Gruppa. Halqa.

Reja:

- Gruppa va uning sodda xossalari.
- Gruppalar izomorfizmi.
- Gruppaosti, xossalari.
- Halqa va uning sodda xossalari.
- Halqalar gomomorfizmi.

32.1-ta'rif. Bizga $(2,1)$ turli $(G,*,1)$ algebra berigan bo'lib quyidagi shartlar bajarilsin.

1. $*$-binar algebraik amal **assosiativ**, ya'ni $\forall a,b,c\in G$ uchun $(a*b)*c=a*(b*c)$ bo'lsin.

2. G da **neytral element** mavjud, ya'ni $\forall a\in G$ uchun shunday $e\in G$ topilib, $e*a=a$ shart bajarilsin.

3. Har qanday $a\in G$ uchun $a'*a=e$ bo'lsin.

U holda $(G,*,')$ - algebra gruppa deyiladi.[1]

[1] S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

Definition 2.1.1 *A* ***group*** *is an ordered pair* $(G, *)$, *where* G *is a nonempty set and* $*$ *is a binary operation on* G *such that the following properties hold:*

(G1) For all $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$ ***(associative law)****.*

(G2) There exists $e \in G$ *such that for all* $a \in G$, $a * e = a = e * a$ ***(existence of an identity)****.*

(G3) For all $a \in G$, *there exists* $b \in G$ *such that* $a * b = e = b * a$ ***(existence of an inverse)****.*

Gruppadagi amal kommutativ, ya'ni $\forall a, b \in G$ uchun $a * b = b * a$ shart bajarilsa, bunday gruppa abelь gruppasi deyiladi. Bunday gruppalar, gruppalar nazariyasidagi yuqori darajali tenglamalarni echishi muamolarini qo'ygan I. G. Abel sharafiga abelь gruppalari deb nomlangan.

If a group $(G, *)$ has the property that $a * b = b * a$ for all $a, b \in G$, then $(G, *)$ is called a **commutative** or **Abelian** group. A group $(G, *)$ is called **noncommutative** if it is not commutative.

Har bir $a \in G$ element uchun $a' \in G$ element a elementga chapdan simmetrik deyiladi. Gurppadagi elementlar soni uning tartibi deyiladi. Agar gruppa tartibi natural sondan iborat bo'lsa, bunday gruppa chekli tartibli gruppa, aks holda cheksiz tartibli gruppa deyiladi.

Gruppada $*$ - binar algebraik amal "+"- qo'shish amali yoki "•"- ko'paytirish amali bo'lishi mimkin. Bu amallarga nisbatan qo'llaniladigan tushunchalar quyidagi jadvalda keltirilgan.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

*	$\bullet$	+
1) binar amal	ko'paytirish	qo'shish
2) neytral element	birlik element	nol
3) simmetrik element	teskari element	qarama-qarshi element

Birlik elementni ko'pincha e yoki 1 orqali, nolni "0"- orqali, a ga teskari elementni a^{-1}, a ga qarama-qarshi elementni $-a$ orqali belgilash qabul qilingan.

Gruppadagi binar algebraik amal "$\bullet$" bo'lsa, bunday gruppani <u>mulьtiplikativ gruppa</u>, "+" bo'lsa <u>additiv gruppa</u> deymiz. Gruppadagi amalni ko'paytirish deb qarash yozuvni ixchamlashtiradi, shu sabab, mulьtiplikativ gruppaning terminlaridan foydalanamiz.

32.2-teorema. Gruppadagi ixtiyoriy elementga chap teskari element, shu elementga o'ngdan ham teskari bo'ladi.

Isbot. Gruppaga tegishli $\forall a$ elementga chapdan teskari a^{-1} element, o'ngdan ham teskari bo'lishini ko'rsatamiz. SHartga ko'ra $a^{-1} \bullet a = e$ undan tashqari $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ element a^{-1} ga chapdan teskari element bo'lsa $\left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet a^{-1} = e$ bo'lishi ham ravshan u holda, gruppa ta'rifining 2 va 3 shartlariga ko'ra

$$a \bullet a^{-1} = e\left(a \bullet a^{-1}\right) = \left(\left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet a^{-1}\right) \bullet \left(a \bullet a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1}\left(\left(a^{-1} \bullet a\right)a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet \left(ea^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet a^{-1} = e$$

SHunday qilib $a \bullet a^{-1} = e$, ya'ni a^{-1} element a elementga o'ngdan teskari element ekan.

32.3-teorema. Gruppada o'ng birlik element, chap birlik element bo'ladi.

Isbot. Gruppa ta'rifi va 32.2-teoremaga ko'ra $a \bullet e = a \bullet \left(a^{-1} \bullet a\right) = \left(a \bullet a^{-1}\right)a = ea = a$.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

32.4-teorema. Gruppada birlik element yagonadir.

Isbot. 32.3- teoremada chap birlik element o'ng birlik elementga tengligini ko'rsatdik. Bu elementni gruppaning birlik elementi deb ataymiz. Endi ikkita e_1 va e_2 birlik elementlar mavjud deb faraz qilaylik. U holda $e_1 = e_1 \bullet e_2 = e_2 \bullet e_1 = e_2$

32.5-teorema. Gruppada ixtiyoriy element uchun yagona teskari element mavjud.

Isbot. Haqiqatdan a_1 elementga a_1^{-1} va a_2^{-1} teskari elementlar mavjud bo'lsin, u holda $a_1^{-1} = a_1^{-1} \bullet e = a_1^{-1}\left(a \bullet a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1} \bullet a\right) \bullet a_2^{-1} = e \bullet a_2^{-1`} = a_2^{-1}$.

32.6-teorema. Gruppaning ixtiyoriy a va b elementlari uchun $ax = b$ va $ya = b$ tenglamalarning har biri yagona echimga ega.

Isbot. $x = a^{-1} \bullet b$ va $y = b \bullet a^{-1}$ elementlar mos ravishda bu tenglamalarning echimi bo'lishi ayon. Faraz qilaylik $ax = b$ tenglamaning ikkita x_1 va x_2 echimlari bo'lsin. U holda $ax_1 = b = ax_2$ yoki $ax_1 = ax_2$. Bu tenglikning ikkila tomonini a^{-1} ga ko'paytirsak $a^{-1} \bullet (ax_1) = a^{-1} \bullet (ax_2)$ yoki $\left(a^{-1}a\right)x_1 = \left(a^{-1}a\right)x_2$ u holda $ex_1 = ex_2$ demak $x_1 = x_2$ bo'ladi. Ikkinchi tenglama echimi yagona bo'lishi shunga o'xshash isbot qilinadi.

32.7-natija. Gruppaning ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun $a \bullet b = a \bullet c$ yoki $b \bullet a = c \bullet a$ bo'lsa $a = c$ bo'ladi.

32.8-natija. Gruppada ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun $a \bullet b = e$ yoki $c \bullet b = e$ bo'lsa, $b = e = c$ bo'ladi.

32.32-natija. Gruppada ixtiyoriy e element uchun $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, ya'ni a^{-1} elementning teskarisi a elementdir.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

32.10-natija. Gruppaning ixtiyoriy a,b elementlar uchun $a \bullet b = e$ bo'lsa a va b elementlar bir-biriga teskari elementlardir.

Bu natijalarning isboti yuqoridagi teoremalardan bevosita kelib chiqadi, shuning uchun ularning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida qoldiramiz.

Gruppalar nazariyasida gomomorfizm, izomorfizm, gruppaosti tushunchalari algebradagi mos tushunchalarning xususiy xollari bo'lib, ular quyidagicha kiritiladi: $(G,\bullet,^{-1})$ va $\left(H,\bullet,^{-1}\right)$ gruppalar berilgan bo'lib, $h: G \to H, G$ ni H ga akslantirish bo'lsin. U holda $\forall a,b \in G$ uchun $h(a \bullet b) = h(a) \bullet h(b)$ va $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$ shartlar bajarilsa, h- gomomorf akslantirish deyiladi. Agar h- in'ektiv bo'lsa, monomorf, syur'ektiv bo'lsa, epimorf, biektiv bo'lsa, izomorf akslantirish deyiladi.

32.32-ta'rif. $(G,\bullet,^{-1}), (H,\bullet,^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. Agar G ni H ga akslantiradigan kamida bitta izomorf akslantirish mavjud bo'lsa bu gruppalar izomorf deyiladi va $G \cong H$ orqali belgilanadi.

32.10-ta'rif. Gruppani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, o'ziga o'zini izomorf akslantirish aftomorfizm deyiladi.

32.11-teorema. $(G,\bullet,^{-1}), (H,\bullet,^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. G ni H ga akslantiradigan $\varphi: G \to H$-akslantirish gomomorf akslantirish bo'lishi uchun G dagi binar amalni saqlash etarli, ya'ni $\forall a,b \in G$ uchun $\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$ bo'lishi etarli.

Isbot. Berilgan gruppalarning birlik elementlari mos ravishda e va e' bo'lsin, u holda $\varphi(e) = e'$. Haqiqatdan $\varphi(e) = \varphi(e \bullet e) = \varphi(e) \bullet \varphi(e)$.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

Demak, $e' = \varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1} = (\varphi(e) \bullet \varphi(e))\varphi(e)^{-1} = \varphi(e) \bullet (\varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1}) = \varphi(e) \quad \forall a \in G$ uchun $\varphi(e) = \varphi(a \bullet a^{-1}) = \varphi(a) \bullet \varphi(a^{-1})$ u holda $\varphi(a^{-1}) = \varphi(e) \bullet \varphi(a)^{-1} = e' \bullet \varphi(a)^{-1} = \varphi(a)^{-1}$, ya'ni $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

32.12-teorema. Gruppalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

32.13-misol. R^+ -musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. R^+ haqiqiy sonlarni ko'paytirish va teskarisini olish amallariga nisbatan mulьtiplikativ gruppa tashkil qiladi.

R - haqiqiy sonlar to'plami esa qo'shish va qarama- qarshisini olish amallariga nisbatan additiv gruppa hosil qiladi. Bu gruppalarni mos ravishda $(R^+, \bullet, -1)$ va $(R, +, -)$ orqali belgilaylik. $\varphi : R \to R^+$ $\varphi(x) = ex$ -biektiv akslantirish bo'lib $e \forall x_1, x_2 \in R$ uchun $\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \bullet e^{x_2} - \varphi(x_1) \bullet \varphi(x_2)$.

32.14-ta'rif. Gruppaning gruppadagi amallariga nisbatan yopiq bo'sh bo'lmagan to'plamostisi <u>gruppaosti</u> deyilади.

Definition 4.1.1 *Let $(G, *)$ be a group and H be a nonempty subset of G. Then $(H, *)$ is called a* ***subgroup*** *of $(G, *)$ if $(H, *)$ is a group.*

$(G, \bullet, ^{-1})$-gruppa berilgan bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $H \neq \varnothing$ va $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a, b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b \in H$ va $a^{-1} \in H$ bo'lishi etarli. U holda $a \bullet a^{-1} = e \in H$. Ya'ni gruppaning neytral elementi gruppaosti uchun ham neytral element ekan. $H \subset G$ bo'lganligi uchun gruppaostida ham "$\bullet$" binar algebraik amal assosiativdir. Shunday qilib, gruppaosti ham o'z navbatida gruppa hosil qilar ekan.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

32.15-teorema. $(G,\bullet,^{-1})$ gruppa berilgan bo'lsin $H \neq \varnothing$ $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a,b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Agar $(H,\bullet,^{-1})$ gruppaosti bo'lsa, $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi ravshan. Faraz qilaylik $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lsin. U holda xususan $a=b$ bo'lsa $a \bullet a^{-1} = e \in H$ bo'lib, bundan $\forall e,b$ elementlar uchun $e \bullet b^{-1} \in H$, ya'ni $\forall b$ uchun $b^{-1} \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ shartda b ni b^{-1} bilan almashtirsak, $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Ya'ni H - gruppaosti ekan.

Let $(H,*)$ be a subgroup of a group $(G,*)$. Let e_H denote the identity of H and e denote the identity of G. Now $e_H * e_H = e_H = e_H * e$. Hence, by the cancellation property, $e_H = e$. Thus, the identity elements of G and H are the same. Now let $h \in H$. Let h' denote the inverse of h in H and h^{-1} denote the inverse of h in G. Then $h' = h' * e = h' * (h * h^{-1}) = (h' * h) * h^{-1} = e * h^{-1} = h^{-1}$. Thus, the inverse of h in H and the inverse of h in G are the same.

Of course, if $(G,*)$ is a group, then $(\{e\},*)$ and $(G,*)$ are subgroups of $(G,*)$. These subgroups are called **trivial**.

32.16-teorema. Gruppaosti bo'lish munosabati noqat'iy tartib munosabatdir.

32.17-teorema. $(G,\bullet,^{-1})$ gruppaning gruppaostilaridan iborat bo'sh bo'lmagan $\mathcal{B}$ to'plamning barcha elementlarining kisishmasi yana gruppaosti bo'ladi.

$(G,\bullet,^{-1})$ gruppa va G ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi M birilgan bo'lsin. $M \subset G\alpha$ shartni qanotlantiradigan $(G,\bullet,^{-1})$ ning barcha $(G\alpha \bullet^{-1})$ larning kisishmasi M to'plam yaratgan gruppaosti deyiladi va bu gruppaosti $(< M >^{-1},\bullet)$ orqali belgilanadi. Agar M-bir elementli to'plam bo'lsa, bu gruppa siklik gruppa deyiladi.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

32.18-misol. $M=\{1,2,...,h\}$ to'plam berilgan bo'lsin. M ni M ga akslantiradigan har qanday biektiv akslantirish M to'plamda aniqlagan o'ringa qo'yish deyiladi. M to'plamda aniqlangan barcha o'rniga qo'yshlar to'plamini S_n orqali belgilaymiz. S_n da ikkita φ va ψ o'rniga qo'yilarning kompozisiyasini $\forall x \in M$ uchun $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x))$ ko'rinishda aniqlasak, S_n to'plam « $\circ$ » amalga nisbatan gruppa tashkil etadi.

Xaqiqatdan, ikkita biektiv funksiyalarning kompozisiyasi yana biektiv funksiya bo'lib, assosiativdir. Har qanday biektiv funksiyaga teskari funksiya mavjud, $\varphi(x)=x$ tenglik bilan aniqlangan o'rniga qo'yish esa kompozisiya amaliga nisbatan neytral elementdir.

Bu misolni $n=3$ uchun ko'rib chiqishni o'quvchilarga havola qilamiz.

32.132-misol. Muntazam k-burchakni diagonallari kesishgan nuqta atrofida $\frac{2\pi}{k} \bullet n, k = 3,4,...,n-1$ burchaklarga burishlar to'plami, burishlarni ketma-ket bajarish amaliga nisbatan gruppa hosil qiladi.

32.20-misol. G-tekislikdagi vektorlar to'plami bo'lsin. U holda G vektorlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppa hosil qiladi.

32.21-misol. $(Z,+,-)$-butun sonlar additiv gruppasi $(Q,+,-)$ rasional sonlar additiv gruppasining gruppaostisidir.

32.22-misol. $(Q,+,\bullet,^{-1})$-musbat rasional sonlar mulьtiplikativ gruppasi $(R^{+},\bullet,^{-1})$ musbat haqiqiy sonlar mulьtiplikativ gruppasining gruppaostisidir.

32.23-ta'rif. Agar $(K,+,-,\bullet)$ $(2,1,2)$ turli algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsa

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

(1) $(K,+,-,)$ abelь gruppasi;

(2) $(K,\bullet)$ -yarim gruppa;

(3) $\forall a,b,c \in K$ uchun $a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c$ va $(b+c)\bullet a=b\bullet a+c\bullet a$ u holda $(K,+,-,\bullet)$- algebra **halqa** deyiladi.

Definition 10.1.1 *A* ***ring*** *is an ordered triple* $(R,+,\cdot)$ *such that* R *is a nonempty set and* $+$ *and* $\cdot$ *are two binary operations on* R *satisfying the following axioms.*

(R1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ *for all* $a,b,c\in R$.
(R2) $a+b=b+a$ *for all* $a,b\in R$.
(R3) There exists an element 0 *in* R *such that* $a+0=a$ *for all* $a\in R$.
(R4) For all $a\in R$, *there exists an element* $-a\in R$ *such that*

$$a+(-a)=0.$$

(R5) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ *for all* $a,b,c\in R$.
(R6) $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ *for all* $a,b,c\in R$.
(R7) $(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a)$ *for all* $a,b,c\in R$.

$(K,+,-,)$ additiv gruppaning neytral elementi halqaning noli deyiladi va 0 orqali belgilanadi.

We call 0, the **zero element** of the ring $(R,+,\cdot)$.

Z halqa unda bajarilgan "$\bullet$"-amalining xossalariga mos ravishda nomlanadi. Agar ko'paytirish amali assosiativ bo'lsa, halqa assosiativ halqa, ko'paytirish amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa birlik elementli halqa deyiladi.

Agar halqada $a\neq 0$ va $b\neq 0$ elementlar uchun $a\bullet b=0$ bo'lsa, a nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

o'ng bo'luvchisi bo'lgan element <u>nolning bo'luvchisi</u> deyiladi. Biz asosan birlik elementga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

32.24-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa <u>butunlik sohasi</u> deyiladi.

32.25-misol. Z-butun sonlar to'plami $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan halqa bo'lib, $(Z,+,-,\bullet)$ orqali belgilanadi. Bu halqa butunlik sahasidir.

32.26-misol. $K=\{0,e,a,b\}$ to'plamida $+,-,\bullet$ amallari quyidagi jadvallar orqali berilgan bo'lsin:

$\oplus$	0	e	a	b
0	0	e	0	b
e	e	a	a	a 3
a	a	b	0	e
b	b	a 3	a	a

$\odot$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	0	a
b	0	b	a	e

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

(K, ⊕, Θ, ⊙) algebra kommutativ, assosiativ, birlik elementga ega bo'lgan halqadir. Lekin $a \bullet a = 0$, bo'lib a nolning bo'livchisidir.

32.27-teorema. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lib, a, b, c lar halqaning ixtiyoriy elementlari bo'lsin, u holda

(I) agar $a+b=a$ bo'lsa, $b=0$.

(II) agar $a+b=0$ bo'lsa, $a=-b$.

(III) $-(-a)=a$.

(IV) $0 \bullet a = a \bullet 0 = 0$.

(V) $(-a)(-b) = a \bullet b$.

(VI) $(a-b) \bullet c = ca - bc$.

(VII) $c(a-b) = ca - cb$.

Isbot. I, II, III, IV tasdiqlar $(K,+,-,)$-kommutativ gruppaligidan bevosita kelib chiqadi. (VI)- xossaning isbotini keltiramiz.

$a \bullet 0 = a(0+0) = a \bullet 0 + a \bullet 0 \Rightarrow a \bullet 0 = a \bullet 0 + a \bullet 0 \Rightarrow a \bullet 0 = 0$

$0 \bullet a = 0$ tenglik shunga o'xshash isbot qilinadi.

(V) tsadiqning isboti.

$(-a) \bullet b + a \bullet b = ((-a)+a) \bullet b = 0 \bullet b = 0$. Demak. $(-a) \bullet b = -(a \bullet b)$;

U holda $ab = -(-a) \bullet b$. Endi $(-a) \bullet (-b) + (-a) \bullet b = (-a)(-b+b) = (-a) \bullet 0 = 0$ ni hisobga olsak $(-a)(-b) = -(-a) \bullet b = ab$.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

(VII) tasdiq (VI) ga o’xshash isbotlanadi.

32.28-ta’rif. $(K,+,-,\bullet)$ va $(K',+,-,\bullet)$ halqalar berilgan bo’lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K,+,-,\bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi: K \to K'$ akslantirish gomomorf akslantirish deyiladi.

Odatdagidek φ-in’ektiv bo’lsa, monomorf, syurьektiv bo’lsa epimorf, biektiv bo’lsa izomorf akslantirish deyiladi. Halqani o’zini-o’ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

Huddi algebradagidek halqalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabati bo’lib, izomorf halqalar $(K,+,-,\bullet) \cong (K',+,-,\bullet)$ orqali belgilanadi.

32.232-misol $(Z,+,-,\bullet)$ butun sonlar halqasi (K, ⊕, Θ, ⊙) 32.26-misoldagi halqa bo’lsin, u holda $\varphi: Z \to K$,

$$4(z)\begin{cases} 0, \text{агар } z = 4k \\ e, \text{агар } z = 4k+1 \\ a, \text{агар } z = 4k+2 \\ b, \text{агар } z = 4k+3 \end{cases}$$ akslantirish gomomorfizmdir.

Halqaosti tushunchasi ham, algebraosti tushunchasi kabi kiritiladi.

32.30-ta’rif. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo’lsin. L esa K ning bo’sh bo’lmagan to’plamostisi bo’lsin.

Agar L to’plam K dagi $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo’lsa, ya’ni $\forall a,b \in L$ uchun $a+b \in L$, $a \bullet b \in L$, $-a \in L$ shartlar bajarilsa $(L,+,-,\bullet)$-algebra $(K,+,-,\bullet)$ halqaning halqaostisi deyiladi.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L \subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

32.31-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Gruppa ta'rifini keltiring. Uning asosiy xossalarini ayting.
2. Additiv, mulьtiplikativ gruppalarga algebra, geometriya kursidan misollar keltiring.
3. Gruppalar gomomorfizmining qanday turlarini bilasiz?
4. Har qanday gomomorfizm izomorfizm bo'la oladimi, yoki aksincha?
5. Gruppalar avtomorfizmi nima?
6. Gruppaosti tushunchasiga misollar keltiring.
7. Halqaning qanday turlarini bilasiz?
8. Xalqalar gomomorfizmi, izomorfizmiga misollar keltiring.
9. Halqalar avtomorfizmi ta'rifini bayon qiling.
10. Halqaostilar kesishmasi yana halqaosti bo'lishini isbotlang.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar:

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

1. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K. Fundamental of abstract algebra. WCB McGrew-Hill, 1997.
2. Martyn R. Dixon, Leonid A. Kurdachenko, Igor Ya. Subbotin, “ALGEBRA AND NUMBER THEORY” 2010.
3. Кострикин А.М. Введение в алгебру.- М.- «Мир».- 1977.
4. Под ред. Кострикина, Сборник задач по алгебре, М.Наука, 1986.
5. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
6. Курош А.Г. Олий алгебра курси, Тошкент, «Ўқитувчи». 1975й.
7. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. «Олий ва ўрта мактаб». 1964.
8. Р.Н.Назаров, Б.Т. Тошпўлатов, А.Д.Дусумбетов, Алгебра ва сонлар назарияси 1 қисм, 2 қисм, 1993й., 1995й.
9. A.Yunusov , D.Yunusova , Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to’plami. O’quv qo’llanma. 2009.

Qo’shimcha adabiyotlar:

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
3. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.
4. Ламбек И. Кольца и модули.- М.- «Мир».- 1971.
5. Херстейн. Некоммутативные кольца. М.- «Мир».- 1967.

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.

6. Vilnis Detlovs, Karlis Podnieks, Introduction to Mathematical Logic. University of Latvia. Version released: August 25, 2014.

7. А.Юнусов , Д.Юнусова, М.Маматқулова, Г.Артикова, Модул технологияси асосида тайёрланган мустақил ишлар тўплами. 1−3−қисмлар, 2010.

8. Скорняков Л.Ф. Элементи обшей алгебри. М., 1983 г.

9. Петрова В.Т. лексия по алгебре и геометрии. Ч.1,2. Москва,1999г.

10. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. T., “Yangi asr avlodi”. 2006.

11. Yunusov A., Yunusova D. Sonli sistemalar. T., «Moliya−iqtisod», 2008.

12. Мазуров В.Д. и др. Краткий конспект курса висшей алгебри.

Elektron ta’lim resurslari

1. www.Ziyo.Net
2. http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/
3. http://www.allmath.ru/
4. http://www.pedagog.uz/
5. http://www.ziyonet.uz/
6. http://window.edu.ru/window/
7. http://lib.mexmat.ru;
8. http://www.mcce.ru,
9. http://lib.mexmat.ru
10. http://techlibrary.ru;

*S.D.Malik, John N.Mordeson, M.K.Sen, Fundamentals of Abstract Algebra. pp. 57-287.