

T. Azlarov, H. Mansurov

Matematik analiz asoslari

2—qism

Bakalavrlar uchun darslik

Ixchamlashtirilgan va takomillashtirilgan
3 — nashri

**Toshkent
“Universitet”
2007**

22.1973

Ushbu kitob universitetlar hamda pedagogika institutlari, shuningdek, oliy texnika o'quv yurtlarining oliy matematika predmeti chuqur dastur asosida o'qitiladigan fakultetlari talabalari uchun muljallangan. Uni yozishda mualliflar bir necha yillar davomida o'qigan ma'ruzalaridan foydalanganlar.

Kitob analiz kursining 2-qismi bo'lib, unda ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning differentsial va integral hisobi, funksional qatorlar nazariyasi va Fur'e qatorlari batafsil bayon etilgan.

T. Azlarov, H. Mansurov

Matematik analiz asoslari

2-qism

Bakalavrlar uchun darslik

Muharrir: Z. Axmedjanova
Musahxixa: M. Djuraeva

HO-35053
2

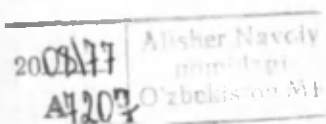
Bosishga ruxsat etildi 14.09.2007 yil.

Bichimi 60x84 $\frac{1}{4}$. Nashriyot hisob tabogi 23,9

Shartli bosma tabogi 36,1

Adadi 500 nusxa. Buyurtma № 375

Bahosi shartnoma asosida



Universitet nashriyoti Toshkent-100174,
Talabalar shaharchasi, Mirzo Ulugbek nomidagi
O'zbekiston Milliy universiteti
Ma'muriy bino 2-qavat, 7-xona

O'zMU bosmaxonasida bosildi

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, ularning limiti, uzluksizligi

«Matematik analiz asoslari» kursining 1-qismida bir o'zgaruvchili funksiyalar batafsil o'rganildi.

Matematika, fizika, texnika va fanning hoshqa tarmoqlarida shunday funksiyalar uchraydiki, ular ko'p o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi. Masalan, doiraviy silindrning hajmi

$$V = \pi r^2 h \quad (12.1)$$

ikki o'zgaruvchi: r —radius hamda h —balandlikka bog'liq.

Tok kuchi

$$J = \frac{E}{R} \quad (12.2)$$

ham ikki o'zgaruvchi: E —elektr yurituvchi kuch va R —qarshilikning funksiyasi bo'ladi. Bunda silindrning hajmi (12.1) formula yordamida bir-biriga bog'liq bo'lmagan r va h o'zgaruvchilarning qiymatlariga ko'ra, tok kuchi (12.2) formula yordamida bir-biriga bog'liq bo'lmagan E va R o'zgaruvchilarning qiymatlariga ko'ra topiladi. Shunga o'xshash misollarni juda ko'plab keltirish mumkin. Binobarin, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni yuqoridagidek chuqurroq o'rganish vazifasi tug'ildi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida ham bir o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidagidek, funksiya va uning limiti, funksiyaning uzluksizligi va xakazo kabi tushunchalar o'rganiladi. Bunda bir o'zgaruvchili funksiyalar haqidagi ma'lumotlardan muttasil foydalana boriladi.

Ma'lumki, bir o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishni ularning aniqlanish to'plamlarini (sohalarini) o'rganishdan boshlagan edik. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishni ham ularning aniqlanish to'plamlarini (sohalarini) bayon etishdan boshlaymiz.

1-§. R^n fazo va uning muhim to'plamlari

1°. R^n fazo. m ta $A_1, A_2, \dots, A_m$ ($m \geq 1$, butun son) to'plamlarning Dekart ko'paytmasi ikkita A va V to'plamlarning Dekart ko'paytmagiga o'xshash ta'riflanadi. Agar $A_1 = A_2 = \dots = A_m = R$ bo'lsa, u holda

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = R \times R \times \dots \times R = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}$$

bo'ladi. Ushbu

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}$$

to'plam R^n to'plam deb ataladi. R^n to'plamning elementi $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ shu to'plam nuqtasi deyiladi va u odatda bitta harf bilan belgilanadi: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Bunda $x_1, x_2, \dots, x_m$ sonlar x nuqtaning mos ravishda birinchi, ikkinchi, ... m -koordinatalari deyiladi.

Agar $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^n$ nuqtalar uchun $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ bo'lsa, u holda $x = y$ deb ataladi.

R^n to'plamda ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ nuqtalarni olaylik.

1-ta'rif. Ushbu

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2} \quad (12.3)$$

miqdor x va y nuqtalar orasidagi masofa (Evklid masofasi) deb ataladi. Bunday aniqlangan masofa quyidagi xossalarga ega (bunda $\forall x, y, z \in R^n$)

1) $\rho(x, y) \geq 0$ va $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Bu xossalarni isbotlaylik. (12.3) munosabatdan $\rho(x, y)$ miqdorning har doim manfiy emasligini ko'ramiz. Agar $\rho(x, y) = 0$ bo'lsa, unda $y_1 - x_1 = 0$, $y_2 - x_2 = 0, \dots, y_m - x_m = 0$ bo'lib, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ ya'ni $x = y$ bo'ladi. Aksincha $x = y$, ya'ni $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ bo'lsa, u holda (12.3) dan $\rho(x, y) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa 1)-xossani isbotlaydi.

(12.3) munosabatdan

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} = \rho(y, x) \end{aligned}$$

bo'ladi.

Masofaning 3)-xossasi ushbu

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (12.4)$$

tengsizlikka asosanib isbotlanadi, bunda $a_1, a_2, \dots, a_m$; $b_1, b_2, \dots, b_m$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar. Avvalo shu tengsizlikning to'g'riligini ko'rsataylik. Ravshanki, $\forall x \in R$ uchun

$$\sum_{i=1}^m (a_i x + b_i)^2 \geq 0.$$

Bundan, x ga nishatan kvadrat uchxadning manfiy emasligi

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right) x^2 + \left(2 \sum_{i=1}^m a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^m b_i^2 \geq 0$$

kelib chiqadi. Demak, bu kvadrat uchxad ikkita turli haqiqiy ildizga ega bo'lmaydi. Binobarin, uning diskriminanti

$$- \sum_{i=1}^m a_i^2 \sum_{i=1}^m b_i^2 + \left[\sum_{i=1}^m a_i b_i \right]^2 \leq 0$$

bo'lishi kerak. Bundan esa

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

bo'lib,

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 + \sum_{i=1}^m b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^m a_i^2 \right] + \left[\sum_{i=1}^m b_i^2 \right] + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

bo'ladir. Keyingi tengsizlikdan esa

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Odatda (12.4) tengsizlik Koshi-Bunyakovskiy tengsizlik deb ataladi.

Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in R^m$ nuqtalarni olib, ular orasidagi masofani (12.3) formuladan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2}, \\ \rho(y, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2}, \\ \rho(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - x_i)^2}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Endi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi (12.4) da

$$a_i = y_i - x_i, \quad b_i = z_i - y_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

deh olsak, unda

$$a_i + b_i = z_i - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

bo'lib,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2}$$

bo'ladir. Yuqoridagi (12.5) munosabatlarni e'tiborga olib, topamiz:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Bu esa 3)-xossani isbotlaydi.

R^n to'plam R^n fazo (m o'lchovli Evklid fazosi) deb ataladi. Endi R^n fazoning ba'zi bir muhim to'plamlarini keltiramiz.

Biror $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^n$ nuqta va $r > 0$ sonni olaylik. Quyidagi

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 \leq r^2\}, \quad (12.6)$$

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 < r^2\}, \quad (12.7)$$

ya'ni

$$\begin{aligned} \{x \in R^n : \rho(x, a) \leq r\}, \\ \{x \in R^n : \rho(x, a) < r\} \end{aligned}$$

to'plamlar mos ravishda shar hamda ochiq shar deb ataladi. Bunda a nuqta shar markazi, r esa shar radiusi deyiladi.

Ushbu

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^n : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 = r^2\}$$

ya'ni

$$\{x \in R^n : \rho(x, a) = r\}$$