**12-Mavzu: Eyler va Runge-Kutta usullari.** Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni taqriban yechishning Eyler va Runge-Kutta metodlari, ularning hatoliklari.

*Maqsad.* Boshlang’ich funksiya va aniqmas integralni hisoblashga ko’nikma hosil qilish.

*Reja.* 1. Boshlang’ich funksiya.

2. Aniqmas integralning xossalari.

3. Aniqmas integrallar jadvali.

4. Bevosita integrallash usuli.

5.Differensial belgisi ostiga kiritib integrallash

6. Aniqmas integralda o’zgaruvchilami alnashtirib integrallash.

7. Bo’laklab integrallash.

*Tayanch so’zIar.* Funksiya, hosila, differensial, boshlang’ich funksiya, uzluksizlik, chegaralangan, o’zgaruvchilarni almashtirish, bo’laklab integrallash.

*Adabiyotlar.* [1] 272-280 betlar

[3] 80-86 betlar

**1. Boshlang’ich funksiya**

Bizga biror funksiya berilgan bo’lsa, rna'lum formulaga yoki qoidaga ko’ra bu funksiyaning hosilasini topishni bilamiz.

Masalan F(x) = x3 bo’lsa, F'(x) = 3x2; F(x) = sinx bo’lsa, F'(x) = cosx.

Endi bu masalaning teskarisini ya'ni hosilasiga ko’ra funksiyaning o’zini topish masalasini ko’raylik. Boshqacha aytganda differensiallash amaliga teskari bo’lgan masalani yechishga to’g’ri keladi.

***1-ta'rif.*** Agar F(x) funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz va differensiallanuvchi bo’lib, x(a,b) nuqtada F'(x)=f(x) (yoki dF(x)=f(x)dx) tenglik o’rinli bo’lsa, u holda F(x) funksiyani shu oraliqda f(x) funksiyaning boshlang’ich funksiyasi deyiladi.

Yuqoridagi misollardan x3 funksiya 3x2 ning, sinx esa cosx funksiyaning boshlang’ich funksiyasidir.

Boshlang’ich funksiyaning ta'rifiga ko’ra quyidagi ikkita savol tug’iladi:

1. Qanday funksiyalarning boshlang’ich funksiyalari mavjud bo’ladi?

2. Agar berilgan funksiyaning boshlang’ich funksiyasi mavjud bo’lsa, u yagona bo’ladimi?

***1-teorema.*** [a,b]kesmada uzluksiz bo’lgan f(x) funksiyaning shu kesmada boshlang’ich funksiyasi mavjud bo’ladi (teoremaiiing isboti Nyuton-Leybnis formulasida ko’riladi).

Agar f(x) funksiya boshlang’ich funksiyaga ega bo’lsa, uning boshlang’ich funksiyasi cheksiz ko’p bo’lishini misolda osongina ko’rish mumkin: F1(x)= (C-o’zgarmas) funksiyalar f(x)=x3 funksiyaning boshlang’ich funksiyasidir.

***2-teorema.*** Agar F1(x) va F2(x) funksiyalar [a,b] kesmada f(x) funksiya uchun boshlang’ich funksiyalar bo’lsa, u holda F1(x), F2(x) lar bir-biridan o’zgarmas songa farq qiladi:

F1(x)-F1(x)=C, C- ixtiyoriy o’zgarmas.

***Isboti****.* φ(x)= F1(x)- F2(x) deylik. Teoremaning shartiga ko’ra, F11(x) = f(x),F'2(x) = f(x) bo’lgani uchun differensiallash qoidasiga ko’ra

φ'(x) = [F1(x) - F2(x)]'= F1 (x) - F3 (x) = f(x) - f(x) = 0φ'(x) = 0 F1(k) - F2(x)]'= 0F1(x) - F2(x) = C.

***3-teorema.*** Agar F(x) funksiya f(x) funksiyaning [a,b] dagi boshlang’ich funksiyasi bo’lsa, u holda f(x) funksiyaning shu kesmadagi har qanday boshqa boshlang’ich funksiyasi F(x)+C ko’rinishda bo’ladi.

**Isbot.**Agarf(x) funksiyaning [a,b] dagi ixtiyoriy boshqa boshlang’ich funksiyasini F(x) desak, 2-teoremaning isbotidan kelib chiqadi. [F(x) - F(x)]' =0 F(x) = F(x) + C

***2-ta'rif.*** Agar F(x) funksiya f(x) funksiyaning [a,b] dagi boshlang’ich funksiyasi bo’lsa, u holda f(x) funksiyaning shu kesmadagi barcha boshlang’ich funksiyalari to’plami F(x)+C ga funksiyaning shu kesmadagi aniqmas integrali deyiladi va odatda ∫f(x)dx simvol bilan belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga ko’ra F'(x)=f(x) bo’lsa ∫f(x)dx = F(x) + C bo’ladi. Bu yerda f(x) ga - integral ostidagi funksiya, f(x)dx ga integral ostidagi ifoda deyiladi. Berilgan f(x) funksiyaning aniqmas integralini topish integrallash amali deyiladi.

Shunday qilib berilgan f(x) funksiyaning aniqmas integrali y=F(x)+C funksiyalar to’plamidan iborat bo’lib, geometrik nuqtai nazardan esa aniqmas integral egri chiziqlar to’plamidan (oilasidan) iborat bo’lib , ularning hammasi bir-biridan ixtiyoriy C masofaga farq qilib o’zaro parallel joylashgan bo’ladi.

**2. Aniqmas integralning xossalari.**

1. (∫f(x)dx)'= f(x)

2. ∫dF(x)= F(x)+ c

3. d[∫f(x)dx] = f(x)dx

4. ∫kf(x)dx = k∫f(x)dx k-o’zgarmas.

5. ∫ [f(x) ± φ(x)]dx = ∫f(x)dx ± ∫(p(x)dx

Aniqmas integrallarni hisoblaganda yuqoridagi xossalardan tashqari quyidagi uchta muhim qoidani nazarda tutish amaliy mashg’ulotlar uchun katta ahamiyatga ega.

Agar ∫f(x)dx = F(x) + C bo’lsa

1. ∫f (*ax*) *dx =* *F* (*ax* ) + C

2. ∫ f (*x*+*b*) *dx = F* (x+*b* ) + C

3. ∫ f (*ax+ b)dx= F (ax + b) + C*

**3. Aniqmas integrallar jadvali**.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ∫xndx=  2. ∫  3. ∫exdx =ex+C  4. ∫axdx =  5. ∫  6. ∫  7. ∫  8. ∫  9. ∫  10. ∫ctgxdx *=* 1n|sinx|+C | 11. ∫  12. ∫  13. ∫  14. ∫  15. ∫  16. ∫  17. ∫  a, c –lar ixtiyoriy o’zgarmas sonlar. |

Bu formulalarning to’g’riligini ularning o’ng tomonidagi ifodalarni bevosita differensiallash bilan ko’rsatish mumkin.

***Misollar. 1-misol*** sifatida 14-formulani ko’raylik



***2-misol.*** ∫(2x3+5)

***3-misol.*** ∫

***4-misol.*** ∫cos10xdx=

**4. Bevosita integrallash usuli.**

Aniqmas integralni bevosita integrallar jadvalidan va aniqmas integralning xossalaridan foydalanib integrallashga bevosita integrallash usuli deyiladi.Ba'zi hollarda integral ostidagi funksiyani iloji boricha yig’indiga yoyib so’ngra bevosita integrallash maqsadga muvofiq bo’ladi.

***1-misol.*** 

***2-misol.***

∫(x2- 2x)2dx = ∫ (x4 - 4x3 + 4x2)dx = ∫ x4dx - 4∫ x3dx + 4∫ x2dx =

**1. Differensial belgisi ostiga kiritib integrallash**

Differensial belgisi ostiga kiritib integrallash usuli esa integral ostidagi ifodani almashtirishdan iboratdir.

***1-misol.*** ∫esinx cosxdx = | cosxdx = d(sinx) , desak| = ∫esinx • d(sinx) = esinx + C

***2-misol.*** ∫sin8xcosxdx =|cosxdx = d(sinx) | = ∫sin8xd(sinx) =  sin9x + C

***3-misol.*** ∫earctgx

***4-misol.*** ∫

***5-misol. ***

***6-misol.*** ∫ **(x +** 2)35dx **=** ∫(x + 2)35d(x+2) **= **

**2. Aniqmas integralda o’zgaruvchilami alnashtirib integrallash.**

Integrallar jadvaliga kirmagan ∫f(x)dx integralni hisoblash uchun, ya'ni f(x) funksiyaning boshlang’ich funksiyasini topish uchun x = φ(t) (1) almashtirish bajarib, φ(t)funksiyani uzluksiz va uzluksiz φ'(t) hosilaga ega hamda unga teskari bo’lgan t = ψ(x) funksiya mavjud deb faraz qilamiz.

Bu holda (1) dan dx = φ'(t)dt ekanligini e'tiborga olsak berilgan integral

∫f(x)dx = ∫f [φ (t)]φ'(t) dt (2)

ko’rinishda bo’ladi. (2) ga aniqmas integralda o’zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Bu yerda φ(t) ni shunday tanlash kerakki natijada (2) ning o’ng tomonidagi integral chap tomonidagi integraldan soddaroq bo’lsin. Aniqmas integralni o’zgaruvchilarni almashtirib integrallaganda chiqqan natijada yangi o’zgaruvchidan dastlabki o’zgaruvchiga qaytish shart.

***1-misol.*** ∫****

***2-misol. ***Eski o’zgaruvchi x ga qaytsak x *=* R sint ** = sint ** t = arcsin 

**3.** **Bo’laklab integrallash.**

Agar x bo’yicha differensiallanuvchi bo’lgan u(x) , v(x) funksiyalar berilgan bo’lsa, u holda **uv** ko’paytmaning differensiali quyidagi formula bilan hisoblanar edi :

d(uv)=udv+vdu (3)

(3) ning har ikkala tomonini integrallasak:

∫d(uv) = ∫udv + ∫vdu  ∫udv = uv-∫vdu (4)

(4) formulaga bo’laklab integrallash formulasi deyiladi. (4) formula ∫vdu integralni hisoblash ∫udv integralni hisoblashdan osonroq bo’lgan holda foydalaniladi.

Bo’aklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan ayrim integrallarni ko’rib o’taylik.

**I.** ∫P(x)ekx dx , ∫p(x)sinkx dx , ∫P(x)coskxdx, (P(x) - ko’phad, k esa biror o’zgarmas son) ko’rinishdagi integrallarni bo’laklab integrallaganda u=P(x), qolganlarini dv deb olish maqsadga muvofiq bo’ladi.

**II.** ∫P(x)ln xdx , ∫P(x)arcsin x dx , ∫P(x)arccos x dx, ∫P(x)arctgx dx , ∫P(x)arcctg x dx,, ko’rinishdagi integrallarni integrallaganda u deb lnx, arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx larni olish kerak.

**III.** ∫eaxsinb x dx∫eaxcosbxdx, ko’rinishdagi integrallar ikki martabo’laklab  
integrallanadi.

***1-misol.*** ∫xexdx =

***2-misol.***  

***3-misol.*** J=∫excosxdx=



