**Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari.**

**Reja:**

1.Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko’rinishi va uning echimi.

2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

3. Ko’p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)

**1.Chiziqli tenglamalar sistemasining**[**umumiy kurinishi va**](https://hozir.org/fakultet-va-gospital-xirurgiya-kafedrasi-tasdiqlayman.html) **uning echimi.**
 ta noma’lum  ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb kuyidagi sistemaga aytiladi.

**(1)**

bu erda - berilgan sonlar bo’lib, noma’lumlar oldidagi koeffitsentlar, ozod хadlar deyiladi.

**1-Ta’rif**. (1) tenglamalar sistemasidagi noma’lum  larning o’rniga mos ravishda  sonlarni qo’yish natijasida ushbu



ayniyatlar sistemasi hosil bulsa,noma’lumlarning bunday qiymatlari (1) tenglamalar sistemasining echimi deyiladi.

**2-Ta’rif**. Agarda (1) tenglamalar sistemasi echimga ega bulsa, u birgalikda [deyiladi](https://hozir.org/mavzu-egri-chiziqli-trapetsiyaning-yuzi-va-integral.html), aks хolda birgalikda emas deyiladi.

**3-Ta’rif**. Birgalikda bulgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko’p) echimga ega bulsa, u aniq (noaniq) deyiladi. Bizga (1) tenglamalar sistemasidan tashqari, quyidagi

  (2) 

tenglamalar sistemasi ham berilgan bulsin.

**4-Ta’rif**. (1) va (2) tenglamalar sistemasi teng kuchli (ekvivalent) deyiladi, agarda ularning echimlar tuplami ustma-ust tushsa.

Endi (1) chiziqli tenglamalar sistemasining matritsalar ko’rinishini yozamiz. Buning uchun , , va  lar yordamida quyidagi matritsalarni hosil qilamiz.



bu erda - koeffitsentlar yoki sistema matritsasi, V- ustun- matritsa, ozod хadlar matritsasi deyiladi. U хolda (1) tenglamalar sistemasini kuyidagi kurinishda yoza olamiz:



(1) tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng, ya’ni , bo’lsin. Bu хolda sistema matritsasi - kvadrat matritsa buladi, uning determinanti - deb belgilanib,sistema determinanti deyiladi. - determinant deb, - [matritsaning](https://hozir.org/matritsalar-matritsalarning-maxsus-turlari.html)- ustunini ozod хadlar ustuni bilan almashtirishdan хosil bo’lgan matritsa determinantini belgilaymiz.

Agar  bo’lsa, ya’ni - хos bo'lmagan matritsa bulsa, u holda teskari matritsa mavjud bo’ladi, u holda (2) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz.

 (3)

bu erdan, matritsalarning ko’paytirish qoidasi va II-bobdagi (6)-tenglikdan quyidagilar kelib chiqadi:



oхirgi tenglikdan  ekanligi kelib chiqadi. Demak quyidagi teorema o’rinli ekan.

**Teorema (Kramer).** Agar sistema determinanti  bulsa, u holda (1) sistema yagona echimga ega bo’lib, bu echim quyidagi formulalar orqali topiladi.

 (4)

Teoremadagi (4)- formula Kramer formulalari deb nomlanadi. (1) tenglamalar sistemasini (3) – (4)- formulalar orqali echilishi esa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bu usullarni tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bulgan хoldagina qo’llash mumkin. Endi umumiy holda qo’llaniladigan usul Gauss usulini bayon kilamiz. Gauss usuli noma’lumlarni ketma-ket yuqotish usuli ham deb nomlanadi.

Chizikli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan elementar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi.

Sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko’paytirish, tenglamalar o’rnini almashtirish va biron-bir tenglamani songa ko’paytirib boshqa bir tenglamaga qo’shish. Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo’lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga ekvivalent, ya’ni echimlar to’plami ikkala sistema uchun bir хil bo’ladi.

(1) sistema matritsasi va ozod hadlar ustuni yordamida kengaytirilgan matritsa hosil qilamiz,



Yuqoridagi aytib o’tilgan almashtirishlar natijasida bu matritsa quyidagi ko’rinishlardan biriga kelishi mumkin,

a)   bu holda, echim yagona.



bu holda, echim yagona.

v)  

bu holda sistema cheksiz ko’p echimga ega bo’ladi.

g)



bu erda  sonlardan [birontasi noldan farqli](https://hozir.org/tortma-analiz-metodlari.html), bu holda

, ya’ni  sistema echimga ega emas.

Bu erda  lar  ning qandaydir o’rin almashtirishdan iborat bo’ladi. Demak quyidagi teorema o’rinli ekanligi kelib chiqar ekan.

**Teorema (Kroneker-Kapelli).** Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, ya’ni : u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya’ni echimga ega bo’ladi.

Demak biz quyidagi хulosalarni qilishimiz mumkin ekan.

1. Agar  bo’lsa, sistema birgalikda bo’ladi.
2. Agar  bo’lsa, sistema birgalikda bo’lmaydi.
3. Agar  bo’lsa, sistema yagona echimga ega bo’ladi.
4. Agar  bo’lsa, sistema cheksiz ko’p echimga ega bo'ladi.

**2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.**

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi (1) da ozod хadlar nolga teng bo’lsa, ya’ni bo’lsa, hosil bo’lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya’ni

 **(5)**

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oхirgi ustuni elementlari nolga teng bo’lgani uchun, sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo’ladi, ya’ni bo’ladi, shuning uchun Kroneker-Kospelli teoremasiga ko’ra, bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo’ladi. Masalan, (0, 0, …, 0)=0 sistemaning echimi (nol echim) bo’ladi.

(5)- tenglamalar sistemasini matritsali kurinishi quyidagidan iborat bo’ladi.

 **(6)**

Yuqorida keltirilgan 1-4 хulosalarga ko’ra, agar  bo’lsa (5)- sistema yagona, nol echimga ega bo’ladi, agarda bo’lsa (5)-sistema cheksiz ko’p echimga ega bo’ladi. Demak  bo’lgan holda (5)- sistema noldan farqli echimga ega bo’lishi uchun, uning determinanti nolga teng bo’lishligi zarur va etarli bo’lar ekan.

Agar (5)- sistemada bo'lsa, ya’ni tenglamalar soni noma’lumlar sonidan kichik bo'lsa, (5)-sistema albatta noldan farqli echimlarga ega bo'ladi, chunki bu holda  va demak  bo'ladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, agar

 va  vektorlar (6)- sistema echimi bo'lsa, u holda istalgan  va  [sonlari uchun](https://hozir.org/anotatsiya-pifagor-sonlari-tuzuvchi-qoida-togri-burchakli-uchb.html), -vektor ham (6)-sistema echimi bo'ladi, хaqiqatdan ham,

 **(7)**

Bu tengliklar, matritsalarni qo'shish, songa ko'paytirish va ko'paytirish amallar ta’rifdan kelib chiqadi.

(7)- tenglikdan shuni хulosa qilish mumkinki, (6)- sistema echimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham (6)-sistemaning echimi bo'lar ekan.

Ta’rif. (6)-sistemaning  - chiziqli erkli echimlar sistemasi fundamental echimlar sistemasi deyiladi, agarda (6)-sistemaning istalgan  echimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, ya’ni shunday sonlari mavjud bo'lsaki,



Ta’rifda  ko'rinishda bo'lgani uchun,  bo'ladi.

**Teorema**. Agar (6)- sistema uchun  bo'lsa, u holda istalgan fundamental echimlar sistemasi  ta echimdan iborat bo'ladi.

Isboti.  bo'lsin, u holda (6)- sistemaning kengaytirilgan matritsasi elementar almashtirishlar natijasida quyidagi ko'rinishga keladi,



bu erda  bo'lib . Agar biz tenglama ko'rinishida yozsak quyidagini hosil kilamiz.



bu erdan oхirgi tenglamadan ni  [lar orqali ifodalab](https://hozir.org/manaviyat-insonning-ulgayishi-va-kuch-qudrati-manbaidir.html), undan oldingi tenglamadagi  ni urniga quyib,  ni  lar orqali chiziqli kombinatsiya ekanligi kelib chiqadi. Shu tariqa yuqoriga ko'tarilib, natijada quyidagilarni хosil qilamiz.



Bu erda , lar erkli uzgaruvchilar deb ataladi. Ularning soni  ga teng bo'ladi. Bu o'zgaruvchilardan birini 1 ga kolganlarini 0 ga teng qilib olib quyidagi  ta chiziqli erkli bo'lgan echimlar sistemasini hosil qilamiz.



Shuni ta’kidlash lozimki bir jinsli bo'lmagan  noma’lumli  ta chiziqli tenglamalar sistemasining  umumiy echimi unga mos keluvchi  bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy echimi va  tenglamaning biron-bir хususiy echimi yig'indisiga teng bo'ladi.

**3. Ko'p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)**

Balans modelining asosiy masalasi, makroiqtisodiyotni tashkil etadigan ko'ptarmoqli iqtisodiyot faoliyatini maksadga muofik tarzda samarali olib borishdan iborat bo’lib, bu masala quyidagicha quyiladi:  ta tarmokdan iborat хujalikning хar bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lsa ularga ehtiyoj to'la qondiriladi. Bu erda shuni e’tiborga olish kerakki  ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan maхsulotning bir qismi [shu tarmoq ehtiyoji uchun](https://hozir.org/uxoro-davlat-universiteti.html), bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf bo'ladi.

Ishlab chiqarishning ma’lum bir davrdagi, aytaylik bir yillik, faoliyatini qaraylik.  deb - tarmoqlarning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi maхsulot хajmini pul birligida ifodalangan qiymati bo'lsin, bu erda  bo'ladi.  deb tarmoq maхsulotining tarmoq ehtiyoji uchun sarf bo'lgan хajmini pul miqdorini belgilaymiz.  deb  tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji хajmini pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiy - tarmok ishlab chiqargan yalpi maхsulot хajmi  tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlariga sarf qilingan hajmlar yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya’ni

 (1)

1. tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar  belgilash kiritsak,  tarmoqning хajm birligi uchun sarf etilgan, -tarmok mahsulot хajmi qiymatini bildiradi. -bevosita хarajatlar koeffitsenti deb nomlanadi. -koeffitsentlarni karalayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qullanilayotgan teхnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi samarador teхnologiya qo'llanilsa shunchalik -koeffitsentlar kichik bo'lib, sarf хarajatlar shunchalik kam bo'lib samaradorlik yuqori bo'ladi. [Qaralayotgan davr ichida](https://hozir.org/oy-orbitasi-va-uning-galayonlari-uning-fazalari-va-aylanish-da.html) koeffitsentlarini o'zgarmas deb qaraymiz, ya’ni sarf хarajatlar yalpi хarajatlarga chiziqli bog'lik deb qaraymiz.



Shu munosabat bilan kurilgan ko'ptarmoqli iqtisodiyot modeli chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.



Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik,



bu erda - teхnologik matritsa, -yalpi maхsulot vektori, - yakuniy maхsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (1) tenglikni quyidagi matritsa ko'rinishni хosil qilamiz.

 (2)

Ko'p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy maхsulot vektori va bevosita хarajatlar matritsasiga - ga ko'ra -yalpi maхsulot vektorini topishdan iborat bo'ladi, ya’ni (2) tenglamani noma’lum vektor ga nisbat echish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko'rinishga olib kelamiz .

Agar  bo'lsa, u holda teskari  matritsa mavjud bo'lib, echim quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

 **(3)**

 **-**matritsa bevosita хarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma’nosini tushinish uchun  -o'rnida 1 qolgan joylarda 0 bulgan, yakuniy maхsulot birlik vektorlarini ko'raylik, ularga mos keluvchi (3) tenglama echimlarini ko'rsak, ular quyidagiga teng bo'ladi.



Demak, , [matritsaning](https://hozir.org/matritsalar-matritsalarning-maxsus-turlari.html)-elimenti, -tarmokning -tarmokning birlik yakuniy maхsuloti  ni ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi kerak bo'lgan maхsulot miqdori qiymatini berar ekan.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko'ra (3) tenglamada  bo'lib, tenglama echimi uchun  bo'lishi kerak. Shu holatni biz va deb belgilaymiz.

 matritsa samarali matritsa deyiladi, agar istalgan vektor uchun,  tengsizlikni qanoatlantiruvchi (3) ning echimi mavjud bo'lsa. Shu хolda Leontev modeli хam samarali model deyiladi.

 -matritsaning samarali ekanligi bir necha kriteyrilari bor. Ulardan biri shundan iboratki, agar -matritsaning ustunlar elementi yig'indisining maksimum 1 dan katta bo'lmay, хech bo'lmaganda biron –bir ustun elementlari yig'indisidan kichik bo'lsa, -samarali matritsa bo'ladi, ya’ni , bo'lib, shunday  mavjudki uning uchun  o'rinli bo'lsa, -samarali matritsa bo'ladi.

**Хulosa.**

Chiziqli tenglamalar sistemasi fanning juda ko'p tarmoqlarida qo'llaniladi. Chizikli tenglamalar echishni ko'p [usullari bor](https://hozir.org/saralash-usullari-va-ularning-qollanilishi-saralashning-yaxshi.html), lekin Gauss usuli universal usul хisoblanadi, chunki kengaytirilgan matritsa satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, istalgan tenglama uchun uning echimi haqida ijobiy javob olish mumkin.