

А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. В. ФОМИН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
математических специальностей университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

К 60

517.2

УДК 517.5(075.8)

Элементы теории функций и функционального анализа, А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г.

Книга представляет собой учебник, соответствующий в основном той программе курса «Анализ III», которая принята в МГУ и в ряде других университетов. Предназначена в первую очередь для студентов механико-математических и физико-математических факультетов университетов. Для ее чтения требуется владение основами математического анализа и линейной алгебры. Первая часть содержит основные теоретико-множественные понятия. В главах II—IV изложена теория линейных пространств, включающая элементы теории обобщенных функций. Эти главы, а также примыкающая к ним глава X, посвященная некоторым вопросам нелинейного функционального анализа, не предполагают знакомства с понятием меры и лебеговой теорией интегрирования. Теория меры, измеримые функции, интеграл Лебега, а также лебегова теория дифференцирования и основные свойства линейных пространств суммируемых функций излагаются в главах V—VII. Глава VIII содержит ряды Фурье и интеграл Фурье. В главе IX изложены основные факты из теории интегральных уравнений. Помещенное в конце книги Дополнение содержит краткое изложение основных сведений о банаховых алгебрах и некоторых их применениях.

Илл. 24, библи. 57 назв.

К $\frac{20203-062}{053(02)-76}$ 11-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976,
с изменениями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	9
Из предисловия ко второму изданию	10
Предисловие к третьему изданию	12

Глава I

Элементы теории множеств

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами	13
1. Основные определения (13). 2. Операции над множествами (13).	
§ 2. Отображения. Разбиения на классы	16
1. Отображение множеств. Общее понятие функции (16). 2. Разбие-	
ние на классы. Отношения эквивалентности (18).	
§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества	21
1. Конечные и бесконечные множества (21). 2. Счетные множе-	
ства (22). 3. Эквивалентность множеств (24). 4. Несчетность множе-	
ства действительных чисел (26). 5. Теорема Кантора — Бернштейна (28). 6. Понятие мощности множества (28).	
§ 4. Упорядоченные множества. Трансфинитные числа	31
1. Частично упорядоченные множества (31). 2. Отображения, сох-	
раняющие порядок (32). 3. Порядковые типы. Упорядоченные мно-	
жества (33). 4. Упорядоченная сумма упорядоченных множеств (34).	
5. Вполне упорядоченные множества. Трансфинитные числа (34).	
6. Сравнение порядковых чисел (36). 7. Аксиома выбора, теорема	
Цермело и другие эквивалентные им утверждения (38). 8. Транс-	
финитная индукция (40).	
§ 5. Системы множеств	41
1. Кольцо множеств (41). 2. Полукольцо множеств (42). 3. Кольцо,	
порожденное полукольцом (44). 4. σ -алгебры (45). 5. Системы	
множеств и отображения (46).	

Глава II

Метрические и топологические пространства

§ 1. Понятие метрического пространства	48
1. Определение и основные примеры (48). 2. Непрерывные отобра-	
жения метрических пространств. Изометрия (55).	
§ 2. Сходимость. Открытые и замкнутые множества	56
1. Предельные точки. Замыкание (56). 2. Сходимость (58). 3. Плот-	
ные подмножества (59). 4. Открытые и замкнутые множества (60).	
5. Открытые и замкнутые множества на прямой (62).	
§ 3. Полные метрические пространства	66
1. Определение и примеры полных метрических пространств (66).	
2. Теорема о вложенных шарах (69). 3. Теорема Бэра (70). 4. По-	
полнение пространства (71).	

§ 4.	Принцип сжимающих отображений и его применения	74
	1. Принцип сжимающих отображений (74). 2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений (75). 3. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений (78). 4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям (81).	
§ 5.	Топологические пространства	83
	1. Определение и примеры топологических пространств (83). 2. Сравнение топологий (85). 3. Определяющие системы окрестностей. База. Аксиомы счетности (86). 4. Сходящиеся последовательности в T (90). 5. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм (91). 6. Аксиомы отделимости (94). 7. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость (97).	
§ 6.	Компактность	98
	1. Понятие компактности (98). 2. Непрерывные отображения компактных пространств (101). 3. Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах (101). 4. Счетная компактность (103). 5. Предкомпактные множества (105).	
§ 7.	Компактность в метрических пространствах	106
	1. Полная ограниченность (106). 2. Компактность и полная ограниченность (107). 3. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах (109). 4. Теорема Арцела (109). 5. Теорема Пеано (111). 6. Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов (113). 7. Обобщенная теорема Арцела (114).	
§ 8.	Непрерывные кривые в метрических пространствах	115

Глава III

Нормированные и топологические линейные пространства

§ 1.	Линейные пространства	119
	1. Определение и примеры линейных пространств (119). 2. Линейная зависимость (121). 3. Подпространства (122). 4. Фактор-пространства (123). 5. Линейные функционалы (124). 6. Геометрический смысл линейного функционала (126).	
§ 2.	Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана — Банаха	128
	1. Выпуклые множества и выпуклые тела (128). 2. Однородно-выпуклые функционалы (130). 3. Функционал Минковского (132). 4. Теорема Хана — Банаха (134). 5. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве (137).	
§ 3.	Нормированные пространства	138
	1. Определение и примеры нормированных пространств (139). 2. Подпространства нормированного пространства (140). 3. Фактор-пространства нормированного пространства (141).	
§ 4.	Евклидовы пространства	143
	1. Определение евклидовых пространств (143). 2. Примеры (145). 3. Существование ортогональных базисов, ортогонализация (147). 4. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы (149). 5. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса — Фишера (152). 6. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме (155). 7. Подпространства, ортогональные дополнения, прямая сумма (158). 8. Характеристическое свойство евклидовых пространств (161). 9. Комплексные евклидовы пространства (164).	
§ 5.	Топологические линейные пространства	167
	1. Определение и примеры (167). 2. Локальная выпуклость (169). 3. Счетно-нормированные пространства (170).	