



1
2025

FIZIKA, MATEMATIKA *va* INFORMATIKA

ILMIY-USLUBIY JURNAL

2001-yildan chiqa boshlagan

Toshkent – 2025

FIZIK KATTALIKNING EKSTREMAL QIYMATLARINI HOSILA YORDAMIDA ANIQLASHGA OID MASALALAR YECHISH

M.B. Dusmuratov, CHDPU dotsenti p.f.f.d. (PhD)

Ushbu maqolada hosilaning fizik masalalarni yechishdagi ahamiyati hamda fizik kattaliklarning eng katta yoki kichik qiymatlarini hosila yordamida aniqlash haqida soʻz yuritilgan va bu bilan bogʻliq masalalar yechib koʻrsatilgan.

Kalit soʻzlar: *hosila, ekstremum qiymat, funksiya maksimumi; parabola; erkin tushish, uchish uzoqligi.*

В этой статье рассказывается о важности производной для решения физических задач, а также об определении наибольших или наименьших значений физических величин с помощью производной и рассматриваются связанные с ней вопросы.

Ключевые слова: *производная, значение экстремума, максимум функции; парабола; свободное падение, дальность полета.*

This article discusses the importance of the derivative for solving physical problems, as well as determining the largest or smallest values of physical quantities using the derivative and discusses related issues.

Key words: *derivative, value of the extremum, maximum of the function; parabola; free fall, flight range.*

Maʼlumki, fizika fani matematika fani bilan boshqa fanlarga qaraganda kuchli oʻzaro aloqadorlikka ega. Bunga misol qilib, mexanik va elektr tebranishlarini oʻrganishda “Trigonometriya”ga, elektr va magnit maydonni hamda boshqa fizik vektor kattaliklarni hisoblashda “Vektor analiz”ga, fizik kattaliklarning oʻrtacha qiymatlarini aniqlash bilan bogʻliq boʻlgan hollarda “Matematika”ning “Oʻrtachalash qoidolari”, “Sonlarning oʻrtacha qiymatlari” kabi mavzulariga murojaat



qilishga to‘g‘ri keladi. Xuddi shuningdek, fizik kattalikning eng katta yoki eng kichik qiymatlarini aniqlashda ham albatta “Matematika”ning “Hosila” bobiga murojaat qilishga to‘g‘ri keladi. Mazkur maqolada xuddi shunday muammolar sirasiga kiruvchi hosila yordamida fizik kattaliklarning eng katta yoki eng kichik qiymatlarini aniqlash bilan bog‘liq masala hal etilgan.

Umumta’lim maktablarining matematika darsliklaridan ham ma’lumki, ixtiyoriy ko‘rinishdagi $y=f(x)$ funksiya o‘zining ekstremum qiymatlariga argument (erkli o‘zgaruvchi)ning funksiya hosilasi nolga aylanadigan qiymatlarida erishadi, ya’ni $f'(x)=0$ bo‘lganda $y=y_{\max}$ yoki $y=y_{\min}$ bo‘ladi. Boshqacha aytganda hosilaning geometrik ma’nosiga binoan, funksiyaning ekstremum (maksimum yoki minimum) nuqtasidan o‘tkazilgan urinma gorizontaal vaziyatni egallaydi, urinma hamda absissalar o‘qining musbaat yo‘nalishi orasidagi burchak tangensi nolga aylanadi. Bu qoida erkli o‘zgaruvchi faqat matematikadagi x kattalik bo‘lmasdan, balki har qanday o‘zgaruvchi kattalik bo‘lganda ham, funksiya (erksiz o‘zgaruvchi) faqat y kattalik bo‘lmasdan, balki har qanday ko‘rinishdagi o‘zgaruvchi kattalik bo‘lganda ham bajariladi. Shuningdek, argument va funksiya fizika kattaliklar bo‘lganida ham bajariladi. Endi esa bir nechta masalalar ishlash orqali aytib o‘tilgan fikrlarimizni to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Masala №1: Jismning to‘g‘ri chiziqli harakat qonuni $s = -t^3 + 3t^2 + 9t + 3$ qonun bo‘yicha sodir bo‘ladi. Bunda s – metr-larda, t – sekundlarda ifodalangan. Vaqtning qaysi onida jismning tezligi maksimal bo‘ladi? Maksimal tezlikning qiymati nimaga teng? Jism maksimal tezlikka erishgan onda qayerda bo‘lgan?

Yechish: Tezlik – bu yo‘ldan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosila ekanligidan, dastlab tezlikning vaqtga bog‘lanish funksiyasi $\vartheta=\vartheta(t)$ ni aniqlaymiz.



$$g = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(-t^3 + 3t^2 + 9t + 3) = -3t^2 + 6t + 9 \quad (1.1)$$

Bilamizki, funksiyaning erkli o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi nolga aylanadigan nuqtada funksiya o'zining ekstremum (maksimum yoki minimum) qiymatlariga erishadi. Shunga ko'ra, vaqtning $a = \frac{dg}{dt} = 0$ bo'ladigan qiymatini aniqlaymiz.

$$a = \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(-3t^2 + 6t + 9) = -6t + 6 = 0, \rightarrow t = 1s \quad (1.2)$$

Tezlikning maksimal qiymatini hisoblaymiz.

$$g_{\max} = g(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 9 = 12 \frac{m}{s} \quad (1.3)$$

Jism maksimal tezlikka erishadigan masofani hisoblaymiz.

$$s(1) = -1^3 + 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 3 = 14m \quad (1.4)$$

Demak, jism harakat vaqtining $t=1$ s onida $g_{\max} = 12 \frac{m}{s}$ maksimal tezlikka erishadi va bu paytda $s=14$ m masofada bo'ladi.

Masala №2: Daryo bo'yidagi A va B pristan (kichkina port) lar orasidagi masofa 144 km ga teng. C pristan A va B pristanlar orasida joylashgan bo'lib, undan B pristangacha 81 km. Motorli qayiq (kater) oqim bo'yicha A pristandan B pristanga boradi va C pristanga qaytib keladi. Agar kater ABC yo'lni eng qisqa o'rtacha 35 km/soat tezlik bilan o'tgan bo'lsa, u holda daryo oqimining tezligi nimaga teng?

Yechish: Motorli qayiqning suvga nisbatan tezligi g_k ga, oqimning tezligi g_s ga teng bo'lsin. Qayiq oqim bo'yicha harakatlanganda tezliklar qo'shilib qirg'oqqa nisbatan natijaviy tezlikni hosil qiladi. Qayiq oqimga qarshi suzganda esa aksincha, tezliklar ayirmasi qirg'oqqa nisbatan natijaviy tezlikni hosil qiladi. Shunga ko'ra kater oqim bo'yicha A

pristandan B pristanga borishda

$$\mathcal{G}_{bor} = \mathcal{G}_q + \mathcal{G}_s = \frac{AB}{t_{bor}} \quad (2.1)$$

tezlik bilan, B pristandan C pristanga qaytishda esa

$$\mathcal{G}_{kel} = \mathcal{G}_q - \mathcal{G}_s = \frac{BC}{t_{kel}} \quad (2.2)$$

tezlik bilan harakatlanadi. O'rtacha tezlik formulasidan umumiy harakat vaqtini aniqlaymiz.

$$\mathcal{G}_{o'rt} = \frac{s_{um}}{t_{um}}, \quad t_{um} = \frac{s_{um}}{\mathcal{G}_{o'rt}} = \frac{AB + BC}{\mathcal{G}_{o'rt}} = \frac{144 \text{ km} + 81 \text{ km}}{35 \frac{\text{km}}{\text{soat}}} = \frac{45}{7} \text{ soat} \quad (2.3)$$

Masala shartida butun yo'lga minimal vaqt sarflangani aytilgan. Shunga ko'ra umumiy vaqtning oqim tezligi orqali ifodalangan funksiyasini tuzib, bu funksiyadan oqim tezligi bo'yicha hosila olish kerak bo'ladi. Bunda qayiqlarning tezligini doimiy ($\mathcal{G}_q = \text{const}$) deb, oqim tezligini esa o'zgaruvchan deb olinadi.

$$t = t_{bor} + t_{kel} = \frac{AB}{\mathcal{G}_{bor}} + \frac{BC}{\mathcal{G}_{kel}} = \frac{AB}{\mathcal{G}_q + \mathcal{G}_s} + \frac{BC}{\mathcal{G}_q - \mathcal{G}_s}, \rightarrow \frac{dt}{d\mathcal{G}_s} = 0, \rightarrow$$

$$\frac{d}{d\mathcal{G}_s} \left(\frac{AB}{\mathcal{G}_q + \mathcal{G}_s} + \frac{BC}{\mathcal{G}_q - \mathcal{G}_s} \right) = \frac{BC}{(\mathcal{G}_q - \mathcal{G}_s)^2} - \frac{AB}{(\mathcal{G}_q + \mathcal{G}_s)^2} = 0, \rightarrow \left(\frac{\mathcal{G}_q + \mathcal{G}_s}{\mathcal{G}_q - \mathcal{G}_s} \right)^2 = \frac{AB}{BC}, \rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{G}_q + \mathcal{G}_s}{\mathcal{G}_q - \mathcal{G}_s} = \sqrt{\frac{AB}{BC}} = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{4}{3}, \rightarrow 3\mathcal{G}_q + 3\mathcal{G}_s = 4\mathcal{G}_q - 4\mathcal{G}_s, \rightarrow \mathcal{G}_q = 7\mathcal{G}_s \quad (2.4)$$

Demak, mazkur masalada daryo oqimi tezliklarining o'zgaruvchan qiymatlaridan faqat bitta qiymatda, ya'ni qayiq tezligidan 7 marta kichik bo'lgan qiymatdagina umumiy sarflangan vaqt minimal bo'lar



ekan. Endi oqim tezligini hisoblaymiz.

$$t = \frac{AB}{g_q + g_s} + \frac{BC}{g_q - g_s} = \frac{144 \text{ km}}{7g_s + g_s} + \frac{81 \text{ km}}{7g_s - g_s} = \frac{18 \text{ km}}{g_s} + \frac{27 \text{ km}}{2g_s} = \frac{63 \text{ km}}{2g_s}, \rightarrow$$

$$g_s = \frac{63 \text{ km}}{2t} = \frac{63 \text{ km}}{2 \cdot \frac{45}{7} \text{ soat}} = \frac{49 \text{ km}}{5 \text{ soat}} = 9,8 \frac{\text{km}}{\text{soat}} \quad (2.5)$$

Shunday qilib, oqim tezligi 9,8 km/soat bo'lishi kerak ekan.

Masala №3: Silindrik idish ideal (qovushqoqligi yo'q) suyuqlik bilan to'ldirilgan bo'lib, uning balandligi H ga teng. Bu idish asosidan biror h balandlikda kichkina teshik ochilgan bo'lib, undan suyuqlik otilib chiqmoqda. Bu h balandlikning qanday qiymatida otilib chiqqan suv eng uzoq masofaga borib tushadi? Maksimal uchish uzoqligi nimaga teng?

Yechish: Suyuqlikning erkin sirti teshikdan $\Delta h = H - h$ balandlikda bo'ladi. Energiyaning saqlanish qonuniga muvofiq suyuqlikning erkin sirtidagi elementar dm massali qism idishdan

$g = \sqrt{2g \Delta h} = \sqrt{2g(H - h)}$ tezlik bilan otilib chiqadi. Buni esa h balandlikdan g boshlang'ich tezlik bilan gorizontol otilgan jism deb olib

uning tushish vaqtini $t_{tush} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ formuladan, uchish uzoqligini esa

$\ell = g t_{tush}$ formuladan aniqlash mumkin. Shunga ko'ra suyuqlikning uchish uzoqligi formulasi

$$\ell = g t_{tush} = \sqrt{2g(H - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{Hh - h^2} \quad (3.1)$$

bo'ladi. Bu hosil bo'lgan $\ell = \ell(h)$ ko'rinishdagi funksiyadan h erkli

o'zgaruvchi bo'yicha hosila olib, uni nolga tenglaymiz.

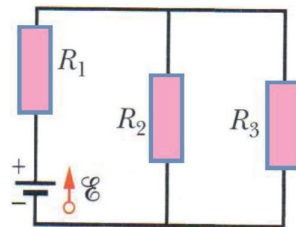
$$\ell'(h) = \left(2\sqrt{Hh - h^2} \right)'_h = \frac{H - 2h}{\sqrt{Hh - h^2}} = 0, \rightarrow h = \frac{1}{2}H \quad (3.2)$$

Endi esa (1.2) dagi natijani (1.1) ga qo'yamiz.

$$\ell_{\max} = \ell\left(\frac{H}{2}\right) = 2\sqrt{H \cdot \frac{H}{2} - \left(\frac{H}{2}\right)^2} = H \quad (3.3)$$

Shunday qilib, teshikning balandligi $h = H/2$ bo'lganda, suyuqlikning maksimal otilish masofasi $\ell_{\max} = H$ bo'lar ekan.

Masala №4: Rasmdagi tok manbai ideal manba bo'lib, rezistorlardagi qarshiliklar $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ ga teng. R_3 qarshilikning qanday qiymatida undagi quvvat maksimal bo'ladi?



Yechish: Zanjirning umumiy qarshiligi

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + (R_1 R_2) R_3}{R_2 + R_3} \quad (4.1)$$

ga, tarmoqlanmagan qismdan o'tadigan tok kuchi

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + (R_1 R_2) R_3} \quad (4.2)$$

ga, R_3 qarshilikdan o'tadigan tok kuchi

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 R_2 + (R_1 R_2) R_3} \quad (4.3)$$

ga, undan ajraladigan quvvat esa

$$P_3 = I_3^2 R_3 = \varepsilon^2 R_2^2 \frac{R_3}{(R_1 R_2 + (R_1 R_2) R_3)^2} \quad (4.4)$$

teng bo'ladi. Demak, quvvat R_3 qarshilikka bog'liq bo'lgan funksiya ekan. Uning maksimal qiymati $P_3'(R_3) = 0$ shartda bajariladi.

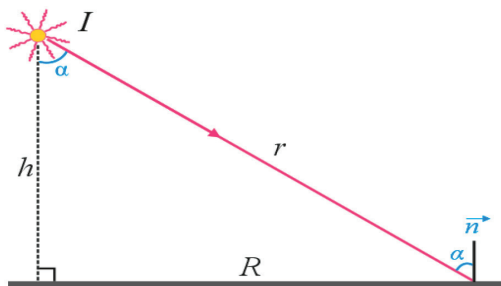
$$\begin{aligned} P_3'(R_3) &= \varepsilon^2 R_2^2 \left(\frac{R_3}{(R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3)^2} \right)'_{R_3} = \\ &= \varepsilon^2 R_2^2 \frac{(R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3)^2 - 2 R_3 (R_1 + R_2) (R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3)}{(R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3)^4} = \\ &= \left(\frac{\varepsilon R_2}{(R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3)^2} \right)^2 (R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3) (R_1 R_2 - (R_1 + R_2) R_3) = 0 \quad (4.5) \end{aligned}$$

Bundan esa

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(2\Omega) \cdot (5\Omega)}{(2\Omega) + (5\Omega)} = \frac{10}{7} \Omega \quad (4.6)$$

natija kelib chiqadi. Shunday qilib, R_3 qarshilikning qiymati $10/7 \Omega$ ga teng bo'lgandagina undan ajraladigan quvvat maksimal bo'lar ekan.

Masala №5: Radiusi R ga teng bo'lgan doiraviy maydonning markazidan qanday h balandlikda fonus osilganda maydonning chegaralaridagi yoritilganlik maksimal bo'ladi (rasmga qarang)? Agar fonusni



yorug'lik kuchi I ga teng bo'lgan nuqtaviy manba deb hisoblansa, maydon chegarasidagi maksimal yoritilganlik nimaga teng?

Yechish: Fotometriyaning 1-va 2-qonunini birlashtiradigan bo'lsak, maydon chetidagi yoritilganlik $E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha$ (5.1)

Bu yerda: α – maydonning yorug'lik nuri tushayotgan nuqtasiga o'tkazilgan normal bilan yorug'lik nuri orasidagi burchak; r – sirtning yorug'lik tushayotgan nuqtasidan yorug'lik manbasigacha bo'lgan masofa.

$$r \text{ va } \cos \alpha \text{ ni } R \text{ va } h \text{ orqali } r = \sqrt{R^2 + h^2} \quad (6.2)$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \quad (6.3)$$

bo'ladi. Shunda (6.1) formulani h erkli o'zgaruvchili orqali ifodalangan funksiya ko'rinishga keltirish mumkin.

$$E = \frac{I}{R^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = I \cdot \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.4)$$

Demak, bizda $E=E(h)$ ko'rinishdagi bir o'zgaruvchili funksiya hosil bo'ldi. Bu funksiyaning maksimal qiymatini topish uchun bu funksiyaning h o'zgaruvchi bo'yicha hosilasini nolga tenglashimiz kerak.

$$\begin{aligned} E'(h) &= \frac{dE}{dh} = I \cdot \frac{d}{dh} \left(\frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = I \cdot \left[\frac{1 \cdot (R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - h \cdot \frac{3}{2} (R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{(R^2 + h^2)^3} \right] = \\ &= I \cdot \frac{R^2 + h^2 - 3h^2}{(R^2 + h^2)^{5/2}} = I \cdot \frac{R^2 - 2h^2}{(R^2 + h^2)^{5/2}} = 0, \quad \rightarrow \quad h = \frac{R}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.5)$$



Maydon chegarasidagi maksimal yoritilganlik

$$E_{\max} = I \cdot \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = I \cdot \frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(R^2 + \frac{R^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = I \cdot \frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = I \cdot \frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}R^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{I}{R^2} \quad (6.6)$$

Shunday qilib, maydon chetidagi maksimal yoritilganlik

$$E_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{I}{R^2} \text{ fonusning } h = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ balandlikka osilganida yuz berar ekan.}$$

Fannin ichiga kirib bormagan ko'pchilik fizika o'rganuvchilar yoki havaskor fiziklarning fikrlashiga ko'ra fizikadan masalalar yechish deganda aynan shu fanning o'ziga tegishli, faqat fizik qonuniyatlar asosida keltirib chiqariladigan masalalar yechishni tushunishadi. Ammo, fizika fani masalalar fanlarning boshqa fanlar bilan aloqadorligini ham nazardan chetda qoldirmaydi. Aslida fizikaning jozibasi, uning go'zalligi ham shundadir. Fizika fani ximiya, biologiya, astronomiya kabi tabiiy fanlardan ham ko'ra matematika fani bilan ko'proq o'zaro aloqadorlikka ega. Shuning uchun ham fizikaning faqat turli boblariga oid an'anaviy tipdagi masalalar yechish bilan birga matematika bilan aloqador bo'lgan, ayniqsa hosila va ekstremum qiymatlarni aniqlash bilan bog'liq bo'lgan masalalarni yechish ta'lim oluvchilar bilimini har tomonlama mustahkamlanishida, fikrlash va mushohada yuritish qobiliyatini o'stirishga xizmat qiladi.

Adabiyotlar:

1. Axmedov Sh.B., Dusmuratov M.B. Fizika (2-qism). Akademik litsey o'quvchilari uchun darslik. – Toshkent: Navro'z, 2020. – 470 b.
2. E.X.Eshchanov, M.B.Dusmuratov, U.R.Rustamov. UMUMIY FIZIKA (Mexanika va molekulyar fizikadan masalalar yechish), o'quv qo'llanma. —ZEBO PRINTS nashriyoti. Toshkent.:2023, 301b.



3. M.B.Dusmuratov. МАТЕМАТИКА (Oliy ta'lim muassasalariga kiruvchilar uchun qo'llanma), uslubiy qo'llanma. —Nizomiy nomidagi TDPU bosmaxonasida nashr qilingan. Toshkent.:2018, 350b.

4. M.B.Dusmuratov. Jismning harakatini muhitning qarshiligini e'tiborga olgan holda o'rganish va unga doir masalalar yechish. Fizika, matematika va informatika,3-son, 2024. —30-37b.

5. Т.Рашидов, Ш.Шозиётов, Қ.Б,Мўминов. Назарий механика. Тошкент.: Ўқитувчи. 1993.

6.А.А.Ф.Бермант, И.Г.Араманович. Краткий курс математического анализа. Москва.: Наука. 1971.



E.B. Maxmanov. Fizikadan ta'lim natijalarini baholashga asoslangan darslarni loyihalash va o'tkazish.....	112
C.C. Эгамбердиев. Инновационная методика проведения современного урока по математике для учеников начальных классов.....	127

OLIMPIADA VA MASALALAR YECHISH BO'LIMI

<i>Masalalar va yechimlar</i>	135
-------------------------------------	-----

TALAB, TAKLIF VA TAHLIL

Masodiqova Dilruxsor Ravshanjon qizi. Inklyuzivlik tamoyillarini hisobga olgan holda pedagogik jarayonni tashkil etish.....	148
M. B.Dusmuratov. Fizik kattalikning ekstremal qiymatlarini hosila yordamida aniqlashga oid masalalar yechish	152
M. O. Toxirova. Maktabda nyuton qonunlari mavzusini o'qitishda fanlararo bog'lanish	162
A.F.Qorayev. Refleksiv videotreninglar asosida ta'lim jarayonini samarali tashkil etish	167
R.N. To'rayev, T.Yu. To'rayev, M. Mamayusupov. Elektron ta'lim muhitida mustaqil ta'limni takomillashtirish bosqichlari.....	176
K.F.Yusupova. Tabiiy fanlarni o'qitishda integrativ materiallarni tanlash tamoyillari.....	184
M.I. Djumayev. Raqamli ta'lim muhitida xalqaro standartlashtirish mohiyati.....	192
S.S. Jumanazarov. O'qituvchilarining malakasini oshirishda veb-kvest ta'lim texnologiyasidan foydalanish.....	200

