Xos vektorlar va xos qiymatlar. Xarakteristik tenglama.

Reja:

- Xos qiymatlar.
- Xos vektorlar.
- Xarakteristik tenglama.
- Xarakteristik ko'phad.
- Xarakteristik ko'phadning yagonaligi.

Kompleks sonlar maydoni ustida qurilgan V_n vektor fazo va $\varphi: V_n \to V_n$ chiziqli operator berilgan bo'lsin.

28.1-Ta'rif. Ushbu

$$\varphi(\bar{x}) = \lambda\bar{x} (\forall\bar{x} \in V_n,\ \ x \neq \bar{0},\ \lambda \in F) \qquad (1)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi α songa φ chiziqli operatorning xos qiymati, $\bar{x}$ vektor esa λ xos qiymatga mos keluvchi xos vektori deyiladi.

28.2-Teorema. Kompleks sonlar maydoni ustida qurilgan V_n vektor fazoning har bir φ chiziqli operatori kamida bitta xos vektorga ega.

Isboti. V_n vektor fazoning

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n \qquad (2)$$

bazisi berilgan bo'lib, $\forall\bar{x} \in V_n$ vektorning bu bazisdagi koordinatasi $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots \bar{\alpha}_n$ bo'lsin, ya'ni $\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1, + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n$ tenglik o'rinli bo'lsin. $\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \ldots, \varphi(\bar{e}_n)$ vektorlar (2) bazis orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni

$$\begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \ldots + a_{n1}\bar{e}_n, \\ \varphi(\bar{e}_2) = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \ldots + a_{n2}\bar{e}_n, \\ ------------------ \\ \varphi(\bar{e}_n) = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \ldots + a_{nn}\bar{e}_n \end{cases} \tag{3}$$

bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

matritsa φ chiziqli operatorning (2) bazisdagi matritsasi. Endi φ($\bar{x}$) vektorning (2) bazisdagi koordinatalarini aniqlaymiz.

$$\varphi(\bar{x}) = \alpha_1\varphi(\bar{e}_1) + \alpha_2\varphi(\bar{e}_2) + \ldots + \alpha_n\varphi(\bar{e}_n) = \alpha_1(a_{11}\bar{e}_1 + \ldots + a_{n1}\bar{e}_n) + \ldots + \alpha_n(a_{1n}\bar{e}_1 + \ldots + a_{nn}\bar{e}_n) =$$
$$= (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n})\bar{e}_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{n1} + \ldots + \alpha_n a_{nn})\bar{e}_n. \tag{4}$$

(1) va (4) ga asosan

$$\lambda\bar{x} = (\lambda\alpha_1)\bar{e}_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n)\bar{e}_n = (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n})\bar{e}_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{n1} + \ldots + \alpha_n a_{nn})\bar{e}_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = \lambda\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = \lambda\alpha_2, \\ --------------- \\ a_{n1}\alpha_1 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = \lambda\alpha_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ -------------------- \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \tag{5}$$

kelib chiqadi.

(5) sistema $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ noma'lumli bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. Bu sistema nolmas echimga ega bo'lishi uchun sistema determinanti nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A-\lambda E| = 0 \qquad (6)$$

hosil bo'ladi. (6) ga φ chiziqli operatorning xarakteristik tenglamasi deb yuritiladi. (6) ning chap qismidagi determinant λ ga nisbatan n-darajali ko'phadni bildiradi. Bu ko'phadga φ chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi deb yuritiladi. Bizga ma'lumki, n-darajali ko'phad kompleks sonlar maydoni ustida n ta ildizga ega bo'ladi. Bu ildizlar $\lambda_1,\lambda_2, ...\lambda_n$ bo'lib, ular φ chiziqli operatorning xos qiymatlari bo'ladi. Ḱar bir xos sonlarni (5) sistemaga qo'yib, uning nolmas echimlaridan tuzilgan vektorlar xos sonlarga mos xos vektorlar bo'ladi.

Agar $(A-\lambda_i E)$ matritsaning rangi r_i bo'lsa, φ chiziqli operatorning har biri λ_i xos songa mos keluvchi xos vektorlar soni (n-r_i) ga teng bo'ladi.

28.3-Teorema. φ chiziqli operatorning turli bazislaridagi xarakteristik ko'phadlari teng bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Xos qiymatlar deb nimaga aytiladi?
2. Xos vektorlar deb nimaga aytiladi?
3. Xarakteristik tenglamani yozing.
4. Xarakteristik ko'phadni yozing.
5. Chiziqli operatorning xos vektori haqidagi teoremani bayon qiling.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar:

1. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K. Fundamental of abstract algebra. WCB McGrew-Hill, 1997.
2. Martyn R. Dixon, Leonid A. Kurdachenko, Igor Ya. Subbotin, "ALGEBRA AND NUMBER THEORY" 2010.
3. Кострикин А.М. Введение в алгебру.- М.- «Мир».- 1977.
4. Под ред. Кострикина, Сборник задач по алгебре, М.Наука, 1986.
5. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
6. Курош А.Г. Олий алгебра курси, Тошкент, «Ўқитувчи». 1975й.
7. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. «Олий ва ўрта мактаб». 1964.
8. Р.Н.Назаров, Б.Т. Тошпўлатов, А.Д.Дусумбетов, Алгебра ва сонлар назарияси 1 қисм, 2 қисм, 1993й., 1995й.

9. A.Yunusov , D.Yunusova , Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to’plami. O’quv qo’llanma. 2009.

Qo’shimcha adabiyotlar:

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
3. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.
4. Ламбек И. Кольца и модули.- М.- «Мир».- 1971.
5. Херстейн. Некоммутативные кольца. М.- «Мир».- 1967.
6. Vilnis Detlovs, Karlis Podnieks, Introduction to Mathematical Logic. University of Latvia. Version released: August 25, 2014.
7. А.Юнусов , Д.Юнусова, М.Маматқулова, Г.Артикова, Модул технологияси асосида тайёрланган мустақил ишлар тўплами. 1−3−қисмлар, 2010.
8. Скорняков Л.Ф. Элементи обшей алгебри. М., 1983 г.
9. Петрова В.Т. лексия по алгебре и геометрии. Ч.1,2. Москва,1999г.
10. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. T., “Yangi asr avlodi”. 2006.
11. Yunusov A., Yunusova D. Sonli sistemalar. T., «Moliya−iqtisod», 2008.
12. Мазуров В.Д. и др. Краткий конспект курса висшей алгебри.

Elektron ta’lim resurslari

1. www.Ziyo.Net
2. http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/
3. http://www.allmath.ru/
4. http://www.pedagog.uz/
5. http://www.ziyonet.uz/
6. http://window.edu.ru/window/
7. http://lib.mexmat.ru;
8. http://www.mcce.ru,
9. http://lib.mexmat.ru
10. http://techlibrary.ru;