Predikatga misollar

1-misol. Natural sonlar to'plamida R (a, b) –predikat $a \geq b$ tengsizlikni bildirsin, u holda R(1, 0) = 1, R(1, 2) = 0,…,R(2, 1) = 1, R(2, 2) = 1, R(2, 3) = 0 va hokazo bo'lishini tushunish qiyin emas.

2-misol. N – natural sonlar to'plamida aniqlangan R(x)-«x-toq son»; Q(x)-«x birorta natural sonning kvadratiga teng»-predikatlarni qaraylik. U holda x=1, 4, 5, 9 qiymatlar uchun $R \wedge Q$, $R \vee Q$ predikatlarning qiymatlarini toping.

$(R \wedge Q)(1) = R(1) \wedge Q(1) = 1 \wedge 1 = 1$

$(R \wedge Q)(2) = R(2) \wedge Q(2) = 0 \wedge 0 = 0$

$(R \wedge Q)(3) = R(3) \wedge Q(3) = 1 \wedge 0 = 0$

$(R \wedge Q)(5) = R(5) \wedge Q(5) = 1 \wedge 0 = 0$

$(R \wedge Q)(9) = R(9) \wedge Q(9) = 1 \wedge 1 = 1$

$(R \vee Q)(1) = R(1) \vee Q(1) = 1 \vee 1 = 1$

$(R \vee Q)(2) = R(2) \vee Q(2) = 0 \vee 0 = 0$

$(R \vee Q)(3) = R(3) \vee Q(3) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(5) = R(5) \vee Q(5) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(9) = R(9) \vee Q(9) = 1 \vee 1 = 1$

Shunga o'xshash $R \rightarrow Q$, $R \leftrightarrow Q$, $\rceil R$, $\rceil Q$ predikatlarning qiymatlarini hisoblang .

Ta'rif. $M \neq \varnothing$ to'plamda aniqlangan R(x) predikat berilgan bo'lsin, u holda R(x) predikatni rost mulohazaga aylantiradigan x ning M to'plamga tegishli barcha elementlarini E_r orqali belgilaymiz. E_r-R(x) predikatning rostlik sohasi deyiladi.

Rostlik sohasi quyidagi xossalarini isbotlang.

1°. $E_{\bar{p}} = M \setminus E_p$

2°. $E_{p \wedge q} = E_p \cap E_q$

3°. $E_{p \vee q} = E_p \cup E_q$

4°. $E_{p \rightarrow q} = E_{\bar{p}} \cup E_q$

4-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan «x⋮u», ya'ni, «x natural son u natural songa qoldiqsiz bo'linadi» degan predikatni R(x,u) - deb belgilaylik. U holda $\forall$xR(x,u) - ifoda ixtiyoriy natual son u natural songa bo'linadi, degan bir o'zgaruvchili predikatni bildiradi. Agar u=1 bo'lsa, $\forall$xR(x,1) = 1, u = 2, 3, … bo'lsa, $\forall$xR(x,2) = 0, $\forall$xR(x,3) = 0,… bo'ladi.

5-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan «$x^2+u^2=16$» - ikki o'zgaruvchili R(x, u) predikat berilgan bo'lsin, u holda:

$\exists$xR(x, 1) = 0; $\exists$xR(x, 2) = 0; $\exists$xR(x, 3) = 0;

$\exists$xR(x, 4) = 1; $\exists$xR(x, 5) = 0,…, va hokazo.

$\exists x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$ predikatda x_1 o'zgaruvchi bog'liq o'zgaruvchi, qolgan $x_2,\ldots,x_n$ lar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

6-misol. R(x,u)- butun sonlar to'plami Z da aniqlangan «x+u>0» mazmunidagi predikat bo'lsin, u holda

$\forall x \forall u R(x,u)$- «ixtiyoriy ikkita butun son yig'inidisi musbat bo'ladi» - yolg'on mulohaza;

$\forall x \exists u R(x,u)$-«har qanday butun son x uchun shunday u butun son mavjud bo'lib ulraning yig'indisi musbat» - rost mulohaza;

$\exists x \forall u R(x,u)$-«shunday x butun son mavjud bo'lib, uning ixtiyoriy u butun son bilan yig'idisi musbat» - yolg'on mulohaza;

$\exists x \exists u R(x,u)$-«shunday x va u butun sonlar mavjud-ki, ularning yig'indisi musbat» - rost mulohaza bo'ladi.

Bizga R(x) R(x, u)…$Q(x_1,\ldots,x_n)$ A, V ko'rinishdagi predikatlar berilgan bo'lsin. Har qanday n(n=0, 1, 2) o'rinli predikatni elementar formula deb ataymiz. Xususan har qanday mulohaza ham elementar formuladir.

7-misol. $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ tengkuchlilikni isbotlang.

8-misol. Natural sonlar to'plamida qaralgan tub son tushunchasi uchun quyidagi formulani keltirish mumkin :

$(\forall n\in N)((n \text{ - tub son}) \Leftrightarrow (n\neq 1 \wedge n \vdots p \Rightarrow p=1\vee p=n)).$

Yoki quyidagi belgilashlarni kiritsak :

A(x) – «x-tub son», V(x) – «$x\neq 1$», S(x) –« $x \vdots p$», D(x) – «x=1», P(x) – «x=p» , u xolda yuqoridagi formulani quyidagicha ifodalash mumkin :

$(\forall x\in N)\ (A(x) \Leftrightarrow B(x) \wedge C(x) \Rightarrow D(x) \vee P(x)).$

9-misol. Sonli ketma-ketlik limitini ifodalovchi formula :

$$(a=\lim_{n\to\infty} a_n)\Leftrightarrow\forall(\varepsilon>0 \wedge \varepsilon\in R)\ \exists(n_0\in N)\ \forall(n\in N)\ ((n \geq n_0) \Rightarrow |\, a_n-a < \varepsilon).$$

10-misol. Monoton o'suvchi funksiyani ifodalovchi formula:

(E to'plamda aniqlangan $u=f(x)$ funksiya–o'suvchi) $\Leftrightarrow$

$\forall(x_1\in E)\ \forall(x_2\in E)\ ((x_1< x_2) \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)).$

Teorema va uning turlari. Har qanday teorema shart va natijadan iborat. Agar A teoremaning sharti V esa uning hulosasi bo'lsa, u holda teoremani $A \Rightarrow V$ (1) ko'rinishda yozishimiz mumkin.

$V \Rightarrow A$ (2) teoremaga (1) teoremaga teskari teorema deyiladi.

$\rceil A \Rightarrow \rceil V$ (3) teoremaga (1) teoremaga qarama-qarshi teorema deyiladi.

$\rceil V \Rightarrow \rceil A$ (4) teoremaga berilgan (1) teoremaning teskarisiga qarama-qarshi (yoki berilgan (1) teoremaning qarama-qarshisiga teskari) teorema deyiladi.

Rostlik jadvallari orqali $A \Rightarrow V \equiv \rceil V \Rightarrow \rceil A$ va $V \Rightarrow A \equiv \rceil A \Rightarrow \rceil V$ tengkuchliliklarni isbot qilib, quyidagi xulosani chiqaramiz:

$A \Rightarrow V$ teorema o'rniga $\rceil V \Rightarrow \rceil A$ teoremani isbot qilib, $A \Rightarrow V$ rost, ya'ni to'g'ri deb aytishimiz mumkin.

Isbot tushunchasi. A_1, A_2, ... , A_n (1) mulohazalar berilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa:

1. A_1 - aksioma yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.
2. Har bir A_i , $i \geq 2$ yoki o'zidan oldingi mulohazadan keltirib chiqarilsin, yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.

U holda (1) ketma-ketlikni biz A_n mulohazaning isboti deymiz.

Isbot qilish usullari. Isbot qilish usullarini shartli ravishda ikki turga bo'lish mumkin:

1. Bevosita - to'g'ridan-to'g'ri isbot qilish.
2. Mantiq qonunlari (isbot qilish sxemalari) orqali isbot qilish.

Teorema shartining rostligidan, xulosaning rostligini to'g'ridan-to'g'ri keltirib chiqarishni bevosita isbot qilish deb tushunamiz. Mantiq qonunlari orqali isbot qilishga, teskarisidan isbot qilish, uchinchisini inkor qilish qonuni orqali isbot qilish, induksiya yordamida isbot qilish va h.k.lar kiradi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Predikatga ta'rif bering.
2. Predikatning qiymatlar sohasi, rostlik sohasi nima? Misollar yordamida tushuntiring
3. Predikatlar diz'yunksiyasi, kon'yunksiyasi, implikasiyasi, ekvivalensiyasiga misollar keltiring.
4. Mantiq amallarini qo'llash natijasida hosil bo'ladigan predikat o'zgaruvchilarining soni haqida nima deyish mumkin?
5. Umumiylik va mavjudlik kvantorlarini qo'llashga misollar keltiring.
6. Predikatli formula qanday hosil qilinadi?
7. Predikatli formulaning qanday turlarini bilasiz?
8. Teoremaning qanday turlarini bilasiz?
9. Teoremalarni isbotlash usullari qanday?
10. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida ifodalashga misol keltiring.