14-Ma’ruza: Chiziqli dasturlash inasalasini simpleks usulda yechish.Sipleks usulida yechishning algoritimi va dasturi.

Boshlang‘ich bazisni topish. Sipleks usulda masalalar yechish.  
Simpleks jadvallar usuli. Simpleks jadval usulida yechish  
algoritmi. Sun’iy bazis usuli.

REJA

Chiziqli dasturlash masalalarini yechish usullari

Simpleks jadval usulida yechish.

Sun’iy bazis usullari.

Tayanch tushunchalar. Simlek, simpleks jadval, chiziqli, chiziqli masala, sun ’iy bazis, maqsadfunksiya, minimum, maksimum.

Dansig yaratgan simpleks usul har bir tenglamada bittadan ajratilgan no’malum (bazis o‘zgaruvchi) qatnashishi shartiga asoslangan. Boshqacha aytganda, ChP masalasida m ta o‘zaro chiziqli erkli vektorlar mavjud deb qaraladi. Umumiylikni buzmagan holda bu vektorlar birinchi m ta Pj,P2, ■■■,Pm vektorlardan iborat bo‘lsin, deylik. U holda masala quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

X + а,^лх^л + ••• + ал„х„

lm + 1 m + l ln n

x0 + a~ хтц\_! + • • • + a^x„

2 m+l m + l 2 n n

<

= bl> = b2>

x + a x

m mm+1 m+l

+

+ a x = b ,

mn n m

Xj > 0, X2 > 0, ..., Xn > 0,

(1)

(2)

(3)

Y = cjxj + c2x2+ ... + cnxn -+min.

(1) sistemani vektor shaklida yozib olaylik:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | fl ^ |  | f 0л |  | f 0л |  | f a Л  ^lm+l |  | f a Л  aln |  | fbl ' |
| Pl = | 0 | , P 2 = | 1 | v, Pm = | 0 | , P m+l | ^ 2 m+l | Pn | a 2n | > P 0 = | b 2 |
|  | v0, |  | v0 ) |  | v1 ) |  | V a mm +l ) |  | V amn ) |  | V Ь m У |

PJXJ + P2X2+ ••• + Pmxm + Pm+JXm+j+ ••• + Pnxn P0, (4)

bu yerda

Pj, P2, ..., Pm vektorlar sistemasi m-o‘lchovli fazoda o‘zaro chiziqli erkli bo‘lgan birlik vektorlar sistemasidan iborat. Ular m o‘lchovli

fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi x],x2,...,xm o‘zgaruvchilarni «bazis o‘zgaruvchilar» deb ataladi.

xm+1, xm+2,..., xn - bazis bo‘lmagan (erkli) o‘zgaruvchilar. Agar erkli o‘zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o‘zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo‘ladi. Natijada X0 =(b1,b2,.,bm, 0,..., 0) yechim hosil bo‘ladi. Bu yechim boshlang‘ich yechim bo‘ladi. Ushbu yechimga x1P1+x2P2+.+xmPm = P0 yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi P1, P2, ..., Pm vektorlar o‘zaro erkli bo‘lganligi sababli topilgan joiz yechim bazis yechim bo‘ladi.

Dansig usulida simpleks jadval quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

Bazis

vekt.

C

baz

P

C1

C2

m

Cm+1

Ck

c.

P

P

P

m

P

m+1

P

P

P

c1

b

1

0

0

a1m + 1

a1k

a1n

P

c2

b

0

1

0

a2m + 1

a2k

a2n

P

Cl

b

0

0

0

alm+1

alk

aln

P

m

c

m

b

m

0

0

1

amm + 1

amk

a

mn

о

NT

II

о

+

II

§ >ч ■!

О

II

§ s

j-‘;r‘vz= “p

Jadvaldagi Cbaz bilan belgilangan ustun xhx2,...,xm bazis o‘zgaruvchilarning chiziqli funksiyadagi koeffisentlardan tashkil topgan vektor, ya’ni Cbaz=(C1,C2,...,Cm).

Jadvalda har bir Pj vektorning ustiga xj noma’lumning chiziqli funksiyadagi koeffisenti cj yozilgan. m+1- qatorga esa x1,x2,.,xm bazis o‘zgaruvchilardagi chiziqli funksiyaning qiymati

m

YO0 = c, +c0 (5)

i=1

hamda bazis yechimning optimallik mezonini baholovchi son

A = Z - с = fa.c, - с V=1 ■■■•”) (6

yozilgan. Bazis o‘zgaruVchilargja mfe keluvchi Pj, P2, Pm vektorlar

bazis vektorlar deb belgilangan. Bu vektorlar uchun A=Z-crO

(j=1, ...,n) bo‘ladi.

Agar barcha ustunlarda Aj < 0 bo‘lsa, x=( xj,x2,.,xm) = (bj,b2,.,bm) yechim optimal yechim bo‘ladi. Bu yechimdagi chiziqli funksiyaning qiymati Y0 ga teng bo‘ladi.

max (A.) = A,

A>0 j

Agar kamida bitta j uchun Aj > 0 bo‘lsa, u holda masalaning optimal yechimi topilmagan bo‘ladi. Shuning uchun topilgan bazis rejani optimal rejaga yaqin bo‘lgan boshqa bazis rejaga almashtirish maqsadida bazisga

min(b,. / alk ) = b, / a,k

aik >0

shartni qanoatlantiruvchi Pk vektorni kiritish kerak. Agar Pk bazisga kiritilsa, eski bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak. Bazisdan shart o‘rinli bo‘lgan Pi vektor chiqariladi. Bu holda alk element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan j- qatordagi Pi vektor o‘rniga u joylashgan ustundagi Pk vektor bazisga kiritiladi. Pi vektorning o‘rniga Pk vektorni kiritish uchun simpleks jadval quyidagi formulalar asosida almashtiriladi.

Гb = bi - (bi/ aik) - aik.

lbl = bl / alk.

aij = aii - (ali / ak) - a

j

ij ' ik

ik ■>

aj = aj / aik .

Simpleks jadval almashgandan so‘ng yana qaytadan Aj<0 baholar aniqlanadi. Agar barcha j lar uchun Aj< bo‘lsa, optimal yechim topilgan bo‘ladi. Aks holda topilgan bazis reja boshqa bazis reja bilan almashtiriladi. Bunda quyidagi teoremalarga asoslanib ish ko‘riladi.

1- teorema. Agar X=(xj,x2,.,xm) bazis reja uchun Aj=Zj-cj<0 (j=1, ...,n) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu reja optimal reja bo‘ladi.

2- teorema. Agar Х0 bazis rejada tayin bir j uchun Aj=Zj-Cj>0 shart o‘rinli bo‘lsa, u holda X0 optimal reja bo‘lmaydi va shunday Xj rejani topish mumkin bo‘ladiki, uning uchun

Y(Xj)<Y(Xo)

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Agar tayin bir j uchun Aj=Zj-cj» tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda 2- teoremaga asosan bu bazis rejani ham yangi bazis rejaga almashtirish kerak bo‘ladi. Bu jarayon optimal reja topilguncha yoki masaladagi maqsad funksiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Masalaning optimal yechimining mavjud bo‘lmaslik sharti quyidagicha:

Agar tayin j uchun Aj=Zj-cj» tengsizlik o‘rinli bo‘lib, bu ustundagi barcha elementlar aij<0 (i=1,...,m; j=1,...,n) bo‘lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo‘lmaydi.

Faraz qilaylik, Simpleks jadvalda optimallik sharti (Aj<0, j=1,...,n) bajarilsin. Bu holda bu yechim

Xo=B-JPo

formula orqali topiladi. Bu yerda B=(P1, P2, ..., Pm) matrisa bazis vektorlardan tashkil topgan matrisadir.

(1)-(3) masala uchun B matrisa m o‘lchovli Jm - birlllik matrisadir, ya’ni B=Jm.

BB-1=Jm bo‘lganligi sababli B'j matrisa ham birlik matrisa bo‘ladi.

/ /

Demak, Xo=Po=(b Jo, bf20, ..., b m0, 0, ..., 0) optimal yechim

bo‘ladi.

Xj + 3x2 — x3 — 2x5 = 7 < — 2x2 + 4x3 + x4 = 12

— 4x + 3x + 8x + X = 10

У 2 3 5 6

1-Misol. Masalani simpleks usul bilan yeching

Xj >0, (j=1, 2,., 6)

Y=x2 -3x3+2x5min.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | f1 ] |  | f 3 ] |  | f— i] |  | f 0 ] |  | f— 2 ] |  | f 0 ] |  | f 7 ] |
| P = | о о  ч | > P 2 = | 1 1  4 | > P3 = | 4  v3 , | > P 4 = | 1  v 0 , | > P5 = | 00 0  ч | > Рб = | 0  v1, | > P0 = | 12 v10 , |

Yechish.\_Belgilashlar kiritamiz va simpleks jadvalni to‘ldiramiz

" C' = (0; 1; - 3; 0; 2)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | Bazis  vekt. | Cbaz | P0 | 0 | 1 | -3 | 0 | 2 | 0 |
|  |  |  |  | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | Pe |
| 1 | Pi | 0 | 7 | 1 | 3 | -1 | 0 | -2 | 0 |
| 2 | P4 | 0 | 12 | 0 | -2 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | Pe | 0 | 10 | 0 | -4 | 3 | 0 | 8 | 1 |
| 4 |  |  | 0 | 0 | -1 | 3 | 0 | -2 | 0 |
| 1 | P1 | 0 | 10 | 1 | 5/2 | 0 | 1/4 | -2 | 0 |
| 2 | P3 | -3 | 3 | 0 | -1/2 | 1 | 1/4 | 0 | 0 |
| 3 | Pe | 0 | 1 | 0 | -5/2 | 0 | -3/4 | 8 | 1 |
| 4 |  |  | -9 | 0 | 1/2 | 0 | -3/4 | -2 | 0 |
| 1 | P2 | 1 | 4 | 2/5 | 1 | 0 | 1/10 | -4/5 | 0 |
| 2 | P3 | -3 | 5 | 1/5 | 0 | 1 | 3/10 | -2/5 | 0 |
| 3 | Pe | 0 | 11 | 1 | 0 | 0 | -1/2 | e | 1 |
| A |  |  | -11 | -1/5 | 0 | 0 | -4/5 | -8/5 | 0 |

Simpleks usulning I bosqichida bazisga P3 vektor kiritilib P4 vektor chiqarildi, II bosqichida P2 kiritildi va Pi chiqarildi. Simpleks jadval (7) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi:

X = (0; 4; 5; 0; 0; 11), Ymm = - 11.

2-Masala. Korxonada to‘rt xil mahsulot tayyorlanadi. Birlik mahsulotlarning sotuv narxlari mos ravishda 2,1,3 va 5 ming so‘mdan bo‘lsin. Mahsulotlarni tayyorlash uchun energiya, xomashyo va mehnat sarflanadi. Birlik mahsulot uchun sarflanadigan resurslar miqdori quyidagi jadvalda kelitirilgan.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 xil mahsul ot | 2 xil  mahsulot | 3 xil  mahsulot | 4 xil mahsulo t | Resursla  r |
| Energiya | 2 | 3 | 1 | 2 | 30 |
| Xomashy  o | 4 | 2 | 1 | 2 | 40 |
| Mehnat | 1 | 2 | 3 | 1 | 25 |

Mahsulotlarni ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzish kerakki, mahsulotlarning sotuv narxlari yig‘indisi maksimal bo‘lsin.

Bu iqtisodiyot masalasini yechish uchun uning matematik modelini tuzamiz. Shu maqsadda ^X1,^X2 5^X3 5^X4 lar orqali rejalashtirilgan mahsulotlar miqdorlarini belgilaymiz. Ularning narxi

4

^ CX = 2 Xj + x2 + 3x3 + 5x4

г = 1

bo‘ladi. Mahsulotlarga sarflanadigan energiya miqdori 2 x4 + 3x2 + x3 + 2 x4, xomashyo miqdori 4x3 + 2x2 + x3 + 2x4 va mehnat miqdori X + 2 x2 + 3x3 + x4 dan iborat bo‘ladi.

Masala shartiga ko‘ra, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo‘lamiz:

2x + x2 + 3x3 + 5x4 ^ max  
2xj + 3x2 + x3 + 2x4 < 30,

(1)

(3)

4Xj + 2x2 + x3 + 2x4 < 40,

Xj + 2x2 + 3x3 + x4 < 25,  
x. > 0, i = 1,4.

Bu masalani simpleks metod yordamida yechish uchun uni kanonik ko‘rinishga keltiramiz. Shu maqsadda (2) tengsizliklarga muvozanatlovchi, yordamchi, x5, x6 va x7 miqdorlarni qo‘shamiz. Bu miqdorlarni iqtisodiy talqin etsak, ular qaralayotgan reja uchun erkin resurslarni anglatadi. Natijada quyidagi kanonik masalaga ega bo‘lamiz:

2Xj + x2 + 3x3 + 5x4 ^ max  
2 Xj + 3x2 + x3 + 2x4 + x5 = 30,  
4Xj + 2x2 + x3 + 2x4 + x6 = 40,  
Xj + 2x2 + 3x3 + x4 + x7 = 25,  
x. > 0, i = 1,7.

(4)

(5)

(6)

Bu masala uchun (0,0,0,0,30,40,25) bazis reja bo‘ladi va unga

fl00 ^

010 ч 001 ,

AB = ( ^ a6, a7 )

bazis mos keladi. Demak, (4)-(6) masalani simpleks metod yordamida yechish mumkin. Dastlab, yuqorida bayon etilgan algoritm asosida birinchi simpleks jadvalni toddiramiz.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | JSh, |  | 2 | 1 | 3 | 5 | 0 | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | "SB\ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| aB N'4\ |  | b,x | a1 | a2 | a3 | A4 | a5 | a6 | A7 | в |
| a5 | 0 | 30 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| a6 | 0 | 40 | 4 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 20 |
| a7 | 0 | 25 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 25 |
| Z |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| Z-C |  |  | -2 | -1 | -3 | -5 | 0 | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  |  |  |  | t |  |  |  |
| a4 | 5 | 15 | 1 | 3/2 | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 30 |
| a6 | 0 | 10 | 2 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 |  |
| a7 | 0 | 10 | 0 | 1/2 | 5/2 | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 4 |
| Z |  | 75 | 5 | 15/  2 | 5/2 | 5 | 5/2 | 0 | 0 |  |
| Z-C |  |  | 3 | 13/  2 | -1/2 | 0 | 5/2 | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  |  |  | t |  |  |  |  |
| a4 | 5 | 13 | 1 | 7/5 | 0 | 1 | 3/5 | 0 | -1/5 |  |
| a6 | 0 | 10 | 2 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 |  |
| a3 | 3 | 4 | 0 | 1/5 | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 2/5 |  |
| Z |  | 77 | 5 | 38/  5 | 3 | 5 | 12/  5 | 0 | 1/5 |  |
| Z-C |  |  | 3 | 33/  5 | 0 | 0 | 12/  5 | 0 | 1/5 |  |

Demak, ikkinchi iterasiya natijasida uchinchi qadamda optimallik sharti bajarildi. Optimal reja xopt=(0,0,4,13,0,10,0) bo‘lib, maqsad funksiyaning joiz maksimal qiymati cx imm = 77 bo‘ladi.

Izoh. Har bir jadvalning Z satridagi uchinchi katakda maqsad funksiyaning mos rejadagi qiymati hosil bo‘ladi va har bir iteratsiyada bu qiymat oshib boradi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini yechishning Simpleks usuli bir tayanch yechimdan boshqasiga o‘tish asosida maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi yechimni topishga asoslangandir. Har bir tayanch yechimdan boshqasiga o‘tilganda maqsad funksiya qiymati o‘sib boradi (maksimallashtirish masalasi uchun) yoki kamayib boradi ( minimallashtirish masalasi uchun) . Chekli qadamdagi hisoblashlardan keyin masalaning optimal yechimi topiladi yoki maqsad funksiyasi yechimlar sohasida chegaralanmaganligi aniqlanadi. Barcha hisoblash jarayonlari, bir yechimdan boshqasiga o‘tish va tayanch yechimning optimallik shartlarini tekshirish simpleks jadval deb ataluvchi maxsus jadvalda bajariladi.