k) \equiv \dots \equiv \varphi\left(t + \sum_{i=1}^k C_i\right).$$

3°. F тўплам ёпиқ. Ҳақиқатан, ушбу $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$ кетма-кетлик F тўплам элементларидан тузилган бўлиб, бирор C_0 га яқинлашувчи бўлсин. $C_0 \in F$ эканини кўрсатамиз. Равшанки, $\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_k)$.

Шунинг учун $\varphi(t)$ функциянинг узлуксизлигига кўра аргументда лимитга ўтиш мумкин, яъни қуйидаги амаллар ўринли:

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t + C_k) = \varphi(t + \lim_{k \rightarrow \infty} C_k) = \varphi(t + C_0)$$

Демак, $C_0 \in F$ ва F ёпиқ.

4°. F тўплам нолдан фаркли сонларни ўз ичига олади, чунки (10.4) да $C \neq 0$ ($t_1 \neq t_2$).

Энди теореманинг исботига ўтайлик. F тўплам учун қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

1) F тўплам барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат;

2) F тўпламда шундай кичик мусбат T сон мавжудки, у тўплам шу T сонга бутун қаррали сонлардан иборат.

Бошқа ҳоллар бўла олмайди. Буни исбот этамиз. F тўпламда мусбат сонлар бор, чунки $0 \notin F$ бўлиб, $C, -C$ лар унинг элементи.

F тўпламда энг кичик мусбат сон бўлмасин, яъни ихтиёрий мусбат $\epsilon > 0$ учун шундай C давр топиладики, $C < \epsilon$ бўлади. 2° ҳоссага кўра m -бутун бўлса, mC ҳам давр бўлади. $C < \epsilon$ бўлгани учун ихтиёрий ҳақиқий C_0 учун шундай бутун m топиладики, $|C_0 - mC| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бундан ихтиёрий C_0 сон F тўпламнинг лимит нуктаси экани келиб чиқади. Шу билан бирга F тўплам ёпиқ бўлгани учун у барча ҳақиқий сонлар тўплами билан устма-уст тушади.

Энди F тўплам барча ҳақиқий сонлар тўплами билан устма-уст тушмасин, дейлик. Юқорида исботланганига кўра бу ҳолда F тўпламда энг кичик мусбат сон T мавжуд. C — ихтиёрий давр бўлсин. У ҳолда шундай бутун сон m ни танлаш мумкинки, ушбу $|C - mT| < T$ тенгсизлик бажарилади. Бунда $C - mT \neq 0$ дейлик. Аммо C ва mT лар давр бўлгани учун $C - mT$ ҳам давр бўлади. Демак, $|C - mT|$ ҳам давр бўлади. Шунинг учун $|C - mT| > 0$ ва $|C - mT| < T$ тенгсизликлардан F тўпламнинг T дан кичик бўлган мусбат даври мавжуд. Бу бўлиши мумкин эмас, чунки T сон F тўпламда энг кичик мусбат давр эди. Зиддият $C = mT$ бўлиши кераклигини исботлайди. Демак, $C = mT$. Шундай қилиб, кўрилатган ҳолда F тўплам T га қаррали сонлардан иборат. Натижа қилиб айтганда, даврлардан тузилган F тўплам ё барча ҳақиқий сонлардан иборат, ё унда энг кичик мусбат сон $T > 0$ мавжуд ва F тўплам шу T га қаррали сонлардан ташкил топган.

Биринчи ҳолда $\varphi(t)$ ечим учун ихтиёрий ҳақиқий сон давр бўлади; бу фақат $\varphi(t)$ вектор-функция ўзгармас вектордан иборат бўлгандагина мумкин, яъни агар $\varphi(t) = a$, $a \in D_n$ бўлса, у ҳолда C — ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса ҳам $\varphi(t + C) = a$ тенглик бажарилаверади. Биз мувозанат ҳолатига эгамиз. Иккинчи ҳолда F тўпламнинг энг кичик мусбат T сони $\varphi(t)$ ечимнинг даври (энг кичик мусбат даври) бўлади. Биз даврий ечимга эгамиз. Шундай қилиб, теорема тўлиқ исбот бўлди.

1. Ҳолатлар фазоси. Мухтор система (10.2) нинг ўнг томонидаги функциялар n -ўлчовли фазонинг бирор очик Λ тўпламида аниқланган. Шу тўпламнинг ҳар бир $(x_1^0, \dots, x_n^0) = x^0$ нуктасига ушбу

$$f_1(x^0), f_2(x^0), \dots, f_n(x^0)$$

n та сонлар кетма-кетлигини мос келтириш мумкин. Уларни n ўлчовли фазонинг x^0 нуктасидан чиқарилган $f(x^0)$ векторининг координаталари деб қараш мумкин. Бундан кўринадики, мухтор системага очик Λ тўпламда аниқланган *вектор майдон* мос келади.

x нукта Λ тўпламнинг ихтиёрый нуктаси бўлсин. Мухтор системанинг геометрик маъноси нуктаи назаридан шу x^0 нуктага ундан чиқадиган $f(x^0)$ вектор мос келтирилган. Мавжудлик ва ягоналик теоремасига кўра (10.2) системанинг $\varphi(t_0) = x^0$ шартни қаноатлантирадиган $x = \varphi(t)$ ечими мавжуд. Бу ечимга $t = t_0$ да траекторияси x^0 нуктадан ўтадиган нуктанинг *ҳаракати* мос келади. Ҳаракати давомида $x = \varphi(t)$ ечимни белгилайдиган нуктанинг t_0 моментдаги тезлиги $f(x^0)$ вектор билан ифодаланади, яъни

$$\left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right) \Big|_{t=t_0} = f(x_0) \text{ Энди ҳолатлар фазоси тушунчасини киритамиз.}$$

10.2-таъриф. (10.2) *мухтор системанинг ҳолатлар фазоси* деб шундай n ўлчовли фазога айтиладики, унда шу системанинг ечимлари траекториялар билан, системанинг ўзи эси вектор майдон билан тавсифланади. Траекториялар ҳолат траекториялари деб, векторлар ҳолат тезликлари деб аталади.

10.5-теорема. Ушбу $a = (a_1, \dots, a_n) \in D_n(D_n = \Lambda)$ нукта (10.2) системанинг мувозанат ҳолати бўлиши учун, яъни шу системанинг $\varphi(t) \equiv a$, $a = \text{const}$ айният ўринли бўлидиган $x = \varphi(t)$ ечими мавжуд бўлиши учун D_n соҳанинг a нуктасида ҳолат тезлиги нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $a \in D_n$ нукта мувозанат ҳолати дейлик. У ҳолда (10.2) системанинг $\varphi(t) \equiv a$ айният ўринли бўладиган $x = \varphi(t)$ ечими мавжуд. Шунинг учун $f(a) = \frac{d}{dt}\varphi(t) \equiv \frac{d}{dt}a = 0$. Демак, $f(x)$ ҳолат тезлиги $x = a$ нуктада нолга айланади.

Етарлилиги. $a \in D_n$ нуктада $f(a) = 0$. Бу ҳолда $\varphi(t) \equiv a$ функция (10.2) системанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $\varphi(t) \equiv a \in C^1$, $a \in D_n$, $\dot{\varphi}(t) = \frac{da}{dt} \equiv 0$ ва $f(a) = 0$. Теорема исбот бўлди.

10.1-натижа. (10.2) *мухтор системанинг мувозанат ҳолатлари (нукталари) ушбу*

$$\begin{aligned} f_1(a_1, \dots, a_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(a_1, \dots, a_n) &= 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

чекли тенгламалар системасининг (унга ҳосиллар кирмайди) ечимларидан иборат. Хусусан, $\frac{dx}{dt} = (x-1)^3$ тенгламанинг мувоза-

нат нуктаси $x=1$ нуктадан иборат, чунки $(x-1)^4=0$ тенглама шу ечимга эга, $\frac{dx}{dt}=(x-1)^4(x+2)$ тенглама иккита $x=1$, $x=-2$ мувозанат нуктасига эга. Яна ушбу

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2\end{aligned}$$

($\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1, λ_2 — ҳақиқий, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$) системанинг мувозанат ҳолати координата бошидан иборат бўлиб, D_2 соҳа бутун текисликдир. Шунга ўхшаш

$$\dot{x}_1 = ax_1 - bx_2, \quad \dot{x}_2 = bx_1 + ax_2 \quad (b \neq 0, a \text{ — ҳақиқий сонлар})$$

системанинг мувозанат ҳолати ҳам координата бошидан иборат, чунки

$$\begin{cases} ax_1 - bx_2 = 0, \\ bx_1 + ax_2 = 0 \end{cases}$$

система фақат тривиал ечимга эга (системанинг детерминанти $a^2 + b^2 \neq 0$). Мувозанат нукталари санокли ёки саноксиз бўлиши мумкин. Хусусан, $\dot{x} = \sin x$ учун $x = k\pi$ (k — бутун сон) нукталар мувозанат нукталари бўлиб, санокли тўпламни ташкил қилади.

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ система учун $x_1 = 0$ чизик (x_2 ўқ) мувозанат ҳолатини беради.

Биз саноксиз тўпламга эгамиз. Агар $\dot{x}_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ система берилган бўлса, мувозанат нукталари n ўлчовли фазодан иборат. Агар $\dot{x}_i = 0$, $\dot{x}_k = a_k \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, $1 \leq k \leq n$, $i \neq k$ система берилган бўлса, унинг мувозанат нуктаси мавжуд эмас, чунки $\dot{f} \neq 0$.

2. Скаляр мухтор тенгламанинг ҳолатлар тўғри чизиғи ва мувозанат ҳолати. Ушбу

$$\dot{x} = f(x) \tag{10.6}$$

скаляр мухтор тенгламани кўрамиз. Бунда $f(x)$ — бутун R^1 тўғри чизикда узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи функция. Яна қўшимча фараз этамизки, $f(x)$ функциянинг ноллари (улар берилган мухтор тенгламанинг мувозанат нукталаридир) лимит нуктага эга бўлмасин. Бу фаразга кўра $f(x)$ нинг ноллари бутун тўғри чизикни чекли ёки санокли сондаги интервалларга бўлади. Энг чап интервалнинг (агар у мавжуд бўлса) чап охири $-\infty$, энг ўнг интервалнинг (агар у мавжуд бўлса) ўнг охири $+\infty$ бўлади. Шу интерваллар системасини Σ билан белгилаймиз. Агар $f(x)$ функция R^1 тўғри чизикда битта ҳам нолга эга бўлмаса, Σ система битта $(-\infty, +\infty)$ интервалдан иборат бўлиб, $f(x)$ — битта x_0 нолга эга бўлган Σ система иккита $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$ интервалдан иборат бўлади.

10.6-теорема. Σ системанинг бирор интервалини (a, b) дейлик, яъни $(a, b) \in \Sigma$, яна $x_0 \in (a, b)$ бўлсин. Агар $x = \varphi(t)$, $t_1 < t < t_2$,

берилган тенгламанинг $(0, x_0)$, $r_1 < 0 < r_2$, бошлангич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими бўлса, у ҳолда $f(x_0) > 0$ бўлганда ушбу

$$a < \varphi(t) < b, \quad r_1 < t < r_2; \quad (10.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow r_1} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow r_2} \varphi(t) = b \quad (10.8)$$

муносабатлар ўринли; шу билан бирга, агар a (ёки b) чекли бўлса, у ҳолда r_1 (ёки r_2) чексиз бўлади. Шундай қилиб, ҳар бир (a, b) интервал битта ҳолат траекториясидан иборат.

Исбот. $f(x_0) > 0$, $x_0 \in (a, b)$ бўлгани учун (теоремани $f(x_0) < 0$ бўлганда ҳам тегишлича баён этиб, исботлаш мумкин), (a, b) интервалда $f(x) > 0$ ва $x' > 0$ бўлади. Бундан (a, b) да ҳолат нуктаси чапдан ўнгга ҳаракат қилиб, ҳолат траекториясини чизиши келиб чиқади (40-чизма).

Демак, t ўсиши билан $\varphi(t)$ нукта

(a, b) интервалдан фақат ўнг охири орқали чиқиб кетиши мумкин (агар бу мумкин бўлса). Дейлик, $t = t_1$ бўлганда $\varphi(t_1) = b$ бўлсин. Эслатиб ўтамизки, $f(b) = 0$ ва b мувозанат нуктаси, бу b нукта ҳам 10.4-теоремага кўра мустақил траекториядан иборат. Аммо юқоридаги фаразга кўра $x = b$ ва $x = \varphi(t)$ траекториялар $t = t_1$ да кесишади. $f(x)$ функция узлуксиз дифференциалланувчи бўлгани учун (10.6) тенглама ихтисрий тайинланган бошлангич шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга. Шунинг учун биз зиддиятга келдик. Демак, t ўсиши билан $\varphi(t)$ нукта (a, b) интервалдан чиқиб кета олмайди. $\varphi(t)$ нукта t камайиши билан (a, b) интервалдан чап охири орқали чиқиб кета олмаслиги ҳам худди шундай кўрсатилади. Демак, ушбу $a < \varphi(t) < b$ тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, (10.7) муносабатлар исботланди.

Энди (10.8) муносабатларни исботлаймиз. Бунинг учун $\lim_{t \rightarrow r_2} \varphi(t) = b$ ни исботлаш етарли. Қолган муносабат шунга ўхшаш исботланади.

$$\lim_{t \rightarrow r_2} \varphi(t) \neq b, \quad \text{яъни} \quad \lim_{t \rightarrow r_2} \varphi(t) = c^* < b$$

деб фараз этамиз. (a, b) интервалда $f(x) > 0$ бўлгани учун $f(c^*) > 0$ бўлади. (10.6) тенгламанинг $(0, c^*)$ бошлангич қийматларга эга бўлган ечимини $\psi(t)$ дейлик. Демак, $\psi(0) = c^*$, $\psi'(t) \equiv f(\psi(t))$. Бундан $f(c^*) > 0$ бўлгани учун бирор $t = t_*$, $t_* < 0$, $t_* \in (r_1, r_2)$ бўлганда $\psi(t_*) \equiv c^*$ келиб чиқади. Иккинчи томондан, $t \rightarrow r_2$ да $\varphi(t) \rightarrow c^*$ бўлгани учун $\varphi(t_*) < c^*$, $t_* < r_2$ бўлади. Бу тенгсизликларга асосан $\varphi(t_*) = \psi(t_*) = x_*$, $a < x_* < c^* < b$ деб танлаш мумкин. Бошқача айтганда, (10.6) тенгламанинг иккита $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ ечимлари бир хил бошлангич шартни қаноатлантирапти. Бу ечимнинг ягоналигига зид. Шундай қилиб, (10.8) муносабатлар исботланди деса бўлади.

Теореманинг охириги тасдиғини исботлаш қолди. Бунинг учун b чекли бўлсин дейлик, яъни $b < +\infty$; $r_2 = +\infty$ эканини исботлаймиз. Фараз этайлик, $r_2 < +\infty$. Ушбу функцияни киритамиз:

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & r_1 < t < r_2, \\ b, & t \geq r_2. \end{cases}$$

Бу функция (10.6) тенгламанинг ечими, аммо бунинг бўлиши мумкин эмас. Акс ҳолда икки ечим $x = \chi(t)$ ва $x = b$ лар $t = r_2$ бўлганда бир хил қийматларга эга бўлади. Шундай қилиб, $r_2 = \infty$. Ҳудди шунга ўхшаш $a > -\infty$ бўлганда $r_1 = -\infty$ экани исботланади. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

Келтирилган теорема (10.6) тенглама ечимларининг муҳим хоссасини беради. Навбатдаги хоссани баён этишдан аввал баъзи тушунчаларни киритамиз.

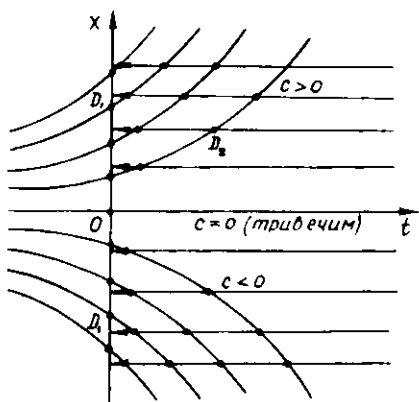
Берилган (10.6) тенгламанинг бирор мувозанат нуктасини b , ундан чап ва ўнг томондаги энг яқин мувозанат нукталарни a ва c дейлик. Агар (a, b) интервал Σ системанинг энг чап, (b, c) эса унинг энг ўнг интервали бўлса, u ҳолда $a = -\infty$, $c = +\infty$ бўлади. Қуйидаги мулоҳазалар шу ҳолларда ҳам ўринали. Демак, $(a, b) \in \Sigma$, $(b, c) \in \Sigma$. Ҳар бир (a, b) ёки (b, c) интервалда $f(x) \neq 0$. Шу $f(x)$ функциянинг мусбат ё манфийлигига қараб (a, b) ва (b, c) интервалларда ҳолат нуктаси t ортиши билан ё b га яқинлашади, ё ундан узоқлашади.

Агар ҳар икки (a, b) ва (b, c) интервалларда ҳам ҳолат нуктаси t ортиши билан b га яқинлашса, u ҳолда нукта (мувозанат нуктаси) *тургун* дейилади; агар t ортиши билан ҳар икки интервалда ҳам ҳолат нуктаси b нуктадан узоқлашса, u ҳолда b нукта *нотургун (тургунмас)* дейилади; агар t ортиши билан ҳолат нукта бир интервалда b га яқинлашиб, иккинчи интервалда ундан узоқлашса, u ҳолда b нукта *ярим тургун* дейилади.

$x = x$ тенгламанинг битта $x = 0$ мувозанат нуктаси бор. Демак, $b = 0$ ва Σ система иккита $(-\infty, 0)$ ҳамда $(0, +\infty)$ интерваллардан ташкил топган. Равшанки, $(-\infty, 0)$ интервалда ҳолат нуктаси b дан узоқлашади, яъни $x < 0$ бўлгани учун ҳаракат ўнгдан чапга бўлади. $(0, +\infty)$ интервалда эса ҳаракат чапдан ўнгга бўлади, яъни ҳолат нуктаси вақт ўтиши билан b нуктадан яна узоқлашади. Шундай қилиб, $x = x$ тенглама учун $b = 0$ нукта *нотургун* мувозанат нуктадир. Шунга ўхшаш, агар $x = -x$ тенглама кўрилса, $x = 0$ нукта *тургун* мувозанат нукта эканини кўрсатиши мумкин.

Мулоҳазаларни интеграл чизиклар ёрдамида ҳам олиб бориш мумкин эди. Хусусан $x = x$ тенглама учун $x = 0$ мувозанат нуктасига (t, x) текисликдаги тривиал ечим, яъни t ўқи мос келади. Бу горизонтал ўқнинг юқори ва пастки қисмидаги интеграл чизиклар t ортиши билан борган сари шу ўқдан узоқланиб кетади (41-чизма). $x = -x$ тенгламада эса бунинг акси бўлади.

Шундай қилиб, (10.6) тенглама учун b мувозанат нуктанинг атрофида, аниқроғи (a, b) ва (b, c) интервалларда ҳолат нуктасининг ҳаракати тўғрисида қуйидаги теорема ўринли.



41-чизма

10.7-теорема. (10.6) тенглама-нинг мувозанат нуқтаси b тургун бўлиши учун (a, b) интервалда $f(x) > 0$ ва (b, c) интервалда $f(x) < 0$ бўлиши зарур ва етарли; мувозанат нуқта b нотургун бўлиши учун (a, b) да $f(x) < 0$, (b, c) да $f(x) > 0$ бўлиши зарур ва етарли; ниҳоят, b нуқта ярим тургун бўлиши учун $f(x)$ функция-нинг ишораси (a, b) ва (b, c) интервалларда бир хил бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи юқоридаги мулоҳазалар ва таърифларга асосан равишан.

Шуни эслатамизки, бу теоремада фойдаланиш учун функциянинг ишорасини у ёки бу интервалларда текшириш лозим. Агар $f(x)$ функциянинг ҳосилаларидан фойдалансак, текшириш осонлашади. Шу муносабат билан қуйидаги теоремани келтирамиз.

10.8-теорема. (10.6) тенглама учун b мувозанат нуқта бўлиб, $f(x)$ функция шу нуқтада $2s+1$ (s — натурал сон)-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Агар ушбу

$$f'(b) = \dots = f^{(2s-1)}(b) = 0, \quad f^{(2s)}(b) \neq 0 \quad (10.9)$$

муносабатлар бажарилса, b нуқта ярим тургун мувозанат нуқта бўлади; шунга ўхшаш, агар ушбу

$$f'(b) = \dots = f^{(2s)}(b) = 0, \quad f^{(2s+1)}(b) \neq 0 \quad (10.10)$$

муносабатлар бажарилиб

$$a) \quad f^{(2s+1)}(b) < 0 \text{ бўлса, } b - \text{тургун,} \quad (10.10')$$

$$b) \quad f^{(2s+1)}(b) > 0 \text{ бўлса, } b - \text{нотургун} \quad (10.10'')$$

мувозанат нуқта бўлади.

Исбот. (10.6) тенгламада $f(x)$ функция бирор k -тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция учун $x=b$ нуқтанинг атрофида Лагранж формуласини ёзамиз:

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!} (x-b) + \frac{f''(b)}{2!} (x-b)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k + O((x-b)^{k+1}),$$

бунда $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{O(y)}{y} = 0$. Энди $k=2s$ бўлсин. У ҳолда (10.9) муносабатлардан фойдалансак,

^{*} $O(\alpha)$ (α кичик α дан) α га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор

$$f(x) = \frac{f^{(2s)}(b)}{(2s)!} (x-b)^{2s} + 0((x-b)^{2s})$$

формулага эга бўламиз. $x \in (a, b)$ дейлик. Бу ҳолда $x-b < 0$; шунингдек, $x \in (b, c)$ бўлса, $x-b > 0$. Аммо $(x-b)^{2s} > 0$ бўлади. Шунинг учун формуланинг ўнг томонидаги $0((x-b)^{2s})$ ифода $\frac{f^{(2s)}(b)}{(2s)!} (x-b)^{2s}$ ҳаднинг ишорасига таъсир эта олмаганидан

$$\text{sign} f(x) = \text{sign} \frac{f^{(2s)}(b)}{(2s)!}, \quad x \in (a, b), \quad x \in (b, c)$$

муносабат ўрилади. Лекин $f^{(2s)}(b) \neq 0$. Шунинг учун $f(x)$ функция (a, b) ва (b, c) интервалларда бир хил ишорага эга. Демак, (10.9) муносабатлар бажарилганда b нукта ярим тургун бўлади.

Энди (10.10) муносабатлар ўрилади бўлсин дейлик. У ҳолда Лагранж формуласида $k=2s+1$, $s=0, 1, \dots$ деб топамиз:

$$f(x) = \frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!} (x-b)^{2s+1} + 0((x-b)^{2s+1}).$$

Бу формулада ўнг томоннинг ишораси биринчи ҳад билан аниқланади, ишорага $0((x-b)^{2s+1})$ ҳад таъсир эта olmayди. Аввал (a, b) интервални кўрайлик. Унда $x-b < 0$, демак, $(x-b)^{(2s+1)} < 0$. Бундан (a, b) ва $f(x)$ нинг ишораси $f^{(2s+1)}(b)$ нинг ишорасига тескари бўлиб чиқади, яъни (a, b) интервалда

$$\text{sign} f(x) = -\text{sign} \frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!}, \quad x \in (a, b). \quad (10.11)$$

(b, c) интервал учун $x-b > 0$, $(x-b)^{2s+1} > 0$ ва (b, c) да

$$\text{sign} f(x) = \text{sign} \frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!}, \quad x \in (b, c). \quad (10.12)$$

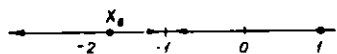
Топилган (10.11) ва (10.12) муносабатлардан $f^{(2s+1)}(b) < 0$ бўлса, $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$, $f(x) < 0$, $x \in (b, c)$ тенгсизликлар келиб чиқади. Бу ҳолда таъриф бўйича b нукта тургун бўлади. Агар $f^{(2s+1)}(b) > 0$ бўлса, ушбу $f(x) < 0$, $x \in (a, b)$; $f(x) > 0$, $x \in (b, c)$ тенгсизликларга эгамиз. Бу ҳолда эса b нукта нотургун бўлади. Теорема исбот бўлди.

Ҳозир исботланган теоремада келтирилган (10.9) ва (10.10), (10.10'), (10.10'') шартлар мувозанат нуктасининг ярим тургун, тургун ва нотургун бўлиши учун етарли шарт вазифасини бажаряпти. Аслида бу шартлар зарур ва етарлидир. Зарурлигининг исботи ҳам юқоридаги каби бўлади.

Мисоллар. 1. Аввал $x=x$ тенгламани олайлик. Унда $f(x)=x$ бўлиб, $f'(0)=1>0$. Демак, 10.8-теоремага кўра $x=0$ нукта нотургун. Агар $x=-x$ тенгламани олсак, унда $f(x)=-x$ ва $f'(0)=-1<0$. Бу ҳолда $x=0$ нукта тургун бўлади. Энди $x=p(x-1)(x+1)(x+2)$, $0 \neq p=\text{const}$ тенгламани кўрайлик. Унда $f(x)=p(x-1)(x+1)(x+2)$ бўлиб, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-2$ нукталар мувозанат нукталаридан иборат. Ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = p[(x+1)(x+2) + (x-1)(x+2) + (x-1)(x+1)].$$

Кўришиб турибдики, $f'(1) = 6p$, $f'(-1) = -2p$, $f'(-2) = 3p$ ва $p \neq 0$ бўлгани учун бу ҳосилалар нолдан фарқли. Биз $2s+1=1$ бўлган ҳолга эгамиз. Агар $p > 0$ бўлса, $6p > 0$ ва $x_1 = 1$ нукта ногўрун; $-2p > 0$ ва $x_2 = -1$ нукта тургун; $3p < 0$ ва $x_3 = -2$ нукта ногўрун бўлади (42-чизма).



42-чизма

иборат. Илдишлар $x = n\pi$ (n бутун сон) кўринишда ёзилади. Бу ҳолда $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ бўлиб:

$$\cos x \begin{cases} > 0, & \text{агар } x = 2k\pi, \quad k \text{ — бутун сон,} \\ < 0, & \text{агар } x = (2k+1)\pi, \quad k \text{ — бутун сон.} \end{cases}$$

10.8-теоремага кўра, $x = 2k\pi$ кўринишдаги нукталар ногўрун, $x = (2k+1)\pi$ кўринишдаги нукталар эса тургун бўлади. Қайд қилиб ўтамоқчи, берилган тенгламанинг мувозанат нукталари санокли бўлиб, лимит нуктага эга эмас.

3. Мухтормас системанинг ҳолатлар фазосига мисол. Ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a, \\ \dot{x}_2 = 3bt^2, \quad a > 0, \quad b > 0 \end{cases} \quad (10.13)$$

Мухтормас системани олайлик. Унинг умумий ечими

$$\begin{cases} x_1 = at + c_1, \\ x_2 = bt^3 + c_2 \end{cases} \quad (10.14)$$

кўринишда ёзилади. Берилган системада $n=2$ бўлиб, $f_1 = a$, $f_2 = 3bt^2$ функциялар t , x_1 ва x_2 лар бўйича узлуксиз дифференциалланувчи. Коши теоремасига кўра, (t, x_1, x_2) ўзгарувчиларнинг фазосида ихтиёрый тайинланган (t_0, x_1^0, x_2^0) нуктадан берилган системанинг ягона интеграл чизиги ўтади. Бу бир томондан. Энди системанинг ечимини ҳолатлар фазосида тасвирлашни кўрайлик. Унинг учун (10.14) дан t параметрини чиқариб ташлаймиз:

$$x_2 = \frac{b}{a^3} (x - c_1)^3 + c_2, \quad (10.15)$$

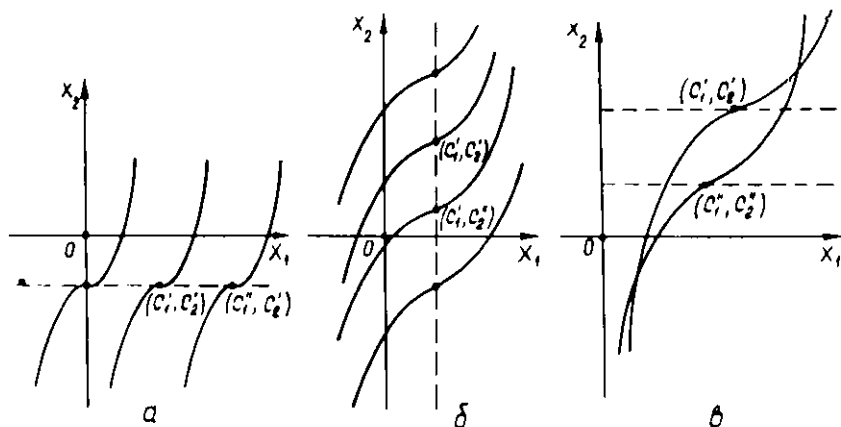
Бу кубик параболалардан иборат бўлиб, (c_1, c_2) нуктадан ўтади ва $x_2 = c_2$ чизикдан пастда кавариклиги юқорига, шу чизикдан юқорида эса кавариклиги пастга қараган бўлади. Шу билан бирга y чизик $x = c_1$ чизикка уринади ҳам. Агар ё $c_1' = c_1''$, $c_2' \neq c_2''$, ёки $c_1' \neq c_1''$, $c_2' = c_2''$ бўлса, тегишли кубик параболалар ўзаро кесишмайди (43-чизма). Буни аналитик усулда исботлаш қийин эмас. Параболалар кесишади дейлик. У ҳолда

$$y = \frac{b}{a^3} (x - c_1') + c_2', \quad y = \frac{b}{a^3} (x - c_1'') + c_2''$$

лардан

$$A(c_1'' - c_1') = c_2'' - c_2', \quad A = \frac{b}{a^3} > 0 \quad (10.16)$$

тенгликка эгамиз. Агар $c'_1 = c''_1$, $c'_2 \neq c''_2$ ёки $c'_1 \neq c''_1$, $c'_2 = c''_2$ муносабатларни кўрсак, юқорида зиддиятга келамиз. Демак, кубик параболалар кесиша олмайди.



43- чизма

Энди $c'_1 = c''_1$, $c'_2 \neq c''_2$ бўлсин. У ҳолда тегиншли кубик параболалар (10.16) тенглик ўринли бўлганда ўзаро кесишади. Демак, (x_1, x_2) текислиkning ҳар бир нуқтасидан ягона кубик парабола ўтмайди (43, в-чизма). Аммо (t, x_1, x_2) фазода ягоналик ўринли эди. Шундай қилиб, бу мисолдан кўринадики, мухтормас системаларни уларнинг ҳолатлар фазосида текшириш мақсадга мувофиқ эмас.

Маълум. Ушбу системаларнинг ечимлари ҳолатлар фазосида тасвирлансин:

$$1. \begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega x_2, \\ \dot{x}_2 = \omega x_1, \quad \omega > 0; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = a, \quad a > 0, \\ \dot{x}_2 = bt, \quad b > 0; \end{cases}$$

$$3. \dot{x} = (x-1)^2(x+2) \text{ (мувозанат нуқталари ҳам текширилсин);}$$

$$4. \dot{x} = (x-2)^2 \text{ (мувозанат нуқтаси ҳам текширилсин).}$$

10.4-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ СИСТЕМАНИНГ ҲОЛАТЛАР ТЕКИСЛИГИ

1. Системанинг каноник кўриниши. Бизга ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (10.17)$$

чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли система берилган бўлсин. Бу системанинг детерминанти:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

бўлиб, (10.17) система учун координата боши (0,0) мувозанат нукта бўлади. Аммо ундан бошқа мувозанат ҳолатлар ҳам бўлиши мумкин. Агар $D \neq 0$ бўлса, (10.17) системанинг координата бошидан бошқа мувозанат нуктаси бўла олмайди. Агар $D = 0$ бўлса, равшанки, $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$ матрицанинг ҳар икки ҳос сонлари нолдан фаркли бўлади.

Ҳозир биз A матрица ҳос сонларига қараб, (10.17) системанинг кўринишини соддаштириш билан шугулланамиз.

А) A матрицанинг ҳос сонлари ҳақиқий, ҳар хил ва нолдан фаркли. Уларни λ_1 ва λ_2 дейлик. Бу ҳолда (10.17) системани махсусмас алмаштириш ёрдамида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \quad (10.18)$$

кўринишга келтириш мумкин.

Шу муносабат билан қуйидаги алмаштиришни бажарайлик:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2, \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \end{cases} \quad (10.19)$$

Ҳосилаларни ҳисоблаб, (10.17) дан фойдаланамиз:

$$\dot{y}_1 = \alpha \dot{x}_1 + \beta \dot{x}_2 = (a_{11}\alpha + a_{21}\beta)x_1 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)x_2,$$

$$\dot{y}_2 = \gamma \dot{x}_1 + \delta \dot{x}_2 = (a_{11}\gamma + a_{21}\delta)x_1 + (a_{12}\gamma + a_{22}\delta)x_2.$$

Бу ифодаларни мос равишда $\lambda_1 y_1$ ва $\lambda_2 y_2$ ларга тенглаштирамиз:

$$\begin{cases} (a_{11}\alpha + a_{21}\beta)x_1 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)x_2 = \lambda_1(\alpha x_1 + \beta x_2), \\ (a_{11}\gamma + a_{21}\delta)x_1 + (a_{12}\gamma + a_{22}\delta)x_2 = \lambda_2(\gamma x_1 + \delta x_2). \end{cases}$$

Энди x_1 ва x_2 лар олдидаги коэффициентларни тенглаштираёқ, ушбу

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{21}\beta = 0, \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda_1)\beta = 0; \end{cases} \quad (10.20)$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)\gamma + a_{21}\delta = 0, \\ a_{12}\gamma + (a_{22} - \lambda_2)\delta = 0 \end{cases} \quad (10.21)$$

системаларни ҳосил қиламиз. Равшанки λ_1 ва λ_2 учун

$$D(\lambda_i) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{бунда} \quad D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун $D^*(\lambda_i) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$ бўлади. Бу тенгликка асосан (10.20) ва (10.21) системалар α , β ва γ , δ ларга нисбатан тривиал бўлмаган ечимларга ҳам эга. Хусусан,

$$\alpha = a_{21}, \beta = -(a_{11} - \lambda_1); \gamma = a_{21}, \delta = -(a_{11} - \lambda_2) \quad (10.22)$$

деб танласа бўлади. Агар (10.22) тенгликлардан фойдалансак, (10.19) алмаштириш махсусмас бўла оладими? Шунингдек текширайлик. Қуйидагига эгамиз:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -a_{21}(a_{11} - \lambda_2) + (a_{11} - \lambda_1)a_{21} = a_{21}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Бундан $a_{21} \neq 0$ бўлганда $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ экани келиб чиқади. Агар $a_{21} = 0$ бўлса, $a_{12} = 0$ бўлганда (10.17) система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{21} x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{22} x_2 \end{cases}$$

кўринишда, яъни (10.18) кўринишида ёзилган бўлади. Энди агар $a_{21} = 0$ бўлиб, $a_{12} \neq 0$ бўлса, у ҳолда (10.17) система ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 \end{cases}$$

кўриниши олади. Бунда x_1 ва x_2 лар ролини алмаштирсак,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{22}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{12}x_1 + a_{11}x_2 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Энди бу системада a_{21} ўрнида a_{12} турибди. Шунинг учун $a_{21} \neq 0$ бўлгандаги мулоҳазалар $a_{12} \neq 0$ бўлганда ҳам ўтади. Шундай қилиб, (10.17) системани унинг матрицаси ҳақиқий, ҳар хил ва полдан фарқли ҳос сонларга эга бўлганда (10.18) кўринишда ёзиш мумкин. Бу (10.18) система кўрилатган ҳолда (10.17) системанинг *каноник* кўриниши дейилади.

б) A матрицанинг ҳос сонлари кўшма комплекс. Уларни $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$, $\nu \neq 0$ дейлик. Аввало (10.22) қий-матлардан фойдалансак, (10.19) алмаштиришни бундай ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \lambda_1)x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \lambda_2)x_2. \end{cases}$$

Шу алмаштириш формулалари λ_1 , λ_2 лар комплекс бўлганда ҳам ўринали. λ_1 ва λ_2 лар ўрнига ўз ифодаларини қўямиз:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu - i\nu)x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu + i\nu)x_2. \end{cases} \quad (10.23)$$

Бундан, агар

$$\begin{cases} y_1 = u_1 + iu_2, \\ y_2 = u_1 - iu_2 \end{cases}$$

деб белгиласак,

$$\begin{cases} u_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu)x_2, \\ u_2 = vx_2 \end{cases} \quad (10.24)$$

келиб чиқади. Сอดда ҳисоблашлар ёрдамида (10.18), (10.23) ва (10.24) ларга кўра қуйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{du_1}{dt} + i \frac{du_2}{dt} = (\mu + i\nu)y_1, \\ \frac{du_1}{dt} + i \frac{du_2}{dt} &= (\mu + i\nu)[a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu - i\nu)x_2] = \\ &= (\mu u_1 - \nu u_2) + i(\nu u_1 + \mu u_2). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, ушбу

$$\frac{du_1}{dt} + i \frac{du_2}{dt} = (\mu u_1 - \nu u_2) + i(\nu u_1 + \mu u_2)$$

тенгликдан

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \mu u_1 - \nu u_2, \\ \frac{du_2}{dt} = \nu u_1 + \mu u_2 \end{cases} \quad (10.25)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Шу (10.25) система берилган системанинг ҳос сонлар комплекс бўлган ҳолда каноник кўринишидан иборат.

Албатта, (10.25) системани интеграллаб, (10.24) формулалар орқали $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ ечим топилади.

В) A матрицанинг ҳос сонлари ўзаро тенг ва нолдан фарқли. Кўрилатгани ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $D(\lambda) = 0$ тенгламадан $\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда ҳам $a)$ ҳолдаги каби мулоҳазалар юритиб, берилган системани унинг коэффициентларига қараб хусусан ушбу

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 (y_1 + y_2) \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 y_2 \end{cases} \quad (10.26)$$

каноник кўринишга келтириш мумкин.

г) A матрицанинг ҳос сонлари тенг ва нолдан иборат, яъни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Бу ҳолда $D(\lambda_{1,2}) = 0$ муносабатдан $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12}a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{21} = -a_{12} = -a_{22} = a$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда каноник кўриниш қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = a(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ y_1 = y_2 = x_1 - x_2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ a_{21} = 0, \quad a_{12} \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1, \\ a_{12} = 0, \quad a_{21} \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ a_{12} = a_{21} = 0. \end{cases} \quad (10.27)$$

Юқорида биз чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли системанинг кўринишини унинг ҳос сонларига қараб соддалаштириш билан шугулландик. Энди каноник кўринишда ёзилган иккинчи тартибли чизикли системаларнинг траекторияларини ҳолатлар текислигида ўрганамиз.

2. Иккинчи тартибли чизикли бир жинсли системанинг ҳолатлар текислиги. Ҳос сонлар ҳақиқий ва комплекс бўлган ҳолларни алоҳида текширамиз.

А. А матрицанинг ҳос сонлари ҳақиқий, ҳар хил ва нолдан фарқли. Ҳос сонларни λ_1 ва λ_2 десак, уларга мос келган чизикли эркин ҳос векторларни топиш мумкин (9-боб, 4-§ га қаранг). Шунинг учун (10.17) системанинг умумий ечими

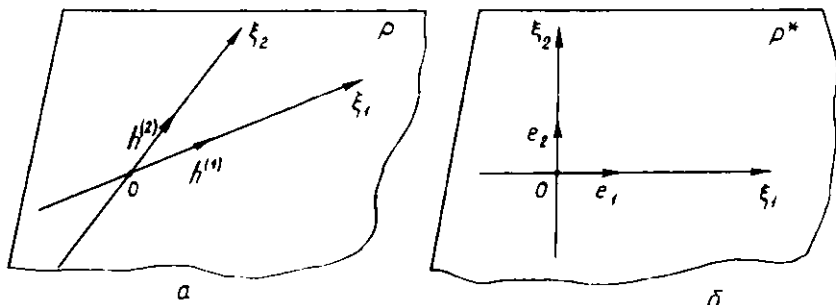
$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (10.28)$$

кўринишда ёзилади. Уни яна

$$x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)} \quad (10.29)$$

$$(\text{бунда } \xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (10.30)$$

кўринишда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар бўйича ёйиб ёзиш мумкин. ξ_1 ва ξ_2 сонлар ҳолат текислигида тўғри бурчакли Декарт координаталаридан иборат бўлиши шарт эмас, бу $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар бўйича йўналган ўқларга боғлиқ. Ҳолатлар текислигини P дейлик. Унда ξ_1 ва ξ_2 ўқлар $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар бўйича йўналган бўлади (44-чизма). Аффин алмаштириш ёрдамида P ҳолат текислигини шундай



44- чизма

P^* текисликка акселантириш мумкинлиги, унда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар ўзаро перпендикуляр e_1 ва e_2 бирлик векторларга ўтади, P текислигининг (ξ_1, ξ_2) нуқтаси P^* текислигининг тўғри бурчакли декарт координаталарига ўтади, яъни P да $x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)}$ бўлса, P^* да $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, $e_1 \perp e_2$ бўлади. Кўрилатган ҳолда (10.17) системани каноник кўринишда ёзиш мумкин ((10.18) га қаранг). (10.18) системанинг траекториялари P^* текисликда чизилади, chunkи унинг ҳос векторлари $(1,0)$ ва $(0,1)$ дан иборат.

Энди (10.18) системанинг траекторияларини тасвирлашга ўтамиз. Аввал $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ва $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ёки $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ тенгсизликлар ўринли бўлсин. (10.30) дан кўришиб турибдики, биринчи чоракда чизилган траекториялар ёрдамида қолган чоракдаги траекторияларни ҳам ёзиш мумкин. Ундан ташқари, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ бўлган ҳолда $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ бўлса, $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2 = 0$, яъни ξ_1 ўқига эгамиз. Унда $C_1 > 0$ бўлганда ҳаракат ўнгдан чапга, $C_1 < 0$ бўлганда эса чапдан ўнгга бўлади. Бошқача айтганда, $t \rightarrow +\infty$ да C нинг ишорасидан қатъи назар, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 e^{\lambda_1 t} = 0$ ва координата бошидан икки

томонда ҳаракат шу нуқтага йўналган бўлади. Худди шу хусусият ξ_2 ўқига ҳам тегишли (45-чизма). Энди $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ бўлганда, яъни I чоракда траекторияларнинг кавариклигини текширайлик. Равшани,

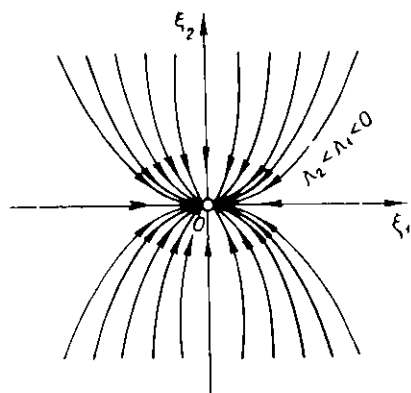
$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{d\xi_1} &= \frac{C_2}{C_1} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \\ \frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} &= \frac{C_2}{C_1} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} > 0. \end{aligned}$$

Бундан I чоракда траекторияларнинг кавариклиги пастга қараганлиги келиб чиқади. Ушбу

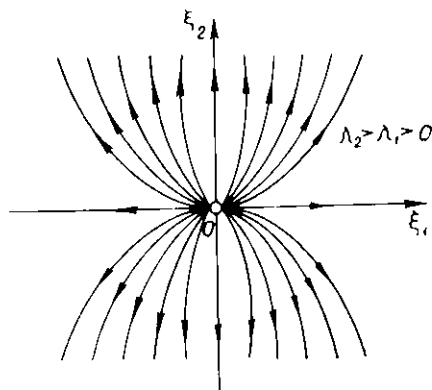
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_2}{C_1} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0$$

муносабатдан $t \rightarrow +\infty$ да траекториялар абсцисса ўқига уриниши чиқади. I чоракда $\frac{d\xi_1}{dt} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} < 0$, $\frac{d\xi_2}{dt} = C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} < 0$ бўлгани учун

ξ_1 ва ξ_2 лар t ортиши билан камайди ва демак, ҳаракат юқоридан пастга ҳамда ўнгдан чапга йўналган бўлади (45-чизма). Траекториялар чекли вақтда координата бошига кела олмайд. Координата боши берилган система учун ягона мувозанат нуқтасидан иборат бўлиб, у мустақил ечимдир. Қолган чораклардаги траекторияларни шу чизилган траекториялардан уларни ξ_1 ва ξ_2 ўқларга нисбатан симметрик айлантириш ёрдамида ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, бутун текисликда траекториялар чизилди дейиш мумкин (45-чизма). $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ бўлганда ҳам худди шу усул билан траекториялар чизилади. Траекториялар аввалгисидан фарк қилмаса-да, уларда



45-чизма



46-чизма

йўналиши тескари бўлади (46-чизма). Хос сонларнинг $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ қий-матларига мос манзара (45-чизма) *тургун тугун*, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ қиймат-ларига мос манзара эса (46-чизма) *нотургун тугун* дейилади. Эслатиб ўтамизки, траекториялар $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ бўлганда эса $t \rightarrow +\infty$ да, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ бўлганда эса $t \rightarrow -\infty$ да P^* текисликда ξ_1 ўкига уринади; P текисликда бу ҳол λ_1 га мос келган хос векторнинг йўналиши билан боғлиқ бўлади. Айтилган хосса мисоллар кўришда қулайлик туғдиради.

Хос сонлар учун $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$) тенгсизлик ўринли бўлсин дейлик. Бу ҳолда хос сонлар турли ишораларга эга. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ бўлганда ξ_1 ўки бўйича ҳаракат координата бошига йўналган бўлиб, ξ_2 ўки бўйича ҳаракат координата бошидан узоклашади. Траекто-рияларни куриш учун уларни I чоракда куриш етарли. Аввал каварикликни текширайлик. $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ бўлгани учун $\frac{d^2 \xi_2}{d \xi_1^2} > 0$ бўй-

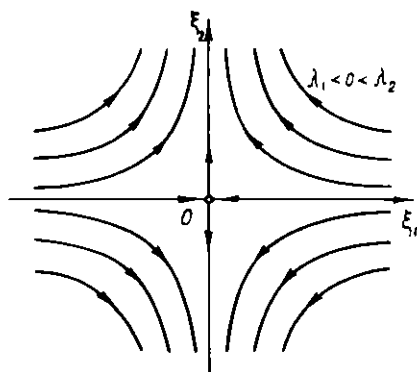
лади, демак, I чоракда кавариклик пастга қараган. Шунга ўхшаш ушбу

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{d \xi_2}{d \xi_1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{C_2}{C_1} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = +\infty,$$

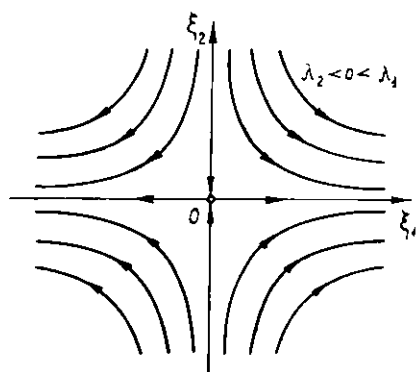
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{d \xi_2}{d \xi_1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{C_2}{C_1} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_1(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_2(t) = +\infty$$

муносабатларга эгамиз. Бундан I чоракдаги траекториялар парабо-лаларга ўхшашлиги ва уларда ҳаракат ўнгдан чапга ва пастдан юқорига йўналганлиги келиб чиқади (47-чизма). Акселантирини ёрдамида траекторияларни бошқа чоракларда ҳам чизамиз. Агар хос сонлар $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ тенгсизликини қаноатлантирса, юқоридаги усул билан яна траекторияларни куриш мумкин (48-чизма). Ҳар икки ҳолда ҳам ҳосил бўлган манзара *эгар* дейилади.



47-чизма



48-чизма

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

системанин траекториялари чизилсин ва мувозанат нуктаси атрофидаги манзара аниқлансин. А матрицани ёзамиз: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Бу матрицанинг хос сонларини

топамиз: $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ёки $(3+\lambda)^2 - 4 = 0$. Бундан $3+\lambda = \pm 2$ ёки $\lambda_1 = -1$,

$\lambda_2 = -5$. Равшанки, $\lambda_2 < \lambda_1$, $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. Хос сонлар ҳар хил ва манфий бўлгани учун биз *тургун туғунга* эгамиз. Энди шу манзарани чизайлик. Унинг учун хос векторларни

топиш керак. $\lambda_1 = -1$ га мос хос вектор $h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$ ушбу $Ah^{(1)} = (-1)h^{(1)}$ ёки

$\begin{pmatrix} 3h_1^{(1)} + h_2^{(1)} \\ 4h_1^{(1)} - 3h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ -h_2^{(1)} \end{pmatrix}$ системадан топилади. Равшанки, биз $-2h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = 0$ тенгламага эгамиз ва ундан $h_1^{(1)} = 1$, $h_2^{(1)} = 2$ деб олиш мумкин. Агар $h_1^{(1)} = -1$, $h_2^{(1)} = -2$ десак ҳам ўша йўналиш чиқарилади. Шунга ўхшаш $\lambda_2 = -5$ хос сонга мос хос вектор топилади:

$$h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

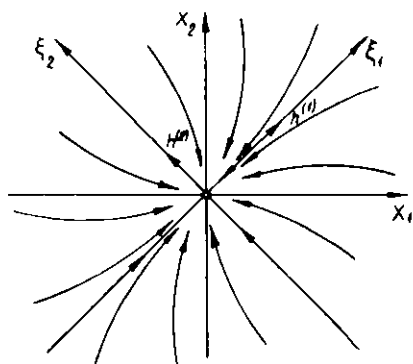
Энди текисликда координата бошидан шу векторлар йўналишида тўғри чизиклар ўтказамиз. Абсолют киймати бўйича кичик хос сон $\lambda_1 = -1$ бўлгани учун траекториялар шу хос сонга мос $h^{(1)}$ вектор йўналишига $t \rightarrow +\infty$ да ўринади (49-чизма).

2. Ушбу

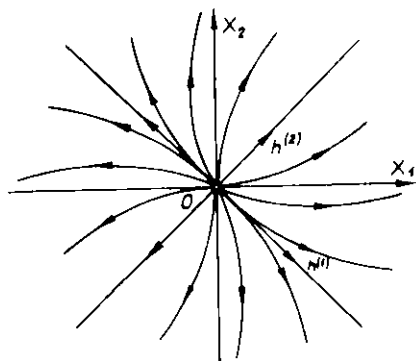
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

система учун $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ва хос сонлари $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ тенгламадан топилади.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. $\lambda_1 = 1$ га мос хос вектор $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ва $\lambda_2 = 5$ га мос хос вектор эса



49-чизма



50-чизма

$h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ дан иборат. Хос сонлар турли ва мусбат бўлгани учун биз нотурғун тизимда ямиз. Траекториялар $t \rightarrow \infty$ да $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ вектор йўналишига координата бошида ўринади (50-чизма).

Б. А матрицанинг хос сонлари комплекс. Бу ҳолда хос сонлар қўшма комплекс бўлиб, уларни $\lambda = \mu + i\nu$, $\lambda = \mu - i\nu$, $\nu \neq 0$ деб белгилаймиз. ν ни доим $\nu > 0$ деб қараиш мумкин. Шу хос сонларга мос хос векторлар ҳам қўшма комплекс бўлади. Агар $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ лар ҳақиқий вектор бўлса, мос хос векторларни h ва $\bar{h}$ деб белгиланади ва бундай аниқланади:

$$h = \frac{1}{2} (h^{(1)} - ih^{(2)}),$$

бунда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ лар чизикли эркин, аке ҳолда h ва $\bar{h}$ лар чизикли боғлиқ бўлар эди. Шунинг учун $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ ҳақиқий векторларни P текисликда хос йўналишлар деб қараиш мумкин.

Энди P^* текисликда траекторияларни қураиш. Қўрилатган ҳолда берилган системанинг каноник шакли маълум. Уни ёзайлик ((10.25) га қараиш):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \mu \xi_1 - \nu \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \nu \xi_1 + \mu \xi_2. \end{cases} \quad (10.25)$$

Бу системанинг умумий ечими

$$\begin{cases} \xi_1(t) = Ce^{\mu t} \cos(\nu t + \gamma), \\ \xi_2(t) = Ce^{\mu t} \sin(\nu t + \gamma) \end{cases}$$

қўринишда ёзилади (C ва γ — ихтиёрый ўзгармаслар). Унда t ни параметр деб қарасак, биз траекторияларнинг параметрик тенгламасига эгаиш. Уларни қуриш учун кутб координаталарига ўтиш қулайлик тугдиради. Шу мақсадда $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ (ρ , φ

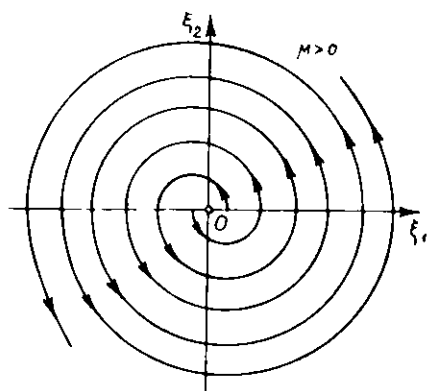
кутб координатлари) дейлик. Шунинг учун юқорида ёзилган умумий счим

$$\rho = Ce^{\mu t} \quad (C > 0), \quad \varphi = \nu t + \gamma \quad (\nu > 0) \quad (10.31)$$

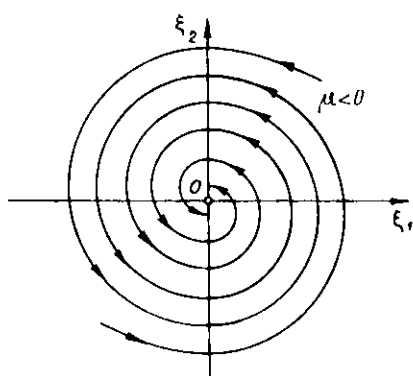
кўринишини олади. Бу муносабатларга кўра t ўсиши билан φ бурчак ҳам ўсади (чунки $\nu > 0$ деб қараямиз). Бошқача айтганда, координата бошидан чиқадиан нур $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ нуктадан ўтиб секундига γ радиан тезлик билан соат стрелкасига қарши йўналишда бурилади. (10.31) дан t ни чиқарамиз:

$$\rho = Ke^{\frac{\mu}{\nu} \varphi}, \quad (10.32)$$

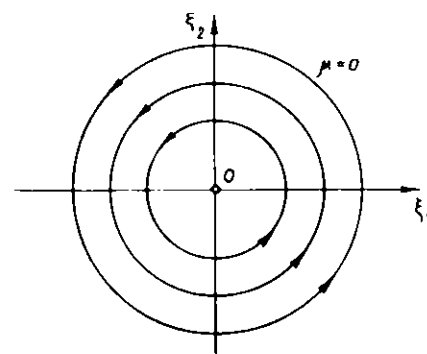
буида $K = Ce^{\frac{\gamma}{\nu}} = \text{const}$. Траекторияларининг кўриниши $\mu > 0$, $\mu < 0$, $\mu = 0$ қийматларга қараб ҳар хил бўлади. $\mu < 0$ бўлган, $\nu > 0$ бўлгани учун $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho = 0$, чунки $\frac{\mu}{\nu} < 0$ ва $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi = +\infty$. Демак, $t \rightarrow +\infty$ да



51-чизма



52-чизма



53-чизма

ҳолат нуктаси координата бошига яқинлашади (51-чизма). Ҳосил бўлган манзара *турғун фокус* дейилади. Агар $\mu > 0$ бўлса, юқоридаги каби мулоҳазалар ёрдамида *нотурғун фокус* манзарасини куриш мумкин (52-чизма).

Агар $\mu = 0$ бўлса, (10.32) формуладан $\rho = K$ ($K = \text{const}$) келиб чиқади. Бу эса, маркази координата бошида бўлган концентрик айланалардан иборат (53-чизма). Ҳосил бўлган манзара *марказ* деб аталади.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

система учун

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{тенгламадан} \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Демак, $\mu = 3$, $\nu = 2$, $\lambda = 3 + 2i$ ҳос сон учун ҳос векторни излаймиз.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3 + 2i) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{pmatrix} 3h_1 - h_2 \\ 4h_1 + 3h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 + 2i)h_1 \\ (3 + 2i)h_2 \end{pmatrix}$$

Бундан

$$\begin{cases} 3h_1 - h_2 = 3h_1 + 2ih_1, \\ 4h_1 + 3h_2 = 3h_2 + 2ih_2 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} -h_2 = 2ih_1, \\ 4h_1 = 2ih_2. \end{cases}$$

Охирги икки тенглиkning бири иккинчисидан ҳосил қилинши мумкин. Шунинг учун $h_1 = 1$, $h_2 = -2i$ део танланса бўлади. Энди $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ векторни бундай тасвирлаймиз:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

Қўринадик. $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ векторлар изланган бўлиб, улар абсцисса ва ордината ўқлари бўйича йўналгандир. Қўрилатган мисолда $\mu = 3 > 0$ бўлгани учун биз потўртун *фокус* манзарасига эгамиз.

2. Ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 10x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

система учун

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i, \quad \mu = -1 < 0, \quad \nu = 3.$$

Аввало биз $\mu < 0$ бўлганидан *турғун фокус* манзарасига эгамиз. Энди ҳос векторларни тонайлик. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики,

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-1 + 3i) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

ёки

$$\begin{cases} -2h_1 + 10h_2 = -h_1 + 3ih_1, \\ -h_1 = -h_2 + 3ih_2 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} (-1 - 3i)h_1 + 10h_2 = 0, \\ h_1 + (-1 + 3i)h_2 = 0. \end{cases}$$

Охирги икки тенглик ўзаро эквивалент. Шунинг учун $h_1=10$, $h_2=1+3i$ деб танланиши мумкин. Энди $h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ вектор учун қуйидагига эгамиз:

$$h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1+3i \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right].$$

Бундан ҳақиқий ҳос векторлар сифатида

$$h^{(1)}=\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

векторларни, ёки бари бир,

$$h^{(1)}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

векторни олиш мумкин.

В. А матрицанинг ҳос сонлари тенг ва нолдан фарқли. А матрицанинг ҳос сонини λ дейлик. Унга мос ҳос векторлар учун икки ҳол юз бериши мумкин:

1 - ҳол. P текисликда шундай иккита чизиқли эркли $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар мавжудки, улар учун ушбу

$$Ah^{(1)}=\lambda h^{(1)}, \quad Ah^{(2)}=\lambda h^{(2)} \quad (10.33)$$

тенгликлар ўринали.

2 - ҳол. P текисликда шундай иккита чизиқли эркли $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар мавжудки, улар учун ушбу

$$Ah^{(1)}=\lambda h^{(1)}, \quad Ah^{(2)}=\lambda h^{(2)}+h^{(1)} \quad (10.34)$$

тенгликлар ўринали.

Шу (10.33) ёки (10.34) тенгликларни қаноатлантирадиган $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ чизиқли эркли векторларнинг (базиснинг) мавжудлигини кўрсатамиз.

$h^{(1)}$ - А матрицанинг ҳос вектори бўлиб, $h^{(2)}$ унга қоллинеар бўлмаган ихтиёрий вектор бўлсин. У ҳолда

$$Ah^{(1)}=\lambda h^{(1)} \quad \text{ва} \quad Ah^{(2)}=\alpha h^{(1)}+\beta h^{(2)}$$

тенгликларга эгамиз. Улардан $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ ларни топиш учун система сифатида фойдаланиш мумкин. Бу системанинг матрицаси

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

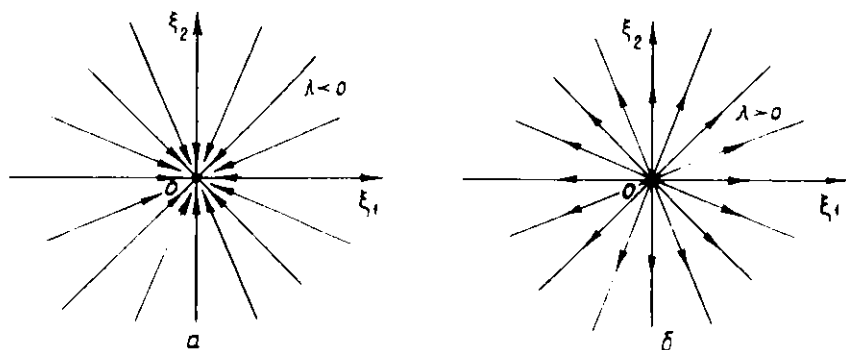
бўлиб, ҳос сонлари λ ва β дан иборат. Шунинг учун $\beta=\lambda$. Агар $\alpha=0$ бўлса, (10.33) тенгликларга эгамиз. $\alpha \neq 0$ бўлганда эса (10.34) тенгликларда $h^{(1)}$ векторни унга қоллинеар $\alpha h^{(1)}$ билан алмаштирамыз. Шу билан (10.33) ёки (10.34) ларни қаноатлантирадиган базис векторларнинг мавжудлиги исбот этилди.

1-ҳолда умумий ечим

$$x=C_1 h^{(1)} e^{\lambda t}+C_2 h^{(2)} e^{\lambda t}=x^0 e^{\lambda t} \quad (10.35)$$

кўринишида ёзилади.

Бу ечим учун $x(0)=x''$. Биз $\lambda \neq 0$ ҳолни кўраётганимиз учун (10.35) ечим координата бошидан чиқадиган ярим тўғри чизиқларни ифодалайди. Уларда ҳаракат $\lambda < 0$ бўлганда координата бошига йўналган бўлиб, $\lambda > 0$ бўлганда эса йўналиш бунинг акси бўлади (54-чизма).



54-чизма

Юқорида кўрилган ҳолларда $\lambda < 0$ бўлганда *тургун туғилма туғун*, $\lambda > 0$ бўлганда эса *нотургун туғилма туғун* манзараларига эгамиз.

2- ҳолда умумий ечим

$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda t} + C_2 (h^{(1)} t + h^{(2)}) e^{\lambda t}$$

кўринишда ёзилади. Буни яна базислар бўйича ёйиб ёзиш ҳам мумкин:

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} h^{(1)} + C_2 e^{\lambda t} h^{(2)}.$$

Бундан P текисликда траекториялар тенгламасини топамиз:

$$\xi_1 = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}. \quad (10.36)$$

Бу траекторияларни P^* текисликда курамиз.

Аввал $\lambda < 0$ бўлсин. (10.36) формулалардан C_1 ни C_1 га, C_2 ни $-C_2$ га алмаштирсак, координата бошига инебатан симметрия ҳосил бўлади. Шунинг учун траекторияларни юқори ярим текисликда чизамиз. Сўнгра ундан пастки ярим текисликдаги траекторияларни ҳосил қилиш мумкин.

Дастлаб $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$ дейлик. У ҳолда (10.36) дан $\xi_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $\xi_2 = 0$. Бундан $\lambda < 0$ бўлгани учун $C_1 < 0$ бўлганда чап ярим абсцисса ўқига, $C_1 > 0$ бўлганда эса ўнг ярим абсцисса ўқига траектория сифатида эгамиз. Чап ярим ўқда ҳаракат чапдан ўнгга, ўнг ярим ўқда эса ўнгдан чапга йўналган бўлади.

Энди $C_1 = 0$, $C_2 < 0$ бўлсин. (10.36) дан ушбуга

$$\xi_1 = C_2 t e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}, \quad C_2 > 0 \quad (10.37)$$

эгамиз. Агар $t = 0$ бўлса, бундан $(0, C_2)$ нуктани топамиз. Энди t ўзгарувчи $t > 0$ қийматларни қабул қила бошласа, (ξ_1, ξ_2)

нуктанинг ҳаракатини ва демак, траекториясини аниқлаймиз. Албатта, (10.37) дан кўришиб турибдики, t нинг нолга етарли яқин қийматларида $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$ ва (ξ_1, ξ_2) нукта $(0, C_2)$ нуктадан ўнгга ҳаракат қилиб, t чоракка қиради. Қуйидаги

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\lambda}{1 + \lambda t}$$

ифода t нинг нолга етарли яқин қийматларида манфий (чунки $\lambda < 0$). Шунинг учун $\xi_2(t)$ функция аввал ўзини камаювчи функция каби тутади. Бу ҳосса $t=0$ дан $t_* = -\frac{1}{\lambda}$ гача давом этади. Аммо

$(0, -\frac{1}{\lambda})$ интервалда

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} &= \frac{d}{d\xi_1} \left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1} \right) \cdot \frac{1}{\frac{d\xi_1}{dt}} = -\frac{\lambda^2}{(1 + \lambda t)^2} \cdot \frac{1}{C_2 e^{\lambda t} (1 + \lambda t)} = \\ &= -\frac{\lambda^2}{C_2 (1 + \lambda t)^3 e^{\lambda t}} < 0 \end{aligned}$$

бўлгани учун шу интервалда кавариклик юқорига қараган бўлади. Равшанки, $t_* = -\frac{1}{\lambda}$ моментга мос нуктада траекторияга ўтказилган уринма вертикал. Шундай қилиб, $(0, C_2)$ нуктадан $t=0$ да ҳаракат бошланиб, t чоракда чапдан ўнгга ва юқоридан пастга йўналган бўлади, бу ҳаракат $(\xi_1(t^*), \xi_2(t^*)) = \left(-\frac{C_2}{\lambda} e^{-1}, C_2 e^{-1}\right)$ нуктагача давом этади.

Ниҳоят, $t > -\frac{1}{\lambda}$ бўлганда нуктанинг ҳаракатини ўрганамиз. (10.37) га кўра $\lambda < 0$ бўлгани учун ξ_2 функция камаювчи. Бу ҳосса t нинг барча $t > 0$ қийматларида тўғри. Энди ξ_1 нинг t бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = C_2 e^{\lambda t} (1 + \lambda t).$$

Бундан

$$\frac{d\xi_1}{dt} \begin{cases} > 0, & \text{агар } 0 \leq t < -\frac{1}{\lambda}, \\ < 0, & \text{агар } t > -\frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

Демак, $t_* = -\frac{1}{\lambda}$ моментдан бошлаб, (ξ_1, ξ_2) нукта ўнгдан чапга ва юқоридан пастга ҳаракат қилади. Қуйидаги лимитларни ҳисоблаймиз (Лопиталь қондасини қўллаб):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_2 t e^{\lambda t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_2 t}{e^{-\lambda t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_2}{-\lambda e^{-\lambda t}} = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_2 e^{\lambda t} = 0.$$

Бундан кўринадики, (ξ_1, ξ_2) нукта вақт $t_* = -\frac{1}{\lambda}$ дан ортиб борган сари координата бошига яқинлаб боради ва $t \rightarrow +\infty$ да ξ_1 ўқига нуктанинг траекторияси уринади (55-чизма). Траекториянинг $(-\frac{1}{\lambda}, +\infty)$ интервалга мос келган бўлагининг кавариклиги пастга

караган. Бунинг тўғрилиги $(-\frac{1}{\lambda}, +\infty)$ интервалда $\frac{d^2 \xi_2}{d \xi_1^2} > 0$ эканидан келиб чиқади.

Энди $t < 0$ бўлганда траекторияни текширайлик. Равшанки, бу ҳолда t ўзгарувчи 0 дан $-\infty$ гача камайиб борса, нукта ҳам орқага, яъни ўнгдан чапга ва пастдан юқорига II чоракда ҳаракат қилади. (10.37) га кўра ўнгдан чапга пастдан юқорига қараганда тезроқ ҳаракат қилади (55-чизма). Энди агар C_2 га барча мусбат қийматлар берсак, тегишли траекториялар юқори ярим текислиқни тўла қоплайди (55-чизма).

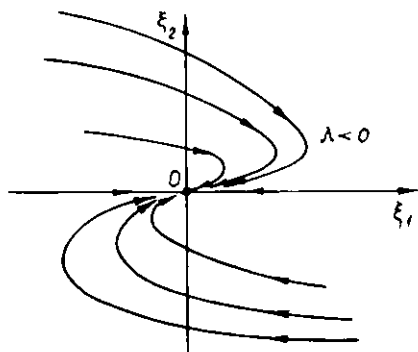
Агар (10.36) формулаларда C_1 ихтиёрий бўлса ҳам худди шу мулоҳазалар ўринли бўлади, яъни

$(C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$ ва $C_2 t e^{\lambda t}$ функцияларнинг дифференциал хоссалари бир хил. Хусусан, бу ҳолда ҳаракат (C_1, C_2) нуктадан бошланади. $(-\infty, -\frac{C_2 + \lambda C_1}{\lambda C_2})$ интервалда кавариклик юқорига,

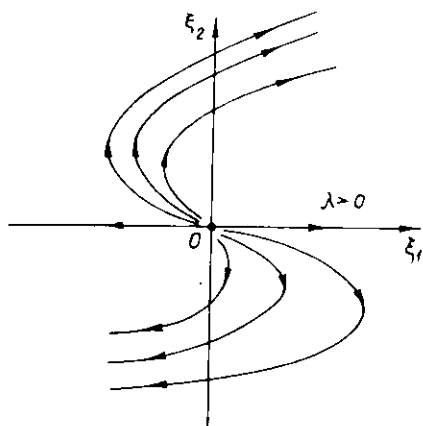
$(-\frac{C_2 + \lambda C_1}{\lambda C_2}, +\infty)$ интервалда эса пастга қараган бўлади C_1 ва

$C_2 > 0$ ларга ихтиёрий қийматлар берсак, мос равишда қурилган траекториялар юқори ярим текислиқни тўлдирди.

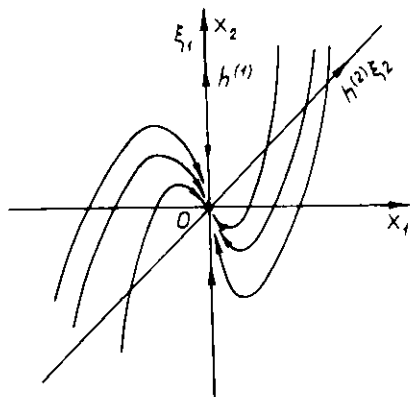
Агар $C_2 < 0$ ва C_1 ихтиёрий ўзгармаслар учун юқоридагидек мулоҳазалар юритсак, пастки ярим текисликда траекториялар қурилади. Шундай қилиб, P' текислиқни тўла қоплайдиган траекториялар қизилади. Бу ҳолда биз *тургун тўғилма тугун* манзарасига эгамиз. Агар $\lambda > 0$ бўлса ҳам мулоҳазалар ўхшаш (56-чизма). Бунда нотургун *тўғилма тугун* манзараси қурилади.



55-чизма



56- чизма



57- чизма

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

система учун

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ва } \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ h_1^{(1)} - h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ -h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

Бундан $h_1^{(1)} = 0$, $h_2^{(1)} = 1$ ($h_2^{(1)}$ ихтиёрийлигидан). Демак,

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

вектори ушбу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

тенгликдан топилади. Уни соддалаштирсак,

$$\begin{pmatrix} -h_2^{(2)} \\ h_1^{(2)} - h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ -h_2^{(2)} + 1 \end{pmatrix}$$

тенгликка келади. Бундан $h_1^{(2)} = 1$, $h_2^{(2)} = 1$ ($h_2^{(2)}$ ихтиёрийлигидан). Демак,

$h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Шундай қилиб, базис сифатида $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ векторларга эгамиз

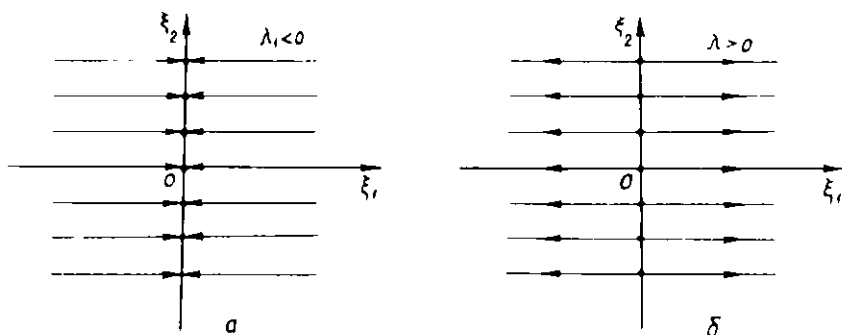
$\lambda = -1$ бўлгани учун бу базислар асосида турғун тўғилма тўғун манзарасини чизамиз (57- чизма).

Г. *A* матрицанинг хос сонларидан камида биттаси нолга тенг. Бунда икки ҳолни алохида кўраимиз.

1- ҳо л. Фақат битта хос сон нолга тенг, хусусан, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда ечимни

$$x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)}$$

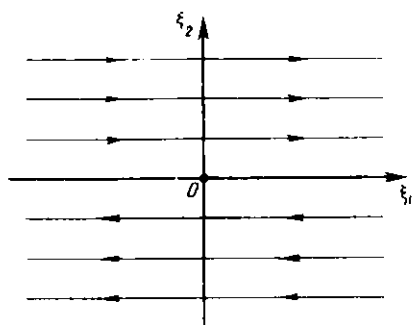
кўринишида ёзилади ва $\xi_1 = C_1 e^{t/\lambda_1}$; $\xi_2 = C_2 = \text{const}$. Агар $\lambda_1 < 0$ бўлса, ҳаракат $\xi_2 = C_2$ горизонтал чизиги бўйлаб ҳар икки томондан ξ_2 ўқига гомон йўналган бўлади. ξ_2 ўқининг, яъни $\xi_1 = 0$ тўғри чизигининг ҳамма нукталари мувозанат ҳолатидан иборат (58, а-чизма).



58- чизма

Агар $\lambda_1 > 0$ бўлса, ҳаракат юқоридагига қараганда тесқари йўналган бўлади (58, б-чизма). Бу ҳолда ҳам $\xi_1 = 0$ тўғри чизиги мувозанат ҳолатида бўлади. Ҳар икки ҳолда ҳам $\xi_1 = 0$ бўлганда $x = C_2 h^{(2)} = \text{const}$ га эгамиз. Бундан юқоридаги фикримизнинг далили кўриниб турибди.

2- ҳо л. Икки хос сон ҳам нолга тенг. Бу ҳолда ечим 1) $x = C_1 h^{(1)} + C_2 h^{(2)} = \text{const}$ каби ёзилади. Биз *P* текислиқнинг барча нукталари мувозанат нуктаси бўлган ҳолга эгамиз. Бу *A* матрицанинг барча элементлари нолга тенг бўлгандагина содир бўлади. 2) $x = (C_1 + C_2 t) h^{(1)} + C_2 h^{(2)}$, $\xi_1 = C_1 + C_2 t$, $\xi_2 = C_2$ каби ёзилади. Агар $C_2 = 0$ бўлса ξ_1 ўқи мувозанат нукталаридан иборат бўлади. ξ_1 ўқдан юқорида $C_2 > 0$ ва ҳаракат чапдан ўнгга, пастда эса $C_2 < 0$ ва ҳаракат ўнгдан чапга йўналган бўлади (59- чизма).



59- чизма

Мазкур параграфда иккинчи тартибли мухтор системаларни ўрганишда муҳим роль ўйнайдиган ҳолат тезлиги векторининг ҳаракатини текшираимиз. Бу вектор вақт ўтиши билан, умуман айтганда, ё у ёки бу йўналишда бурилади, узунлигини ҳам

ўзгартиради. (10.2) системани кўрайлик. Унда $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$ вектор хо-

лат тезлиги векторидир. Унинг модули ҳар бир моментда

$$|\dot{x}| = \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + \dots + (\dot{x}_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x)}$$

формула билан аниқланади. Энди $n=2$ бўлганда $\dot{x}$ векторнинг аргументи вақт ўтиши билан бурилишини текшираимиз. Унинг аргументини $\alpha(t) = \arg x(t)$ деб белгилаймиз. Бу функция ихтиёрий t учун узлуксиз. Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 \neq 0$, яъни $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(t)$ функция ҳам (t бўйича) узлуксиз дифференциалланувчи бўлади. Кейинги мулоҳазалар шу тасдиқни исбот этади.

Юқоридаги белгига кўра

$$\cos \alpha = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}.$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида $\cos \alpha$ ва $\sin \alpha$ ларни дифференциаллаб, топамиз:

$$\frac{d}{dt}(\cos \alpha) = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{f_2(\dot{f}_1 f_2 - f_1 \dot{f}_2)}{(f_1^2 + f_2^2)^{3/2}} = -\sin \alpha \frac{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2},$$

$$\frac{d}{dt}(\sin \alpha) = \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{f_1(\dot{f}_1 f_2 - f_1 \dot{f}_2)}{(f_1^2 + f_2^2)^{3/2}} = \cos \alpha \frac{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Бу муносабатлардан ихтиёрий t моментда $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$ лардан камида биттаси нолдан фаркли. Шунинг учун қуйидаги

$$-\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -\sin \alpha \frac{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2},$$

$$\cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \cos \alpha \frac{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2}.$$

тенгликлардан бирортасида ё $\sin \alpha$ га ё $\cos \alpha$ га қискартириш мумкин. Натижада изланган формулага келамиз:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \arg \dot{x} = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \frac{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Бу формула бўйича баъзи системалар учун ҳолат тезлик векторини ўрганайлик.

Ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

система учун $\ddot{x}_1 = \lambda_1 \dot{x}_1$, $\ddot{x}_2 = \lambda_2 \dot{x}_2$ ва

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha &= \frac{d}{dt} \arg \dot{x} = \frac{\dot{x}_1 (\lambda_2 \dot{x}_2) - (\lambda_1 \dot{x}_1) \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\alpha = \arg \dot{x}$ учун дифференциал тенгламага эгамиз:

$$\dot{\alpha} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \alpha \sin \alpha \quad (10.38)$$

ёки

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\alpha.$$

Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама ҳосил бўлди. Уни интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \alpha| = \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) t + \frac{1}{2} \ln |C|$$

ёки

$$\operatorname{tg} \alpha = C e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t}.$$

Қўллашга (10.38) тенглама қулайдир. Агар бирор $t = t_0$ моментда $\alpha(t_0) = 0$ (ёки $\alpha(t_0) = \pi$) бўлса, шу бошланғич шартни (10.38) тенгламанинг $\alpha(t) \equiv 0$, ($\alpha(t) \equiv \pi$) $t > t_0$ ечими қаноатлантиради. Бу *туғун* манзарасида x_1 ўқдаги ҳаракатга мос келади. Ҳақиқатан, горизонтал ўқда ҳаракат қилинса, унда $\alpha(t) = \text{const}$ ($\alpha(t) \equiv \pi$) ва $\frac{d\alpha(t)}{dt} \equiv 0$.

Агар $t = t_0$ да $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{2}$ ($\alpha(t_0) = \frac{3\pi}{2}$) бўлса, $t > t_0$ да $\alpha(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ ($\alpha(t) \equiv \frac{3\pi}{2}$) бўлади. Бу ечимлар x_2 ўқдаги ҳаракатга мос келади. Шундай қилиб, агар бирор $t = t_0$ моментда нукта абсцисса ўқида (ордината ўқида) ётган бўлса, у ҳолда бу нукта t нинг t_0 дан катта барча кийматларида шу ўқда ҳаракат қилади. Бундан у ёки бу чоракда жойлашган нукта вақт ўтиши билан шу чоракдан чиқиб кета олмаслиги келиб чиқади. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ бўлганда, равшанки, 1.

III чоракда $\dot{\alpha} < 0$, II, IV чоракда $\dot{\alpha} > 0$ тенгсизликлар ўринли. Бу тургун туғун манзарасига мансуб. Нотургун туғун манзарасида тенгсизликлар тескари бўлади.

Энди ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - \nu x_2, \\ \dot{x}_2 = \nu x_1 + \mu x_2, \quad \nu \neq 0 \end{cases}$$

система учун $\dot{\alpha}$ ни ҳисоблаймиз. Салда ҳисоблашлар кўрсатадики,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{d}{dt} \arg \dot{x} = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \frac{\dot{x}_1 (\nu \dot{x}_1 + \mu \dot{x}_2) - (\mu \dot{x}_1 - \nu \dot{x}_2) \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \\ &= \nu \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \nu. \end{aligned}$$

Демак, $\dot{\alpha} = \nu \neq 0$. Шундай қилиб, кўрилатган ҳолда $\nu > 0$ бўлса, ҳолат тезлик вектори доим соат мили ҳаракатига қарши йўналишда бурилади, акс ҳолда бунга тескари йўналишда бурилади. Бу тургун ва нотургун фокус манзараларини қизинишда қўл келади.

11-боб

ТУРГУНЛИК НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

11.1-§. ТУРГУНЛИК ҲАКИДА

1. **Қисқача тарихий маълумот.** Оддий дифференциал тенгламаларни интеграллашнинг элементар усуллари XVIII асрда ўз равижини топган классик математик анализдан мерос бўлиб қолди. Тенгламаларни квадратураларда интеграллаш билан шугулланиш И. Ньютон, Г. Лейбниц ишларидан бошланиб, XIX асрнинг иккинчи ярмида С. Ли ишлари билан якунланди. XIX асрнинг биринчи ярмида дифференциал тенгламаларнинг умумий назарияси^{*)}, сўнгра дифференциал тенгламаларни тақрибий интеграллаш усуллари ривожлантирилди. Бу борада Пикарнинг кетма-кет яқинлашиш усулидан кенг фойдаланилди. Амалий математиканинг зарурати билан яратилган тақрибий интеграллаш усуллари мутахассисларни қаноатлантирмас эди, чунки ҳар бир Коши масаласи битта нуктадан ўтадиган интеграл қизикни тақрибий ясашдан иборат бўлиб, янги нукта учун ҳисоблашларни такрорлашга тўғри келар эди. Шунинг учун ҳам бу усул билан дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясини ривожлантириш мумкин эмас эди.

XIX асрнинг охирида дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясини ривожлантириш йўлида янги усуллар яратилди. Бу усуллар биргаликда «дифференциал тенгламаларнинг сифат наза-

^{*)} Дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясини яратишда О. Коши, А. Пуанкаре, П. Пенлеве, Э. Пикар, Э. Линдсдөфларнинг қилган ишлари асосий ролни ўйнаган.

рияси» деб аталиб, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов номи билан чамбарчас боғланган. А. Пуанкаре нормал дифференциал тенгламани (системани) интегралламасдан, унинг ўнг томонига қараб интеграл чизикларнинг хоссаларини ўрганишдек умумий масалани ўртага ташлади. Бу масала дифференциал тенгламалар сифат назариясининг асосий масаласи ҳисобланади.

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси жуда кенг бўлиб, биз ҳаракатнинг турғунлиги масаласинигина ўрганамиз.

2. Турғунлик. Турғунлик тушунчаси ҳаётда ҳар кадамда учрайди, масалан, велосипедчи ҳаракатини олайлик, у ҳаракати давомида йиқилмаслик учун рулни гоҳ чапга, гоҳ ўнгга буриб туришга мажбур бўлади. Шунга ўхшаш, дорбоз аркон устида юраётганда ўз мувозанатини сақлаш учун кўлидаги лангар чўпини кимирлатиб туради.

Ҳар икки мисолда баён этилган жараён ҳам турғунлик тушунчаси билан боғланган бўлиб, ҳаракат бирида велосипед рули билан, иккинчисида лангар чўп билан бошқарилиб туради. Агар шу бошқариш бўлмаса, велосипедчи ҳам, дорбоз ҳам албатта йиқилади¹.

Велосипедчи ва дорбознинг ҳаракати дифференциал тенглама билан ифодаланиши мумкин, шунингдек, кўплаб қурилмаларнинг (машиналарнинг, асбобларнинг ва бошқаларнинг) иши ҳам дифференциал тенгламалар билан тавсифланади. Ҳамма ҳолда ҳам маъноси бўйича ўша тенгламалар чексиз қўп ечимга эга бўлса-да, тегишли жараён бирор битта ечимга мос келади. Унда мос жараёни *режим* деб юритилади. Гарчи бошланғич қийматлар шу режимга мос келмаса-да, жараён етарли узок давом этса, бошланғич қийматлар ўз макенини йўқотади ва қурилма ўз ишини маълум режимга тушириб олади. Бу режимни *стационар режим* дейилади. Мисол сифатида скаляр $x = f(x)$ тенглама учун мувозанат ҳолатининг турғунлигини, иккинчи тартибли чизикли бир жинсли системалардаги турғун, турғун фокус ва турғун туғилма ҳолатни келтириш мумкин. Бундан ташқари, биз қуйида математик маятник ва соат маятниги ҳаракатларини шу нуктадан назардан тушунтирамиз.

Математик маятник куйидагидан иборат: массаси m га тенг бўлган P нукта ўз оғирлик кучи таъсирида l радиусли K айлана ёйи бўйлаб ҳаракат қилади, бу айлана вертикал текисликда жойланган. l маятникнинг узунлиги дейилади. K айланада координата киритамиз, унинг энг пастки нуктасини координата боши деб ҳисоблаймиз. P нуктанинг ўзгарувчи координатасини $\varphi = \varphi(t)$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $0 < \varphi_0 \leq \pi$ деб белгилаймиз. Шу нукта $F = mg$ — оғирлик кучи таъсирида бўлади. Маълумки, $F = mg$ куч вертикал йўналган. Бу кучни икки ташкил этувчига ажратиш мумкин: бири K айлана нормали бўйича йўналган бўлиб, иккинчиси айлана уринмаси бўйлаб йўналган. Охирги ташкил этувчи $mg \sin \varphi$ (бунда мусбат йўналиш

¹ Келтирилган жараёнлар «Оптималь бошқариш» курсида кўрилиши мумкин. Аммо велосипед рулини ёки лангарчўпнинг маълум ҳолатига мос келган ҳаракатни ўрганиш турғунлик тушунчаси билан боғланган.

φ бурчагининг ўсишига мос қилиб олинди). Агар ишқаланиш ва ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмаса, математик маятник тенгламаси Ньютон қонунига асосан қуйидагича (60-чизма) ёзилади:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

ёки

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \quad (11.1)$$

Бу иккинчи тартибли чизикли бўлмаган дифференциал тенгламадан иборат. Янги ўзгарувчиларни киритиб, уни иккинчи тартибли нормал мухтор система кўринишида ёзайлик ($\varphi = \varphi_1$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_2$):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\frac{g}{l}\sin\varphi_1. \end{cases} \quad (11.2)$$

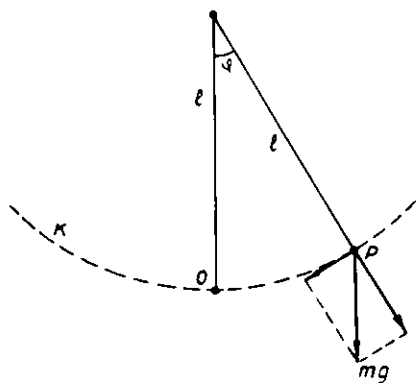
(11.2) системанинг мувозанат ҳолати

$$\begin{cases} \varphi_2 = 0, \\ \sin\varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

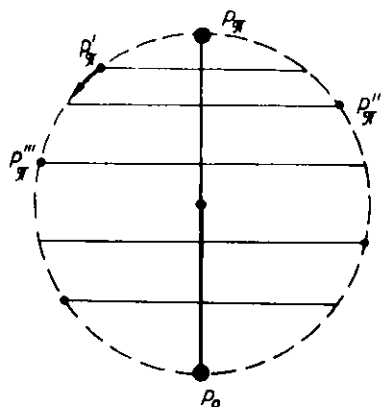
тенгламалардан аниқланади. Шу (11.3) системанинг ечимлари $(k\pi, 0)$ (k бутун сон) кўринишда бўлади. Агар $k=0$, $k=1$ бўлса, биз ушбу

$(0,0)$ ва $(\pi, 0)$

икки мувозанат ҳолатига (нуктасига) эга бўламиз. Улардан биринчиси маятникнинг энг қуйи P_0 ҳолатига (координата боши), иккинчиси энг юқори P_π ҳолатига мос келади (61-чизма). Назарий



60- чизма



61- чизма

жиҳатдан математик маятник P_π ҳолатда туриши мумкин. Аммо P_π нукта ўрнига унга K айлана бўйича исталганча яқин турган P'_π нуктани олсак, бу нуктадан маятник ўз оғирлик қучи таъсири остида K айлана бўйлаб пастга ҳаракат қила бошлайди. Шу қуч сабабли P'_π

пукта K айлана бўйлаб P_n нуктага етиб кела олмайди (P_n' нуктага бошлангич тезлик берилмайди деб қараяпти). У P_n'' ҳолатга келиб, яна пастга ҳаракат қилади. Бунда P_n'' нинг ҳолати P_n' дан пастроқда бўлади. Шу йўл билан ҳар бири аввалгисидан пастроқ ҳолатда жойлашган нукталар кетма-кетлиги ҳосил бўлади:

$$P_n, P_n', P_n'', \dots, P_n^{(n)}, \dots$$

Шубҳасиз, вақт ўтиши билан $P_n^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_n$ муносабат ўринли бўлади.

Бошқача айтганда, P нукта қуйи мувозанат ҳолатга интилади. Бу мулоҳазаларга асосан юқори мувозанат ҳолат нотургун, қуйи мувозанат ҳолат *тургун* деб атаймиз. Демак, агар P нукта юқори мувозанат ҳолатдан бир оз силжитилса, у яна шу ҳолатга қайтиб келмайди; P нукта қуйи мувозанат ҳолатдан силжитилганда эса у *чекли* вақт давомида яна шу ҳолатни эгаллайди.

Энди *соат маятник*и ҳаракатини ўрганайлик. Олма соатлар маятникнинг маълум *қулочи* билан юради. Агар соатни юргизишда унинг маятникни етарли секин силжитилса, маятник озроқ тебраниб тўхтаб қолади. Агар маятникни каттарок қулочга силжитилса, киска вақтдан кейин маятник аниқ қулоч бўйлаб, маълум амплитуда билан етарлича узок вақт ёки чексиз узок вақт ҳаракат қилади. Соат ҳаракатини ифода этадиган тенгламалар системаси икки стационар ҳолатга эга бўлиб, бири — ҳаракат бўлмайдиган мувозанат ҳолатидан, иккинчиси эса соатнинг нормал юришига мос *даврий* ечимдан иборат. Тенгламалар системасининг ихтиёрий бошқа ечимлари шу икки ечимдан бирига тез яқинлашади ва фарк қилмай қолади. Демак, ҳолатлар фазоси бу ҳолда икки соҳага бўлинади. Уни *тортилиш соҳалари* деб юритилади. Бир тортилиш соҳасидан бошланган ҳаракат мувозанат ҳолатига яқинлашса, иккинчисидан бошлангани эса даврий ечимга яқинлашади.

11.2. §. ТУРГУН КЎПҲАДЛАР

1. Кўпҳадларнинг тургунлик шартлари.

11.1-таъриф. Агар коэффициентлари ҳақиқий бўлган

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \quad (11.4)$$

кўпҳаднинг барча илдизлари (ноллари) манфий ҳақиқий қисмга эга бўлса, у ҳолда (11.4) кўпҳад *тургун кўпҳад* дейилади.

Тургун кўпҳадларнинг илдизлари комплекс ўзгарувчининг текислигида мавҳум ўқдан чапда жойлашган бўлади. Кўпҳад тургунлигини текширишнинг Раус-Гурвиц белгиси билан танишамиз. Умумий ҳолни кўришдан аввал $n=1, 2, 3$ бўлган ҳолларга алоҳида тўхталамиз. $n=1$ бўлганда (11.4) кўпҳад $a_0 p + a_1 = L(p)$ кўринишини

олади. Бу икки ҳад ягона $p = -\frac{a_1}{a_0}$, $a_0 \neq 0$ илдизга эга. $-\frac{a_1}{a_0} < 0$

бўлиши учун a_0 ва a_1 ($a_1 \neq 0$) коэффициентлар бир хил ишорали бўлиши зарур ва етарли. Демак, биринчи тартибли чиқиқли

тенгламанинг илдизи манфий бўлиши учун унинг коэффициентлари бир хил ишорали бўлиши зарур ва етарли. Бу тасдиқнинг исботи равшан. Агар $a_0 > 0$ дейилса, $a_1 > 0$ бўлганда биринчи тартибли кўпхад тургун бўлади.

Энди $n = 2$ бўлсин. Бунда биз иккинчи тартибли

$$L(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2, \quad a_0 > 0$$

кўпхадга эгамиз. Юқорида $a_0 > 0$ деб олдик. Агар $a_0 < 0$ бўлганда $-L(p) = L_*(p)$ деб белгиласак, $L_*(p)$ учун p^2 олдидаги коэффициент мусбат бўлади. $L(p)$ ва $L_*(p)$ кўпхадлар эквивалент бўлгани учун $L_*(p)$ кўпхад билан иш кўриш мумкин. Бу мулоҳаза n -тартибли кўпхадлар учун ҳам айтилиши мумкин. Шунинг учун доим $a_0 > 0$ деб олинса бўлади.

Юқоридаги квадрат учхаднинг илдизлари ушбу

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}}$$

формулалар билан ҳисобланади. Бундан дискриминант нолдан кичик бўлганда илдизларнинг ҳақиқий қисми $-\frac{a_1}{2a_0}$ дан иборат бўлади.

$a_1 > 0$ бўлганда $-\frac{a_1}{2a_0} < 0$ ($a_0 > 0$) ва кўпхад тургун бўлади. Агар

$a_1 \leq 0$ бўлса, $-\frac{a_1}{2a_0} \geq 0$ бўлади. Бу ҳолда кўпхад тургун бўла

олмайди. Агар дискриминант нолга тенг ёки нолдан катта бўлса, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ бўлганда $p_{1,2} < 0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ҳолда кўпхад яна тургун бўлади. Бошқа ҳолларда кўпхад тургун бўла олмайди. Агар кўпхад тургун бўлса, илдизлар формуласидан $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, квадрат учхад тургун бўлиши учун унинг коэффициентлари мусбат бўлиши зарур ва етарли.

11.1-теорема. Ушбу $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ кўпхад тургун бўлиши учун унинг $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентлари мусбат бўлиши зарур.

Исбот. $L(p)$ кўпхаднинг коэффициентлари ҳақиқий бўлгани учун унинг илдизлари сони каррали илдизларнинг карраси ҳам ҳисобга олинганда n та бўлади. Шу билан бирга кўпхаднинг k та илдизи комплекс бўлса, унда унинг яна k та илдизи мос равишда қўшма комплекс бўлади. Уларни $\mu_j \pm i\nu_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, λ_p , $p = 1, 2, \dots, n - 2k$ деб белгилаймиз. Шартга кўра кўпхад тургун. Шунинг учун $\mu_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, k$; $\lambda_p > 0$, $p = 1, 2, \dots, n - 2k$. Энди $L(p)$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{j=1}^k [p - (\mu_j + i\nu_j)][p - (\mu_j - i\nu_j)] \cdot \prod_{p=1}^{n-2k} (p - \lambda_p) = \\ &= \prod_{j=1}^k (p^2 + a_1^{(j)} p + a_2^{(j)}) \cdot \prod_{p=1}^{n-2k} (p + b^{(p)}), \end{aligned}$$

бунда $a_1^{(n)} = -2\mu_1 > 0$, $a_2^{(n)} = \mu_1^2 + \nu_1^2 > 0$, $b^{(n)} = -\lambda_1 > 0$.

Демак, $L(p)$ кўпхад коэффициентлари мусбат бўлган $p^2 + a_1p + a_2$ ва $p + b$ кўринишдаги кўпхадларнинг кўпайтмаси шаклида ёзилади. Бундай кўпхадларни кўпайтириб чиксак, коэффициентлари мусбат бўлган кўпхад чиқиши равшан. Теорема исбот бўлди.

11.2- теорема. Коэффициентлари ҳақиқий бўлган

$$L(p) = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3, \quad a_0 > 0$$

кўпхад тургун бўлиши учун a_1 , a_2 , a_3 коэффициентлари мусбат бўлиши билан бирга ушбу

$$a_1a_2 > a_0a_3$$

тенгсизлик бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. $a_0 > 0$ бўлгани учун биз

$$L(p) = p^3 + ap^2 + bp + c \quad (11.5)$$

кўпхадни кўраемиз.

Зарурлиги. Бу ҳолда (11.5) кўпхаднинг турғунлигидан

$$ab > c \quad (11.6)$$

тенгсизликнинг бажарилишини келтириб чиқарамиз. Аввало 11.1- теоремага кўра $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ тенгсизликлар ўринли. Исбот этишда кўпхаднинг илдизлари коэффициентларига узлуксиз боғланганлигидан кенг фойдаланамиз.

Комплекс текисликни кўраемиз. Унда горизонтал ўқда ҳақиқий илдизларни, вертикал ўқда мавҳум илдизларни жойлаштириш мумкин.

Аввало (11.5) кўпхад $p=0$ илдизга эга эмас, акс ҳолда ундан $c=0$ келиб чиқар эди. Энди (11.5) кўпхаднинг илдизи мавҳум, яъни $p=i\omega$, $\omega \neq 0$ бўлсин дейлик. Шу кўпхадни ушбу

$$L(p) = (p+a)(p^2+b) - ab + c \quad (11.7)$$

кўринишда ёзайлик. $L(i\omega)$ ни ҳисоблаймиз:

$$L(i\omega) = (i\omega + a)(-\omega^2 + b) - ab + c = i\omega(-\omega^2 + b) + a(-\omega^2 + b) - ab + c.$$

Бундан $p=i\omega$ мавҳум сон илдиз бўлиши учун $-\omega^2 + b = 0$ ва $ab = c$ бўлиши лозим. Агар $ab = c$ бўлса,

$$L(p) = (p+a)(p^2+b) = 0$$

дан $p = \pm i \sqrt{b}$. Шундай қилиб, $L(p)$ кўпхад мавҳум илдизларга эга бўлиши учун $ab = c$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли. $L(p)$ кўпхаднинг a , b , c коэффициентлари ҳам комплекс текисликда узлуксиз ҳаракат қилиб боради. Шу ҳаракат давомида мавҳум ўқ $ab = c$ бўлгандагина кесиб ўтилади.

Энди (11.6) (яъни $ab > c$) тенгсизлик бажарилмасин дейлик. У ҳолда ё $ab = c$, ё $ab < c$ бўлади. Биринчи ҳолда кўпхад мавҳум илдизларга эга, демак, у нотурғун. Иккинчи ҳолда ҳам кўпхад нотурғун эканини кўрсатамиз, a ва b ларни ($a > 0$, $b > 0$) шундай

узлуксиз ўзгартирамизки, биринчидан улар нолга интилса, иккинчидан $ab < c$ тенгсизлик бузилмасин. Бундай ўзгартиришда кўпхаднинг илдизлари мавҳум ўқнинг бир томонидан иккинчи томонига ўта олмайди, акс ҳолда $ab < c$ тенгсизлик бузилган бўлар эди. Демак, кўпхаднинг турғун ёки нотурғунлиги ўзгармайди. Агар $a = b = 0$ бўлса, (11.5) дан $p^3 + c$ га эга бўламиз. Унинг илдизлари

$$p_1 = \sqrt[3]{-c} < 0, p_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{c}}{2} \pm i \frac{\sqrt[3]{c}}{2} \sqrt{3}. \text{ Демак, } p^3 + c \text{ кўпхад мавҳум}$$

ўқдан ўнгга жойлашган 2 та $\frac{\sqrt[3]{c}}{2} \pm i \frac{\sqrt[3]{c}}{2} \sqrt{3}$ илдизга эга. Бу ҳолда

кўпхад нотурғун (яъни мавҳум ўқдан ўнгга жойлашган илдизлар бор). Мазкур хосса a ва b ларнинг нолга етарли яқин қийматларида ҳам ўринли, чунки илдизлар кўпхад коэффициентларининг узлуксиз функциясидир. Шундай қилиб, $ab < c$ тенгсизлик бажарилганда $L(p)$ кўпхад нотурғун.

Етарлилиги. (11.6) тенгсизлик бажарилсин дейлик. Бу ҳолда $L(p)$ кўпхад турғун эканини исбот этамиз. $ab > c$ тенгсизликда c ни шундай ўзгартирамизки, у 1) нолга интилсин, 2) $ab > c$ тенгсизлик бузилмасин. Агар $c = 0$ бўлса, ушбу

$$L(p) = p(p^2 + ap + b)$$

кўпхадга эгамиз. Бу кўпхад $p_1 = 0$ ва $p_{2,3} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ илдиз-

ларга эга. Бундан $p_{2,3}$ ларнинг ҳақиқий қисми манфий экани кўриниб турибди. Агар c нинг нолга етарли яқин мусбат қийматларини олсак, $p_{2,3}$ илдизлар мавҳум ўқдан чапда қолади. Аммо ноль илдиз мавҳум ўқдан ё чапга ёки ўнгга етарли кичик микдорда силжийди. Иккинчи томондан маълумки, кўпхад илдизларининг кўпайтмаси тескари ишора билан олинган озод ҳадга тенг (кўпхад учун Виет теоремаси). Шунинг учун кўрилатган ҳолда $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = -c < 0$; $p_2 \cdot p_3 > 0$ тенгсизликлардан $p_1 < 0$ (ҳақиқий илдиз) экани келиб чиқади. Шундай қилиб, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $ab > c$ тенгсизликлар бажарилганда $L(p)$ кўпхад турғун бўлади. Теорема исбот бўлди.

Умумий ҳолда кўпхаднинг турғунлиги шартини баён этамиз. Эслатиб ўтамизки, бирор

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлса, унинг k -тартибли бош минори деб ушбу

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

матрицанинг детерминантга айтилади. Уша минорни $\Delta_k(P)$ деб белгилаймиз.

11.3-теорема (Раус—Гурвиц белгиси). Ушбу

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad a_0 > 0 \quad (11.4)$$

коэффициентлари ҳақиқий бўлган n -тартибли қўпхад берилган бўлсин. Қўйида қўпхаднинг $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларидан n -тартибли матрица тузамиз:

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

(11.4) қўпхад тургун бўлиши учун ҳамма бош минорлар $\Delta_1(Q), \Delta_2(Q), \dots, \Delta_n(Q)$ мусбат бўлиши зарур ва етарли^{*)}

Исбот. Q матрицанинг k -устунини ёзамиз:

$$\dots a_{k+2} a_{k+1} a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots$$

Бунда a_{k+j} элементлардан a_k бош диагоналда жойлашган, шунингдек, агар $k+j < 0, k+j > n$ бўлса, $a_{k+j} = 0$.

11.3-теоремадан аввал исботланган 11.2-теорема хусусан келиб чиқади. Ҳақиқатан, 11.2-теоремада $n=3$ эди. Шунинг учун учинчи тартибли Q матрицани тузамиз:

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Бундан:

$$\Delta_1(Q) = a_1, \quad \Delta_2(Q) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3, \\ \Delta_3(Q) = a_3 \Delta_2(Q).$$

11.3-теоремага кўра:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Охирги тенгсизликдан $a_2 > \frac{a_0 a_3}{a_1} > 0$ келиб чиқади.

Энди $n=4$ бўлганда

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

матрицага кўра:

$$\Delta_1(Q) = a_1; \quad \Delta_2(Q) = a_1 a_2 - a_0 a_3; \quad \Delta_3(Q) = a_3 \Delta_2(Q) - a_1^2 a_4; \\ \Delta_4(Q) = a_4 \Delta_3(Q).$$

^{*)} Бу теореманинг исботини Н. Г. Четаевнинг «Устойчивость движения» (Гостехиздат, М., 1955, 79—83 бетлар) китобидан ўқини мумкин.

Бу матрицанинг мусбатлиги шартидан

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, \\ \Delta_3(Q) = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

Шунга ўхшаш, $n=5$ бўлганда

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_5 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_1 & a_5 & 0 \\ 0 & a_1 & a_1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_1 & a_5 \end{pmatrix}$$

матрицанинг бош минорлари қуйидагича бўлади:

$$\Delta_1(Q) = a_1, \Delta_2(Q) = a_1 a_2 - a_0 a_3, \Delta_3(Q) = a_3 \Delta_2(Q) - a_1^2 a_4, \\ \Delta_4(Q) = a_4 \Delta_3(Q) - a_5 a_2 \Delta_2(Q) + a_0 a_5 (a_1 a_4 - a_0 a_5), \\ \Delta_5(Q) = a_5 \Delta_4(Q).$$

Бу минорларнинг мусбатлигидан ($a_0 > 0$)

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0, \\ a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_0 a_1 a_5 > 0, \\ (a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_0 a_1 a_5) a_4 - \\ - a_5 (a_1 a_2^2 - a_0 a_1 a_1 - a_0 a_2 a_3 + a_0^2 a_5) > 0$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

2. Ечим модулининг баҳоси. Бизга n -тартибли чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли $L(p)z=0$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бу тенглама характеристик тенгламаси $L(p)=0$ нинг барча илдизлари

$$\lambda_j = \mu_j + i\nu_j, \quad j=1, 2, \dots, m, \quad m \leq n$$

кўринишда ёзилган бўлсин. Унда баъзи ν_j лар нолга тенг бўлиши мумкин, $m < n$ бўлганда эса қаррали илдизлар ҳам мавжуд бўлади. Ҳамма ҳолда ҳам n та чизикли эркин ечимни, яъни фундаментал системани топиш мумкин. Шу n та ечимни $z_1, z_2, \dots, z_n$ деб белгилаймиз. У ҳолда умумий ечим $\varphi(t) = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n$ каби ёзилади.

11.4- теорема. Агар $L(p)$ кўнхад тургун бўлса, шундай мусбат α сон топиладики, җишбу

$$\mu_j < -\alpha, \quad j=1, 2, \dots, m \quad (11.8)$$

тенгсизлик ўринли бўлади; шу билан бирга бу ҳолда $L(p)z=0$ тенгламанинг ҳар бир ечими учун шундай мусбат сон M топиладики, ечимнинг модули учун җишбу

$$|\varphi(t)| < M e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (11.9)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Аввал (6.15) функциялар системасидан олинган ихтиёрий $z_s, s=1, 2, \dots, n$ ечим учун (11.9) формулани исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$z_s = t^s e^{\lambda_j t}$$

ечимни олайлик. Бу формуланинг икки томонини $e^{-\alpha t}$ га бўламиз:

$$\frac{z_i}{e^{-\alpha t}} = t' e^{(\mu_j + \alpha)t} = t' e^{\mu_j t + \alpha t} = t' e^{(\mu_j + \alpha)t} e^{i\nu_j t}.$$

Энди $|e^{i\nu_j t}| = 1$ бўлгани учун ушбу муносабатга эгамиз:

$$\left| \frac{z_i}{e^{-\alpha t}} \right| = t' e^{(\mu_j + \alpha)t}.$$

Аммо (11.8) га кўра $\mu_j + \alpha < 0$. Шунинг учун Лопиталь қондасини кетма-кет қўлласак:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t' e^{(\mu_j + \alpha)t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t'}{e^{-(\mu_j + \alpha)t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t'}{(-1)^{j'} \mu_j' e^{-(\mu_j + \alpha)t}} = 0.$$

Бундан $t' e^{(\mu_j + \alpha)t}$ функция $t \geq 0$ бўлганда чегараланганлиги келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\left| \frac{z_i}{e^{-\alpha t}} \right| < M_i, \quad t \geq 0$$

ёки

$$|z_i| < M_i e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

деб ёзиш мумкин. Бу баҳодан фойдаланиб, $\varphi(t)$ ечимнинг модулини баҳолаймиз. Равшанки,

$$|\varphi(t)| \leq |C_1| |z_1| + |C_2| |z_2| + \dots + |C_n| |z_n| < (|C_1| M_1 + |C_2| M_2 + \dots + |C_n| M_n) e^{-\alpha t} = M e^{-\alpha t}.$$

Демак, $t \geq 0$ бўлганда (11.9) тенгсизлик ўринли. Бундан кўринадики $\varphi(t)$ ечимнинг модули экспоненциал функция бўйича нолга интилади.

11.5- теорема. *Бизга чиқиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли система $\dot{x} = Ax$ берилган бўлиб, $\varphi(t, \xi)$ вектор-функция унинг $0, \xi$ бошланғич қийматларга эга бўлган ечими бўлсин. Агар A матрицанинг барча хос сонлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда шундай мусбат r ва α сонлар топиладики, ушбу*

$$|\varphi(t, \xi)| \leq r |\xi| e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (11.10)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу $A = (a_{ij})$, $L(p) = (a_{ij} - p\delta_{ij})$ белгиланларни киритсак, берилган системани $\sum_{j=1}^n L_{ij}(p)x_j = 0$, $i=1, 2, \dots, n$ каби ёзиш

мумкин бўлади. Агар $D(p)$ деб $L(p)$ матрицанинг детерминантини белгиласак, 9-бобдаги мулоҳазалардан маълумки,

$$\sum_{k=1}^n M_{ki}(p) L_{ij}(p) = \delta_{ki} D(p)$$

тенглик ўринли. Бундан:

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ki}(p) L_{ij}(p) x_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ki} D(p) x_j = D(p) x_k.$$

Демак, агар $x = (x_1, \dots, x_n)$ * системанинг бирор ечими бўлса, у ҳолда ҳар бир $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ ушбу $D(p)x_i = 0$ тенгламанинг ечими бўлади. $D(p)$ кўпхад шарт бўйича тургун. Шунинг учун ҳар бир x_i учун $|x_i| \leq \leq Re^{-\alpha t}, t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, R > 0, \alpha > 0$ тенгсизликка эгамиз. Бундан $|x| \leq \sqrt{n} Re^{-\alpha t}, t \geq 0$.

Энди $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — бирлик-вектор бўлиб, i -ўриндагидан бошқа координаталари нолга тенг. $\psi^{(i)}(t)$ — берилган системанинг $\psi^{(i)}(0) = e_i, i = 1, 2, \dots, n$ шартни қаноатлантирадиган ечими бўлсин. Бу ҳолда $\psi(t, \xi)$ функция қуйидагича

$$\psi(t, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i \psi^{(i)}(t)$$

ёзилади. Ҳар бир $\psi^{(i)}(t)$ функция учун юқорида $|\psi^{(i)}(t)| \leq \leq R \sqrt{n} e^{-\alpha t}$ тенгсизлик исботланган эди. Шу сабабли, $|\psi(t, \xi)|$ учун баҳо чиқариш мумкин. Равшанки, $\psi(t, \xi)$ ни бундай ёзса бўлади:

$$\psi(t, \xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 \psi_1^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \xi_n \psi_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \xi_n \psi_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ \xi_n \psi_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \xi_i \psi_i^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \xi_i \psi_i^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Бундан:

$$|\psi(t, \xi)| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \psi_i^{(1)}(t) \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \psi_i^{(n)}(t) \right)^2} \leq \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| |\psi_i^{(1)}(t)| \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| |\psi_i^{(n)}(t)| \right)^2}.$$

Ушбу $\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| |\psi_i^{(k)}(t)| \right)^2$ ифодани алоҳида баҳолаймиз. Содда ҳисоблашлар кўрсатаднки,

$$\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| |\psi_i^{(k)}(t)| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 |\psi_i^{(k)}(t)|^2 + + 2 \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} |\xi_i| |\xi_j| |\psi_i^{(k)}(t)| |\psi_j^{(k)}(t)|, \text{ бунда } \Sigma' \text{ йигиндида } i \neq j.$$

Энди баҳолашни давом эттирамиз. Бунинг учун $ab \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$ тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| |\Psi_i^{(n)}(t)| \right)^2 \leq (R^2 e^{-2\alpha t}) \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right) + \\ + 2R e^{-\alpha t} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{|\xi_i|^2 + |\xi_j|^2}{2} \right) \leq (2n+1) |\xi|^2 R^2 e^{-2\alpha t}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Энди $|\psi(t, \xi)|$ учун қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$|\psi(t, \xi)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |(2n+1) |\xi|^2 R^2 e^{-2\alpha t}|} = \sqrt{n(2n+1)} R |\xi| e^{-\alpha t}.$$

Демак, (11.10) тенгсизлик исботланди, унда $r = \sqrt{n(2n+1)} R$. Теорема исбот бўлди. Кўринадики, $\psi(t, \xi)$ ечимнинг модули $t \geq 0$ бўлганда чегараланган ва $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t, \xi)| = 0$, бунда нолга интилиш экспоненциал функция бўйича бўлади.

Э с л а т м а. Агар $L(p)z=0$ ($L(p)$ - n -тартибли чизиқли тенгламанинг системанинг характеристик қўлҳади) тенгламанинг характеристик қўлҳади 1) биттасининг ҳақиқий қисми нол, қолганлариники манфий бўлган илдизларга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varphi(t)$ ечимнинг модули $t \geq 0$ бўлганда чегараланган бўлади; 2) агар бирорта илдизнинг ҳақиқий қисми $\mu_i > 0$ бўлса, у ҳолда n -тартибли чизиқли тенгламанинг $t \rightarrow +\infty$ да чексизга интиладиган $e^{t\mu_i}$ ечими, n -тартибли чизиқли системанинг модули чексизга интиладиган $h^i e^{t\mu_i}$ ечими мавжуд бўлади.

11.3-§. МУВОЗАНАТ ҲОЛАТИНИНГ ТУРГУНЛИГИ. ЛЯПУНОВ–ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМАСИ

1. Ляпунов маъносида турғунлик ва нотурғунлик. (10.2) системада $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ функциялар ҳолат фазосининг бирор D_n соҳасида аниқланган ва биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан узлуксиз деб қараймиз. Турғунлик белгиларини баён этишда эса ҳатто иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлиги ҳам талаб этилади.

D_n соҳадан олинган $a = (a_1, \dots, a_n)$ нукта (10.2) системанинг мувозанат ҳолати бўлсин, демак, $f(a) = 0$ вектор тенглик ўришли. Шу a нуктанинг турғунлигини сўз билан тушунтирайлик: агар $t=0$ моментда (10.2) системанинг a , $a \in D_n$ нуктага етарли яқин нуктадан чиқадиган ечими ўзининг бутун кейинги ўзгариши давомида, яъни t нинг барча $t > 0$ қийматларида шу a нуктага яқинлигича қолса, у ҳолда мувозанат ҳолати a ни турғун деб аташ лозим.

Кейинги мулоҳазаларимизда $0, \xi, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимни $\varphi(t, \xi)$ деб белгилаймиз. Албатта, мувозанат нуктаси a нинг атрофидаги ечимлар текширилиши турғунлиқнинг аниқ таърифи учун керак. Шунинг учун шубҳасиз, $\xi \neq a$ деб танланади. Демак, $\varphi(t, \xi)$ вектор-функция учун ушбу

$$\frac{dq(t, \xi)}{dt} = f(q(t, \xi)),$$

$$q(0, \xi) = \xi \quad (11.11)$$

муносабатлар ўринли.

11.2-таъриф. Агар 1) шундай сон $\rho > 0$ мавжуд бўлсаки, $|\xi - a| < \rho$ бўлганда (10.3) вектор-тенгламанинг $q(t, \xi)$ ечими t нинг барча мусбат қийматларида аниқланган бўлса, 2) ҳар бир мусбат сон $\epsilon > 0$ учун шундай мусбат δ , $\delta < \rho$ топилсаки, $|\xi - a| < \delta$ бўлганда t нинг барча мусбат қийматлари учун $|q(t, \xi) - a| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (10.3) вектор-тенгламанинг мувозанат ҳолати а Ляпунов маъносида тургун дейилади.

Агар Ляпунов маъносида тургун бўлган мувозанат ҳолати a учун 3) шундай мусбат сон σ , $\sigma < \rho$ мавжуд бўлсаки, $|\xi - a| < \sigma$ бўлганда ушбу

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t, \xi) - a| = 0$$

муносабат бажарилса, у ҳолда (10.3) вектор-тенгламанинг мувозанат ҳолати a асимптотик тургун дейилади.

$|q(t, \xi) - a| < \epsilon$ тенгсизлиكنи координаталар билан ёзсак, $\sqrt{(q_1(t, \xi) - a_1)^2 + \dots + (q_n(t, \xi) - a_n)^2} < \epsilon$ тенгсизликка эга бўламиз. Бунга эквивалент n та

$$|q_i(t, \xi) - a_i| < \frac{k_i \epsilon}{\sqrt{n}}, \dots, |q_n(t, \xi) - a_n| < \frac{k_n \epsilon}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{i=1}^n k_i^2 = n, k_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

тенгсизлиكنи ёзишимиз мумкин. Агар шу тенгсизликлардан камида биттаси ўринли бўлмаса, тегишли $q(t, \xi)$ вектор-ечим Ляпунов маъносида нотургун дейилади. Бунга мисол қилиб, ҳолат текислигидаги эгар манзарасини келтириш мумкин.

Энди n - тартибли чизикли бир жинсли мухтор системани олайлик. Маълумки, агар A матрицанинг ҳос сонлари маъний ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган $\psi(t, \xi)$ ечим учун (11.10) тенгсизлик ўринли. Чизикли бир жинсли системада $a = 0$ бўлади. Шунинг учун ϵ бирор мусбат сон бўлса, $\delta = \frac{\epsilon}{r}$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда $|\xi| < \frac{\epsilon}{r}$ бўлган

да $|q(t, \xi)| \leq r |\xi| e^{-\alpha t} < r \cdot \frac{\epsilon}{r} e^{-\alpha t} < \epsilon$, чунки $e^{-\alpha t} < 1$, $\alpha > 0$, $t > 0$.

Демак, чизикли бир жинсли мухтор система учун $a = 0$ нукта Ляпунов маъносида тургун. Бундан ташқари, (11.10) тенгсизликка кўра σ деб ихтиёрй кичик мусбат сонни олинса ҳам $\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t, \xi)| = 0$

тенгликка эгамиз. Демак, $a = 0$ нукта Ляпунов маъносида асимптотик тургун.

n -тартибли чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламанинг тривиал ечимини ҳам тургуниликка текшириш мумкин. Бунинг учун тенгламани каноник ўзгарувчилар ёрдамида мухтор системага келтирилади. Сўнгра координата бошидан иборат бўлган $((x_1, \dots, x_n)$ лар фазосида) мувозанат ҳолатининг тургунилиги текширилади. Бунда $\mu_j < 0, j=1, 2, \dots, m$ тенгсизликлар ўринли бўлганда яна (11.10) тенгсизлиги ўринли бўлади ва асимптотик тургунилик келиб чиқади.

Юқорида айтганимиздек, агар A матрицанинг бирор хос сонининг ҳақиқий қисми нолга тенг бўлиб, қолгандариники маъфий бўлса, у ҳолда мувозанат ҳолат Ляпунов маъносидеда тургун бўлади. Аммо у асимптотик тургун бўлмайди. Агар бирор хос соннинг ҳақиқий қисми мусбат бўлса, мувозанат ҳолат тургун бўла олмайди. Шу муносабат билан нотургун мувозанат ҳолатининг таърифини келтирамиз.

11.3-таъриф. Агарда шундай мусбат сон μ мавжуд бўлсаки, (10.3) тенгламанинг ҳар бир $\varphi(t, \xi)$ ечимига мос траекторияси ушбу $|\xi - a| < \mu$ шарнинг $\xi, \xi \neq a$ нуқтасидан бошланиб, шу шардан албатта чиқса ва унга бошқа қайтиб келмаса (бошқача айтганда, шундай мусбат сон $T = T(\xi)$ топилсаки, $t = T(\xi)$ бўлганда $\varphi(t, \xi)$ ечим аниқланган ва t нинг шу ечим аниқланган $t > T$ қийматларида $|\varphi(t, \xi) - a| \geq \mu$ тенгсизликни қаноатлантирса), у ҳолда (10.3) вектор-тенгламанинг мувозанат ҳолати a бутунлай нотургун дейилади.

Нотургун мувозанат ҳолати, умуман айтганда, бутунлай нотургун бўла олмайди.

Бутунлай нотургун мувозанат ҳолатига мисол қилиб, нотургун туғун нуқтани, нотургун фокус нуқтани, нотургун туғилма туғун ва фокус нуқталарни (ҳаммаси текширилади) келтириш мумкин.

2. Мухтор система ечимининг группалаш хоссаси.

11.1-лема. (10.3) вектор-тенгламанинг $0, \xi$ бошланғич қийматларга эга бўлган $\varphi(t, \xi)$ ечими учун ушбу

$$\varphi(t, \varphi(s, \xi)) \equiv \varphi(s + t, \xi) \quad (11.12)$$

айният ўринли бўлади (бу ерда t, s — эркин ўзгарувчилар).

(11.12) айният билан ифодаланган хосса мухтор система ечимининг группалаш хоссаси деб юритилади.

Исбот. Маълумки, ξ тайин нуқта. Энди s ни ҳам тайинлаб,

$$\eta = \varphi(s, \xi) \quad (11.13)$$

деб белгилаймиз. (10.3) вектор-тенгламанинг $\varphi^{(1)}(t) = \varphi(t, \eta)$ ечимини кўрайлик. Леммада кўрсатилганидек, $\varphi(t, \xi)$ вектор-функция (10.3) тенгламанинг ечими. Шунинг учун (10.3) тенглама мухтор бўлганидан $\varphi(t + s, \xi)$ функция ҳам ечим бўлади. Уни $\varphi^{(2)}(t)$ деб белгилаймиз. Шундай қилиб, (10.3) тенгламанинг иккига $\varphi^{(1)}(t)$ ва $\varphi^{(2)}(t)$ ечимларига эгамиз. Бу ечимлар умумий бошланғич қийматларга эга, чунки

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(0) &= \varphi(0, \eta) = \eta, \\ \varphi^{(2)}(0) &= \varphi(0 + s, \xi) = \eta \end{aligned}$$

тенгликлар ўринли. Демак, ягоналик теоремасига асосан $\varphi^{(1)}(t) \equiv \varphi^{(2)}(t)$ ва шу билан бирга (11.12) айният ўринли. 11.1-лемма исбот этилди.

3. Мусбат аниқланган квадратик кўринишнинг баъзи хоссалари. n ўлчовли фазонинг ўзгарувчи векторини $x = (x_1, \dots, x_n)$ дейлик. Шу x векторнинг квадратик кўриниши деб ушбу

$$W(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_i x_j \quad (\omega_{ij} = \omega_{ji} \text{ — ҳақиқий сонлар})$$

формула билан аниқланган $W(x)$ функцияга айтилади. Шубҳасиз, $W(0) = 0$ тенглик ўринли. $x \neq 0$ бўлганда квадратик кўриниш аниқ мусбат ёки аниқ манфий ишорали бўлиш ҳоллари мумкин.

Агар ихтиёрий $x \neq 0$ учун $W(x) > 0$ бўлса, квадратик кўриниш $W(x)$ *мусбат аниқланган* дейилади. Мусбат аниқланган квадратик кўринишнинг кейинги мулоҳазаларда зарур бўлган хоссасини келтирамиз.

11.2- л е м м а. *Ихтиёрий мусбат аниқланган квадратик кўриниш учун шундай иккита мусбат μ ва ξ сонларни топиш мумкинки, исалган x вектор учун ушбу*

$$\mu |x|^2 \leq W(x) \leq \nu |x|^2 \quad (11.14)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. (11.14) тенгсизликларни исботлаш учун

$$|\xi| = 1 \quad (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1) \quad (11.15)$$

бирлик сферани олиб, $W(\xi)$ функцияни шу сферада кўрамиз. $W(\xi)$ функция (11.15) сферада узлуксиз ва мусбат аниқланган, сферанинг ўзи эса ёпиқ чегараланган тўплам. Шунинг учун $W(\xi)$ функция (11.15) сферада ўзининг энг кичик μ ва энг катта ν кийматларига эришади. Сферанинг барча ξ векторлари нолдан фарқли бўлгани учун μ ва ν сонлар мусбатдир. Шу μ ва ν сонлар (11.14) тенгсизлик бажарилиши учун изланган сонлар эканини исбот этамиз. Юқоридаги мулоҳазалардан

$$\mu \leq W(\xi) \leq \nu, \quad \xi \in \{\xi: |\xi| = 1\} \quad (11.16)$$

тенгсизликлар келиб чиқади, унда $\mu > 0, \nu > 0$. Шу сферанинг вектори ёрдамида $x = \lambda \xi$ векторни тузамиз, унда λ — ихтиёрий ҳақиқий сон. Равшанки, $|x| = |\lambda \xi| = |\lambda| |\xi| = |\lambda|$. Энди (11.16) тенгсизликларни λ^2 га кўпайтирамиз:

$$\mu \lambda^2 \leq \lambda^2 W(\xi) \leq \lambda^2 \nu,$$

бундан

$$\mu |x|^2 \leq \lambda^2 W\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \nu |x|^2$$

ёки $W\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2} W(x)$ тенглик ўринли бўлганидан изланган

(11.14) тенгсизликлар келиб чиқади. Шундай қилиб, (11.14) тенгсизликлар исбот этилди.

4. Ляпунов функцияси квадратик кўриниш сифатида. Эслатиб ўтамизки, агар очик D_n тўпلامда бирор дифференциалланувчи $F(x_1, \dots, x_n)$ функция берилган бўлса, бу функциядан (10.2) системага кўра t бўйича ҳосила қуйидагича аникланади: (10.2) системанинг $\varphi(t_0) = x^0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини $\varphi(t)$ дейлик. (10.2) системага кўра $F_{(10.2)}(x)$ ҳосила

$$\dot{F}_{(10.2)}(x) = \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) \Big|_{t=t_0} \quad \text{ёки} \quad \dot{F}_{(10.2)}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

формула билан аникланади.

Энди

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11.17)$$

чизикли бир жинсли нормал система берилган бўлсин.

11.3- лемма. Агар (11.17) система матрицасининг барча ҳос сонлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда шундай мусбат аниқланган квадратик кўриниш $W(x)$ мавжудки, бу кўринишнинг (11.17) системага кўра t бўйича ҳосиласи ушбу

$$\dot{W}_{(11.17)}(x) \leq -\beta W(x) \quad (11.18)$$

тенгсизликни қаноатлантиради, унда x -ихтиёрий вектор, β -мусбат ва x га боғлиқ бўлмаган ҳақиқий сон.

Исбот. Лемманинг исботи тегишли шартларни қаноатлантирадиган кўринишни қуришдан иборат. (11.17) системанинг $0, \xi$ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимини $\varphi(t, \xi)$ дейлик. У ҳолда 11.5-теоремадан маълумки, $\varphi(t, \xi)$ ни бундай ёзса бўлади:

$$\varphi(t, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i \psi^{(i)}(t), \quad (11.19)$$

бунда $\psi^{(i)}(t)$ вектор 11.5-теоремада қурилган вектор.

Ушбу

$$\int_0^{\infty} \|\varphi(\tau, \xi)\|^2 d\tau \quad (11.20)$$

ҳосмас интегрални кўрайлик. Унинг яқинлашувчи эканини кўрсатамиз. (11.19) муносабатдан фойдаланиб, (11.20) интегрални

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j \int_0^{\infty} (\psi_i(\tau), \psi_j(\tau)) d\tau \quad (11.21)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ҳар бир $\psi_k(\tau)$, $k=1, 2, \dots, n$ функция 11.5-теоремага кўра $\|\psi_k(\tau)\| \leq \sqrt{n} Re^{-a\tau}$ ($t \geq 0$) тенгсизликни қа-

ноатлантиргани учун (11.21) ифодадаги ҳар бир ҳосмас интеграл яқинлашувчи. Демак, (11.20) ҳосмас интеграл ҳам яқинлашувчи. Уни $W(\xi)$ билан белгилайлик:

$$W(\xi) = \int_0^1 |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau. \quad (11.22)$$

$W(\xi)$ функция (11.21) га кўра $\xi_1, \dots, \xi_n$ ўзгарувчиларнинг квадратик кўринишидир. Шу квадратик кўриниш мусбат аниқланган, чунки (11.22) формулада интеграл остидаги ифода $\xi \neq 0$ учун мусбат. Демак, $W(\xi) > 0$. Энди ушбу $\dot{W}_{(11.22)}(\xi)$ ҳосилани ҳисоблаймиз. Аввал $W(\psi(t, \xi))$ функцияни кўрамиз. У қуйидагича аниқланади: группалаш хоссасига кўра

$$W(\psi(t, \xi)) = \int_0^1 |\psi(t + \tau, \xi)|^2 d\tau = \int_0^1 |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau.$$

Равшанки, $W(\psi(t, \xi))|_{t=0} = W(\psi(0, \xi)) = W(\xi)$. Шунинг учун

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(11.22)}(\xi) &= \frac{d}{dt} W(\psi(t, \xi))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_0^1 |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau|_{t=0} = \\ &= -|\psi(t, \xi)|^2|_{t=0} = -|\xi|^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$\dot{W}_{(11.22)}(\xi) = -|\xi|^2.$$

(11.14) тенгсизликлардан иккинчисини оламиз:

$$W(\xi) \leq v|\xi|^2,$$

бундан $-\frac{1}{v}W(\xi) \geq -|\xi|^2$. Шундай қилиб,

$$\dot{W}_{(11.18)}(\xi) \leq -\frac{1}{v}W(\xi).$$

Демак, (11.18) тенгсизлик $W(\xi)$ олдида $\beta = \frac{1}{v}$ коэффициент билан бажарилади.

5. Ляпунов — Пуанкаре теоремаси. Биз қуйида келтирадиган теорема мувозанат ҳолатининг асимптотик тургун бўлиши ҳақида бўлиб, у етарли шартни беради. Кўпинча бу теоремада тавсия этиладиган методни *биринчи яқинлашиш* бўйича турғунлик ёки *Ляпунов — Пуанкаренинг биринчи* усули деб юритилади. Мазкур усул мухтор системалар учун баён этилади.

Бизга (10.2) мухтор система берилган бўлиб, $a = (a_1, \dots, a_n)$ унинг мувозанат нуктаси бўлсин. Ушбу

$$x_i = a_i + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.23)$$

алмаштириш ёрдамида янги $y_1, y_2, \dots, y_n$ номатълум функцияларни киритамиз. Равшанки, $x_i = y_i$. Энди (10.2) системанинг ўнг томонида ҳам (11.23) алмаштириш бажариб, ҳар бир $f_i(x_1, \dots, x_n)$ функцияни a нукта атрофида Тейлор каторига ёйсақ, қуйидагига эга бўламиз:

$$f_i(a+y) = f_i(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} y_j + R_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (11.24)$$

бунда R_i — янги $y_1, \dots, y_n$ номатълумларга нисбатан иккинчи тартибли кичик миқдорлар. Фараз бўйича, a нукта мувозанат нуктаси бўлгани учун $f_i(a) = 0$. Шунинг учун $x_i = y_i = f_i(a+y)$ эканини ҳисобга олиб (10.2) системани қуйидаги кўринишда ёзамиз (янги номатълум функциялар билан):

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} y_j + R_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Агар

$$a = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \quad (11.25)$$

деб белгиласак, охириги системани бундай ёзиш мумкин:

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + R_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (11.26)$$

Агар (11.26) системада қолдиқ ҳадларни (R_i ларни) тушириб қолдирсак, ҳосил бўлган ушбу

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11.27)$$

система биринчи яқинлашиш системаси дейилади.

11.6-теорема (Ляпунов — Пуанкаре теоремаси). Агар $A = (a_{ij})$ матрицанинг ((11.25) га қаранг) барча ҳос сонлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, y ҳолда (10.2) системанинг мувозанат ҳолати a асимптотик турғун бўлади; тўлароқ айтганда, шундай сон $\sigma > 0$ мавжудки, $|\xi - a| < \sigma$ бўлганда ушбу

$$|y(t, \xi) - a| \leq r |\xi - a| e^{-\sigma t} \quad (11.28)$$

(бунда r ва $\sigma - \xi$ га боғлиқ бўлмаган мусбат сонлар) тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Мувозанат ҳолати координата боши билан устма-уст тушади, яъни $a=0$ десак, умумийликка зид бўлмайди. Бунга сабаб, $y=z+a$ алмаштириш $x=a$ мувозанат ҳолатига $z=0$ мувозанат ҳолатини мос кўяди ва ушбу

$$\dot{z}_i = f(z+a) = f_i(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(a)}{\partial z_j} z_j + R_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

система ҳосил бўлади. Бундан A матрица ўзгармагани кўриниб турибди. Шундай қилиб (10.2) системанинг мувозанат ҳолати a учун

$a=0$ деб ҳисоблаймиз. Демак, (11.23) алмаштиришдан $x_i=y_i$, $i=1,2,\dots,n$ келиб чиқади.

Шу сабабли (11.26) система

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + R_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (11.29)$$

кўринишда ёзилади. Кейинги мулоҳазаларни назарда тутиб, R_i қолдикнинг кўринишини ҳам ёзиб қўяйлик:

$$R_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(0x)}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k.$$

$W(x)$ энди (11.27) чизикли бир жинсли нормал системанинг Ляпунов функцияси бўлсин. Шу функциядан t бўйича (11.29) системага кўра ҳосила оламиз:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(11.29)}(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} R_i = \\ &= \dot{W}_{(11.27)}(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} R_i. \end{aligned}$$

$W(x)$ функция (11.18) тенгсизлиқни қаноатлантиради. Шунинг учун ушбуга эгамиз:

$$\dot{W}_{(11.29)}(x) \leq -\beta W(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} R_i.$$

Энди (11.14) тенгсизликка кўра, шундай кичик $b > 0$ мавжудки,

$$W(x) \leq b \quad (11.30)$$

тенгсизлиқни қаноатлантирадиган вектор $x \in D_n$. Шу $W(x) \leq b$ тенгсизлик D_n тўпلامда эллипсоидни тасвирлайди, бу аналитик геометриядан маълум. Юқорида R_i учун ёзилган формула бўйича R_i функция квадратик кўринишдан иборат. Яна (11.14) тенгсизликка кўра

$$|R_i| \leq k|x|^2 \leq \frac{k}{\mu} W(x), \quad k = \text{const}$$

ва $|x_i| \leq \sqrt{\frac{1}{\mu} W(x)}$ тенгсизликка асосан чизикли кўринишдан иборат бўлган $\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}$ учун ушбу

$$\left| \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \right| \leq l \sqrt{W(x)}, \quad l = \text{const}$$

тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, шундай мусбат q сон мавжудки, (11.30) тенгсизлик бажарилганда қуйидагига эгамиз:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} R_i \leq q(W(x))^{3/2}$$

Шундай мусбат c сонни танлаймизки, ушбу тенгсизликлар ўринли бўлсин:

$$c \leq b, \quad q \sqrt{c} \leq \frac{\beta}{2}.$$

Шу белгилар ва юқоридаги баҳолар ёрдамида шунини топамиз:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(11.29)}(x) &\leq -\beta W(x) + q|W(x)|^{3/2} = W(x)|-\beta + q\sqrt{W(x)}| \leq \\ &\leq W(x)|-\beta + q\sqrt{c}| \leq W(x) \left[-\beta + \frac{\beta}{2}\right] = -\frac{\beta}{2} W(x), \end{aligned}$$

яъни агар

$$W(x) \leq c \quad (11.31)$$

тенгсизлик бажарилса, қуйидаги

$$\dot{W}_{(11.29)}(x) \leq -\frac{\beta}{2} W(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $\alpha = \frac{\beta}{4}$, демак, (11.31) тенгсизлик ўринли бўлганда

$$\dot{W}_{(11.29)}(x) \leq -2\alpha W(x)$$

тенгсизлик ҳам бажарилади.

Энди ξ (11.31) эллипсоиднинг ихтиёрий *ички* нуқтаси бўлсин, яъни ξ нуқта учун

$$W(\xi) < c \quad (11.32)$$

тенгсизлик бажарилади.

(11.29) системанинг 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимини $\varphi(t, \xi)$ ва $W(t, \xi)$ ни эса $\omega(t)$ деб белгилаймиз. Бу $\omega(t)$ функция t нинг $t \geq 0$ тенгсизлигини қаноатлантирадиган ва $\varphi(t, \xi)$ ечим аниқланган барча қийматларида аниқланган бўлиб,

$$\omega(t) \leq c \quad (11.33)$$

тенгсизлик бажарилганда, $\omega(t)$ нинг ҳосиласи учун ушбу

$$\dot{\omega}(t) \leq -2\alpha\omega(t) \quad (11.34)$$

тенгсизлик ҳам бажарилади. Ҳозир $\varphi(t, \xi)$ ечим барча $t \geq 0$ учун аниқланганини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $\varphi(t, \xi)$ функция t нинг барча мусбат қийматларида аниқланган бўлмасин. У ҳолда $x = \varphi(t, \xi)$ нуқта t нинг ортиб бориши билан (11.31) эллипсоиддан албатта чикиб кетади ([1] 24-§. Б бандга қараң). Тегинли нуқта (11.31) эллипсоиднинг чегарасига биринчи марта келган моментини t' , $t' > 0$ дейлик. Шунга кўра $0 \leq t \leq t'$ оралиқда $\varphi(t, \xi)$ нуқта (11.31) эллипсоидга тегинли ва (11.34) тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $\omega(t) \leq 0$ чиқади. Демак, $c = \omega(t') \leq \omega(0) < c$ га эгамиз. Бу эса зиддият. Шундай қилиб, $\omega(t)$ функция t нинг мусбат бўлган қийматларида аниқланган. Агар $\xi \neq 0$ бўлса, $\omega(t) > 0$ бўлади, чунки $W(\varphi(t, \xi)) > 0$, агар $\varphi(t, \xi) \neq 0$ бўлса, маълумки, $\varphi(0, \xi) = \xi$ ($t=0$ да), $\varphi(t, \xi) \neq \xi$, $t \neq 0$. Демак, фақат $\xi = 0$ бўлгандагина

$W(\varphi(t, \xi)) = 0$ бўлиши мумкин ва $\xi \neq 0$ да $\omega(t) > 0$. Шунинг учун қуйидаги содда ҳисоблашларни амалга оширамыз.

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \leq -2\alpha; \quad \int_0^t \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} dt \leq -2\alpha t, \quad t \geq 0,$$

$$\ln \omega(t) - \ln \omega(0) \leq -2\alpha t$$

ёки

$$\ln W(\varphi(\xi)) - \ln W(\xi) \leq -2\alpha t$$

ёки

$$W(\varphi(t, \xi)) \leq W(\xi) e^{-2\alpha t}.$$

Энди (11.14) дан $x = \varphi(t, \xi)$ бўлганда $\mu |\varphi(t, \xi)|^2 \leq W(\varphi(t, \xi))$ ва $x = \xi$ бўлганда $W(\xi) \leq \nu |\xi|^2$ эканлиги чиқади. Шунга кўра $W(\xi) < c$ бўлганда қуйидагига эгамиз:

$$\mu |\varphi(t, \xi)|^2 \leq W(\varphi(t, \xi)) \leq W(\xi) e^{-2\alpha t} \leq \nu |\xi|^2 e^{-2\alpha t}$$

ёки

$$|\varphi(t, \xi)|^2 \leq \frac{\nu}{\mu} |\xi|^2 e^{-2\alpha t} \quad (11.35)$$

Яна (11.14) тенгсизликдан

$$|\xi| < \sigma = \sqrt[\nu]{c} \quad (11.36)$$

муносабат ўринли бўлганда (11.32) тенгсизлик келиб чиқади. Шундай қилиб, агар (11.36) муносабат ўринли бўлса, у ҳолда (11.35) тенгсизлик ўринли бўлади. Шу (11.35) нинг икки томонидан квадрат илдиз олсак,

$$|\varphi(t, \xi)| \leq \sqrt[\nu]{\frac{\nu}{\mu}} |\xi| e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (11.28)$$

Шу билан $a=0$, $r < \sqrt[\nu]{\frac{\nu}{\mu}}$ учун (11.28) тенгсизлик ва демак, Ляпунов - Пуанкаре теоремаси исбот бўлди.

11.7-теорема. Агар $A = \left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right)$ матрицанинг барча хос сонлари мусбат ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда (10.2) системанинг мувозанат ҳолати а бутунлай турғунмас бўлади.

Исбот. Аввалги теоремадаги каби $a=0$ деймиз. (10.2) система билан бирга ушбу

$$\dot{x} = -f(x) \quad (11.37)$$

вектор-тенгламани кўрамыз. Бу тенглама учун ҳам $a=0$ мувозанат ҳолати бўлади. 11.6-теоремадаги мулоҳазаларга кўра шу (11.37) тенглама учун ҳам Ляпунов функцияси мавжуд ва $W(x) \leq c$ тенгсизлик бажарилганда

$$\dot{W}_{(11.37)}(x) \leq -2\alpha W(x)$$

муносабат ўрилин. Бундан:

$$\dot{W}_{(t, \xi)}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} (-f_i(x)) \leq -2\alpha W(x)$$

ёки

$$\dot{W}_{(t, \xi)}(x) \geq 2\alpha W(x) \quad (\text{агар } W(x) \leq c \text{ бўлса}).$$

Энди ξ (11.31) эллипсоиднинг ички нуқтаси бўлсин. $\omega(t) = W(\varphi(t, \xi))$ дейлик. Бу ҳолда $\omega(t)$ функция

$$\dot{\omega}(t) \geq 2\alpha \omega(t) \quad (\text{агар } \omega(t) \leq c \text{ бўлса}) \quad (11.38)$$

тенгсизлиكنи қаноатлантиради. $\xi \neq 0$ бўлганда $\omega(x) > 0$. Шунинг учун қуйидаги ҳисоблашларни бажариш мумкин:

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \geq 2\alpha, \quad \int_t^{\omega(t)} \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} dt \geq 2\alpha t, \quad t \geq 0,$$

$$\omega(t) \geq \omega(0)e^{2\alpha t}, \quad W(\varphi(t, \xi)) \geq W(\xi)e^{2\alpha t}.$$

Охириги тенгсизликдан кўринадики, t ўсини билан $x = \varphi(t, \xi)$ нуқта (11.31) эллипсоиддан албатта чиқиб кетади. Шу нуқта эллипсоидга бошқа қайтиб келмаслигини исботлаймиз. Тескарисини фараз этамиз. Шундай мусбат $t' > 0$ топиладики, $\omega(t') = c$ ва етарли кичик мусбат M лар учун $\omega(t' + M) < c$ муносабатлар ўрилин бўлсин. Лекин бу муносабатлардан $\omega(t) \leq 0$ экани келиб чиқади. Топилган тенгсизлик (11.38) га зид. ((11.38) тенгсизлик $t = t'$ да тўғри, чунки $\omega(t') = c$). Шундай қилиб, (11.31) эллипсоиднинг ички $x = \xi$ нуқтасидан бошланадиган траектория $x = \varphi(t, \xi)$ вақти билан шу эллипсоиддан албатта чиқиб, сўнгра унга бошқа қайтиб келмайди.

Ушбу $W(x) \leq v|x|^2$ ва $|\xi| < \sigma = \sqrt{\frac{c}{\lambda}}$ тенгсизликлардан $W(\xi) < c$ келиб чиқади. Демак, $|\xi| < \sigma$ шар $W(x) \leq c$ эллипсоид ичида ётиши кўрсатилади. Шундай қилиб, бутунлай нотургунлик таърифига кўра теореманинг исботи яқунланди.

11.8- теорема. Агар $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \end{pmatrix}$ матрица ҳос сонлари ичида

қайси биттаси мусбат ҳақиқий қисмга эга бўлса, у ҳолда мувозанат ҳолати нотургун бўлиди.

Исботи юқоридаги икки теореманинг исботига ўхшаш.

Мисол. Математик маятник теңдамасини, яъни ушбу

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \quad (11.1)$$

теңламани ёки каноник уларувчиларга

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\frac{g}{l} \sin \varphi_1 \end{cases} \quad (11.2)$$

системани қурайлик. Бу муҳтор системанинг мувозанат ҳолатлари $(0, 0)$, $(k\pi, 0)$ (k бутун сон) нуқталардан иборат бўлиб, *саноқли тўғламни* ташкил этади. k нинг жуфт қийматларига маятникнинг қулич ҳолати, k нинг тоқ қийматларига эса юқори ҳолати

мөс кезади (61- қизма). Бу нукталарнинг тургун ёки нотургунлигини текшириш учун факат иккитасини, яъни $a^{(1)} = (0,0)$ ва $a^{(2)} = (\pi, 0)$ нукталарни текшириш старли. Аввал $a^{(1)} = (0,0)$ нуктани отайлик. Мөс биринчи яқинлашниш системаси

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\frac{g}{l} \varphi_1 \end{cases} \quad (11.2')$$

кўринишда бўлиб, $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}$. Бу матрицанинг хос сонлари $\lambda_1 =$

$$= i\sqrt{\frac{g}{l}}, \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}}. \text{ Кўрниадики, хос сонларнинг хақикий қисмлари нолга}$$

тенг. Бундан $(0,0)$ нукта (11.2) система учун Ляпунов маъносида асимптотик тургун эмас. Аммо маятникнинг кичик тебранишлари учун $\sin \varphi_1 \sim \varphi_1$ ва бу ҳолда $(0,0)$ нукта

тургун бўлади, чунки (11.2') учун $\varphi_1(t) = -A\left(\sqrt{\frac{l}{g}} \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha\right), \quad \varphi_2(t) =$

$$= A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha\right) \quad (A > 0, \alpha \text{ — ихтиёрий ўзгармаслар}) \text{ ва модуль } |\varphi(t)|$$

чегараланган. Шунга ўхшаш $a^{(2)} = (\pi, 0)$ нуктага мөс биринчи яқинлашниш системаси

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{g}{l} \varphi_1 \end{cases}$$

$$\text{бўлиб, } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}. \text{ Хос сонлар } \lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Хос сонлардан бири мусбат бўлгани учун $(\pi, 0)$ нукта (11.2) система учун Ляпунов маъносида нотургун (11.8-теоремага қаран).

6. Ечимнинг тургунлиги. Бизга (10.2) мухтор система берилган бўлиб, $\varphi(t, \xi)$ функция шу системанинг $\varphi(0, \xi) = \xi$ шартни қаноатлантирадиган ечими бўлсин.

11.4-таъриф. Агар ихтиёрий $\epsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжуд бўлсаки, 1) $|\eta - \xi| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи η лар учун $\varphi(t, \eta)$ ечим барча $t \geq 0$ лар учун аниқланган; 2) $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \eta)| < \epsilon$ тенгсизлик барча $t \geq 0$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда (10.2) системанинг $\varphi(t, \xi)$ ечими Ляпунов маъносида тургун дейилади. Акс ҳолда тегишли ечим нотургун дейилади.

Агар 11.4-таърифдаги 1) ва 2) шартлар билан бирга яна ушбу шарт бажарилса, яъни 3) шундай кичик $\sigma > 0, \sigma < \delta$ топилсаки, $|\eta - \xi| < \sigma$ бўлганда ушбу $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \eta)| = 0$ муносабат

ўринли бўлса, у ҳолда (10.2) системанинг $\varphi(t, \xi)$ ечими асимптотик тургун дейилади. Нотургун ечимлар учун ушбу

$$|\varphi_1(t, \xi) - \varphi_1(t, \eta)| < \frac{k_1 \epsilon}{\sqrt{n}}, \dots, |\varphi_n(t, \xi) - \varphi_n(t, \eta)| < \frac{k_n \epsilon}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{i=1}^n k_i^2 = n, \quad k_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

тенгсизликлардан камиди биттаси бажарилмайди. Агар бу тенгсизликлар бир вақтда бажарилмаса, (10.2) системанинг $\varphi(t, \xi)$ ечими *бутунлай нотурғун* дейилади.

Ечимнинг турғунлигини текшириш масаласи мухтормас система мувозанат ҳолатининг турғунлигини текширишга келтирилиши мумкин. Ҳақиқатан, (10.2) системанинг бирор ечимини олайлик. Уша системада

$$y = x - \varphi(t, \xi) \quad (11.39)$$

алмаштиришни бажарамиз. Равшанки, (11.39) дан $x = \varphi(t, \xi)$ бўлганда $y \equiv 0$ келиб чиқади. Алмаштириш (10.2) системани қуйидаги

$$\dot{y} = f(y + \varphi(t, \xi)) - f(\varphi(t, \xi)) \quad (11.40)$$

тенгламага олиб келади. Бу вектор-тенглама учун $y = 0$ ечим (мувозанат ҳолати). Фақат эслатиб ўтамизки, биз мувозанат ҳолати гушунчасини мухтор системалар учун киритган эдик. (11.40) тенглама эса мухтор эмас. Аммо

$$\dot{y} = F(t, y) \quad (11.41)$$

кўринишдаги тенгламалар учун ҳам y нинг $F(t, y)$ функцияни полга айлантирадиган қийматлари мувозанат ҳолати дейилади. Агар t ни параметр деб қаралса, ечимнинг графигини $(y_1, \dots, y_n)$ ўзгарувчилар фазосида ўрганилади. Бунда тегишли ечимнинг графиги (11.41) тенгламанинг *траекторияси*, $(y_1, \dots, y_n)$ ўзгарувчилар фазоси R^n эса *ҳолатлар фазоси* деб юритилади.

7. Мухтормас система ечимининг турғунлиги. Ечимни давом эттириш масаласи. Бизга (11.41) вектор-тенглама берилган бўлиб, $F(t, y)$ функция D_{n+1} соҳада ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремалардан бирортасининг шартларини қаноатлантирсин дейлик.

11.5-т а ў р и ф. Агар $t = t_0$ да бошланғич $y_i(t_0) = y_i^0, i = 1, 2, \dots, n$ қийматлар берилган бўлиб, (11.41) тенгламанинг бирор $y = \varphi(t)$ ($0 \leq t < \infty$) ечими учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $\delta(\varepsilon, t_0)$ топилсаки, (11.41) тенгламанинг бошқа ихтиёрий $y = \psi(t), t \geq t_0$ ечими учун

$$|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta$$

тенгсизлик бажарилганда барча $t \geq t_0$ ларда

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, y ҳолда $y = \varphi(t)$ ечим *Ляпунов маъносида турғун* дейилади. Агар $\delta > 0$ сон t_0 га боғлиқ бўлмаса, $y = \varphi(t)$ ечим *текис турғун* дейилади.

11.6-т а ў р и ф. Агар $y = \varphi(t)$ ечим турғун бўлиб, ундан ташқари шундай $\delta_0 > 0$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий бошқа $y = \psi(t)$ ечим учун

$$|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta_0$$

тенгсизлик бажарилганда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$$

бўлса, $y = \varphi(t)$ ечим Ляпунов маъносида асимптотик турғун дейилади. Агар $y = \varphi(t)$ ечим турғун бўлмаса, y нотурғун дейилади.

(11.41) системанинг $y = \varphi(t)$ ечимининг турғунлигини текшириш масаласи бирор бошқа системанинг тривиал ечимининг турғунлигини текширишга келтирилади. Жумладан, (10.2) системанинг $\varphi(t, \xi)$ ечимини текшириш (11.40) тенгламанинг $y = 0$ ечимини текширишга (11.39) алмаштириш ёрдамида келтирилади. Шу (11.39) алмаштириш (11.41) тенгламага ҳам қўлланилиши мумкин.

1-бобда ечимни давом эттириш ва давомсиз ечимлар ҳақидаги масала биринчи тартибли дифференциал тенглама учун кўрилган эди. Нормал (мухтормас ёки мухтор) системалар учун ҳам ечимни давом эттириш тушунчаси худди шунга ўхшаш киритилади. Чунончи, $y = \varphi(t)$ функция (11.41) тенгламанинг I , интервалда аниқланган, $y = \psi(t)$ функция эса ўша тенгламанинг I_s интервалда аниқланган ечими бўлсин. Агар $I_s \supset I$, бўлиб, $y = \psi(t)$ ечим I , интервалда $y = \varphi(t)$ ечим билан устма-уст тушса, y ҳолда $y = \psi(t)$ ечим $y = \varphi(t)$ ечимнинг давоми дейилади. Агар $y = \psi(t)$, $t \in I_s$ ечим учун унинг давомидан иборат бўлган ҳеч қандай ечим мавжуд бўлмаса, y ҳолда шу $y = \psi(t)$ ечим давомсиз дейилади.

Хар бир ечим ягона давомсиз ечимгача давом эттирилиши мумкин. Бу тасдиқнинг исботи 1-бобда битта тенглама учун олиб борилган исботдан фарқ қилмагани учун биз уни келтириб ўтирмаймиз. Аммо куйида ечимни давом эттириш мумкин бўлишининг етарли шартларидан бирини берувчи лемма келтирамыз.

11.4-лемма (Филиппов леммаси). Бизга (11.41) вектор-тенглама берилган бўлиб, унда $t \in T = T_1, T_2$ (ихтиёрий чекли интервал), $y \in R^n$ ва

$$(y, F(t, y)) \leq C(1 + |y|^2), \quad 0 \leq C = \text{const} \quad (\Phi)$$

бўлиб, $y = \varphi(t, t_0, x^0) = \varphi(t)$ функция (11.41) тенгламанинг ихтиёрий тайинланган t_0 , y^0 бошланғич қийматларга эга бўлган ечими бўлса, $y = \varphi(t)$ ечим бутун T интервалда аниқланган бўлади.

Исбот. (Ф) тенгсизлик A . Ф. Филиппов тенгсизлиги деб юритилади, унда $(y, F(t, y))$ ифода y ва $F(t, y)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини англатади. Кўрсатиш кийин эмаски, агар $|F(t, y)| \leq k(1 + |y|)$, $k > 0 = \text{const}$ тенгсизлик бажарилса, (Ф) тенгсизлик ҳам $1 + k^2 = C$ константа билан бажарилади. Энди лемманинг бевосита исботига ўтамиз. $\psi(t) = 1 + |\varphi(t)|^2$, $\psi(t_0) = 1 + |x^0|^2 = A$ бўлсин. Содда мулоҳазалар ёрдамида куйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[1 + \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(t) \right] = \sum_{i=1}^n 2\varphi_i(t) \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = 2(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = \\ &= 2(\varphi(t), F(t, \varphi(t))) \leq 2C(1 + |\varphi(t)|^2) = 2C\psi(t), \end{aligned}$$

яъни ушбу

$$\frac{d\psi(t)}{dt} \leq 2C\psi(t)$$

дифференциал тенгсизликка эга бўламиз. Уни аввал t_0 дан $t(t_0 < t \leq T_2)$ гача интеграллаймиз: $\psi(t) \leq Ae^{2C(t - t_0)} \leq Ae^{2C(T_2 - t_0)}$, сўнггра t дан $t_0(t_1 \leq t < t_0)$ гача интеграллаймиз: $\psi(t) \geq Ae^{2C(t - t_0)} \geq$

$\geq Ae^{2C(T_1-t_0)}$. Шундай қилиб, $Ae^{2C(T_1-t_0)} \leq \psi(t) \leq Ae^{2C(T_2-t_0)}$ тенгсизликларга эгамиз. Бундан $\psi(t)$ нинг ифодасига кўра $1 + |\psi(t)|^2$ функция ёки $|\psi(t)|^2$ функция, ниҳоят, $|\psi(t)|$ модул чегаралангани келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

Э с л а т м а. Филиппов леммаси $T = (T_1, T_2)$ интервал ихтиёрий бўлганда ҳам ўринли.

Куйида мухтормас система ечимининг турғунлигини текширишга оид мисол кўрамиз.

М и с о л. Ушбу
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ln(1 + 2t - 2x_1) + 3x_2 + 3t^2 + 1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2tx_1 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

системанинг $x_1 = t$, $x_2 = -t^2$ ечими турғунликка текширилсин. Бунинг учун (11.39) алмаштиришни бажарамиз:

$$y_1 = x_1 - t, \quad y_2 = x_2 + t^2.$$

Натижада куйидаги

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \ln(1 - 2y_1) + 3y_2 & (=f_1), \\ \dot{y}_2 = y_1^2 - 2y_1 - y_2 & (=f_2) \end{cases}$$

мухтор системага келамиз. Содада ҳисоблашлар кўрсатадиги, бу системанинг $(0,0)$ мувозанат нуктасида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{(0,0)} = -2, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{(0,0)} = 3, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{(0,0)} = 0, \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{(0,0)} = -1. \end{aligned}$$

А матрица $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ кўринишда бўлиб, унинг ҳос сонлари $\lambda_1 = -1 < 0$,

$\lambda_2 = -2 < 0$ лардан иборат. Демак, Ляпунов — Пуанкаре теоремасига кўра $(0,0)$ нукта асимптотик турғун бўлади. Бундан берилган системанинг $x_1 = t$, $x_2 = -t^2$ ечими ҳам асимптотик турғун экани келиб чиқади.

11.4-§. ИҚТИСОДИЙ ЖАРАЁНЛАРНИНГ ИККИ СЕКТОРЛИ МОДЕЛИ ҲАҚИДА

Кўпгина иқтисодий жараёнлар мухтор дифференциал тенглама ёки дифференциал тенгламаларнинг мухтор системаси билан тавсифланади. Бунда тегишли мувозанат ҳолати (нуктаси) маълум иқтисодий маънога эга. Айниқса мувозанат ҳолатининг асимптотик турғунлиги муҳим аҳамият касб этади, у *балансланган режим* деб аталадиган иқтисодий жараён кечиши билан боғланган. Биз куйида иқтисодий жараёнларнинг икки секторли модели билан таништирамиз.

Икки секторли иқтисодий жараён ишлаб чиқариш функцияси деб аталадиган $Y_1 = F_1(L_1, K_1)$, $Y_2 = F_2(L_2, K_2)$ функциялар билан аниқлансин, дейлик. Бунда L_1, L_2 — меҳнат ресурслари ҳажми, K_1, K_2 — асосий фондлар ҳажми, Y_1, Y_2 — ишлаб чиқарилган маҳсулотлар ҳажми. Айтайлик, биринчи сектор ишлаб чиқариш воситаларини, иккинчи сектор эса истеъмол буюмларини ишлаб чиқарсин. Ҳар иккала секторнинг асосий фондларига инвестициялар (ажратилган

капитал) I биринчи сектор маҳсулоти ҳажми Y_1 ҳисобига амалга оширилади, истеъмоли C эса иккинчи сектор маҳсулоти ҳажми Y_2 билан устма-уст тушади, яъни $I = sF_1(L_1, K_1) + (1-s)F_1(L_1, K_1)$, $0 \leq s \leq 1$, $C = Y_2(L_2, K_2)$. Ҳурғаниладиган модел қуйидаги муносабатлар билан тавсифланади:

$$\begin{cases} \dot{K}_1 = sF_1(L_1, K_1) - \mu_1 K_1, & 0 \leq s \leq 1, 0 \leq \mu_1 \leq 1, \\ \dot{K}_2 = (1-s)F_1(L_1, K_1) - \mu_2 K_2, & 0 \leq \mu_2 < 1, \end{cases} \quad (11.42)$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = \eta_1 L_1 + \xi_1 K_1, & \eta_1 > 0, \quad \xi_1 > 0, \\ \dot{L}_2 = \eta_2 L_2 + \xi_2 K_2, & \eta_2 > 0, \quad \xi_2 > 0, \end{cases} \quad (11.43)$$

$$L = L_1 + L_2 = qL + (1-q)L, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Юқоридаги (11.42), (11.43)ларда $\dot{K}_i = \frac{dK_i}{dt}$, $\dot{L}_i = \frac{dL_i}{dt}$, $i=1,2$. Ушбу $k = \frac{K}{L}$, $i=1,2$ микдорлар *қурулланганлик* деб юритилади. Қўйинча моделини уни тавсифлайдиган муносабатларда k_1 , k_2 ва уларнинг ҳиссалаари орқали ифодаларга ўтиб текшириш қулай бўлади. Эслатиб ўтамизки, ишлаб чиқариш функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантиради ($i=1,2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(L_i, K_i)}{\partial L_i} &> 0, \quad \frac{\partial F_i(L_i, K_i)}{\partial K_i} > 0 \quad \forall L_i \geq 0, \quad \forall K_i \geq 0; \\ \frac{\partial^2 F_i(L_i, K_i)}{\partial L_i^2} &< 0, \quad \frac{\partial^2 F_i(L_i, K_i)}{\partial K_i^2} < 0 \quad \forall L_i \geq 0, \quad \forall K_i \geq 0; \\ F_i(\lambda L_i, \lambda K_i) &= \lambda F_i(L_i, K_i) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall L_i \geq 0, \quad \forall K_i \geq 0. \end{aligned}$$

Охириги айиният кўрсатадики, ҳар бир $F_i(L_i, K_i)$ функция ҳар икки аргументга бўйича биринчи тартибли бир жинсли функциядан иборат. Шунинг учун ($i=1,2$) ушбу

$$\begin{aligned} F_i(L_i, K_i) &= L_i F_i(1, \frac{K_i}{L_i}) = L_i F_i(1, k) = L_i f_i(k), \\ F_i(1, k_i) &= f_i(k_i) \end{aligned}$$

муносабатларни ёзиш мумкин. Унда $f_i(k_i)$ функция *ўртача меҳнат унвудорлиги* деб юритилади.

Энди қуйидаги содда ҳисоблашларни бажарамиз:

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{K_1}{L_1} \right) = \frac{\dot{K}_1 L_1 - K_1 \dot{L}_1}{L_1^2} = \frac{(sF_1 - \mu_1 K_1)L_1 - K_1(\eta_1 L_1 + \xi_1 K_1)}{L_1^2} = \\ &= \frac{(sL_1 f_1(k_1) - \mu_1 K_1)L_1 - K_1(\eta_1 L_1 + \xi_1 K_1)}{L_1^2} = sf_1(k_1) - (\mu_1 + \eta_1 + \xi_1 k_1), \end{aligned}$$

яъни

$$\dot{k}_1 = sf_1(k_1) - (\mu_1 + \eta_1 + \xi_1 k_1), \quad (11.44)$$

бунда $\psi_1(k_1) = k_1 + \frac{\xi_1}{\mu_1 + \eta_1} k_1^2$;

$$\begin{aligned}\dot{k}_2 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{K_2}{L_2} \right) = \frac{\dot{K}_2 L_2 - K_2 \dot{L}_2}{L_2^2} = \frac{[(1-s)F_1 - \mu_1 K_2] L_2 - K_2 (\eta_1 L_2 + \xi_1 K_1)}{L_2^2} = \\ &= \frac{[(1-s)F_1 (k_1) - \mu_2 K_2] L_2 - K_2 (\eta_2 L_2 + \xi_2 K_1)}{L_2^2} = \\ &= \frac{q}{1-q} (1-s) f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta_2) \psi_2(k_2),\end{aligned}$$

яъни

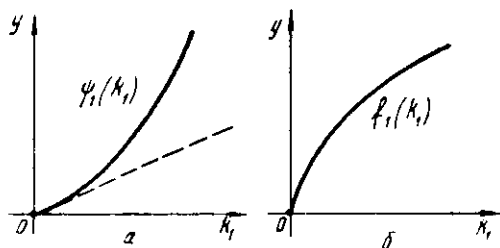
$$\dot{k}_2 = \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta_2) \psi_2(k_2), \quad (11.45)$$

бунда

$$\psi_2(k_2) = k_2 + \frac{\xi_2}{\mu_2 + \eta_2} k_2', \quad L_1 = \frac{q}{1-q} L_2.$$

Юқорида киритилган $\psi_i(k_i)$, $i=1,2$, функциялар учун ушбу $\psi_i(0)=0, \psi(k_i) = 1 + \frac{2\xi_i}{\mu_i + \eta_i} k_i > 0, \psi_i(k_i) = \frac{2\xi_i}{\mu_i + \eta_i} > 0 \quad \forall k_i \geq 0$ муноса-

батлар ўринли. Бундан кўри-
надики, $y = \psi_i(k_i)$ функция-
лар монотон ўсувчи, кавар-
рик, графиги координата
бошидан чиқади ва бутунлай
бириничи чоракда жойлашган.
Шунингдек, $y = f_i(k_i)$
функция ҳам монотон ўсув-
чи, аммо ботик, графиги
координата бошидан чиқади
ва бутунлай биринчи чорак-
да жойлашган (62, а, б-
чизмалар).



62-чизма

Биз $s = \text{const}$, $q = \text{const}$ бўлган ҳолини кўрамиз. Бунда тегишли модел *Солоу модели* деб аталади ва $0 < s < 1$, $0 < q < 1$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Шу сабабли (11.44) – (11.45) система *мухтор* системадан иборат бўлади.

11.9-теорема. (11.44) – (11.45) тенгламалар системаси

$$sf_1(0) > \mu_1 + \eta_1 \quad (11.46)$$

тенгсизлик бажарилганда тривиал ечимдан ташқари ягона мусбат асимптотик тургун стационар ечимга (мувозанат ҳолатига) эга.

Исбот. Равишанки, (11.44) – (11.45) система тривиал ечимга эга. Биз уни текширмаймиз. (0,0) мувозанат ҳолатининг потургунлигини кўрсатиш қийин эмас. Энди мусбат мувозанат ҳолатининг мавжудлигини кўрсатиш учун

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(k_1, k_2) &= sf_1(k_1) - (\mu_1 + \eta_1) \psi_1(k_1) = 0, \\ \varphi_2(k_1, k_2) &= \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta_2) \psi_2(k_2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.47)$$

чекли тенгламалар системасини қараймиз. Унда биринчи тенгламани $sf_1(k_1) = (\mu_1 + \eta_1)\psi_1(k_1)$ каби ёзиб, $y = sf_1(k_1)$, $y = (\mu_1 + \eta_1)\psi_1(k_1)$ функцияларни ўрганайлик. Улардан биринчиси қаварик, иккинчиси эса ботик, графиклари координата бошидан мос равишда $y'(0) = sf_1'(0)$ ва $y'(0) = \mu_1 + \eta_1$ бурчак коэффициентлар билан чиқади. (11.46) тенгсизликка кўра биринчисининг графиги юқоридадан кетади. Иккала функциянинг графиги ҳам бутунлай биринчи чоракда жойлашганлиги учун яна битта $k_1^0, k_1^0 > 0$, нуктада албатта кесишади (63-чизма).

Топилган $k_1 = k_1^0 > 0$ қийматни (11.47) нинг иккинчи тенгламасига қўямиз. Унда

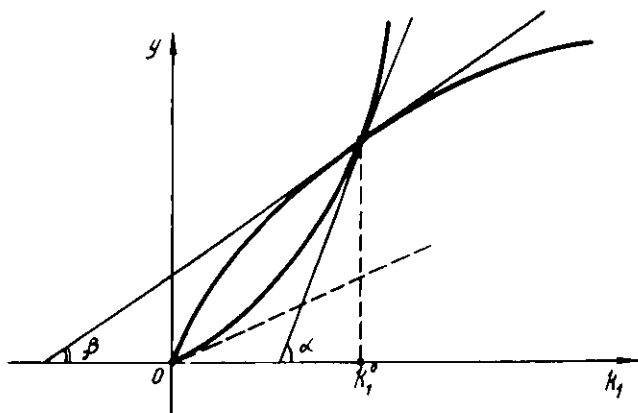
$$(\mu_2 + \eta_2)\psi_2(k_2) = \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1^0) > 0$$

тенгликка эга бўламиз. Аммо $\psi_2(0) = 0$ ва $\psi_2(k_2)$ монотон ўсувчи эканидан фақат биттагина $k_2 = k_2^0$ нуктада юқоридаги тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, (11.44) — (11.45) система ягона мусбат ечимга эга экан. Энди бу ечим (мувозанат ҳолати) асимптотик турғун эканини исбот этамиз. Унинг учун $\varphi_1(k_1, k_2)$, $\varphi_2(k_1, k_2)$ функцияларнинг биринчи тартибли ҳосилаларини $k^0 = (k_1^0, k_2^0)$ нуктада ҳисоблаб, биринчи яқинлашиш системаси деб аталадиган системанинг матрицасини ёзамиз ва унинг ҳос сонларини топамиз:

$$A = \begin{pmatrix} sf_1'(k_1^0) - (\mu_1 + \eta_1) & 0 \\ \frac{q(1-s)}{1-q} f_1'(k_1^0) & -(\mu_2 + \eta_2)\psi_2'(k_2^0) \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} sf_1'(k_1^0) - (\mu_1 + \eta_1) - \lambda & 0 \\ \frac{q(1-s)}{1-q} f_1'(k_1^0) & -(\mu_2 + \eta_2)\psi_2'(k_2^0) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = sf_1'(k_1^0) - (\mu_1 + \eta_1), \quad \lambda_2 = -(\mu_2 + \eta_2)\psi_2'(k_1^0).$$



Маълумки $y=f_1(k_1)$ функция ботик, $y=\varphi_1(k_1)$ функция эса каварик. Уларнинг графиклари кесиниш нуктаси (k_1^0, k_2^0) да мос бурчак коэффициентлар

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu_1 + \eta_1, \operatorname{tg} \beta = s f_1'(k_1^0)$$

бўлиб, $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ тенгсизлик ўринли (63 - чизма). Шундай қилиб, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Демак, Ляпунов-Пуанкаре теоремасига кўра $k^0 = (k_1^0, k_2^0)$ мувозанат ҳолати асимптотик турғун.

Иктисодий нуктаи назардан $k_i^0 = \frac{K_i^0(t)}{L_i^0(t)}$, $i=1,2$, яъни $K_i^0(t) = k_i^0 L_i^0(t)$ муносабатлар билан аниқланадиган режим муҳим аҳамиятга эга, уни *балансланган режим* дейилади.

11.5-§. ЛИМИТ ДАВРАЛАР. ЭРГАШ ФУНКЦИЯ

Лимит давра (цикл) ва эргаш функция тушунчаларини улуғ француз математиги А. Пуанкаре киритган бўлиб, бу тушунчалар ҳақида дастлабки илмий натижалар унинг ўзига тегишли. Лимит давралар техникада турли асбоб ва қурилмаларни лойиҳалашда муҳим роль ўйнайди. Техникада сўнамас тебранишлар шу лимит давралар тушунчасига мос келади. Бу мосликни биринчи марта А. А. Андронов аниқлаган.

Яна нормал муҳтор (10.2) системани кўрайлик. Унда $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ (қискача $f(x)$ вектор-функция) функциялар n ўлчовли фазонинг бирор D_n соҳасида аниқланган ва ўзининг хусусий ҳосилалари билан узлуксиз деб қараймиз. У ҳолда D_n соҳанинг ҳар бир нуктасидан (10.2) системанинг фақат битта траекторияси ўтади. Кейинги мулоҳазаларда кўпинча $n=2$ бўлган ҳол кўрилади. Унда соддалик учун D_n соҳа сифатида бутун P текислик қаралади.

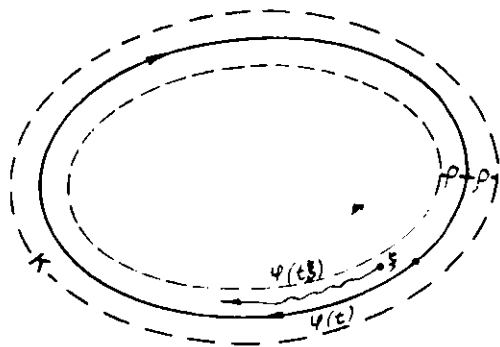
1. Лимит давра ва унинг яқинидаги траекториялар. Энди лимит давра тушунчасини киритамиз ($n=2$).

11.7-таъриф. (10.2) муҳтор системанинг яккаланган даврий ечими лимит давра (цикл) дейилади. Тўлароқ айтганда, $x=\varphi(t)$ вектор-функция (10.2) системанинг даврий ечими бўлиб, K чизиқ эса P текисликда шу ечимнинг графиги (ёпиқ эгри чизиқ, ёпиқ траектория) бўлсин. Агар шундай мусбат сон $\rho > 0$ мавжуд бўлсак, P текисликдаги K эгри чизиқдан ρ дан кичик масофада жойлашган ξ нукта қандай бўлмасин, (10.2) системанинг шу нуктадан ўтадиган ечими даврий бўлмаса, у ҳолда $x=\varphi(t)$ ечим (ёки K траектория) (10.2) системанинг лимит давраси дейилади.

Таърифдан кўринадики, агар $x \in K$, $\xi \notin K$ ва $|x - \xi| < \rho$ бўлса, (10.2) системанинг 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган $x = -\varphi(t, \xi)$ ечими даврий бўлмайди. Бошқача айтганда, лимит даврага яқин масофада системанинг ёпиқ траекториялари мавжуд эмас (64-чизма).

Ундай бўлса, лимит даврага яқин траекториялар ўзини қандай тутади? Қуйида биз шуни ўрганамиз.

11.10-теорема. $x=\varphi(t)$ ечим (10.2) системанинг ($n=2$) лимит давраси бўлиб, K унга мос ёпиқ траектория бўлсин. Ёпиқ траектория,



64-чизма

маълумки, текисликни икки ички ва ташқи соҳага бўлади. Мухтор системанинг траекториялари ўзаро кесиша олмаслиги учун (10.2) системанинг ҳар бир K дан фарқли траекторияси унга нисбатан ё ички, ё ташқи бўлади. Ҳам ташқи, ҳам ички траекториялар учун бири иккинчисини инкор қиладиган қуйидаги икки ҳол юз бериши мумкин. Яъни, K га яқин нуқтада бошланадиган

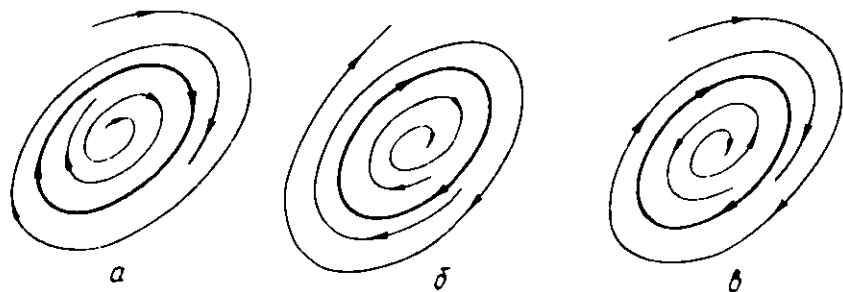
барча ички траекториялар $t \rightarrow +\infty$ да, ёки $t \rightarrow -\infty$ да спирал каби K га ўралади. Худди шу тасдиқ ташқи траекториялар учун ҳам ўринли (65 а, б-чизма)).

Бу теореманинг исботига ўтишдан аввал баъзи ёрдамчи тасдиқлар керак бўлади.

Агар K га яқин барча нукталардан бошланадиган барча траекториялар (хоҳ ички, хоҳ ташқи бўлмасин) $t \rightarrow +\infty$ да K га ўралса, у ҳолда лимит давра *турғун* дейилади (65, а-чизма). Агар K га яқин барча нукталардан бошланадиган траекториялар $t \rightarrow -\infty$ да K га ўралса, у ҳолда лимит давра *бутунлай нотурғун* дейилади (65, б-чизма). Қолган икки ҳолда (хусусан, ички траекториялар K га $t \rightarrow -\infty$ да, ташқи траекториялар $t \rightarrow +\infty$ да ўралса ва аксинча) лимит давра *ярим турғун* дейилади (65, в-чизма).

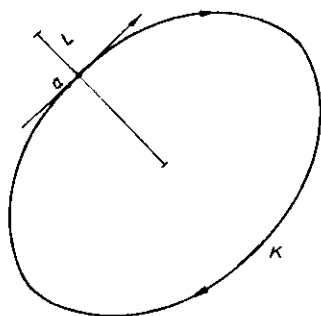
Лимит давра яқинидаги траекторияларнинг хоссаларини, яъни уларнинг лимит даврага ўралишини баён этишда *эргаш функция* тушунчаси муҳим роль ўйнайди. А. Пуанкаренинг катта хизматларидан бири шу функцияни киритиб, ундан фойдаланганлигидандир. Эргаш функциянинг таърифини икки огиз сўз билан баён этиб бўлмайди, уни маълум матнода қурилади.

P текисликда даври τ бўлган даврий ечимнинг графигидан иборат ёпик эгри чизикни K дейлик. L эса P текисликда ётган шундай тўғри чизикли кесмаки, у K эгри чизикни L га нисбатан ички бўлган ягона



65-чизма

a нуктада полдан фаркли бурчак остида (яъни уринмасдан) кесиб ўтсин (66-чизма).

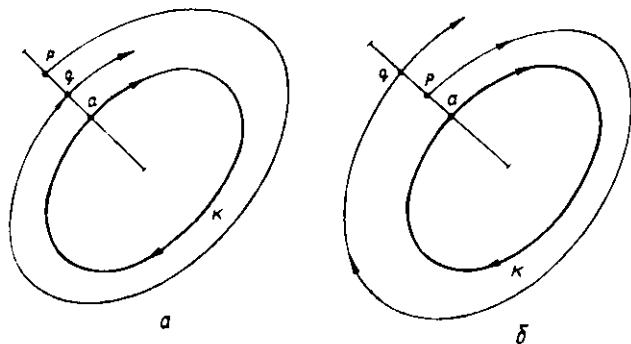


66-чизма

L кесмаси ётган тўғри чизиқда сонли координата киритамиз. a нуктанинг координатасини u_0 , L кесманинг a дан фаркли ихтиёрий нуктасини p деб, унинг координатасини u деб белгилаймиз. Шундай қилиб, $a = a(u_0)$, $p = p(u)$. Энди p нуктадан (10.2) системанинг $\varphi(t, p)$ траекториясини ўтказиб, шу траектория бўйича t нинг ўсишига мос йўналишда ҳаракат қиламиз. Агар p нукта a нуктага яқин бўлса, у ҳолда K нинг яқинида бошқа епик траектория йўқлигидан $\varphi(t, p)$ траектория ҳар t га яқин вақтда L кесмани кесиб ўтади. Шу траекториянинг L кесма билан p нуктадан кейин биринчи учрашув нуктасини q , унинг координатасини эса $\chi_1(u)$ деймиз. Агар p нуктадан $\varphi(t, p)$ траектория бўйлаб, t нинг камайишига мос йўналишда ҳаракат қилсак, шу траектория t га яқин вақтда L билан биринчи марта учрашади. Шу нуктани r , координатасини эса $\chi_{-1}(u)$ деб белгилаймиз (67, а, б- чизма). 67- чизмада p нукта K ёпик чизигидан ташқарида олинган. Худди шу чизмаларни p нукта K нинг ичида ётганда ҳам келтириш мумкин (68, а, б- чизма). Юқорида икки $\chi_1(u)$ ва $\chi_{-1}(u)$ функциялар киритилди. Улар узлуксиз ва ўзаро тесқари функциядир, яъни

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u.$$

Ҳақиқатан, q нуктадан t нинг камайишига мос йўналишда траектория бўйлаб ҳаракат қилинса, L кесмани биринчи марта p нуктада кесиб ўтади, демак, $\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u$. Шунга ўхшаш, агар r нуктадан t нинг ўсишига мос йўналишда тегишли траектория бўйлаб ҳаракат қилинса, у ҳолда бу траектория биринчи марта

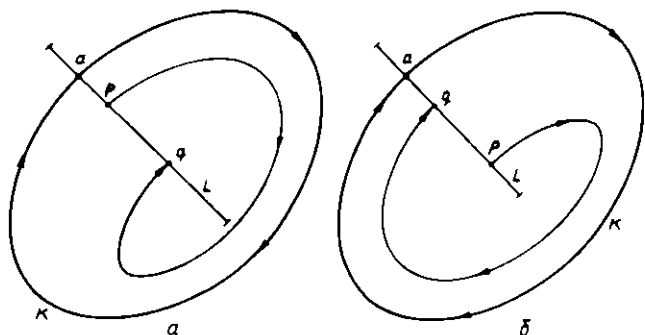


67- чизма

L кесмани p нуктада кесиб ўтади, демак, $\chi_1(\chi_{-1}(u)) = u$. Кейинги бандда $\chi_1(u)$, $\chi_{-1}(u)$ функцияларнинг хоссалари ўрганилади. Ҳозирча фақат қайд қилиб ўтамышки, $\chi_1(u)$ функция эргаш функция дейилади, бу функция узлуксиз ва узлуксиз тесқари функцияга эга бўлиб, $\chi_1^{-1}(u) = \chi_{-1}(u)$ хосса ўринли. Эргаш функцияни

$$\chi = \chi_1(u) \quad (11.48)$$

деб белгилаймиз. Энди 11.10-теореманинг исботига ўтамыш.



68- чизма

11.10-теореманинг исботи. P текисликда шундай L кесма оламышки, у K эгри чизикни ягона a нуктада уринмасдан ва L га нисбатан ички нуктада кесиб ўтсин. L кесмада сон координата (параметр) киритамиз ва u_0 билан a нуктанинг координатасини белгилаймиз. Зарурат бўлса, u_0 параметр ёрдамида a нуктанинг Декарт координаталарини топиш мумкин. Унинг учун L кесма ётган тўғри чизикнинг параметрик тенгламасини ёзиб, параметрга $u = u_0$ қиймат бериш етарли. Албатта, u параметрнинг ўсишига L кесма бўйича бирор йўналиш мос келади. Шу параметр бирор ёпик ораликда қийматлар қабул қилганда кесманинг бирор учидан бошқа учигача бўлган нукталарни кетма-кет ҳосил қилиш мумкин. Хусусан, биз кўраётган ҳолда L кесманинг K дан ташқаридаги қисмига параметрнинг u_0 дан катта қийматлари, кесманинг K нинг ичидаги қисмига эса u_0 дан кичик қийматлари мос келсин, дейлик. L кесмага мос эргаш функцияни $\chi(u)$ деб белгилаймиз. $u_0 \in K$ бўлгани учун $\chi(u_0) = u_0$ бўлади. Энди α – етарли кичик мусбат сон бўлсин. У ҳолда $|u - u_0| < \alpha$ интервал учун (10.2) системанинг координатаси шу интервалдан олинган $p(u) \in L$ нуктадан чиқадиган траекторияси вақт ўтиши билан L кесмани биринчи марта q нуктада кесиб ўтади. Шу нуктанинг координатасини $\chi(u) = v$ дейлик. Агар q нуктанинг координатаси ҳам p нуктасиникидек u га тенг бўлса, у ҳолда p нуктадан чиқадиган траектория яна шу нуктага, яъни

$q(\chi(u)) = p(u)$ нуктага келади, демак, траектория ёпик бўлади. Бу ҳол ўринли бўлиши учун ушбу

$$\chi(u) = u \quad (11.49)$$

тенглик ўринли бўлиши лозим. Аммо K чизик (11.49) системанинг яқкаланган траекторияси бўлгани учун $|u - u_0| < \alpha$ интервалда (11.49) тенглама ягона ечимга эга. Энди лимит давра K дан ташқарида унга етарли яқин траекторияларни ўрганимиз, бу траекторияларга $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервал мос келади. $u_0 - \alpha < u < u_0$ интервалга мос ички траекториялар шунга ўхшаш ўрганилади.

Шундай қилиб, юқоридаги мулоҳазалардан $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда қуйидаги икки тенгсизликдан бири бажарилади:

$$\chi(u) < u, \quad (11.50)$$

$$\chi(u) > u. \quad (11.51)$$

Агар кўрилатган интервалнинг бир қисмида (11.50) тенгсизлик, иккинчи қисмида эса (11.51) тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\chi(u)$ функциянинг узлуксизлиги туфайли $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда (11.49) тенглик ўринли бўладиган нукта топилар эди. Бу бўлиши мумкин эмас. Олинган $p \notin K$, $p \in L$ нукта K дан ташқарида бўлиб, бу нуктада бошланадиган траектория K ни кесиб ўта олмагани учун $q \in L$ нукта ҳам K дан ташқарида ётади. Шунинг учун $u > u_0$ бўлганидан

$$\chi(u) > u_0 \quad (11.52)$$

тенгсизлик ўринли.

Етарли кичик $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда (11.50) тенгсизлик ўринли бўлсин. Кўрилатган интервалдан ихтиёрий u_1 сонни оламиз. Энди $u_1, u_2, u_3, \dots$ сонлар кетма-кетлигини

$$u_{i+1} = \chi(u_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (11.53)$$

формула ёрдамида аниқлаймиз. (11.50), (11.51), (11.52) муносабатлардан $u > u_0$ ва $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ тенгсизликлар келиб чиқади. Бундан $\{u_i\}$ кетма-кетлик камаювчи экани кўриниб турибди. Бу кетма-кетлик қуйидан u_0 билан чегараланган бўлиб, камаювчи эканидан унинг limiti мавжуд. Limitни u^* дейлик: $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = u^*$. Аммо u^* нук-

та $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалга тегишли, шунинг учун (11.49) тенглама ечимининг ягоналигидан $u^* = u_0$ келиб чиқади. Демак, $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = u_0$. L

кесманинг u_i координатага мос нуктасини p_i десак, юқоридаги мулоҳазалардан

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = a$$

эканига ишонамиз. Албатта, p_i нуктадан p_{i+1} нуктага тегишли траектория бўйлаб келиш вақти τ га яқин. Шунинг учун p_i нуктадан чиқадиган траектория билан K траектория орасидаги минимал масофа вақт ортиши билан камайиб боради. Агар бирор моментда камайиш жараёни бўлмаса, худди шу моментга мос нукта орқали L кесмани ўтказиб, $\{u_i\}$ кетма-кетлиكنинг камаювчанлигига зид натижа оламиз. Бу мулоҳазалар кўрсатадики, p_1 нуктадан чиқадиган

траектория вақт ортиши билан K га ўрала бошлайди (спирал каби). Шундай қилиб, (11.50) тенгсизлик бажарилганда L кесманинг $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалдан олинган координатаси ихтиёрий нуктасидан чиқадиган траектория $t \rightarrow +\infty$ да K га спирал каби ўралади.

Агар $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда (11.51) тенгсизлик бажарилса, $\chi(u)$ функцияга тескари $\chi^{-1}(u)$ функция учун бирор $u_0 < u < u_0 + \beta$, $\beta > 0$ интервалда ушбу

$$\chi^{-1}(v) < v$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди юқоридаги каби, L кесманинг координатаси v , $u_0 < v < u_0 + \beta$ бўлган нуктасидан чиққан траектория $t \rightarrow -\infty$ да K га спирал каби ўралади.

Шундай қилиб, лимит даврага яқин траекторияларнинг барчаси ўрганилди. Улар ё $t \rightarrow +\infty$ да ё $t \rightarrow -\infty$ да K га спирал каби ўралади. Демак, теорема исбот бўлди.

Э с л а м м а. Юқорида исботланган теоремада мавжуд ҳолларни бирлаштириш мақсадида ушбу

$$\left. \begin{aligned} |\chi(u) - u_0| &< |u - u_0|, \\ |\chi(u) - u_0| &> |u - u_0|, \end{aligned} \right\} \quad (11.54)$$

тенгсизликларни кўрамиз. Агар K чизикнинг ички ёки ташқи ярим атрофида ёки L кесманинг a нуктага яқин бўлган K га нисбатан ички ёки ташқи нукталарида (11.54) дан биринчиси бажарилса, траекториялар K га $t \rightarrow +\infty$ да спирал каби ўралади; шунга ўхшаш; агар айрилган ярим атрофда (11.54) дан иккинчиси бажарилса, у ҳолда траекториялар K га $t \rightarrow -\infty$ да спирал каби ўралади.

2. Эргаш функция ва унинг хоссалари. (10.2) системанинг O , ξ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимини $\varphi(t, \xi)$, даври τ бўлган ва a нуктадан ўтадиган даврий ечимини $\varphi(t, a)$ деб белгилаймиз. $\varphi(t, a)$ ечимнинг графигини - ёниқ эгри чизикни K , шу эгри чизикни ягона ички a нуктада уринмасдан кесадиган тўғри чизикли кесмани L дейлик. L кесмада параметр v киритамиз. Шу координата ёрдамида L кесманинг параметрик тенгламаси $x = g(v)$ бўлсин, a нуктанинг координатасини $v = u_0$ дейлик. Етарли кичик мусбат сон $\alpha > 0$ берилганда ҳам ушбу $\varphi(t, g(u)) = \varphi(t, u)$ траектория $|u - u_0| < \alpha$ интервалда L кесмани t нинг мусбат қийматларида ҳам, манфий қийматларида ҳам кесиб ўтади. $\varphi(t, u)$ траекториянинг L кесмани t нинг минимал мусбат $t_1(u)$ қийматида кесиб ўтсин, $\chi_1(u)$ эса, $t_1(u)$ моментда кесишиш нуктасининг координатаси бўлсин. Шунга ўхшаш $t_{-1}(u)$ микдор L кесмани траектория кесиб ўтиш моментининг абсолют қиймати бўйича минимал қиймати, $\chi_{-1}(u)$ эса шу моментга мос кесишиш нуктасининг координатаси бўлсин. Агар етарли кичик мусбат сон $\alpha > 0$ берилган бўлса, у ҳолда $|u - u_0| < \alpha$ интервалда юқорида кўрилган

$$t_1(u), \chi_1(u), t_{-1}(u), \chi_{-1}(u)$$

функциялар узлуксиз ва қуйидаги

$$t_1(u_0) = \tau, \chi_1(u_0) = u_0, t_{-1}(u_0) = -\tau, \chi_{-1}(u_0) = u_0$$

шартларни қаноатлантиради. Шу билан бирга χ_1 ва χ_{-1} функциялар етарли кичик u лар учун ўзаро тескаридир, яъни

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u$$

ва узлуксиз дифференциалланувчидир. Бунда $\chi = \chi_1(u)$ функция эргаши функция дейилади. Эргаши функцияларнинг бу хоссасини исбот этмаймиз^{*)}.

3. Эргаши функциянинг геометрик тасвири. Нормал мухтор системаларнинг лимит давраларини ўрганиш учун мос эргаши функцияни ўрганиш етарли. Албатта, ҳар бир система учун эргаши функцияни тузиш мумкин бўлавермайди. Бу қийин масала. Қуйида биз эргаши-функция мавжуд деб фараз этиб, уни сифат нуктаи назаридан текшираемиз. Соддалик учун эргаши функцияни $\chi(u)$ деб белгилаймиз, ушбу

$$v = \chi(u) \quad (11.55)$$

эгри чизикнинг графигини ўрганаемиз. Аслида биз (11.49) тенгламанинг ечими ва (10.2) системанинг унга мос лимит даврасини ўрганишимиз лозим. Шу мақсадда u, v ўзгарувчилар текислигида (11.55) эгри чизик билан

$$v = u \quad (11.56)$$

биссектрисанинг кесилиш нукталарини ўрганаемиз. Фараз этайлик, $u_0 > 0$ ва $\chi(u_0) = u_0$ бўлсин. Шу u_0 координатага (параметрга) мос лимит давранинг етарли кичик атрофини ўрганишимиз керак. Демак, графиклар координаталар текислигининг I чорагида ўрганилади.

u ва v ўзгарувчилар текислиги ва унда чизилган $v = \chi(u)$ ва $v = u$ чизиклар графиги *Ламерей диаграммаси* дейилади.

(11.49) тенгламанинг барча ечимларини топиш учун (11.55) ва (11.56) чизикларнинг барча кесилиш нукталарини топиш лозим. Биз (u_0, u_0) нуктани ($u_0 > 0$) чуқурроқ ўрганаемиз. Бошқа кесилиш нукталари ҳам шунга ўхшаш ўрганилади.

$u = u_0$ га мос келган ёниқ траектория лимит давра бўлиши учун (u_0, u_0) нукта яккаланган бўлиши зарур ва етарли. Агар $\chi'(u_0) \neq 1$ бўлса, у ҳолда (u_0, u_0) нукта яккаланган бўлади. Бу ҳолда (u_0, u_0) нуктада (11.55) ва (11.56) чизикларнинг графиги ўзаро уринмайди. Мос лимит даврага эса *қўпол лимит давра* дейилади. Аммо $\chi'(u_0) = 1$ бўлса, лимит давранинг турғунлиги юқори тартибли ҳосилалар ёрдамида текширилади. Ушбу

$$\kappa(u) = \chi(u) - u \quad (11.57)$$

ёрдамчи функцияни киритаемиз. Равшанки, лимит даврага мос келган $u = u_0$ учун $\kappa(u_0) = 0$ бўлади. Мулоҳазаларимизда κ функция керакли тартибли барча ҳосилаларга эга бўлсин деб фараз этамиз. u_0 нуктанинг етарли кичик атрофини $I_0 = \{u: |u - u_0| < \alpha, \alpha > 0\}$ деб белгилаймиз. Биз иш кўрадиган барча u нукталар шу I_0 интервалдан олинади. Буни доим айтиб ўтирмаймиз. $v \neq u$ биссектриса I координата бурчагини икки $I_1 = \{u, v: v > u\}$ ва $I_2 = \{u, v: v < u\}$ бўлакка бўлади (69-чизма). Ниҳоят, $u = u_0$ нуктанинг I_0 атрофида $\kappa(u)$ функция учун Тейлор формуласини ёзамиз:

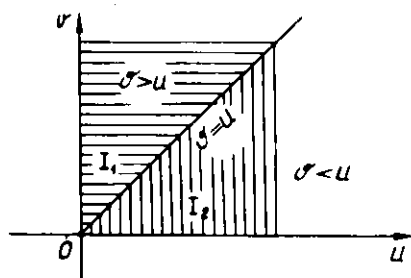
^{*)} Исботни Л. С. Полягинининг «Обыкновенные дифференциальные уравнения» китобидан ўқиш мумкин [1].

$$\chi(u) = \chi'(u_0)(u - u_0) + \frac{\chi''(u_0)}{2!}(u - u_0)^2 + \dots + \frac{\chi^{(k)}(u_0)}{k!}(u - u_0)^k + O(|u - u_0|^k), \quad (11.58)$$

$$\text{бунда } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{0(z)}{z} = 0, \quad \chi'(u_0) = \chi'(u_0) - 1, \quad \chi''(u_0) = \chi''(u_0), \dots, \chi^{(k)}(u_0) = \chi^{(k)}(u_0), \dots$$

Лимит давранинг турғунлигини эргаши функция ёрдамида текшириш учун қуйидаги ҳолларни кўрамиз:

1. $\chi'(u_0) \neq 0$ ёки барибир, $\chi'(u_0) \neq 1$ (кўпол лимит давра).



69- чизма

а) $\chi'(u_0) < 0$ ёки барибир $\chi'(u_0) < 1$.

Агар $u < u_0$ бўлса, $\chi(u) > u$ ва демак, $0 > \chi(u) - u_0 > u - u_0$ тенгсизликлар ўринли. Бундан $|\chi(u) - u_0| < |u - u_0|$ тенгсизлик келиб чиқади. Шунга ўхшаш, агар $u > u_0$ бўлса, $\chi(u) < u$ ва демак, $0 < \chi(u) - u_0 < u - u_0$ га эгамиз. Бундан яна $|\chi(u) - u_0| < |u - u_0|$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Демак, $\chi(u_0) < 0$ булганда (11.54) тенг-

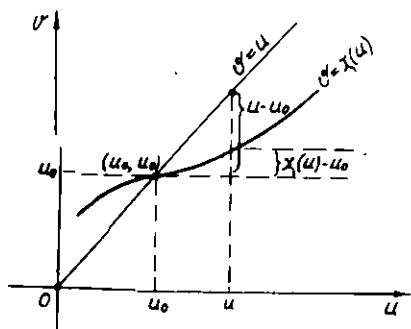
сизликлардан биринчиси бажарилади. 332- бетдаги эслатмага кўра, $\chi'(u_0) < 1$ бўлганда u_0 га мос лимит давра турғун бўлади (70-чизма).

б) $\chi'(u_0) > 0$ ёки барибир $\chi'(u_0) > 1$. Бу ҳолда худди а) ҳолидаги мулоҳазалар ёрдамида (11.54) тенгсизликлардан иккинчисига эга бўламиз. Демак, u_0 нуктага мос лимит давра бутунлай нотурғун бўлади (71-чизма).

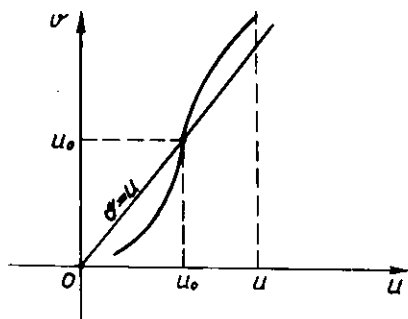
II. $\chi'(u_0) = \dots = \chi^{(k-1)}(u_0) = 0, \chi^{(k)}(u_0) \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$.

Демак, $\chi'(u_0) = 1$ бўлган ҳол кўрилаяпти.

а) $k = 2$ бўлганда $\chi'(u_0) = 0, \chi''(u_0) \neq 0$ га эгамиз. Демак,



70- чизма



71- чизма

$\chi'(u_0)=1$. Шунинг учун $\chi(u)$ функциянинг графиги биссектрисага (u_0, u_0) нуктада уринади (11.58) формуладан шу ҳолда ушбу

$$\chi(u) = (u - u_0)^2 \frac{\chi''(u_0)}{2!} + O(|u - u_0|^2)$$

муносабат келиб чиқади. Унинг ўнг томонидаги ифоданинг ишораси u нинг I_0 интервалдан олинган қийматларида $\chi''(u_0)$ микдорнинг ишораси билан аниқланади. Шунинг учун $\chi''(u_0) > 0$ бўлганда $\chi(u) > 0$ ёки $\chi(u) > u$, $u \in I_0$ тенгсизлик ўринли. Демак, $\chi(u)$ функциянинг графиги I_2 тўпلامда жойлашган бўлиб, u_0 нуктанинг I_0 атрофида кавариклиги пастга қараган бўлади. Шунга ўхшаш, $\chi''(u_0) < 0$ бўлганда $\chi(u)$ функциянинг графиги I_1 тўпلامда жойлашган бўлиб, I_0 интервалда кавариклиги юқорига қараган бўлади (72 а, б-чизма). Биз лимит давранинг ярим турғун бўлган ҳолига эгамиз.

б) Энди $k=3$ бўлсин. Бу ҳолда $\chi'(u_0)=0$, $\chi''(u_0)=0$, $\chi'''(u_0) \neq 0$ (11.58) формуладан қуйидагига эгамиз:

$$\chi(u) = \frac{\chi'''(u_0)}{3!} (u - u_0)^3 + O(|u - u_0|^3). \quad (11.59)$$

Аввало $\chi''(u_0)=\chi''(u_0)=0$ бўлгани учун (u_0, u_0) нукта $\chi(u)$ функциянинг бурилиш нуктаси бўлади. Демак, функциянинг графиги $v=u$ биссектрисанинг бир томонидан иккинчи томонига унга урилиб ўтади. Бунда яна икки ҳол юз беради:

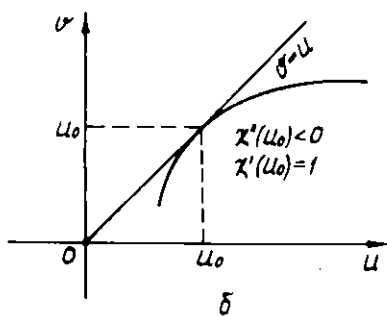
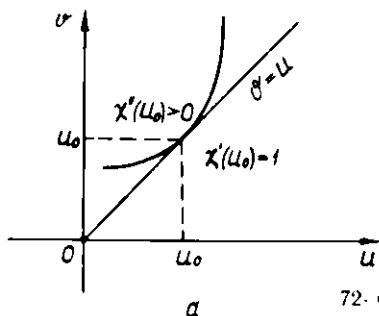
$$б_1) \quad \chi'''(u_0) = \chi'''(u_0) > 0.$$

(11.59) формулага кўра бу ҳолда $u > u_0$ бўлганда $\chi(u) < 0$ ёки $\chi(u) < u$, $u > u_0$ бўлганда эса $\chi(u) > 0$ ёки $\chi(u) > u$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Кўринадики, $\chi(u)$ функциянинг графиги $v=u$ биссектрисани кесиб I_1 тўпладан I_2 тўпламга ўтади. 332-бетдаги эслатмага кўра (71-чизма) биз бутунлай нотурғун лимит даврага эгамиз.

б₂) $\chi'''(u_0) = \chi'''(u_0) < 0$. Бу ҳолда б₁ даги мулоҳазалар ёрдамида u_0 га турғун лимит давра мос келишини кўрсатиш мумкин.

в) $k=2k_*$, $k_*=1, 2, \dots$. Бу ҳолда (11.58) формуладан топамиз:

$$\chi(u) = \frac{\chi^{(2k_*)}(u_0)}{(2k_*)!} (u - u_0)^{2k_*} + O(|u - u_0|^{2k_*})$$



72-чизма

Худди $k=2$ бўлган а) ҳолдаги мулоҳазалар каби бу ҳолда ҳам лимит давра ярим турғун бўлади.

г) $k=2k_*+1$, $k_*=0,1,2,\dots$. Бу ҳолда ҳам (11.58) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\chi(u) = \frac{\chi^{(2k_*+1)}(u_0)}{(2k_*+1)!} (u-u_0)^{2k_*+1} + O(|u-u_0|^{2k_*+1}).$$

Энди б) ҳолида юритилган мулоҳазаларни қўлланиб, $\chi^{(2k_*+1)}(u_0) > 0$ бўлганда лимит давра бутунлай нотурғун ва $\chi^{(2k_*+1)}(u_0) < 0$ бўлганда эса лимит давра турғун эканини тасдиқлаш мумкин.

III. $\chi'(u_0) = \chi''(u_0) = \dots = \chi^{(k)}(u_0) = \dots = 0$,
ёки барибир

$$\chi'(u_0) = 1, \chi''(u_0) = \dots = \chi^{(k)}(u_0) = \dots = 0.$$

Бу ҳолда (11.58) формуладан $\chi(u) \equiv 0$ ёки барибир $\chi(u) \equiv u$ келиб чиқади. Кўрамизки, L кесманинг u_0 координатали a нуқтасидан етарли кичик масофадаги барча нуқталаридан ёпиқ траекториялар ўтади. Шунинг учун таърифга кўра u_0 га мос лимит давра K ажратилган ёпиқ траектория бўла олмайди. Бу ҳол иккинчи тартибли чизикли бир жинсли муҳтор системанинг ҳолат текислигидаги марказ манзарасига ўхшайди.

Шундай қилиб, биз эргаш функцияни тўла ўргандик, $k=1$ бўлганда лимит давра оддий дейилади, $k>1$ бўлганда эса k нинг жуфт ёки тоқ бўлишига қараб мос равишда *жуфт каррали* ёки *тоқ каррали* лимит давраларга эгамиз. $k>1$ га мос лимит даврани қисқача *мураккаб лимит давра* деб ҳам юритилади.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. (10.2) системанинг ўнг томонидаги функциялар аналитик бўлиб, бу система учун ёпиқ траектория мавжуд бўлса, у ҳолда бу траектория ё яққаланган, демак, лимит давра бўлади ёки унинг атрофидаги барча траекториялар ёпиқ бўлади.

Шуни эслатамизки, эргаш функцияни ўрганишда, уни Тейлор қаторига ёйиш мумкинлиги аввалдан фараз этилди. Демак, $\chi(u)$ функция аналитик деб қаралди. Бу ҳол (10.2) системанинг ўнг томонидаги функциялар ҳам аналитик бўлгандагина содир бўлади.

4. Ляпуновнинг характеристик кўрсаткичи. Биз бу бандда Ляпуновнинг характеристик кўрсаткичи тушунчасини киритиб, у ёрдамида лимит давранинг турғунлиги ва нотурғунлиги шартини ифодалаймиз.

(10.2) системанинг даври τ га тенг бўлган K ёпиқ траекториясининг параметрик тенгламалари ($n=2$ бўлганда)

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (11.60)$$

бўлиб, системанинг ўзи қуйидаги кўринишда ёзилсин, дейлик:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (11.61)$$

Бунда $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялар бирор D_2 соҳада биринчи тартибли хусусий ҳосилалари $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ билан бирга узлуксиз деб фараз этамиз.

11.8-таъриф. *Ушбу*

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial P(\varphi(t), \psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\varphi(t), \psi(t))}{\partial y} \right] dt \quad (11.62)$$

ифода ёниқ K траекториянинг характеристик кўрсаткичи дейилади ва Ляпунов номи билан аталади.

11.11-теорема. Агар $h < 0$ бўлса, ёниқ K траектория тургун, $h > 0$ бўлса, бутунлай тургунмас лимит даври бўлади^{*)}.

Мисол. Ушбу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x[1 - (x^2 + y^2)], \quad (=P) \\ \dot{y} &= -x + y[1 - (x^2 + y^2)], \quad (=Q) \end{aligned} \quad (11.63)$$

системанинг траекториялари ҳолат текислигида ўрнанилсин.

Параметрик тенгламалари билан берилган

$$(K) \begin{cases} x = \cos(t - t_0) \quad (= \varphi(t)), \\ y = \sin(t - t_0) \quad (= \psi(t)) \end{cases} \quad (11.64)$$

чирик маркази координата бошида ва радиуси 1 га тенг бўлган айланадан иборат бўлиб, (11.63) системанинг ечимидир. (11.63) системанинг умумий ечими

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}}$$

формула билан ифодаланади. Буни исботлаш учун кутб координаталарига ўтиш етарли. Бундан $C=0$ бўлса, юқорида эълатилган ёниқ траектория айлана ҳосил бўлади. Шу ёниқ траектория (11.63) системанинг яқкаланган ёниқ траекториясидир, чунки унинг етарли кичик қийматларига мос келган бошқа ёниқ траектория мавжуд эмас. Энди бу (K) траекториянинг тургунлигини Ляпуновнинг характеристик кўрсаткичи ёрдамида текшираемиз. (11.64) траектория бўйлаб $\tau=2\pi$ га тенг,

$\frac{\partial P(\varphi(t), \psi(t))}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(\varphi(t), \psi(t))}{\partial y}$ ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)}} = (1 - 3x^2 - y^2) \Big|_{\substack{x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)}} = -2\cos^2 t, \quad t_0=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{\substack{x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)}} = (1 - x^2 - 3y^2) \Big|_{\substack{x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)}} = -2\sin^2 t, \quad t_0=0,$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида h ни топамиз ($\tau=2\pi$):

$$h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |-2\cos^2 t - 2\sin^2 t| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2) dt = -2 < 0.$$

^{*)} Бу теореманинг исботини китобхон [25] китобдан ўқиши мумкин.

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

12.1-§. ЕЧИМНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯҒОНАЛИГИ ҲАҚИДА

1. Асосий тушунчалар. Мазкур китобнинг кириш қисмида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар тўғрисида тушунча берган эдик. Умумий ҳолда n та $x_1, \dots, x_n$ эркин ўзгарувчили хусусий ҳосилали тенгламани ушбу

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}, \dots\right) = 0 \quad (12.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда F — ўз аргументларининг берилган функциясидир. (12.1) тенгламада иштирок этаётган номаълум функция ҳосиласининг энг юқори тартибини шу *тенгламанинг тартиби* дейилади. (12.1) тенгламанинг *ечими* деб, $x_1, \dots, x_n$ ларнинг бирор ўзгариш соҳасида тенгламага кирган, ўзининг ҳосилалари билан аниқланган ва тенгламани айниятга айлантирадиган $u = u(x_1, \dots, x_n)$ функцияни айтилади.

Ушбу

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (12.2)$$

кўринишдаги тенглама *биринчи тартибли n та ўзгарувчили хусусий ҳосилали тенглама* дейилади.

Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар учун кўпинча қискартирилган ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_n$$

белгилашлар ишлатилиб, булар ёрдамида (12.2) тенглама бундай ёзилади:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (12.2')$$

Эркин ўзгарувчилар сони иккита бўлган ҳолда уларни x ва y , номаълум функцияни z , ҳосилаларни эса $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ орқали белгилаб, тенгламани

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (12.3)$$

кўринишда ёзилади.

Маълумки, n -тартибли оддий дифференциал тенглама чексиз кўп ечимларга эга. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларда эркин ўзгарувчиларнинг сони биттадан ортиқ бўлгани учун бундай тенгламалар ҳам чексиз кўп ечимга эга эканлигини кутиш мумкин.

Мисоллар. 1. Номалум $z(x, y)$ функция учун

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

тенглама $z(x, y)$ нинг x га боғлиқ эмаслигини кўрсатади. Демак,

$$z = \varphi(y),$$

бунда $\varphi(y)$ — y нинг ихтиёрий функцияси.

2. Ушбу

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

хусусий ҳосилалар тенглама эркин ўзгарувчиларни

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta$$

формулалар ёрдамида алмаштириш натижасида

$$2 \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0$$

кўринишга келади, бунда $z(x, y) = v(\xi, \eta)$.

Охириги тенгламадан $v(\xi, \eta)$ функция η га боғлиқ эмаслиги келиб чиқади. Шунинг учун

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi)$$

деб ёзиш мумкин, бунда $\varphi(\xi)$ — ξ нинг ихтиёрий функцияси.

Демак, $z(x, y) = \varphi(x + y)$. Худди шунга ўхшаш, α ва β лар ўзгармас ҳақиқий сонлар бўлса,

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \beta \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

тенгламанинг ечими учун $z(x, y) = \varphi(\beta x + \alpha y)$ ни ҳосил қиламиз, бунда $\varphi(\beta x + \alpha y)$ ихтиёрий функция.

3. Ушбу

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

тенгламани кўрамиз. Уни x бўйича интеграллаб, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(y)$ тенгламани ҳосил қиламиз, бунда y нинг ихтиёрий функцияси $\varphi(y)$. Энди y бўйича интеграллаб,

$$z(x, y) = \varphi(y)dy + \varphi_1(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда x нинг ихтиёрий функцияси $\varphi_1(x)$. $\{\varphi(y)dy = \varphi_2(y)\}$ деб белгилаб, натижада $z(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ формулага эга бўламиз, бунда $\varphi(y)$ ихтиёрий бўлгани учун $\varphi_2(y)$ ҳам y нинг ихтиёрий дифференциалланувчи функцияси-дир.

Юқорида келтирилган мисоллар биринчи тартибли хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламанинг барча ечимлари формуласи, яъни умумий ечими битта ихтиёрий функцияга, иккинчи тартиблиники иккита ихтиёрий функцияга, m -тартибли тенгламанинг умумий ечими m та ихтиёрий функцияга боғлиқ бўлиши керак деган фикрга олиб келади. Бу фикр тўғри бўлса-да, лекин уни аниқлаш зарур. Шу мақсадда хусусий ҳосилалар дифференциал тенглама ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги С. В. Ковалевская теоремасини келтирамиз. m -тартибли юқори ҳосилалардан биттасига нисбатан ечилган ушбу

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} = f \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}}, \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} \right) \quad (12.4)$$

тенгламани кўрамиз. Оддий дифференциал тенгламаларга ўхшаш (12.4) тенглама учун ҳам маълум шартларини, масалан, бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимни топиш масаласини қўйиш мумкин. (12.4) тенглама учун бошланғич шартлар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_1 = x_1^0 \text{ да} \\ u = \varphi_0(x_2, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \varphi_1(x_2, \dots, x_n), \\ \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}} = \varphi_{m-1}(x_2, \dots, x_n), \quad (12.5)$$

бунда $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ берилган функциялар. (12.4) тенгламанинг (12.5) шартларини қаноатлантирадиган ечимини топишни Коши масаласи дейилади.

2. Ковалевская теоремаси. Агар (12.5) бошланғич шартда берилган $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ функциялар бошланғич $(x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтанинг атрофида аналитик функция, f функция эса ўз аргументларининг ушбу бошланғич қийматлари $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$.

$$u_0 = \varphi_0(x_2^0, \dots, x_n^0), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_0 = \varphi_1(x_2^0, \dots, x_n^0), \dots$$

$$\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} \right)_0 = \left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^m} \right)_0 \quad \left| \quad x_1 = x_1^0 \right.$$

атрофида аналитик бўлса, у ҳолда (12.4) тенгламанинг $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ нуқта атрофида аналитик бўлган бирдан-бир ягона ечими мавжуд.

Шундай қилиб, Ковалевская теоремасига асосан (12.4), (12.5) масаланинг ечими бошланғич $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ функциялар ёрдамида аниқланади.

Келтирилган теореманинг исботи аналитик функциялар назариясига асосланган бўлгани учун биз уни келтирмаймиз.

Шу нарсага таъкидлаб ўтамизки, (12.4), (12.5) масала кичик соҳада, яъни $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтанинг атрофида кичик атрофида қўйилган бўлиб, шу атрофда бирдан-бир ечимга эгадир.

3. Коши масаласининг геометрик талқини. Эркин ўзгарувчиларнинг сониникита бўлган ҳолда биринчи тартибли хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламани интеграллаш масаласи ҳамда Коши масаласи жуда содда геометрик талқинга (интерпретацияга) эга. Биринчи тартибли (12.3) тенгламани ёки хусусий ҳосилалардан биттасига нисбатан ечилган ушбу

$$p = f(x, y, z, q) \quad (12.3')$$

тенгламани текширамиз.

(12.3) ёки (12.3') тенгламанинг счмнини топиш

$$z = \Phi(x, y) \quad (12.6)$$

функцияни топиш демакдир.

(12.6) функция (x, y, z) ўзгарувчиларнинг фазосида сиртни ифодалайди, бу сиртни одатда (12.3) ёки (12.3') тенгламанинг *интеграл сирти* дейилади. Демак, хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламанинг счимларини топиш масаласи интеграл сиртларни топиш масаласидан иборатдир.

Агар (12.6) ни сиртни аниқлайдиган тенглама деб карасак, бу сиртга (x, y, z) нуктада ўтказилган уринма текислик

$$Z - z = \frac{\partial \Phi}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} (Y - y)$$

ёки

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

тенглама билан ифодаланади, бунда X, Y, Z ўзгарувчи координаталар, p ва q лар уринма текислиكنинг бурчак коэффицентларидир.

Шундай қилиб, берилган хусусий ҳосилалар (12.3) тенглама изланаётган интеграл сирт нуктасининг x, y, z координаталари билан бу сиртга шу нуктада ўтказилган уринма текислиكنинг бурчак коэффицентлари p ва q орасидаги муносабатни ифодалайди. (12.3') тенглама учун Коши масаласи ҳам содда талқинга эга. (12.3') тенглама учун *Коши масаласи* бундай қўйилади: (12.3') тенгламанинг шундай счми топилсинки, у счим x ўзгарувчининг берилган бошланғич қийматида y ўзгарувчининг берилган функциясига тенг бўлсин, яъни

$$x = x_0, \quad z = q(y), \quad (12.7)$$

(12.7) тенглама фазода *эгри чизикни* ифодалайди. Демак, Коши масаласи берилган (12.7) эгри чизикдан ўтувчи интеграл сиртни топишдан иборат. (12.7) эгри чизик махсус кўринишга эгадир; у YOZ текисликка параллел бўлган $x = x_0$ текисликда ётувчи *ясси* эгри чизикдан иборат. Ўзгарувчиларининг бундай тенг ҳуқуқли эмаслиги (12.3) тенгламада x ўзгарувчининг махсус роль ўйнаётганлигидан келиб чиқади. Агар тенглама (12.3) кўринишда берилган бўлса, Коши масаласини шундай қўйиш мумкинки, ўзгарувчиларининг ҳеч қайсиси махсус ролни ўйнамайди. Кошининг бундай умумлашган масаласи қуйидагича қўйилади: (12.3) *тенгламанинг берилган*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

эгри чизикдан ўтувчи интеграл сирти топилсин. Эслатиб ўтамизки, икки ўзгарувчили дифференциал тенглама учун ишлатилган геометрик терминларни ўзгарувчиларининг сонини кўп бўлган ҳолда ҳам ишлатиш мумкин. $x_1, x_2, \dots, x_n$, u ўзгарувчиларининг сонли қиймаглари мажмуаси $(n+1)$ ўлчовли фазонинг нуктаси, бу фазода (12.2) тенгламанинг ушбу

$$u = \Phi(x_1, \dots, x_n, t)$$

кўринишдаги ечими эса n ўлчовли *интеграл гиперсирт* ёки *сирт* дейилади. Кошининг бошланғич сиртлари, масалан, $(n-1)$ ўлчовли

$$(x_1 = x_1^0 \text{ да } u = \varphi(x_2, \dots, x_n))$$

гиперсиртдан иборат бўлиб, бу сирт орқали изланаётган интеграл гиперсирт ўтиши керак.

Юқорида келтирилган Ковалевская теоремасига асосан тенгламада бошланғич шартларда иштирок этаётган функциялар аналитик бўлса, бу тенгламанинг ихтиёрий функцияларга боғлиқ бўлган аналитик ечимларининг тўпламини, яъни умумий ечимини ҳосил қилиш мумкин. Аммо жуда кўп тенгламалар учун умумий ечимнинг мавжудлиги ҳал қилинмаган.

Хусусий ҳосилали битта номатълум функцияли биринчи тартибли тенгламалар иккита содда ҳоссага эга. Биринчидан, улар битта ихтиёрий функцияга боғлиқ бўлган умумий ечимга эгадир. Иккинчидан, хусусий ҳосилали биринчи тартибли тенгламани интеграллаш масаласи оддий дифференциал тенгламалар системасини интеграллашга келади.

Бу тенгламалар орасида бундай яқин боғланиш борлиги туфайли хусусий ҳосилали биринчи тартибли тенгламалар назариясини оддий дифференциал тенгламалар назарияси курсида баён қилиш табиийдир.

12.2-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ТЕНГЛАМА

1. Дастлабки тушунчалар. Ушбу

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (12.8)$$

тенгламани текширамыз. (12.8) тенгламани биринчи тартибли хусусий ҳосилали *чизикли бир жинсли тенглама* дейлади. (12.8) тенгламанинг $X_1, \dots, X_n$ коэффициентлари берилган $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ нуктанинг бирор атрофида аниқланган, ўзларининг биринчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз ҳамда бир вақтда нолга айланмайди деб фараз қиламыз. Масалан,

$$X_n(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$$

деб ҳисоблашимиз мумкин.

(12.8) тенглама билан бир каторда ушбу

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} \quad (12.9)$$

симметрик формадаги оддий дифференциал тенгламалар системасини текширамыз. $X_1, \dots, X_n$ коэффициентларга нисбатан юқорида қўйилган шартларга асосан (12.9) система $(n-1)$ та эркин биринчи интегралларга эга:

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1} \quad (12.10)$$

Бу тасдиқнинг тўғрилиги (12.9) системанинг ушбу $(n-1)$ та

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n} \quad (12.11)$$

тенгламаларнинг нормал системасига тенг кучлилигидан, (12.11) система учун нормал система интегралларининг мавжудлиги ҳақидаги теорема шартларининг бажарилишидан келиб чиқади. Интегралларнинг (12.10) системаси $x_1, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг фазосида $(n-1)$ параметрли чизиклар оиласини аниқлайди. Бу чизикларни (12.8) тенгламанинг *характеристикалари* дейилади.

12.1-теорема. (12.9) система *ихтиёрий биринчи* $\psi(x_1, \dots, x_n) = C$ *интегралининг чап қисми хусусий ҳосилали* (12.8) *тенгламанинг ечимидан иборат.*

Исбот. Биринчи интегралнинг таърифига асосан (12.9) системанинг ихтиёрий интеграл чизиги бўйлаб ψ функция айнан ўзгармасга тенг бўлади, яъни $\psi = C$. Демак,

$$d\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0. \quad (12.12)$$

Бунда $dx_1, \dots, dx_{n-1}$ дифференциалларни (12.11) тенгликларга асосан уларнинг кийматлари билан алмаштирсак, ушбу

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{X_n}{X_n} \right] dx_n \equiv 0$$

ёки

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0 \quad (12.13)$$

айният ҳосил бўлади.

(12.9) система интеграл чизиклари учун $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг текшириладиган ўзгариш соҳасининг ҳар бир нуктасида ягоналик ўринли ва (12.13) айниятнинг чап томони $C_1, \dots, C_{n-1}$ ўзгармасларга боғлиқ бўлмайди. Шундай қилиб, (12.13) айният бирор интеграл чизик бўйлаб ўринли бўлибгина қолмай, балки барча текшириладиган соҳада ўринлидир, бу эса $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ функция берилган (12.8) тенгламанинг ечими эканини билдиради.

12.2-теорема. (12.8) *тенгламини қаноатлантирадиган ихтиёрий* $\psi(x_1, \dots, x_n)$ *функцияни ўзгармас сонга тенглаштирилса*, (12.9) *системанинг биринчи интеграли ҳосил бўлади.*

Исбот. $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ функция (12.8) тенгламанинг ечими бўлсин. У ҳолда (12.13) айният ўринли.

ψ функциянинг тўлиқ дифференциалини ҳисоблаб, (12.9) ёки (12.10) системага асосан қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = \\ &= \left(X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \cdot \frac{1}{X_n} dx_n. \end{aligned}$$

Бу тенгликдан (12.13) айниятга кўра $d\psi=0$, яъни (12.9) системанинг ихтиёрий интеграл чизиги бўйлаб $\psi(x_1, \dots, x_n)=C$. Ушбу $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})=C$ ифода ҳам (бунда Φ — ихтиёрий дифференциалланувчи функция) (12.9) системанинг биринчи интегралидан иборат, чунки (12.9) системасининг интеграл чизиги бўйлаб барча $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ функциялар ўзгармасга айланади, шунинг учун $\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ функция ҳам (12.9) системанинг интеграл чизиги бўйлаб ўзгармасга айланади. Демак, $u=\Phi(\psi_1, \dots, \psi_n)$, (12.8) чизикли бир жинсли тенгламанинг ечимидир.

12.3-теорема. Ушбу

$$u=\Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \psi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n))$$

функция (бунда Φ — ихтиёрий функция) (12.8) тенгламанинг умумий ечимидан иборат, яъни (12.8) тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига оладиган ечимдир.

Исбот. Фараз қилайлик, $u=\psi(x_1, \dots, x_n)$ функция (12.8) тенгламанинг бирор ечими бўлсин. Шундай Φ функциянинг мавжуд эканини кўрсатамизки, бу функция учун $\psi=\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ бўлади. $\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ функциялар (12.8) тенгламанинг ечимлари бўлгани учун

$$\sum_1^n X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \sum_1^n X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \dots, \quad \sum_1^n X_i \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} \equiv 0. \quad (12.14)$$

(12.4) тенгламани $x_1, \dots, x_n$ ларга нисбатан n та тенгламадан тузилган чизикли бир жинсли система деб қараймиз. $x_1, \dots, x_n$ лар шартга кўра бир вақтда нолга айланмагани учун текшириладиган соҳанинг ҳар бир $x_1, \dots, x_n$ нуктасида (12.14) система тривиалмас ечимга эга. Бундан бу системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

текшириладиган соҳада айнан нолга тенг деган хулосага келамиз. Аммо, $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ функциялар якобианининг нолга тенглиги бу функциялар чизикли боглиқ эканини кўрсатади, яъни

$$F(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})=0. \quad (12.15)$$

(12.9) системанинг $\psi_i(x_1, \dots, x_n)=C_i (i=1, 2, \dots, n)$ биринчи интеграллари чизикли эркин бўлгани учун

$$\begin{aligned} D(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) \\ D(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

якобианининг

$$\begin{aligned} D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \\ D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{n-1}}) \end{aligned}$$

кўринишдаги $(n-1)$ -тартибли минорларидан камда биттаси нолдан фарқли бўлади. Демак, (12.15) тенгламани

$$\Psi = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин. Бу тенгламага мос оддий дифференциал тенгламалар системаси қуйидагидан иборат:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Бу системанинг чиқиқли эркин биринчи интеграллари

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \quad \dots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1} \quad (x_n \neq 0).$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

u - ихтиёрий воқеани даражали бир жинсли функциядир.

2. Ушбу

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Берилган тенгламага мос оддий тенгламалар системаси бу ҳолда битта тенгламадан иборатдир:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

Бу тенгламанинг интеграл $x^2 + y^2 = C$. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими $z = \Phi(x^2 + y^2)$ (бунда Φ - ихтиёрий функция) бўлиб, айланни ўқи Oz дан иборат бўлган айланма сиртлардир.

2. Чиқиқли бир жинсли тенглама учун Коши масаласининг ечилиши. (12.8) тенглама учун Коши масаласи қуйидагича қўйилади: (12.8) тенгламанинг шундай $u = f(x_1, \dots, x_n)$ ечими топилсинки, y ушбу

$$u(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (12.16)$$

бошланғич шартни қаноатлантирсин, бунда x_n'' берилган ҳақиқий сон, $u(x_1, \dots, x_n)$ берилган узлуксиз дифференциалланувчи функция.

Юқорида исботланганига асосан (12.8) тенгламанинг умумий ечими

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

формула билан аникланади.

Демак,

$$u = \varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})]$$

функция (12.8) тенглама учун қўйилган Коши масаласининг ечимидан иборат бўлади.

Мисоллар. 1. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ тенгламанинг $z|_{y=0} = \varphi(x)$ шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Биламизки, у тенгламанинг умумий ечими (аввалги банднинг 2- мисолига қараб)

$$z = \Phi(x^2 + y^2),$$

дан иборат. Бу ҳолда $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, 0) = \bar{\varphi} = x^2$, бундан $x = \sqrt{\bar{\varphi}}$. Изланаятган ечим $z = \varphi(\sqrt{\bar{\varphi}}) = \varphi(x^2 + y^2)$.

$$2. \text{ Ушбу } yz \frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

тенгламанинг $u|_{y=z} = q(x, z)$ шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Берилган тенгламага мос оддий дифференциал тенгламалар системаси:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Бу системанинг чизикли эркин биринчи интеграллари

$$\psi_1 = z^2 - y^2 = c_1, \quad \psi_2 = x^2 - y^2 = c_2$$

лардан иборат. У ҳолда умумий ечим

$$u = \Phi(z^2 - y^2, x^2 - y^2),$$

$$\psi_1(x, y_0, z) = z^2 - y_0^2 = \psi_1, \quad \psi_2(x, y_0, z) = x^2 - y_0^2 = \psi_2.$$

Булардан

$$z = \sqrt{\psi_1 + y_0^2}, \quad x = \sqrt{\psi_2 + y_0^2}.$$

Демак, изланаятган ечим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \varphi(\sqrt{\psi_2 + y_0^2}, \sqrt{\psi_1 + y_0^2}) = \\ &= \varphi(\sqrt{x^2 - y^2 + y_0^2}, \sqrt{z^2 - y^2 + y_0^2}) \end{aligned}$$

12.3- §. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ЧИЗИКЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМА

1. Ечим, умумий ечим ва махсус ечим тушунчалари. Ушбу

$$\begin{aligned} X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (12.22)$$

(12.24) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$v = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$$

бунда Φ — ихтиёрий функция.

Охириги функцияни юлга тенглаштириб, (12.23) тенглакка асосан берилган (12.22) тенгламанинг ечимини ушбу

$$\Phi[\psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, u)] = 0 \quad (12.27)$$

кўринишда тонамиз. Бу ечимни (12.22) тенгламанинг *умумий ечими* дейилади.

Бу ҳусул билан топилган ечимлардан ташқари $v(x_1, \dots, x_n, u) = 0$ тенгламадан аниқланадиган n ечимлар бўлиши мумкин, бу ерда v функция (12.24) тенгламанинг ечими бўлмай, у тенгламани фақат $v(x_1, \dots, x_n, u) = 0$ тенгламага асосан айниятга айлантиради. Бундай ечимларни *махсус ечимлар* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$(x_1 - \alpha_1) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_2 - \alpha_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + (x_n - \alpha_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = u - \alpha,$$

$$(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \text{const})$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин. (12.24) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$(\alpha_1 - \alpha_1) \frac{\partial v}{\partial x_1} + (\alpha_2 - \alpha_2) \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + (\alpha_n - \alpha_n) \frac{\partial v}{\partial x_n} + (u - \alpha) \frac{\partial v}{\partial u} = 0$$

Бу тенгламага мос оддий дифференциал тенгламалар системасини тузамиз:

$$\frac{dx_1}{x_1 - \alpha_1} = \frac{dx_2}{x_2 - \alpha_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - \alpha_n} = \frac{du}{u - \alpha}$$

Бу системанинг циклик эркин интеграллари қуйидагилардан иборат:

$$\frac{x_1 - \alpha_1}{u - \alpha} = C_1, \quad \frac{x_2 - \alpha_2}{u - \alpha} = C_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n - \alpha_n}{u - \alpha} = C_n.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$\Phi\left(\frac{x_1 - \alpha_1}{u - \alpha}, \frac{x_2 - \alpha_2}{u - \alpha}, \dots, \frac{x_n - \alpha_n}{u - \alpha}\right) = 0.$$

2. Ушбу

$$(1 + \sqrt{u - x - y}) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

тенглама интеграллансин

(12.25) система қуйидагича бўлади:

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{u - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{2}.$$

Бундан

$$u - 2y = C_1$$

биринчи интегрални топамиз. Бу системадаги учинчи қасрнинг сурат ва махражидан биринчи икки қасрнинг сурат ва махражини айириб

$$\frac{d(u-x-y)}{\sqrt{u-x-y}} = \frac{dy}{1}$$

інтегралланувчи комбінаційни топамиз. Бундан

$$y + 2\sqrt{u} - x - y = C,$$

биринчи интегрални ҳосил қиламиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$\Phi(u - 2y, 2\sqrt{u} - x - y + y) = 0$$

кўринишга эга бўлади. Текшириб кўриш қийин эмаски,

$$u = x + y$$

функция берилган тенгламани каноатлантиради. Бу ечим топилган умумий ечимдан келиб чиқмайди. Ҳақиқатан, агар $u = x + y$ ни умумий ечимга олиб бориб қўйсак, $\Phi(x - c, y) = 0$ тенглик ҳосил бўлади. Бу муносабат (x ва y эркин ўзгарувчилар бўлгани учун) $\Phi(\varphi, \psi)$ функцияни ихтиёрий танланганда ҳам ўринли бўлмайди. Агар $v = u - x - y$ нифодани v учун ҳосил бўладиган тенгламанинг чап томонига олиб бориб қўйсак, $-\sqrt{u - x - y} = -\sqrt{v}$ тенглик ҳосил бўлади, бу нифода фақатгина $v = 0$ тенгликка асосан нолга айланади. Шундай қилиб, $u = x + y$ функция берилган тенгламанинг махсус ечимидан иборат.

2. Чизикли бир жинсли бўлмаган тенглама учун Коши масаласининг ечилиши. *Коши масаласи* (12.22) тенгламанинг

$$u|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = q(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (12.28)$$

шартни каноатлантирадиган $u = f(x_1, \dots, x_n)$ ечими топилсин, бунда Φ берилган узлуксиз дифференциалланувчи функция. (12.22) тенгла-
манинг умумий ечимини билган ҳолда Коши масаласи ечимини
қандай топish кераклигини кўрсатамиз. Бу ерда асосий масала
умумий ечимдаги Φ функциянинг кўринишини аниқлашга келади.

(12.26) биринчи интегралларда x_n ўрнига бошланғич x'_n

қийматни қўйиб, ҳосил қилинган ифодаларни Ψ лар орқали белгилаб оламиз, яъни

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x'_n, u) &= \psi_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x'_n, u) &= \psi_2, \\ &\vdots \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x''_n, u) &= \psi_n. \end{aligned} \quad (12.29)$$

(12.28) бошланғич шартни үшбү кўринишда ёзамиз:

$$x_i = x_i^0 \text{ да } u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Бү шартни (12.27) тенглик билан таққослаб, Φ функцияни

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = u - \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (12.30)$$

тенглик бажариладиган қилиб танлаймиз.

координата ўқларига параллел бўлган кесмалардан ташкил топган синик чизик бўйича олинади.

Юқорида айтганимизга асосан z ни x ва y нинг функцияси деб қараб, текширилатган соҳада $R \neq 0$ деб фараз қиламиз.

Бу ҳолда (12.32) тенгламадан

$$dz = P_1 dx + Q_1 dy \quad \left(\text{бунда } P_1 = \frac{P}{R}, \quad Q_1 = \frac{Q}{R} \right). \quad (12.33)$$

Иккинчи томондан, z функциянинг тўлиқ дифференциали учун қуйидаги ифодага эгамиз:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Бу икки тенгликдан dx ва dy дифференциаллар богланмаган бўлгани учун

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P_1(x, y, z), \quad (12.34)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q_1(x, y, z) \quad (12.35)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

z функцияни x ва y лар бўйича иккинчи тартибли ҳосилаларга, P_1 ва Q_1 ни эса ўз аргументлари бўйича биринчи тартибли ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз. Ушбу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши кераклигидан

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

ёки

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} P_1 \quad (12.36)$$

шарт келиб чиқади. (12.36) шартни бундай ёзиш мумкин:

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0. \quad (12.37)$$

Демак, $\vec{F}$ вектор майдонга ортогонал бўлган $u(x, y, z) = C$ сиртлар оиласининг мавжуд бўлиши учун (12.37) шартнинг бажарилиши зарур, (12.37) шартни (12.32) тенгламанинг тўлиқ интегралланувчилик ёки битта $U(x, y, z) = C$ муносабатда интегралланувчилик шarti дейилади.

Агар $\vec{F}$ майдон потенциал майдон бўлмаса, айрим ҳолларда шундай скаляр $\mu(x, y, z)$ кўпайтувчини танлаб олиш мумкинки, $\vec{F}$ ни $\mu(x, y, z)$ га кўпайтирилгандан сўнг потенциал майдон ҳосил

бўлади. Агар шундай кўпайтувчи мавжуд бўлса, у ҳолда $\mu \vec{F} = \text{grad} U$ ёки $\mu P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\mu R = \frac{\partial u}{\partial z}$. Охириги муносабатлардан

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \left(Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{1}{\mu} \left(R \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{1}{\mu} \left(P \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Бу тенгликларнинг биринчисини R га, иккинчисини P га, учинчисини эса Q га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликларни ҳадлаб қўшсак, ушбу

$$R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенглик эса (12.37) шартнинг ўзгинасидир.

Демак, агар Пфафф тенгламаси учун *интегралловчи кўпайтувчи* мавжуд бўлса, у ҳолда тўлиқ интегралланувчилик шarti бажарилади. Энди (12.37) шартни берилган вектор майдонга ортогонал бўлган сиртларнинг мавжудлигининг фақат зарурий шarti эмас, балки етарли шarti эканлигини ҳам кўрсатамиз.

Текшириляётган D соҳада (12.37) шарт айнан бажарилган ва P_1 , Q_1 функциялар ўз аргументлари бўйича биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

У ҳолда D соҳанинг ҳар бир нуктасидан (12.33) системанинг ёки бари бир, (12.32) тенгламанинг битта ва фақат битта интеграл сирти ўтади. Аввало (12.33) системанинг берилган $A(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан ўтадиган ечимининг ягоналигини кўрсатамиз. Шу мақсадда (12.34), (12.35) тенгламаларни текшираамиз. (12.34) тенглама $y = y_0$ текисликда $A(x, y_0, z_0)$ нуктадан ўтувчи ягона интеграл чизик L ни аниқлайди. (12.35) тенглама эса, x бирор ўзгармас қиймат қабул қилганда, $x = \text{const}$ текисликда ўтувчи L эгри чизикнинг нуктасидан ўтадиган ягона $l(x)$ эгри чизикни аниқлайди. L чизикнинг барча нукталари учун тузилган $l(x)$ чизиклар тўплами (12.33) системасининг $A(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан ўтувчи бирдан-бир S интеграл сиртини аниқлашини кўрсатамиз. Бу сиртнинг тузилишидан равшанки, унинг барча нукталари учун (12.35) тенглама қаноатлантирилади. S сиртнинг барча нукталари учун (12.34) тенгламанинг қаноатлантирилишини ҳам кўрсатамиз.

S сиртнинг тенгламасини

$$z = z(x, y)$$

кўринишда ёзиб олсак, аввалги параграфларнинг натижаларига асосан $z(x, y)$ функция x бўйича биринчи тартибли узлуксиз ҳосилга

эга бўлади. $\frac{\partial z}{\partial x}$ нинг (12.34) тенгламанинг қаноатлантиришини кўрсатиш керак. S сиртнинг тузилишига асосан (12.34) тенглама $y=y_0$ да қаноатлантирилади. Унинг y ўзгарувчининг бошқа қийматларида ҳам қаноатлантирилишини кўрсатиш учун ушбу

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P_1(x, y, z) = F$$

белгилашни киритиб, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосилани тошамиз. $z(x, y)$ функция (12.35) тенгламани қаноатлантиришидан ҳамда бу тенгламанинг ўнг томони барча аргументлари бўйича биринчи тартибли ҳосилаларга эга эканлигидан $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ҳосиланинг мавжудлиги келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} P_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial z} F - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z} Q. \end{aligned} \quad (12.38)$$

Юқоридаги ифодани ҳисоблашда $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$ тенгликлардан фойдаландик. (12.37) ёки (12.36) шартга асосан (12.38) тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z} F.$$

Бундан

$$F(x, y) = F(x, y_0) e^{\int_{y_0}^y \frac{\partial Q_1}{\partial z} dy}.$$

F функция $y=y_0$ да нолга тенг бўлгани учун охириги тенгликдан унинг барча текширилатган y ларда ҳам нолга тенглиги келиб чиқади. Демак, $z(x, y)$ функция (12.34) тенгламани ҳам қаноатлантирилади.

Энди Пфафф тенгламаси учун (12.37) тўлиқ интегралланувчилик шarti бажарилмаган ҳолни кўрайлик. Юқорида баён қилингандан матълумки, бу ҳолда F майдонга ортогонал бўлган сиртлар мавжуд бўлмайди. Шу сабабли, Пфафф тенгламасини аввал айтганимиздек, биринчи хил талқин қилиб, F майдонга ортогонал бўлган сиртларни эмас, балки шу хусусиятга эга бўлган, чизикларни топиш масаласини кўямиз. Бошқача айтганда, Пфафф тенгламасини битта муносабатда эмас, балки иккита

$$u_1(x, y, z) = 0, \quad u_2(x, y, z) = 0$$

муносабатда интеграллаш керак. Масалада қўйилган чизикларни топиш учун юқорида ёзилган тенгликлардан биттасини, масалан,

$$u_1(x, y, z) = 0 \quad (12.39)$$

ни ихтиёрий бериш мумкин.

(12.32) ва (12.39) тенгламалардан эрки ўзгарувчилардан биттасини, масалан, z ни чиқариб,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб, ихтиёрий танлаб олинган $u_1(x, y, z) = 0$ сиртда изланаётган чизикларни топамиз.

Изоҳ. Агар (12.32) тенгламани бевосита интеграллаб бўлмаса, соддарок ҳолни текшириш ёрдами билан уни айрим ҳолларда интеграллаш мумкин. Бу усулда эрки ўзгарувчилардан биттасини, масалан, z ни ўзгармас ҳисоблаб, ушбу

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0 \quad (12.40)$$

оддий дифференциал тенгламани интегралланади, бунда z параметр ролини ўйнайди:

$$u(x, y, z) = C \quad (12.41)$$

(12.40) тенгламанинг интеграли бўлсин. Бу ердаги ихтиёрий ўзгармас z параметрининг функцияси бўлиши мумкин. Бу $C(z)$ функцияни шундай танлаб олиндики, (12.32) тенглама қаноатлантирилсин. (12.41) ни дифференциаллаб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \left[\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z) \right] dz = 0. \quad (12.42)$$

(12.32), (12.42) дифференциал тенгламаларнинг коэффициентлари пропорционал бўлиши керак:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} - C'(z) = R.$$

Ушбу

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z)}{R}$$

тенгламадан $C'(z)$ ни топиш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$(6x + yz)dx + (xz - 2y)dy + (xy + 2z)dz = 0$$

тенглама интеграллансин. Бу мисолда

$$F = (6x + yz)i + (xz - 2y)j + (xy + 2z)k.$$

Текшириб кўриш кийин эмаски, $\text{rot } \vec{F} = 0$. Маълумки, бу шарт бажарилганда $\vec{F}$ потенциал майдондан иборат бўлади, яъни $F = \text{grad } U$.

Демак,

$$U = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (6x+yz)dx + (xz-2y)dy + (xy+2z)dz.$$

Интеграл йўли сифатида бўғинлари координата ўқларига параллел бўлган синик чизикни оламиз. Интеграллаш натижасида $U=3x^2-y^2+z^2+xyz$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, изланаётган интеграл

$$3x^2-y^2+z^2+xyz=C.$$

2. Ушбу

$$ydx + (z-y)dy + xdz = 0$$

тенгламани каноатлантирувчи ва $2x-y-z=1$ текисликда ётувчи эгри чизиклар топилсин.

Берилган текислик тенгламасини дифференциаллаймиз:

$$2dx - dy - dz = 0.$$

Бу тенгликни x га кўпайтириб, ҳосил қилинган тенгликни берилган тенглама билан қўшамиз:

$$(y+2x)dx + (z-x-y)dy = 0.$$

$z=2x-y-1$ бўлгани учун

$$(y+2x)dx + (x-2y-1)dy = 0$$

ёки

$$2xdx - (2y+1)dy + d(xy) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Охириги тенгламадан изланаётган эгри чизиклар оиласи

$$x^2 - y^2 - y + xy = C$$

эканлиги келиб чиқади.

3. Ушбу

$$yzdx + 2zxdy - 3xydz = 0$$

тенглама интеграллансин.

Изоҳда кўрсатилган усул билан бу тенгламани интеграллаймиз. z ни ўзгармас деб ҳисобласак, $dz=0$ бўлади ва берилган тенглама қуйидаги тенгламага айланади:

$$ydx + 2xdy = 0.$$

Бу тенгламанинг интеграли

$$xy^2 = C$$

дан иборат. Бу тенгликдаги C ни Z нинг функцияси деб ҳисоблаб ва уни дифференциаллаб ушбу

$$y^2dx + 2xydy - C'(z)dz = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама берилган тенглама билан бир хил бўлиши учун буларнинг коэффицентлари пропорционал бўлиши керак, яъни

$$\frac{y^2}{yz} = \frac{2xy}{2zx} = \frac{-C'(z)}{3xy}.$$

Охирги тенгликдан $C(z) = xy^2$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\frac{dC}{C} = \frac{3dz}{z}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан

$$C(z) = az^3, \quad a = \text{const.}$$

Демак, берилган тенгламанинг ечими

$$xy^2 = az^3$$

дан иборатдир.

12.5-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. Тўлиқ интеграл. Аввал номатълум функция иккита эркин ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолни текшираамиз.

Биз биламизки, бу ҳолда биринчи тартибли хусусий ҳосилалар тенглама куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (12.43)$$

бунда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар тенгламанинг иккита ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ ечимини унинг *тўлиқ интеграл*и дейилади. Тўлиқ интеграл ошқормас кўринишда куйидагича ёзилади:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0. \quad (12.44)$$

Тўлиқ интегрални бошқачароқ ҳам таърифлаш мумкин. Тўлиқ интеграл учта ўзгарувчи ва иккита ихтиёрий ўзгармас орасидаги шундай муносабатки, ундан ва уни эркин ўзгарувчилар бўйича дифференциаллаш натижасида ҳосил бўладиган муносабатлардан ўзгармасларни чиқариб ташлаш натижасида берилган тенглама ҳосил бўлади. Бу иккита таъриф бир-бирига эквивалентдир. Лекин биз бунинг исботига тўхталмай ([23] га қаранг), берилган тенглама бўйича тўлиқ интегрални топиш усулини келтираамиз. Тўлиқ интегралнинг иккинчи таърифига асосан (12.43) тенглама ушбу

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q = 0 \end{cases} \quad (12.45)$$

системадан a ва b ларни чиқариш натижасида ҳосил бўлган тенгламага эквивалентдир. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар тенгламаларнинг ҳамма ечимларини тўлиқ интегралдан ўзгармасларни вариациялаш усули билан ҳосил қилиш мумкинлиги Лагранж томонидан кўрсатилган.

Фараз қилайлик, a ва b лар x, y ўзгарувчиларнинг бирор функциялари бўлсин. z нинг x ва y бўйича ҳосилалари, яъни p ва q лар ушбу

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (12.46)$$

муносабатлардан ҳисобланади. (12.45) ва (12.46) формулаларни таққослаб, қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (12.47)^\dagger$$

Бу тенгламалардан a ва b функцияларни аниқлаш керак. Уч ҳол бўлиши мумкин:

1) Агар

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \quad (12.48)$$

тенгликлар бажарилса, (12.47) тенгламалар қаноатлантирилади. (12.48) тенгламаларни a ва b га нисбатан ечиш мумкин деб фараз қиламиз. Бу тенгламаларни ечиш натижасида ҳосил бўлган x ва y нинг функцияларини, яъни a ва b нинг қийматларини (12.44) га қўйсақ, ҳосил бўлган ифода (12.43) тенгламанинг ихтиёрий ўзгармасларга ҳам, ихтиёрий функцияларга ҳам боғлиқ бўлмаган ечимидан иборат бўлади. Бу ечимни *махсус интеграл* дейилади.

2) Энди $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда $a = \text{const}$; $b = \text{const}$ бўлиб, биз тўлиқ интегралга қайтган бўламиз.

3) Умумий ҳолда, (12.47) ни икки номаълумки иккита чизикли алгебраик тенгламалар системаси деб қарасак, унинг ечимга эга бўлиши учун ушбу

$$\frac{D(a, b)}{D(x, y)} = 0 \quad (12.49)$$

шартнинг бажарилиши зарурлиги келиб чиқади. (12.49) тенглик a ва b ўртасида *функционал боғлиқлик* мавжудлигини кўрсатади. Агар масалан, $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$ ёки $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$ бўлса, y ҳолда бу боғлиқликни

$$b = \omega(a) \quad (12.50)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ердаги ω — ихтиёрий функция. (12.50) га асосан, (12.47) система қуйидаги битта муносабатга келади:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \omega'(a) = 0.$$

Агар бу тенгликдан a ни x ва y нинг функцияси сифатида топиш мумкин бўлса, y ҳолда (12.50) тенгламадан b ни ҳам эркин ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида топамиз. a ва b нинг топилган қийматларини (12.44) га қўйиб, (12.43) тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз. Дифференциалланувчи $\omega(a)$ функцияни ихтиёрий танлаб олингандаги ечимларнинг бундай тўплами (12.43) тенгламанинг *умумий интеграл*и дейилади. Ихтиёрий $\omega(a)$ функциянинг ҳар бир танлаб олинишига, умуман айтганда, умумий интегралга кирувчи бирор *хусусий ечим* мос келади. Шу маънода, умумий ечим ихтиёрий функцияга боғлиқ бўлади деб айтишимиз мумкин.

Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар тенгламанинг тўлиқ умумий ва махсус интегралларини соддагина геометрик талқин қилиш мумкин. Хусусий ҳосилалар тенгламанинг ечими (x, y, z) координаталар фазосида сиртни аниқлайди, бу сиртни *интеграл сирт* деб аталади. Бешта (x, y, z, p, q) микдорлар тўпламини *элемент* дейилади, бунда x, y, z бирор нуктанинг координаталари, p ва q эса шу нуктадан ўтувчи текисликнинг бурчак коэффициентлари. Бу таърифга асосан (12.43) тенгламанинг ечимини топиш масаласи қуйидагича қўйилиши мумкин: шундай сирт топилсинки, бу сиртнинг нукталари ва уринма текисликларнинг бурчак коэффициентларидан ташкил топган элементлар (12.43) муносабатни қаноатлантирсин. (12.44) тўлиқ интеграл икки параметрга боғлиқ бўлган сиртлар оиласидан иборатдир. Энди геометрик нукта назардан умумий ва махсус интеграллар нимадан иборат эканини кўрамиз. Умумий интегралга кирадиган ечимни топиш учун ихтиёрий (12.50) муносабатни олиб b нинг қийматини (12.44) га қўйиб, a параметрни ушбу

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \omega'(a) = 0$$

муносабатлардан чиқарган эдик. Охириги икки тенглама эса бир параметрли сиртлар оиласининг *ўрама сиртини* аниқлайди. Бу нарса геометрик нукта назардан қуйидагини ифодалайди: (12.50) муносабатни асосан берилган икки параметрли (12.44) оиладан бир параметрли бирор оилани ажратамиз, сўнгра бу оила ўрама сиртини топамиз. Ўрама сирт ўзининг ҳар бир нуктасида ўралувчи сиртлардан биттасига урингани учун, яъни умумий элементга эга бўлгани учун бу ўрама сирт ҳам берилган тенгламанинг ечимидан иборат бўлади.

Нихоят, биз биламизки, махсус интеграл ушбу

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$$

тенгламалардан a ва b ни чиқариш натижасида ҳосил бўлади. Бу жараён, маълумки, икки параметрли сиртлар оиласининг ўрамасига (агар у мавжуд бўлса) олиб келади. Юқоридагидек мулоҳаза юритиб, бу ўрама сиртнинг ҳамма элементлари берилган тенгламани қаноатлантиришига, яъни интеграл сирт эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Мисоллар. 1. Берилган R радиусли, марказлари xOy текислик нукталарида бўлган шар сиртларининг оиласи

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2$$

икки (a ва b) параметрли оиладан иборатдир. Бу оила тўлиқ интеграл бўладиган хусусий ҳосилдари тенгламани топиш учун z ни x ва y нинг функцияси деб ҳисоблаб, берилган муносабатни x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$x - a + zp = 0, \quad y - b + zq = 0.$$

Бундан $x - a = -zp$, $y - b = -zq$. Бу ифодаларни берилган тенгликка қўйиб, тўлиқ интегралга мос бўлган тенгламани топамиз:

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = R^2.$$

Умумий интегралга кирадиган ечимни ҳосил қилиш учун $b = \omega(a)$ муносабатни киритамиз, яъни марказлари $y = \omega(x)$, $z = 0$ чизикда ётувчи шарлар оиласини ажратамиз. Бундай оиланинг ҳар қандай ўрама сирти интеграл сирт бўлади ва умумий интегралга қиради.

Нихоят, махсус интеграл қуйидаги учта тенгликдан a ва b ларни чиқариш натижасида ҳосил бўлади:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = R^2, \quad x - a = 0, \quad y - b = 0.$$

Бундан $z = \pm R$. Ҳар бир шар сиртига битта нуктада уринувчи иккита текислик тенгламасини ҳосил қилдик.

Кўп ҳолларда тўлиқ интегрални топиш унча катта қийинчилик туғдирмайди.

1) Агар (12.43) тенглама $F(p, q) = 0$ ёки $p = \varphi(q)$ кўринишга эга бўлса, $q = a$ деб ҳисоблаб (бунда a — ихтиёрий ўзгармас)

$$p = \varphi(a), \quad dz = p dx + q dy = \varphi(a) dx + a dy$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Охириги тенгламани интеграллаб ушбу

$$z = \varphi(a)x + ay + b$$

тўлиқ интегрални топамиз.

2) Агар (12.43) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиш мумкин бўлса, яъни тенглама

$$\psi(x, p) = \psi(y, q)$$

кўринишга эга бўлса, $\psi(x, p) = \psi(y, q) = a$ деб ҳисоблаб (бунда a — ихтиёрий ўзгармас), бу тенгликларни (агар мумкин бўлса) p ва q га нисбатан ечиб, $p = \varphi_1(x, a)$, $q = \varphi_2(x, a)$ ларни топамиз. Сўнггра ушбу

$$dz = p dx + q dy = \varphi_1(x, a) dx + \varphi_2(y, a) dy$$

Пфафф тенгламасини интеграллаб

$$z = \int \varphi_1(x, a) dx + \int \varphi_2(y, a) dy + b$$

тўлиқ интегрални топамиз.

3) Агар берилган тенглама

$$F(z, p, q) = 0$$

кўринишга эга бўлса, u ҳолда $z = z(u)$ деб ҳисоблаб (бунда $u = ax + y$), ушбу

$$F\left(z, a, \frac{dz}{du}\right) = 0$$

оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Буни интеграллаб $z = \Phi(u, a, b)$ (бунда b — ихтиёрий ўзгармас) ёки

$$z = \Phi(ax + b, a, b)$$

тўлиқ интегрални топамиз.

4) Умумлашган Клеро тенгламаси

$$z = px + qy + f(p, q)$$

кўринишга эгадир. Текшириб кўриш қийин эмаски, унинг тўлиқ интеграли қуйидаги ифодадан иборатдир:

$$z = ax + by + f(a, b)$$

2. Ушбу

$$p = 3q^3$$

тенгламанинг тўлиқ интегрални топилсин. Бу тенглама 1) ҳолга тўғри келади:

$$q = a, p = 3a^3, dz = 3a^3 dx + a dy, z = 3a^3 x + ay + b.$$

3. Ушбу

$$p - 3x^2 = q^2 - y$$

тенгламанинг тўлиқ интегрални топилсин. Бу тенгламада ўзгарувчилар ажралган. Шу сабабли 2) ҳолда кўрсатилган усул билан тўлиқ интегрални топамиз:

$$p - 3x^2 = a, p = 3x^2 + a; q^2 - y = a, q = \sqrt{y + a},$$

$$dz = p dx + q dy = (3x^2 + a) dx + \sqrt{y + a} dy,$$

$$z = x^3 + ax + \frac{2}{3}(y + a)^{3/2} + b.$$

4. Ушбу

$$z^2(p^2 z^2 + q^2) = 1$$

тенгламанинг тўлиқ интегрални топилсин. Бу тенглама 3) ҳолда кўрилган тенгламага тўғри келади:

$$z = z(u), u = ax + y, p = a \frac{dz}{du}, q = \frac{dz}{du},$$

$$z^2 \left(\frac{dz}{du} \right)^2 (a^2 z^2 + 1) = 1, \frac{du}{dz} = \pm z (a^2 z^2 + 1)^{1/2},$$

$$u + b = \pm \frac{1}{3a^2} (a^2 z^2 + 1)^{3/2} \text{ ёки } qa^3 (ax + y + b)^2 = (a^2 z^2 + 1)^3.$$

2. Лагранж-Шарпи усули. Ушбу

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (12.43)$$

биринчи тартибли хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламани текшираимиз. Лагранж-Шарпи усули ихтиёрий a ўзгармасни ўз ичига олган шундай

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a \quad (12.51)$$

тенгламани танлашдан иборатки, (12.43), (12.51) системалардан аниқланган $p = p(x, y, z, a)$ ва $q = q(x, y, z, a)$ функциялар битта квадратурада интегралланди

$$dz = p(x, y, z, a) dx + q(x, y, z, a) dy \quad (12.52)$$

Пфафф тенгламасига олиб келади. У ҳолда Пфафф тенгламасининг $u(x, y, z, a, b) = 0$ интегрални, бундаги b (12.52) тенгламани

интеграллашда ҳосил бўладиган ихтиёрий ўзгармас (12.43) тенгла-
манинг тўлиқ интегрални бўлади. Φ функция (12.52) тенгламанинг
битта квадратурада интегралланувчанлик шартидан, яъни

$$p \frac{\partial q}{\partial z} - q \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (12.53)$$

тенгламадан аникланади. (12.53) шартни p ва q ни x, y, z ларнинг
функцияси сифатида аниқловчи (12.43), (12.51) системалар учун
ёзиб оламиз. Бунда ошқормас функциялардан ҳосилаларни ҳисоблаш
формулаларидан фойдаланамиз. (12.53) шартга қўйиш учун $\frac{\partial q}{\partial x}$,
 $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial z}$ ҳосилаларни ҳисоблаш етарлидир.

p ва q ни x, y, z нинг функциялари деб қараб, (12.43), (12.51) тенг-
ликларни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Бу системадан $\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}$ детерминантни нолдан фаркли ҳисоблаб,

$$\frac{\partial q}{\partial x} \text{ ни топамиз:} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\frac{D(F, \Phi)}{D(p, x)}}{\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}}.$$

Худди шунга ўхшаш (12.43), (12.51) системани y бўйича дифферен-
циаллаб, $\frac{\partial p}{\partial y}$ ни топамиз:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\frac{D(F, \Phi)}{D(y, q)}}{\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}}.$$

Нихоят, (12.43), (12.51) системани z бўйича дифференциаллаб, ҳосил
бўлган системадан $\frac{\partial p}{\partial z}$ ва $\frac{\partial q}{\partial z}$ ни топамиз:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\frac{D(F, \Phi)}{D(z, q)}}{\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{\frac{D(F, \Phi)}{D(p, z)}}{\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}}.$$

Топилган ҳосилаларни интегралланувчилик шarti (12.53) га
қўйиб, тенгликларнинг ҳар икки томонини нолдан фаркли деб фараз
қилинган $\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}$ детерминантга кўпайтириб, қуйидаги тенгламани
ҳосил қиламиз:

$$p \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + q \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$$

ёки

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ & - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0. \end{aligned} \quad (12.54)$$

Φ функцияни аниқлаш учун қизикли бир жинсли (12.54) тенгламани ҳосил қилдик. Бу тенглама 12.2-§ да кўрсатилган усул билан интегралланади. (12.54) тенгламага мос бўлган оддий дифференциал тенгламалар системаси, яъни характеристикалар тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}} = - \frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (12.55)$$

(12.55) тенгламанинг ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига оладиган битта хусусий ечимни топиш қиёяйдир, яъни (12.55) тенгламанинг (12.43) билан биргаликда p ва q га нисбатан ечилиши мумкин бўлган битта

$$\Phi_1(x, y, z, p, q) = a$$

биринчи интегрални топиш етарлидир. Демак, $p = \varphi_1(x, y, z, a)$ ва $q = \varphi_2(x, y, z, a)$ микдорларни ушбу

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ \Phi_1(x, y, z, p, q) = a \end{cases}$$

системадан аниқлаб ва

$$dz = p dx + q dy$$

тенгламага қўйиб, битта квадратурада интегралланадиган Пфафф тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$dz = \varphi_1(x, y, z, a) dx + \varphi_2(x, y, z, a) dy.$$

Бу тенгламани ечиб изланаётган

$$u(x, y, z, a, b) = 0$$

тўлиқ интегрални топамиз.

Изоҳ. Агар шартли ушбу

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q$$

белгиларни киритсак, (12.54) тенгламанинг ёки ундан олдин ёзилган тенгламанинг чап қисмини

$$(F, \Phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ифодани *Майер қавси* дейилади. Агарда берилган тенгламада изланаётган функция катнашмаса, яъни тенглама

$$F(x, y, p, q) = 0$$

кўринишда бўлса, иккинчи тенгламани ҳам худди шу кўринишда изланади, яъни

$$\Phi(x, y, p, q) = a.$$

Бу ҳолда Майер қавси ушбу

$$(F, \Phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади. Бу ифодани *Пуассон қавси* дейилади. Пуассон ёки Майер қавсини нолга айлантирадиган иккита функцияни *инволюцияда бўлган функциялар* дейилади. Шундай қилиб, Лагранж-Шарпи усулининг ғояси биринчи тенглама билан инволюцияда бўлган иккинчи тенгламани топишдан иборатдир.

Мисол. Ушбу

$$F = 2xz - px^2 - 2qxy + pq = 0$$

тенгламанинг тўлиқ интегрални топилиши.

(12.55) характеристикалар тенгламасида катнашадиган ҳосилаларни ҳисоблай-
миз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p} = -x^2 + q, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -2xy + p, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2z - 2xp - 2yq, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2qx, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2x. \end{aligned}$$

(12.55) характеристикалар тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{dx}{-x^2 + q} = \frac{dy}{-2xy + p} = \frac{dz}{-px^2 - 2xyq + 2pq} = \frac{dp}{2z - 2yq} = \frac{dq}{0}.$$

Бу системанинг биринчи интегралларидан биттаси $q=0$ дан иборатдир. $q=a$ ни берилган тенгламага қўйиб p ни топамиз:

$$p = \frac{2x(z - ay)}{x^2 - a}.$$

Демак,

$$dz = p dx + q dy = \frac{2x(z - ay)}{x^2 - a} dx + a dy$$

ёки

$$\frac{dz - a dy}{z - ay} = \frac{2x dx}{x^2 - a}.$$

Бундан

$$\ln|z - ay| = \ln|x^2 - a| + \ln b$$

$$z = ay + b(x^2 - a)$$

тўлиқ интегрални ҳосил қиламиз.

3. Интеграл сиртни топиш. (12.43) тенгламанинг тўлиқ интегрални

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

маълум бўлган ҳолда (12.43) тенглама учун Коши масаласини, яъни берилган

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t) \quad (12.56)$$

эгри чизикдан ўтувчи (12.43) тенгламанинг интеграл сиртини топиш масаласини ечиш мумкин.

Умумий интегрални аниқловчи тенгламаларни оламиз, яъни $b = \omega(a)$ бўлганда

$$\Phi(x, y, z, a, \omega(a)) = 0, \quad (12.57)$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z, a, \omega(a))}{\partial a} + \frac{\partial \Phi(x, y, z, a, \omega(a))}{\partial b} \omega'(a) = 0. \quad (12.58)$$

$b = \omega(a)$ функцияни шундай танлаб олиш керакки, (12.57), (12.58) тенгламалар билан аниқланадиган сирт, яъни бир параметрли (12.57) оиланинг ўрамаси берилган (12.56) эгри чизикдан ўтсин. Берилган эгри чизикнинг нукталарида иккала (12.57) ва (12.58) тенглама t бўйича айниятга айланади:

$$\Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t), a, \omega(a)) = 0, \quad (12.59)$$

$$\frac{\partial \Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t), a, \omega(a))}{\partial a} + \frac{\partial \Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t), a, \omega(a))}{\partial b} \omega'(a) = 0. \quad (12.60)$$

Бу тенгламалардан $b = \omega(a)$ функцияни аниқлаш анча мураккабдир. Шу сабабли одатда бошқачарок йўл тутилади. (12.59) тенглик $\omega(a)$ функция маълум бўлганда a ни t ўзгарувчи орқали аниқлайди. Шундай ҳисоблаб, (12.59) тенгликни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \psi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \chi'(t) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \omega'(a) \right] \frac{da}{dt} = 0.$$

(12.60) тенгликни эътиборга олиб, ушбу

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \psi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \chi'(t) = 0 \quad (12.61)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (12.59) ва (12.61) тенгламалар системасидан $b = \omega(a)$ функцияни аниқлаш анча қулай бўлади. Агар (12.56) эгри чизикқа ўтказилган уринма векторни $\vec{l}$ орқали, $\Phi = 0$ сиртга ўтказилган ва демак, мос нукталарда изланаётган ўрамага ўтказилган нормалнинг векторини $\vec{N}$ орқали белгилаб олсак, (12.61) тенглик қисқача

$$(\vec{N}, \vec{l}) = 0$$

қўринишда ёзилади. (12.61) шарт геометрик нуктаи назардан шу нарсани билдирадики, изланаётган сирт берилган эгри чизикдан

ўтиши керак ва демак, бу эгри чизикка ўтказилган уринма изланаётган сиртга ўтказилган уринма текисликда ётиши керак.

Мисол. Ушбу

$$z = px + qy + 3p^2 - q^2$$

тенгламанинг $x=0$, $z=y^2$ эгри чизикдан ўтувчи интеграл сирти топилсин.

Берилган тенглама умумлашган Клеро туридаги тенглама бўлгани учун унинг тўлиқ интегрални $z = ax + by + 3a^2 - b^2$ дан иборатдир. Берилган эгри чизикнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиб оламиз: $x=0$, $y=t$, $z=t^2$. Текширилаётган ҳолда (12.59) (12.61) тенгламалар

$$t^2 = bt + 3a^2 - b^2, \quad 2t = b$$

кўринишга эга бўлади. Булардан:

$$b = 2a, \quad z = a(x + 2y) - a^2.$$

Бу оиланинг ўрамаси

$$z = a(x + 2y) - a^2, \quad x + 2y - 2a = 0$$

тенгламалар билан аниқланади. Охириги тенгламалардан a ни чиқариб, изланаётган сиртни топамиз:

$$z = \frac{(x + 2y)^2}{4}.$$

Агар (12.55) системани интеграллаш қийинчилик туғдирмаса, Кошининг умумлашган ечимини топишда қуйида баён қилинадиган *характеристикалар* ёки *Коши усули*дан фойдаланиш қулай бўлади.

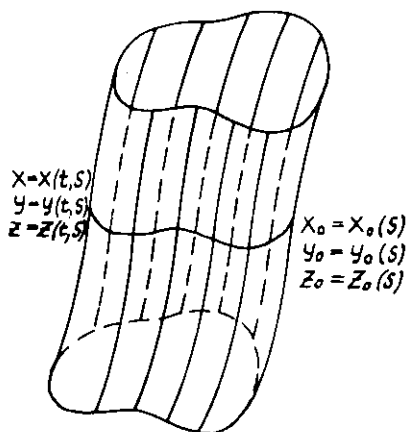
4. Коши усули. Кошининг умумлашган масаласи қуйидагича қўйилади: (12.43) тенгламанинг берилган

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s), \quad z_0 = z_0(s)$$

эгри чизикдан ўтувчи $z = z(x, y)$ интеграл сирти топилсин. Одатда қўйилган масаланинг ечимини қуйидаги

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s) \quad (12.62)$$

параметрик кўринишда излаш қулай бўлади, бунда s параметр. Бундай кўринишда излаймиз, деган ифодани берилган эгри чизикдан ўтувчи $z = z(x, y)$ сирт бир параметрли (12.62) эгри чизиклар оиласида ўтувчи нукталардан ташкил топади деб тушуниш керак. (12.62) эгри чизикларни *характеристикалар* дейилади (77- чизма). Коши усулининг гоёяси қисқача қуйидагидан иборат: аввало бир нечта параметрга боглиқ бўлган характеристикалар оиласи топилади, сўнгра характеристикаларнинг $x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$ эгри чизик нукталаридан ўтишидан ва яна айрим



73- чизма

шартларни каноатлантиришидан фойдаланиб, бир параметрли $x=x(t, s)$, $y=y(t, s)$ $z=z(t, s)$ эгри чизиклар оиласини топамиз (бунда s ни параметр деб ҳисоблаш мумкин). Бу эгри чизикларда ётувчи нукталарнинг тўплами изланаётган интеграл сиртни ташкил қилади, $z=z(x, y)$ функция

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (12.43)$$

тенгламанинг интеграл сиртидан иборат бўлсин. (12.43) айнитни x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases} F_x + pF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ F_y + qF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ бўлгани учун аввалги тенгликларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} F_x + pF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ F_y + qF_z + F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (12.63)$$

Бу тенгликларда z ни x ва y нинг маълум функцияси деб ҳисобланади. p ва q га нисбатан квазичизикли бўлган тенгламаларнинг (12.63) системаси учун характеристикалар тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = - \frac{dp}{F_x + pF_z}, \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = - \frac{dy}{F_y + qF_z}$$

ёки бу икки системани бирлаштириб, ушбу

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = - \frac{dp}{F_x + pF_z} = - \frac{dq}{F_y + qF_z} = dt \quad (12.64)$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

z функция p ва q лар билан

$$dz = p dx + q dy$$

тенглама билан боғланган бўлгани учун, характеристика бўйлаб

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} = p F_p + q F_q$$

ёки

$$p F_p + q F_q = \frac{dz}{dt} \quad (12.65)$$

тенглик ҳосил бўлади. (12.65) эса (12.64) системани яна бир тенглама билан тўлдириш имконини беради. Шундай қилиб, функцияни (12.43) тенгламанинг ечими деб ҳисоблаб, ушбу

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{p F_p + q F_q} = - \frac{dp}{F_x + p F_z} = - \frac{dq}{F_y + q F_z} = dt \quad (12.65')$$

системага келдик. (12.65') тенгламалардан (12.43) тенгламанинг $z=z(x, y)$ ечимини билмаган ҳолда $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $p=p(t)$, $q=q(t)$ функцияларни топиш мумкин, яъни *характеристикалар* деб аталувчи

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$$

эгри чизикларни ҳамда ушбу

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y) \quad (12.66)$$

текисликнинг йўналишини аниқловчи $p=p(t)$ ва $q=q(t)$ сонларни *характеристиканинг* ҳар бир нуктасида топиш мумкин. *Характеристика* ва унинг ҳар бир нуктасига оид (12.66) текислик биргаликда *характеристик кенглик (полоса)* дейилади.

Энди (12.43) тенгламанинг интеграл сирти характеристикалардан тузилиши мумкинлигини кўрсатамиз. Аввало (12.65') системанинг интеграл чизиги бўйлаб F функциянинг қиймати ўзгармас, яъни

$$F(x, y, z, p, q) = C$$

бўлишига, бошқача айтганда $F(x, y, z, p, q)$ функция (12.65) системанинг биринчи интеграли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан, (12.65') системанинг интеграл чизиги бўйлаб:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x, y, z, p, q) &= F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + F_p \frac{dp}{dt} + F_q \frac{dq}{dt} = \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (pF_p + qF_q) - F_p (F_x + pF_z) - F_q (F_y + qF_z) \equiv 0. \end{aligned}$$

Демак, (12.65') системанинг ҳар бир ечими бўйлаб қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$F(x, y, z, p, q) = C \quad C = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

(12.65') системанинг интеграл чизиклари бўйлаб (12.43) тенглама қаноатлантирилиши учун $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ бошланғич қийматларни шундай танлаш керакки, улар

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

тенгламани қаноатлантирсин. Бу тенгламани қаноатлантирадиган $x_0=x_0(s)$, $y_0=y_0(s)$, $z_0=z_0(s)$, $p_0=p_0(s)$, $q_0=q_0(s)$ бошланғич шартларда (12.65') системани интеграллаб, $x=x(t, s)$, $y=y(t, s)$, $z=z(t, s)$, $p=p(t, s)$, $q=q(t, s)$ ларни топамиз. s нинг тайин қийматида характеристикалардан биттасига эга бўламиз:

$$x=x(t, s), \quad y=y(t, s), \quad z=z(t, s).$$

s ни ўзгартира бориб бирор сиртни ҳосил қиламиз. Бу сиртнинг ҳар бир нуктасида $p=p(t, s)$, $q=q(t, s)$ бўлганда (12.43) тенглама қаноатлантирилади, аммо шу билан бирга $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ ёки $dz=$

$=pdx+qdy$ муносабатнинг ўринли ёки ўринли эмаслигини аниқлаш керак. Охириги тенгликни x ва y лар s ва t ўзгарувчиларга боғлиқ бўлгани учун бундай ёзиш мумкин:

$$dz = p \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + q \left(\frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

Бу тенглик эса ушбу

$$p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad (12.67)$$

$$p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (12.68)$$

иккита тенгламага эквивалентдир. (12.65') системага асосан

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F_p, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = F_q, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p F_p + q F_q$$

бўлгани учун (12.65') системада s тайин кийматга эга деб ҳисоблаганимиз учун $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ лар ўрнига $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ларни ёзсак, (12.68) тенглик бажарилади. (12.67) тенгликнинг айниятга айланишини исбот қилиш учун унинг чап қисмини u орқали белгилаб оламиз, яъни

$$u = p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s}.$$

u дан t бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}.$$

(12.68) айниятни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + p \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + q \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 0.$$

Аввалги тенгликдан кейингисини айирамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}$$

ёки (12.65') тенгламаларга асосан

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -(F_x + p F_z) \frac{\partial x}{\partial s} - (F_y + q F_z) \frac{\partial y}{\partial s} - F_p \frac{\partial p}{\partial s} - F_q \frac{\partial q}{\partial s} = \\ &= -\left(F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s} + F_z \frac{\partial z}{\partial s} + F_p \frac{\partial p}{\partial s} + F_q \frac{\partial q}{\partial s}\right) - \\ &\quad - F_z \left(p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s}\right). \end{aligned}$$

$F(x, y, z, p, q) = 0$ тенглама F функция аргументлари ўрнига $x(t, s)$, ..., $q(t, s)$ ларни қўйганда айниятга айланади. Шу айниятни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s} + F_z \frac{\partial z}{\partial s} + F_p \frac{\partial p}{\partial s} + F_q \frac{\partial q}{\partial s} = 0.$$

Кейинги икки тенгликнинг биринчисидан иккинчисини айириб, ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -F_z \left(p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -F \cdot u$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу оддий дифференциал тенгламани интеграллаб, u ни топамиз:

$$u = -u_0 e^{\int_a^t F \cdot dt}$$

бу ерда $u_0 = u_{t=0}$. Охирги тенгликдан кўринаёптики, u нинг нолга айланиши учун $u_0 = 0$ бўлиши зарур ва етарлидир, яъни $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ бошланғич функцияларни шундай танлаш керакки, улар ушбу

$$p_0(s) \frac{dx_0}{ds} + q_0(s) \frac{dy_0}{ds} - \frac{dz_0}{ds} = 0$$

тенгликни қаноатлантирсин. Шундай қилиб, Коши усули билан (12.43) тенгламани $x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$ бошланғич шартларда интеграллаш учун ушбу

$$F(x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0,$$

$$p_0(s) \frac{dx_0}{ds} + q_0(s) \frac{dy_0}{ds} - \frac{dz_0}{ds} = 0$$

тенгламалардан $p_0 = p_0(s)$, $q_0 = q_0(s)$ функцияларни аниқлаб, сўнгра (12.65') системанинг $t=0$ да $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $z = z_0(s)$, $p = p_0(s)$, $q = q_0(s)$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш керак. (12.65') система ечимларидан урта

$$x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)$$

функция (12.43) тенглама изланаётган интеграл сиртнинг параметрик кўринишдаги тенгламасини беради.

5. Умумий ҳол. Юқорида баён қилинган Коши усулини n та эркли ўзгарувчи хусусий ҳосиллали ушбу

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (12.69)$$

(бунда $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$) тенглама учун ҳам бевосита умумлаштириш мумкин.

Коши масаласи: (12.69) тенгламанинг берилган $(n-1)$ ўлчовли

$$x_{i0} = x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), i = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_0 = u_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (12.70)$$

сиртдан ўтувчи n ўлчовли $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ интеграл сирт топилсин. 4- банддаги мулоҳазаларни такрорлаб, ушбу

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{F_{p_1}} &= \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{du}{\sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}} = \\ &= \frac{dp_1}{F_{x_1} + p_1 F_u} = \dots = - \frac{dp_n}{F_{x_n} + p_n F_u} = dt, \end{aligned} \quad (12.71)$$

$(2n+1)$ номаълумли $(2n+1)$ та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Вактинча функцияларнинг бошланғич қийматлари

$$p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12.72)$$

ларни маълум деб фараз қиламиз. У ҳолда (12.71) системани (12.70), (12.72) бошланғич қийматларда интеграллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \\ u &= u(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \\ p_i &= p_i(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (12.73)$$

$s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ параметрларнинг тайин қийматларида

$$x_i = x_i(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \quad u = u(t, s_1, \dots, s_{n-1})$$

тенгламалар $(x_1, \dots, x_n, u)$ ўзгарувчиларнинг фазосида *характеристикалар* деб аталувчи эгри чизикларни аниқлайди, $p_i = p_i(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ сонлар эса характеристикаларнинг ҳар бир нуктасига ўтказилган ушбу

$$U - u = \sum_{i=1}^n p_i (X_i - x_i) \quad (12.74)$$

текисликларнинг йўналишини аниқлайди. Характеристикалар (12.74) текисликлар билан биргаликда *характеристик кенгликлар* (*полосалар*) дейилади.

$s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ параметрлар ўзгарганда $(n-1)$ ўлчовли (12.70) сиртдан ўтувчи $(n-1)$ параметрли $x_i = x_i(t, s_1, \dots, s_{n-1})$, $u = u(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ характеристикалар оиласига эга бўламиз. Энди (12.72) функциялар аниқ танлаб олинганда изланаётган n ўлчовли сиртнинг (12.73) характеристикалар оиласида ётувчи нукталардан ташкил топишини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги икки айниятнинг бажарилишини кўрсатиш керак:

$$1) \quad F(x_1(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_n(t, s_1, \dots, s_{n-1}), u(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \\ p_1(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, p_n(t, s_1, \dots, s_{n-1})) \equiv 0,$$

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ёки} \quad du = \sum_{i=1}^n p_i dx_i.$$

Аввало ($F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$) функция (12.71) системанинг биринчи интегралли эканини кўрсатамиз. (12.71) тенгламаларга асосан

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) &\equiv \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{dx_i}{dt} + F_u \frac{du}{dt} + \\ &+ \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{dp_i}{dt} \equiv \sum_{i=1}^n F_{x_i} F_{p_i} + F_u \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^n F_{p_i} (F_{x_i} + p_i F_u) \equiv 0. \end{aligned}$$

Демак, (12.71) системанинг интеграл эгри чизиклари бўйлаб қуйидаги муносабат ўринли:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = C$$

бунда

$$C = F(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_0, p_{10}, \dots, p_{n0}).$$

Шундай қилиб, (12.73) функциялар (12.71) системанинг интеграл чизиклари бўйлаб (12.69) тенгламани қаноатлантириши учун $p_{i0}(s_1, \dots, s_{n-1})$ бошланғич қийматларни шундай танлаш керакки, ушбу

$$\begin{aligned} &F(x_{10}(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_{n0}(s_1, \dots, s_{n-1}), u_0(s_1, \dots, s_{n-1}), \\ &P_{10}(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, p_{n0}(s_1, \dots, s_{n-1})) = 0 \end{aligned}$$

тенглик бажарилсин. Энди.

$$du = \sum_{i=1}^n p_i dx_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_j} ds_j \equiv \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} ds_j \right)$$

айниятнинг тўғрилигини текшириб кўриш керак. Охириги айният қуйидаги n та айниятга эквивалентдир:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0, \quad (12.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0, \quad j=1, 2, \dots, n-1. \quad (12.76)$$

(12.75) айниятнинг тўғрилиги. (12.71) системага асосан келиб чиқади. Ҳақиқатан, (12.71) тенгламаларга асосан:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Бу ерда биз $\frac{du}{dt}$ ва $\frac{dx_i}{dt}$ ўрнига хусусий ҳосилалар ёздик, чунки

(12.71) системада барча s_i лар тайини деб ҳисоблаган эдик. Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} \equiv 0.$$

(12.76) айниятларнинг ўринли эканини исботлаш учун уларнинг чап қисмини u_i орқали белгилаб оламиз:

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j}, \quad j=1, 2, \dots, n-1.$$

u_i ни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \quad (12.77)$$

(12.75) айниятни s_i бўйича дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s_i} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial t} \equiv 0$$

айниятни эътиборга олиб, (12.77) тенгламани қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}.$$

(12.71) системага асосан:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} F_{p_i} + \sum_{i=1}^n (F_{x_i} + p_i F_u) \frac{\partial x_i}{\partial s_j} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} + F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \right) + F_u \frac{\partial u}{\partial s_j} - F_u \left(\frac{\partial u}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \right). \end{aligned}$$

$F \equiv 0$ айниятни s_i бўйича дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган айниятга асосан аввалги тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -F_u u_i, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Бу оддий дифференциал тенгламани интеграллаб, унинг ушбу

$$u_i = u_i^0 e^{-\int_0^t F_u dt}$$

ечимини топамиз. Демак, $u_i \equiv 0$ айниятнинг бажарилиши учун $u_i = u_{i=0}$ ёки

$$\frac{\partial u_0}{\partial s_i} - \sum_{i=1}^n p_{i0} \frac{\partial x_{i0}}{\partial s_i} = 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Шундай қилиб, (12.69) тенгламанинг $(n-1)$ ўлчовли

$$\begin{cases} x_{i0} = x_{i0}(s_1, \dots, s_{n-1}), & i = 1, 2, \dots, n. \\ u_0 = u_0(s, \dots, s_{n-1}) \end{cases}$$

сиртдан ўтувчи интеграл сиртни топиш учун $p_{i0}(s_1, \dots, s_{n-1})$ бошланғич қийматларни ушбу

$$\left. \begin{aligned} F(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_0, p_{10}, \dots, p_{n0}) &= 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_{i0} \frac{\partial x_{i0}}{\partial s_j} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (12.78)$$

тенгламалардан аниқлаб (албатта, бу системани p_{i0} ларга нисбатан ечиш мумкин деб фараз қиламиз), сўнгра (12.71) системани (у мавжудлик ва ягоналик теоремаларининг шартларини қаноатлантиради деб фараз қиламиз) ушбу

$$\left. \begin{aligned} x_{i0} &= x_{i0}(s_1, \dots, s_{n-1}), \\ u_0 &= u_0(s_1, \dots, s_{n-1}), \\ p_{i0} &= p_{i0}(s_1, \dots, s_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

бошланғич шартларда интеграллаб, унинг қуйидаги ечимини ҳосил қиламиз:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \\ u &= u(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \\ p_i &= p_i(t, s_1, \dots, s_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (12.79)$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.80)$$

(12.79), (12.80) функциялар изланаётган интеграл сиртнинг параметрик тенгламаларидан иборатдир.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$z = pq + 1$$

тенгламанинг $y_0 = 2$, $z_0 = 2x_0 + 1$ тўғри қизикдан ўтувчи интеграл сирти топилсин.

Берилган тўғри қизикнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиб оламиз:

$$x_0 = s, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 2s + 1.$$

(12.78) тенгламалар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$2s = p_0 q_0, \quad 2 - p_0 = 0.$$

Булардан p_0 , q_0 бошланғич қийматларни аниқлаймиз: $p_0 = 2$, $q_0 = s$.

(12.71) система ёки (12.65) система ушбу

$$\frac{dx}{-q} = \frac{dy}{-p} = \frac{dz}{-2pq} = \frac{dp}{-p} = \frac{dq}{-q} = dt$$

кўринишга эга бўлади. Бу системани интеграллаб, унинг ечимларини топамиз:

$$\begin{aligned} p &= C_1 e^{-t}, \quad q = C_2 e^{-t}, \quad x = C_2 e^{-t} + C_3, \quad y = C_1 e^{-t} + C_4, \\ z &= C_1 C_2 e^{-2t} + C_5. \end{aligned}$$

$$t=0, \quad x_0=s, \quad y_0=2, \quad z_0=2s+1, \quad p_0=2, \quad q_0=s$$

бўлгани учун

$$p=2e^{-t}, \quad q=se^{-t}, \quad x=se^{-t}, \quad y=2e^{-t}, \quad z=2se^{-t}+1.$$

Демак, изланаётган интеграл сирт

$$x=se^{-t}, \quad y=2e^{-t}, \quad z=2se^{-t}+1$$

ёки

$$z=xy+1$$

дан иборатдир.

2. Ушбу

$$p^2+q^2=1$$

тенгламанинг $x_0=\cos s$, $y_0=\sin s$, $z=\frac{s}{2}$ шартни қаноатлантирувчи интеграл сирти топилсин.

(12.78) тенгламалар

$$p'_0+q'_0=1, \quad \frac{1}{2}+p\cdot\sin s-q_0\cos s=0$$

кўринишга эга бўлади. Бу тенгламалардан

$$p_0=\pm\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right), \quad p_0=\pm\cos\left(s-\frac{\pi}{6}\right), \quad q_0=\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$q_0=-\sin\left(s-\frac{\pi}{6}\right)$$

бошланғич қийматларни топамиз. Берилган тенглама учун (12.65) система қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{2q}=-\frac{dz}{2p^2+2q^2}=-\frac{dp}{0}=-\frac{dq}{0}=dt.$$

Бу системани интеграллаймиз:

$$p_1=C_1, \quad q=C_2, \quad x=2C_1x+C_3, \quad y=2C_2t+C_4, \\ z=2(C_1^2+C_2^2)t+C_5.$$

Ушбу

$$x_0=\cos s, \quad y_0=\sin s, \quad z_0=\frac{s}{2}, \quad p_0=\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right), \quad q_0=\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)$$

бошланғич шартлардан фойдалансак,

$$p=\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right), \quad q=\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right), \quad x=2t\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right)+\cos s,$$

$$y=2t\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)+\sin s, \quad z=2t+\frac{s}{2}.$$

Бу тенгламалардан охириги учтаси изланаётган сиртнинг параметрик тенгламаларидан иборатдир. Худди шунга ўхшаш p_0 ва q_0 ларнинг бошқа қийматларига мос интеграл сиртлар топилди.

(12.69) тенгламанинг хусусий холи бўлган ушбу

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (12.81)$$

(бунда $\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i$, H эса ўз аргументларининг берилган функциясиدير)

тенгламани кўрамиз. Юкорида баён қилинган Коши усули (12.81) тенгламага қўлланилганда уни кўп ҳолларда *Якобинининг биринчи* усули дейилади. (12.81) тенглама характеристикаларининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dV}{\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial t}} = \\ &= - \frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}. \end{aligned} \quad (12.82)$$

Текшириляётган ҳолда аввалги (12.71) системадагига ўхшащ ёрдамчи эркли ўзгарувчи киритилишининг ҳожати йўқ, чунки унинг роилини эркли ўзгарувчи t ўйнаши мумкин. (12.82) системадан

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, \dots, n, \\ \frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12.83)$$

ёки

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \quad (12.84)$$

$2n$ та тенгламадан ташкил топган (12.83) системада номатълум функция V иштирок этмаяпти, шу сабабли уни (12.84) тенгламага боғлиқ бўлмаган ҳолда интеграллаш мумкин. (12.83) кўринишдаги тенгламалар механикада тез-тез учраб туради, уларни *каноник системалар* деб аталади. H функцияни эса *Гамильтон функцияси* дейилади. Коши усулидан фойдаланиб, (12.83) системанинг ечимини билган ҳолда (12.81) тенгламанинг ечимини топиш унча қийин бўлмайди. Фараз қилайлик, $t=t_0$, $x_i=x_{i0}$, $p_i=p_{i0}$ бошланғич қийматлардаги (12.83) системанинг ечими

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}), \\ p_i &= p_i(t, t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}), \end{aligned} \right\} \quad (12.85)$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

бўлсин. Номатълум функцияни топиш учун x_i ва p_i ларнинг (12.85) қийматларини (12.84) тенгламанинг ўнг томонига олиб бори кўйсак, у ҳолда ўнг томон t нинг функциясидан иборат бўлади. Сўнгра V квадратурада топилади, яъни

$$V = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) dt + V_0 \equiv \\ \equiv V(t, t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}) + V_0.$$

Машиқ. I. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий интеграллари топилсин:

1. $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
2. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x$;
3. $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{x_3}{2} \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$;
4. $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_3 + u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_2 + u) \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_2 + x_3$.

II. Қуйидаги тенгламаларнинг берилган шартларни қаноатлантирувчи ечимлари топилсин:

1. $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0, x=0, z=y^2$;
2. $(x_1 - x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, x_1=0, z=2x_2(x_2 - x_1)$;
3. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x, x=a, 2ayz=a^2+2$;
4. $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = u, x_1=1, u=x_2+x_3$.

III. Қуйидаги Пфафф тенгламаларни интегралласин:

1. $x(y-1)(z-1)dx + y(z-1)(x-1)dy + z(x-1)(y-1)dz = 0$;
2. $2yzdx + 2xzd y - xy z dz = 0$
3. $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0$.

IV. Қуйидаги тенгламаларнинг тўлиқ интеграллари топилсин:

1. $p = 2q^2 + 1$;
2. $p^2 q^4 = 1$;
3. $pq = p + q$;
4. $pq = xy$;
5. $p^2 = q + x$;
6. $q = xyp^2$;
7. $uz = pq$
8. $z^4 = pq^2$;
9. $q^2 = z^2 p^2 (1 - p^2)$;
10. $pxy + pq + qy - yz = 0$;
11. $uzp^2 - q = 0$;
12. $p^2 + q^2 + pq - qx - py - 2z + xy = 0$.

V. Қуйидаги тенгламаларнинг тўлиқ интегралларидан фойдаланиб, берилган эгри чизиклардан ўтувчи интеграл сиртлар топилсин:

1. $px + qy - pq = 0, x=0, z=y$;
2. $z = px + qy + \frac{pq}{4}, y=0, z=x^2$.

VI. Қуйидаги тенгламалар Коши усули билан интегралласин:

1. $z = pq, x_0 = 1, z_0 = y_0$;
2. $z = px + qy + pq, x_0 = 1, z_0 = y_0^4$;
3. $p^2 + q^2 = 2, x_0 = 0, z_0 = y_0$.

ФҲЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЕТ

- [1] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 1969.
- [2] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1964.
- [3] *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений, М., Гиз. физ. мат. литературы 1958.
- [4] *Еругин Н. П.* ва бошқалар. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Головное изд. Киев. 1974.
- [5] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд. «Мир», М., 1970.
- [6] *Коддингтон Э. А., Левинсон Г.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958.
- [7] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, ОГИЗ, Гостехиздат, М., Л. 1947.
- [8] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. т. II. изд. АН СССР, 1956.
- [9] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Наука, Москва, 1965.
- [10] *Понтрягин Л. С.* ДАН СССР, т. 174, № 6, 1967.
- [11] *Пейович Т.* (Peyovitch T.), Bulletin de la societe mathematique de France, 53, 1925, 208-225.
- [12] *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Наука и техника, Минск, 1970.
- [13] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969.
- [14] *Қори-Нийзий Т. Н.* Танланган асарлар, 4- том, Дифференциал тенгламалар, ЎзССР, «Фан» нашриёт, Тошкент 1968.
- [15] *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. Изд. ИЛ, М., 1962.
- [16] *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Гостехиздат, М., 1955.
- [17] *Малкин И. Г.* «Теория устойчивости движения», «Наука», М., 1966.
- [18] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости, Наука, М., 1967.
- [19] *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, Вестник Московского университета, № 2, 1959 г.
- [20] *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний, М., Физматгиз, 2-е изд., 1959.
- [21] *Курант Р.* Уравнения с частными производными, изд-во «Мир», М., 1964.
- [22] *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, ОНТИ, ГТТИ, 1934.
- [23] *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных, М., ИЛ, 1957.
- [24] *Насриддинов Г.* О расширении одной двухсекторной модели экономики. Деп. 1990 г., УзНИИНТИ, 1366 Уз(10с)
- [25] *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. Изд. «Наука», М., 1976.

М У Н Д А Р И Ж А

Сўз боши	3
К и р и ш	6
1- §. Дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча	6
2- §. Дифференциал тенгламага олиб келинадиган баъзи масалалар	7
1- б о б . <i>Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар</i>	11
1.1- §. Ечим тушунчаси. Қоши масаласининг қўйилиши	11
1.2- §. Мавжудлик ва ягоналик теоремалари	14
1.3- §. Изоклиналар	17
1.4- §. Биринчи тартибли содда дифференциал тенгламаларни интеграллаш	19
1. $\frac{dy}{dx} = f(x)$ кўринишдаги тенгламани интеграллаш (19)	
2. $\frac{dy}{dx} = f(y)$ кўринишдаги тенгламани интеграллаш (19)	
1.5- §. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар	20
1.6- §. Бир жинсли ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар	22
1. Бир жинсли тенгламалар (22). 2. Бир жинсли тенгламага келтириладиган тенгламалар (23)	
1.7- §. Чизикли дифференциал тенгламалар	26
1.8- §. Бернулли ва Риккати тенгламалари	29
1. Бернулли тенгламаси (29)	
2. Риккати тенгламаси (30)	
1.9- §. Тўлиқ дифференциалли тенгламалар	32
1.10- §. Интегралловчи кўпайтувчи	35
1.11- §. Пикар теоремасининг исботи	42
1.12- §. Давомсиз ечимлар	52
2- б о б . <i>ε- тақрибий ечим. Дифференциал ва интеграл тенгсизликлар</i>	55
2.1- §. ε- тақрибий ечим. Эйлер синик чизиги	55
2.2- §. Интеграл тенгсизликлар	61
2.3- §. Битта муҳим дифференциал тенгсизлик ҳақида	66
2.4- §. $\frac{dy}{dx} = f(x)$ кўринишдаги дифференциал тенгламани график интеграллаш	67
3- б о б . <i>Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар</i>	72
3.1- §. Ечим ва умумий ечим тушунчаси. Қоши масаласи	72
3.2- §. Квадратураларда интегралланувчи баъзи тенгламалар	75
3.3- §. Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги	84
3.4- §. Махсус нукта ва махсус ечим	85
3.5- §. Изогонал ва ортогонал траекториялар	95
4- б о б . <i>n- тартибли оддий дифференциал тенгламалар</i>	97
4.1- §. Умумий тушунчалар ва мавжудлик теоремалари	97
4.2- §. n- тартибли дифференциал тенгламаларнинг квадратурада теграалланувчи баъзи турлари	103
1. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги тенглама (103)	
2. $F(x, y^{(n)}) = 0$ кўринишдаги тенглама (104).	

3.	$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ кўринишдаги тенглама (104)	
4.	$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ кўринишдаги тенглама (105)	
5.	$F(y^{(n)}) = (y^{(n)})^k + a_1(y^{(n)})^{k-1} + \dots + a_{k-1}(y^{(n)}) + a_k = 0$, $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, k$ кўринишдаги тенглама (105).	
4.3- §.	Оралик интеграллар. Тартиби камайдиган дифференциал тенгламалар	106
4.4- §.	Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни график интеграллаш	111
5- б о б .	<i>n</i> - тартибли чизикли дифференциал тенгламалар	113
5.1- §.	<i>n</i> - тартибли чизикли тенгламаларнинг умумий хоссалари	113
5.2- §.	<i>n</i> - тартибли чизикли бир жинсли тенгламалар	115
5.3- §.	<i>n</i> - тартибли чизикли бир жинсли бўлмаган тенгламалар	130
6- б о б .	<i>n</i> - тартибли чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар	138
6.1- §.	Комплекс дифференциал тенгламалар	138
6.2- §.	Чизикли бир жинсли ўзгармас коэффициентли тенгламалар	141
	1. $L(p)$ кўпхаднинг илдизлари оддий бўлган ҳол (143)	
	2. $L(p)$ кўпхаднинг баъзи илдизлари қаррали (146)	
6.3- §.	Чизикли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли тенгламалар	151
6.4- §.	Комплекс амплитудалар усули	156
6.5- §.	Тебранма электр занжири	158
6.6- §.	Ўзгармас коэффициентлига келтириладиган тенгламалар	160
7- б о б .	Чизикли дифференциал тенглама ечимларининг ноллари ҳақида. Чегаравий масалалар	167
7.1- §.	Иккинчи тартибли чизикли тенгламаларнинг кўринишини соддалаштириш	167
7.2- §.	Тебранувчи ва тебранмас ечимлар	170
7.3- §.	Чегаравий масалалар	182
	1. Чегаравий масалаларнинг қўйилиши (182)	
	2. Бир жинсли чегаравий масала (184)	
	3. Бир жинсли чегаравий масала учун Грин функцияси (186)	
	4. Бир жинсли бўлмаган чегаравий масала (191)	
7.4- §.	Дифференциал операторнинг хос қийматлари ва хос функциялари	194
	1. Бир жинсли чизикли тенглама учун хос қиймат ва хос функция тушунчаси (194)	
	2. Бир жинсли бўлмаган чизикли тенглама учун хос қиймат ва хос функция тушунчаси (196)	
8- б о б .	Оддий дифференциал тенгламалар системаси	198
8.1- §.	Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси. Умумий тушунчалар	198
8.2- §.	Нормал система учун мавжудлик ва ягоналик теоремалари	206
8.3- §.	Нормал система учун ϵ - тақрибий ечим	213
8.4- §.	Ечимнинг бошланғич қиймат ва параметрларга узлуксиз боғлиқлиги	213
	1. Дастлабки маълумотлар (213).	
	2. Ечимнинг параметрларга узлуксиз боғлиқлиги (214).	
	3. Ечимнинг бошланғич қийматларга узлуксиз боғлиқлиги (215)	
8.5- §.	Ечимнинг бошланғич қиймат ва параметрлар бўйича дифференциалланувчилиги	215
	1. Ечимнинг параметрлар бўйича дифференциалланувчилиги (215)	
	2. Ечимнинг бошланғич қийматлар бўйича дифференциалланувчилиги (216).	
	3. Вариацияли тенгламалар системаси (216).	
8.6- §.	Нормал системанинг интеграллари	217
	1. Системанинг биринчи интеграллари (217).	
	2. Интегралланувчи комбинациялар (222).	
	3. Нормал системанинг симметрик кўриниши (224).	
9- б о б .	Чизикли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси	227
9.1- §.	Умумий тушунчалар, мавжудлик ва ягоналик теоремаси	227

9.2- §.	Чизикли бир жинсли системалар	230
	1. Чизикли оператор ва унинг хоссалари (230).	
	2. Вектор функцияларнинг чизикли боғлиқлиги ва эркинлиги (231).	
	3. Ечимларнинг фундаментал системаси (233).	
	4. Вронский детерминанти (234).	
	5. Остроградский — Лиувиль формуласи (236).	
9.3- §.	Чизикли бир жинсли бўлмаган системалар	242
	1. Ўзгармасни вариациялаш усули. Коши формуласи (244).	
	2. Чизикли бир жинсли бўлмаган системанинг ечимини юқоридан баҳолаш (247).	
9.4- §.	Чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли системалар	249
	1. Характеристик тенглама (249).	
	2. Чикариш усули (249).	
	3. Чикариш усулининг чизикли бир жинсли ўзгармас коэффициентли нормал системани интеграллашга татбиқи (254).	
9.5- §.	Чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган системалар	258
9.6- §.	Чизикли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун чегаравий масалалар	264
	1. Масаланинг қўйилиши (264).	
	2. Бир жинсли чегаравий масала (264).	
10- б о б .	<i>Дифференциал тенгламаларниг мухтор системаси</i>	265
10.1- §.	Мухтор системалар	265
10.2- §.	Мухтор система траекториясининг муҳим хоссаси	267
10.3- §.	Мухтор системанинг ҳолатлар фазоси	272
	1. Ҳолатлар фазоси (272).	
	2. Скаляр мухтор тенгламанинг ҳолатлар тўғри чизиги ва мувозанат ҳолати (273).	
	3. Мухтормас системанинг ҳолатлар фазосига мисол (278).	
10.4- §.	Чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли системанинг ҳолатлар текислиги	280
	1. Системанинг каноник кўриниши (280).	
	2. Иккинчи тартибли чизикли бир жинсли системанинг ҳолатлар текислиги (283).	
10.5- §.	Мухтор система ҳолат тезлиги векторининг ҳаракати ҳақида	296
11- б о б .	<i>Турғунлик назарияси элементлари</i>	298
11.1- §.	Турғунлик ҳақида	298
	1. Қисқача тарихий маълумот (298).	
	2. Турғунлик (299).	
11.2- §.	Турғун қўпҳадлар	301
	1. Қўпҳадларнинг турғунлик шартлари (301).	
	2. Ечим модулининг баҳоси (306).	
	Мувозанат ҳолатининг турғунлиги. Ляпунов — Пуанкаре теоремаси.	309
	1. Ляпунов маъносида турғунлик ва нотурғунлик (309).	
	2. Мухтор система ечимининг группалаш хоссаси (311).	
	3. Мусбат аниқланган квадратик кўринишнинг баъзи хоссалари (312)	
	4. Ляпунов функцияси квадратик кўриниш сифатида (313).	
	5. Ляпунов — Пуанкаре теоремаси (314).	
	6. Ечимнинг турғунлиги (320).	
	7. Мухтормас система ечимининг турғунлиги. Ечимни давом эттириш масаласи (321).	
11.4- §.	Иқтисодий жараёнларнинг икки секторли модели ҳақида	323
11.5- §.	Лимит давралар. Эргаш функция	327
	1. Лимит давра ва унинг яқинидаги траекториялар (327).	
	2. Эргаш функция ва унинг хоссалари (332).	
	3. Эргаш функциянинг геометрик тасвири (333).	
	4. Ляпуновнинг характеристик кўрсаткичи (336).	
12 б о б .	<i>Биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар</i>	338
12.1- §.	Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида	338

1. Асосий тушунчалар (338).	
2. Ковалевская теоремаси (340).	
3. Коши масаласининг геометрик талкини (340)	
12.2- §. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали чизикли бир жинсли тенглама	342
1. Дастлабки тушунчалар (342).	
2. Чизикли бир жинсли тенглама учун Коши масаласининг ечилиши (345).	
12.3- §. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали чизикли бир жинсли бўлмаган тенглама	347
1. Ечим, умумий ечим ва махсус ечим тушунчалари (347).	
2. Чизикли бир жинсли бўлмаган тенглама учун Коши масаласининг ечилиши (350).	
12.4- §. Пфафф тенгламаси	352
12.5- §. Биринчи тартибли чизикли бўлмаган тенгламалар	358
1. Тўлиқ интеграл (358).	
2. Лагранж Шарии усули (362).	
3. Интеграл сиртин топиш (366).	
4. Коши усули (367).	
5. Умумий ҳол (371).	
Фойдаланилган адабиёт	379

На узбекском языке

Махмуд Салохитдинович САЛОХИТДИНОВ
Гаффор Насритдинович НАСРИТДИНОВ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебник для студентов университетов и педагогических институтов

Издательство «Ўзбекистон», 700129, Ташкент, ул. Навои, 30.

Расмлар муҳаррири *Ж. Гулова*
Тех. муҳаррир *А. Горшкова*
Мусаххих *М. Йўлдошева*

Тиражи 28.05.93 да берилди. Босини 15.12.93. да рухсат этилди. Қонун формати 60×90¹⁶. Литературная гарнитурда офсет босма усулида босилди. Шартли бос. л. 24,0. Нашр. л. 27,15. 4000 нуска. Буюртма № 152. Баҳоси шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр № 74—93

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида терилиб, рангли босма фабрикасида босилди. 700128, Тошкент, У. Юсуфов кўчаси, 86