Е.А. Григорьев

ВВЕДЕНИЕ
В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Практикум

(по программе бакалавров)

ПРЕДУВЕДОМЛЕНИЕ К ПРАКТИКУМУ

Настоящее пособие содержит основные формулировки, решение примеров, а также вопросы и задачи для самостоятельной работы из готовящегося к печати курса **"ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ".** Автор рассчитывает на ограниченное распространение следующего ниже текста до его издания и надеется найти в этом понимание со стороны пользователей.

ПРЕДИСЛОВИЕ К КУРСУ ЛЕКЦИЙ

Предлагаемый вниманию читателя курс сформировался во второй половине 1990-х гг., когда обучение по программе бакалавров на факультете ВМК проходили иностранные студенты. Процесс преподавания строился с акцентом на умение учащихся в итоге применить полученную теоретическую базу к решению конкретных практических задач. Отсюда насыщение текста, в отличие от принятых в то время учебников, множеством примеров при некотором сокращении объема теоретической части курса.

Время показало, что такой подход оказался вполне востребованным: в конце 1990-х – начале 2000-х гг. появился целый ряд учебных пособий (в том числе и по ТФКП), построенных по этому принципу.

В течение последних 15 лет тексты лекций были не однажды переработаны, были добавлены вопросы и задачи в конце каждого параграфа. В итоге лекции приобрели вид, представленный ниже. Они предназначены студентам отделения бакалавров по направлению "Прикладная математика и информатика"(4-ый семестр), а также иностранным учащимся-бакалаврам (5-ый семестр).

Необходимо отметить, что это еще не завершенный учебник; какие-то разделы, а также порядок их изложения могут быть пересмотрены. На нижеследующих страницах нет рисунков, присутствуют только отсылки к ним. Возможно, восстановление рисунков будет неплохим упражнением для учащихся.

Автор будет признателен высказавшим советы по улучшению пособия, а также указавшим на его недочеты.

Глава 1
Основные понятия комплексного анализа

§1. Комплексные числа и их свойства

1.1. Основные определения

Комплексным числом называется упорядоченная пара

$$z = (x, y)\,, \quad \text{где} \quad x, y \in \mathbf{R}\,.$$

Первый и второй элементы пары (x, y) называются *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа z соответственно. Обозначения:

$$x = \operatorname{Re} z\,; \quad y = \operatorname{Im} z\,.$$

Множество комплексных чисел C с арифметическими операциями, нулем и единицей является *полем.* Это поле $\mathbf{C}$ – расширение поля действительных чисел $\mathbf{R}$. При этом действительное число x отождествляется с парой $(x, 0)$. Число вида $(0, y)$ называется *чисто мнимым* числом.

Комплексно сопряженным с числом $z = (x, y)$ называется комплексное число $\overline{z} = (x, -y)$.

Представление элемента $z = (x, y)$ в виде $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа

1.2. Примеры.

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $c = \dfrac{1-i}{1+i}$.

$\triangleright$

$$c = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)\,(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$$

Отсюда $\operatorname{Re} c = 0\,, \quad \operatorname{Im} c = -1 \quad \triangleleft$

2. Решить уравнение: $(\overline{z})^2 = z\,.$

$\triangleright$ Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$(x - iy)^2 = x + iy\,.$$

Приравнивая действительные и мнимые части соответственно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x\,, \\ -2xy = y\,. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы имеем $y = 0$ либо $x = -\dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$y = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1\,; \end{array}\right. \qquad x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ответ: $z = 0$; $z = 1$; $z = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z = -\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\lhd$

3. Доказать, что многочлен степени n

$$P_n(z) = a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n$$

с действительными коэффициентами a_k наряду с каждым комплексным корнем z_0 имеет также корень $\overline{z_0}$.

$\rhd$ В самом деле, по свойствам комплексного сопряжения

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_0\, z^n} + \overline{a_1\, z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_n} = a_0\,(\overline{z})^n + a_1\,(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_n = P_n(\overline{z})\,.$$

Поэтому если $P_n(z_0) = 0$, то и $P_n(\overline{z}_0) = \overline{P_n(z_0)} = 0$, что и требовалось $\lhd$

1.3. Геометрическая интерпретация

Комплексное число $z = (x, y)$ можно рассматривать как координаты точки на плоскости $\mathbf{R}^2$, тогда множество $\mathbf{C}$ отождествляется с множеством всех точек так называемой комплексной плоскости (или множеством векторов с началом в точке $(0, 0)$, т.е. радиусов-векторов соответствующих точек).

1.4. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Если положение точки $z = (x, y)$ на плоскости определить с помощью полярной системы координат: (r, φ), где r – расстояние от точки, изображающей z, до начала координат, φ – угол, который составляет радиус-вектор точки z с положительным направлением оси абсцисс получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа:

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,.$$

Замечание. Если $z = 0$, то $r = 0$, а угол φ не определен.

Принято называть r *модулем*, а φ – *аргументом* комплексного числа z и обозначать: $r = |z|$, $\quad \varphi \in \operatorname{Arg} z$.

При этом

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Аргумент z определен неоднозначно: $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k\}$, где k пробегает множество $\mathbf{Z}$ целых чисел, а $\arg z$ – *главное* значение аргумента, т.е. то значение, которое попадает в определенный промежуток длины 2π. Обычно принимают один из следующих вариантов: $\quad 0 \le \arg z < 2\pi$ или $-\pi < \arg z \le \pi$.

Если не оговорено противное, мы ниже используем второй из них.

1.5. Примеры

1. Доказать тождество

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)\,.$$

$\rhd$ *1-ый способ.* Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (x_1 \pm x_2)^2 + (y_1 \pm y_2)^2\,,$$

откуда

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\,(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)=2\,(|z_1|^2+|z_2|^2)\,.$$

2-ой способ Решение очевидно, если на плоскости (z) изобразить векторы $z_1,\ z_2,\ z_1+z_2,\ z_1-z_2$ и применить известную теорему планиметрии (равенство параллелограмма) $\lhd$

2. Доказать неравенство

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|\,.$$

$\rhd$ Пусть точки A и C соответствуют числам z и 1, тогда число $\dfrac{z}{|z|}$ изображается точкой B, где $OB=1$. В левой части данного неравенства стоит длина хорды BC, которая стягивает дугу длиной $|\arg z|$. $\lhd$

1.6. Показательная форма записи комплексных чисел

Используя *формулу Эйлера* $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\,\sin\varphi\,,$ приходим к записи

$$z=r\,(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)=r\,e^{i\varphi}\,,$$

где правая часть называется *показательной формой* представления комплексного числа.

1.7 Примеры

1. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:
а) $c=5\,;$ б) $c=-2\,;$ в) $c=i\,;$ г) $c=1-i\,.$

$\rhd$ а) Так как $|c|=5\,,\ \arg c=0\,,$ то $c=5\,e^{i2\pi k}\,,\ k\in\mathbf{Z}\,.$

б) В этом случае $|c|=2\,,\ \arg c=\pi\,,$ тогда $c=2\,e^{i\pi\,(1+2k)}\,,\ k\in\mathbf{Z}\,.$

в) Поскольку $|c|=1\,,\ \arg c=\dfrac{\pi}{2}\,,$ то $c=e^{i\pi\,\left(\frac12+2k\right)}\,,\ k\in\mathbf{Z}\,.$

г) Так как $|c|=\sqrt2\,,\ \arg c=-\dfrac{\pi}{4}\,,$ то $c=\sqrt2\,e^{i\pi\,\left(-\frac14+2k\right)}\,,\ k\in\mathbf{Z}\,.$ $\lhd$

Замечания. 1) В представлении чисел примеров а) – г) в показателе экспоненты используется $\operatorname{Arg} c$. В то же время при проведении арифметических вычислений можно ограничиваться каким-то конкретным значением $\varphi\in\operatorname{Arg} c$. Обычно (но не обязательно) берут $\varphi=\arg c$.

2) Для получения модуля и аргумента чисел в пп. а) – г) полезно рассматривать их геометрическое представление.

2. *Формула Муавра.* Используя показательное представление числа, имеем:

$$z^n=\left(r\,e^{i\varphi}\right)^n=r^n\,e^{in\varphi}=r^n\,(\cos n\varphi+i\,\sin n\varphi)\,,$$

в частности,

$$(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\,\sin n\varphi\,.$$

3. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:
а) $(1+i)^n+(1-i)^n\,;$ б) $(1+\cos\varphi+i\,\sin\varphi)^n\,.$

$\triangleright$ а) Так как $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\,\frac{\pi}{4}}$, то

$$c=(1+i)^n+(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\,\left(e^{i\,\frac{\pi n}{4}}+e^{-i\,\frac{\pi n}{4}}\right)=$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\,\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\,\sin\frac{\pi n}{4}+\cos\frac{\pi n}{4}-i\,\sin\frac{\pi n}{4}\right)=2^{\,1+\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{\pi n}{4}\,.$$

Итак, $\operatorname{Re} c=2^{\,1+\frac{n}{2}}\,\cos\dfrac{\pi n}{4}$, $\quad\operatorname{Im} c=0$.

б) Используя формулы Эйлера для представления тригонометрических функций, получаем

$$c=(1+\cos\varphi+i\,\sin\varphi)^n=\left(1+e^{i\varphi}\right)^n=$$

$$=e^{\frac{in\varphi}{2}}\,\left(e^{\frac{i\varphi}{2}}+e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^n=2^n\,\cos^n\frac{\varphi}{2}\,\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\,\sin\frac{n\varphi}{2}\right)\,.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} c=2^n\,\cos^n\frac{\varphi}{2}\,\cos\frac{n\varphi}{2}\,,\quad \operatorname{Im} c=2^n\,\cos^n\frac{\varphi}{2}\,\sin\frac{n\varphi}{2}\quad\triangleleft$$

4. Найти модуль, аргумент, главное значение аргумента $(\arg z\in(-\pi;\pi])$ следующих комплексных чисел z:
а) $z=(1+i\sqrt{3})^4$; б) $z=-\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{\pi}{4}$.

$\triangleright$ а) Так как для числа $c=1+i\sqrt{3}$ имеем $r=|c|=2$, $\arg c=\dfrac{\pi}{3}$, то $z=c^4=2^4\,e^{i\,\frac{4\pi}{3}}$, поэтому

$$|z|=16\,;\quad \operatorname{Arg}\,z=\left\{\frac{4\pi}{3}+2\pi k\,,\,k\in\mathbf{Z}\right\}\,;\quad \arg z=\frac{4\pi}{3}-2\pi=-\frac{2\pi}{3}\,.$$

б) Очевидно, $|z|=\sqrt{\cos^2\dfrac{\pi}{4}+\sin^2\dfrac{\pi}{4}}=1$. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi=-1$ и $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Im} z>0$, то $\varphi\in\operatorname{Arg}\,z=\left\{\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k\,,\,k\in\mathbf{Z}\right\}$; откуда $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$. $\triangleleft$

1.8. Извлечение корня из комплексного числа

Комплексное число z называется *корнем n-ой степени* из числа c : $z=\sqrt[n]{c}$, $n\in\mathbf{N}$, если $z^n=c$.

Заметим сначала, что $\sqrt[n]{0}=0$.

Исходя из показательной формы представления числа $c=\rho\,e^{i\alpha}$, где $c\neq 0$, имеем:

$$\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{\frac{\arg c+2\pi k}{n}}\,,\,k\in\mathbf{Z}\,.$$

Здесь $\sqrt[n]{\rho}$ – арифметический корень из положительного действительного числа ρ.

1.9. Примеры

1. Вычислить значения корней а) $\sqrt{-2i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$.

$\triangleright$ а) *1-ый способ.* В соответствии с определением надо найти такое число $z=x+iy$, чтобы $z^2=-2i$.

Имеем

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -2i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 0\,, \\ xy = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y\,, \\ x^2 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -y\,, \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Первая из систем не имеет решений (x и y – действительные числа!), а вторая дает два решения:

$$\begin{cases} x = 1\,, \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -1\,, \\ y = 1\,, \end{cases} \quad \text{т.е. } z_1 = 1 - i\,,\ z_2 = -1 + i\,.$$

2-ой способ. Так как $c = -2i = 2\,e^{i\,(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$, то

$$z_{1,2} = \sqrt{c} = \sqrt{2}\,e^{i\,(-\frac{\pi}{4} + \pi k)}\,,\ k = 0, 1\,,$$

т.е.

$$z_1 = \sqrt{2}\,e^{-i\,\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 - i\,;$$

$$z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\,\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i\,.$$

б) Так как $c = -1 = e^{i\,(\pi + 2\pi k)}$, то

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i\,(\frac{\pi + 2\pi k}{4})}\,,\ k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Итак, имеем четыре значения корня:

$$z_0 = e^{i\,\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}\,; \quad z_1 = e^{i\,\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}\,;$$

$$z_2 = e^{i\,\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\,; \quad z_3 = e^{i\,\frac{7\pi}{4}} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}} \quad \lhd$$

2. Решить уравнения
а) $z^3 = \overline{z}$; б) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.

$\rhd$ а) Пусть $z = r\,e^{i\varphi}$. Тогда $r^3\,e^{3i\varphi} = r\,e^{-i\varphi}$.
Отсюда либо $r = 0$, тогда $z = 0$; либо $r^2 = e^{-4i\varphi}$, тогда $r = 1$ и $-4\varphi = 2\pi k$, т.е. $\varphi = -\dfrac{\pi k}{2}$, так что $z = e^{-i\,\frac{\pi k}{2}}$.

Для получения различных значений достаточно взять $k = 0, \pm 1, 2$. Тогда приходим к решениям $z = \pm 1$; $z = \pm i$

б) После замены $t = z^3$ имеем квадратное уравнение

$$t^2 + 7t - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -8\,. \end{array}\right.$$

Поэтому, вычисляя значения

$$z = \sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{3}}\,, \quad z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt{8}\,e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{3}}\,, \quad \text{где } k = 0, 1, 2,$$

получаем 6 решений данного уравнения:

$$z = 1\,,\ z = \frac{1}{2}\,(-1 \pm i\sqrt{3})\,,\ z = -2\,,\ z = 1 \pm i\sqrt{3} \quad \triangleleft$$

1.10. Вопросы и задачи.

1. Найдите $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$, $\arg z \in [0\,;\,2\pi)$, если

   $a)$ $z = \left(\sqrt{3} + i\right)^7$; $\qquad b)$ $z = 5i\,\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{28}$;

   $c)$ $z = \dfrac{i^5 - 2}{i^{19} - 1}$; $\qquad d)$ $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^5}$;

   $e)$ $z = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^7 \cdot (1+i)^{10}$; $\qquad f)$ $z = \dfrac{(-1 + i\,\sqrt{3})^{30}}{(1-i)^{45}}$;

   $g)$ $z = -3i \cdot e^{-5i}$; $\qquad h)$ $z = -1 - \cos\dfrac{\pi}{7} + i\,\sin\dfrac{\pi}{7}$.

   $i)$ $z = \dfrac{1 + \cos\alpha + i\,\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\,\sin\alpha}$.

2. Докажите тождество
$$|z_1\overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)\,(1 + |z_2|^2)\,.$$

3. Докажите неравенство
$$|z - 1| \le ||z| - 1| + |z| \cdot |\arg z|\,.$$

4. Пусть $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$ и $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Докажите, что точки, изображающие числа z_1, z_2, z_3, являются вершинами правильного треугольника.

5. Какое из следующих равенств верно, а какое – нет:

   $a)$ $\arg z^n = n \arg z$; $\qquad b)$ $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$;

   $c)$ $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$?

6. Пусть $P_n(z)$ – полином n-ой степени. Что можно сказать о его коэффициентах, если:
$$a)\ \ \overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z})\,; \qquad b)\ \ \overline{P_n(z)} = -P_n(\overline{z})\,?$$

7. Пусть $\quad z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha.\quad$ Докажите, что $\quad z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha.$

8. Вычислите значения корней:

   $a)$ $\sqrt[3]{-64i}$; $\qquad b)$ $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}\,i}$; $\qquad c)$ $\sqrt[3]{-2 + 2i}$.

9. Докажите, что сумма всех значений $\sqrt[n]{1}$ равна нулю.

10. Решите уравнения:

$a)\ z^4+4=0\,;\quad b)\ z^6-64=0\,;\quad c)\ z^3=27\,i\,;\quad d)\ z^4+8=8\sqrt{3}\,i\,;$

$e)\ z^4+i\,z^2+2=0\,;\qquad f)\ z^4+(2-i)\,z^2-2i=0\,;$

$g)\ z^4+3i\,z^2+4=0\,;\qquad h)\ z^5+iz^3-8iz^2+8=0\,;$

$i)\ z^2+\overline{z}=0\,;\qquad j)\ iz^2+2\overline{z}\cdot\mathrm{Im}\ z=0\,;\qquad k)\ (\overline{z})^3=4\,z\,;$

$l)\ z\cdot|z|^2=4i\,\overline{z}\,;\qquad m)\ z^2\cdot\overline{z}=\mathrm{Re}\ z\,;\qquad n)\ \overline{z}^2\cdot z=\mathrm{Im}\ z\,.$

§2. Расширенная комплексная плоскость. Множества на комплексной плоскости

2.1. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция

Множество всех комплексных чисел $\mathbf{C}$ (комплексная плоскость), дополненное бесконечно удаленной точкой (некоторым условным комплексным числом ∞), называется расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbf{C}}$, т.е. $\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$.

Моделью расширенной комплексной плоскости является так называемая *сфера Римана. Стереографическая проекция* задает взаимно однозначное соответствие между точками этой сферы в трехмерном пространстве и точками комплексной плоскости.

2.2. Кривые на плоскости

Пусть на отрезке $\alpha\le t\le\beta$ заданы две непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$. Тогда на этом отрезке определена непрерывная комплекснозначная функция действительной переменной

$$z(t)=x(t)+i\,y(t)\,,\quad t\in[\alpha,\,\beta]\,. \tag{1}$$

Определения.

Задание функции $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\,\beta]$, определяет на плоскости объект γ, называемый *непрерывной кривой.* Другими словами, γ – непрерывный образ отрезка $[\alpha,\,\beta]$.

Уравнение (1) называется *параметрическим уравнением* этой кривой.

Кривая γ ориентирована по возрастанию независимой переменной t. Говорят, что эта ориентация *индуцирована* параметризацией (1). Точка $z(\alpha)$ является *начальной*, а точка $z(\beta)$ – *конечной* точкой кривой γ.

Кривая, отличающаяся от γ только противоположной ориентацией, обозначается γ^{-1}.

Если существуют такие значения t_1,t_2, не совпадающие с обоими концами отрезка $[\alpha;\ \beta]$, что $t_1\ne t_2$, а $z(t_1)=z(t_2)$, то соответствующая точка на кривой называется *точкой самопересечения.*

Кривая без точек самопересечения называется *простой (или жордановой) кривой.*

Непрерывная кривая, у которой совпадают начальная и конечная точки, называется *замкнутой.*

Примеры.

а) $z=t,\quad t\in[0,1]$. Это простая кривая γ – отрезок действительной прямой с началом в точке $z=0$ и концом в точке $z=1$

б) $z=1-t,\quad t\in[0,1]$ – простая кривая γ^{-1} – отрезок действительной прямой с началом в точке $z=1$ и концом в точке $z=0$

в) $z=t^2,\quad t\in[-1,1]$.

Уравнение задает дважды проходимый отрезок с началом и концом в точке $z=1$ Это замкнутая кривая, каждая из внутренних точек которой является точкой самопересечения.

г) $z=\cos t, \quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ – та же кривая, что и в п. б).

д) $z=2\,e^{it}, \quad t\in[0,\pi]\,.$

Уравнение задает верхнюю полуокружность радиуса 2 с центром в начале координат Это простая кривая с началом в точке $z=2$ концом в точке $z=-2$.

е) $z=-1+e^{it}, \quad t\in[0,2\pi]\,.$

Это окружность единичного радиуса с центром в точке $z=-1$, простая замкнутая кривая. Положительное направление на ней – против часовой стрелки.

$$\text{ж)}\ \ z=\begin{cases}\cos^3 t+i\,\sin^3 t\,, & t\in\left[0,\,\dfrac{3\pi}{2}\right],\\[2mm] \dfrac{4i}{\pi}\left(t-\dfrac{7\pi}{4}\right)\,, & t\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\,2\pi\right].\end{cases}$$

Кривая, состоит из трех звеньев астроиды и отрезка мнимой прямой, имеет точку самопересечения, т.е. не является простой.

Определения.

Непрерывная кривая $z(t)=x(t)+i\,y(t)\,, \quad t\in[\alpha,\,\beta]\,,$ называется *гладкой*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ в ее уравнении непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]\,,$ причем $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0\,.$ Другими словами, кривая гладкая, если функция $z(t)$ имеет непрерывную производную $z'(t)=x'(t)+i\,y'(t)$ и $z'(t)\neq 0$ при всех $t\in[\alpha,\beta]$.

В случае, если кривая замкнута, для обеспечения гладкости требуется еще выполнение равенства $z'(\alpha+0)=z'(\beta-0)\,.$

Если $z'(t_0)=0$ при некотором значении t_0, соответствующая точка z_0 кривой называется *особой.*

Непрерывная кривая называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.

Простую замкнутую кусочно гладкую кривую называют *простым замкнутым контуром,* или, короче, *контуром.*

Примеры.

Кривые из пп. а), б), г), д), е) являются гладкими; п. в) дает пример кусочно гладкой кривой с особой точкой $z=0$ (так как $z'(0)=0$); кривая п. ж) кусочно гладкая с особыми точками $z=\pm 1$, $z=\pm i$.

2.3. Множества на комплексной плоскости

Множество E называется *связным,* если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей E.

Непустое множество D на комплексной плоскости называется *областью,* если D – открытое и связное множество.

Теорема (Жордан).

Простая замкнутая кривая γ разбивает комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ на две области – внутреннюю (ограниченную кривой γ) и внешнюю, неограниченную, содержащую бесконечно удаленную точку (она также имеет границу γ).

Внутреннюю по отношению к границе γ область будем обозначать $int\,\gamma$, а внешнюю область обозначим $ext\,\gamma$.

Область D на плоскости называется *односвязной,* если любую простую замкнутую кривую, принадлежащую $D,$ можно непрерывной деформацией стянуть к точке из $D.$ В противном случае D является *неодносвязной* областью.

Область D на комплексной плоскости односвязная, если для любой простой замкнутой кривой, принадлежащей $D,$ ее внутренность также целиком лежит в $D.$

Примеры.

а) Открытый круг радиуса $r>0$ с центром в точке z_0 : $\{z: |z-z_0|<r\}$.
б) Открытый круг без центра z_0 : $\{z:\ 0<|z-z_0|<r\}$.
в) Замкнутый круг: $\{z: |z-z_0|\le r\}$.
г) Внешность круга: $\{z: |z-z_0|>r\}$.
д) Круговое кольцо с центром в точке z_0 между окружностями радиусов r и R $(0<r<R):\ \{z:\ r<|z-z_0|<R\}$.
е) Луч, выходящий из начала координат под углом α к действительной оси: $\{z:\ \arg z=\alpha\}$.
ж) Внутренность угла с вершиной в точке z_0: $\{z:\ \alpha<\arg(z-z_0)<\beta\}$ $(\beta-\alpha<2\pi)$.
з) Верхняя полуплоскость: $\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$.
и) Прямые, параллельные координатным осям: $\{z:\ \operatorname{Re} z=x_0\}$; $\{z:\ \operatorname{Im} z=y_0\}$ $(x_0,\ y_0\in\mathbf{R})$.
к) Вертикальная полоса с границами: $\{z:\ x_1\le\operatorname{Re} z\le x_2\}$, здесь $x_1,x_2\in\mathbf{R}$.
л) Замкнутый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат: $\{z:\ x_1\le\operatorname{Re} z\le x_2,\ y_1\le\operatorname{Im} z\le y_2\}$.

2.4. Примеры множеств, задаваемых уравнениями и неравенствами. Построение таких множеств

1. Записать в комплексной форме уравнения: а) прямой; б) окружности.

$\triangleright$ а) Уравнение прямой на плоскости имеет вид
$bx+cy+d=0\,,\ b^2+c^2\ne0\,,\ b,c,d\in\mathbf{R}\,.$
Подставляя $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\,,\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\,,$ получаем

$$b\,(z+\overline{z})-ic\,(z-\overline{z})+2d=0\quad\Leftrightarrow\quad(b-ic)\,z+(b+ic)\,\overline{z}+2d=0\,,$$

или

$$\overline{B}\,z+B\,\overline{z}+D=0\,,$$

где $B=b+ic\,,\ B\ne0\,,\ D=2d\,.$

б) Уравнение

$$a\,(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0\quad\Leftrightarrow\quad\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{a}\right)^2=\frac{b^2+c^2-ad}{a^2}\,,$$

где $a\ne0\,,\ b^2+c^2-ad>0$ задает окружность на плоскости.

После подстановки в исходное уравнение $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\,,\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\,,\ x^2+y^2=z\,\overline{z}\,,$ имеем

$$a\,z\overline{z}+b\,(z+\overline{z})-ic\,(z-\overline{z})+d=0\quad\Leftrightarrow\quad a\,z\overline{z}+(b-ic)\,z+(b+ic)\,\overline{z}+d=0\,,$$

или

$$A\,z\overline{z}+\overline{B}\,z+B\,\overline{z}+D=0\,,$$

где $A=a,\ B=b+ic\,,\ D=d\,,$ причем $B\overline{B}-AD=b^2+c^2-ad>0\,.$ $\triangleleft$

2. Указать множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих указанным условиям (рассматриваемые ниже задачи можно решать как аналитически, так и исходя из геометрических представлений).

а) $|z-4| = |z+4i|$.

$\triangleright$ *1-ый способ.* Так как $|z-z_0|$ дает расстояние между точками z и z_0, то искомое множество – серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z=4$ и $z=-4i$. Очевидно, это прямая $y=-x$, или множество точек комплексной плоскости: $\{z = x - ix\,,\ x \in \mathbf{R}\}$.

2-ой способ. Пусть $z = x+iy$, тогда по определению модуля комплексного числа

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+4)^2} \quad \Leftrightarrow \quad -8x+16 = 8y+16 \quad \Leftrightarrow \quad y=-x \quad \triangleleft$$

б) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = c$.

$\triangleright$ Заметим, что $z \neq 0$. Пусть $z = x+iy$.
Так как $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$, то $\dfrac{x}{x^2+y^2} = c$, откуда
либо $c=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ – это мнимая ось за исключением точки $z=0$;
либо $c \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2 = \dfrac{x}{c} \;\Leftrightarrow\; \left(x-\dfrac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4c^2}$ – это окружность с центром в точке $z = \dfrac{1}{2c}$ и радиусом $\dfrac{1}{2\,|c|}$ за исключением точки $z=0$ $\triangleleft$

в) $|z| > 1 + \operatorname{Im} z$.

$\triangleright$ Данное неравенство перепишем в виде $\sqrt{x^2+y^2} > 1+y$.
Ясно, что оно выполнено для всех $y < -1$. При $y \geq -1$ имеем $x^2 > 1+2y$.
Итак, искомое множество – часть комплексной плоскости, находящаяся под параболой $y = \dfrac{1}{2}\,(x^2-1)$ $\triangleleft$

2.5. Вопросы и задачи

1. Какое множество на комплексной плоскости соответствует а) экватору сферы Римана; б) нижней полусфере при стереографической проекции ?

2. Найдите образ первой четверти комплексной плоскости на сфере Римана.

3. Докажите, что при стереографической проекции окружностям и прямым комплексной плоскости соответствуют окружности на сфере Римана.

4. Рассмотрите несколько кривых на плоскости:

   a) $z = t^2, \quad t \in [0;1]$; *b)* $z = t^3, \quad t \in [0;1]$;
   c) $z = t^2, \quad t \in [-1;1]$; *d)* $z = t^3, \quad t \in [-1;1]$;
   e) $z = \sin t, \quad t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; *f)* $z = \sin t, \quad t \in [0;\pi]$;
   g) $z = 1 + e^{it}, \quad t \in [-\pi;\pi]$; *h)* $z = \begin{cases} 1+e^{it}, & t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right], \\ t-\pi\,, & t \in (\pi;2\pi]\ ; \end{cases}$
   i) $z = t + it^2, \quad t \in [0;1]$; *j)* $z = t^2 + it^4, \quad t \in [-1;1]$;

$k)$ $z = t + \dfrac{i}{t}$, $t \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,2\right]$; $l)$ $z = \dfrac{1}{t} + it$, $t \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,2\right]$;

$m)$ $z = e^{at}$, $t \in [0;4\pi]$ $(a \in \mathbf{C})$; $n)$ $z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t\,i}{1+t^2}$, $t \in [-1;1]$;

$o)$ $z = ae^{it} + be^{-it}$, $t \in [0;2\pi]$, a, b – действительные числа.

Какие из этих кривых а) простые; б) замкнутые; в) гладкие; г) кусочно гладкие? Есть ли среди этих кривых совпадающие?

5. Запишите в комплексной форме уравнения следующих линий:

   $a)$ $y = ax$, $a \in \mathbf{R}$; $b)$ $x^2 - y^2 = a^2$, $a \in \mathbf{R}$;

   $c)$ $x^2 + y^2 - 2x = 1$.

6. Какие среди множеств в примерах п. 2.3 а) замкнуты; б) открыты; в) являются областями; г) односвязными областями? Каковы границы этих множеств?

7. Является ли односвязным множество $U_R(\infty)$ в $\mathbf{C}$; в $\overline{\mathbf{C}}$?

8. Изобразите множество точек плоскости, для которых выполнены следующие соотношения:

   $a)$ $1 < |2z + 4i| < 4$; $b)$ $1 \le |\overline{z} + 2i| \le 3$; $c)$ $|\pi - \arg(2z^2)| < \dfrac{\pi}{4}$;

   $d)$ $|z-1| \le |z|$; $e)$ $\left|\dfrac{z-2i}{2z-i}\right| \ge 1$; $f)$ $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right| = 1$, $(|a| < 1)$;

   $g)$ $|z|^2 < \mathrm{Re}\ z$; $h)$ $|z|^2 \ge \mathrm{Im}\ \overline{z}$; $i)$ $2\,|z| < \mathrm{Re}\ z + 6$;

   $j)$ $\begin{cases} 1 < |z+1| < 2\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg(z+1) \le 0\,; \end{cases}$ $k)$ $\begin{cases} 1 \le |z+2-i| < 3\,, \\ |\arg(z+2-i)| < \dfrac{\pi}{4}\,; \end{cases}$

   $l)$ $\mathrm{Re}\ \dfrac{i}{z} > \dfrac{1}{2}$; $m)$ $\mathrm{Im}\ \dfrac{i}{z} \ge 5$; $n)$ $\mathrm{Im}\left(\dfrac{i}{z} - 1\right) < 1$;

   $o)$ $\mathrm{Im}\left(\dfrac{i}{\overline{z}} + \dfrac{i}{2}\right) \ge 1$; $p)$ $\mathrm{Re}\ \dfrac{z+1}{z-1} \ge 0$; $q)$ $\mathrm{Im}\ \dfrac{z-1}{z+1} \le 0$;

   $r)$ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) + \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) > 1$; $s)$ $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) \ge \mathrm{Im}\ z$;

   $t)$ $|z^2 - 1| < 1$; $u)$ $|z^2 - i| < 1$.

9. Какие среди множеств $a) - u)$ предыдущей задачи являются: а) областями; б) односвязными областями?

§3. Последовательности и ряды комплексных чисел

3.1. Предел последовательности комплексных чисел

Определения. Последовательность $\{z_n\}$ *сходится* к пределу z_0 $(z_0 \ne \infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0\,, \quad \text{или: } z_n \to z_0\,,\ n \to \infty\,,$$

если $\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon)\ \forall n > N \ \Rightarrow\ |z_n - z_0| < \epsilon$.

Последовательность $\{z_n\}$ является *бесконечно большой*, если

$$\forall M > 0 \ \exists N(M) \ \forall n > N \quad \Rightarrow \ |z_n| > M$$

В этом случае говорят также, что последовательность $\{z_n\}$ *сходится к* $z_0 = \infty$.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 0,\, 1,\, 2, \ldots)$.

Утверждение 1. $$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0\,,\ z_0 \neq \infty, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0\,. \end{cases}$$

Утверждение 2. *Пусть* $z_n = r_n\, e^{i\varphi_n}$, *где* $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$, $n = 1,\, 2\, \ldots$ *Если* $r_n \to r_0$ *и* $\varphi_n \to \varphi_0$, *то* $z_n \to z_0 = r_0\, e^{i\varphi_0}$ *при* $n \to \infty$.

Примеры. Найти пределы следующих последовательностей:

$a)$ $z_n = \dfrac{n - i^n}{2in + 1}$; $\quad b)$ $z_n = \dfrac{e^{in}}{i^n\, n^\alpha}$, $\alpha \geq 0$; $\quad c)$ $z_n = \left(1 + \dfrac{i}{n}\right)^n$.

$\rhd$ $a)$ Как было отмечено выше, теоремы об арифметических действиях с пределами остаются справедливыми для комплексных чисел, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - i^n}{2in + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \dfrac{i^n}{n}}{2i + \dfrac{1}{n}} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2},$$

так как $\left|\dfrac{i^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

$b)$ Для $\alpha > 0$ имеем $|z_n| = \left|\dfrac{e^{in}}{i^n\, n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha} \to 0$, когда $n \to \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

При $\alpha = 0$ получаем расходящуюся последовательность

$$z_n = \frac{e^{in}}{i^n} = \frac{1}{i^n} \cdot (\cos n + i\, \sin n)\,.$$

Действительно, первый множитель не имеет предела при $n \to \infty$ (у этой последовательности четыре предельные точки: ± 1, $\pm i$), а из курса математического анализа известно, что ни одна из последовательностей $\{\sin n\}$, $\{\cos n\}$ не является сходящейся.

$c)$ Используем представление числа в показательной форме: $c_n = 1 + \dfrac{i}{n} = r_n\, e^{i\varphi_n}$, где $r_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}$, $\quad \mathrm{tg}\ \varphi_n = \dfrac{1}{n}$.

Существуют пределы

$$R = \lim_{n\to\infty} (r_n)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1\,; \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} n\, \varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\ \mathrm{tg}\ \varphi_n = 1$$

(при вычислении второго предела мы использовали эквивалентность бесконечно малых при $n \to \infty$ величин φ_n и $\mathrm{tg}\ \varphi_n$). Поэтому в силу утверждения 2 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} (c_n)^n = R\, e^{i\alpha} = e^i = \cos 1 + i\, \sin 1 \qquad \lhd$$

3.2. Ряды комплексных чисел

Определения. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n\,, \tag{1}$$

членами которого являются комплексные числа $z_n = x_n + iy_n$, называется *сходящимся,* если сходится последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\,.$ При этом число $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ является *суммой* этого ряда.

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|\,. \tag{2}$$

Утверждение 3. *Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *одновременно.*

Утверждение 4 (критерий Коши сходимости ряда).
Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon)\ \forall n > N,\ \forall p \in \mathbf{N} \ \Rightarrow\ |s_{n+p} - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \epsilon\,.$$

Утверждение 5 (необходимое условие сходимости ряда).
Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0\,.$

Утверждение 6.
Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1).

Утверждение 7 (признаки абсолютной сходимости ряда).
Для ряда (2) применимы известные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Гаусса, интегральный признак и т.д.)

Примеры. Исследовать сходимость следующих рядов:

$a)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5in^2 + i^n}{3n^2 - 2ni}\,;\qquad b)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \left(\dfrac{3+4i}{10i}\right)^n;\qquad c)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2i - n\,i^{2n}}{n^2+1}\,;$

$\triangleright$ $a)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5in^2 + i^n}{3n^2 - 2ni} = \lim_{n\to\infty} \frac{5i + \dfrac{i^n}{n^2}}{3 - \dfrac{2i}{n}} = \frac{5i}{3} \neq 0\,,$$

поэтому ряд расходится.

$b)$ При $n\to\infty$
$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{n^3}\,\sqrt[n]{\left|\frac{3+4i}{10i}\right|^n} = (\sqrt[n]{n})^3 \left|\frac{3+4i}{10i}\right| = \frac{1}{2}\,(\sqrt[n]{n})^3 \to \frac{1}{2} < 1\,,$$

значит, данный ряд сходится абсолютно согласно признаку Коши.

$c)$

$$\frac{2i - n\,i^{2n}}{n^2+1} = (-1)^{n+1}\,\frac{n}{n^2+1} + i\,\frac{2}{n^2+1}\,,$$

ряды с вещественными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n^2+1}$ сходятся (первый по признаку сравнения, второй – по признаку Лейбница), следовательно, сходится и данный ряд $\triangleleft$

3.3. Вопросы и задачи

1. Следует ли из сходимости последовательности $\{|z_n|\}$ сходимость последовательности $\{z_n\}$?

2. В каких случаях сходимость последовательности $\{|z_n|\}$ равносильна сходимости последовательности $\{z_n\}$?

3. Покажите, что утверждение, обратное к утверждению 2, вообще говоря не верно. При каких дополнительных условиях оно имеет место?

4. Верно ли утверждение: если последовательность $\{z_n = x_n + iy_n\}$ бесконечно большая, то хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ также бесконечно большая?

5. Докажите, что любая последовательность в $\overline{\mathbf{C}}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

6. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ (если он существует) для следующих последовательностей:

$$a)\ \ z_n = n\sin\frac{2}{n} + i\,\frac{3n+1}{n}\,; \qquad b)\ \ z_n = (1-i)^n \cdot \left(\frac{1+i}{2i+1}\right)^{2n};$$

$$c)\ \ z_n = \arg\left(2 + \frac{i^n}{n}\right); \quad d)\ \ z_n = \arg\left(-2 + \frac{i^n}{n}\right);$$

$$e)\ \ z_n = (3-4i)^n \cdot \left(\frac{1+i^n}{2in+1}\right)^n; \quad f)\ \ z_n = \left(1 + i\,\sin\frac{2}{n}\right)^n;$$

$$g)\ \ z_n = \left(\frac{i}{\sqrt{2}+i}\right)^{n^2}; \quad h)\ z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{2}\right)^n, \ \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

7. Найдите все комплексные числа z, для которых сходится последовательность $\{c_n\}$. Вычислите пределы этих последовательностей:

$$a)\ \ c_n = (2iz)^n\,; \qquad b)\ \ c_n = \frac{z^n}{1+z^n}\,; \qquad c)\ \ c_n = n^k \cdot z^n \quad k \in \mathbf{Z}\,.$$

8. Исследуйте сходимость следующих рядов:

$$a)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3ni^n}{3in^2 - \sqrt{5}}\,; \qquad b)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{i\sqrt{n} + 2n}\,; \qquad c)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4i)^n}{n!}\,;$$

$$d)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{\frac{i\pi}{n}}\,; \qquad e)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1+e^{-i\alpha}}{2i}\right)^n, \qquad \alpha \in (0, 2\pi).$$

§4. Функции комплексной переменной. Непрерывность

4.1. Определения и примеры

Определение. Пусть $E,\ F \subset \overline{\mathbf{C}}$. Говорят, что на множестве E определена *функция комплексной переменной* (ФКП) $f:\ E \to F$, или $w = f(z)$, если $\forall z \in E\ \exists w \in F\ :$ $w = f(z)$.

Определение. ФКП $w = f(z)$ называется *однолистной* на множестве $G \subset E$, если $\forall z_1,\ z_2 \in G\,,\ z_1 \neq z_2 \ \Rightarrow\ w_1 \neq w_2$. (т.е. обратная к ней функция является однозначной).

Пусть на некотором множестве E определена однозначная функция $w = f(z)$. Обозначим $w = u+iv\,,\ z = x+iy$ $(x, y, u, v \in \mathbf{R})$. Тогда задание ФКП $w = f(z)$ равносильно заданию *пары действительнозначных функций двух вещественных переменных,* которые определены на множестве плоскости Oxy, соответствующем E (сохраним для него обозначение E).

Примеры.

а) *Линейная* функция $w = az + b\,, \quad a, b \in \mathbf{C}$.
Это однозначная, определенная на $\mathbf{C}$ ФКП. При $a \neq 0$ она однолистна, имеет однозначную обратную функцию $z = \dfrac{w-b}{a}$, также определенную на всем $\mathbf{C}$.

б) Функция $w = z^2$ однозначна, определена на $\mathbf{C}$. Это неоднолистная ФКП, так как $w(-z) = w(z)$. Она имеет двузначную обратную функцию, также определенную на $\mathbf{C}$: $\quad z = \sqrt{w}$ (при всех $w \neq 0$ корень имеет ровно два различных значения).

в) ФКП $w = z^2\,,\ z \in \mathbf{C}$, порождает пару функций $u = x^2 - y^2\,;\ v = 2xy\,$, определенных на всей плоскости Oxy.

г) Функция $w = \dfrac{\overline{z}}{z}$ определена при $z \neq 0$, не является однолистной на множестве определения, так как $w(-z) = w(z)$.
Поскольку $\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{\overline{z}^2}{|z|^2}$, то $\quad u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = -\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

4.2. Некоторые элементарные функции комплексной переменной

a) *Степенная функция.*
Степенная (с натуральным показателем) функция имеет вид

$$w = z^n\,, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{N}\,,\ n > 1\,.$$

Функция определена $\ \forall z \in \mathbf{C}\,,\ $ она является n-листной в $\mathbf{C}$. Областью однолистности степенной функции является внутренность всякого угла $\{z:\ \alpha < \arg z < \beta\}\,,\ \beta - \alpha \leq \dfrac{2\pi}{n}$.

b) *Обратная к степенной функция*

$$w = \sqrt[n]{z} \quad (n \in \mathbf{N},\ n > 1)$$

определена в $\mathbf{C}$ и является n-значной: $\quad w(0) = 0\,,$

$$w = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\varphi_k}\,, \quad \text{где} \quad \varphi_k = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}\,, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (z \neq 0)\,. \tag{1}$$

Фиксируя значение k, получаем так называемую *однозначную ветвь* $w = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ данной многозначной функции. Существует ровно n различных однозначных ветвей.

c) *Показательная функция.*

По определению:

$$e^z = e^x\,(\cos y + i\sin y)\,, \qquad z = x + iy. \tag{2}$$

Из (2) следует *периодичность* функции e^z с периодом $T = 2\pi i\,k,\ k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0$, значит, определенная в $\mathbf{C}$ показательная функция неоднолистна в комплексной плоскости (бесконечнолистна).

d) *Логарифмическая функция.*

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ в комплексной плоскости вводится как функция, обратная к показательной (2). Эта функция определена в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Логарифмическая функция бесконечнозначна.

$$\operatorname{Ln} z = \ln\,|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln\,|z| + i\,(\arg z + 2\pi\,k)\,,\ \ k \in \mathbf{Z}\,. \tag{3}$$

Задавая в (3) значение k, получаем однозначную ветвь $(\operatorname{Ln} z)_k$ логарифмической функции. Ограничившись рассмотрением главного значения аргумента (при $k=0$), приходим к *главному* значению логарифма [1]:

$$\ln z = \ln\,|z| + i\arg z\,. \tag{4}$$

e) *Тригонометрические функции.*

По определению:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\,, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\,.$$

Справедливы все формулы тригонометрии, известные из курса элементарной математики.

f) *Обратные тригонометрические функции.*

Введем значения $w = \operatorname{Arccos} z$ как множество решений относительно w уравнения

$$z = \cos w \quad \Leftrightarrow \quad e^{iw} + e^{-iw} = 2z$$

Решая это уравнение (см. ниже примеры из п. 2), получаем равенство

$$\operatorname{Arccos}\, z = -i\ \operatorname{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2-1})\,, \tag{5}$$

определяющее бесконечно много чисел (здесь можно использовать какое-то одно из пары значений $\sqrt{z^2-1}$).

Аналогично

$$\operatorname{Arcsin}\, z = -i\ \operatorname{Ln}\,(iz \pm \sqrt{1-z^2})\,; \tag{6}$$

$$\operatorname{Arctg}\, z = \frac{i}{2}\ \operatorname{Ln}\,\frac{1-iz}{1+iz}\,, \quad z \neq \pm i. \tag{7}$$

g) *Гиперболические функции* комплексной переменной определяются аналогично вещественному случаю:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}\,, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}\,.$$

[1] Используемое в правой части формул (3), (4) обозначение $\ln$ относится к логарифму положительного действительного числа $|z|$, определенному в курсе элементарной математики.

Отметим полезные равенства (они проверяются непосредственно):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \quad \text{(основное тождество)}$$

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z\,, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z\,, \tag{8}$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2\,, \tag{9}$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2\,. \tag{10}$$

Из равенств (8) очевидна *неограниченность* в $\mathbf{C}$ тригонометрических функций $\sin z$ и $\cos z$.

Примеры.

1. Найти действительную и мнимую части следующих чисел:
a) $\sin(4-3i)$; *b*) $\ln(1+i)$; *c*) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i)$.

▷ *a*) $c = \sin(4-3i) = \sin 4 \cdot \cos 3i - \cos 4 \cdot \sin 3i = \sin 4 \cdot \operatorname{ch} 3 - i \cos 4 \cdot \operatorname{sh} 3$.
Итак, $\operatorname{Re} c = \sin 4 \cdot \operatorname{ch} 3$, $\operatorname{Im} c = -\cos 4 \cdot \operatorname{sh} 3$.

b) $c = \ln(1+i) = \ln|1+i| + i \arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\,\dfrac{\pi}{4}$,

значит, $\operatorname{Re} c = \dfrac{1}{2}\ln 2$, $\operatorname{Im} c = \dfrac{\pi}{4}$.

c) $c = \operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i) = \ln|\sqrt{3}-i| + i \operatorname{Arg}(\sqrt{3}-i) = \ln 2 + i\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$,

$k \in \mathbf{Z}$, откуда $\operatorname{Re} c = \ln 2$, $\operatorname{Im} c = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ ◁

2. В каких точках комплексной плоскости функция $\operatorname{ch} z$ принимает *a*) действительные значения; *b*) чисто мнимые значения?

▷ Так как $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} iy = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$, то

a) $\operatorname{Im}(\operatorname{ch} z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sh} x \sin y = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \operatorname{sh} x = 0 \\ \sin y = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pi n\,,\; n \in \mathbf{Z}; \end{array}\right.$

b) $\operatorname{Re}(\operatorname{ch} z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{ch} x \cos y = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in \mathbf{Z}$ ◁

3. Доказать, что $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$, где $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $z_1, z_2 \neq 0$.

▷ Пусть $c_1 = \operatorname{Ln} z_1$, $c_2 = \operatorname{Ln} z_2$, тогда, согласно определению логарифма, $z_1 = e^{c_1}$, $z_2 = e^{c_2}$. Поэтому $z_1 z_2 = e^{c_1} \cdot e^{c_2} = e^{c_1+c_2}$, значит, $c_1 + c_2 = \operatorname{Ln}(z_1 z_2)$, что и требовалось ◁

4. Решить уравнения: *a*) $\sin z = 0$; *b*) $\cos z = i$.

▷ *a*) Используя определение $\sin z$, после замены $t = e^{iz}$ приходим к уравнению

$$t - \frac{1}{t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} = 1\,.$$

Отсюда

$$2iz = \operatorname{Ln} 1 = i\,2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad z = \pi k\,, \quad k \in \mathbf{Z}\,.$$

Итак, синус в комплексной плоскости имеет те же самые нули, что на вещественной прямой.

b) Аналогично предыдущему приходим к уравнению

$$t + \frac{1}{t} = 2i \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2i\,t + 1 = 0\,.$$

Отсюда

$$t = i \pm \sqrt{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = (1+\sqrt{2})\,i \\ t_2 = (1-\sqrt{2})\,i\,. \end{array} \right.$$

Из равенства $t = e^{iz}$ имеем $iz = \mathrm{Ln}\,t \quad \Leftrightarrow \quad z = -i\,\mathrm{Ln}\,t$. Первое из значений t дает серию решений

$$z = -i\,\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})\,i = -i\,\left(\ln|1+\sqrt{2}| + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\,\ln(1+\sqrt{2})\,,$$

а второе:

$$z = -i\,\mathrm{Ln}(1-\sqrt{2})\,i = -i\,\left(\ln|1-\sqrt{2}| + i\,\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\,\ln(\sqrt{2}-1)\,,\ k \in \mathbf{Z} \quad \triangleleft$$

4.3. Предельное значение ФКП

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, определенная в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Предел $f(z)$ в точке z_0, определяется в точности так же, как в вещественном случае (и в смысле Коши, и в смысле Гейне).

Теорема 4.1. *Пусть* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $l = a + ib$. *Тогда*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x,y) \to a\,, \\ v(x,y) \to b \end{array} \right. \qquad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \to x_0\,, \\ y \to y_0\,. \end{array} \right.$$

На комплексный случай переносятся все теоремы об арифметических действиях с пределами функций из вещественного анализа.

4.4. Непрерывность функции

Определение. Функция $f(z)$ *непрерывна в точке* z_0 множества E, если существует

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\,, \quad \text{т.е.} \quad \forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0\ \forall z \in E\,:\, |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - f(z_0)| < \epsilon\,.$$

Определение. Функция $f(z)$ *непрерывна на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке E (обозначение: $f \in C(E)$).

Теорема 4.3. *Непрерывность* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$ *равносильна непрерывности двух функций* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *по совокупности переменных* (x,y) *в точке* (x_0,y_0).

На комплексный случай переносятся утверждения вещественного анализа о непрерывности суммы, произведения и частного двух функций, а также о непрерывности сложной функции.

Сохраняются определение *равномерной непрерывности* $f(z)$ *на множестве* E:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0\ \forall z_1, z_2 \in E\,:\, |z_1 - z_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon\,,$$

а также утверждение теоремы Кантора.

Примеры

1. Исследовать непрерывность ФКП:

a) $f(z) = \overline{z}$.

$\triangleright$ Если $z = x + iy$, то $f(z) = x - iy = u + iv$. Так как

$$u(x,y) = x\,, \quad v(x,y) = -y$$

– функции, непрерывные всюду в $\mathbf{R}^2$, то функция $f(z)$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$ $\triangleleft$

b) $f(z) = \arg z$, где $\arg z \in [\,0;\,2\pi)$.

$\triangleright$ Функция $f(z) = \arg z$, определенная при $z \neq 0$, разрывна на положительной вещественной полуоси $\mathbf{R}^+$. В самом деле, пусть $z_0 = x_0 > 0$. Тогда для двух различных последовательностей z_n и z'_n, сходящихся к z_0, а именно: $z_n = x_0 + \dfrac{i}{n}$ и $z'_n = x_0 - \dfrac{i}{n}$ – имеем $\arg z_n \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как $\arg z'_n \to 2\pi$.

Непрерывность $f(z)$ в остальных точках $\mathbf{C}$ очевидна $\triangleleft$

c) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbf{N}$.

$\triangleright$ Очевидно, функция $f(z) = z$ непрерывна в любой точке $\mathbf{C}$. При $n > 1$ функция непрерывна всюду в $\mathbf{C}$ как произведение конечного числа непрерывных функций (см. теорему 4.4) $\triangleleft$

d) $f(z) = (\sqrt{z})_0$ – одна из двух однозначных ветвей квадратного корня $(0 \leq \arg z < 2\pi\,)$.

$\triangleright$ Из (1) при $n = 2$, $k = 0$ получаем $f(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}\arg z}$, $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Таким образом,

$$f(z) = u + iv = \sqrt{|z|}\,\left(\cos\frac{\arg z}{2} + i\,\sin\frac{\arg z}{2}\right)$$

– функция, непрерывная всюду, кроме луча $\mathbf{R}^+$ (таким свойством, очевидно, обладают функции u и v).

Поскольку функция $\arg z$ терпит разрыв на $\mathbf{R}^+$ (см. пример *b*)), то $f(z)$ также разрывна на этой полупрямой. Действительно, пусть $z = x_0 > 0$. Тогда

$$\lim_{z\to x_0,\,\mathrm{Im}\,z>0} f(z) = \sqrt{x_0}\,(\cos 0 + i\,\sin 0) = \sqrt{x_0} = f(x_0)\,,$$

$$\lim_{z\to x_0,\,\mathrm{Im}\,z<0} f(z) = \sqrt{x_0}\,(\cos\pi + i\,\sin\pi) = -\sqrt{x_0}\,,$$

так что не существует $\lim\limits_{z\to x_0} f(z)$ $\triangleleft$

Замечание. Аналогично устанавливается непрерывность в $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$ k-ой однозначной ветви корня: $f(z) = (\sqrt[n]{z})_k$.

e) $f(z) = e^z$.

$\triangleright$ $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, поэтому

$$u(x,y) = e^x\,\cos y\,, \quad v(x,y) = e^x\,\sin y\,.$$

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывны всюду в $\mathbf{R}^2$, следовательно, $f(z) = e^z$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$ $\triangleleft$

f) $f(z) = \sin z$.

$\triangleright$ Функция непрерывна на **C**. Действительно, согласно теореме 4.5 при любом z непрерывны функции e^{iz} и e^{-iz} а по теореме 4.4 непрерывна $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\triangleleft$

g) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re} z}{\overline{z}}\,, & z \neq 0\,, \\ 1\,, & z = 0\,. \end{cases}$

$\triangleright$ Преобразуем $\dfrac{\operatorname{Re} z}{\overline{z}} = \dfrac{x}{x-iy} = \dfrac{x\,(x+iy)}{x^2+y^2}$. Всюду, кроме точки $(0,0)$, функции $u(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ непрерывны, следовательно, $f(z)$ непрерывна при $z \neq 0$.

В точке $(0,0)$ не существует предельного значения ни $u(x,y)$, ни $v(x,y)$. В самом деле, переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, например, для $v(x,y)$ имеем

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\,\cos\varphi\,\sin\varphi}{r^2\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0}\cos\varphi\,\sin\varphi\,,$$

так что результат различен при разных значениях φ. Поэтому в точке $z=0$ функция $f(z)$ имеет неустранимый разрыв $\triangleleft$

h) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z\,\operatorname{Im} z}{|z|}\,, & z \neq 0\,, \\ 0\,, & z = 0\,. \end{cases}$

$\triangleright$ Так как функции z, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ непрерывны всюду, то по теореме 4.4 $f(z)$ непрерывна при $z \neq 0$.

Для исследования непрерывности в точке $z=0$ найдем

$$\frac{z\,\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{(x+iy)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

следовательно, $u(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v(x,y) = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Вычислим

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\,\cos\varphi\,\sin\varphi}{r} = \lim_{r\to 0} r\,\cos\varphi\,\sin\varphi = 0\,,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\,\sin^2\varphi}{r} = 0\,.$$

Поэтому существует $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0 = f(0)$, значит, эта функция непрерывна в точке $z=0$, так что $f(z)$ непрерывна всюду в **C** $\triangleleft$

2. Исследовать следующие функции на равномерную непрерывность на множестве $E = \{z:\ 0 < |z| < 1\}$:

a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Im} z}{|z|}$; *b*) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Im} z}{|z|^2}$.

$\triangleright$ *a*) Очевидно, функция $f(z)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ непрерывна во всех точках множества E. Так как существует предел

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(см. пример 1*h*)), функция $F(z)=\begin{cases} f(z)\,, & 0<|z|\le 1\,,\\ 0\,, & z=0\end{cases}$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\overline{E}=\{z\,:\,|z|\le 1\}$. Тогда по теореме Кантора $F(z)$ равномерно непрерывна на $\overline{E}$, следовательно, равномерно непрерывна на E. Последнее означает равномерную непрерывность на E функции $f(z)$.

b) Как установлено в примере 1*g*), функция $f(z)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $x=0$, $y=0$. Покажем, что она не является равномерно непрерывной на E. В самом деле для значений $z_1^{(n)}=\dfrac{1}{n}\,(1+i)$, $z_2^{(n)}=\dfrac{1}{n}$, при любых $n\in\mathbf{N}$, $n>1$, имеем $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}\in E$, $f(z_1^{(n)})=\dfrac{1}{2}$, $f(z_2^{(n)})=0$. Поэтому хотя расстояние $\left|z_1^{(n)}-z_2^{(n)}\right|=\dfrac{1}{n}$ может быть сделано сколь угодно малым, для соответствующих значений функции имеем

$$\left|f(z_1^{(n)})-f(z_2^{(n)})\right| = \frac{1}{2} \qquad \triangleleft$$

Замечание. Обратите внимание, что первом случае данная функция может быть доопределена по непрерывности в точке $z=0$, а во втором – нет.

4.5. Вопросы и задачи

1. Для комплексного числа c найдите $\mathrm{Re}\,c$, $\mathrm{Im}\,c$, $\mathrm{Arg}\,c$, $\arg c$:
   a) $c=-3i\,e^{-5i}$; *b*) $c=-2\,e^{4+5i}$.
2. Для комплексного числа c найдите $\mathrm{Re}\,c$, $\mathrm{Im}\,c$:
   a) $c=\cos(1-3i)$; *b*) $c=\mathrm{sh}\,(3+i)$; *c*) $c=\ln(-2ei)$; *d*) $c=\mathrm{Ln}\,(-2+i\,2\sqrt{3})$.
3. Докажите формулы (7)–(9).
4. Докажите следующие соотношения:
   a) $\overline{\sin z}=\sin\overline{z}$; *b*) $|\,\mathrm{sh}\,y|\le|\cos z|\le \mathrm{ch}\,y \quad (z=x+iy)$.
5. В каких точках комплексной плоскости функции e^z; $\sin z$ принимают а) действительные значения; б) чисто мнимые значения?
6. Решите уравнения:
   a) $e^{iz}=\cos z$; *b*) $\sin 2z=i$; *c*) $\mathrm{ch}\,z=0$; *d*) $\mathrm{sh}\,z=\dfrac{i}{2}$.
7. Имеют ли решения в $\mathbf{C}$ уравнения *a*) $\mathrm{tg}\,z=i$, *b*) $\mathrm{th}\,z=-1$?
8. Докажите формулы (4)–(6).
9. Докажите, что $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$, где $z_1,z_2\in\mathbf{C}$, $z_1,z_2\ne 0$.

10. Верны ли равенства $a)$ $\mathrm{Ln}\, z^2 = \mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z$; $b)$ $\mathrm{Ln}\, z^2 = 2\,\mathrm{Ln}\, z$, где $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$?

11. Сформулируйте, что означают следующие утверждения:

    $a)$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ $(z_0 \neq \infty)$; $b)$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0$ $(w_0 \neq \infty)$;

    $c)$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

12. Вычислите следующие пределы:

    $a)$ $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin 2z}{\mathrm{sh}\, iz}$; $b)$ $\lim\limits_{z\to -\frac{i\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$; $c)$ $\lim\limits_{z\to \frac{i\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{ch}\, z + \sin iz}{\mathrm{ch}\, 2z}$.

13. Верно ли, что функция, непрерывная на множестве E, ограничена на этом множестве ?

14. Докажите, что если функция $f(z)$ непрерывна на множестве E, то функция $|f(z)|$ также непрерывна на этом множестве. Верно ли обратное утверждение ?

15. Исследуйте на непрерывность однозначные ветви функций:

    $a)$ $f(z) = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k$; $b)$ $f(z) = (\mathrm{Ln}\, z)_k$

    при условии, что 1) $\arg z \in [\,0;\, 2\pi)$; 2) $\arg z \in (-\pi\,;\, \pi]$.

16. Исследуйте следующие функции на непрерывность:

    $a)$ $f(z) = \mathrm{tg}\, z$; $b)$ $f(z) = \ln^2 z$; $c)$ $f(z) = e^{\overline{z}}$;

    $d)$ $f(z) = \dfrac{\mathrm{ch}\, z}{1+\mathrm{sh}^2 z}$; $e)$ $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|z|}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0; \end{cases}$

    $f)$ $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0; \end{cases}$ $g)$ $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$

17. Пусть функция равномерно непрерывна на множестве E. Следует ли отсюда ее ограниченность на этом множестве ?

18. Исследуйте следующие функции на непрерывность и равномерную непрерывность на множестве $E = \{z :\, 0 < |z| < 1\}$:

    $a)$ $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$; $b)$ $f(z) = \mathrm{ctg}\, z$; $c)$ $f(z) = \ln z$;

    $d)$ $f(z) = \dfrac{z^2}{|z|}$; $e)$ $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$; $f)$ $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|^2}}$;

    $g)$ $f(z) = e^{\frac{1}{z^2-1}}$; $h)$ $f(z) = e^{\frac{1}{|z|^2-1}}$.

19. Исследуйте функцию $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ на непрерывность и равномерную непрерывность на множествах $E_1 = \left\{z :\, 0 < |z| < 1,\ |\arg z| > \dfrac{3\pi}{4}\right\}$;

    $E_2 = \left\{z :\, 0 < |z| < 1,\ |\arg z| > \dfrac{\pi}{2}\right\}$. Здесь $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

20. Пусть E – ограниченное множество, а $\overline{E}$ – его замыкание. Докажите, что функцию $f(z)$, определенную и непрерывную на E, можно продолжить по непрерывности на множество $\overline{E}$ тогда и только тогда, когда эта функция равномерно непрерывна на E.

§5. Дифференцируемость ФКП. Условия Коши-Римана

5.1. Дифференцируемость ФКП

Пусть f – однозначная ФКП, определенная в окрестности точки z, а Δz – приращение значения аргумента, настолько малое, что $z + \Delta z$ также принадлежит указанной окрестности; $\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Если существует конечный предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z},$$

то он называется *производной* функции f в точке z, а $f(z)$ является *дифференцируемой* в этой точке.

Функция $f(z)$ *дифференцируема на множестве* E, если она дифференцируема в каждой точке E (т.е. в любой точке E существует $f'(z)$).

Сохраняются все теоремы об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями, а также формулы дифференцирования. Остается справедливой теорема о дифференцируемости сложной функции.

5.2. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости ФКП

Теорема 5.1. *Для того. чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x,y) как функции двух действительных переменных и чтобы в этой точке были выполнены равенства*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

(эти равенства называются *условиями Коши-Римана*).

Замечания. 1) Производная $f'(z)$ может быть записана в любой из следующих форм:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x .$$

2) Из курса математического анализа известно, что *достаточным* условием дифференцируемости вещественной функции двух переменных $u(x,y)$ является непрерывность ее частных производных u_x, u_y.

3) Введем обозначение для дифференцируемой на множестве E вещественной функции двух переменных: $u \in \mathcal{D}(E)$.

5.3. Примеры

Исследовать дифференцируемость ФКП.

a) $f(z) = \overline{z}$.

$\triangleright$ $f(z) = x - iy = u + iv$, поэтому

$$u(x, y) = x\,, \quad v(x, y) = -y\,.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, однако условия Коши-Римана не выполнены ни в одной точке, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1\,.$$

Таким образом, ФКП $f(z)$ нигде не дифференцируема $\triangleleft$

b) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbf{N}$.

$\triangleright$ Используя для $z \neq 0$ показательную форму представления $z = r\,e^{i\varphi}$, получаем $f(z) = r^n\,e^{in\varphi}$, поэтому

$$u(r, \varphi) = r^n\,\cos n\varphi\,, \quad v(r, \varphi) = r^n\,\sin n\varphi\,.$$

Функции $u(r, \varphi)$, $v(r, \varphi) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$. Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial r} = n\,r^{n-1}\,\cos n\varphi\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -n\,r^n\,\sin n\varphi\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = n\,r^{n-1}\,\sin n\varphi\,, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = n\,r^n\,\cos n\varphi\,.$$

Очевидно, условия Коши-Римана, записанные в полярных координатах (см. задачу 1 п. **5.4**), всюду выполнены. Итак, доказано, что $f(z)$ всюду (кроме точки $z = 0$) дифференцируема, причем

$$f'(z) = \frac{r}{z} \cdot \left(n\,r^{n-1}\,\cos n\varphi + i\,n\,r^{n-1}\,\sin n\varphi\right) = n\,z^{n-1}\,.$$

Дифференцируемость z^n в точке $z = 0$ легко показать на основе определения:

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta z)^n}{\Delta z} = \begin{cases} 1\,, & n = 1 \\ 0\,, & n > 1 \end{cases} \quad \triangleleft$$

c) $f(z) = e^z$.

$\triangleright$ $e^z = e^x\,(\cos y + i \sin y)$, поэтому

$$u(x, y) = e^x\,\cos y\,, \quad v(x, y) = e^x\,\sin y\,.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, а условия Коши-Римана выполнены всюду в $\mathbf{R}^2$ (проверьте!) Следовательно, ФКП $f(z) = e^z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, причем

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x\,\cos y + i\,e^x\,\sin y = e^x\,(\cos y + i \sin y) = e^z \quad \triangleleft$$

d) $f(z) = \sin z$.

$\triangleright$ Функция дифференцируема в любой точке $\mathbf{C}$. Действительно, поскольку всюду существуют производные функций e^z , iz , то дифференцируемы сложные функции

$$(e^{iz})' = i\,e^{iz}\,, \quad (e^{-iz})' = -i\,e^{-iz}\,,$$

а также их линейная комбинация $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Поэтому всюду существует

$$(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z \quad \triangleleft$$

$e)$ $f(z)=\operatorname{tg} z$.

$\triangleright$ Выше доказано, что функция $\sin z$ дифференцируема в любой точке $\mathbf{C}$. Аналогично устанавливается то же свойство функции $\cos z$. Тогда при $\cos z\neq 0$ т.е. для $z\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, существует производная $\operatorname{tg} z$, причем

$$(\operatorname{tg} z)'=\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)'=\frac{1}{\cos^2 z} \quad \triangleleft$$

$f)$ $f(z)=z\,\operatorname{Im} z$.

$\triangleright$ Находим $u(x,y)=xy$; $v(x,y)=y^2$.

Очевидно, $u,v\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$.

Поскольку условия Коши-Римана приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} y=2y\,, \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\,, \\ x=0\,, \end{cases}$$

данная функция дифференцируема только при $z=0$. Теперь находим $f'(0)=u_x(0,0)+iv_x(0,0)=0$ $\triangleleft$

$g)$ $f(z)=(\operatorname{Im} z)^2$.

$\triangleright$ Здесь $u(x,y)=y^2\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$; $v(x,y)=0\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$.

Из условий Коши-Римана получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0=0\,, \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y=0\,.$$

Таким образом, данная функция дифференцируема во всех точках действительной оси: $\operatorname{Im} z=0$. Для таких значений z по формуле из замечания 1 находим $f'(z)=0$ $\triangleleft$

$h)$ $f(z)=\sqrt{|\operatorname{Re} z\cdot \operatorname{Im} z|}$.

$\triangleright$ В принятых выше обозначениях $u(x,y)=\sqrt{|x\cdot y|}$; $v(x,y)=0\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$.

Заметим, сначала, что всюду $v_x=v_y=0$.

Пусть $xy\neq 0$. Рассмотрим к примеру точку, расположенную во второй четверти координатной плоскости: $x<0$, $y>0$. На этом множестве $u(x,y)=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{y}$ – дифференцируемая функция, причем $u_x=-\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{-x}}\neq 0=v_y$. Таким образом, условия Коши-Римана здесь не выполнены. Аналогичным образом дело обстоит внутри любой из оставшихся четвертей плоскости.

Рассмотрим далее точку, лежащую на какой-либо координатной оси, например, $(0;y)$, $y\neq 0$. Предел, вычисляемый согласно определению частной производной:

$$u_x(0,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,y)-u(0,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}\cdot\sqrt{|y|}}{\Delta x}\,,$$

не существует.

Остается рассмотреть точку $(0;0)$. Используя определение, находим

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0\,,\quad u_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0\,.$$

Итак, условия Коши-Римана выполнены в точке $z=0$ и только в ней.

Требование дифференцируемости $u(x,y)$ в $(0,0)$ означает, что приращение

$$\Delta u(0,0)=u(\Delta x,\Delta y)-u(0,0)=\sqrt{|\Delta x|}\cdot\sqrt{|\Delta y|}$$

при $\rho=\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}\to 0$ может быть представлено в виде

$$\Delta u(0,0)=u_x(0,0)\,\Delta x+u_y(0,0)\,\Delta y+o(\rho)\,,$$

т.е.

$$\sqrt{|\Delta x|}\cdot\sqrt{|\Delta y|}=o(\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2})\quad\Leftrightarrow\quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|\Delta x|}\cdot\sqrt{|\Delta y|}}{\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}}=0\,,$$

что, как легко убедиться, неверно. Следовательно, $u(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0;0)$.

Итак, данная функция $f(z)$ нигде не дифференцируема. (Обратите внимание: в точке $z=0$ условия Коши-Римана выполнены, $f'(0)$ не существует по причине недифференцируемости $u(x,y)$) $\triangleleft$

5.4. Вопросы и задачи

1. Получите формулы, выражающие условия Коши-Римана и производную в полярных координатах

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\,,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\end{cases}\qquad f'(z)=\frac{r}{z}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\,.$$

2. Покажите, что уравнение $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}=0\,,$ где f рассматривается как функция независимых переменных z и $\overline{z}$, равносильно условиям Коши-Римана.

3. Исследуйте данные функции на дифференцируемость; найдите их производные там, где они существуют:

   $a)$ $f(z)=e^{\overline{z}}$; $b)$ $f(z)=\dfrac{z^2}{\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z}$; $c)$ $f(z)=\dfrac{1}{z}$;

   $d)$ $f(z)=\dfrac{1}{\overline{z}}$; $e)$ $f(z)=z\cdot|z|^2$; $f)$ $f(z)=(\overline{z})^2$;

   $g)$ $f(z)=\sin\,\overline{z}$; $h)$ $f(z)=\cos\,(z^2)$;

   $i)$ $f(z)=\cos x+i\,\sin y\quad(z=x+iy)$.

4. Покажите, что для функции $f(z)=\begin{cases}e^{\frac{1}{z^4}}\,, & z\neq 0;\\ 0\,, & z=0\,,\end{cases}$ в точке $z=0$ выполнены условия Коши-Римана, однако она не дифференцируема в этой точке.

§6. Аналитические функции. Связь аналитичности с гармоничностью

6.1. Аналитические функции и их свойства

Определения.

Функция f называется *аналитической в области* D, если она имеет в этой области непрерывную производную.

Обозначение: $f \in \mathcal{A}(D)$.

Замечание. Наряду с термином "аналитическая"в литературе встречаются иные названия такой функции: регулярная, голоморфная.

Функция f называется *аналитической в точке* z_0, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки. Обозначение: $f \in \mathcal{A}(z_0)$.

Функция f *аналитична в замкнутой области* D, если существует такая область D_1, что $\overline{D} \subset D_1$ и $f \in \mathcal{A}(D_1)$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$.

Примеры.

Среди примеров п. 5.3 только функции $b), c), d), e)$ являются аналитическими (причем первые три из них аналитичны в $\mathbf{C}$, функция $\operatorname{tg} z$ аналитична всюду, где дифференцируема, т.е. при $z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$). Функции $f), g)$ дифференцируемы на некоторых множествах, но нигде не аналитичны; функции $a), h)$ нигде не дифференцируемы, следовательно, не аналитичны.

Теорема 6.1 (свойства аналитических функций).

а) $f \in \mathcal{A}(D) \quad \Rightarrow \quad f \in C(D)$;

б) $f, g \in \mathcal{A}(D) \quad \Rightarrow \quad f \pm g \in \mathcal{A}(D)$;

в) $f, g \in \mathcal{A}(D) \quad \Rightarrow \quad f \cdot g \in \mathcal{A}(D)$;

г) $f, g \in \mathcal{A}(D)$, $g \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f}{g} \in \mathcal{A}(D)$.

Теорема 6.2 (аналитичность сложной функции).

Пусть функция f аналитична в области D, а функция g аналитична в области G, содержащей образ области D. Тогда сложная функция $g(f(z)) \in \mathcal{A}(D)$.

Теорема 6.3 (аналитичность обратной функции).

Пусть однозначная функция $w = w(z)$ аналитична в точке z_0, причем $w'(z_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $w_0 = w(z_0)$ существует однозначная обратная функция $z = z(w)$, аналитическая в точке w_0, причем

$$z'(w_0) = \frac{1}{w'(z_0)}.$$

Замечание. Утверждение теоремы 6.3 имеет *локальный* характер. Как показывают следующие примеры, однозначная аналитическая в области D функция w, для которой $w'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$, может иметь неоднозначную обратную функцию.

Примеры.

$\triangleright$ *а)* Среди примеров п. **5.3** только функции $b), c), d), e)$ являются аналитическими (причем первые три из них аналитичны в $\mathbf{C}$, функция $\operatorname{tg} z$ аналитична всюду, где дифференцируема, т.е. при $z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$). Функции $f), g)$ дифференцируемы на некоторых множествах, но нигде не аналитичны; функции $a), h)$ нигде не дифференцируемы, следовательно, не аналитичны.

$b)$ Степенная функция с показателем $n > 1$ аналитична в $\mathbf{C}$. Выше, в п. **4.4**, отмечено, что однозначная ветвь обратной к ней функции

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}\,(\cos\varphi_k + i\,\cos\varphi_k)\,,\ \text{где}\ \varphi_k = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}\,,$$

непрерывна в $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$.

Докажем, что $f(z)$ аналитична в той же области. По определению, если $w = (\sqrt[n]{z})_k$, то $z = w^n$. Так как в любой точке $w \neq 0$ существует $z' = nw^{n-1} \neq 0$, то в силу теоремы 6.3 по формуле (1) имеем:

$$w'(z) = \frac{1}{z'(w)} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{z})_k^{n-1}}\,,$$

т.е. в любой точке $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$ существует непрерывная $w'(z)$.

$c)$ Показательная функция аналитична в $\mathbf{C}$. Из рассмотрений пп. **4.2, 4.4** следует, что обратная к ней функция $w = \mathrm{Ln}\,z$ бесконечнозначна, при этом каждая из однозначных ветвей

$$w = (\mathrm{Ln}\,z)_k = \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi k)\,,\quad k \in \mathbf{Z}\,,$$

непрерывна в области $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$ (здесь $\arg z \in [0\,;\,2\pi)$).

Поскольку $z' = e^w \neq 0$, то в соответствии с теоремой 6.3 всюду в этой области функция $w = (\mathrm{Ln}\,z)_k$ имеет непрерывную производную

$$w'(z) = (\mathrm{Ln}\,z)'_k = \frac{1}{z'(w)} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}\,,$$

следовательно, аналитична в $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$. Заметим, что производная не зависит от k $\lhd$

6.2. Связь аналитичности и гармоничности

Определения. Функция двух действительных переменных $u(x,y)$ называется *гармонической* в области D, если $u \in C^2(D)$ и $\Delta u = 0$, $(x,y) \in D$. Обозначение: $u \in \mathcal{H}(D)$.

Здесь $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, а $\Delta u = 0$ – уравнение Лапласа.

Две функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ называются *сопряженными (гармонически сопряженными),* если они удовлетворяют в D условиям Коши-Римана.

Теорема 6.4. *Функция $w = f(z) = u + iv \in \mathcal{A}(D)$ тогда и только тогда, когда u и v гармонические и сопряженные функции в D.*

6.3. Задача восстановления аналитической функции

Утверждение 1. *Пусть в некоторой односвязной области D задана одна из функций $u(x,y)$ или $v(x,y)$, являющихся соответственно действительной или мнимой частью $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Тогда вторая из них может быть найдена единственным (с точностью до аддитивной константы) образом:*

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\,dx + u_x\,dy + C\,,$$

где (x_0,y_0) – фиксированная точка D, а $C \in \mathbf{R}$ – произвольная постоянная.

Замечание. Неизвестную функцию $v(x, y)$ можно найти, решив систему уравнений Коши-Римана (см. ниже пример b)).

Так как для $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq 0$ имеем $\operatorname{Ln} f(z) \in \mathcal{A}(D)$, то справедливо

Утверждение 2. *Пусть в некоторой односвязной области D для аналитической функции $f(z) \neq 0$ известна одна из функций $|f(z)|$ или $\operatorname{Arg} f(z)$. Тогда вторая из них, а следовательно и функция $f(z)$, может быть найдена единственным (с точностью до мультипликативной константы) образом.*

Замечание. Прежде чем находить аналитическую функцию $f(z)$ по неполной информации в соответствии с утверждениями 1–2, надо удостовериться в ее существовании, т.е. проверить гармоничность исходной функции $u(x, y)$ (или $v(x, y)$).

Примеры. Найти аналитическую функцию $f(z)$ (если она существует) по заданной функции

a) $\operatorname{Re} f(z) = x^2$; $\quad$ b) $\operatorname{Im} f(z) = x + y + xy$; $\quad$ c) $|f(z)| = e^{2xy}$.

$\triangleright$ a) Для $u(x, y) = x^2$ имеем $u_{xx} + u_{yy} = 2 \neq 0$. Так как эта функция не является гармонической, в соответствии с теоремой 6.4 аналитической функции, для которой она служит действительной частью, не существует $\triangleleft$

$\triangleright$ b) Легко проверить, что $v(x, y) = x + y + xy \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$, следовательно, существует $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. Найдем теперь гармонически сопряженную функцию $u(x, y)$ из равенств Коши-Римана:

$$\begin{cases} u_x = 1 + x\,, \\ u_y = -1 - y\,. \end{cases}$$

Интегрируя первое из равенств по x, имеем $u(x, y) = x + \dfrac{x^2}{2} + C(y)$. Функцию $C(y)$ найдем после подстановки полученного выражения во второе уравнение системы:

$$C'(y) = -1 - y\,, \quad \text{откуда} \quad C(y) = -y - \frac{y^2}{2} + C\,.$$

Поэтому $\qquad u(x, y) = x - y + \dfrac{x^2 - y^2}{2} + C$, так что

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{2} + (x - y) + C + i\,(x + y + xy) = \frac{1}{2}\,z^2 + (1 + i)\,z + C, \quad \text{где } C \in \mathbf{R} \qquad \triangleleft$$

$\triangleright$ c) Во-первых, заметим, что $u(x, y) = \ln|f(z)| = 2xy \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^2)$, поэтому существует $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$ с заданным модулем. Для нахождения гармонически сопряженной функции $v(x, y) = \operatorname{Arg} f(z)$ воспользуемся равенством (3):

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -u_y\,dx + u_x\,dy + c =$$
$$= \int_{(0,0)}^{(x,y)} -2x\,dx + 2y\,dy + c = -x^2 + y^2 + c.$$

Тогда

$$f(z) = |f(z)|\,e^{i\operatorname{Arg} f(z)} = e^{2xy} \cdot e^{i(-x^2 + y^2 + c)} = e^{-i\,z^2} \cdot e^{ic}, \quad c \in \mathbf{R} \quad \triangleleft$$

6.4. Вопросы и задачи.

1. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq const$. Следует ли отсюда аналитичность функций $\overline{f(z)}$ и $f(\overline{z})$?

2. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и всюду в области D выполнено одно из условий:

   $a)$ $\operatorname{Re} f(z) = const$; $b)$ $\operatorname{Im} f(z) = const$;

   $c)$ $|f(z)| = const$; $d)$ $\arg f(z) = const$.

   Докажите, что тогда $f(z)$ постоянна в D.

3. Исследуйте дифференцируемость и аналитичность следующих функций:

   $a)$ $f(z) = \overline{z} \cdot \operatorname{Re} z$; $b)$ $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$; $c)$ $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{Im} z$;

   $d)$ $f(z) = i\,(\overline{z})^2 - 2\,|z|^2$; $e)$ $f(z) = (z^2 + \overline{z}^2) \cdot \operatorname{Re} z$; $f)$ $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$;

   $g)$ $f(z) = \dfrac{i}{\overline{z}} + z$; $h)$ $f(z) = 2\,|z|^2 - \overline{z}\,(\overline{z} + 4i)$;

   $i)$ $f(z) = \operatorname{tg} x + i\ \operatorname{tg} y$; $j)$ $f(z) = y^2 - x^2 + 2i\,|xy|$;

   $k)$ $f(z) = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + i\,|\operatorname{ch} x \cdot \sin y|$ $(z = x + iy)$.

4. Пусть $u, v \in \mathcal{H}(D)$. Верно ли, что $a)\, u + v \in \mathcal{H}(D)$; $b)\, u\,v \in \mathcal{H}(D)$?

5. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – сопряженные гармонические функции в области D. Докажите, что функции $a\,u(x, y) - b\,v(x, y)$ и $b\,u(x, y) + a\,v(x, y)$, где $a, b \in \mathbf{R}$, также гармонически сопряжены в D.

6. Пусть $u(x, y)$ $v(x, y)$ – сопряженные гармонические функции в области D. Докажите, что градиенты u и v ортогональны в каждой точке D.

7. Пусть D – односвязная область, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Покажите, что функция $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ определяется единственным (с точностью до аддитивной константы) образом по формуле

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_y\,dx - v_x\,dy + C\,,$$

   где (x, y), $(x_0, y_0) \in D$, $C \in \mathbf{R}$.

8. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$, $z = x + iy$, (если она существует) по данному условию :

   $a)$ $\operatorname{Im} f(z) = 2y\,(x + 1) - 1$; $b)$ $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + y$;

   $c)$ $\operatorname{Im} f(z) = \sin x \cdot \cos y - x^2$; $d)$ $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$;

   $e)$ $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y - y$; $f)$ $\operatorname{Arg} f(z) = x^2 - y^2$;

   $g)$ $\operatorname{Arg} f(z) = \dfrac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; $h)$ $|f(z)| = (x^2 + y^2) \cdot e^{x^2}$.

Глава 2
Конформные отображения

§7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения

7.1. Исходные соглашения и определения

Определения.

Углом между двумя гладкими кривыми в точке их пересечения $z_0 \neq \infty$ называется угол между их касательными в этой точке.

Углом между двумя гладкими кривыми в точке $z_0 = \infty$ называется угол, под которым пересекаются образы этих кривых в точке $\zeta_0 = 0$ при отображении $\zeta = \dfrac{1}{z}$.

7.2. Геометрический смысл модуля производной

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена и аналитична в некоторой окрестности точки z_0, причем $f'(z_0) \neq 0$.

Тогда число $k = |f'(z_0)| > 0$ – коэффициент растяжения (сжатия, если $k < 1$) в точке z_0 при отображении f.

Это – свойство *постоянства растяжения в точке* z_0 при отображении $w = f(z)$ (поскольку k не зависит от способа приближения к этой точке).

7.3. Геометрический смысл аргумента производной

$\arg f'(z_0)$ – это *угол поворота* гладких кривых в точке z_0 при отображении f.

Пусть γ_1 и γ_2 – две гладкие кривые, проходящие через z_0, Γ_1 Γ_2 – их образы при отображении f. Поскольку каждая из кривых при этом поворачивается на один и тот же угол $\alpha = \arg f'(z_0)$, то угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке z_0 равен углу между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке w_0.

Это – свойство *сохранения углов* (по величине и по направлению отсчета) между кривыми при отображении $w = f(z)$.

7.4. Якобиан отображения и его геометрический смысл

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой квадрируемой области D плоскости (z) на квадрируемую области G плоскости (w). Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$, $f'(z) \neq 0$.

Тогда якобиан $J = |f'(z)|^2$ имеет смысл коэффициента пересчета (коэффициента растяжения) площадей при данном отображении областей (в то время как $|f'(z)|$ – это коэффициент линейного растяжения).

7.5. Понятие конформного отображения. Основные принципы конформных отображений

Непрерывное отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке* z_0, если оно сохраняет углы (по величине и направлению) между гладкими кривыми, проходящими через эту точку.

Отображение $w = f(z)$ *конформно в области* D, если оно взаимно однозначно и конформно в каждой точке D.

Утверждение 1. *Пусть однозначная функция* $f \in \mathcal{A}(z_0)$ *и* $f'(z_0) \neq 0$. *Тогда отображение* $w = f(z)$ *конформно в* z_0.

Утверждение 2. *Пусть однозначная функция* $f(z)$ *аналитична, однолистна в* D *и* $f'(z) \neq 0 \; \forall z \in D$. *Тогда отображение* $w = f(z)$ *конформно в* D.

Основные принципы конформных отображений

Фундаментальным фактом теории конформных отображений является

Теорема Римана. *Пусть* D *и* G *– односвязные области в* $\overline{\mathbf{C}}$, *причем граница каждой из них содержит более чем одну точку. Тогда существует конформное отображение области* D *на область в* G

Отметим, что при конформном преобразовании области
1) внутренность области D отображается на внутренность G;
2) граница ∂D отображается на границу ∂G;
3) сохраняется ориентация границы относительно области.

7.6. Примеры

1) Найти, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении $w = z^3$.

$\triangleright$ Найдем производную $w' = 3z^2$. Условие $\quad k = 3\,|z|^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ определяет множество – внешность круга радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, где происходит растяжение. Очевидно, внутренность указанного круга сжимается при данном отображении $\triangleleft$

2) Найти угол, на который поворачиваются кривые, проходящие через точку $z_0 = i$, при отображении $w = \dfrac{z-1}{z+i}$.

$\triangleright$ Найдем производную

$$w' = \left(\frac{z-1}{z+i}\right)' = \frac{i+1}{(z+i)^2}\,; \quad w'(i) = \frac{i+1}{(2i)^2} = -\frac{1+i}{4}\,.$$

Данное отображение переводит точку $z_0 = i$ в точку $w_0 = \dfrac{i-1}{2i} = \dfrac{1+i}{2}$, при этом угол поворота α кривых, проходящих через точку z_0, равен

$$\alpha = \arg w'(i) = \arg\left(-\frac{1+i}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4} \quad \triangleleft$$

3) Свойства *линейной* функции $l(z) = a\,z + b$, где $a \neq 0$, $b \in \mathbf{C}$, и осуществляемого ею отображения.

$\triangleright$ Функция $w = l(z)$ определена на всей комплексной плоскости и однолистна. Последнее вытекает из того, что

$$a\,(z_1 - z_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2\,, \quad \text{если} \quad a \neq 0$$

(см. также пример a) п.4.1).

Линейная функция всюду имеет производную $w'(z) = a \neq 0$, так что $l(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$.

В соответствии с утверждением 2 линейная функция осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя. При этом во всех точках происходит растяжение (сжатие) с одинаковым коэффициентом $k = |a|$ $\lhd$

4) Функция $w = z^2$, где $z \in D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

$\rhd$ Эта функция аналитична и однолистна в D, поскольку равенство $z_1^2 = z_2^2$ при $z_1 \neq z_2$ равносильно $z_2 = -z_1$, а точки вида z и $(-z)$ не могут одновременно находиться в одной полуплоскости.

Всюду внутри области D имеем $w' = 2\,z \neq 0$, поэтому отображение D конформно.

Отметим, что конформность нарушается в точке $z_0 = 0$, где $w'(0) = 0$. В самом деле, пара лучей $\gamma_1 = \{z\,:\, z = r\,e^{i\alpha_1},\ r > 0\ \}$ и $\gamma_2 = \{z\,:\, z = r\,e^{i\alpha_2},\ r > 0\ \}$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (0\,;\,\pi)$ – некоторые фиксированные числа, преобразуется в два луча $\Gamma_1 = \{w : w = r^2\,e^{2i\alpha_1},\ r > 0\ \}$ и $\Gamma_1 = \{w : w = r^2\,e^{2i\alpha_2},\ r > 0\ \}$.

Очевидно, угол между лучами увеличился вдвое $\lhd$

5) Найти площадь образа единичного квадрата $D = \{0 \le \operatorname{Re} z \le 1,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$ при преобразовании $f(z) = e^z$.

$\rhd$ Поскольку $f'(z) = e^z \neq 0$, $|e^z| = e^x$, то по формуле (4) имеем

$$S = \iint_D |f(z)|^2\,dxdy = \iint_D e^{2x}\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 e^{2x}\,dx \int_0^1 dy = \frac{1}{2}\,(e^2 - 1) \qquad \lhd$$

6) Найти образ кривой $x^2 + y^2 - 2y = 0$ при отображении $a)$ $w = 2iz + 1$; $b)$ $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

$\rhd$ $a)$ *1-е решение.* Пусть $w = u + iv$, тогда

$$u + iv = 2i\,(x + iy) + 1\,, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} u = -2y + 1\,, \\ v = 2x\,. \end{cases}$$

Поэтому данное уравнение, переписанное в форме $\quad x^2 + (y-1)^2 = 1\,, \qquad (3)$

приобретает вид $\quad \left(\dfrac{v}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1-u}{2} - 1\right)^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ (u+1)^2 + v^2 = 4.$

2-е решение. Уравнение (3) задает окружность $|z - i| = 1$. Подставляя в последнее равенство $z = \dfrac{w-1}{2i}$, получаем

$$\left|\frac{w-1}{2i} - i\right| = 1 \ \Leftrightarrow\ |w+1| = 2\,.$$

$b)$ Имея в виду, что $x = \dfrac{1}{2}\,(z + \overline{z})$, $y = \dfrac{1}{2i}\,(z - \overline{z})$, $x^2 + y^2 = z\overline{z}$, уравнение данной окружности перепишем в виде $\quad z\overline{z} + i\,(z - \overline{z}) = 0\,.$

Из уравнения, задающего отображение $w(z)$, выразим $z = \dfrac{w+1}{1-w}$. Тогда $\overline{z} = \dfrac{\overline{w}+1}{1-\overline{w}}$ и, следовательно,

$$\frac{w+1}{1-w} \cdot \frac{\overline{w}+1}{1-\overline{w}} + i\left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{\overline{w}+1}{1-\overline{w}}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ w\overline{w} + (w + \overline{w}) + 2i\,(w - \overline{w}) = 0\,,$$

т.е.

$$u^2 + v^2 + 2u - 4v + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u+1)^2 + (v-2)^2 = 4 \qquad \triangleleft$$

7.7. Вопросы и задачи

1. Найдите множество всех точек z, в которых происходит растяжение при отображении $f(z)$, если

   $a)$ $f(z) = 2z + i\,z^2$; $b)$ $f(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$.

2. Для отображения $f(z)$ найдите множество всех точек z с заданным коэффициентом растяжения k; с заданным углом α, поворота гладких кривых, если

   $a)$ $f(z) = i\,z^2$; $k = 2$, $\alpha = 0$;

   $b)$ $f(z) = -8z^3$; $k > 6$, $\alpha = \pi$;

   $c)$ $f(z) = i\,z^3$; $1 \le k < 9$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$;

   $d)$ $f(z) = \dfrac{1}{z}$; $k = 4$, $0 < \alpha < \pi$.

3. Найдите линейное отображение $w = az + b$, которое оставляет точку z_0 неподвижной, а точку z_1 переводит в w_1, если

   $a)$ $z_0 = -1 + i$, $z_1 = 2 + i$, $w_1 = -4 + 3i$;

   $b)$ $z_0 = -i$, $z_1 = 1 - 2i$, $w_1 = 2 - 3i$.

4. Найдите площадь образа области D при преобразовании $f(z) = z^2$, если

   $a)$ $D = \{|z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$; $b)$ $D = \{0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$.

5. Укажите максимальные множества однолистности функций:

   $a)$ $f(z) = z^4$; $b)$ $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$;

   $c)$ $f(z) = e^z$; $d)$ $f(z) = \sin z$.

6. Пусть $D = \{|z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Является ли отображение $f(z) = z^3$

   $a)$ конформным в каждой точке D?

   $b)$ конформным в области D?

7. Найдите максимальную область, где конформно отображение $w = f(z)$, если:

   $a)$ $f(z) = e^{3z}$; $b)$ $f(z) = \mathrm{sh}(z-1)$; $c)$ $f(z) = i\,z^2$.

8. Найдите образ множества $\{|zi - 2| < 2\}$ при отображении с помощью функции $w = -5zi + 3$.

9. Найдите образ линии γ при преобразовании 1) $w = z^2$; 2) $w = \dfrac{1}{z}$, если $a)$ $\gamma : |z| = 2$; $b)$ $\gamma : \arg z = \dfrac{\pi}{4}$.

§8. Дробно-линейная функция и ее свойства

8.1. Определения. Конформность отображения

Дробно-линейной называется функция

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где } a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{C}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0.$$

Пусть дополнительно приняты условия

$$w\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z\to -\frac{d}{c}} L(z) = \infty, \quad w(\infty) = \lim_{z\to\infty} L(z) = \frac{a}{c}.$$

Тогда получается взаимно однозначное и непрерывное отображение расширенной комплексной плоскости на себя $L:\ \overline{\mathbf{C}} \leftrightarrow \overline{\mathbf{C}}$.

Теорема 8.1. *Дробно-линейная функция аналитична на множестве* $\mathbf{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ *и конформно отображает расширенную комплексную плоскость* $\overline{\mathbf{C}}$ *на себя.*

8.2. Групповое свойство

Теорема 8.2. *Множество дробно-линейных функций* $\{\mathcal{L}\}$ *образует алгебраическую группу относительно операции суперпозиции.*

8.3. Инвариантность двойного отношения

Теорема 8.3. *Пусть* (z_1, z_2, z_3) *и* (w_1, w_2, w_3) *– две тройки чисел, в каждой из которых нет совпадающих. Тогда существует единственное дробно-линейное преобразование* $w = L(z)$, *для которого* $w_k = L(z_k)$, $k = 1, 2, 3$. *Оно задается равенством*

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\,. \tag{1}$$

Пусть $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ – четыре различных числа. Выражение $\dfrac{z-z_1}{z-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ называется *двойным отношением*, а равенство (1) означает его инвариантность относительно дробно-линейного преобразования.

8.4. Круговое свойство

Теорема 8.4. *Дробно-линейная функция отображает множество прямых и окружностей в себя.*

8.5. Сохранение симметрии относительно прямых (окружностей)

Определения. Точки z и z^* *симметричны относительно прямой* γ, если γ – серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках.

Точки z и z^* *симметричны, или сопряжены, относительно окружности* γ радиуса R с центром в точке z_0, если z и z^* лежат на одном луче, исходящем из z_0, и $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.

Свойства симметрии.

1) Очевидно, в обоих случаях $(z^*)^* = z$.

2) $z = z^* \quad \Leftrightarrow \quad z \in \gamma$.

В противном случае точки z и z^* лежат по разные стороны γ.

3) Пусть γ – окружность $|z| = R$. Тогда пара симметричных относительно γ точек $z \neq 0$ и z^* связана равенством

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z}}\,.$$

Если точки $z \neq z_0$ и z^* симметричны относительно окружности $\gamma : |z - z_0| = R$, то справедливо равенство

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}\,.$$

4) Точке z_0 симметрична относительно окружности любого радиуса точка $z_0^* = \infty$.

Теорема 8.5. *Пусть γ – прямая либо окружность, точки z и z^* симметричны относительно γ, преобразование L дробно-линейное. Тогда точки $L(z)$ и $L(z^*)$ симметричны относительно $\Gamma = L(\gamma)$.*

8.6. Примеры

1) Построение дробно-линейной функции по трем точкам, заданным вместе с их образами.

Для решения этой задачи можно использовать формулу (1). В случае, если какая-то из заданных точек, например, z_1, является бесконечно удаленной, обе разности в (1), содержащие z_1, заменяются на 1.

Второй способ состоит в использовании представления

$$L(z) = \lambda\,\frac{z+a}{z+b}\,. \tag{2}$$

Найти дробно-линейную функцию, переводящую тройку точек $(-1, i, 1+i)$ соответственно в $a)$ $(-1, \infty, 1)$; $b)$ $(0, \infty, 2)$.

$\triangleright$ $a)$ Воспользовавшись формулой (1), имеем

$$\frac{z+1}{z-i} : \frac{2+i}{1} = \frac{w-i}{1} : \frac{2}{1}\,,$$

откуда

$$w = -1 + \frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{2}{2+i} = -1 + \frac{2\,(2-i)}{5}\cdot\frac{z+1}{z-i} = \frac{-(1+2i)\,z + (4+3i)}{5\,(z-i)}\,.$$

$b)$ Дробь вида (2), принимающая при $z = -1;\ i$ значения $w = 0;\ \infty$ соответственно, выглядит так:

$$w = \lambda\,\frac{z+1}{z-i}\,.$$

Коэффициент λ определяется из условия

$$w(1+i) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \frac{2}{2+i}\,.$$

Таким образом, искомое отображение: $\quad w = \dfrac{2}{2+i}\cdot\dfrac{z+1}{z-i} = \dfrac{2\,(z+1)\,(2-i)}{5\,(z-i)}$ $\quad\triangleleft$

2) Построение образа данного множества при заданном дробно-линейном преобразовании. (При решении такого рода задач наряду с общими принципами конформных отображений (прежде всего это принцип соответствия границ, см. п. 7.4) используются также свойства дробно-линейной функции).

Найти образ

$a)$ полукруга $D = \{z: \ |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0 \}$ при отображении с помощью функции $w = \dfrac{z+1}{1-z}$.

$b)$ области, ограниченной окружностями $|z-1| = 1$ и $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ при отображении с помощью функции $\quad w = \dfrac{1}{z}$.

$\triangleright$ $a)$ *1-ый способ.* Имея в виду принцип соответствия границ при конформном отображении, найдем образ границы области D. Граница ∂D состоит из части прямой и дуги окружности. В силу теоремы 8.4 функция w переводит их также в части прямых либо окружностей. Вычислим

$$w(-1) = 0, \ w(0) = 1, \ w(1) = \infty, \ w(i) = i.$$

Очевидно, отрезок $[-1; \ 1]$ переходит в положительную действительную полупрямую, а образом полуокружности является верхняя часть мнимой оси. Учитывая сохранение ориентации границы, получаем в качестве образа D первую четверть плоскости (w)

2-ой способ. С самого начала ясно, что части ∂D переходят в куски прямых, поскольку точка $z = 1$, общая для отрезка и полуокружности, отображается в $w = \infty$. Выяснив, что отрезок $[-1; \ 1]$ переходит в положительную действительную полуось, учтем конформность отображения. Так как части границы ∂D пересекаются в точке $z = -1$ под прямым углом, тот же угол составляют их образы, пересекающиеся в точке $w = 0$.

$b)$ Обе окружности переходят в прямые, так как $w(0) = \infty$. Поскольку окружности γ_1 и γ_2 ортогональны вещественной прямой, которая при данном отображении, очевидно, переходит в себя, границы искомой области, т.е. прямые Γ_1 и Γ_2, также перпендикулярны действительной оси в плоскости (w). Остается найти образы точек пересечения: $w(1) = 1, \ w(2) = \dfrac{1}{2}$ и, вычислив, например, $w\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$, учесть, что внутренняя точка области переходит во внутреннюю. Итак, результатом отображения является полоса между параллельными прямыми Γ_1 и Γ_2 $\quad \triangleleft$

3) Построение дробно-линейной функции, отображающей одно заданное множество на другое.

Решение такой задачи (если оно существует) также основано на общих принципах конформных отображений и использовании свойств дробно-линейной функции.

$a)$ Найти какую-либо дробно-линейную функцию, отображающую единичный круг $\{|z| < 1\}$ на правую полуплоскость $\{\operatorname{Re} w > 0\}$.

$\triangleright$ Для осуществления требуемого отображения достаточно выбрать какую-то тройку точек на окружности $|z| = 1$ и, учитывая сохранение ориентации границы, указать в качестве образов тройку точек на мнимой оси плоскости (w).

Например, преобразование $L: \ (1, i, -1) \longrightarrow (\infty, i, 0)$ решает задачу. Остается найти явный вид $w = L(z)$. Действуя, как показано в примере $1a)$, получаем $\quad w = \dfrac{z+1}{1-z}$
$\triangleleft$

Отметим, что задача п. $a)$ имеет бесконечно много решений. Более интересна следующая постановка.

b) Найти дробно-линейную функцию, переводящую верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{|w| < 1\}$ так, чтобы заданная точка z_0 верхней полуплоскости попадала в центр круга: $w(z_0) = 0$.

$\triangleright$ Для построения этого отображения воспользуемся теоремой 8.5: симметричные относительно вещественной прямой γ точки z_0 и $\overline{z}_0$ должны перейти в симметричные относительно ее образа Γ – окружности $|w| = 1$ – точки $w = 0$ и $w = \infty$ соответственно. Поскольку последняя симметрия не учитывает значения радиуса окружности, надо потребовать, чтобы для $\tilde{z} \in \gamma$ ее образ $\tilde{w} \in \Gamma$. Тогда имеем

$$w = \lambda \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}, \quad |w(\tilde{z})| = 1 .$$

Поскольку $\tilde{z} = x$, $x \in \mathbf{R}$, второе из равенств принимает вид

$$|\lambda| \cdot \left| \frac{x - z_0}{x - \overline{z}_0} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\alpha} \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

так как $|x - z_0| = |x - \overline{z}_0|$.

Итак, искомое отображение:

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Оно единственно с точностью до поворота круга $|w| < 1$ относительно начала координат (α – угол этого поворота). Получить единственное решение можно указанием образа какой-либо точки с границы γ, либо заданием φ – угла поворота кривых, проходящих через точку z_0 при отображении (3): $\varphi = \arg w'(z_0)$ $\triangleleft$

c) Найти дробно-линейную функцию, которая переводит единичный круг $\{|z| < 1\}$ на единичный круг $\{|w| < 1\}$ так, чтобы заданная точка z_0 попадала в центр второго круга: $w(z_0) = 0$.

$\triangleright$ В соответствии с теоремой 8.5 имеем: $w(z_0^*) = \infty$. Как отмечено выше, $z_0^* = \dfrac{1}{\overline{z}_0}$. Поэтому

$$w = \lambda_1 \cdot \frac{z - z_0}{z - \dfrac{1}{\overline{z}_0}} = \lambda_1 \cdot \frac{\overline{z}_0\,(z - z_0)}{z\,\overline{z}_0 - 1} = \lambda \cdot \frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z}_0}, \quad \lambda = -\lambda_1\,\overline{z_0}.$$

Для определения λ используем соответствие границ: если $\tilde{z} \in \gamma$, т.е. $|\tilde{z}| = 1$, то образ этой точки $\tilde{w} \in \Gamma$, так что $|\tilde{w}| = 1$. Поскольку $\tilde{z}\,\overline{\tilde{z}} = |\tilde{z}|^2 = 1$, то

$$|\tilde{w}| = |\lambda| \cdot \left| \frac{\tilde{z} - z_0}{1 - \tilde{z}\,\overline{z}_0} \right| = |\lambda| \cdot \left| \frac{\tilde{z} - z_0}{\tilde{z}\,\overline{\tilde{z}} - \tilde{z}\,\overline{z}_0} \right| = |\lambda| \cdot \frac{|\tilde{z} - z_0|}{|\tilde{z}|\;|\overline{\tilde{z}} - \overline{z_0}|} =$$

$$= |\lambda| \cdot \frac{|\tilde{z} - z_0|}{|\overline{\tilde{z} - z_0}|} = |\lambda| = 1 , \quad \text{так как} \quad |\tilde{z} - z_0| = |\overline{\tilde{z} - z_0}| .$$

Значит, $\lambda = e^{i\alpha}$ $\alpha \in \mathbf{R}$. Таким образом,

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z}_0}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad \triangleleft \tag{4}$$

d) Отобразить с помощью дробно-линейной функции круг $\{|z| < 2\}$ с разрезом по отрезку $[-i; 2i]$ мнимой оси на круг $\{|w| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0; 1]$.

$\triangleright$ После преобразования сжатия $\zeta = \dfrac{z}{2}$ получаем единичный круг с разрезом по отрезку $\left[-\dfrac{i}{2}; i\right]$. Применяя преобразование (4), при котором точка $\zeta_0 = -\dfrac{i}{2}$ переходит в $w = 0$, имеем

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{\zeta + \dfrac{i}{2}}{1 - \dfrac{i}{2}\,\zeta} = e^{i\alpha} \cdot \frac{2\zeta + i}{2 - i\,\zeta}\,.$$

Для определения параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ используем условие $\zeta = i \longrightarrow w = 1$. Отсюда $e^{i\alpha} = -i$, следовательно,

$$w = i\,\frac{2\zeta + i}{i\,\zeta - 2} = 2i\,\frac{z + i}{iz - 4} = \frac{2\,(z + i)}{z + 4i} \qquad \triangleleft$$

e) Найти отображение $w(z)$ круга $\{|z| < 1\}$ на левую полуплоскость $\{\operatorname{Re} w < 0\}$, при котором $w(-2i) = 1$, $w(i) = 0$.

$\triangleright$ Точка $z = -\dfrac{i}{2}$ симметрична точке $z = -2i$ относительно единичной окружности, а точки $w = 1$ и $w = -1$ симметричны относительно прямой $\operatorname{Re} w = 0$. Поэтому в силу теоремы 8.5 имеем $w\left(-\dfrac{i}{2}\right) = -1$. Используя формулу (1), строим дробно-линейную функцию по трем точкам и их образам:

$$\frac{z + \dfrac{i}{2}}{z + 2i} : \frac{\dfrac{3i}{2}}{3i} = \frac{w + 1}{w - 1} : \frac{1}{-1}\,,$$

откуда

$$w = \frac{z - i}{3\,(z + i)} \qquad \triangleleft$$

8.7. Вопросы и задачи

1. Докажите конформность линейного отображения в $\overline{\mathbf{C}}$.

2. Найдите линейную функцию $w = l(z)$, конформно отображающую полосу D на полосу $\{0 < \operatorname{Im}\, w < 1\}$, если

   a) $D = \{a < \operatorname{Re}\, z < b\}$; *b*) $D = \{a < \operatorname{Im}\, z - \operatorname{Re}\, z < b\}$.

3. Найдите функцию $w = f(z)$, конформно отображающую кольцо $\{2 < |z| < 3\}$ на кольцо $\{4 < |w| < 6\}$ так, чтобы

   a) $w(-2i) = 4$; *b*) $w(-2i) = 6$.

4. Найдите образ множества D при отображении $w = f(z)$, если

   a) $D = \{\operatorname{Re} z < 0\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = \dfrac{z}{z + 3}$;

   b) $D = \{|iz|^2 < 1\}$, $f(z) = \dfrac{1}{z} + i$;

c) $D=\{|z-1|<2\}\cap\{Im\,z>0\}\,,\quad f(z)=\dfrac{z+1}{z-3};$

d) $D=\{|9i\,z^2|<4\}\,,\quad f(z)=\dfrac{i}{z};$

e) $D=\left\{\dfrac{1}{2}<Rez<1\right\},\quad f(z)=\dfrac{1}{z}\,.$

f) $D=\Big(\{\mathrm{Im}\ z>0\}\setminus\{|z+1|<1\}\Big)\setminus\{|z-1|<1\},\quad f(z)=\dfrac{z-2}{z}\,.$

g) $D=\{|z-2|<2\}\cap\{|z-3|>1\}\cap\{\mathrm{Im}\ z>0\},\quad f(z)=\dfrac{z-2}{z-4}\,.$

5. Найдите точку, симметричную точке $z=2+i$ относительно окружности γ, если
   a) $\gamma=\{|z|=1\}$; b) $\gamma=\{|z|=3\}$; c) $\gamma=\{|z-i|=3\}$;
   d) $\gamma=\{|z-2-i|=1\}$.
6. Найдите функцию $w=f(z)$, конформно отображающую область D на множество G и удовлетворяющую данным дополнительным условиям, если
   a) $D=\{\mathrm{Im}\ z>0\},\quad G=\{\mathrm{Re}\ w<0\},\quad w(i)=-2,\quad w(0)=\infty;$
   b) $D=\{|z+1+i|<\sqrt{2}\},\quad G=\{\mathrm{Re}\ w>0\},\quad w(-1-i)=1,\quad w(0)=i;$
   c) $D=\{\mathrm{Im}\ z<0\},\quad G=\{|w|>2\},\quad w(i)=0,\quad w(1)=-2;$
   d) $D=\{|z+1|>1\},\quad G=\{\mathrm{Im}\ w>0\},\quad w(1)=i,\quad w(-2)=0;$
   e) $D=\{|z-1|<2\},\quad G=\{|w|<1\},\quad w(1)=-\dfrac{1}{2},\ w(-1)=-1;$
   f) $D=\{|z|<2\},\quad G=\{|w+i|<1\},\quad w(0)=-\dfrac{i}{2},\ w(2i)=0;$
   g) $D=\{\mathrm{Im}\ z>0\},\quad G=\{|w|<1\},\quad w(i)=0,\ \arg w'(i)=-\dfrac{\pi}{2};$
   h) $D=\{|z|<2\},\quad G=\{|w|<1\},\quad w(i)=0,\ \arg w'(i)=\dfrac{\pi}{4};$
   i) $D=\{\mathrm{Im}\ z<0\},\ G=\{|w+i|<2\},\ w(-i)=-i,\ \arg w'(-i)=0\,;$
   j) $D=\{\mathrm{Im}\ z>0\},\quad G=\{|w|>1\},\quad w(i)=\infty,\quad \arg w'(-i)=\pi\,;$
   k) $D=\{\mathrm{Re}\ z<0\},\quad G=\{|w+1|<1\},\quad w(-2)=-1,\quad w'(0)=i\,;$
   l) $D=\{\,|z|<1\}\cup\{\,|z-3i|<2\}\,,$ G – внешность полосы $\{0<\mathrm{Im}\ w<1\}\,;$
   m) $D=\{\,|z|<2\}\setminus\{\,|z-i|<1\}\,,\quad G=\{-1<\mathrm{Re}\ w<1\}.$

§9. Степенная функция и обратная к ней

9.1. Степенная функция с натуральным показателем

Степенная функция – это функция вида

$$w=z^n,\quad \text{где } n\in\mathbf{N},\ n>1.$$

Утверждение 1. *Степенная функция аналитична в* $\mathbf{C}$ *и конформно отображает внутренность угла* $\alpha<\arg z<\beta\,,\ \beta-\alpha\le\dfrac{2\pi}{n}\,,$ *на внутренность угла* $n\alpha<$

$\arg w < n\beta$. *В частности, любое из множеств* $D_k = \left\{ z: \dfrac{2\pi(k-1)}{n} < \arg z < \dfrac{2\pi k}{n} \right\}$, $k = 2, \dots, n$, *конформно отображается на* $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$.

9.2. Функция $w = \sqrt[n]{z}$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, определяется как *обратная к степенной* функции $z = w^n$.

В любой точке области $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ существует производная

$$(\sqrt[n]{z})'_k = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n\, w^{n-1}} = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{z})_k^{n-1}} \neq 0.$$

Определение. Однозначная аналитическая в некоторой области G функция $f(z)$ называется *однозначной регулярной ветвью* многозначной функции $F(z)$, определенной в этой же области, если значение $f(z)$ в каждой точке G совпадает с одним из значений $F(z)$ в этой точке.

Утверждение 2. *Функция* $w = \sqrt[n]{z}$ *в каждой точке* $\overline{\mathbf{C}}$, *кроме* $z = 0$ *и* $z = \infty$, *имеет ровно* n *значений. На множестве* $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ *она допускает выделение* n *однозначных ветвей, каждая из которых аналитична в* G *и конформно отображает эту область на внутренность некоторого угла* D_k.

9.3. Риманова поверхность

Многозначную функцию $w = \sqrt[n]{z}$ можно определить на некотором множестве более сложного устройства так, чтобы она стала однозначной. Для этого рассмотрим вместо G n идентичных ему множеств G_k ("листов"), воспринимаемых как образы соответствующих областей D_k при отображении $z = w^n$. Пусть Γ_k^+ и Γ_k^- – верхний и нижний берега разреза по $\mathbf{R}^+$ соответственно. Соединим эти листы в одну поверхность следующим образом: нижний берег G_1 "склеим" с верхним берегом G_2, нижний берег G_2 "склеим" с верхним берегом G_3 и так далее. При этом отождествляются лучи Γ_k^- и Γ_{k+1}^+, $k = 1, \dots, n-1$. Нижний берег последнего, n-го листа "склеим" с верхним берегом первого.

Полученная конструкция называется *римановой поверхностью* функции $w = \sqrt[n]{z}$. Обозначим ее через $\mathcal{R}$.

Отображение $w : \mathcal{R} \to \overline{\mathbf{C}}$ взаимно однозначно, причем точки $z = 0$ и $z = \infty$, общие для всех листов, переходят в $w = 0$ и $w = \infty$ соответственно. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является непрерывной на $\mathcal{R}$. При этом каждый лист $\mathcal{R}$ соответствует очередной регулярной однозначной ветви функции $w = \sqrt[n]{z}$.

Некоторая точка z_0 называется *точкой ветвления* многозначной функции $w = f(z)$, если не существует охватывающего данную точку замкнутого контура, принадлежащего только одному листу римановой поверхности этой функции.

В окрестности точки ветвления невозможно выделение регулярных однозначных ветвей многозначной функции.

Например, точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $w = \sqrt[n]{z}$.

9.4. Примеры

1) Допускает ли выделение регулярных однозначных ветвей функция $F(z)$ в окрестности указанной точки?

a) $F(z) = \sqrt[3]{2z - 3i}$; $z_1 = 0$; $z_2 = \dfrac{3}{2}\, i$;

b) $F(z) = \sqrt{1 - \sqrt{z}}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 1$.

▷ $a)$ В окрестности точки $z_1 = 0$ можно выделить три регулярные однозначные ветви данной функции.

Точка $z_2 = \dfrac{3}{2}\,i$ является точкой ветвления $F(z)$, поэтому выделение регулярных однозначных ветвей в ее окрестности невозможно.

$b)$ В окрестности точки $z_1 = 0$ невозможно выделение регулярных однозначных ветвей, так как это точка ветвления данной функции.

В окрестности точки $z_2 = 1$ существуют две регулярные ветви функции $G(z) = \sqrt{z}$, причем $g_1(1) = 1$, $g_2(1) = -1$. Точка $z_2 = 1$ является точкой ветвления только в случае первой ветви, т.е. для функции $F(z) = \sqrt{1 - g_1(z)}$, так что лишь в случае $F(z) = \sqrt{1 - g_2(z)}$ можно выделить однозначные ветви в окрестности $z_2 = 1$ ◁

2) Выделить регулярную ветвь $f(z)$ функции $F(z) = \sqrt[3]{z}$, задаваемую условием $f(i) = -i$ и найти значение $f(-8)$.

▷ $F(z) = \sqrt[3]{|z|}\; e^{i\,\frac{\arg z + 2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, поэтому $F(i) = e^{i\,\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)} = -i = e^{i\,\frac{3\pi}{2}}$, откуда $k = 2$. Следовательно, $f(z) = \sqrt[3]{|z|}\; e^{i\,\frac{\arg z + 4\pi}{3}}$, значит,

$$f(-8) = \sqrt[3]{8}\; e^{i\,\frac{\pi + 4\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \qquad ◁$$

3) Найти функцию, отображающую на верхнюю полуплоскость

$a)$ внутренность угла $\left\{\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{7\pi}{12}\right\}$;

$b)$ верхний единичный полукруг $\{|z| < 1\} \cap \{\mathrm{Im}\; z > 0\}$;

$c)$ плоскость с разрезом по отрезку $[-i;\ i\,]$;

$d)$ верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку $[\,0;\ ih\,]$, $h > 0$;

$e)$ "луночку" $\{|z| < 1\} \cap \{|z - i| < 1\}$.

▷ $a)$ Совершим поворот данной конфигурации на угол $\dfrac{\pi}{3}$ по часовой стрелке: $\zeta = e^{-\frac{\pi}{3}i} \cdot z$. Поскольку величина угла составляет $\dfrac{\pi}{4}$, решение получается после преобразования $w = \zeta^4$, т. е. $w = e^{-\frac{4\pi}{3}i} \cdot z^4 = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2} \cdot z^4$. ◁

▷ $b)$ Сделаем дробно-линейное преобразование $\zeta = L(z)$, при котором $\zeta(-1) = 0$, $\zeta(1) = \infty$. Последние равенства гарантируют, что обе части границы исходного множества (полуокружность и отрезок) перейдут в лучи с началом в точке $\zeta = 0$. Для того, чтобы один из этих лучей (например, образ отрезка) совместился с вещественной положительной полуосью плоскости ζ, потребуем $\zeta(0) = 1$. Тогда в результате преобразования $\zeta = \dfrac{z+1}{1-z}$ получается первый квадрант, так как в силу конформности образы частей исходной границы ортогональны.

Теперь остается совершить преобразование $w = \zeta^2$, так что $w = \left(\dfrac{z+1}{1-z}\right)^2$ ◁

▷ $c)$ Сначала с помощью дробно-линейной функции $\zeta = L(z)$ отобразим данное множество на плоскость с разрезом по полуоси $\mathbf{R}^+$. Для этого достаточно тройку точек $(-i;\ 0;\ i\,)$ перевести в тройку $(\,0;\ 1;\ \infty)$, отсюда $\zeta = \dfrac{z+i}{i-z}$.

Завершается решение задачи применением преобразования $w=\sqrt{\zeta}$. Итак, окончательно

$$w=\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}\qquad\triangleleft$$

$\triangleright$ $d)$ Задача решается с помощью последовательности отображений: $\zeta=z^2$, $s=\zeta+h^2$, $w=\sqrt{s}$.

Таким образом, результирующее преобразование имеет вид: $w=\sqrt{z^2+h^2}$ $\triangleleft$

$\triangleright$ $e)$ Дробно-линейная функция $\zeta=L(z)$, удовлетворяющая условию $(z_2;\ 0;\ z_1)\to(0;\ 1;\ \infty)$, переводит данную область во внутренность некоторого угла. Остается развернуть этот угол до полуплоскости с помощью функции $w=\zeta^p$, где показатель p требуется определить.

Точки $z_{1,2}=\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$ можно найти как точки пересечения окружностей $|z|=1$ и $|z-i|=1$. Тогда

$$\zeta=\frac{z-z_2}{z-z_1}\cdot\frac{z_1}{z_2}=\frac{2z+(\sqrt{3}-i)}{2z-(\sqrt{3}+i)}\cdot\left(-\frac{1}{2}(1+3i)\right)=\frac{2z+(\sqrt{3}-i)}{2z-(\sqrt{3}+i)}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

В силу конформности отображения $\zeta=L(z)$ угол φ, под которым пересекаются окружности в плоскости (z), равен углу между лучами в плоскости ζ, т.е. $\varphi=\arg\zeta(i)$.

$$\zeta(i)=\frac{\sqrt{3}+i}{i-\sqrt{3}}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

следовательно, $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Отсюда $p=\dfrac{3}{2}$, поэтому $w=\zeta^{3/2}$.

Итоговая формула преобразования такова:

$$w=\left(\sqrt{\frac{2z+(\sqrt{3}-i)}{2z-(\sqrt{3}+i)}}\right)^3\cdot e^{i\frac{3}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}}=\left(\sqrt{\frac{2z+(\sqrt{3}-i)}{2z-(\sqrt{3}+i)}}\right)^3\qquad\triangleleft$$

9.5. Вопросы и задачи

1. Найдите образ множества $D=\left\{\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}\cap\{|z|>2\}$, при отображении $w=f(z)$, если

   $a)$ $f(z)=z^2$; $b)$ $f(z)=z^3$; $c)$ $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$.

2. Найдите образы прямых $a)$ $\operatorname{Re} z=c$; $b)$ $\operatorname{Im} z=c$ при отображении $w=z^2$.

3. Выясните, допускает ли выделение регулярных однозначных ветвей функция $F(z)$ в окрестности указанной точки:

   $a)$ $F(z)=\sqrt[5]{z+1-2i}$; $z_1=0$; $z_2=-1+2i$; $z_3=\infty$;

   $b)$ $F(z)=\sqrt{i+\sqrt[4]{z}}$; $z_0=1$; $z_2=1$; $z_3=-1$.

4. Выделите однозначную регулярную ветвь $f(z)$ функции $w = \sqrt[4]{z}$, задаваемую условием $f(-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, и найдите образ множества $\{|z| < 4,\ 0 < \arg z < \pi\}$ при отображении $f(z)$.
5. Отобразите конформно на верхнюю полуплоскость
   $a)$ внешность отрезка $[0;\,1]$;
   $b)$ внешность множества $(-\infty;-a] \cup [a;+\infty)$ $(a \in \mathbf{R})$;
   $c)$ внешность множества $\left\{|z| = 1,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$;
   $d)$ четверть круга $\left\{|z| < 2,\ \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi\right\}$;
   $e)$ множество $\{|z| < 1\} \cap \{|z-i| > 1\}$.

§10. Показательная и логарифмическая функции

10.1. Показательная функция

Показательная функция имеет вид $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Утверждение 1. *Показательная функция аналитична в* $\mathbf{C}$ *и конформно отображает внутренность любой полосы* $D_k = \{2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$ *на плоскость с разрезом* $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$.

10.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция имеет вид

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Она обратна к показательной функции $z = e^w$.

Утверждение 2. *Функция* $w = \operatorname{Ln} z$ *в каждой точке* $\mathbf{C}$, *кроме* $z = 0$, *имеет бесконечно много значений. На множестве* $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ *она допускает выделение однозначных ветвей, каждая из которых аналитична в* G *и конформно отображает эту область на внутренность некоторой полосы* D_k.

Однозначная регулярная ветвь логарифмической функции при $k = 0$ называется *главной* ветвью и обозначается $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

10.3. Риманова поверхность

Рассмотрим плоскость $\mathbf{C}$ как совокупность множеств вида

$$\tilde{D}_k = \{w :\ 2\pi k < \arg w \le 2\pi(k+1)\}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

внутренность каждого из которых отображается функцией $z = e^w$ на множество $G_k = G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, а граница переходит в луч $\Gamma_k = \Gamma = \{z :\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$. Обозначим $\gamma_k = \{w :\ \operatorname{Im} w = 2\pi k\}$. Показательная функция переводит границы γ_k и γ_{k+1} полосы D_k соответственно на верхний берег Γ_k^+ и нижний берег Γ_k^- одного и того же разреза по вещественной положительной полупрямой плоскости (z).

Риманова поверхность $\mathcal{R}$ функции $w = \operatorname{Ln} z$ получается из бесконечного количества листов G_k в результате "склеивания"их границ Γ_k^- и Γ_{k+1}^+ при всех $k \in \mathbf{Z}$.

Отображение $w :\ \mathcal{R} \to \mathbf{C}$ взаимно однозначно и непрерывно, при этом каждый лист римановой поверхности соответствует очередной регулярной однозначной ветви логарифма. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $w = \operatorname{Ln} z$.

10.4. Примеры

1) Найти образ при отображении $w = e^z$ следующих множеств:
$a)$ полосы $\{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;
$b)$ полуполосы $\left\{z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$;
$c)$ прямоугольника $\{z:\ c < \operatorname{Re} z < d,\ a < \operatorname{Im} z < b\}$, где $0 < b - a < 2\pi$.

$\triangleright$ *Указание.* Результат получается на основе рассмотрения образа прямоугольной сетки на полосе $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ $\triangleleft$

2) Найти образ множества $\{z:\ |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении той однозначной ветвью $f(z)$ функции $F(z) = \operatorname{Ln} z$, для которой $f(ei) = 1 - \dfrac{3\pi}{2}\, i$.

$\triangleright$ Так как

$$\operatorname{Ln}(ei) = \ln e + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

условие задачи выполнено при $k = -1$. Поэтому данная область отображается на подмножество полосы D_{-1}.

Имея в виду, что логарифмическая функция обратна к показательной, получаем ответ: $\{\operatorname{Re} z > 0;\ -2\pi < \operatorname{Im} z < -\pi\}$ $\triangleleft$

10.5. Вопросы и задачи

1. Найдите образ множества D при отображении $w = e^z$, если
   $a)$ $D = \{\alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$;
   $b)$ $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z < 0\}$;
   $c)$ $D = \{\pi < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$;
   $d)$ D – прямая $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$.

2. Найдите функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость множество D, если
   $a)$ $D = \left\{0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\right\} \setminus \left\{\operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{4},\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}$;
   $b)$ $D = \{\operatorname{Re} z > 2,\quad 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$;
   $c)$ $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\} \setminus \left\{0 < \operatorname{Re} z \le \dfrac{\pi}{2},\quad \operatorname{Im} z = 0\right\}$;
   $d)$ $D = \{|z| < 2\} \setminus \{|z - i| < 1\}$.
   $e)$ D – внешность множества $\{|z| < 1\} \cup \{|z - 3i| < 2\}$.

3. Найдите образ множества D при отображении $w = \ln z$, если
   $a)$ $D = \{\alpha < \arg z < \beta\}$, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$;
   $b)$ $D = \{0 < \arg z < \pi,\ |z| > 1\}$;
   $c)$ $D = \{\pi < \arg z < 2\pi,\ |z| < 2\}$;
   $d)$ D – кольцо $\{e < |z| < e^2\}$ с разрезом по вещественному интервалу $(e; e^2)$.

4. Найдите образ множества $\{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении той однозначной ветвью $f(z)$ функции $F(z) = \operatorname{Ln} z$, для которой $f\left(\dfrac{i}{2}\right) = -\ln 2 + \dfrac{5\pi}{2}\, i$.

§11. Функция Жуковского

11.1. Определение и основные свойства

Функция Жуковского имеет вид $\quad w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right).$

Максимальными областями однолистности функции Жуковского являются $D_1 = \{|z| > 1\}$ и $D_2 = \{|z| < 1\}$, а также $D_3 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ и $D_4 = \{\operatorname{Im} z < 0\}$.

Утверждение 1. *Функция Жуковского $w = G(z)$ аналитична в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и осуществляет конформное отображение любой из областей D_k, $k = 1, \dots 4$.*

10.2. Отображения областей D_k

Утверждение 2. *Любую из областей D_1 либо D_2 (т.е. внешность либо внутренность единичного круга соответственно) функция Жуковского конформно отображает на внешность отрезка $[-1\ ;\ 1]$ плоскости (w). При этом образом окружности $r = 1$ является дважды проходимый отрезок $[-1\ ;\ 1]$.*

Утверждение 3. *Функция Жуковского конформно отображает верхнюю полуплоскость $D_3 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на внешность лучей $\mathbf{C} \setminus (I^- \cup I^+)$, причем образом границы $\operatorname{Im} z = 0$ являются эти лучи, проходимые дважды.*

Тот же образ имеет и нижняя полуплоскость D_4.

11.3. Примеры

1) Найти образ области $D = \{|z| < 1\ , \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = G(z)$.

$\triangleright$ Полуокружность γ_1 функцией Жуковского отображается на отрезок $\Gamma_1 = \{-1 \le \operatorname{Re} w \le 1\}$ вещественной прямой; радиус $\gamma_2 = \{0 < \operatorname{Re} z \le 1\}$ – на луч $\Gamma_2 = I^+$, а радиус $\gamma_3 = \{-1 \le \operatorname{Re} z < 0\}$ – на луч $\Gamma_3 = I^-$. Учитывая сохранение ориентации границы относительно области при конформном отображении, имеем $G(D) = \{\operatorname{Im} w < 0\}$ $\triangleleft$

2) Отобразить множество $\Big\{z : |z| < 1\Big\} \setminus \Big\{\dfrac{1}{2} \le \operatorname{Re} z < 1\ ,\ \operatorname{Im} z = 0\Big\}$ на верхнюю полуплоскость.

$\triangleright$ Задачу решает следующая последовательность преобразований.

а) $\zeta = G(z)$, здесь $\zeta(1) = 1$, $\zeta\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$;

б) $s = L(\zeta)$, где дробно-линейная функция L определяется отображением тройки $\left(-1\ ; 0\ ; \dfrac{5}{4}\right) \longrightarrow (0\ ; 1\ ; \infty)$ и имеет вид $s = -\dfrac{5\,(\zeta + 1)}{4\zeta - 5}$;

в) $w = \sqrt{s}$.

Результирующее отображение таково: $\quad w = \sqrt{-\dfrac{5\,(z^2 + 2z + 1)}{2\,(2z^2 - 5z + 2)}}$ $\quad\triangleleft$

3) Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\ , \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

$\triangleright$ Так как

$$w = \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = G(iz)\,,$$

совершаем последовательность преобразований:

а) $\zeta = iz$ – поворот на угол $\dfrac{\pi}{2}$;

б) $s = e^{\zeta}$ – результатом является верхний единичный полукруг;

в) $w = G(s)$ – в итоге получается нижняя полуплоскость $\lhd$

11.4. Вопросы и задачи

1. Найдите образ множества D при отображении функцией Жуковского, если

   $a)$ $D = \{|z| = 1\}$; $b)$ $D = \{|z| = 2\}$; $c)$ $D = \left\{|z| = \dfrac{1}{2}\right\}$;

   $d)$ $D = \{\mathrm{Im}\ z = 0\}$; $e)$ $D = \{\mathrm{Re}\ z = 0\}$.

2. Найдите функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость множество D, если

   $a)$ D – множество $\{\mathrm{Im}\ z > 0\} \cap \{|z| < 1\}$ с разрезом $\left\{0 < \mathrm{Im}\ z \le \dfrac{1}{2}, \mathrm{Re}\ z = 0\right\}$;

   $b)$ D – множество $\{\mathrm{Im}\ z > 0\} \cap \{|z| > 1\}$ с разрезом $\{1 \le \mathrm{Im}\ z \le 2, \mathrm{Re}\ z = 0\}$;

   $c)$ D – множество $\{|z| < 1\}$ с разрезами $\left\{\dfrac{1}{2} \le |\mathrm{Re}\ z| < 1; \mathrm{Im}\ z = 0\right\}$;

   $d)$ $D = \left\{0 < \mathrm{Im}\ z < \dfrac{\pi}{2}\right\} \setminus \left\{\mathrm{Im}\ z = \dfrac{\pi}{4}, \mathrm{Re}\ z > 0\right\}$.

3. Найдите образ множества D при отображении $w = f(z)$, если

   $a)$ $D = \{0 < \mathrm{Im}\, z < \pi, \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $f(z) = \mathrm{ch}\ z$;

   $b)$ $D = \left\{-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\, z < \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\, z > 0\right\}$, $f(z) = \sin\ z$.

Глава 3
Интегрирование функций комплексной переменной

§12. Определение и основные свойства интеграла

12.1. Понятие интеграла

Пусть γ – кусочно-гладкая кривая без особых точек на комплексной плоскости:
$$z(t) = x(t) + i\,y(t)\,, \quad t \in [\alpha,\, \beta]\,.$$
с начальной точкой $A = z(\alpha)$ и конечной – $B = z(\beta)$.

Теорема 12.1. *Пусть $f(z)$ – кусочно-непрерывная на кривой γ функция. Тогда существуют следующие интегралы, причем выполнены равенства*
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy \,+\, i\int_\gamma v\,dx + u\,dy\,, \tag{1}$$
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt\,, \tag{2}$$
$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_\gamma u\,ds + i\int_\gamma v\,ds\,, \tag{3}$$
$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,|z'(t)|\,dt\,. \tag{4}$$

12.2. Свойства интегралов

Теорема 12.2. *Имеют место следующие свойства интегралов:*

а) $\displaystyle\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz\,;$

б) интеграл первого рода (3, 4) не зависит от направления движения по γ; интегрирование в формуле (4) всегда идет от меньшего значения параметра t к большему;

в) пусть γ_1 и γ_2 – части, составляющие кривую γ без наложения, тогда
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,,$$
причем интегралы в правой и левой частях равенства существуют одновременно;

г) пусть f и g – интегрируемые на γ функции, $a\,,b \in \mathbf{C}$ – произвольные числа, тогда
$$\int_\gamma (a\,f(z) + b\,g(z))\;dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma g(z)\,dz\,;$$

д) пусть f интегрируема на γ, тогда функция $|f|$ также интегрируема на γ, причем
$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,.$$

12.3. Примеры

Вычислить интеграл $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz\,,$ если

a) $f(z) = \operatorname{Im} z\,,$ γ – часть параболы с вертикальной осью, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+2i$;

b) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}\,,$ γ – отрицательно ориентированная граница верхнего единичного полукруга;

c) $f(z) = (z-a)^n\,,$ $n\in\mathbf{Z},$ $\gamma=\gamma_r: |z-a|=r$ – положительно ориентированная окружность;

d) $f(z) = \left(\sqrt[4]{z}\right)^3+1\,,$ где берется та однозначная ветвь многозначной функции, для которой $\sqrt[4]{1}=i;$ γ – часть окружности $\{|z|=4,\ \operatorname{Re} z\ge 0\},$ от точки $z=-4i$ до точки $z=4i$.

$\triangleright$ *a*) Выписав уравнение параболы $y=a\,x^2$, проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;2)\,,$ получим параметризацию кривой γ: $x=t\,,$ $y=2t^2\,,$ т.е. $z=t+2i\,t^2\,,$ где $t\in[0\,;1]\,.$

Согласно (1) имеем

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\,dz = \int_0^1 y\,dz = \int_0^1 2t^2\,(1+4t\,i)\,dt = \frac{2}{3}\,t^3+2t^4\,i\Big|_0^1 = \frac{2}{3}+2\,i\,.$$

b) В силу аддитивности интеграла имеем сумму интегралов по отрезку действительной прямой γ_1 и полуокружности γ_2. Движение по γ происходит по часовой стрелке.

На γ_1 $z=x,\ x\in[-1\,;\,1],\ \overline{z}=x,$ поэтому

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_1^{-1} dx = -2\,.$$

Кривая γ_2 задается в виде $z=e^{it}$, где $t\in[0\,;\,\pi]$. Поскольку $\overline{z}=e^{-it}$, имеем $f(z)=e^{-2ti},$ $dz=i\,e^{it}\,dt,$ поэтому

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_\pi^0 i\,e^{-it}\,dt = \int_\pi^0 i\,(\cos t - i\,\sin t)\,dt = (i\,\sin t-\cos t)\Big|_\pi^0 = -2\,.$$

Ответ дает сумма $I_1+I_2=-2-2=-4\,.$

c) Окружность γ_r имеет параметризацию $z=a+r\,e^{it}$, где $t\in[0;2\pi]$. Тогда $dz=i\,r\,e^{it}\,dt,$ значит,

$$\int_{\gamma_r}(z-a)^n\,dz = \int_0^{2\pi} i\,r^{n+1}\,e^{i(n+1)t}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,r^{n+1}\,(\cos(n+1)t+i\,\sin(n+1)t)\,dt =$$

$$= \frac{i\,r^{n+1}}{n+1}\,(\sin(n+1)t-i\,\cos(n+1)t)\,\Big|_0^{2\pi} = 0\,, \quad \text{если} \quad n\ne -1\,.$$

Для $n=-1$ получаем

$$\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi}\frac{i\,r\,e^{it}}{r\,e^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\,.$$

Заметим, что результат не зависит ни от положения центра, ни от радиуса окружности

$d)$ Найдем указанную однозначную ветвь корня четвертой степени. Легко проверить, что в равенстве $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|}\ e^{\frac{i}{4}(\arg z + 2\pi k)}$ следует взять $k = 1$, чтобы обеспечить условие $\sqrt[4]{1} = i$. Если $z \in \gamma$, то $z = 4\,e^{it}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно,

$$f(z) = \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{i}{4}(t+2\pi)}\right)^3 + 1 = 2\sqrt{2}\ i^3\ e^{i\,\frac{3t}{4}} + 1\,.$$

Поэтому

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4i\left(-2\sqrt{2}\,i\,e^{i\,\frac{3t}{4}} + 1\right) e^{it}\,dt =$$

$$= 8\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\frac{7t}{4} + i\,\sin\frac{7t}{4}\right)dt + 4i\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos t + i\,\sin t)\,dt =$$

$$= 16\,\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos\frac{7t}{4}\,dt + 8i\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{64}{7}\,\sqrt{2}\,\sin\frac{7\pi}{8} \qquad \lhd$$

12.4. Вопросы и задачи

1. Сформулируйте и докажите свойства в) – д) из теоремы 12.2 применительно к интегралу первого рода $\int_\gamma f(z)\,|dz|$.

2. Пусть γ – кусочно гладкая кривая с началом в точке $z = a$ и с концом в $z = b$. Найдите, чему равны значения интегралов $\int_\gamma dz$ и $\int_\gamma |dz|$.

3. Вычислите $\int_\gamma f(z)\,dz$, если

   $a)$ $f(z) = z\ \mathrm{Re}\ z$, γ – отрезок прямой от точки $z = 0$ до точки $z = 2 + i$;

   $b)$ $f(z) = z\ \mathrm{Re}\ z$, γ – часть параболы $x = 2y^2$ от точки $z = 0$ до точки $z = 2+i$;

   $c)$ $f(z) = (z - a)^n$, $n \in \mathbf{Z}$, $\gamma = \{|z - a| = r,\ -\pi \le \arg(z - a) \le 0\}$;

   $d)$ $f(z)$ – та однозначная ветвь $\mathrm{Ln}\,z$, для которой $\mathrm{Ln}\,i = \frac{5}{2}\,\pi i$; $\gamma = \{|z| = 2,\ \mathrm{Im}\ z \ge 0\}$.

4. Вычислите $\int_\gamma f(z)\,|dz|$, если

   $a)$ $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$, γ – граница верхнего единичного полукруга;

   $b)$ $f(z)$ – та однозначная ветвь $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{i} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$; γ – граница сектора $\left\{|z| = 2,\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg\ z \le \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

5. Пусть $f(z)$ непрерывная функция на $\gamma = \{|z| = R, \ \mathrm{Im}\, z \ge 0\}$, $|f(z)| \le M$ при $z \in \gamma$. Докажите, что
$$\left| \int_\gamma f(z)\, e^{iz}\, dz \right| \le \pi\, M\, R.$$
Верно ли это неравенство, если $\gamma = \{|z| = R, \ \mathrm{Im}\, z \le 0\}$?

6. * Докажите, что в условиях предыдущей задачи справедлива оценка
$$\left| \int_\gamma f(z)\, e^{iz}\, dz \right| < \pi\, M.$$
Указание. Воспользуйтесь неравенством $\sin\varphi \ge \dfrac{2}{\pi}\varphi$, где $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

§13. Интегральная теорема Коши

13.1. Случай односвязной области

Теорема 13.1 (Коши). *Пусть D – односвязная область, $f(z)$ – однозначная функция, $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$ справедливо равенство*
$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

Следствие 1. *Пусть D – односвязная область с границей ∂D, $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$. Тогда*
$$\oint_{\partial D} f(z)\, dz = 0\,.$$

Следствие 2. *Пусть D – односвязная область, $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Тогда для любых точек $z_1, \ z_2 \in D$ интеграл $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$ не зависит от пути интегрирования (находящегося в D).*

13.2. Случай составного контура

Теорема 13.2 (теорема Коши для составного контура). *Пусть D – n-связная область с полной границей ∂D, которая состоит из внешней границы – контура γ и замкнутых контуров $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, составляющих внутренние границы. Если $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$, то*
$$\oint_{\partial D} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = 0\,,$$
причем интегрирование совершается в положительном направлении (т.е. область при движении по границе остается слева).

Следствие. *В условиях теоремы 13.2*
$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n-1} \oint_{\gamma_k} f(z)\, dz\,,$$

где интегрирование всюду идет в одном направлении (например, против часовой стрелки).

13.3. Примеры

1) Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} (z-a)^n\, dz\,,\quad n \in \mathbf{Z}$, где γ – произвольный замкнутый контур, не проходящий через точку $z = a$.

$\triangleright$ а) Пусть точка $a \in ext\,\gamma$. Тогда $f(z) = (z-a)^n \in \mathcal{A}(\overline{int\,\gamma})$, поэтому по теореме 13.1 получаем $I = 0$.

б) Пусть $a \in int\,\gamma$. Тогда существует окружность достаточно малого радиуса γ_r : $|z-a| = r$, которая целиком содержится внутри γ (рис. 53). Используя следствие из теоремы 13.2 и результат примера *c*) п. 12.3, получаем

$$I = \oint_{\gamma} (z-a)^n\, dz = \oint_{\gamma_r} (z-a)^n\, dz = \begin{cases} 0\,, & n \neq -1\,, \\ 2\pi i\,, & n = -1 \end{cases} \qquad \triangleleft$$

2) Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} \dfrac{dz}{2z+i}\,,$ где γ – эллипс $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\,,$ проходимый по часовой стрелке.

$\triangleright$ Заметим, что $z = -\dfrac{i}{2} \in int\gamma$. Поэтому, учитывая направление обхода, в соответствии с результатом примера 1) п.б) имеем

$$I = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z + \frac{i}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i = -\pi i \qquad \triangleleft$$

3) Вычислить интеграл $I = \int_{\gamma} z\, e^{\sin^2 z}\, dz\,,$ где γ – произвольная кривая, соединяющая точки $z = -i$ и $z = i$.

$\triangleright$ Так как $f(z) = z\, e^{\sin^2 z} \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$, то I не зависит от выбора пути интегрирования, так что в качестве последнего можно взять отрезок мнимой оси, соединяющий точки $z = -i$ и $z = i$. Итак, $z = it,\ t \in [-1;1]$, поэтому

$$I = \int_{-1}^{1} it \cdot e^{\sin^2(it)}\, i\, dt = -\int_{-1}^{1} t \cdot e^{-\operatorname{sh}^2 t}\, dt = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции $\qquad \triangleleft$

13.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите интеграл $I = \oint_{\gamma} f(z)\, dz,$ если

   a) $f(z) = \dfrac{1}{2iz+5}\,,$ где $\gamma : |x| + |y| = 4\,;$

   b) $f(z) = \dfrac{1}{(2iz+5)^3}\,,$ где $\gamma : |x| + |y| = 4\,;$

   c) $f(z) = \dfrac{1}{2iz+5}\,,$ где $\gamma : |x| + |y| = 1$

   (все кривые ориентированы против часовой стрелки).

2. Вычислите $\displaystyle\int_\gamma e^{\sin z}\cos z\,dz$, где $\gamma = \{|z| = 2,\ \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$, интегрирование идет от $z = -2$ до $z = 2$.

3. Пусть $D = \{z :\ 1 < |z| < 2\}$, функция $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$, причем $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 2i$. Чему равно значение интеграла $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$?

4. Пусть D – односвязная область, функция $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$, $\gamma \subset D$ – замкнутый контур. Чему равно значение интеграла $\displaystyle\oint_\gamma \overline{f(z)}\,d\overline{z}$?

5. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D за исключением точки z_0, где существует предел $\displaystyle\lim_{z\to z_0}(z - z_0)\,f(z) = 0$. Докажите, что для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$, $z_0 \notin \gamma$, справедливо равенство $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$

§14. Интегральная формула Коши и ее следствия

14.1. Интегральная формула Коши

Теорема 14.1. *Пусть $f(z)$ – функция однозначная и аналитическая в области D, γ – произвольный замкнутый контур, $z_0 \in int\,\gamma \subset D$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,. \tag{1}$$

Равенство (1) называется *интегральной формулой Коши.*

Другой вариант интегральной формулы Коши дает

Теорема 14.2. *Пусть D – n-связная область с границей $\partial D = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \gamma_{n-1}$, функция $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$. Тогда в любой точке $z_0 \in D$*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,,$$

где интеграл берется по положительно ориентированной полной границе ∂D.

Следствие (формула среднего значения). *Пусть $\gamma_R :\ |z - z_0| = R$ – окружность, которая вместе с внутренностью расположена в области аналитичности функции $f(z)$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + R\,e^{i\varphi}\right)d\varphi\,.$$

14.2. Примеры

Интегральная формула Коши (1) может быть использована для вычисления интегралов.

1) Вычислить интеграл $\displaystyle I = \oint_\gamma \frac{dz}{z\,(z^2 - 1)}$ при различных положениях контура γ (γ не проходит через точки $z = 0,\ 1,\ -1$).

$\triangleright$ а) Пусть $z_0 = 0 \in int\,\gamma$, а точки $z = 1,\, -1 \in ext\,\gamma$. Тогда выбирая $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, по формуле (1) имеем

$$I_1 = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = -2\pi i\,.$$

б) Пусть $z_0 = 1 \in int\,\gamma$, а точки $z = 0,\, -1 \in ext\,\gamma$. Тогда при $f(z) = \dfrac{1}{z\,(z+1)}$ по формуле (1) получаем

$$I_2 = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(1) = \pi i\,.$$

в) Аналогично для случая, когда $z_0 = -1 \in int\,\gamma$, а точки $z = 0,\, 1$ находятся вне γ, имеем $f(z) = \dfrac{1}{z\,(z-1)}$ и

$$I_3 = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\, f(-1) = \pi i\,.$$

г) Рассмотрим ситуацию, когда $z = 0,\, 1 \in int\,\gamma$, а точка $z = -1 \in ext\,\gamma$. Тогда для вычисления интеграла используем теорему Коши для составного контура (п. 13.2) и результаты п.п. а), б) настоящей задачи. Имеем

$$I = \oint_\gamma \frac{dz}{z\,(z^2-1)} = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z\,(z^2-1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z\,(z^2-1)} = I_1 + I_2 = -\pi i\,.$$

Аналогично можно рассмотреть оставшиеся случаи. $\triangleleft$

2) Вычислить интеграл $\quad I = \displaystyle\oint_\gamma \frac{\sin z}{2z^2 + \pi z}\,dz, \quad$ где $\gamma : \left|z + \dfrac{\pi}{2}\right| = 1.$

$\triangleright$ Переписав данный интеграл в виде $\quad I = \displaystyle\oint_\gamma \frac{\frac{\sin z}{2z}}{z + \frac{\pi}{2}}\,dz, \quad$ применим формулу (1), имея в виду, что $\quad z_0 = -\dfrac{\pi}{2}\,, \quad f(z) = \dfrac{\sin z}{2z}\,,$ причем $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{int\,\gamma})\,.$ Поэтому

$$I = \oint_\gamma \frac{\sin z}{2z^2 + \pi z}\,dz = 2\pi i\, f(z_0) = \frac{2\pi i}{\pi} = 2i \qquad \triangleleft$$

14.3. Принцип максимума модуля аналитической функции

Теорема 14.2 *Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и не является постоянной в области D. Тогда максимальное значение $|f(z)|$ не может достигаться во внутренней точке D.*

Следствие 1. *Если D – ограниченная область, $f(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, то* $\max\limits_{D} |f(z)| = \max\limits_{\partial D} |f(z)|\,.$

Следствие 2. *Пусть D – ограниченная область, $f_1\,, f_2 \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ и $f_1(z) = f_2(z)$ во всех точках $z \in \partial D$. Тогда $f_1(z) \equiv f_2(z)$ на D.*

Следствие 3. *Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ не является постоянной в области D и $f(z) \neq 0$. Тогда минимальное значение $|f(z)|$ не может достигаться во внутренней точке области D.*

14.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+2i\,z}\,dz,$ где γ – замкнутый контур, проходимый по часовой стрелке, если

   $a)$ $z=0\in int\,\gamma\,,\ z=-2i\in ext\,\gamma;$ $b)$ $z=-2i\in int\,\gamma\,,\ z=0\in ext\,\gamma;$

   $c)$ $z=0\in ext\,\gamma\,,\ z=-2i\in ext\,\gamma;$ $d)$ $z=0\in int\,\gamma\,,\ z=-2i\in int\,\gamma.$

2. Вычислите $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos\pi z}{2+z-z^2}\,dz,$ где γ – замкнутый контур, проходимый против часовой стрелки, если

   $a)$ $z=-1\in int\,\gamma\,,\ z=2\in ext\,\gamma;$ $b)$ $z=2\in int\,\gamma\,,\ z=-1\in ext\,\gamma;$

   $c)$ $z=-1\in ext\,\gamma\,,\ z=2\in ext\,\gamma;$ $d)$ $z=-1\in int\,\gamma\,,\ z=2\in int\,\gamma.$

3. Вычислите $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{(e^z+1)(2iz+\pi)},$ где γ – проходимый против часовой стрелки замкнутый контур:

   $a)$ $\gamma:\ |z|=1\,;$ $b)$ $\gamma:\ |z|=3\,.$

4. Пусть $D=\{z:\ |z|<10\}$, функция $f(z)\in\mathcal{A}(D)$, причем $f(2i)=2i.$

   Найдите $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-2i}\,dz\,,$ где $C\ :\ |z+1|=5\,.$

5. Вычислив интеграл $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)(z-a^{-1})},$ где $0<a<1,$ докажите равенство

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\,\cos\varphi+a^2}=\frac{2\pi}{1-a^2}\,.$$

6. Докажите, что аналитическая и ограниченная в $\mathbf{C}$ функция $f(z)$ является постоянной (теорема Лиувилля).

   Указание. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz,$ где $|a|,\,|b|<R,$ $a\neq b,$ и воспользуйтесь оценкой этого интеграла при $R\to\infty.$

7. Найдите аналитическую в круге $\{|z|<2\}$ функцию $f(z),$ если известно, что она принимает максимальное по модулю значение при $z=i,$ причем $|f(i)|=3\,,$ $\arg\,f(i)=\pi.$

8. Приведите пример, показывающий существенность требования $f(z)\neq 0$ в утверждении о минимуме модуля аналитической функции (следствие 3 п. 14.3).

9. Пусть D – ограниченная область с границей $\partial D,$ $f(z)\in\mathcal{A}(D)\cap C(\overline{D})$ не является постоянной в области $D,$ но $|f(z)|\equiv const$ при $z\in\partial D.$ Докажите, что существует хотя бы одна точка $z\in D,$ где $f(z)=0.$

§15. Существование производных всех порядков у аналитической функции

15.1. Интеграл типа Коши

Определение. Пусть γ – кусочно-гладкая кривая, f – однозначная функция, непрерывная на γ. Интеграл

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \notin \gamma \tag{1}$$

называется *интегралом типа Коши.*

Теорема 15.1. *Пусть* $f \in C(\gamma)$. *Тогда* $g \in \mathcal{A}(C \setminus \gamma)$, *причем для любого* $n \in \mathbf{N}$ *существует*

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,.$$

15.2. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции

Из предыдущей теоремы вытекает следующий замечательный результат.

Теорема 15.2. *Функция* $f(z)$, *аналитическая в области* D, *имеет в этой области производную любого порядка, причем*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,, \tag{2}$$

где γ *– произвольный замкнутый контур, для которого* $z \in int\,\gamma \subset D$.

Следствие (неравенство Коши для производных).

Пусть $K_R = \{\zeta : |\zeta - z| \le R\}$, $\gamma_R = \{\zeta : |\zeta - z| = R\}$, $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{K_R})$, $M_R = \max\limits_{z \in \gamma_R} |f(z)|$. *Тогда*

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!\, M_R}{R^n}\,.$$

15.3. Теорема Лиувилля и ее следствие

Определение. Функция $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$ называется *целой.*

Теорема 15.3 (Лиувилль). *Всякая целая функция, ограниченная в* $\mathbf{C}$, *является константой.*

15.3. Примеры

1) Вычислить интеграл $\quad I = \oint_\gamma \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}\, dz\,, \quad$ если $i \in int\,\gamma$, $-i \in ext\,\gamma$.

$\triangleright$ Пусть $z_0 = i$, $\quad f(z) = \dfrac{e^z}{(z+i)^2}\,,\quad$ тогда по формуле (2)

$$I = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i\, f'(z_0) = 2\pi i\, e^z\, \frac{z+i-2}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} = \frac{\pi}{2}\, e^i\,(1-i) \qquad \triangleleft$$

2) Найти $\quad f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$, удовлетворяющую условию $|f(z)| \le e^{-|z|}\quad \forall z \in \mathbf{C}$.

$\triangleright$ Из условия задачи следует $|f(z)| \le 1 \quad \forall z \in \mathbf{C}$. Тогда по теореме Лиувилля $f(z) \equiv const$. Так как при $|z| \to \infty$ имеем $f(z) \to 0$, то $f(z) \equiv 0 \quad \triangleleft$

15.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите данный интеграл по замкнутому контуру (направление – против часовой стрелки):

   $a)\ \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2}\,dz\,;\qquad b)\ \int_{|z-i|=2} \frac{\operatorname{sh} z}{z\,(z^2+4)^2}\,dz\,;\qquad c)\ \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{1}{z}}{(z^2-1)(z+1)}\,dz\,.$

2. Вычислите $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^3}\,dz$, где γ – эллипс $4x^2+y^2=2y$, проходимый против часовой стрелки.

3. Известно, что для некоторой непрерывной функции $f(\zeta)$ и некоторой гладкой кривой γ имеет место равенство $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = z\,\sin z\,,\ \ z \notin \gamma.$ Найдите, чему равен интеграл $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,d\zeta\,.$

4. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ из следующих условий:
$$\int_{|\zeta|=5} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = 2\,\cos z\,,\ |z|<5\,;\quad f(\pi)=1.$$

5. Найдите все целые функции $f(z)$, отвечающие условию $f(z) = O(|z|^{-1})$ при $z\to\infty$.

§16. Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема Морера

16.1. Основное утверждение

Теорема 16.1 *Пусть* $f \in C(D)$ *и для всякого замкнутого контура* $\gamma \subset D$ *выполнено условие*
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0\,. \tag{1}$$
Тогда при любых $z_0\,, z \in D$ *функция*
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \tag{2}$$
является аналитической в области D, *причем* $F'(z) = f(z)$.

Следствие (теорема Морера). *Пусть* $f(z)$ *– непрерывная в области* D *функция и пусть для всякого замкнутого контура* $\gamma \subset D$ *выполнено равенство (1). Тогда* $f(z) \in \mathcal{A}(D)$.

16.2. Первообразная

Определения. Аналитическая функция $F(z)$ называется *первообразной* функции $f(z)$ в области D, если в этой области $F'(z) = f(z)$.

Множество всех первообразных функции $f(z)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции

Утверждение 1. *Если* D *– односвязная область, то функция* $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ *имеет первообразную, определяемую равенством (2).*

Утверждение 2. *$F(z)$ и $\Phi(z)$ – две первообразные для функции $f(z)$ в области D тогда и только тогда, когда $F(z) - \Phi(z) = C$ при любом $z \in D$.*

Утверждение 3. В условиях теоремы 16.1 справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(z)\,dz = \Phi(b) - \Phi(a)\,, \tag{3}$$

где $a, b \in D$, а $\Phi(z)$ – какая-то первообразная функции $f(z)$.

16.3. Примеры

Выше, в п. 5.1, 5.3 было показано, что правила дифференцирования и вид производных основных элементарных функций переносятся на комплексный случай. Соответственно сохраняется таблица первообразных. Поэтому аналогично вещественному случаю можно использовать для вычисления интегралов и формулу Ньютона-Лейбница (см. ниже пример 1), однако следует иметь в виду специфику, обусловленную неодносвязностью области (см. примеры 2, 3).

Заметим, что необходимыми условиями существования первообразной $F(z)$ для $f(z)$ в области D являются выполнение равенства (1) и аналитичность $f(z)$ (последнее вытекает из требования аналитичности $F(z)$ и теоремы 15.2).

1) Вычислить интегралы $\quad a)\ \displaystyle\int_0^1 e^{i\pi z}\,dz\,; \qquad b)\ \displaystyle\int_0^1 z^n\,dz\,, \quad n \in \mathbf{N}.$

$\triangleright$ Используя неопределенный интеграл, находим:

$$a) \qquad \int_0^1 e^{i\pi z}\,dz = -\frac{i}{\pi}\,e^{i\pi z}\Big|_0^1 = -\frac{i}{\pi}\,\big(e^{i\pi} - 1\big) = \frac{2i}{\pi}\,.$$

$$b) \qquad \int_0^1 z^n\,dz = \frac{1}{n+1}\,z^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \qquad \triangleleft$$

2) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\,d\zeta$ по линии, соединяющей точки $\zeta = 1$ и $\zeta = z$, не проходящей через $\zeta = 0$.

$\triangleright$ Функция $f(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta}$ аналитична в неодносвязной области $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим два случая.

$a)$ Кривая интегрирования γ_1 не обходит вокруг начала координат. Приняв для значений $\arg\zeta$ промежуток $(-\pi; \pi]$, рассмотрим плоскость $\mathbf{C}$ с разрезом по отрицательной вещественной полуоси. В полученной односвязной области $f(\zeta)$ имеет первообразную $\ln\zeta$ (см. п. 10.2). Поэтому $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln\zeta\Big|_1^z = \ln z - \ln 1 = \ln z.$

$b)$ Кривая интегрирования γ_2 совершает n полных оборотов вокруг начала координат. Этот путь можно представить как совокупность γ_1 и n замкнутых кривых, каждая из которых содержит внутри точку $\zeta = 0$. Учитывая результат п. 13.3: $\displaystyle\oint_c \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i\,,$

получаем $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi n\,i + \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi n\,i + \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z + 2\pi n\,i.$

Этот пример показывает, что в неодносвязной области $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ не существует первообразной для $f(z) = \dfrac{1}{z}$ и формула Ньютона-Лейбница неприменима $\lhd$

3) Выяснить, существует ли первообразная функции $f(z)$ в указанной области D:

$a)$ $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$, D – односвязная область, $z = 0 \notin D$;

$b)$ $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$, $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$;

$c)$ $f(z) = \overline{z}$, $D = \mathbf{C}$.

$\rhd$ $a)$ Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ аналитична в односвязной области D, поэтому она имеет первообразную в D (см. утверждение 1). Это, например, $F(z) = -\dfrac{1}{z}$.

$b)$ $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$, где γ – любой кусочно гладкий замкнутый контур в D. В случае, когда γ не обходит вокруг точки $z = 0$, этот факт следует из интегральной теоремы Коши. Для случая $0 \in int\,\gamma$, равенство было получено в п. 13.3.

Таким образом, в соответствии с теоремой 16.1, $F(z) = -\dfrac{1}{z}$ – первообразная функции $f(z)$ в области $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

$c)$ Функция $f(z) = \overline{z}$, нигде не аналитична, значит, она не имеет первообразной $\lhd$

16.4. Вопросы и задачи

1. Найдите первообразные для функций

   $a)$ $\cos az$; $b)$ $\operatorname{sh} az$; $c)$ $e^z \sin az$.

2. Выясните, имеет ли первообразную функция $f(z)$ в области D :

   $a)$ $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $D = \mathbf{C} \setminus \{1\}$; $b)$ $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$;

   $c)$ $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+1}$, $D = \{|z| < 1\}$; $d)$ $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+1}$, $D = \{|z| > 1\}$;

   $e)$ $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $D = \{|z| < 1\}$; $f)$ $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $D = \{0 < |z+i| < 2\}$;

   $g)$ $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$, $D = \{|z| > 0\}$; $h)$ $f(z) = z \operatorname{Re} z$, $D = \mathbf{C}$.

3. Пусть D – односвязная область, не содержащая точек $z = \pm i$. Докажите, что в этой области $\operatorname{arctg} z = \displaystyle\int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$ – первообразная для функции $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.