НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

100 ЛЕТ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Д.Х. Джумабаев, Ж.А. Каримов, А.М. Кытманов,
Ж.К. Тишабаев, Т.Т. Туйчиев

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ)

Министерство высшего и среднего специального образования
Республики Узбекистан
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

**Д.Х. Джумабаев, Ж.А. Каримов, А.М. Кытманов,
Ж.К. Тишабаев, Т.Т. Туйчиев**

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ)

Разрешено к печати Министерством высшего и среднего
специального образования Республики Узбекистан
(приказ № 531 от 14 июня 2018 года) в качестве
учебного пособия для студентов университетов

Ташкент
«MUMTOZ SO'Z»
2018

УДК 517.53
ББК 22.16

Джумабаев Д.Х., Каримов Ж.А., Кытманов А.М., Тишабаев Ж.К., Туйчиев Т.Т. Теория функций комплексного переменного (самостоятельные работы). — Учебное пособие. — Ташкент: MUMTOZ SO'Z, 2018. — 210 с.

Учебное пособие предназначено студентам университетов для выполнения самостоятельных работ по предмету теории функций комплексного переменного и соответствует Государственным образовательным стандартам Республики Узбекистан по направлениям 5130100 – Математика, 5140200 – Физика, 5140300 – Механика, 5140400 – Астрономия. Пособие включает следующие темы: комплексные числа и функции комплексного переменного, элементарные функции и выполняемые ими конформные отображения, интегралы от функции комплексного переменного и теория вычетов. Пособие содержит 3 самостоятельные работы, 1092 примеров и задач, 52 из которых снабжены подробными решениями. Решения этих примеров и задач приведены с помощью системы компьютерной математики Maple.

Рецензенты: Н.М.Жабборов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана;

Ш.Т.Пирматов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского государственного технического университета.

ISBN 978-9943-5561-0-2

СОДЕРЖАНИЕ

Посвящается 100-летию
Национального университета Узбекистана
имени Мирзо Улугбека

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для реализации требований Закона Республики Узбекистан «Об образовании», Национальной программы по подготовке кадров, постановлений Президента Республики Узбекистан о развитии высшего образования коллектив кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана поставил перед собой несколько задач.

В современном мире почти все сферы жизни человека развиваются быстрыми темпами. В том числе наука и образование. В современных условиях взрывного увеличения информации и бурного развития новых технологий специалисту нужно со студенческой скамьи обучаться умению самому разбираться в потоке информации, учиться самостоятельности. В частности, специалисту-математику, в образовании которого теория функций комплексного переменного играет фундаментальную роль, нужно учиться самостоятельному мышлению на примерах и задачах. Поэтому в учебную программу включены самостоятельные работы и для них предусмотрены специальные часы.

Данное пособие предназначено студентам университетов для выполнения самостоятельных работ и соответствует государственным стандартам Республики Узбекистан по специальностям «Математика», «Физика», «Механика» и «Астрономия».

Пособие состоит из 3 параграфов. В каждом параграфе изложены рекомендуемые самостоятельные работы по следующим темам: «Комплексные числа и функции комплексного аргумента», «Элементарные функции и выполняемые ими отображения, конформные отображения», «Интегралы от функций комплексного

переменного и теория вычетов». Каждой теме предпосланы основные понятия и утверждения, необходимые для успешного выполнения самостоятельной работы (раздел А). В разделе (Б) приведены упражнения, состоящие из 21 варианта, предназначенные студентам для выполнения и последующей сдачи. В помощь студенту в разделе (В) даются подробные решения одного варианта из каждого задания (вариант 21). При этом большинство задач решены двумя способами. Сначала приведено аналитическое решение задачи, после этого приведено решение задачи с рисунками в системе компьютерной математики Maple для более глубокого понимания темы.

При подготовке пособия авторы старались не перегружать его информацией, а дать только необходимую, но достаточную для квалифицированного понимания предмета, старались полнее учесть опыт, накопленный за годы преподавания теории функций комплексного переменного на математическом и физическом факультетах Национального университета Узбекистана. Мы надеемся, что данное учебное пособие будет полезным для понимания методов комплексного анализа и формирования навыков самостоятельного решения задач.

Авторы

§ 1. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

- Комплексные числа и действия с ними.
- Геометрическое представление комплексных чисел. Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме.
- Кривые и области на комплексной плоскости.
- Стереографическая проекция.
- Функции комплексного переменного.
- Дифференцирование функций. Условия Коши—Римана.
- Гармонические функции.
- Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения.

– A –

Основные определения и теоремы

1. Комплексные числа и действия над ними

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где x и y — вещественные числа, а i — мнимая единица такая, что $i^2 = -1$.

Число x называется вещественной частью, а y — мнимой частью комплексного числа z, это записывается следующим образом

$$x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z.$$

Если в (1.1) $y = 0$, то $z = x$ — вещественное число. Если в (1) $x = 0$, то $z = iy$ — мнимое число. Если в (1.1) $x = y = 0$, то комплексное число z равно 0.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Они называются комплексно сопряженными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$, это записывается следующим образом $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$. Например, если $z = 2 + \frac{1}{3}i$, то $\overline{z} = 2 - \frac{1}{3}i$.

Арифметические операции для двух комплексных чисел определяются следующим образом:

1) $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
2) $z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$;
3) $\dfrac{z_1}{z_2} := \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$;
4) $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ раз}$.

Замечание. Определение произведения комплексных чисел можно объяснить следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + iy_1x_2).$$

Деление комплексных чисел объясняется с помощью умножения числителя и знаменателя на комплексно сопряженное число $\overline{z}_2 = x_2 - iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

2. Геометрическое представление комплексных чисел

На декартовой плоскости Oxy комплексное число $z = x + iy$ представляется точкой $M(x, y)$ (рис. 1.1).

Точка $M(x, y)$ называется геометрическим представлением комплексного числа $z = x + iy$. Следовательно, каждому комплексному числу соответствует точка плоскости. И наоборот, каждой точке плоскости соответствует комплексное число, абсцисса и ордината которого равна вещественной и мнимой части.

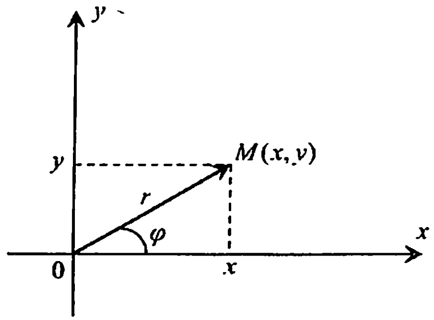


Рисунок 1.1. Геометрическое представление комплексного числа

Поэтому между комплексными числами и точками плоскости существует взаимно однозначное соответствие. Ось абсцисс будем называть вещественной осью, а ось ординат — мнимой осью. Плоскость Oxy называется комплексной плоскостью и обозначается буквой $\mathbb{C}$.

На рис. 1.1 вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки $M(x,y)$, длина этого вектора r называется модулем комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается $|z|$. Угол φ вектора $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox называется аргументом комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается $\varphi=\arg z$. Аргумент определяется неоднозначно, если $\varphi=\arg z$, то $\varphi=\arg z+2\pi n$ $(n\in\mathbb{N})$ тоже будет аргументом. Поэтому аргументом комплексного числа будем называть множество всех аргументов. Главным значением аргумента назовём $\varphi\in[0,2\pi)$.

Если задано комплексное число $z=x+iy$, то его модуль и главное значение аргумента вычисляются по формулам

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1.2)$$

$$\varphi=\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0, y\ge 0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+2\pi, & x>0, y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0,\\ \dfrac{3\pi}{2}, & x=0, y<0.\end{cases} \qquad (1.3)$$

Из рис. 1.1. имеем $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{r}$. Отсюда

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (1.4)$$

Это выражение называется тригонометрической формой комплексного числа $z=x+iy$.

Если использовать формулу Эйлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \qquad (1.5)$$

то получим показательную форму комплексного числа $z=x+iy=re^{i\varphi}$.

Теорема 1.1. *Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей:* $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$. *Аргумент произведения двух комплексных чисел равен сумме аргументов:* $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

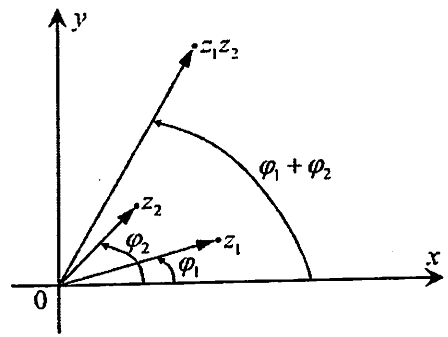


Рисунок 1.2. Геометрическое представление произведения комплексных чисел

Теорема 1.2. *Для степени выполняются следующие равенства*

$$|z^n| = |z|^n,\ \arg(z^n) = n\arg z, \text{ при } n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.3. *Для частного двух комплексных чисел выполняются следующие равенства*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Равенство (1.4) и теорема 1.2 приводят к *формуле Муавра* для z^n

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (1.6)$$

3. Кривые и области на комплексной плоскости

Пусть функции

$$x = x(t) \text{ и } y = y(t)$$

определенны и непрерывны на $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, Тогда комплексное число $z = x + iy$ будет зависеть от действительной переменной t и мы получим комплекснозначную функцию действительного аргумента

$$z = z(t) = x(t) + iy(t).$$

Ясно, что при изменении переменной t на $[\alpha, \beta]$, значения функции $z(t)$ изменяются на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и образуют некоторую кривую. Поэтому функция $z = z(t)$ называется параметрическим уравнением кривой.

Если для любых $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ из неравенства $t_1 \neq t_2$ следует $z(t_1) \neq z(t_2)$, то кривая называется *простой*. Т.е. на простой кривой точки самопересечений отсутствуют.

Если $z(\alpha) = z(\beta)$, то кривая называется *замкнутой*.

Простая замкнутая кривая называется *жордановой кривой* (это означает, что начальная и конечная точки кривой совпадает, а других точек самопересечений нет.

Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ некоторую точку z_0 и произвольное число $\varepsilon > 0$.

Определение 1.1. *Множество*

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

называется ε *-окрестностью точки* z_0.

Ясно, что $U(z_0, \varepsilon)$ является открытым кругом с центром в точке z_0 и радиуса ε.

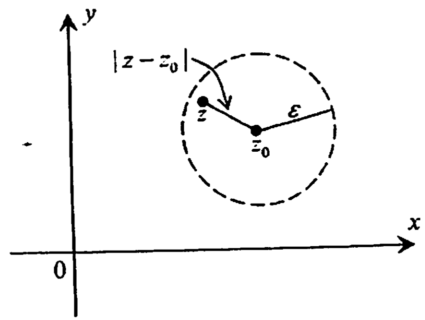


Рисунок 1.3. Геометрическое представление окрестности точки

Пусть D — некоторое множество из $\mathbb{C}$. Точка $z_0 \in D$ называется *внутренней точкой* множества D, если существует окрестность $U(z_0, \varepsilon)$ точки z_0 такая, что $U(z_0, \varepsilon) \subset D$.

Определение 1.2. *Множество* $D \subset \mathbb{C}$ *называется открытым, если все его точки являются внутренними.*

Пусть F — некоторое множество из $\mathbb{C}$.

Определение 1.3. *Точка* $z_0 \in \mathbb{C}$ *называется предельной точкой множества* F, *если произвольная окрестность* $U(z_0, \varepsilon)$ *содержит бесконечное число точек множества* F.

Определение 1.4. *Множество* F *называется замкнутым, если* F *содержит все свои предельные точки.*

Определение 1.5. *Открытое множество* D *называется связным, если произвольные две точки* $z_1, z_2 \in D$ *можно соединить некоторой непрерывной кривой* γ, *целиком лежащей в* D.

Определение 1.6. *Множество* $D \subset \mathbb{C}$ *называется областью, если* D *— открытое и связное множество.*

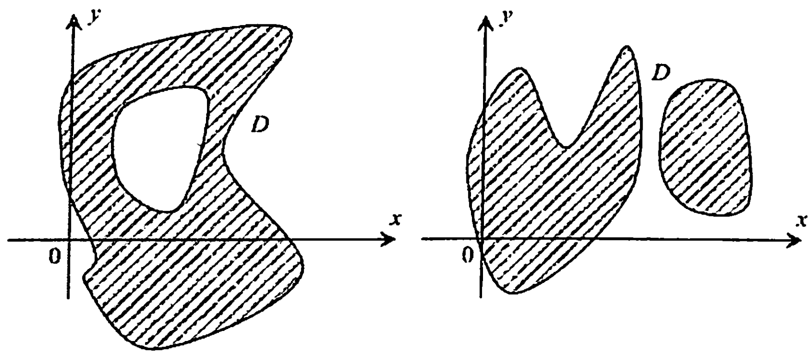


Рисунок 1.4. Множество слева является областью, справа — нет

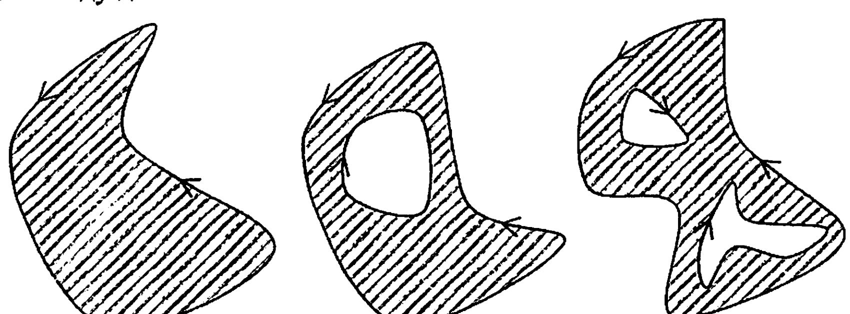
Множество предельных точек, не принадлежащих области D называется границей области и обозначается ∂D.

Множество $D \cup \partial D$ обозначается как $\bar{D}$, т.е. $\bar{D} = D \cup \partial D$, и называется *замыканием* множества D.

Если граница области ∂D состоит из одной непрерывной кривой, то область D называется односвязной, иначе — многосвязной.

В зависимости от количества кривых границы области ∂D, область D называется односвязной, двусвязной, n-связной.

Положительным обходом границы области ∂D называется такое движение по границе области, при котором область остается слева по ходу движения.



а) б) в)

Рисунок 1.5. Связные области

Например, на рисунке 1.5 представлены односвязная (а), двусвязная (б) и трехсвязная (в) области и положительный обход границы указан стрелками.

4. Стереографическая проекция

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (ξ,η,ζ). Рассмотрим в этом пространстве сферу

$$S = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta\}.$$

Пусть оси $O\xi$ и $O\eta$ пространства $\mathbb{R}^3$ совпадают с осями Ox и Oy комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда отображение, при котором комплексному числу z_0 соответствует точка сферы, которая получается при пересечении прямой $[z_0,P]$ с поверхностью сферы (рис. 1.6), называется стереографической проекцией. Это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми комплексными числами $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и всеми точками $M(\xi,\eta,\zeta) \in S \setminus \{P\}$ (S без точки P).

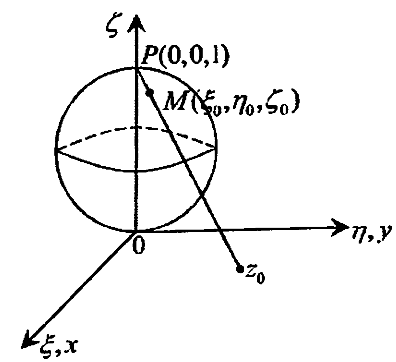


Рисунок 1.6. Стереографическая проекция

То есть получено взаимно однозначное соответствие открытой комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и проколотой сферы.

Если добавить соответствие бесконечно удаленной точке $\{z=\infty\}\leftrightarrow\{P(0,0,1)\}$, то получим взаимно однозначное соответствие $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ и замкнутой сферы S.

В этом случае S называется сферой Римана, а $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ — замкнутой комплексной плоскостью.

Это соответствие описывается следующими формулами

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\ \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\ \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}; \tag{1.7}$$

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\ y=\frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{1.8}$$

С помощью этих равенств определим понятие сферической метрики на $\overline{\mathbb{C}}$. Расстоянием между комплексными числами z_1 и z_2 будем называть расстояние между образами этих точек по сфере Римана. Эта метрика выражается следующими формулами:

$$\rho(z_1,z_2)=\frac{|z_2-z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}\ (z_1\neq\infty,\ z_2\neq\infty); \tag{1.9}$$

$$\rho(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}. \tag{1.10}$$

5. Функции комплексного аргумента

Пусть E — непустое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ($E\subset\mathbb{C}$).

Определение 1.7. *Если каждому комплексному числу z из E однозначно определяется комплексное число w, то это соответствие называется функцией комплексного переменного и обозначается как*

$$w=f(z)\ \text{или}\ f:z\mapsto w.$$

Множество E называется при этом областью определения функции, z — независимой переменной или аргументом функции (не путать с аргументом комплексного числа), а w — функцией аргумента z.

Пусть функция $w=f(z)$ задана на некотором множестве $E\subset\mathbb{C}$. Эту функцию можно записать в виде

$$w=f(x+iy)=u+iv\ (x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}).$$

Это приводит к определению на множестве E двух функций от двух переменных

$$\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y).\end{cases}$$

То есть одну функцию комплексного переменного можно рассматривать как две функции двух вещественных переменных, которые можно назвать координатными функциями.

Множество значений функции $w=f(z)$, определенной на $E\subset\mathbb{C}$ это множество

$$F=\{f(z):z\in E\}\subset\mathbb{C}.$$

Поэтому $w=f(z)$ называется ещё *отображением* множества E на множество F.

Графиком функции $w=f(z)$ является множество $\Gamma=\{z,f(z)\}\subset\mathbb{C}^2$, т.е. Γ является подмножеством $\mathbb{R}^4$ и изображение такого графика не представляется возможным. Поэтому для геометрического представления функции $w=f(z)$ мы изображаем множества E и F, определенные этой функцией, на плоскостях Oxy и Ouv, соответственно.

Иногда для геометрического представления применяется другой метод. В трехмерном пространстве (x,y,ρ) изображается поверхность $\rho=|f(z)|$. Эта поверхность называется *рельефом функции* $w=f(z)$.

В качестве примера нарисуем рельеф функции $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ с помощью математического пакета Maple (рис. 1.7).

> $with(plots):$

> $f:=z\to\dfrac{1}{1+z^2}$

$$f := z \to \frac{1}{1+z^2}$$

> $complexplot3d(f, -3 - 3\cdot I..3 + 3\cdot I, grid = [50, 50])$

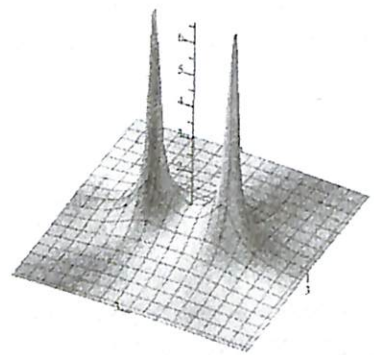


Рисунок 1.7. Рельеф функции $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$

Если на F определена функция $\zeta=\varphi(w)$, то можно определить *сложную функцию* (композицию функций) $\zeta=\varphi(f(z))$.

Если функция $w=f(z)$ — взаимно однозначна, то существует *обратная функция* $z=f^{-1}(w)$, для которой F область определения, а E — множество значений.

Определение 1.8. *Если для любых $z_1 \neq z_2$ из области определения E следует $f(z_1)\neq f(z_2)$, то функция называется однолистной.*

Пример. Исследовать функцию $f(z)=\dfrac{1}{2z-3}$ на множестве $E=\{z\in\mathbb{C}: |z|<3/2\}$ на однолистность.

$\lhd$ Пусть для $z_1,z_2\in E$ выполняется равенство $f(z_1)=f(z_2)$, т.е. $\dfrac{1}{2z_1-3}=\dfrac{1}{2z_2-3}$. Тогда $2z_1-3=2z_2-3 \;\Rightarrow\; z_1=z_2$. Следовательно функция $f(z)$ — однолистна на множестве E. $\rhd$

– 6608 –

Пусть функция $w=f(z)$ задана на множестве $E\subset\mathbb{C}$, z_0 — предельная точка множества E.

Определение 1.9. *Если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,z_0)$ такое, что для произвольного $z\in E$, удовлетворяющего неравенству $0<|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$, то комплексное число A называется пределом функции $f(z)$ при $z\to z_0$ и обозначается*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

Замечание. Как правило, мы не будем указывать, что число z принадлежит области определения функции. Это всегда будет ясно из контекста.

Пример. Показать, по определению, что для функции $f(z)=\dfrac{i\cdot\overline{z}}{2}$, $E=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\dfrac{i}{2}$.

$\lhd$ Для произвольного $z\in E$ имеем

$$\left|f(z)-\frac{i}{2}\right|=\left|\frac{i\cdot\overline{z}}{2}-\frac{i}{2}\right|=\left|\frac{z-1}{2}\right|.$$

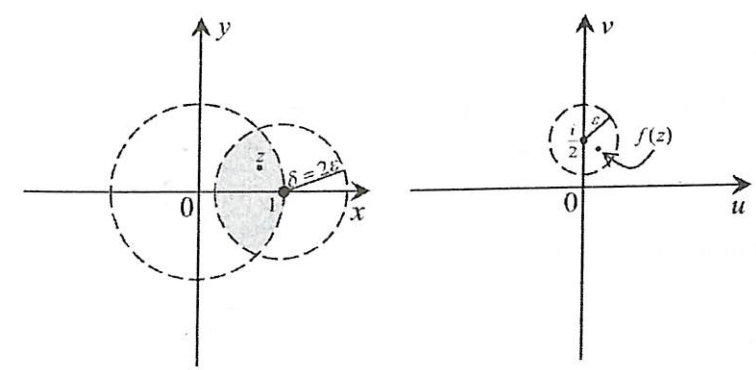


Рисунок 1.8. Геометрическое представление неравенств $0<|z-1|<\delta$ и $\left|f(z)-\dfrac{i}{2}\right|<\varepsilon$ $\rhd$

Если для $\forall \varepsilon > 0$ положить $\delta = 2\varepsilon$, то для всех значений аргумента z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z-1| < \delta$ выполняется неравенство $\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| < \varepsilon$ (рис. 1.8).

Вычисление предела функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ можно свести к вычислению пределов функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Теорема 1.4. *Функция $w = f(z)$ при $z \to z_0$ ($z_0 = x_0 + iy_0$) имеет предел равный $A = \alpha + i\beta$, т.е. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha, \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta.$$

Пусть функция $w = f(z)$ задана на множестве $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in E$ — предельная точка множества E.

Определение 1.10. *Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$, что для произвольного $z \in E$, удовлетворяющего неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, т.е.*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Разность $z - z_0 = \Delta z$ называется приращением аргумента, а $f(z) - f(z_0) = \Delta f(z)$ — приращением функции. С учетом этого, функция $f(z)$ непрерывна, если

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0.$$

Определение 1.11. *Функция $f(z)$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Теорема 1.5. *Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Определение 1.12. *Если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$, что для произвольных $z', z'' \in E$, удовлетворяющих неравенству $|z' - z''| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon,$$

то функция $f(z)$ называется равномерно непрерывной на множестве E.

Теорема 1.6 (Кантор). *Если функция $f(z)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, то она равномерно непрерывна на нём.*

6. Дифференцирование функций. Условие Коши—Римана

Пусть в некоторой области $E \subset \mathbb{C}$ задана функция $w = f(z)$. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in E$ и придадим ей такое приращение Δz, чтобы $z_0 + \Delta z \in E$ (рис. 1.9). В результате получим приращение функции $f(z)$ в точке z_0

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

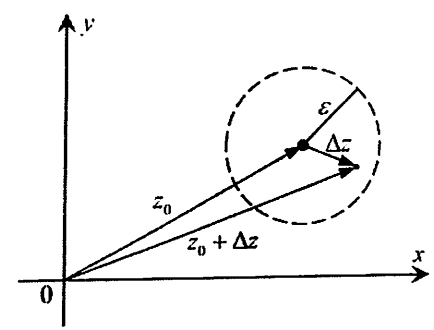


Рисунок 1.9. Геометрическое представление приращения аргумента

Определение 1.13. *Если при $\Delta z \to 0$ существует конечный предел отношения*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то этот предел называется производной функции комплексной переменной $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, т.е.

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (1.11)$$

Пусть функция $f(z)=u(x.y)+iv(x.y)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0=x_0+iy_0$ ($z_0\in\mathbb{C}$).

Определение 1.14. *Если функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ являются дифференцируемыми в точке (x_0,y_0) как функции переменных x, y, то функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0 в смысле действительного анализа.*

В этом случае выражение $du(x_0,y_0)+idv(x_0,y_0)$ называется дифференциалом функции $f(z)$ в точке z_0:

$$df=du+idv.$$

Теорема 1.7. *Для существования производной функции $f(z)=u(x.y)+iv(x.y)$ в точке $z_0=x_0+iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x_0,y_0) и удовлетворяли в этой точке условиям Коши—Римана*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases} \qquad (1.12)$$

Иногда бывает удобно вместо переменных x и y использовать формальные переменные $z=x+iy$ и $\bar z=x-iy$.

Введя обозначения

$$dz=dx+idy,\ d\bar z=dx-idy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

получим следующие формулы для дифференциала функции:

$$df=du+idv,\ df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z.$$

При этом условия Коши—Римана (1.12) примут следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0. \qquad (1.13)$$

Если функция $w=f(z)$ имеет производную в точке z_0, то в этой точке $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=0$, а её производная $f'(z_0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}$ и дифференциал имеют вид $df=\dfrac{\partial f}{\partial z}dz=f'(z_0)dz$.

В комплексном анализе функция, имеющая производную называется $\mathbb{C}$*-дифференцируемой функцией.*

На практике для исследования функции на $\mathbb{C}$-дифференцируемость используют условия Коши—Римана.

Рассматривая функцию в полярной системе координат

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+iv(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$

имеем следующий вид условий Коши—Римана

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial \varphi},\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial \rho}=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}.\end{cases} \qquad (1.14)$$

Пусть функция $w=f(z)$ определена в некоторой области $E\subset\mathbb{C}$.

Определение 1.15. *Если функция $f(z)$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в некоторой окрестности $U(z_0,\varepsilon)$ точки $z_0\in\mathbb{C}$, то функция $f(z)$ называется голоморфной в точке z_0.*

Определение 1.16. *Если функция $f(z)$ является голоморфной в каждой точке области E, то функция называется голоморфной в области E.*

Класс голоморфных функций в области E обозначается $\mathcal{O}(E)$.

Определение 1.17. *Если функция* $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ *голоморфна в точке* $z=0$, *то функция* $f(z)$ *называется голоморфной в точке «∞».*

Определение 1.18. *Если функция* $\overline{f(z)}$ *является голоморфной в точке* $z_0\in\mathbb{C}$, *то функция* $f(z)$ *называется антиголоморфной в точке* z_0.

7. Гармонические функции

Пусть в области $E\subset\mathbb{R}^2$ задана функция $F(x,y)$ и в этой области существуют непрерывные частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} \text{ и } \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}.$$

Определение 1.19. *Если в каждой точке области* E *для функции* $F(x,y)$ *выполняется равенство*

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y}=0, \qquad (1.15)$$

то эта функция называется гармонической в области E.

Уравнение (1.15) называется *уравнением Лапласа*, а

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}$$

называется *оператором Лапласа*. Тогда уравнение (1.15) можно записать в виде $\Delta F=0$.

Оператор Лапласа можно переписать в виде

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}$$

Тогда уравнение (1.15) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\overline{z}}=0. \qquad (1.16)$$

Теорема 1.8. *Если функция* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ — *голоморфна в области* $E\subset\mathbb{C}$, *то её вещественная* $u(x,y)$ *и мнимая* $v(x,y)$ *части являются гармоническими функциями.*

Замечание. Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — гармонические, то функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, вообще говоря, не является голоморфной. Для голоморфности $f(z)$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ должны быть связаны условиями Коши—Римана. В этом случае функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются *парой сопряженных гармонических функций* (порядок функций в паре существенен).

Пусть $u(x,y)$ — гармоническая в односвязной области E функция, $z_0=x_0+iy_0$ — некоторая фиксированная точка. Тогда сопряженная функция определяется равенством

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy. \qquad (1.17)$$

8. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения.

Пусть функция $w=f(z)$ задана в некоторой области $E\subset\mathbb{C}$. Мы будем рассматривать её как отображение точек плоскости (z) на точки плоскости (w). Пусть функция $w=f(z)$ имеет в точке $z_0\in E$ отличную от нуля производную $f'(z_0)\neq 0$. Тогда при отображении $w=f(z)$ окружность $|z-z_0|=r$ переходит, без учета бесконечно малой величины $o(|z-z_0|)$, в окружность

$$|w-w_0|=|f'(z_0)|\cdot r.$$

Если $|f'(z_0)|<1$, то окружность $|z-z_0|=r$ сжимается, а при $|f'(z_0)|>1$ эта окружность растягивается. Значит, модуль производной функции $w=f(z)$ означает *коэффициент растяжения*.

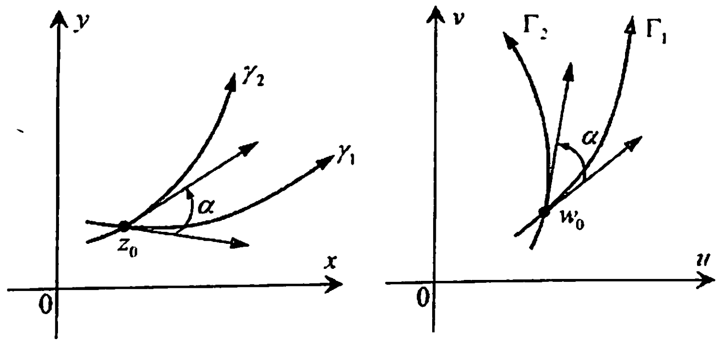


Рисунок 1.10. Геометрический смысл аргумента производной

Пусть теперь голоморфное отображение $w=f(z)$ переводит гладкую кривую γ, проходящую через точку z_0 в кривую Γ на плоскости (w). В этом случае аргумент производной функции $w=f(z)$ означает поворот кривой γ на этот угол. Если угол между кривыми γ_1 и γ_2, проходящими через точку z_0, составляет α, то при отображении $w=f(z)$ угол между образами этих кривых Γ_1 и Γ_2 также будет α (рис. 1.10)

Пусть функция $w=f(z)$ определена в области $E\subset\mathbb{C}$ и $z_0\in E$.

Определение 1.20. *Отображение $w=f(z)$ называется конформным в точке z_0, если оно обладает следующими свойствами:*

1) *бесконечно малая окружность с центром в точке z_0 переходит в бесконечно малую окружность;*

2) *угол между образами гладких кривых равен углу между их прообразами, а также сохраняются направления кривых.*

Если в этом определении во втором условии, при сохранении углов, меняется направление кривых, то такое отображение называется *конформным отображением II-рода.*

Определение 1.21. *Отображение $w=f(z)$ называется конформным в области $E\subset\mathbb{C}$, если $w=f(z)$ является однолистной функцией в области E и конформной в каждой точке E.*

Конформные отображения обладают следующими свойствами:

1) отображение, обратное к конформному, также является конформным;

2) суперпозиция конечного числа конформных отображений также является конформным.

Теорема 1.9. *Если функция $w=f(z)$ голоморфна, однолистна и $f'(z)\neq 0$ в области E, то $w=f(z)$ является конформным отображением в этой области.*

Контрольные вопросы

1. Определение комплексных чисел.
2. Геометрический смысл комплексных чисел.
3. Вычисление модуля и аргумента комплексного числа.
4. Тригонометрическая форма комплексного числа.
5. Формулы Муавра.
6. Непрерывные кривые на комплексной плоскости.
7. Области на комплексной плоскости.
8. Односвязные и многосвязные области.
9. Стереографическая проекция.
10. Сферическая метрика.
11. Функции комплексного аргумента, их вещественные и мнимые части.
12. Однолистные функции.
13. Предел и непрерывность функции комплексного аргумента.
14. Дифференцируемость в вещественном анализе.
15. $\mathbb{C}$-дифференцируемость.
16. Голоморфные функции.
17. Гармонические функции.
18. Взаимосвязь голоморфных и гармонических функций.
19. Сопряженные гармонические функции и их нахождение.
20. Геометрический смысл модуля производной.
21. Геометрический смысл аргумента производной.

22. Конформные отображения в точке и области.

– Б –

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. Для данных комплексных чисел z_1 и z_2 вычислить сумму, разность, произведение, частное и $z_1+\dfrac{1}{z_2}$.

1.1. $z_1=\sqrt{2}+i$, $z_2=\sqrt{2}-i$.

1.2. $z_1=1+\sqrt{2}i$, $z_2=1-i\sqrt{2}$.

1.3. $z_1=2+3i$, $z_2=2-3i$.

1.4. $z_1=2+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$.

1.5. $z_1=3+4i$, $z_2=3-4i$.

1.6. $z_1=5+2i$, $z_2=5-2i$.

1.7. $z_1=2+i\sqrt{3}$, $z_2=3+i\sqrt{2}$.

1.8. $z_1=2-i\sqrt{3}$, $z_2=3-i\sqrt{2}$.

1.9. $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$.

1.10. $z_1=3+4i$, $z_2=4+3i$.

1.11. $z_1=3-4i$, $z_2=4-3i$.

1.12. $z_1=1+\sqrt{5}i$, $z_2=1-\sqrt{5}i$.

1.13. $z_1=2+\sqrt{5}i$, $z_2=2-\sqrt{5}i$.

1.14. $z_1=2+\sqrt{5}i$, $z_2=\sqrt{5}+2i$.

1.15. $z_1=2-\sqrt{5}i$, $z_2=\sqrt{5}+2i$.

1.16. $z_1=3-\sqrt{5}i$, $z_2=3+\sqrt{5}i$.

1.17. $z_1=\sqrt{3}+\sqrt{5}i$, $z_2=\sqrt{3}-\sqrt{5}i$.

1.18. $z_1=\sqrt{5}+\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{5}-\sqrt{3}i$.

1.19. $z_1=3+\sqrt{5}i$, $z_2=3-\sqrt{5}i$.

1.20. $z_1=\sqrt{5}+3i$, $z_2=\sqrt{5}+3i$.

1.21. $z_1=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{3}-i\sqrt{2}$.

Упражнение 2. Вычислить модуль и аргумент, полученного комплексного числа и изобразить его.

2.1. $(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^6\cdot(1+i)^3$.
2.2. $(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^4\cdot(1-i)^4$.

2.3. $(-\sqrt{3}+3i)^6\cdot(3+i\sqrt{3})^4$.
2.4. $(-\sqrt{3}-3i)^3\cdot(3+i\sqrt{3})^6$.

2.5. $(\sqrt{3}+3i)^5\cdot(3+i\sqrt{3})^3$.
2.6. $(\sqrt{3}-3i)^4\cdot(3+i\sqrt{3})^6$.

2.7. $(\sqrt{3}+3i)^3\cdot(1+i)^5$.
2.8. $(\sqrt{3}+3i)^4\cdot(1-i)^5$.

2.9. $(3+i\sqrt{3})^4\cdot(1+i)^5$.
2.10. $(3+i\sqrt{3})^3\cdot(1-i)^5$.

2.11. $(-1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^6\cdot(1+i)^3$.
2.12. $(-1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^4\cdot(1-i)^4$.

2.13. $(1-i\frac{\sqrt{3}}{3})^6\cdot(1+i)^4$.
2.14. $(1-i\frac{\sqrt{3}}{3})^3\cdot(1+i)^6$.

2.15. $(1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^5\cdot(1+i)^3$.
2.16. $(1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^4\cdot(1-i)^6$.

2.17. $(-1+i)^3\cdot(1+i\sqrt{3})^5$.
2.18. $(-1+i)^4\cdot(1-i\sqrt{3})^5$.

2.19. $(1+i)^4\cdot(1+i\sqrt{3})^5$.
2.20. $(1-i)^3\cdot(1-i\sqrt{3})^5$.

2.21. $(1-i)^3\cdot(1+i\sqrt{3})^8$.

Упражнение 3. Изобразить множество на комплексной плоскости.

3.1. $1<|z+2-3i|\le 3$.
3.2. $1\le|z+1+i|<2$.

3.3. $1<|z-1+i|\le 2$.
3.4. $1\le|z+1-i|<2$.

3.5. $1<|z-3+4i|\le 3$.
3.6. $1\le|z+3-4i|<3$.

3.7. $1<|z-1+2i|\le 2$.
3.8. $1\le|z+1-2i|\le 3$.

3.9. $1<|z-2+i|\le 2$.
3.10. $1\le|z+2-i|\le 3$.

3.11. $1<|z+2+i|\le 2$.

3.12. $1<|z-2-3i|\le 3$.

3.13. $2\le |z-1-3i|<3$.

3.14. $2<|z+1-3i|\le 3$.

3.15. $2\le |z+1+3i|<3$.

3.16. $2<|z-1+3i|\le 3$.

3.17. $2\le |z-3i|<3$.

3.18. $2<|z+3-i|\le 3$.

3.19. $2\le |z+3|<3$.

3.20. $2<|z-3+i|\le 3$.

3.21. $1<|z-2+3i|\le 3$.

Упражнение 4. Изобразить множество на комплексной плоскости.

4.1. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<2\operatorname{Re} z,\\ (\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z.\end{cases}$

4.2. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 3.\end{cases}$

4.3. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ |z|<2.\end{cases}$

4.4. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4.5. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ |z|<1.\end{cases}$

4.6. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 4.\end{cases}$

4.7. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ |z-i|<1.\end{cases}$

4.8. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ |z-1|<1.\end{cases}$

4.9. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ \dfrac{\pi}{3}<\arg z<\pi.\end{cases}$

4.10. $\begin{cases}|z-1|<1,\\ |z-i|<1.\end{cases}$

4.11. $\begin{cases}|z-1|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4.12. $\begin{cases}|z-i|>2,\\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

4.13. $\begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z>1,\\ |z|<2.\end{cases}$

4.14. $\begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 3,\\ \dfrac{\pi}{3}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4.15. $\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}<\arg z\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1<|z|\le 3.\end{cases}$

4.16. $\begin{cases}1<|z|\le 3,\\ (\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z.\end{cases}$

4.17. $\begin{cases}1<|z|\le 3,\\ (\operatorname{Re} z)^2<\operatorname{Im} z.\end{cases}$

4.18. $\begin{cases}1<|z|\le 2,\\ \operatorname{Im} z>0.\end{cases}$

4.19. $\begin{cases}1<|z|\le 2,\\ \operatorname{Re} z>0.\end{cases}$

4.20. $\begin{cases}1<|z|\le 2,\\ \operatorname{Im} z>\operatorname{Re} z.\end{cases}$

4.21. $\begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z>1,\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

Упражнение 5. Доказать, что следующее уравнение является уравнением окружности, найти центр и радиус окружности.

5.1. $|z|^2+(1-i)z+(1+i)\bar{z}+1=0$.

5.2. $|z|^2+(1-4i)z+(1+4i)\bar{z}+6=0$.

5.3. $|z|^2+(2-3i)z+(2+3i)\bar{z}+11=0$.

5.4. $|z|^2+(2-3i)z+(2+3i)\bar{z}+12=0$.

5.5. $|z|^2+(4-3i)z+(4+3i)\bar{z}+20=0$.

5.6. $|z|^2+(2-4i)z+(2+4i)\bar{z}+9=0$.

5.7. $|z|^2+(4-5i)z+(4+5i)\bar{z}+21=0$.

5.8. $|z|^2+(4-i)z+(4+i)\bar{z}+16=0$.

5.9. $|z|^2+(3-i)z+(3+i)\bar{z}+9=0$.

5.10. $|z|^2+(4-4i)z+(4+4i)\bar{z}+24=0$.

5.11. $|z|^2+(1-5i)z+(1+5i)\bar{z}+25=0$.

5.12. $|z|^2+(5-i)z+(5+i)\bar{z}+25=0$.

5.13. $|z|^2+(2-5i)z+(2+5i)\bar{z}+28=0$.

5.14. $|z|^2+(5-2i)z+(5+2i)\bar{z}+28=0$.

5.15. $|z|^2+(3-5i)z+(3+5i)\bar{z}+25=0$.

5.16. $|z|^2+(5-3i)z+(5+3i)\bar{z}+25=0$.

5.17. $|z|^2+(5-4i)z+(5+4i)\bar{z}+25=0$.

5.18. $|z|^2+(2-2i)z+(2+2i)\bar{z}+7=0$.

5.19. $|z|^2+(3-3i)z+(3+3i)\bar{z}+16=0$.

5.20. $|z|^2+(4-4i)z+(4+4i)\bar{z}+28=0$.

5.21. $|z|^2+(4-3i)z+(4+3i)\bar{z}+21=0$.

Упражнение 6. Для точки комплексной плоскости найти её образ на сфере Римана.

6.1. $1+i$.
6.2. $1-i$.
6.3. $2+i$.
6.4. $2i+1$.
6.5. $2-i$.
6.6. $-2+i$.
6.7. $2+2i$.
6.8. $2-2i$.
6.9. $3+i$.
6.10. $3-i$.
6.11. $-1+i$.
6.12. $1+3i$.
6.13. $1-3i$.
6.14. $3+2i$.
6.15. $3-2i$.
6.16. $2+3i$.
6.17. $2-3i$.
6.18. $-2+3i$.
6.19. $-2-3i$.
6.20. $3-3i$.
6.21. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Упражнение 7. Вычислить.

7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.
7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.
7.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.
7.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.
7.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.
7.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.
7.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.
7.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos\frac{k\pi}{6}$.
7.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin\frac{k\pi}{6}$.
7.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.
7.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.
7.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.
7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.
7.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos\frac{k\pi}{6}$.
7.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin\frac{k\pi}{6}$.
7.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.
7.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.
7.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.
7.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.
7.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{3^k}{4^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.
7.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.

Упражнение 8. Для данной функции определить вид кривой.

8.1. $z=t+it^2\ (0\le t<+\infty)$.

8.2. $z=2t+it^2\ (0\le t<+\infty)$.

8.3. $z=t+i2t^2\ (0\le t<+\infty)$.

8.4. $z=t+\frac{i}{t}\ (-\infty<t<0)$.

8.5. $z=t+\dfrac{i}{t}$ $(0<t<+\infty)$.

8.6. $z=2t+\dfrac{i}{t}$ $(-\infty<t<0)$.

8.7. $z=t+\dfrac{i}{2t}$ $(0<t<+\infty)$.

8.8. $z=4t^2+it^4$ $(-\infty<t<+\infty)$.

8.9. $z=t^2+i\dfrac{t^4}{16}$ $(-\infty<t<+\infty)$.

8.10. $z=9t^2+it^4$ $(-\infty<t<+\infty)$.

8.11. $z=\mathrm{Re}\cdot e^{i2t}$ $(0\le t\le\dfrac{\pi}{4})$.

8.12. $z=\mathrm{Re}e^{i3t}$ $(0\le t\le\dfrac{\pi}{6})$.

8.13. $z=\mathrm{Im}e^{i2t}$ $(0\le t\le\dfrac{\pi}{4})$.

8.14. $z=\mathrm{Im}e^{i3t}$ $(0\le t\le\dfrac{\pi}{6})$.

8.15. $z=2t$ $(0\le t\le 3)$.

8.16. $z=2+it$ $(2\le t\le 5)$.

8.17. $z=t+3i$ $(1\le t\le 2)$.

8.18. $z=2+i+[(3+2i)-(2+i)]t$ $(0\le t\le 1)$.

8.19. $z=3+2i+[(5+4i)-(3+2i)]t$ $(0\le t\le 1)$.

8.20. $z=3+2i+[(4+4i)-(3+2i)]t$ $(0\le t\le 1)$.

8.21. $z=1+i+[(2+3i)-(1+i)]t$ $(0\le t\le 1)$.

Упражнение 9. Исследовать функцию на однолистность на заданном множестве.

9.1. $f(z)=z^2$, $E=\{\mathrm{Re}\,z>0\}$.

9.2. $f(z)=z^2$, $E=\{\mathrm{Im}\,z>0\}$.

9.3. $f(z)=z^3$, $E=\left\{0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

9.4. $f(z)=z^2$, $E=\{|z|<1\}$.

9.5. $f(z)=z^2$, $E=\left\{|z|<1, 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

9.6. $f(z)=z^2$, $E=\{|z|>2\}$.

9.7. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $E=\{|z|<1\}$.

9.8. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right)$, $E=\{|z|<2\}$.

9.9. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right)$, $E=\{\mathrm{Im}\,z>0\}$.

9.10. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right)$, $E=\{\mathrm{Re}\,z>0\}$.

9.11. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right)$, $E=\left\{\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

9.12. $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$, $E=\{|z|<3\}$.

9.13. $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$, $E=\{|z|>3\}$.

9.14. $f(z)=\dfrac{1}{z+4}$, $E=\{|z|<4\}$.

9.15. $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$, $E=\{\mathrm{Re}\,z>3\}$.

9.16. $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$, $E=\{\mathrm{Re}\,z>1\}$.

9.17. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$, $E=\{\mathrm{Im}\,z>0\}$.

9.18. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$, $E=\{0<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$.

9.19. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$, $E=\{|z|<1\}$.

9.20. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$, $E=\left\{0<\operatorname{Re} z<\dfrac{1}{2}\right\}$.

9.21. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $E=\{|z|<2\}$.

Упражнение 10. Исследовать функцию на непрерывность.

10.1. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$.

10.2. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+i)}$.

10.3. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+i)}$.

10.4. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z+i)}$.

10.5. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$.

10.6. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z+i)}$.

10.7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)}$.

10.8. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z-1)}$.

10.9. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-i)}$.

10.10. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z-i)}$.

10.11. $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)(z+i)}$.

10.12. $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+i)}$.

10.13. $f(z)=\dfrac{1}{(2z+1)(z+i)}$

10.14. $f(z)=\dfrac{1z}{(2z+1)(z-i)}$.

10.15. $f(z)=\dfrac{1}{(2z-1)(z+i)}$.

10.16. $f(z)=\dfrac{1}{(2z-1)(z-i)}$.

10.17. $f(z)=\dfrac{z}{(2z-i)(z-1)}$.

10.18. $f(z)=\dfrac{z}{(2z-i)(z+1)}$.

10.19. $f(z)=\dfrac{z}{(2z+i)(z-1)}$.

10.20. $f(z)=\dfrac{z}{(3z+i)(z-1)}$.

10.21. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$.

Упражнение 11. Вычислить производную функции по определению.

11.1. $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$ $(z\neq -i)$.

11.2. $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$ $(z\neq -1)$.

11.3. $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ $(z\neq 1)$.

11.4. $f(z)=\dfrac{1}{z-i}$ $(z\neq i)$.

11.5. $f(z)=\dfrac{1}{2z-1}$ $(z\neq \frac{1}{2})$.

11.6. $f(z)=\dfrac{1}{2z+1}$ $(z\neq -\frac{1}{2})$.

11.7. $f(z)=\dfrac{1}{2z-i}$ $(z\neq \frac{i}{2})$.

11.8. $f(z)=\dfrac{1}{2z+i}$ $(z\neq -\frac{i}{2})$.

11.9. $f(z)=z^2$.

11.10. $f(z)=z^3$.

11.11. $f(z)=z^2+2z$.

11.12. $f(z)=z^3-z+1$.

11.13. $f(z)=1-3z^2$.

11.14. $f(z)=z+2z^2$.

11.15. $f(z)=3z-1$.

11.16. $f(z)=2z+3$.

11.17. $f(z)=\dfrac{1}{z}$ $(z\neq 0)$.

11.18. $f(z)=\dfrac{z}{2}+5$.

11.19. $f(z)=\dfrac{2z}{3}$.

11.20. $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.

11.21. $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ $(z\neq -2)$.

Упражнение 12. Исследовать функцию на $\mathbb{C}$-дифференцируемость.

12.1. $f(z)=\operatorname{Re} z$.

12.2. $f(z)=z^2\operatorname{Re} z$.

12.3. $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$.

12.4. $f(z)=z^2\operatorname{Im} z$.

12.5. $f(z)=\operatorname{Re} z^2$.

12.6. $f(z)=z\cdot(\operatorname{Re} z)^2$.

12.7. $f(z)=[\operatorname{Re} z]^2\cdot\operatorname{Im} z$.

12.8. $f(z)=[\operatorname{Im} z]^2\cdot\operatorname{Re} z$.

12.9. $f(z)=z(\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z)$.

12.10. $f(z)=\operatorname{Im} z^2$.

12.11. $f(z)=|z|^2$.

12.12. $f(z)=|\overline{z}|^2$.

12.13. $f(z)=z\operatorname{Re} z$.

12.14. $f(z)=\overline{z}\cdot\operatorname{Im} z$.

12.15. $f(z)=\operatorname{Im} z$.

12.16. $f(z)=z$.

12.17. $f(z)=\bar{z}$.

12.18. $f(z)=2xy-i(x^2+y^2)$.

12.19. $f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$.

12.20. $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$.

12.21. $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z$.

Упражнение 13. Исследовать функцию на голоморфность.

13.1. $f(z)=x+y+i(ax+by)$.

13.2. $f(z)=x^2-y^2+ibxy$.

13.3. $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{ay}{x^2+y^2}$.

13.4. $f(z)=x+2y+i(ax-by)$.

13.5. $f(z)=x-y+i(ax-by)$.

13.6. $f(z)=x+y+i(ax-y)$.

13.7. $f(z)=a(x^2-y^2)+2ixy$.

13.8. $f(z)=x^2+ay^2+ibxy$.

13.9. $f(z)=x+y+i(x+ay)$.

13.10. $f(z)=\dfrac{ax}{x^2+y^2}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

13.11. $f(z)=x^2+ay^2-ibxy$.

13.12. $f(z)=x-y+i(ay+bx)$.

13.13. $f(z)=x^2-y^2+iaxy$.

13.14. $f(z)=ax+by+icy$.

13.15. $f(z)=ax+y+i(bx+cy)$.

13.16. $f(z)=x^2-ay^2+i2xy$.

13.17. $f(z)=\dfrac{ax}{x^2+y^2}+i\dfrac{by}{x^2+y^2}$.

13.18. $f(z)=x-2y+i(bx+cy)$.

13.19. $f(z)=ax+i(bx+cy)$.

13.20. $f(z)=ax+y+i(bx+cy)$.

13.21. $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$.

Упражнение 14. Определить коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке для данного отображения.

14.1. $w=z^2$, $z_0=i$.

14.2. $w=\bar{z}^2$, $z_0=1$.

14.3. $w=\bar{z}+2z$, $z_0=0$.

14.4. $w=z^2$, $z_0=\dfrac{i}{4}$.

14.5. $w=z^2$, $z_0=1-i$.

14.6. $w=z^2$, $z_0=-1+i$.

14.7. $w=z^3$, $z_0=i$.

14.8. $w=z^3$, $z_0=-\dfrac{i}{4}$.

14.9. $w=z^2+2\bar{z}$, $z_0=1$.

14.10. $w=z^2-2\bar{z}$, $z_0=i$.

14.11. $w=e^{2x}(\cos 2y+\sin 2y)$, $z_0=0$.

14.12. $w=e^{2x}(\cos 2y-i\sin 2y)$, $z_0=0$.

14.13. $w=\dfrac{z-1}{z+1}$, $z_0=1$.

14.14. $w=\dfrac{z-(1+i)}{z+1+i}$, $z_0=1+i$.

14.15. $w=\dfrac{z-2+i}{z+2-i}$, $z_0=2-i$.

14.16. $w=\dfrac{z-2i}{z+2i}$, $z_0=2i$.

14.17. $w=\dfrac{z+2}{z-2}$, $z_0=-2$.

14.18. $w=\dfrac{z-2}{z+2}$, $z_0=2$.

14.19. $w=\dfrac{z+2i}{z-2i}$, $z_0=-2i$.

14.20. $w=\dfrac{z+1-i}{z-1+i}$, $z_0=-1+i$.

14.21. $w=\dfrac{z-i}{z+i}$, $z_0=i$.

Упражнение 15. Проверить функцию $u(x,y)$ на гармоничность и найти сопряженную гармоническую функцию $v(x,y)$ в заданной области и соответствующую голоморфную функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

15.1. $u(x,y)=4xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.2. $u(x,y)=2x-3y+5$, $E=\mathbb{C}$.

15.3. $u(x,y)=\dfrac{2x+y}{3(x^2+y^2)}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.4. $u(x,y)=2(x^2-y^2)+4xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.5. $u(x,y)=x^2-y^2-2xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.6. $u(x,y)=\dfrac{x-2y}{2(x^2+y^2)}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.7. $u(x,y)=x^2-y^2+x$, $E=\mathbb{C}$.

15.8. $u(x,y)=3(x^2-y^2)-6xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.9. $u(x,y)=x+2y-1$, $E=\mathbb{C}$.

15.10. $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.11. $u(x,y)=\dfrac{x+y}{4(x^2+y^2)}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.12. $u(x,y)=x^2-y^2+2xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.13. $u(x,y)=x^2-3xy^2$, $E=\mathbb{C}$.

15.14. $u(x,y)=-x+4y-5$, $E=\mathbb{C}$.

15.15. $u(x,y)=xy+1$, $E=\mathbb{C}$.

15.16. $u(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.17. $u(x,y)=2x^3-6xy^2$, $E=\mathbb{C}$.

15.18. $u(x,y)=x^2-y^2+xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.19. $u(x,y)=2x+4y-1$, $E=\mathbb{C}$.

15.20. $u(x,y)=y^2-x^2-4xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.21. $u(x,y)=2(x^2-y^2)-1$, $E=\mathbb{C}$.

Упражнение 16. Найти область, на которой конформна заданная функция.

16.1. $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$.	**16.2.** $f(z)=\dfrac{2z+1}{z-1}$.
16.3. $f(z)=z^2+1$.	**16.4.** $f(z)=z^2-1$.
16.5. $f(z)=2z^2+z-1$	**16.6.** $f(z)=z^2-2z$.
16.7. $f(z)=z^3-1$.	**16.8.** $f(z)=z^3+1$.

16.9. $f(z)=e^{-2x}(\cos 2y-i\sin 2y)$.

16.10. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$.

16.11. $f(z)=z^3-3z$.	**16.12.** $f(z)=\dfrac{z+4}{2z-5}$.
16.13. $f(z)=e^x(\cos y+\sin y)$.	**16.14.** $f(z)=\dfrac{z-3}{2z+1}$.
16.15. $f(z)=e^{-x}(\cos y-\sin y)$.	**16.16.** $f(z)=z^3+3z$.
16.17. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.	**16.18.** $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$.
16.19. $f(z)=3z^2-6z$.	**16.20.** $f(z)=z^3-8$.
16.21. $f(z)=4z^2-8z$.	

– B –

Решение образцовых вариантов

Приведём решение 21 вариантов упражнений.

Задача 1.21. Для комплексных чисел $z_1=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$ и $z_2=\sqrt{3}-i\sqrt{2}$ вычислить сумму, разность, произведение, частное и $z_1+\dfrac{1}{z_2}$.

$$\triangleleft\ z_1+z_2=(\sqrt{3}+i\sqrt{2})+(\sqrt{3}-i\sqrt{2})=(\sqrt{3}+\sqrt{3})+i(\sqrt{2}-\sqrt{2})=2\sqrt{3},$$

$$z_1-z_2=(\sqrt{3}+i\sqrt{2})-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})=(\sqrt{3}-\sqrt{3})+i(\sqrt{2}+\sqrt{2})=2\sqrt{2}i,$$

$$z_1\cdot z_2=(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-i\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(i\sqrt{2})^2=3-2i^2=5,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(i\sqrt{2})^2}=\frac{(3-2)+i\cdot 2\sqrt{6}}{5}=\frac{1}{5}+i\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$z_1+\frac{1}{z_2}=\sqrt{3}+i\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}=\sqrt{3}+i\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{3+2}=\frac{6\sqrt{3}}{5}+i\frac{6\sqrt{2}}{5}.\ \triangleright$$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $z1 := \sqrt{3}+I\cdot\sqrt{2}$

$$z1 := \sqrt{3}+\mathrm{I}\sqrt{2}$$

> $z2 := \sqrt{3}-I\cdot\sqrt{2}$

$$z2 := \sqrt{3}-\mathrm{I}\sqrt{2}$$

> $a := z1+z2$

$$a := 2\sqrt{3}$$

> $b := z1-z2$

$$b := 2\,\mathrm{I}\sqrt{2}$$

> $c := z1\cdot z2$

$$c := (\sqrt{3} + \mathrm{I}\sqrt{2})\,(\sqrt{3} - \mathrm{I}\sqrt{2})$$

> $c := evalc(c)$

$$c := 5$$

> $d := \frac{z1}{z2}$

$$d := \frac{\sqrt{3} + \mathrm{I}\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \mathrm{I}\sqrt{2}}$$

> $d := evalc(d)$

$$d := \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{I}\sqrt{3}\sqrt{2}$$

> $e := z1 + \frac{1}{z2}$

$$e := \sqrt{3} + \mathrm{I}\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3} - \mathrm{I}\sqrt{2}}$$

> $e := evalc(e)$

$$e := \frac{6}{5}\sqrt{3} + \frac{6}{5}\mathrm{I}\sqrt{2}$$

Задача 2.21. Вычислить $(1-i)^3 \cdot (1+i\sqrt{3})^8$, определить модуль и аргумент, полученного комплексного числа и изобразить его.

◁ Пусть $z_1 = 1-i$, $z_2 = 1+i\sqrt{3}$, используя формулы (1.2), (1.3), (1.4) и (1.6) получим:

$$z_1 = 1-i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4},$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$z_1^3 = (1-i)^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2(1+i);$$

$$z_2 = 1+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,\ \arg z_2 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\Rightarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z_2^8 = (1+i\sqrt{3})^8 = 2^8\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right) =$$

$$= 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 256\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -128(1-i\sqrt{3}).$$

Поэтому

$$z = z_1^3 \cdot z_2^8 = (1-i)^3 \cdot (1+i\sqrt{3})^8 = 256(1+i)(1-i\sqrt{3}) =$$

$$= 256\cdot[(1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})] = 256\cdot(1+\sqrt{3}) - i\cdot 256\cdot(\sqrt{3}-1).$$

Это комплексное число изображается на комплексной плоскости точкой $M(256(1+\sqrt{3}), -256(\sqrt{3}-1))$ (рис. 1.11).

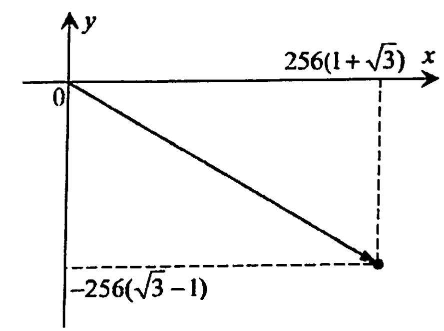


Рисунок 1.11. Геометрическое изображение комплексного числа $z = 256\cdot(1+\sqrt{3}) - i\cdot 256\cdot(\sqrt{3}-1)$ ▷

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $z1 := 1 - I$

$$z1 := 1 - \mathrm{I}$$

> $r1 := |z1|$

$$r1 := \sqrt{2}$$

> $phi1 :=$ argument$(z1)$

$$\phi1 := -\frac{1}{4}\pi$$

> $z2 := 1 + I\cdot\sqrt{3}$

$$z2 := 1 + \mathrm{I}\sqrt{3}$$

> $r2 := |z2|$

$$r2 := 2$$

> $phi2 := \text{argument}(z2)$

$$\phi 2 := \frac{1}{3}\pi$$

> $a := (z1)^3$

$$a := -2 - 2\,I$$

> $b := (z2)^8$

$$b := (1 + I\sqrt{3})^8$$

> $b := evalc(b)$

$$b := -128 + 128\,I\sqrt{3}$$

> $c := a \cdot b$

$$c := (-2 - 2\,I)\,(-128 + 128\,I\sqrt{3})$$

> $c := evalc(c)$

$$c := 256 + 256\sqrt{3} + I\,(256 - 256\sqrt{3})$$

Задача 3.21. Изобразить множество $1 < |z - 2 + 3i| \le 3$ на комплексной плоскости.

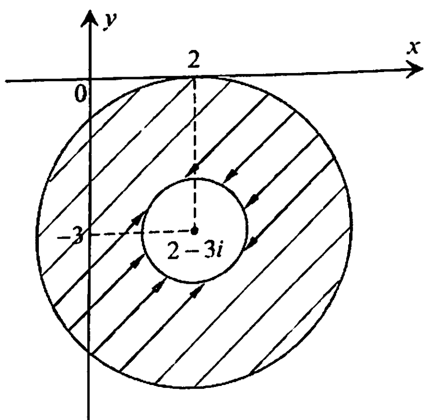


Рисунок 1.12. Кольцо $1 < |z - 2 + 3i| \le 3$

$\lhd$ $|z-2+3i| = |x+iy-2+3i| = |(x-2)+i(y+3)| = \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$ поэтому условие задачи можно записать в виде $1 < (x-2)^2 + (y+3)^2 \le 9$, а это кольцо с центром $(2,-3)$ с внутренним радиусом 1 и внешним радиусом 3 (рис. 1.12). $\rhd$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

> $with(plottools):$

> $r < |z - z0| \le R;\ z0 := 2 - 3 \cdot I;\ r := 1;\ R := 3;$

$$1 < |z - 2 + 3\,I| \text{ and } |z - 2 + 3\,I| \le 3$$
$$z0 := 2 - 3\,I$$
$$r := 1$$
$$R := 3$$

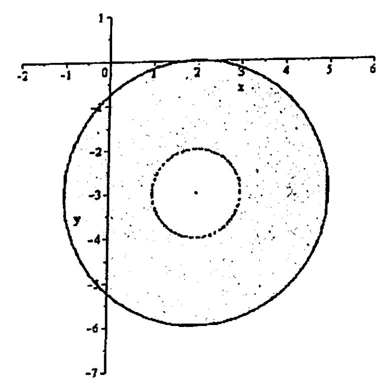
> $p1 := inequal(\{(x - \text{Re}(z0))^2 + (y - \text{Im}(z0))^2 < r^2\}, x = (\text{Re}(z0) - r)$
$..(\text{Re}(z0) + r), y = (\text{Im}(z0) - r)..(\text{Im}(z0) + r), color = white):$

> $p2 := plot([\text{Im}(z0) + \text{sqrt}(r^2 - (x - \text{Re}(z0))^2), \text{Im}(z0) - \text{sqrt}(r^2 - (x$
$- \text{Re}(z0))^2)], x = (\text{Re}(z0) - r)..(\text{Re}(z0) + r), y = (\text{Im}(z0) - r)$
$..(\text{Im}(z0) + r), \text{color} = \text{black}, \text{linestyle} = 2):$

> $p3 := implicitplot(subs(z = x + I*y, \text{abs}(z - z0) = R), x = (\text{Re}(z0) - \text{R} - 1)$
$..(\text{Re}(z0) + \text{R} + 1), y = (\text{Im}(z0) - \text{R} - 1)..(\text{Im}(z0) + \text{R} + 1), filled$
$= true, coloring = [\text{grey}, \text{white}], linestyle = 1):$

> $p0 := disk\left([2, -3], \frac{1}{50}, color = black\right):$

> $display(p0, p1, p2, p3);$



Задача 4.21. Изобразить множество

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$$

на комплексной плоскости.

$$\lhd \begin{cases} \operatorname{Re} z = x, \\ \operatorname{Im} z = y, \end{cases} \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + y > 1, \\ 0 < y < x. \end{cases}$$

На рис. 1.13 изображен вид этого множества.

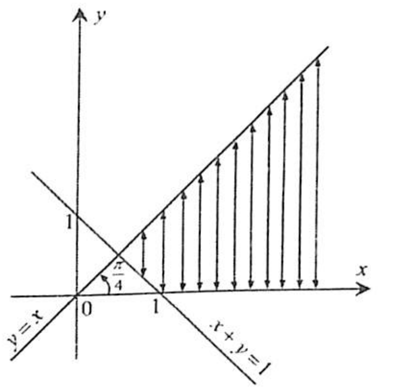


Рисунок 1.13. Множество $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1, 0 < \arg z < \pi/4\}$ $\rhd$

Задача 5.21. Доказать, что следующее уравнение является уравнением окружности, найти центр и радиус окружности:

$$|z|^2 + (4-3i)z + (4+3i)\overline{z} + 21 = 0.$$

$\lhd$ Имеем

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ \overline{z} = x - iy, \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Поэтому

$$0 = |z|^2 + (4-3i)z + (4+3i)\overline{z} + 21 =$$

$$= x^2 + y^2 + (4-3i)(x+iy) + (4+3i)\cdot(x-iy) + 21 =$$

$$= x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = (x+4)^2 + (y+3)^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 2^2.$$

Это окружность с центром $(-4,-3)$ и радиусом 2. $\rhd$

Задача 6.21. Для точки комплексной плоскости $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ найти образ на сфере Римана.

$\lhd$ Используем формулы (1.7)

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{\sqrt{2}}{2},\ |z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} = 1,$$

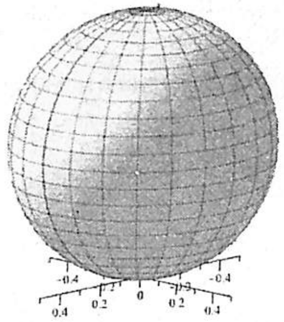
поэтому

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2} = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2} = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{1}{2}.$$

То есть точка на сфере Римана имеет координаты $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$. $\rhd$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

```
> with(geom3d):
> sphere(s, [point(o, 0, 0, 1/2), 1/2]), point(P, sqrt(2)/4, sqrt(2)/4, 1/2):
> draw([s(color=yellow), P(color=blue)])
```



Задача 7.21. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}.$$

◁ Рассмотрим частичную сумму ряда

$$z_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i\frac{k\pi}{4}}}{2^k},$$

вычисляя предел последовательности z_n, получим

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i\frac{k\pi}{4}}}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{e^{\frac{in\pi}{4}}}{2^n}}{1-\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}}=$$

$$=\left\|\left|e^{\frac{in\pi}{4}}\right|=\left|\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right|=1\right\|=\frac{1}{1-\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}z_n=\operatorname{Re}\frac{1}{1-\dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2}}=\operatorname{Re}\frac{2}{2-e^{\frac{i\pi}{4}}}=\operatorname{Re}\frac{2}{2-\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{4}{4-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{4(4-\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{4-\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}.\ ▷$$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

$> A:=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2^i}\cdot\cos\left(\frac{i\cdot\pi}{4}\right)\right)$

$$A:=\frac{\left(-\frac{16}{17}-\frac{3}{17}\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{1}{4}(n+1)\pi\right)}{2^{n+1}}+\frac{\left(\frac{4}{17}+\frac{5}{17}\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{1}{4}(n+1)\pi\right)}{2^{n+1}}+\frac{16}{17}+\frac{3}{17}\sqrt{2}$$

$> \lim_{n\to\infty}A$

$$\frac{16}{17}+\frac{3}{17}\sqrt{2}$$

Задача 8.21. Для функции $z=(1+i)+[(2+3i)-(1+i)\}]t$ $(0\le t\le 1)$ определить вид кривой.

$$◁\ z(t)=x(t)+iy(t)=(1+i)+[(2+3i)-(1+i)]t=$$
$$=1+i+(1+2i)t=1+t+i(1+2t).$$

Эту кривую можно описать параметрически

$$\begin{cases}x(t)=1+t,\\ y(t)=1+2t,\end{cases}\quad 0\le t\le 1,$$

исключив параметр t, получим $y=1+2t=2(1+t)-1=2x-1$, $1\le x\le 2$. Это отрезок прямой с началом $A(1,1)$ и концом $B(2,3)$ (рис. 1.14).

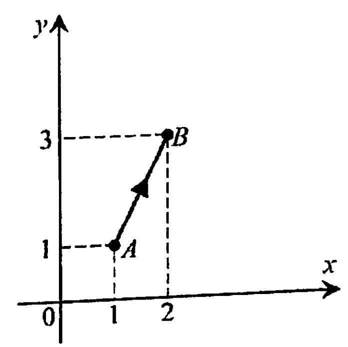


Рисунок 1.14. Отрезок AB ▷

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

$> with(plots):$

> $z(t) := (1+I) + ((2+3\cdot I) - (1+I))\cdot t$

$$z := t \to 1 + I + (1+2I)\,t$$

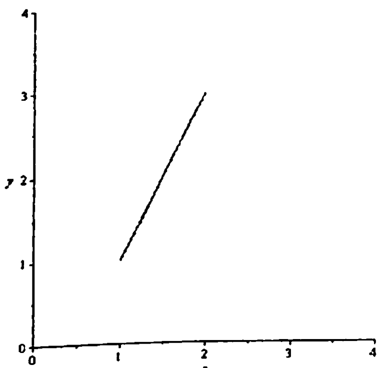
> $x(t) := 1 + t$

$$x := t \to 1 + t$$

> $y(t) := 1 + 2t$

$$y := t \to 1 + 2t$$

> $plot([x(t), y(t), t = 0..1], x = 0..4, y = 0..4, color = red, thickness = 2, grid = [10, 10])$



Задача 9.21. Исследовать на однолистность функцию $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ в области $E = \{|z| < 2\}$.

$\triangleleft$ Функция однолистна если разным аргументам соответствуют разные значения функции, в данном случае

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) \Rightarrow \frac{(z_2 - z_1)(1 - z_1 z_2)}{z_1 z_2} = 0 \Rightarrow z_1 z_2 = 1.$$

В области E есть две разные точки $z_1 = i \in E$, $z_2 = -i \in E$, что $z_1 \cdot z_2 = 1$, т.е. $f(z_1) = f(z_2)$. Поэтому функция не является однолистной в области E. $\triangleright$

Задача 10.21. Исследовать на непрерывность $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

$\triangleleft$ $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$, поэтому для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ получим

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{1}{(z+\Delta z)^2 + 1} - \frac{1}{z^2+1} = \frac{-\Delta z \cdot (2z+1)}{[(z+\Delta z)^2+1]\cdot(z^2+1)}.$$

Откуда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0$, если z не равно i или $-i$, поэтому $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ непрерывная функция для $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. $\triangleright$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

> $f := \frac{1}{1+z^2}$

$$f := \frac{1}{z^2+1}$$

> $solve(\{1 + z^2 = 0\}, \{z\})$

$$\{z = I\}, \{z = -I\}$$

> $\lim\limits_{z \to I} f$

$$undefined$$

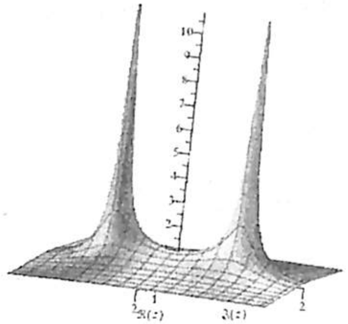
> $\lim\limits_{z \to -I} f$

$$undefined$$

> $\lim\limits_{z \to a} f$

$$\frac{1}{a^2+1}$$

> $complexplot3d(f, z = -2 - 2I..2 + 2I, grid = [50, 50])$



Задача 11.21. Вычислить производную функции $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ $(z \neq -2)$ по определению.

$\lhd$ Если $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, то, согласно определению 1.13, получим:

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1}{z+\Delta z+2}-\dfrac{1}{z+2}}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{(z+\Delta z+2)(z+2)} = -\frac{1}{(z+2)^2}. \rhd$$

Задача 12.21. Исследовать функцию $f(z)=z\cdot \operatorname{Im} z$ на $\mathbb{C}$-дифференцируемость.

$\lhd$ Это упражнение соответствует пункту 6 теории.

$$f(z)=z\cdot \operatorname{Im} z=(x+iy)\cdot y = xy+iy^2 \Rightarrow u(x,y)=xy,\ v(x,y)=y^2.$$

Эти функции дифференцируемы для любых $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Поэтому необходимо проверить выполнение условий Коши—Римана. В данном случае

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

и уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

выполняются только в точке $(0,0)$. То есть данная функция $\mathbb{C}$-дифференцируема только в точке $z=0$. $\rhd$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

$> f(z) := z\cdot \operatorname{Im}(z)$

$$f := z \to z\,\Im(z)$$

$> u := x\cdot y$

$$u := x\,y$$

$> v := y^2$

$$v := y^2$$

$> solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}u=\frac{\partial}{\partial y}v, \frac{\partial}{\partial y}u=-\frac{\partial}{\partial x}v\right\}, \{x,y\}\right)$

$$\{x=0, y=0\}$$

Задача 13.21. Исследовать функцию $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$ на голоморфность.

$\lhd$ $f(z)=x+ay+i(bx+cy) \Rightarrow u(x,y)=x+ay,\ v(x,y)=bx+cy$.

Эти функции дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$, проверим условия Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=a,\ \frac{\partial v}{\partial x}=b,\ \frac{\partial v}{\partial y}=c$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-a \end{cases} \Rightarrow b=-a \text{ и } c=1.$$

То есть функция голоморфна в $\mathbb{C}$, если

$$f(z)=x+ay+i(-ax+y)=(1-ai)z. \rhd$$

Задача 14.21. Определить коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0 = i$ для отображения $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

◁ Для произвольного $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ имеем

$$w'(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)' = \frac{2i}{(z+i)^2} \Rightarrow w'(i) = -\frac{i}{2}.$$

Поэтому коэффициент растяжения и угол поворота будут иметь вид

$$R(\varphi) = |w'(i)| = \left|-\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2},\ \alpha(\varphi) = \arg w'(i) = \arg\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}. \triangleright$$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $f(z) := \dfrac{z-I}{z+I}$

$$f := z \to \frac{z-I}{z+I}$$

> $\dfrac{d}{dz} f(z)$

$$\frac{1}{z+I} - \frac{z-I}{(z+I)^2}$$

> $a(z) := \dfrac{1}{z+I} - \dfrac{z-I}{(z+I)^2}$

$$a := z \to \frac{1}{z+I} - \frac{z-I}{(z+I)^2}$$

> $a(I)$

$$-\frac{1}{2} I$$

> $k = |a(I)|$

$$k = \frac{1}{2}$$

> $\theta = \text{argument}(a(I))$

$$\theta = -\frac{1}{2}\pi$$

Задача 15.21. Для функции $u(x,y) = 2(x^2 - y^2) - 1$ проверить её на гармоничность и найти сопряженную гармоническую функцию

$v(x,y)$ в заданной области и соответствующую голоморфную функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

◁ Заданная функция очевидно удовлетворяет уравнению Лапласа. Функция $v(x,y)$, сопряженная для $u(x,y)$ удовлетворяет условиям Коши—Римана, поэтому необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4y \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(x,y) = \int 4y\,dx + \varphi(y) = 4xy + \varphi(y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 4x + \varphi'(y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + \varphi'(y) = 4x \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = \text{const} = c \Rightarrow v(x,y) = 4xy + c$$

$$\Rightarrow f(z) = u + iv = 2(x^2 - y^2) - 1 + i(4xy + c) =$$

$$= 2(x+iy)^2 - 1 + ic = 2z^2 - 1 + ic. \triangleright$$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

> $with(VectorCalculus):$

> $u := 2(x^2 - y^2) - 1$

$$u := 2x^2 - 2y^2 - 1$$

> $\dfrac{\partial}{\partial x} u$

$$4x$$

> $\dfrac{\partial}{\partial y} u$

$$-4y$$

> $Laplacian(u, [x, y])$

$$0$$

> $PDE := \dfrac{\partial}{\partial x} v(x,y) = 4y$

$$PDE := \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = 4y$$

> $ans := pdsolve(PDE)$

$$ans := v(x,y) = 4yx + \_F1(y)$$

> $\dfrac{\partial}{\partial y} \text{ans}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\, v(x,y) = 4\,x + \frac{d}{dy}\,\_F1(y)$$

$> 4\,x + \frac{d}{dy}\,\_F1(y) = 4\,x$

$$4\,x + \frac{d}{dy}\,\_F1(y) = 4\,x$$

```
> # isolate for diff(_F1(y),y)
isolate( , diff(_F1(y),y) );
```

$$\frac{d}{dy}\,\_F1(y) = 0$$

$> c := dsolve\left(\frac{d}{dy}\,\_F1(y) = 0\right)$

$$c := \_F1(y) = \_C1$$

$> v := 4\,xy + c$

$$v := \_F1(y) + 4\,xy = \_C1 + 4\,xy$$

$>$

$> f = u + I \cdot v$

$$f = \left(\mathrm{I}\,(\_F1(y) + 4\,xy) + 2\,x^2 - 2\,y^2 - 1 = \mathrm{I}\,(\_C1 + 4\,xy) + 2\,x^2 - 2\,y^2 - 1\right)$$

$> f = 2\,z^2 - 1 + Ic$

$$f = 2\,(x + \mathrm{I}\,y)^2 + Ic - 1$$

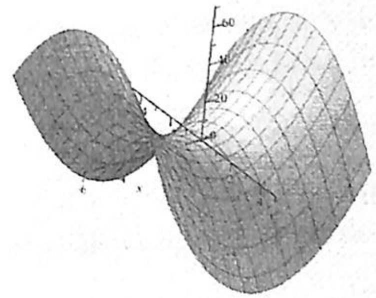
$> v := 4\,xy$

$$v := 4\,xy$$

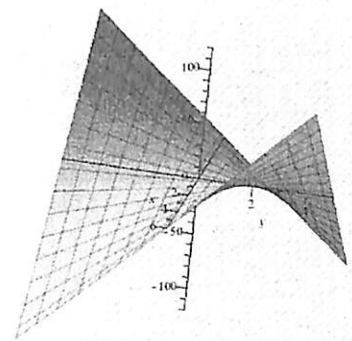
$> Laplacian(\mathrm{v}, [x, y])$

$$0$$

$> plot3d(\mathrm{u}, x = -5\,..6, y = -5\,..5, grid = [30, 30])$



$> plot3d(4 \cdot x \cdot y, x = -5\,..6, y = -5\,..5, grid = [30, 30])$



Задача 16.21. Найти область, в которой конформна функция $f(z) = 4z^2 - 8z$.

$\triangleleft$ Здесь используем пункт 8 теоретического введения.

$$f'(z) = (4z^2 - 8z)' = 8(z-1) \neq 0 \;\Rightarrow\; z \neq 1.$$

Найдём условие однолистности. Если $f(z_1) = f(z_2)$, то

$$4z_1^2 - 8z_1 = 4z_2^2 - 8z_2 \;\Rightarrow\; 4(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 2) = 0,$$

т.е. функция однолистна в области, если в ней нет двух точек с условием

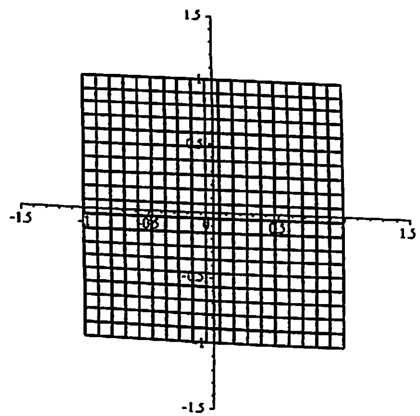
$$z_1 + z_2 = 2. \tag{1.18}$$

Итак, данная функция голоморфна в области $E \subset \mathbb{C}$, если область не содержит точку $z=1$ и пар точек с условием (1.18). Например, в области $E=\{z \in \mathbb{C}: -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ эта функция не конформна (рис. 1.15). Но, в области $G=\left\{z \in \mathbb{C}: -2 \le x \le -1, -1 \le y \le \dfrac{1}{2}\right\}$ — конформна (рис. 1.16). ▷

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

> $conformal(z, z=-1-I..1+I, -1.5-1.5\cdot I..1.5+1.5\cdot I, grid=[20,20])$



> $conformal(4\cdot z^2-8\cdot z, z=-1-I..1+I, grid=[20,20])$

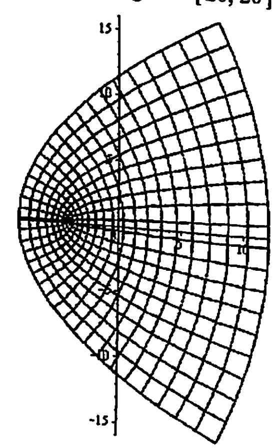
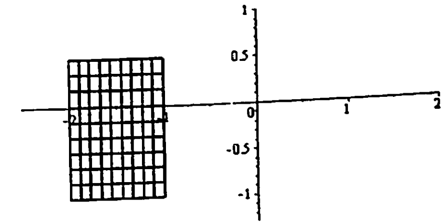


Рисунок 1.15. Образ области E

> $conformal\left(z, z=-2-I..-1+\frac{1}{2}\cdot I, -2.5-1.3\cdot I..2+I, grid=[10,10]\right)$



> $conformal\left(4\cdot z^2-8\cdot z, z=-2-I..-1+\frac{1}{2}\cdot I, grid=[20,20]\right)$

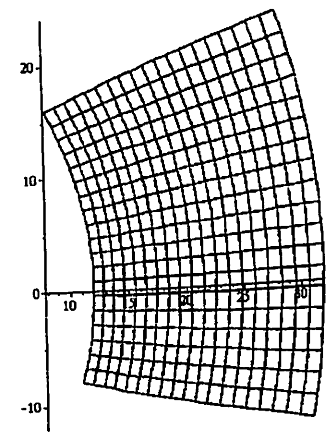


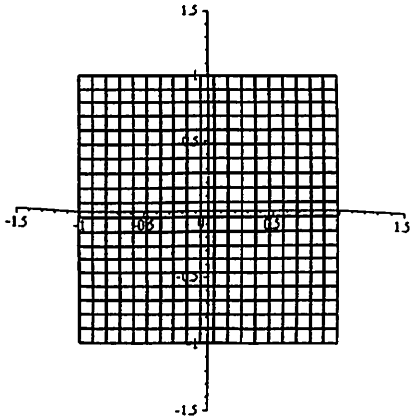
Рисунок 1.16. Образ области G

Итак, данная функция голоморфна в области $E \subset \mathbb{C}$, если область не содержит точку $z=1$ и пар точек с условием (1.18). Например, в области $E=\{z \in \mathbb{C}: -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ эта функция не конформна (рис. 1.15). Но, в` области $G=\left\{z \in \mathbb{C}: -2 \le x \le -1, -1 \le y \le \dfrac{1}{2}\right\}$ — конформна (рис. 1.16). ▷

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

$> \ with(plots):$

$> \ conformal(z, z=-1-I..1+I, -1.5-1.5\cdot I..1.5+1.5\cdot I, grid=[20, 20])$



$> \ conformal(4\cdot z^2 - 8\cdot z, z=-1-I..1+I, grid=[20, 20])$

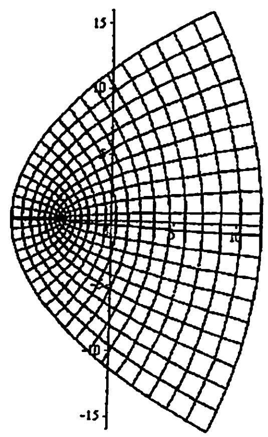
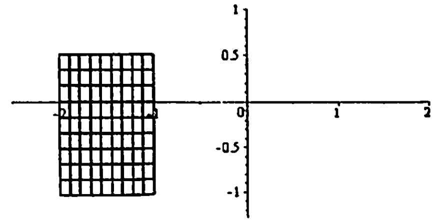


Рисунок 1.15. Образ области E

$> \ conformal\left(z, z=-2-I..-1+\frac{1}{2}\cdot I, -2.5-1.3\cdot I..2+I, grid=[10, 10]\right)$



$> \ conformal\left(4\cdot z^2 - 8\cdot z, z=-2-I..-1+\frac{1}{2}\cdot I, grid=[20, 20]\right)$

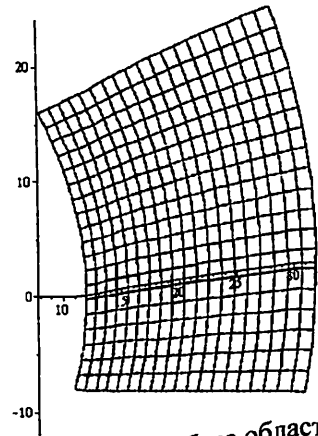


Рисунок 1.16. Образ области G

§ 2. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЫПОЛНЯЕМЫЕ ИМИ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

- Теорема Римана.
- Принцип сохранения области.
- Линейная функция.
- Дробно-линейная функция.
- Степенная функция.
- Функция Жуковского.
- Показательная функция.
- Тригонометрические функции.
- Многозначные функции.
- Принцип симметрии.
- Основные определения и теоремы.

– A –

Основные определения и теоремы

В теории конформных отображений изучаются две основные задачи.

Задача 1. Даны область E в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и функция $w=f(z)$ в этой области. Найти образ $f(E)$.

Задача 2. Даны две области $E\subset\mathbb{C}_z$, $F\subset\mathbb{C}_w$. Найти функцию $w=f(z)$, конформно отображающую E на F.

Возможность решения этих задач опирается на следующие теоремы.

Теорема 2.1 (Риман). *Если границы областей E и F расширенной комплексной плоскости, соответственно $\overline{\mathbb{C}}_z$ и $\overline{\mathbb{C}}_w$, состоят более чем из одной точки, то существует функция $w=f(z)$, конформно отображающая E на F.*

Теорема 2.2 (принцип сохранения области). *Образ области при голоморфном отображении, отличном от константы, является областью.*

На практике, часто требуется решение задачи отображения заданной области E на более простые области, например, на единичный круг или верхнюю полуплоскость. Решение задач опирается на аналитические и геометрические свойства элементарных функций.

1. Линейная функция

Определение 2.1. *Функция*

$$w(z)=az+b,\ (a,b\in\mathbb{C},\ a\neq 0) \tag{2.1}$$

называется линейной функцией (линейным отображением).

Линейная функция конформно отображает комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$ на комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$.

Рассмотрим частные случаи линейной функции.

1) Функция $w(z)=z+b$ $(b\in\mathbb{C})$ осуществляет параллельный перенос на вектор b.

2) Функция $w(z)=e^{i\alpha}z$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ осуществляет поворот вокруг начала координат на угол α.

Например, функция

$$w=iz=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)z=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot z$$

осуществляет поворот 90° вокруг начала координат, а функция

$$w=-z$$

осуществляет поворот 180°.

3) Функция $w=kz$ $(k\in\mathbb{R})$ — гомотетия с центром в начале координат и с коэффициентом k.

В общем, отображение, осуществляемое линейной функцией, является композицией поворота вокруг начала координат на угол $\arg a$, гомотетии с центром в начале координат с коэффициентом $|a|$

§ 2. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЫПОЛНЯЕМЫЕ ИМИ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

- Теорема Римана.
- Принцип сохранения области.
- Линейная функция.
- Дробно-линейная функция.
- Степенная функция.
- Функция Жуковского.
- Показательная функция.
- Тригонометрические функции.
- Многозначные функции.
- Принцип симметрии.
- Основные определения и теоремы.

– А –

Основные определения и теоремы

В теории конформных отображений изучаются две основные задачи.

Задача 1. Даны область E в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и функция $w=f(z)$ в этой области. Найти образ $f(E)$.

Задача 2. Даны две области $E\subset\mathbb{C}_z$, $F\subset\mathbb{C}_w$. Найти функцию $w=f(z)$, конформно отображающую E на F.

Возможность решения этих задач опирается на следующие теоремы.

Теорема 2.1 (Риман). *Если границы областей E и F расширенной комплексной плоскости, соответственно $\overline{\mathbb{C}}_z$ и $\overline{\mathbb{C}}_w$, состоят более чем из одной точки, то существует функция $w=f(z)$, конформно отображающая E на F.*

Теорема 2.2 (принцип сохранения области). *Образ области при голоморфном отображении, отличном от константы, является областью.*

На практике, часто требуется решение задачи отображения заданной области E на более простые области, например, на единичный круг или верхнюю полуплоскость. Решение задач опирается на аналитические и геометрические свойства элементарных функций.

1. Линейная функция

Определение 2.1. *Функция*

$$w(z)=az+b,\ (a,b\in\mathbb{C},\ a\neq 0) \tag{2.1}$$

называется линейной функцией (линейным отображением).

Линейная функция конформно отображает комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$ на комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$.

Рассмотрим частные случаи линейной функции.

1) Функция $w(z)=z+b$ $(b\in\mathbb{C})$ осуществляет параллельный перенос на вектор b.

2) Функция $w(z)=e^{i\alpha}z$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ осуществляет поворот вокруг начала координат на угол α.

Например, функция

$$w=iz=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)z=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot z$$

осуществляет поворот 90° вокруг начала координат, а функция

$$w=-z$$

осуществляет поворот 180°.

3) Функция $w=kz$ $(k\in\mathbb{R})$ — гомотетия с центром в начале координат и с коэффициентом k.

В общем, отображение, осуществляемое линейной функцией, является композицией поворота вокруг начала координат на угол $\arg a$, гомотетии с центром в начале координат с коэффициентом $|a|$

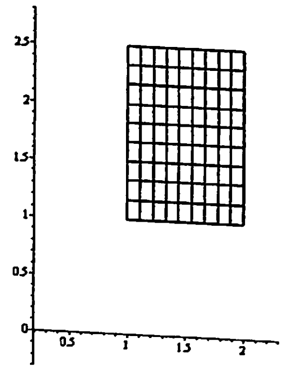
и параллельного переноса на вектор b. На практике пользуются этими свойствами линейной функции.

Пример. Найти образ области $D=\{z\in\mathbb{C}:1<\operatorname{Re}z<2;1<\operatorname{Im}z<2{,}5\}$ с помощью отображения $w=(1+i)z+2-i$.

Покажем решение этой задачи с помощью математического пакета Maple.

> *with*(*plots*) :

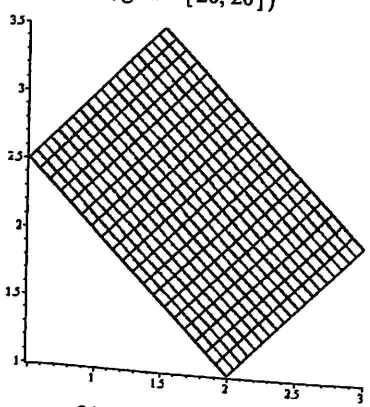
> *conformal*(*z*, *z* = 1 + *I*..2 + 2.5·*I*, 0.2 − 0.3·*I*..2.3 + 2.8·*I*, *grid* = [10, 10])



> *w* := (1 + *I*)·*z* + 2 − *I*

$$w := (1+\mathrm{I})\,z+2-\mathrm{I}$$

> *conformal*(*w*, *z* = 1 + *I*..2 + 2.5·*I*, *grid* = [20, 20])



Пусть функция $w=f(z)$ задана в некоторой области $E\subset\mathbb{C}$.

Определение 2.2. *Если в точке $a\in E$ выполняется равенство*

$$f(a)=a,$$

то точка $z=a$ называется неподвижной точкой отображения $w=f(z)$.

Если $a\neq 1$, то отображение $w(z)=az+b$ имеет две неподвижные точки

$$z_1=\infty,\ z_2=\frac{b}{1-a}.$$

Если $a=1$, то неподвижная точка одна $z=\infty$.

2. Дробно-линейная функция

Определение 2.3. *Функция вида*

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\ (a,b,c,d\in\mathbb{C}) \tag{2.2}$$

называется дробно-линейной функцией (дробно-линейным отображением).

Предполагается, что $ad-bc\neq 0$, иначе функция становится постоянной.

Дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$. Причем $w\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$, $w(\infty)=\frac{a}{c}$.

Дробно-линейная функция обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Суперпозиция дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением. Обратное к дробно-линейному отображению также является дробно-линейным отображением.

Свойство 2. Дробно-линейное отображение переводит произвольные окружность или прямую на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ в окружность или прямую на плоскости $\overline{\mathbb{C}}_w$.

Это свойство называется круговым свойством дробно-линейного отображения (прямую можно рассматривать как окружность бесконечного радиуса).

Замечание. Для того, чтобы определить куда перейдёт окружность — в окружность или прямую, нужно определить есть ли на рассматриваемой окружности точка $z=-\dfrac{d}{c}$, обращающая знаменатель в нуль.

Например, отображение

$$w=\frac{1}{z-3}$$

переводит окружность $\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ в окружность, а окружность $\{z\in\mathbb{C}:|z|=3\}$ в прямую.

В комплексной плоскости рассматривается симметрия относительно прямой также как в элементарной геометрии. Кроме того определяется симметрия относительно окружности.

Определение 2.4. *Точки z_1 и z_1^* называются симметричными относительно окружности $\gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=R\}$, если*

$$\begin{cases}\arg(z_1^*-z_0)=\arg(z_1-z_0),\\ |z_1^*-z_0|\cdot|z_1-z_0|=R^2.\end{cases}$$

Если точки симметричны относительно γ, то

$$z_1^*-z_0=\frac{R^2}{\overline{z_1-z_0}}. \tag{2.3}$$

Свойство 3. При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности или прямой переходит в пару точек симметричных образу этой окружности или прямой.

Это свойство называется свойством сохранения симметрии.

Свойство 4. Существует единственная дробно-линейная функция, отображающая три разные точки z_1, z_2, z_3 на плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ в разные точки w_1, w_2, w_3 на плоскости $\overline{\mathbb{C}}_w$.

Это отображение находится из соотношения

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \tag{2.4}$$

которое называется *ангармоническим отношением*.

Свойство 5. Функция

$$w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{z-\bar{a}},\ \operatorname{Im}a>0,\ \theta\in\mathbb{R}, \tag{2.5}$$

является общим видом отображения верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im}z>0\}$ на единичный круг $\{|w|<1\}$.

Свойство 6. Функция

$$w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ |a|<1,\ \theta\in\mathbb{R}, \tag{2.6}$$

является общим видом отображения единичного круга $\{|z|<1\}$ на единичный круг $\{|w|<1\}$.

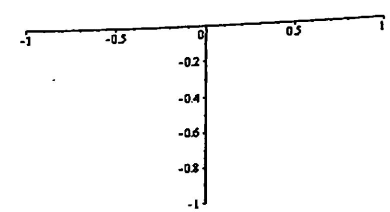
Пример. Найти образ области $D=\{z:\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$ с помощью отображения $w=\dfrac{1}{z}$.

Покажем решение этой задачи с помощью математического пакета Maple.

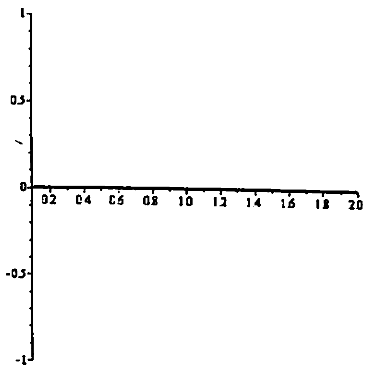
```
> with(plots):
> w := 1/z
```

$$w:=\frac{1}{z}$$

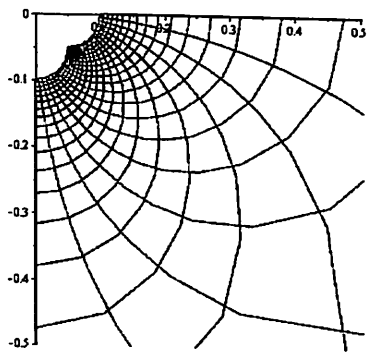
```
> conformal(w, z = 0 + 0·I..0 + 20·I, grid = [10, 10])
```




```
> conformal(w, z = 0 + 0·I..10 + 0·I, grid = [10, 10])
```



> $conformal(w, z = 0 + 0 \cdot I..10 + 10 \cdot I, 0 - 0.5 \cdot I..0.5, grid = [20, 20])$



3. Степенная функция

Определение 2.5. *Функция*

$$w = z^n \; (n \in \mathbb{N},\ n > 1) \tag{2.7}$$

называется степенной функцией.

Эта функция голоморфна в $\mathbb{C}$ и осуществляет конформное отображение в окрестности произвольной точки $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, т.к. $w' = nz^{n-1}$ отлична от нуля в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Если положить $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, то

$$\begin{cases} \rho = r^n, \\ \psi = n\varphi. \end{cases} \tag{2.8}$$

Характер отображения этой функцией отражен на рис. 2.1.

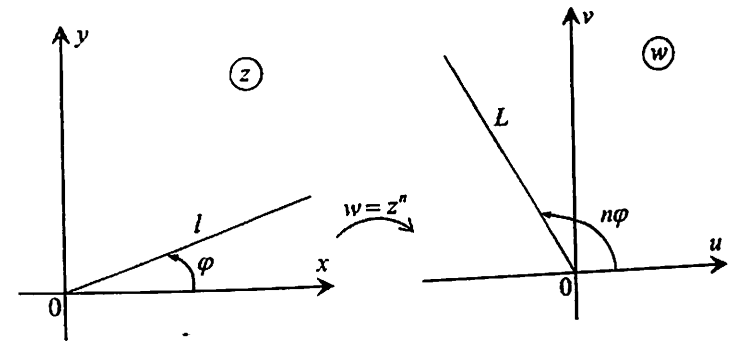


Рисунок 2.1. Отображение $w = z^n$.

Если область состоит из точек, аргументы которых меньше $\frac{2\pi}{n}$, то отображение $w = z^n$ будет однолистным и следовательно конформным.

Функция $w = z^n$ область вида

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

отображает конформно на плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

На практике функция $w = z^n$ используется для отображения угловых областей на более простые области.

Пример. Найти образы прямых $D = \{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ и $G = \{z : \operatorname{Im} z = 1\}$ с помощью отображения $w = z^2$.

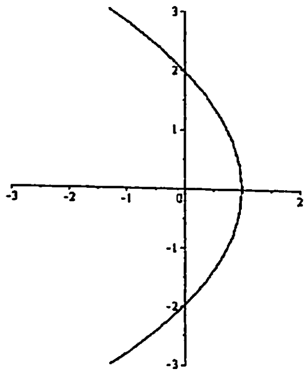
Покажем решение этой задачи с помощью математического пакета Maple.

> $with(plots):$

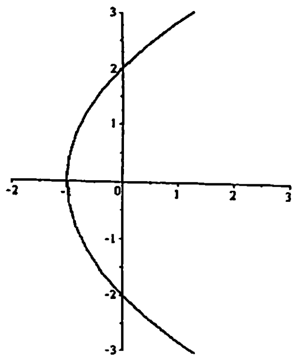
> $w := z^2$

$$w := z^2$$

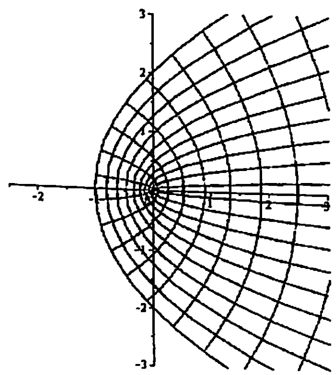
> $conformal(w, z = 1 - 2 \cdot I..1 + 2 \cdot I, -3 - 3 \cdot I..2 + 3 \cdot I, grid = [20, 20])$



> $conformal(w, z=-2+I..2+I, -2-3\cdot I..3+3\cdot I, grid=[20,20])$



> $conformal(w, z=-2-I..2+I, -2.5-3\cdot I..3+3\cdot I, grid=[20,20])$



4. Функция Жуковского

Определение 2.6. *Функция*

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{2.9}$$

называется функцией Жуковского.

Функция Жуковского голоморфна в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Её производная

$$w'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

отлична от нуля всюду в этой области, кроме точек $z=\pm 1$, откуда видно, что отображение (2.9) конформно в каждой конечной точке $z\neq 0,\pm 1$.

Для однолистности функции Жуковского в какой-либо области D необходимо и достаточно, чтобы она не содержала никакой пары точек z_1 и z_2, для которых

$$z_1 z_2 = 1. \tag{2.10}$$

Примером такой области является единичный круг $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ или внешность единичного круга $U^*=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$. Функция Жуковского отображает их на всю плоскость с разрезом $[-1,1]$.

Рельеф функции Жуковского изображен на рис. 2.2.

> $with(plots):$

> $complexplot3d\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=-3-6\cdot I..3+6\cdot I, grid=[50,50]\right)$

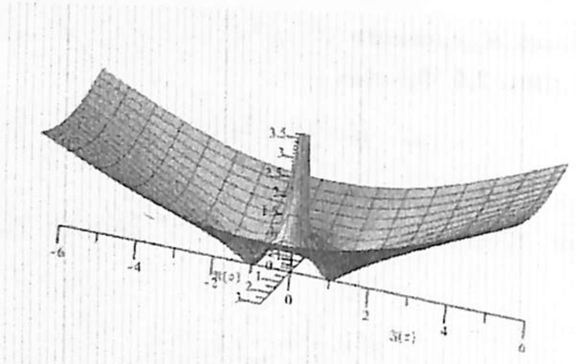


Рисунок 2.2. Рельеф функции Жуковского

Если в функции Жуковского положить $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, то

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right),$$

поэтому

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Из (2.9) и (2.11) получим следующие свойства функции Жуковского:

1) Образом окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r, r > 1\}$ будет эллипс с фокусами $(-1,0)$, $(1,0)$ и полуосями (рис. 2.3)

$$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

2) Образом окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r, r < 1\}$ будет эллипс с фокусами $(-1,0)$, $(1,0)$ и полуосями (рис. 2.4)

$$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right).$$

3) Окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ переходит в отрезок, соединяющий точки $(-1,0)$ и $(1,0)$ (рис. 2.5).

4) Образ луча $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = 0\}$ — луч $\{w \in \mathbb{C} : \arg w = 0, w \geq 1\}$, проходимый дважды. Образ луча $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi\}$ — луч $\{w \in \mathbb{C} : \arg w = \pi, w \geq 1\}$, также проходимый дважды (рис. 2.6 и 2.7).

5) Образом лучей $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \dfrac{\pi}{2}\right\}$ и $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ будет прямая $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0\}$ (рис. 2.8).

6) Образом луча

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi; \varphi \neq 0, \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi \neq \pi, \varphi = \frac{3\pi}{2}\right\}$$

будет соответствующая ветвь гиперболы (рис. 2.9)

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1.$$

Покажем, теперь, все эти свойства с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

> $conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right), z = 2 - \pi\cdot I..2 + \pi\cdot I, grid = [50, 50], coords = \mathrm{polar}\right)$

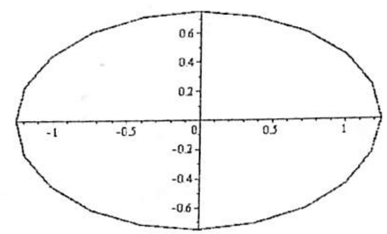


Рисунок 2.3. Образ окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r, r > 1\}$ — эллипс

> $conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right), z = \frac{1}{3} - \pi\cdot I..\frac{1}{3} + \pi\cdot I, grid = [50, 50], coords = \mathrm{polar}\right)$

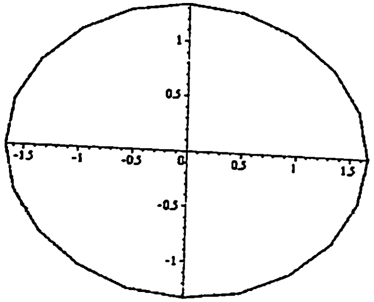


Рисунок 2.4. Образ окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r, r < 1\}$ — эллипс

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z = 0.9999 - \pi\cdot I..0.9999 + \pi\cdot I, grid = [10, 10], coords = \mathrm{polar}, thickness = 5\right)$

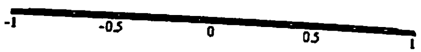


Рисунок 2.5. Образ окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — отрезок

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z = 0 - 0\cdot I..10 + 0\cdot I, grid = [10, 10], coords = \mathrm{polar}\right)$

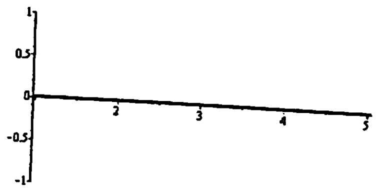


Рисунок 2.6. Образ луча $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = 0\}$ — луч

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z = -10 - 0\cdot I..0 + 0\cdot I, grid = [10, 10], coords = \mathrm{polar}\right)$

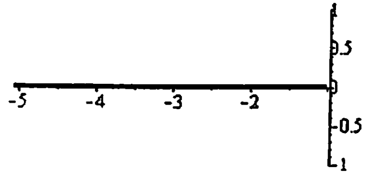


Рисунок 2.7. Образ луча $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi\}$ — луч

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z = 0 - 6\cdot I..0 + 6\cdot I, grid = [50, 50], thickness = 5\right)$

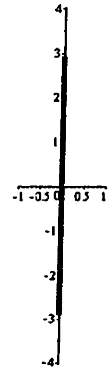


Рисунок 2.8. Образ лучей $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi/2\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = 3\pi/2\}$ — прямая

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z = -6 + \frac{\pi}{3}\cdot I..6 + \frac{\pi}{3}\cdot I, grid = [10, 10], coords = \mathrm{polar}\right)$

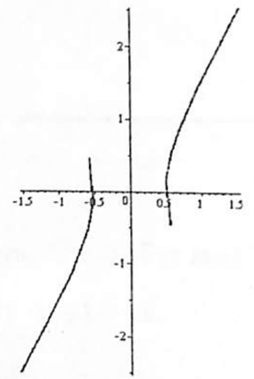
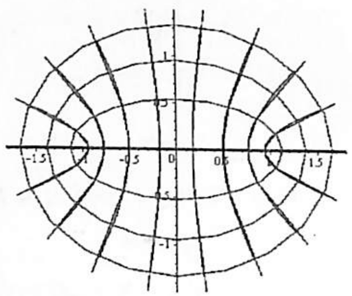


Рисунок 2.9. Образ луча $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$ — ветви гиперболы

> $conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=-3-\pi\cdot I..3+\pi\cdot I, grid=[10,10], coords=\text{polar}\right)$



5. Функция e^z

Определение 2.6. *Функция*

$$e^z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \ (z \in \mathbb{C})$$

называется показательной функцией.

Если $z = x + iy$, то имеет место равенство

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2.12)$$

Рельеф этой функции изображен ниже.

> $with(plots):$

> $complexplot3d(e^z, z=-5-2\cdot I..1+2\cdot I, grid=[30,30])$

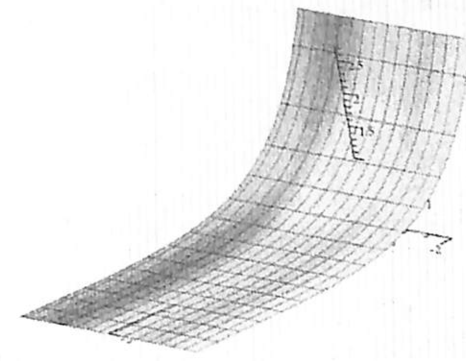


Рисунок 2.10. Рельеф показательной функции

Функция $w = e^z$ имеет следующие свойства:

1) Функция e^z голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$ её производная

$$(e^z)' = e^z.$$

2) Для функции e^z сохраняется обычная теорема сложения

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2} \ (z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in \mathbb{C}).$$

3) Функция e^z периодическая, с мнимым основным периодом $2\pi i$.

4) Для любого $z \in \mathbb{C}$ производная $(e^z)' \neq 0$, поэтому $w = e^z$ конформна в окрестности любой точки.

Из соотношения (2.12) следует, что $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$, поэтому образом прямой $\{x = x_0\}$ является окружность $\{|w| = e^{x_0}\}$ (рис. 2.11), а прямой $\{y = y_0\}$ луч $\{\arg w = y_0\}$ (рис. 2.12). Показательная функция однолистна в области $\Pi_k = \{y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$, здесь $y_0 \in \mathbb{R}$.

Она отображает каждую из областей

$$\Pi_k = \{z \in \mathbb{C} : 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\},\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

конформно в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ — плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси. Аналогично, область $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ отображается в верхнюю полуплоскость (рис. 2.13).

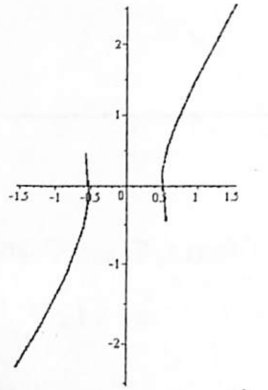
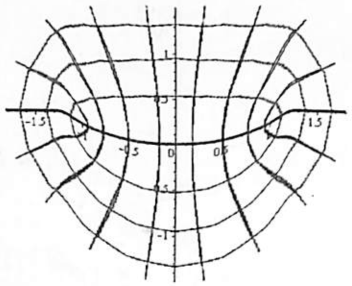


Рисунок 2.9. Образ луча $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$ — ветви гиперболы

> $conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=-3-\pi\cdot I..3+\pi\cdot I, grid=[10,10], coords=\text{polar}\right)$



5. Функция e^z

Определение 2.6. *Функция*

$$e^z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \ (z \in \mathbb{C})$$

называется показательной функцией.

Если $z = x+iy$, то имеет место равенство

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2.12)$$

Рельеф этой функции изображен ниже.

> $with(plots):$

> $complexplot3d\left(e^z, z=-5-2\cdot I..1+2\cdot I, grid=[30,30]\right)$

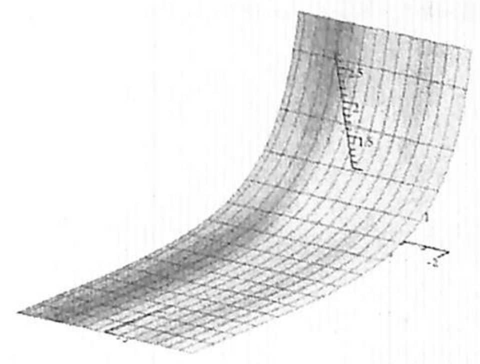


Рисунок 2.10. Рельеф показательной функции

Функция $w=e^z$ имеет следующие свойства:

1) Функция e^z голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$ её производная

$$(e^z)' = e^z.$$

2) Для функции e^z сохраняется обычная теорема сложения

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2} \ (z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in \mathbb{C}).$$

3) Функция e^z периодическая, с мнимым основным периодом $2\pi i$.

4) Для любого $z \in \mathbb{C}$ производная $(e^z)' \neq 0$, поэтому $w=e^z$ конформна в окрестности любой точки.

Из соотношения (2.12) следует, что $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$, поэтому образом прямой $\{x = x_0\}$ является окружность $\{|w| = e^{x_0}\}$ (рис. 2.11), а прямой $\{y = y_0\}$ луч $\{\arg w = y_0\}$ (рис. 2.12). Показательная функция однолистна в области $\Pi_k = \{y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$, здесь $y_0 \in \mathbb{R}$.

Она отображает каждую из областей

$$\Pi_k = \{z \in \mathbb{C} : 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\},\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

конформно в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ — плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси. Аналогично, область $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ отображается в верхнюю полуплоскость (рис. 2.13).

> $with(plots):$

> $conformal(e^z, z = 1 - \pi \cdot I..1 + \pi \cdot I, grid = [20, 20])$

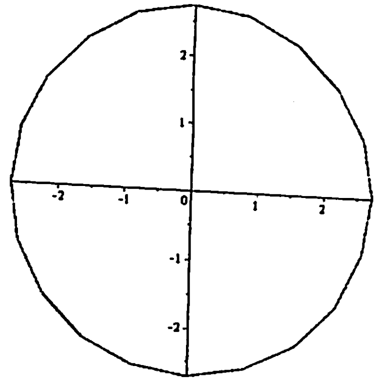


Рисунок 2.11. Окружность $\{|w| = e^{x_0}\}$

> $conformal(e^z, z = -1 + I..1 + I, grid = [20, 20])$

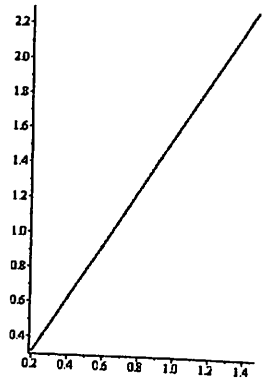
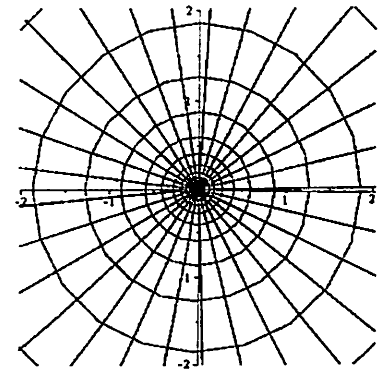


Рисунок 2.12. Луч $\{\arg w = y_0\}$

> $conformal(e^z, z = -10 + 0 \cdot I..1 + 1.99 \cdot \pi \cdot I, -2 - 2 \cdot I..2 + 2 \cdot I, grid = [30, 30])$



> $conformal(e^z, z = -10 + 0 \cdot I..1 + \pi \cdot I, -2 - 0.1 \cdot I..2 + 2 \cdot I, grid = [20, 20])$

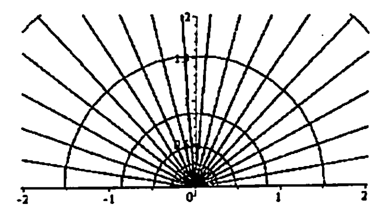


Рисунок 2.13. Верхняя полуплоскость

6. Тригонометрические функции

Из соотношения (2.12), при $x = 0$, получим

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y, \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y, \end{cases}$$

откуда получаются формулы Эйлера

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \qquad (2.13)$$

Эти формулы позволяют дать определения тригонометрических функций комплексного переменного $w = \cos z$ и $w = \sin z$.

Определение 2.7. *Тригонометрические функции комплексного аргумента определяются следующим образом*

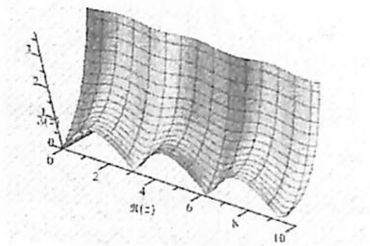
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad (2.14)$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})},$$

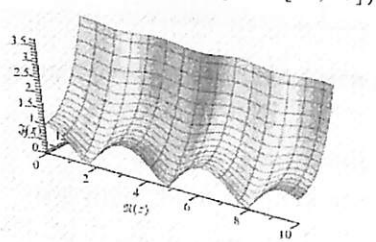
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Рассмотрим рельефы этих функций.

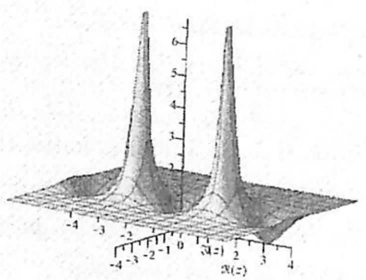
```
> with(plots) :
> complexplot3d(sin(z), z = 10 − 0·I..0 + 2·I, grid = [30, 30])
```



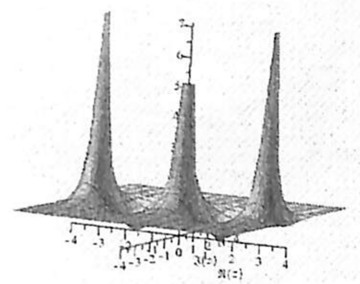
```
> complexplot3d(cos(z), z = 10 − 0·I..0 + 2·I, grid = [30, 30])
```



```
> complexplot3d(tan(z), z = −4 − 4·I..4 + 4·I, grid = [30, 30])
```



```
> complexplot3d(1/tan(z), z = −4 − 4·I..4 + 4·I, grid = [30, 30])
```

Тригонометрические функции обладают следующими свойствами:

1) Функции $w = \cos z$ и $w = \sin z$ голоморфны на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и их производные будут

$$(\cos z)' = -\sin z, \ (\sin z)' = \cos z.$$

2) Функция $w = \operatorname{tg} z$ определена в области

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\},$$

а функция $w = \operatorname{ctg} z$ в области

$$\{ z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \},$$

где они голоморфны.

3) Функции $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ — нечётные функции, а $\cos z$ — чётная функция.

4) Функции $\cos z$ и $\sin z$ имеют период 2π, а функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ имеют период π.

5) Все основные тригонометрические тождества, которые выполняются для вещественных переменных, выполняются и для комплексных переменных.

Замечание. Функции комплексного аргумента $\cos z$ и $\sin z$, ограниченные при вещественных аргументах, неограниченны в комплексной плоскости.

Пример. Покажем неограниченность функции $\cos z$. Рассмотрим функцию

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

при $z = iy$, тогда

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \infty.$$

Это означает, что функция $w = \cos z$ — не ограничена в $\mathbb{C}$.

6) Имеют место следующие соотношения

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z,\ i\sin(iz) = -\operatorname{sh} z,$$

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz),\ \sin z = -i\operatorname{sh}(iz),$$

где

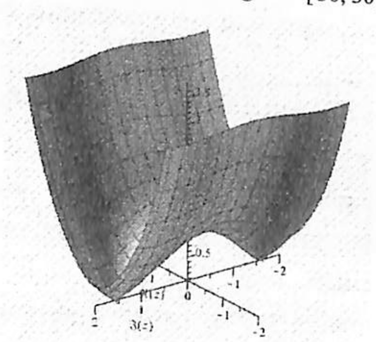
$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \qquad (2.15)$$

Эти функции называются *гиперболическими функциями*.

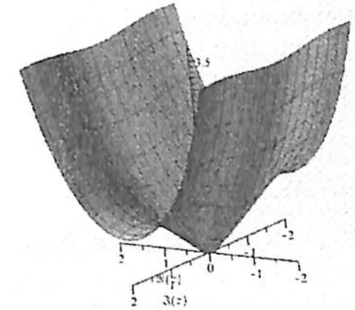
Рельефы этих функций изображены ниже.

> $with(plots):$

> $complexplot3d(\cosh(z),\ z = -2 - 2\cdot I..2 + 2\cdot I,\ grid = [30, 30])$



> $complexplot3d(\sinh(z),\ z = -2 - 2\cdot I..2 + 2\cdot I,\ grid = [30, 30])$



7) Отображения тригонометрическими функциями определяется с помощью разложения их на композицию вышерассмотренных функций.

Пример. Для функции $w = \sin z$ найти образ области

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}.$$

$\triangleleft$ Функция $w = \sin z$ является композицией следующих отображений

$$w_1 = iz,\ w_2 = e^{w_1},\ w_3 = \frac{w_2}{i},\ w = \sin z = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right).$$

Поэтому последовательно получим:

1) Область D функцией $w_1 = iz$ отображается на

$$D_1 = \left\{ w_1 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w_1 < 0, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

2) Область D_1 функцией $w_2 = e^{w_1}$ отображается на

$$D_2 = \left\{ w_2 \in \mathbb{C} : |w_2| < 1, -\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

3) Область D_2 функцией $w_3 = \dfrac{w_2}{i}$ отображается на

$$D_3 = \{ w_3 \in \mathbb{C} : |w_3| < 1, \pi < \arg w_3 < 2\pi \}.$$

4) Область D_3 функцией $w = \sin z = \dfrac{1}{2}\left(w_3 + \dfrac{1}{w_3} \right)$ отображается на

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>0\}$$

Итак, $w=\sin z$ отображает область

$$D=\left\{z\in\mathbb{C}:-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\right\}$$

на плоскости $\mathbb{C}_z$ на область

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>0\}$$

На плоскости $\mathbb{C}_w$. Эти шаги отражены на рисунке 2.14.

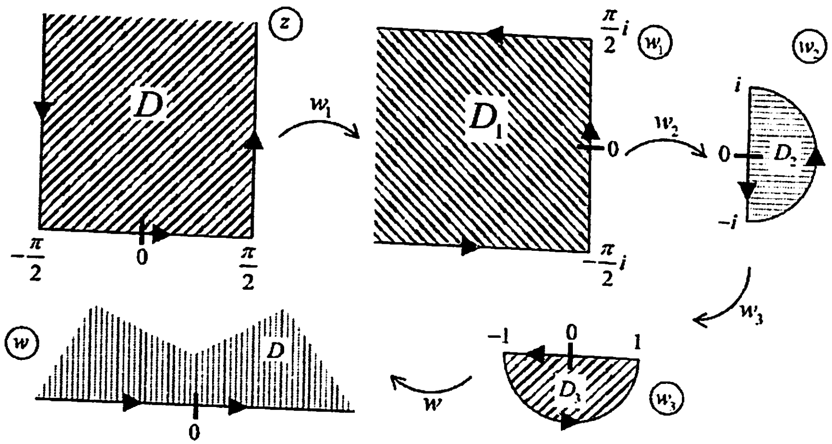


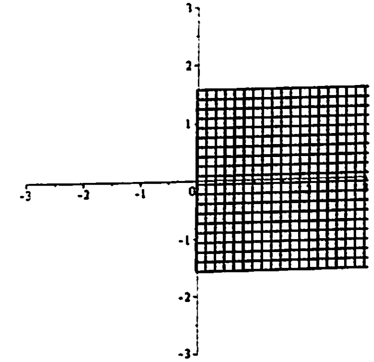
Рисунок 2.15. Отображение функцией $w=\sin z$ ▷

Пример. Для функции $w=\cos z$ найти образ области

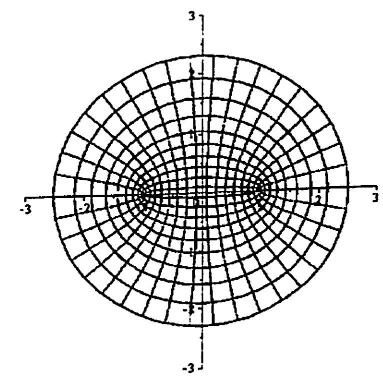
$$D=\left\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<\pi,-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решим эту задачу с помощью программы Maple.

```
> with(plots) :
> conformal(z, z = 0 - π/2·I..π + π/2·I, -3 - 3·I..3 + 3·I, grid = [20, 20])
```



```
> conformal(cos(z), z = 0 - π/2·I..π + π/2·I, -3 - 3·I..3 + 3·I, grid = [20,
  20])
```



7. Многозначные функции

Логическим развитием понятия голоморфной функции является понятие полной аналитической функции. Оно не укладывается в рамки обычного понятия функции. Одной из основных особенностей, отличающих это понятие, является многозначность. То есть каждому значению аргумента соответствует много значений функции. Это понятие в этом параграфе рассматривается с точки зрения обратного отображения.

а) Функция $w=\sqrt[n]{z}$

Определение 2.8. *Решение уравнения*

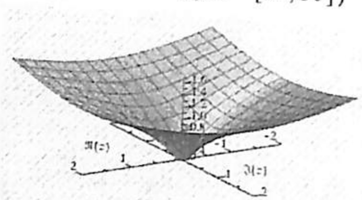
$$w^n = z. \tag{2.16}$$

называется корнем n*-ой степени и обозначается как* $w=\sqrt[n]{z}$.

Рельеф функции $w=\sqrt{z}$ приведен ниже.

> $with(plots):$

> $complexplot3d(\sqrt{z}, z=-2-2\cdot I..2+2\cdot I, grid=[30,30])$



Согласно второй формуле Муавра эта функция принимает n различных значений для $z \neq 0$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{2.17}$$
$$k\in\mathbb{Z}.$$

Эти решения будут различными при $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$, при остальных значениях k решения будут повторяться. Используя показательную функцию и отмечая только разные значения функции, (2.17) можно записать в виде:

$$\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}\cdot i},\ k=0,1,2,\ldots,(n-1). \tag{2.18}$$

Дальнейшие рассуждения, в основном опираются на следующую важную теорему.

Теорема 2.3. *Если функция* $w=f(z)$ *конформно отображает область* $D\subset\mathbb{C}_z$ *на область* $G\subset\mathbb{C}_w$, *то существует обратная функция* $z=f^{-1}(w)$ *конформно отображающая* G *на* D.

Из свойств (см. пункт 3) степенной функции $z=w^n$ следует конформное отображение любой области вида

$$D_k=\left\{\frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\right\},\ k=0,1,2,\ldots,(n-1),$$

на область $G=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$.

Например, при $k=0$ область

$$D_0=\left\{0<\arg w<\frac{2\pi}{n}\right\}$$

отображается конформно на G.

Обратное отображение $\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z}{n}}$ конформно отображает G на D_0 и называется 0-ветвью (или главным значением) многозначной функции $\sqrt[n]{z}$ и обозначается как $(\sqrt[n]{z})_0$. Аналогично, отображение $\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$ конформно отображает G на D_k и называется k-ветвью многозначной функции $\sqrt[n]{z}$ и обозначается как $(\sqrt[n]{z})_k$.

Многозначная функция $w=\sqrt[n]{z}$ является совокупностью n однозначных функций $(\sqrt[n]{z})_0, (\sqrt[n]{z})_1, \ldots, (\sqrt[n]{z})_{n-1}$.

Пример. Отобразить конформно область $D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на единичный круг $\{|z|<1\}$.

$\triangleleft$ Функция $w_1=(\sqrt{z})_0$ отображает D на верхнюю полуплоскость, которая функцией $w=\dfrac{w_1-i}{w_1+i}$ отображается на единичный круг. Следовательно, функция $w=\dfrac{(\sqrt{z})_0-i}{(\sqrt{z})_0+i}$ отображает $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на единичный круг. $\triangleright$

Нахождение однозначных функций $(\sqrt[n]{z})_0, (\sqrt[n]{z})_1, \ldots, (\sqrt[n]{z})_{n-1}$ для функции $w=\sqrt[n]{z}$ называется выделением *ветвей* многозначной функции. Из этих ветвей чаще всего используется нулевая ветвь $(\sqrt[n]{z})_0$.

При решении некоторых задач однозначная ветвь находится из заданных условий. Например, при $n=2$ две однозначные ветви $(w)_0$ и $(w)_1$ двухзначной функции $w=\sqrt{z}$ можно выделить следующим образом

$$(w)_0=\sqrt{z}\,,\ \sqrt{-1}=i\ (\text{или } \sqrt{1}=1)$$

и

$$(w)_1=\sqrt{z}\,,\ \sqrt{-1}=-i\ (\text{или } \sqrt{1}=-1).$$

При этом ветвь $(w)_0$ отображает $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на верхнюю полуплоскость, а ветвь $(w)_1$ отображает $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на нижнюю полуплоскость.

б) Функция $w=\operatorname{Ln} z$

Определение 2.9. *Решение уравнения*

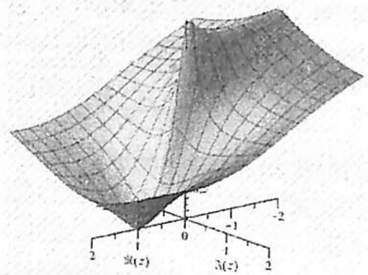
$$e^w=z \tag{2.19}$$

называется натуральным логарифмом комплексного числа z *и обозначается*

$$w=\operatorname{Ln} z.$$

Ниже приведен рельеф этой функции.

```
> with(plots):
> complexplot3d(ln(z), z=-2-2·I..2+2·I, grid=[30, 30])
```



Если положить $z=re^{i\varphi}$ и $w=u+iv$, то из уравнения $e^{u+iv}=re^{i\varphi}$, получим $e^u=r$, $e^{iv}=e^{i\varphi}$ и, следовательно, $u=\ln r$, $v=\varphi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Поэтому

$$w=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\,,\ k\in\mathbb{Z}\,, \tag{2.20}$$

определяет многозначную функцию $\operatorname{Ln} z$.

Функция e^w конформно отображает области

$$\Pi_k=\{w\in\mathbb{C}: 2k\pi<\operatorname{Im} w<2(k+1)\pi\}\,,\ k\in\mathbb{Z}\,,$$

на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Поэтому, согласно теореме о конформности обратного отображения, ветви многозначной функции $w=\operatorname{Ln} z$, определяемые формулами

$$w=(\operatorname{Ln} z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\,,\ k\in\mathbb{Z}\,,$$

конформно отображают область $G=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на области Π_k, в соответствии с значением k.

Ветвь $(\operatorname{Ln} z)_0=\ln z$ называется *главным значением* многозначной функции $\operatorname{Ln} z$.

Пример. Найти образ области

$$D=\{z\in\mathbb{C}: z\notin(-\infty,0]\}$$

при отображении логарифмической функцией, если образом точки $z_0=i$ является точка $w_0=\dfrac{5\pi i}{2}$.

◁ Рассматривая

$$w=(\operatorname{Ln} z)_k=\ln z+2k\pi i\,,\ k\in\mathbb{Z}\,,$$

и учитывая $w(i)=\dfrac{5\pi\, i}{2}$, получим необходимую ветвь функции $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{5\pi i}{2}=\ln i+2k\pi\, i=\ln|i|+i\arg i+2k\pi i=i\cdot\frac{\pi}{2}+2k\pi i\,,$$

поэтому $k=1$. Следовательно, отображение осуществляется ветвью $w=(\operatorname{Ln} z)_1=\ln z+2\pi\, i$.

Так как образом области D при отображении $w_1=\ln z$ является полоса

$$\{w_1\in\mathbb{C}: -\pi<\operatorname{Im} w_1<\pi\}\,,$$

то образом области $D=\{z\in\mathbb{C}: z\notin(-\infty,0]\}$ при отображении $w=w_1+2\pi i$ будет полоса

$$\{w\in\mathbb{C}: \pi<\operatorname{Im} w<3\pi\}.\ ▷$$

в) Комплексное число в комплексной степени

При решении некоторых задач однозначная ветвь находится из заданных условий. Например, при $n=2$ две однозначные ветви $(w)_0$ и $(w)_1$ двухзначной функции $w=\sqrt{z}$ можно выделить следующим образом

$$(w)_0=\sqrt{z},\ \sqrt{-1}=i \text{ (или } \sqrt{1}=1)$$

и

$$(w)_1=\sqrt{z},\ \sqrt{-1}=-i \text{ (или } \sqrt{1}=-1).$$

При этом ветвь $(w)_0$ отображает $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на верхнюю полуплоскость, а ветвь $(w)_1$ отображает $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на нижнюю полуплоскость.

б) Функция $w=\mathrm{Ln}\,z$

Определение 2.9. *Решение уравнения*

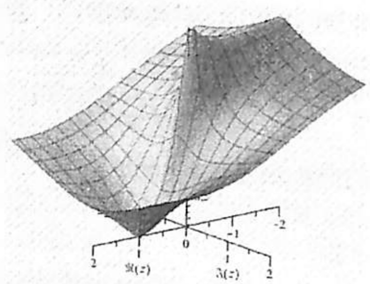
$$e^w=z \tag{2.19}$$

называется натуральным логарифмом комплексного числа z *и обозначается*

$$w=\mathrm{Ln}\,z.$$

Ниже приведен рельеф этой функции.

```
> with(plots):
> complexplot3d(ln(z), z=-2-2·I..2+2·I, grid=[30, 30])
```



Если положить $z=re^{i\varphi}$ и $w=u+iv$, то из уравнения $e^{u+iv}=re^{i\varphi}$, получим $e^u=r$, $e^{iv}=e^{i\varphi}$ и, следовательно, $u=\ln r$, $v=\varphi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Поэтому

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}, \tag{2.20}$$

определяет многозначную функцию $\mathrm{Ln}\,z$.

Функция e^w конформно отображает области

$$\Pi_k=\{w\in\mathbb{C}: 2k\pi<\operatorname{Im} w<2(k+1)\pi\},\ k\in\mathbb{Z},$$

на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Поэтому, согласно теореме о конформности обратного отображения, ветви многозначной функции $w=\mathrm{Ln}\,z$, определяемые формулами

$$w=(\mathrm{Ln}\,z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z},$$

конформно отображают область $G=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на области Π_k, в соответствии с значением k.

Ветвь $(\mathrm{Ln}\,z)_0=\ln z$ называется *главным значением* многозначной функции $\mathrm{Ln}\,z$.

Пример. Найти образ области

$$D=\{z\in\mathbb{C}: z\notin(-\infty,0]\}$$

при отображении логарифмической функцией, если образом точки $z_0=i$ является точка $w_0=\dfrac{5\pi i}{2}$.

◁ Рассматривая

$$w=(\mathrm{Ln}\,z)_k=\ln z+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z},$$

и учитывая $w(i)=\dfrac{5\pi i}{2}$, получим необходимую ветвь функции $\mathrm{Ln}\,z$

$$\frac{5\pi i}{2}=\ln i+2k\pi i=\ln|i|+i\arg i+2k\pi i=i\cdot\frac{\pi}{2}+2k\pi i,$$

поэтому $k=1$. Следовательно, отображение осуществляется ветвью $w=(\mathrm{Ln}\,z)_1=\ln z+2\pi i$.

Так как образом области D при отображении $w_1=\ln z$ является полоса

$$\{w_1\in\mathbb{C}: -\pi<\operatorname{Im} w_1<\pi\},$$

то образом области $D=\{z\in\mathbb{C}: z\notin(-\infty,0]\}$ при отображении $w=w_1+2\pi i$ будет полоса

$$\{w\in\mathbb{C}: \pi<\operatorname{Im} w<3\pi\}.\ ▷$$

в) Комплексное число в комплексной степени

Используя функцию $w=\operatorname{Ln} z$, при $z\neq 0$, и комплексное число a, определяется

$$z^a=e^{a\operatorname{Ln} z}=e^{a[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}. \tag{2.21}$$

Например,

$$i^i=e^{i\operatorname{Ln} i}=e^{i[\ln|i|+i(\arg i+2k\pi)]}=e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi},\ k\in\mathbb{Z},$$

т.е. комплексное число в комплексной степени i^i принимает бесконечно много различных действительных значений.

Используя соотношение (2.21), мы можем изучать функцию

$$w=z^a.$$

На практике чаще изучается случай, когда a является действительным числом, и функция $w=z^a$ полезна при отображение угловых областей.

г) Обратные тригонометрические функции

Понятие обратной функции в теории функции комплексного переменного вводится также, как и в теории функции действительного переменного.

Например, функция

$$w=\operatorname{Arccos} z$$

состоит из всех решений уравнения $\cos w=z$ и является обратной к функции $\cos z$. Имеем

$$\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=z\ \Rightarrow\ e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0\ \Rightarrow\ e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1},$$

где корень может принимать два различных значения. Используя многозначную функцию $\operatorname{Ln} z$, получим окончательную формулу

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\,(z+\sqrt{z^2-1}), \tag{2.22}$$

здесь берутся все значения корня.

Задачи на конформные отображения для этой функции решаются с помощью использования свойств функций (2.22), или учитывая, что это функция обратная к косинусу.

Из равенства (2.22) видно, что функция $\operatorname{Arccos} z$ является многозначной. Главным значением является функция $w=\arccos z$ и определяется из равенства

$$\arccos z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}), \tag{2.23}$$

Функция $w=\operatorname{Arccos} z$ имеет бесконечно много значений в верхней полуплоскости $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$. Используя равенство (2.22) можно выделить её однозначные ветви

$$(\operatorname{Arccos} z)_k=-i(\operatorname{Ln}\,(z+\sqrt{z^2-1}))_k,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Например, при $k=0$ получим

$$(\operatorname{Arccos} z)_0=\arccos z=-i\ln(z+\sqrt{z^2-1}),$$

и эта функция конформно отображает область $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$ на полуполосу

$$\{w\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re} w<\pi,\operatorname{Im} w<0\}.$$

Аналогично изучаются и другие обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\, i(z+\sqrt{z^2-1}), \tag{2.24}$$

$$\operatorname{Arctg} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+z}{i-z}=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}, \tag{2.25}$$

$$\operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}. \tag{2.26}$$

8. Принцип симметрии

При конформном отображении одной области на другую широко используют принцип симметрии.

Пусть функция $f_1(z)$ конформно отображает область D_1 на область G_1 и непрерывна вплоть до границы ∂D_1, которая содержит γ (γ — дуга окружности или отрезок прямой), $f(\gamma)=\Gamma$ (Γ — дуга окружности или отрезок прямой). Пусть D_2 — область, симметричная D_1 относительно γ и G_2 — область, симметричная G_1

относительно Γ. Тогда существует функция $f_2(z)$, определенная в D_2, такая что функция

$$w=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1, \\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\gamma, \\ f_2(z), & z\in D_2, \end{cases}$$

конформно отображает область $D_1\cup\gamma\cup D_2$ на $G_1\cup\Gamma\cup G_2$ (рис. 2.16).

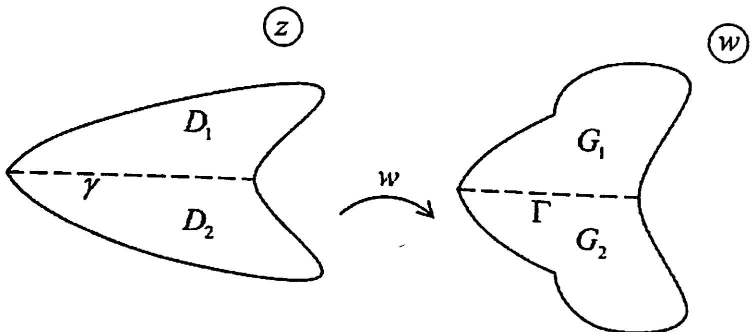


Рисунок 2.16. Отображение w

При этом точки симметричные относительно γ переходят в точки симметричные относительно Γ.

Это утверждение называется принципом симметрии Римана—Шварца.

Замечание. Если γ и Γ являются отрезками вещественной прямой, то функция $f_2(z)$ определяется с помощью равенства

$$f_2(z)=\overline{f_1(\overline{z})}.$$

Пример. Построить функцию, конформно отображающую область

$$D=\{z\in\mathbb{C}: z\notin[-1,1], z\notin[-i,i]\}$$

на область

$$\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} w>0\} \text{ (рис. 2.17).}$$

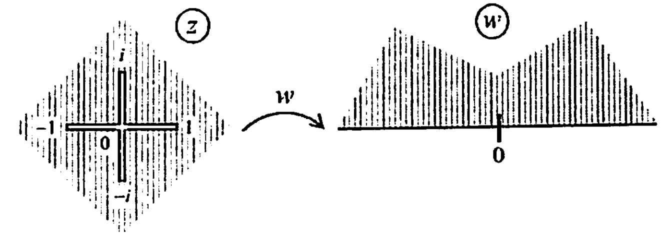


Рисунок 2.17.

◁ Функция $w_1=z^2$ конформно отображает область

$$D_1=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0, z\notin[0,i]\}$$

на область $\{w_1\in\mathbb{C}: w_1\notin[-1,\infty)\}$. Тогда отображение $w_2=w_1+1$ даёт область $\{w_2\in\mathbb{C}: w_2\notin[0,\infty)\}$. И отображение

$$w_3=\sqrt{w_2}=\sqrt{w_1+1}=\sqrt{z^2+1},\ \sqrt{-1}=i$$

даёт область $G_1=\{w_3\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} w_3>0\}$. Причем образом $\gamma=\{z\in\mathbb{C}: |z|\geq 1, \operatorname{Im} z=0\}$ будет $\Gamma=\{w\in\mathbb{C}: |w|\geq\sqrt{2}, \operatorname{Im} w=0\}$. Поэтому по принципу симметрии образом области D будет область

$$G=\{w_3\in\mathbb{C}: w_3\notin[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\},$$

которая функцией

$$w_4=\frac{w_3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-w_3}$$

преобразуется в область $\{w_4\in\mathbb{C}: w_4\notin[0,\infty)\}$. Наконец функция $w=\sqrt{w_4}$, $\sqrt{-1}=i$, завершает решение задачи.

Итак, область $D=\{z\in\mathbb{C}: z\notin[-1,1], z\notin[-i,i]\}$ конформно отображается на область $\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} w>0\}$ функцией

$$w=\sqrt{w_4}=\sqrt{\frac{w_3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-w_3}}=\sqrt{\frac{\sqrt{z^2+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{z^2+1}}},\ \sqrt{-1}=i.$$

Последовательность шагов преобразований отражена на рис. 2.18.

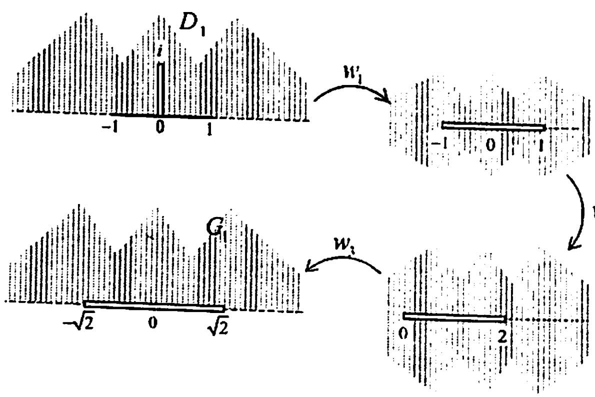


Рисунок 2.18. Последовательность отображений w_1, w_2, w_3 ▷

9. Основные элементарные функции и производимые ими конформные отображения

Здесь приводятся основные свойства элементарных функций и конформных отображений, производимых ими.

I. Дробно-линейная функция

1.1. Ангармоническое отношение. Для любых трех пар точек $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_z$ и $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_w$ существует дробно-линейная функция такая, что $w(z_k) = w_k$, она определяется из следующего равенства (ангармоническое отношение)

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

1.2. Функция

$$w = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \ \operatorname{Im} a > 0$$

отображает верхнюю полуплоскость $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг, т.е. $w(D) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ (рис. 2.19).

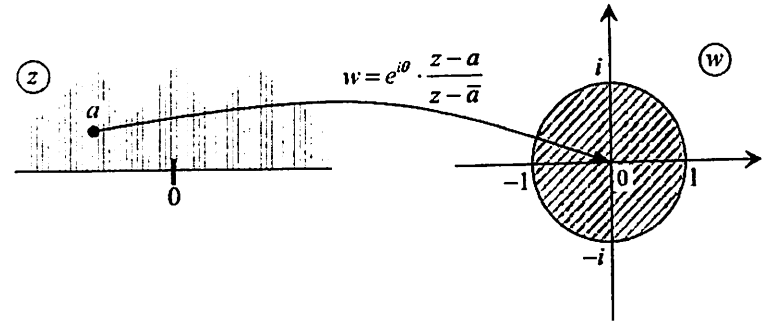


Рисунок 2.19. Общий вид отображения верхней полуплоскости на единичный круг

1.3. Функция

$$w = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \ |a| < 1,$$

отображает единичный круг $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на единичный круг, т.е. $w(D) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ (рис. 2.20).

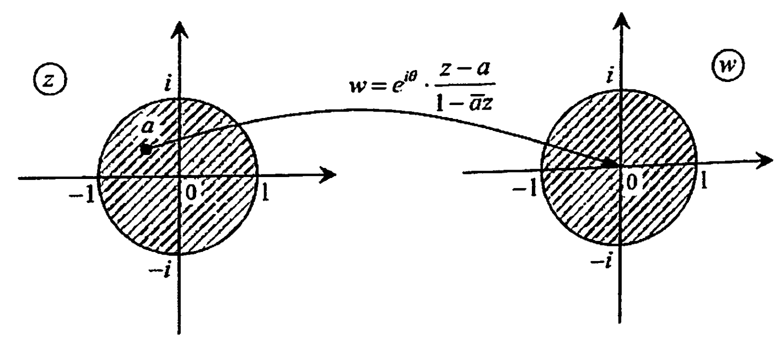


Рисунок 2.20. Общий вид отображения единичного круга на единичный круг

II. Степенная функция и корень

2.1. Если

$$w = z^2, \ D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$

то

$$w(D) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \text{ (рис. 2.21).}$$

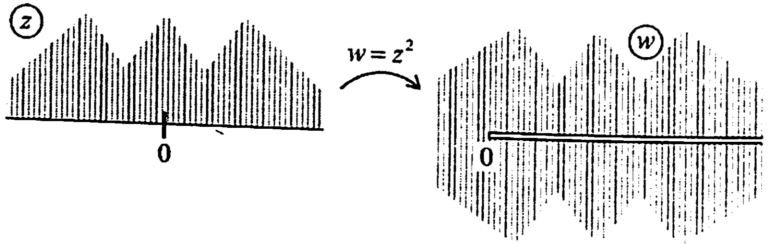


Рисунок 2.21

2.2. Если

$$w = z^2,\ D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\},$$

то

$$w(D) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \text{ (рис. 2.22).}$$

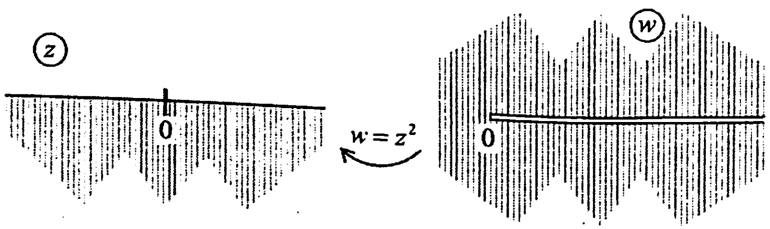


Рисунок 2.22

2.3. Если

$$w = z^n,\ D = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{n} \right\},$$

то

$$w(D) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\} \text{ (рис. 2.23).}$$

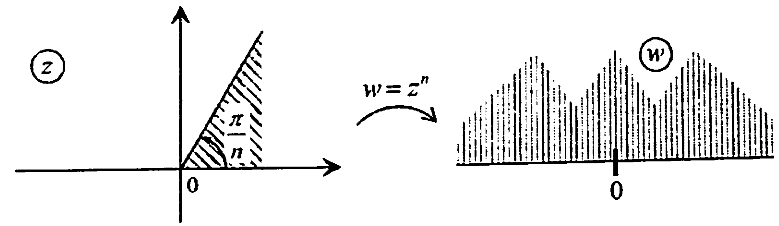


Рисунок 2.23

2.4. Если

$$w = z^n,\ D = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\},$$

то

$$w(D) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \text{ (рис. 2.24).}$$

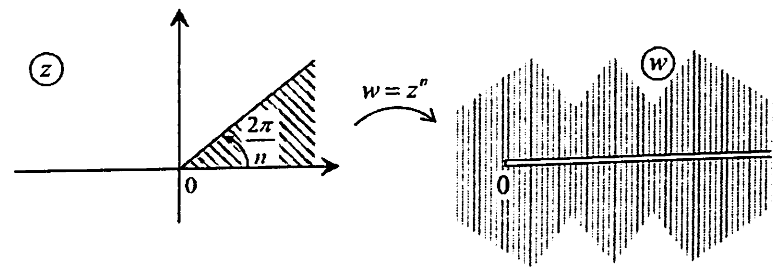


Рисунок 2.24

2.5. Если

$$w = z^n,\ D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

то

$$w(D) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \text{ (рис. 2.25).}$$

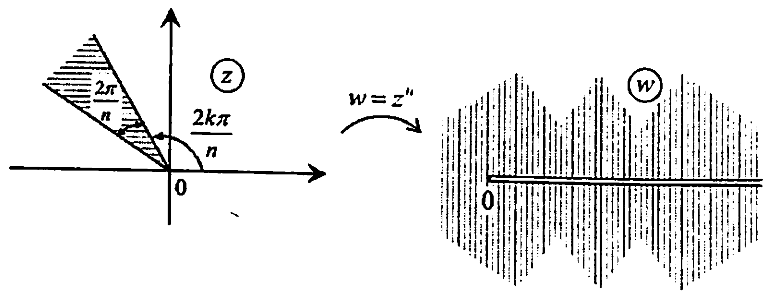


Рисунок 2.25

2.6. Если

$$w=(\sqrt{z})_0,\ (w=\sqrt{z},\ \sqrt{-1}=i),\ D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>0\},$$

а если

$$w=(\sqrt{z})_1,\ (w=\sqrt{z},\ \sqrt{-1}=-i),\ D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w<0\}\ \text{(рис. 2.26)}$$

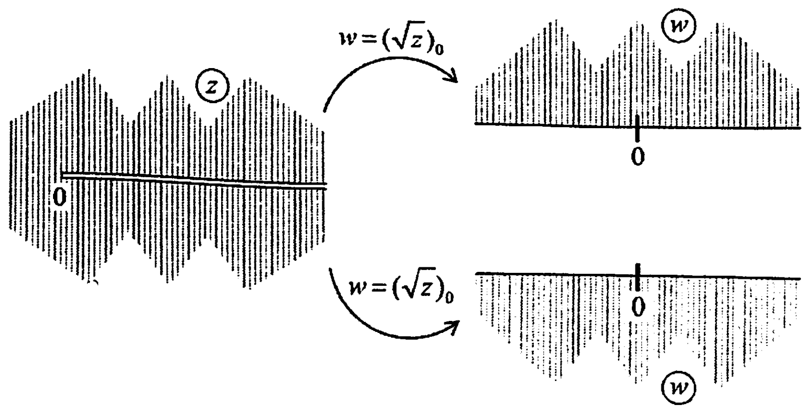


Рисунок 2.26

2.7. Если

$$w=(\sqrt[n]{z})_k,\ k=0,1,\dots,n-1,\ D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,$$

то

$$w(D)=\left\{w\in\mathbb{C}:\frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\right\}\ \text{(рис. 2.27).}$$

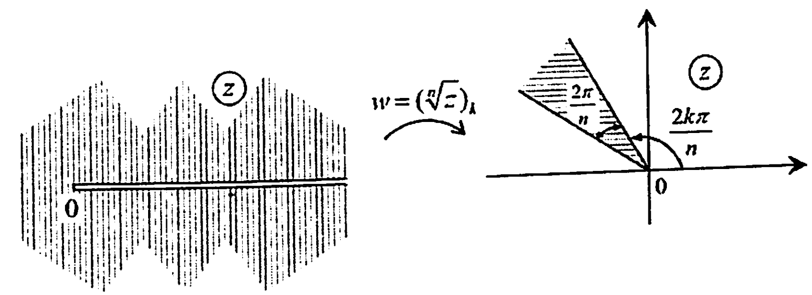


Рисунок 2.27

III. Функция Жуковского и обратная к ней функция

3.1. Если

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:w\notin[-1,1]\}.$$

3.2. Если

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ D=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:w\notin[-1,1]\}\ \text{(рис. 2.28).}$$

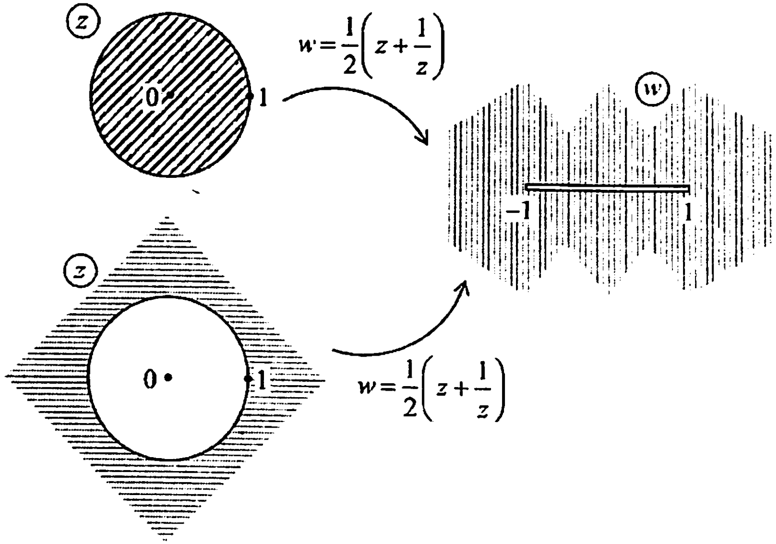


Рисунок 2.28

3.3. Если

$$w=z+\sqrt{z^2-1},\ \sqrt{-1}=i,\ (w(\infty)=\infty),\ D=\{z\in\mathbb{C}:z\notin[-1,1]\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:|w|>1\}.$$

3.4. Если

$$w=z+\sqrt{z^2-1},\ \sqrt{-1}=-i,\ (w(\infty)=0),\ D=\{z\in\mathbb{C}:z\notin[-1,1]\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}\ \text{(рис. 2.29).}$$

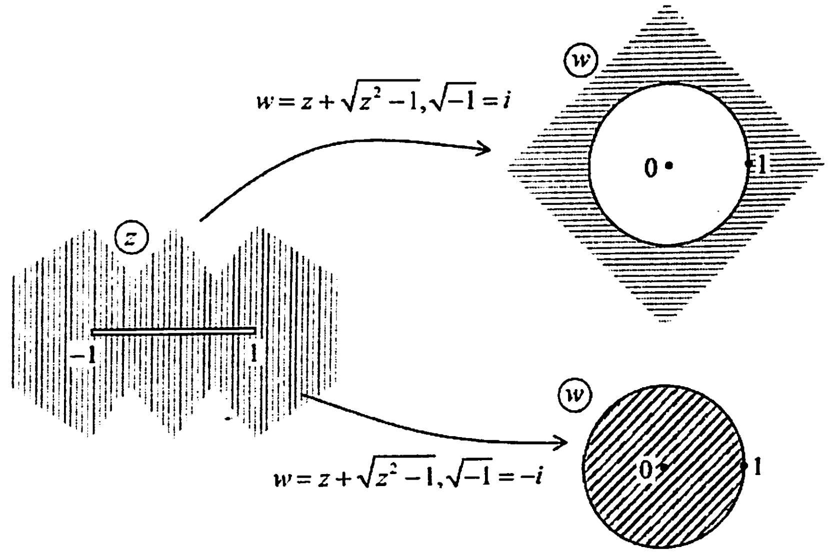


Рисунок 2.28

IV. Показательная и логарифмическая функции

4.1. Если

$$w=e^z,\ D=\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Im}z<2\pi\},$$

то

$$w(D)=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+\ \text{(рис. 2.29).}$$

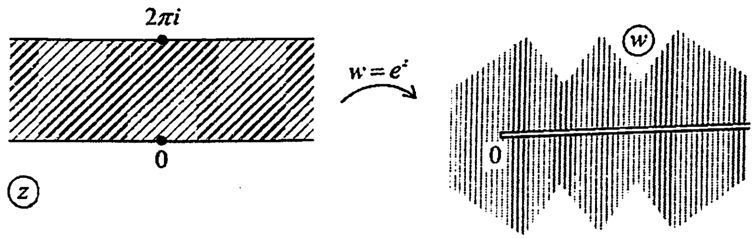


Рисунок 2.29

4.2. Если

$$w=e^z,\ D=\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Im}z<\pi\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>0\}\ \text{(рис. 2.30)}.$$

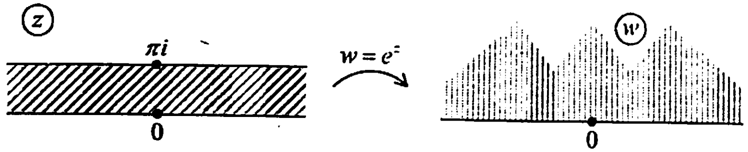


Рисунок 2.30

4.3. Если

$$w=e^z,\ D=\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Im}z<h, 0<h<2\pi\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:0<\arg w<h\}\ \text{(рис. 2.31)}.$$

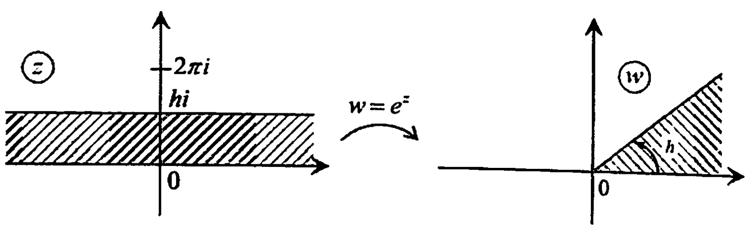


Рисунок 2.31

4.4. Если

$$w=e^z,\ D=\{z\in\mathbb{C}:2k\pi<\operatorname{Im}z<2(k+1)\pi\},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

то

$$w(D)=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+\ \text{(рис. 2.32)}.$$

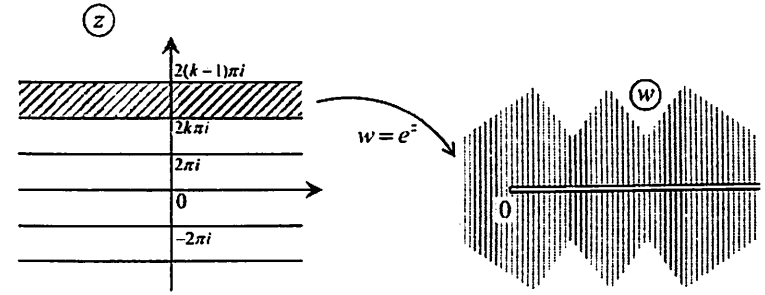


Рисунок 2.32

4.5. Если

$$w=(\operatorname{Ln}z)_0=\ln z,\ D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Im}w<2\pi\}\ \text{(рис. 2.33)}$$

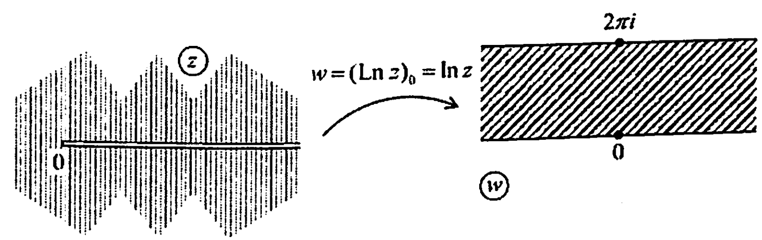


Рисунок 2.33

4.6. Если

$$w=(\operatorname{Ln}z)_k,\ D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:2k\pi<\operatorname{Im}w<2(k+1)\pi\},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ \text{(рис. 2.34)}.$$

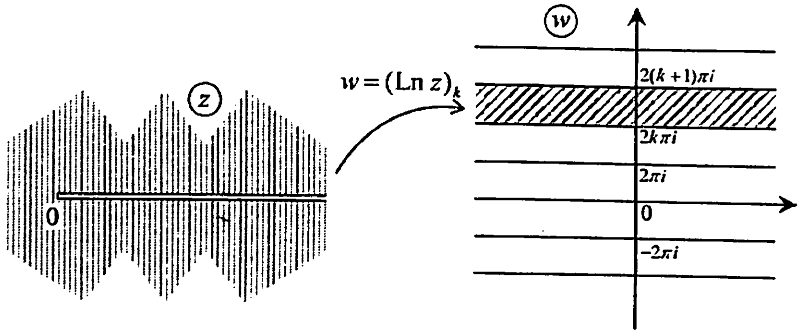


Рисунок 2.34

V. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

5.1. Если

$$w=\sin z,\ D=\left\{z\in\mathbb{C}:-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\right\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>0\}\ \text{(рис. 2.35).}$$

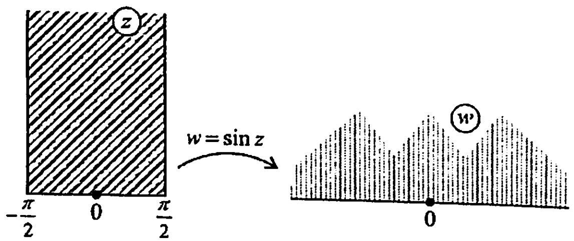


Рисунок 2.35

5.2. Если

$$w=\cos z,\ D=\{z\in\mathbb{C}:-\pi<\operatorname{Re}z<0,\operatorname{Im}z>0\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>0\}\ \text{(рис. 2.36).}$$

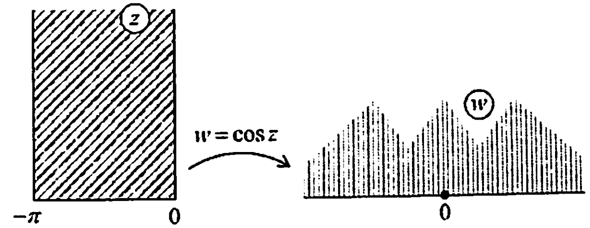


Рисунок 2.36

5.3. Если

$$w=\operatorname{ch}z,\ D=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0,0<\operatorname{Im}z<\pi\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w>0\}\ \text{(рис. 2.37).}$$

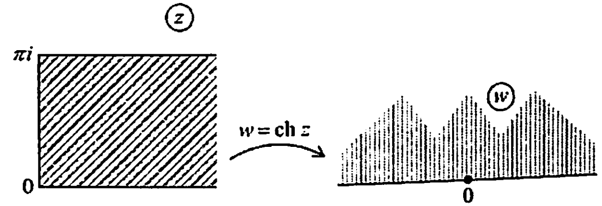


Рисунок 2.37

5.4. Если

$$w=\operatorname{tg}z,\ D=\left\{z\in\mathbb{C}:-\frac{\pi}{4}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{4}\right\},$$

то

$$w(D)=\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}\ \text{(рис. 2.38).}$$

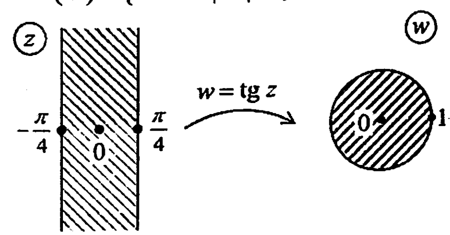


Рисунок 2.38

5.5. Если

$$w = (\operatorname{Arccos} z)_0 = \arccos z, \; D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$

то

$$w(D) = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \operatorname{Im} w < 0\} \text{ (рис. 2.39)}$$

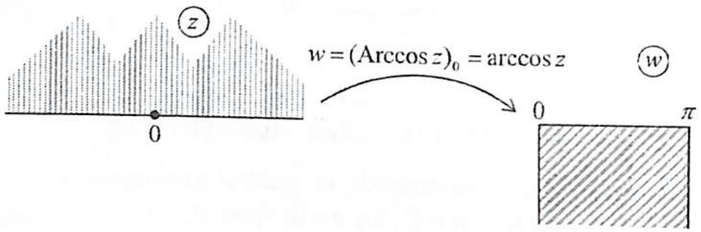


Рисунок 2.39

5.6. Если

$$w = \operatorname{Arccos} z, \; w(0) = -\frac{\pi}{2}, \; D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$

то

$$w(D) = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} z > 0\} \text{ (рис. 2.40).}$$

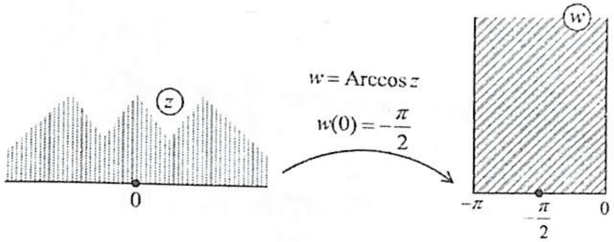


Рисунок 2.40

Контрольные вопросы

1. Основные задачи теории конформных отображений.
2. Теорема Римана.
3. Принцип сохранения области.

4. Линейная функция и её свойства.
5. Групповые свойства дробно-линейного отображения.
6. Свойство симметрии дробно-линейного отображения.
7. Ангармоническое отношение.
8. Общий вид отображения полуплоскости на единичный круг.
9. Общий вид отображения единичного круга на единичный круг.
10. Степенная функция и её свойства.
11. Функция Жуковского и её свойства.
12. Показательная функция и её свойства.
13. Тригонометрические функции и их свойства.
14. Корень натуральной степени $w = \sqrt[n]{z}$ $(n \ge 2)$.
15. Функция $w = \operatorname{Ln} z$.
16. Комплексное число в комплексной степени.
17. Обратные тригонометрические функции.
18. Принцип симметрии.

– Б –

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. Найти образ области D при заданном отображении w.

1.1. $D = \{|z-1| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.2. $D = \{|z-i| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.3. $D = \{|z+1| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.4. $D = \{|z+i| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.5. $D = \{|z-1| < 2\}$, $w = 1 + 2iz$.

1.6. $D = \{|z-i| < 2\}$, $w = 1 + 2iz$.

1.7. $D = \{|z+1| < 2\}$, $w = 1 + 2iz$.

1.8. $D = \{|z+i| < 2\}$, $w = 1 + iz$.

1.9. $D = \{|z-1| < 2\}$, $w = iz + 1 + i$.

1.10. $D = \{|z-i| < 2\}$, $w = iz + 1 + i$.

5.5. Если

$$w = (\operatorname{Arccos} z)_0 = \arccos z\,,\ D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$

то

$$w(D) = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \operatorname{Im} w < 0\} \text{ (рис. 2.39)}$$

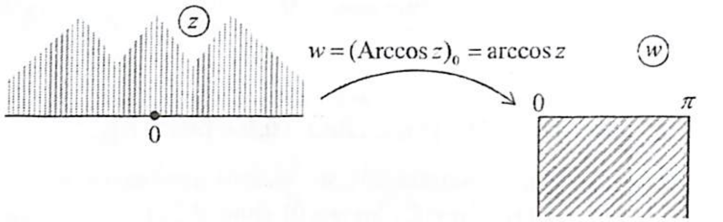


Рисунок 2.39

5.6. Если

$$w = \operatorname{Arccos} z\,,\ w(0) = -\frac{\pi}{2},\ D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$

то

$$w(D) = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} z > 0\} \text{ (рис. 2.40).}$$

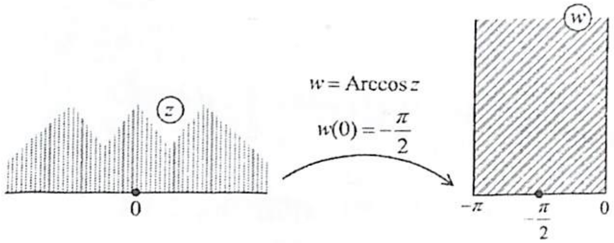


Рисунок 2.40

Контрольные вопросы

1. Основные задачи теории конформных отображений.
2. Теорема Римана.
3. Принцип сохранения области.

4. Линейная функция и её свойства.
5. Групповые свойства дробно-линейного отображения.
6. Свойство симметрии дробно-линейного отображения.
7. Ангармоническое отношение.
8. Общий вид отображения полуплоскости на единичный круг.
9. Общий вид отображения единичного круга на единичный круг.
10. Степенная функция и её свойства.
11. Функция Жуковского и её свойства.
12. Показательная функция и её свойства.
13. Тригонометрические функции и их свойства.
14. Корень натуральной степени $w = \sqrt[n]{z}$ $(n \geq 2)$.
15. Функция $w = \operatorname{Ln} z$.
16. Комплексное число в комплексной степени.
17. Обратные тригонометрические функции.
18. Принцип симметрии.

– Б –

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. Найти образ области D при заданном отображении w.

1.1. $D = \{|z-1| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.2. $D = \{|z-i| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.3. $D = \{|z+1| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.4. $D = \{|z+i| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

1.5. $D = \{|z-1| < 2\}$, $w = 1 + 2iz$.

1.6. $D = \{|z-i| < 2\}$, $w = 1 + 2iz$.

1.7. $D = \{|z+1| < 2\}$, $w = 1 + 2iz$.

1.8. $D = \{|z+i| < 2\}$, $w = 1 + iz$.

1.9. $D = \{|z-1| < 2\}$, $w = iz + 1 + i$.

1.10. $D = \{|z-i| < 2\}$, $w = iz + 1 + i$.

1.11. $D=\{|z+1|<2\}$, $w=iz+1+i$.

1.12. $D=\{|z+i|<2\}$, $w=iz+1+i$.

1.13. $D=\{|z-1|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.14. $D=\{|z-i|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.15. $D=\{|z+1|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.16. $D=\{|z+i|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.17. $D=\{|z-1|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.18. $D=\{|z-i|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.19. $D=\{|z+1|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.20. $D=\{|z+i|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.21. $D=\{|z-1-i|<\sqrt{2}\}$, $w=iz+1+i$.

Упражнение 2. Найти линейную функцию $w=w(z)$, для которой z_0 неподвижная точка и z_1 переходит в w_1.

2.1. $z_0=1+i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

2.2. $z_0=1-i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

2.3. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=i$.

2.4. $z_0=1-i$, $z_1=1+i$, $w_1=i$.

2.5. $z_0=1+i$, $z_1=1-i$, $w_1=i$.

2.6. $z_0=1-i$, $z_1=2-i$, $w_1=i$.

2.7. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=1-i$.

2.8. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=1+i$.

2.9. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=1-i$.

2.10. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=1+i$.

2.11. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=2-i$.

2.12. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=2+i$.

2.13. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=2-i$.

2.14. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=2-i$.

2.15. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=2+i$.

2.16. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=2+i$.

2.17. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=i$.

2.18. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=i$.

2.19. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=-i$.

2.20. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=-i$.

2.21. $z_0=1+2i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

Упражнение 3. Для данных функций найти неподвижную точку z_0 (если она есть), угол поворота, коэффициент растяжения и канонический вид $w-z_0=\lambda(z-z_0)$.

3.1. $w=z+1-2i$.

3.2. $w=z+1+2i$.

3.3. $w=z-1-2i$.

3.4. $w=z-1+2i$.

3.5. $w=z+2-i$.

3.6. $w=z+2+i$.

3.7. $w=z-2+i$.

3.8. $w=z-2-i$

3.9. $w=z-2+2i$.

3.10. $w=z+2-2i$.

3.11. $w=2z+1-2i$.

3.12. $w=2z+1+2i$.

3.13. $w=2z-1-2i$.

3.14. $w=2z-1+2i$.

3.15. $w=2z+2-i$.

3.16. $w=2z+2+i$.

3.17. $w=2z-2+i$.

3.18. $w=2z-2-i$.

3.19. $w=2z-1+i$.

3.20. $w=2z+1-i$.

3.21. $w=2z+1-3i$.

Упражнение 4. Построить линейную функцию, отображающую область D на область G.

4.1. $D=\{|z-1+i|<2\}$, $G=\{|w-i|<4\}$.

4.2. $D=\{|z-1+i|<2\}$, $G=\{|w+i|<4\}$.

4.3. $D=\{|z+1-i|<2\}$, $G=\{|w-i|<4\}$.

4.4. $D=\{|z+1-i|<2\}$, $G=\{|w+i|<4\}$.

4.5. $D=\{|z-1|<2\}$, $G=\{|w+i|<3\}$.

1.11. $D=\{|z+1|<2\}$, $w=iz+1+i$.

1.12. $D=\{|z+i|<2\}$, $w=iz+1+i$.

1.13. $D=\{|z-1|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.14. $D=\{|z-i|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.15. $D=\{|z+1|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.16. $D=\{|z+i|<2\}$, $w=iz-1+i$.

1.17. $D=\{|z-1|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.18. $D=\{|z-i|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.19. $D=\{|z+1|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.20. $D=\{|z+i|<2\}$, $w=iz+1-i$.

1.21. $D=\{|z-1-i|<\sqrt{2}\}$, $w=iz+1+i$.

Упражнение 2. Найти линейную функцию $w=w(z)$, для которой z_0 неподвижная точка и z_1 переходит в w_1.

2.1. $z_0=1+i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

2.2. $z_0=1-i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

2.3. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=i$.

2.4. $z_0=1-i$, $z_1=1+i$, $w_1=i$.

2.5. $z_0=1+i$, $z_1=1-i$, $w_1=i$.

2.6. $z_0=1-i$, $z_1=2-i$, $w_1=i$.

2.7. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=1-i$.

2.8. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=1+i$.

2.9. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=1-i$.

2.10. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=1+i$.

2.11. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=2-i$.

2.12. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=2+i$.

2.13. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=2-i$.

2.14. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=2-i$.

2.15. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=2+i$.

2.16. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=2+i$.

2.17. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=i$.

2.18. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=i$.

2.19. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=-i$.

2.20. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=-i$.

2.21. $z_0=1+2i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

Упражнение 3. Для данных функций найти неподвижную точку z_0 (если она есть), угол поворота, коэффициент растяжения и канонический вид $w-z_0=\lambda(z-z_0)$.

3.1. $w=z+1-2i$.	3.2. $w=z+1+2i$.
3.3. $w=z-1-2i$.	3.4. $w=z-1+2i$.
3.5. $w=z+2-i$.	3.6. $w=z+2+i$.
3.7. $w=z-2+i$.	3.8. $w=z-2-i$
3.9. $w=z-2+2i$.	3.10. $w=z+2-2i$.
3.11. $w=2z+1-2i$.	3.12. $w=2z+1+2i$.
3.13. $w=2z-1-2i$.	3.14. $w=2z-1+2i$.
3.15. $w=2z+2-i$.	3.16. $w=2z+2+i$.
3.17. $w=2z-2+i$.	3.18. $w=2z-2-i$.
3.19. $w=2z-1+i$.	3.20. $w=2z+1-i$.
3.21. $w=2z+1-3i$.	

Упражнение 4. Построить линейную функцию, отображающую область D на область G.

4.1. $D=\{|z-1+i|<2\}$, $G=\{|w-i|<4\}$.

4.2. $D=\{|z-1+i|<2\}$, $G=\{|w+i|<4\}$.

4.3. $D=\{|z+1-i|<2\}$, $G=\{|w-i|<4\}$.

4.4. $D=\{|z+1-i|<2\}$, $G=\{|w+i|<4\}$.

4.5. $D=\{|z-1|<2\}$, $G=\{|w+i|<3\}$.

4.6. $D=\{|z+1-i|<4\}$, $G=\{|w+i|<5\}$.

4.7. $D=\{|z+1|<2\}$, $G=\{|w+i|<3\}$.

4.8. $D=\{|z+1-i|<4\}$, $G=\{|w-i|<2\}$.

4.9. $D=\{|z-1+i|<4\}$, $G=\{|w+i|<2\}$.

4.10. $D=\{|z-1|<3\}$, $G=\{|w+i|<4\}$.

4.11. $D=\{|z-1+i|<4\}$, $G=\{|w-i|<3\}$.

4.12. $D=\{|z-i|<3\}$, $G=\{|w+i|<4\}$.

4.13. $D=\{|z+i|<2\}$, $G=\{|w+1|<3\}$.

4.14. $D=\{|z-i|<4\}$, $G=\{|w+i|<2\}$.

4.15. $D=\{|z-1|<4\}$, $G=\{|w+i|<2\}$.

4.16. $D=\{|z-i|<2\}$, $G=\{|w+1|<3\}$.

4.17. $D=\{|z+1|<4\}$, $G=\{|w+i|<2\}$.

4.18. $D=\{|z+i|<4\}$, $G=\{|w+1|<2\}$.

4.19. $D=\{|z-i|<4\}$, $G=\{|w+i|<3\}$.

4.20. $D=\{|z-1|<4\}$, $G=\{|w+1|<2\}$.

4.21. $D=\{|z-i|<2\}$, $G=\{|w-2|<4\}$.

Упражнение 5. Найти образ области D при заданном отображении w.

5.1. $D=\{|z|>1\}$, $w=\dfrac{z-1}{z+i}$.

5.2. $D=\{\operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z<0\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.

5.3. $D=\{|z|<1\}$, $w=\dfrac{z+i}{z+1}$.

5.4. $D=\{\operatorname{Im} z<1\}$, $w=\dfrac{z-i}{z}$.

5.5. $D=\{0<\operatorname{Re} z<2\}$, $w=\dfrac{1}{z-2}$.

5.6. $D=\left\{\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.

5.7. $D=\{|z|<1, |z-1|<\sqrt{2}\}$, $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

5.8. $D=\{|z|>1, |z-1|<\sqrt{2}\}$, $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

5.9. $D=\{|z-1|>2\}$, $w=\dfrac{2iz}{z+3}$.

5.10. $D=\{|z-1|>2\}$, $w=\dfrac{z+1}{z-2}$.

5.11. $D=\{|z-1|<3\}$, $w=\dfrac{z-1}{2z-6}$.

5.12. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$, $w=\dfrac{z}{z-1+i}$.

5.13. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$, $w=\dfrac{z}{z-2}$.

5.14. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$, $w=\dfrac{z-3+i}{z+1+i}$.

5.15. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z<0\}$, $w=\dfrac{1-z}{1+z}$.

5.16. $D=\{|z+i|>1, \operatorname{Im} z>1\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.

5.17. $D=\{1<|z|<2\}$, $w=\dfrac{1}{z-2}$.

5.18. $D=\{\operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z<0\}$, $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

5.19. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z<0\}$, $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$.

5.20. $D=\left\{\dfrac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\right\}$, $w=\dfrac{z}{z+1}$.

5.21. $D=\{0<\operatorname{Re} z<1\}$, $w=\dfrac{z-1}{z}$.

Упражнение 6. Построить дробно-линейное отображение $w=w(z)$ по трем условиям.

6.1. $w(1)=1$, $w(0)=-1$, $w(i)=i$.

6.2. $w\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $w(2)=2$, $w\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i\right)=\infty$.

6.3. $w(0)=2$, $w(1+i)=2+i$, $w(2i)=0$.

6.4. $w(4)=0$, $w(2+2i)=1+i$, $w(0)=2i$.

6.5. $w(0)=0$, $w(i)=2$, $w(2i)=3$.

6.6. $w(0)=0$, $w(2)=i$, $w(3)=2i$.

6.7. $w(1)=0$, $w(1+i)=\infty$, $w(3i)=3i$.

6.8. $w(0)=1$, $w(\infty)=1+i$, $w(3)=4i$.

6.9. $w(i)=2$, $w(\infty)=2i$, $w(-i)=0$.

6.10. $w(2)=i$, $w(2i)=\infty$, $w(0)=3i$.

6.11. $w(i)=-2$, $w(\infty)=4i$, $w(-i)=2$.

6.12. $w(-2)=i$, $w(4i)=\infty$, $w(2)=-i$.

6.13. $w(0)=-1$, $w(2i)=i$, $w(1+i)=1-i$.

6.14. $w(i)=-1$, $w(\infty)=i$, $w(1)=1+i$.

6.15. $w(i)=-1$, $w(1)=\infty$, $w(1+i)=i$.

6.16. $w(\infty)=-1$, $w(i)=\infty$, $w(i)=i$.

6.17. $w(0)=-1$, $w(\infty)=\infty$, $w(1)=i$.

6.18. $w(1)=1$, $w(\infty)=-1$, $w(i)=i$.

6.19. $w\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $w(2)=2$, $w(\infty)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$.

6.20. $w(2)=0$, $w(2+i)=1+i$, $w(\infty)=\infty$.

6.21. $w(-1)=i$, $w(i)=\infty$, $w(1+i)=1$.

Упражнение 7. Построить отображение области D на область G с заданной нормировкой.

7.1. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w<0\}$, $w(i)=-i$, $\arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$.

7.2. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w<0\}$, $w(2i)=-2i$, $\arg w'(2i)=-\frac{\pi}{2}$.

7.3. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-i)=i$, $\arg w'(-i)=\frac{\pi}{2}$.

7.4. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-2i)=2i$, $\arg w'(-2i)=\frac{\pi}{2}$.

7.5. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(\frac{1}{4}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{1}{4}\right)=0$.

7.6. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

7.7. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(\frac{i}{4}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$.

7.8. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(-\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(-\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

7.9. $D=\{|z|<2\}$, $G=\{|w|<4\}$, $w(1)=0$, $\arg w'(1)=\frac{\pi}{2}$.

7.10. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<2\}$, $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=0$.

7.11. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w-1|<1\}$, $w(0)=\frac{1}{4}$, $\arg w'(0)=0$.

7.12. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w(i)=0$, $\arg w'(i)=0$.

7.13. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$, $G=\{|w|<2\}$, $w(-i)=0$, $\arg w'(-i)=0$.

7.14. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w(1+i)=0$, $\arg w'(1+i)=\frac{\pi}{2}$.

7.15. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w(-1+2i)=0$, $\arg w'(-1+2i)=\frac{\pi}{2}$.

7.16. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w+1|<1\}$, $w(i)=0$, $\arg w'(i)=1$.

Упражнение 6. Построить дробно-линейное отображение $w = w(z)$ по трем условиям.

6.1. $w(1)=1$, $w(0)=-1$, $w(i)=i$.

6.2. $w\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $w(2)=2$, $w\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i\right)=\infty$.

6.3. $w(0)=2$, $w(1+i)=2+i$, $w(2i)=0$.

6.4. $w(4)=0$, $w(2+2i)=1+i$, $w(0)=2i$.

6.5. $w(0)=0$, $w(i)=2$, $w(2i)=3$.

6.6. $w(0)=0$, $w(2)=i$, $w(3)=2i$.

6.7. $w(1)=0$, $w(1+i)=\infty$, $w(3i)=3i$.

6.8. $w(0)=1$, $w(\infty)=1+i$, $w(3)=4i$.

6.9. $w(i)=2$, $w(\infty)=2i$, $w(-i)=0$.

6.10. $w(2)=i$, $w(2i)=\infty$, $w(0)=3i$.

6.11. $w(i)=-2$, $w(\infty)=4i$, $w(-i)=2$.

6.12. $w(-2)=i$, $w(4i)=\infty$, $w(2)=-i$.

6.13. $w(0)=-1$, $w(2i)=i$, $w(1+i)=1-i$.

6.14. $w(i)=-1$, $w(\infty)=i$, $w(1)=1+i$.

6.15. $w(i)=-1$, $w(1)=\infty$, $w(1+i)=i$.

6.16. $w(\infty)=-1$, $w(i)=\infty$, $w(i)=i$.

6.17. $w(0)=-1$, $w(\infty)=\infty$, $w(1)=i$.

6.18. $w(1)=1$, $w(\infty)=-1$, $w(i)=i$.

6.19. $w\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $w(2)=2$, $w(\infty)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$.

6.20. $w(2)=0$, $w(2+i)=1+i$, $w(\infty)=\infty$.

6.21. $w(-1)=i$, $w(i)=\infty$, $w(1+i)=1$.

Упражнение 7. Построить отображение области D на область G с заданной нормировкой.

7.1. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w<0\}$, $w(i)=-i$, $\arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$.

7.2. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w<0\}$, $w(2i)=-2i$, $\arg w'(2i)=-\frac{\pi}{2}$.

7.3. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-i)=i$, $\arg w'(-i)=\frac{\pi}{2}$.

7.4. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-2i)=2i$, $\arg w'(-2i)=\frac{\pi}{2}$.

7.5. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(\frac{1}{4}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{1}{4}\right)=0$.

7.6. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

7.7. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(\frac{i}{4}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$.

7.8. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w\left(-\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(-\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

7.9. $D=\{|z|<2\}$, $G=\{|w|<4\}$, $w(1)=0$, $\arg w'(1)=\frac{\pi}{2}$.

7.10. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w|<2\}$, $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=0$.

7.11. $D=\{|z|<1\}$, $G=\{|w-1|<1\}$, $w(0)=\frac{1}{4}$, $\arg w'(0)=0$.

7.12. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w(i)=0$, $\arg w'(i)=0$.

7.13. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$, $G=\{|w|<2\}$, $w(-i)=0$, $\arg w'(-i)=0$.

7.14. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w(1+i)=0$, $\arg w'(1+i)=\frac{\pi}{2}$.

7.15. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w|<1\}$, $w(-1+2i)=0$, $\arg w'(-1+2i)=\frac{\pi}{2}$.

7.16. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{|w+1|<1\}$, $w(i)=0$, $\arg w'(i)=1$.

7.17. $D=\{|z-2i|<1\}$, $G=\{\operatorname{Im} w>\operatorname{Re} w\}$, $w(2i)=-2$, $w(i)=0$.

7.18. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(i)=i$, $\arg w'(i)=\dfrac{\pi}{2}$.

7.19. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(2i)=i$, $\arg w'(2i)=0$.

7.20. $D=\{|z|<3\}$, $G=\{\operatorname{Re} w<0\}$, $w(0)=-1$, $\arg w'(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

7.21. $D=\{|z|<2\}$, $G=\{\operatorname{Re} w>0\}$, $w(0)=1$, $\arg w'(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

Упражнение 8. Найти образ множества D для заданной функции w.

8.1. $D=\{\operatorname{Re} z=2\}$, $w=z^2$.

8.2. $D=\{\operatorname{Im} z=3\}$, $w=z^2$.

8.3. $D=\left\{\arg z=\dfrac{\pi}{3}\right\}$, $w=z^4$.

8.4. $D=\left\{|z|=2, \dfrac{\pi}{3}<\arg z<\dfrac{2\pi}{3}\right\}$, $w=z^2$.

8.5. $D=\{\operatorname{Im} z>1\}$, $w=z^2$.

8.6. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$, $w=z^2$.

8.7. $D=\left\{|z|<2, \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right\}$, $w=z^2$.

8.8. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$, $w=z^2$.

8.9. $D=\left\{|z|>2, \dfrac{5\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}$, $w=z^2$.

8.10. $D=\{\operatorname{Re} z<-1\}$, $w=z^2$.

8.11. $D=\left\{|z|<4, \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}\right\}$, $w=z^2$.

8.12. $D=\{|z|>3, \operatorname{Re} z>0\}$, $w=z^2$.

8.13. $D=\left\{|z|>2, \arg z=\dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w=z^3$.

8.14. $D=\left\{|\arg z|<\dfrac{\pi}{4}, z\notin[0,1]\right\}$, $w=z^4$.

8.15. $D=\left\{|z|=4, \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $w=z^4$.

8.16. $D=\left\{|z|>2, \arg z=\dfrac{\pi}{3}\right\}$, $w=z^6$.

8.17. $D=\{\operatorname{Re} z>0, z\notin[1,+\infty)\}$, $w=z^2$.

8.18. $D=\left\{|z|<3, \arg z=\dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w=z^4$.

8.19. $D=\left\{|z|>1, \pi<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}$, $w=z^2$.

8.20. $D=\{\operatorname{Im} z<0,\ z\notin(-\infty,-2]\}$, $w=z^2$.

8.21. $D=\left\{|z|=2, \dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}\right\}$, $w=z^6$.

Упражнение 9. Найти образ множества D при отображении функцией Жуковского.

9.1. $D=\left\{|z|=\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

9.2. $D=\left\{|z|=2, \dfrac{3\pi}{4}<\arg z<\dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

9.3. $D=\{|z|>2, z\notin[2,+\infty)\}$.

9.4. $D=\left\{|z|<\dfrac{1}{2}, z\notin\left[-\dfrac{1}{2},0\right]\right\}$.

9.5. $D=\left\{\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}, z\notin[i,+i\infty)\right\}$.

9.6. $D=\left\{\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}, z\notin[0,4i]\right\}$.

9.7. $D=\{|z|<1, z\notin[-1,0]\}$.

9.8. $D=\left\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0, z \notin\left[\frac{i}{2}; i\right]\right\}$.

9.9. $D=\left\{|z|<\frac{1}{2}, 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

9.10. $D=\left\{|z|<\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}\right\}$.

9.11. $D=\left\{|z|>2, 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

9.12. $D=\left\{|z|>2, \frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}\right\}$.

9.13. $D=\{\operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\}$.

9.14. $D=\{\operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z<0\}$.

9.15. $D=\left\{|z|<\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z>0\right\}$.

9.16. $D=\left\{|z|<\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z<0\right\}$.

9.17. $D=\{|z|>2, \operatorname{Im} z>0\}$.

9.18. $D=\{|z|<2, \operatorname{Im} z<0\}$.

9.19. $D=\{1<|z|<2, \operatorname{Im} z>0\}$.

9.20. $D=\left\{\frac{1}{2}<|z|<2, \operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\right\}$.

9.21. $D=\{\operatorname{Im} z>0\} \setminus \left\{|z|=1, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\right\}$.

Упражнение 10. Найти образ множества D при отображении функцией $w=e^z$.

10.1. $D=\{0<\operatorname{Re} z<\pi, \operatorname{Im} z<0\}$.

10.2. $D=\{-\pi<\operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z<0\}$.

10.3. $D=\left\{\operatorname{Re} z>0, \frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\pi\right\}$.

10.4. $D=\left\{\operatorname{Re} z<0, -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<0\right\}$.

10.5. $D=\{1<\operatorname{Re} z<2, 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$.

10.6. $D=\left\{2<\operatorname{Re} z<3, \frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\frac{3\pi}{2}\right\}$.

10.7. $D=\left\{\operatorname{Re} z>0, 0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

10.8. $D=\left\{\operatorname{Re} z<0, -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<0\right\}$.

10.9. $D=\left\{\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\frac{3\pi}{2}\right\}$.

10.10. $D=\{0<\operatorname{Im} z<\pi, \operatorname{Re} z>0\}$.

10.11. $D=\left\{-\frac{\pi}{4}<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{4}\right\}$.

10.12. $D=\left\{-\frac{\pi}{4}<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{4}, \operatorname{Re} z>0\right\}$.

10.13. $D=\left\{-\frac{\pi}{4}<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{4}, \operatorname{Re} z<0\right\}$.

10.14. $D=\{\operatorname{Im} z=2 \cdot \operatorname{Re} z+1\}$.

10.15. $D=\{\operatorname{Re} z<\operatorname{Im} z<\operatorname{Re} z+2\pi\}$.

10.16. $D=\{\operatorname{Im} z=2 \operatorname{Re} z\}$.

10.17. $D=\{\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z+1\}$.

10.18. $D=\{\operatorname{Im} z+\operatorname{Re} z=2\}$.

10.19. $D=\{\operatorname{Im} z-\operatorname{Re} z=3\}$.

10.20. $D=\left\{1<\operatorname{Re} z<4, \frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\pi\right\}$.

10.21. $D=\{0<\operatorname{Re} z<2, \pi<\operatorname{Im} z<2\pi\}$.

Упражнение 11. Найти образ множества D для заданной функции w.

11.1. $D=\{\mathrm{Re}\,z=2\}$, $w=\cos z$.

11.2. $D=\{\mathrm{Im}\,z=2\}$, $w=\cos z$.

11.3. $D=\left\{0<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z<0\right\}$, $w=\cos z$.

11.4. $D=\{-\pi<\mathrm{Re}\,z<0\}$, $w=\cos z$.

11.5. $D=\left\{0<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=\mathrm{tg}\,z$.

11.6. $D=\{\mathrm{Re}\,z=2\}$, $w=\sin z$.

11.7. $D=\{-\pi<\mathrm{Re}\,z<0\}$, $w=\sin z$.

11.8. $D=\{\mathrm{Im}\,z=2\}$, $w=\sin z$.

11.9. $D=\{-\pi<\mathrm{Re}\,z<0\}$, $w=\mathrm{tg}\,z$.

11.10. $D=\left\{0<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=\mathrm{ctg}\,z$.

11.11. $D=\{-\pi<\mathrm{Re}\,z<0, \mathrm{Im}\,z<0\}$, $w=\sin z$.

11.12. $D=\left\{-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z<0\right\}$, $w=\sin z$.

11.13. $D=\left\{0<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z<0\right\}$, $w=\sin z$.

11.14. $D=\left\{0<\mathrm{Re}\,z<\pi, -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$, $w=\sin z$.

11.15. $D=\left\{-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z<0\right\}$, $w=\cos z$.

11.16. $D=\{-\pi<\mathrm{Re}\,z<0, \mathrm{Im}\,z<0\}$, $w=\cos z$.

11.17. $D=\left\{0<\mathrm{Re}\,z<\pi, -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$, $w=\cos z$.

11.18. $D=\{0<\mathrm{Re}\,z<1, \mathrm{Im}\,z>0\}$, $w=\mathrm{tg}\,\pi z$.

11.19. $D=\{0<\mathrm{Re}\,z<\pi, \mathrm{Im}\,z>0\}$, $w=\sin z$.

11.20. $D=\left\{-\frac{\pi}{4}<\mathrm{Re}\,z<0\right\}$, $w=\mathrm{tg}\,z$.

11.21. $D=\left\{-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z>0\right\}$, $w=\sin z$.

Упражнение 12. Построить конформное отображение $w(z)$ области D на область $G=\{\mathrm{Im}\,w>0\}$.

12.1. $D=\{|z|<1, \mathrm{Im}\,z>0\}$.

12.2. $D=\{|z|<1, \mathrm{Im}\,z<0\}$.

12.3. $D=\{|z|<1, \mathrm{Re}\,z>0\}$.

12.4. $D=\{|z|<1, \mathrm{Re}\,z<0\}$.

12.5. $D=\{-\pi<\mathrm{Im}\,z<\pi, z\notin[1,+\infty)\}$.

12.6. $D=\{|z+1|>1, |z-2|>2\}$.

12.7. $D=\{|z+2|>2, |z-1|>1\}$.

12.8. $D=\{|z-1|>1, \mathrm{Re}\,z>0\}$.

12.9. $D=\{|z+1|>1, \mathrm{Re}\,z<0\}$.

12.10. $D=\{|z-i|>1, |z-2i|<2\}$.

12.11. $D=\{|z+i|>1, |z+2i|<2\}$.

12.12. $D=\{|z-1|>1, |z-2|<2\}$.

12.13. $D=\{|z+1|>1, |z+2|<2\}$.

12.14. $D=\{0<\mathrm{Re}\,z<1, \mathrm{Im}\,z>0\}$.

12.15. $D=\{-1<\mathrm{Re}\,z<0, \mathrm{Im}\,z<0\}$.

12.16. $D=\left\{\mathrm{Re}\,z>0, -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

12.17. $D=\{\mathrm{Re}\,z>0, |z-1|>1, |z-2|<2\}$.

12.18. $D=\left\{\mathrm{Re}\,z<0, -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

12.19. $D=\{\mathrm{Re}\,z>0, |z+1|>1, |z+2|>2\}$.

12.20. $D=\{\mathrm{Re}\,z<0, \mathrm{Im}\,z>0, |z-i|>1\}$.

12.21. $D=\{\mathrm{Re}\,z>0, -\pi<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$.

Упражнение 13. Решить уравнение.

13.1. $z^5+2=i$.	**13.2.** $z^4-1=i$.
13.3. $z^3+2i=2$.	**13.4.** $z^2-z+1=i$.
13.5. $z^2-4i=2$.	**13.6.** $z^5+32=0$.
13.7. $z^3+81=0$.	**13.8.** $z^5+1=0$.
13.9. $z^4+z^2+1=0$.	**13.10.** $z^7+1=0$.
13.11. $z^2+4i=3$.	**13.12.** $z^8=1-i$.
13.13. $z^2=i$.	**13.14.** $z^2+i=1$.
13.15. $z^3-1=0$.	**13.16.** $z^4+1=0$.
13.17. $z^3+2=2i$.	**13.18.** $z^3-i=0$.
13.19. $z^6+8=0$.	**13.20.** $z^2-4i=3$.
13.21. $z^5+4=3i$.	

Упражнение 14. Найти образ области D при отображении функцией $w=\sqrt{z}$ при заданном значении в одной точке.

14.1. $D=\{\operatorname{Re}z>0\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.2. $D=\{\operatorname{Re}z<0\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.3. $D=\{z\notin(-\infty,2]\}$, $\sqrt{4}=2$.

14.4. $D=\{z\notin[-2,+\infty)\}$, $\sqrt{4}=2i$.

14.5. $D=\{|z|<1,\operatorname{Im}z>0\}$, $\sqrt{\frac{i}{2}}=\frac{1+i}{2}$.

14.6. $D=\{|z|<1,\operatorname{Im}z<0\}$, $\sqrt{-\frac{i}{2}}=\frac{1-i}{2}$.

14.7. $D=\{\operatorname{Im}z>0\}$, $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

14.8. $D=\left\{|z|>1,\frac{3\pi}{4}<\arg z<\frac{5\pi}{4}\right\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.9. $D=\{z\notin[-i\infty,-2i)\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.10. $D=\{(\operatorname{Im}z)^2>2\operatorname{Re}z+1\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.11. $D=\{\operatorname{Im}z>0\}$, $\sqrt{i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

14.12. $D=\left\{|z|>1,\frac{3\pi}{4}<\arg z<\frac{5\pi}{4}\right\}$, $\sqrt{-1}=-i$.

14.13. $D=\{z\notin[2i,+i\infty)\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.14. $D=\{(\operatorname{Im}z)^2>2\operatorname{Re}z+1\}$, $\sqrt{-1}=-i$.

14.15. $D=\{z\notin[1,+\infty)\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.16. $D=\{|z|<1,\operatorname{Re}z>0\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.17. $D=\{|z|<1,\operatorname{Re}z>0\}$, $\sqrt{1}=-1$.

14.18. $D=\{|z|<4,\operatorname{Re}z<0\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.19. $D=\{|z|<4,\operatorname{Re}z<0\}$, $\sqrt{1}=-1$.

14.20. $D=\{\operatorname{Re}z>0,|z|>1\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.21. $D=\{\operatorname{Im}z>0,(\operatorname{Im}z)^2>4\operatorname{Re}z+4\}$, $\sqrt{-1}=i$.

Упражнение 15. Найти функцию $w(z)$, отображающую область D на верхнюю полуплоскость.

15.1. $D=\{\operatorname{Im}z>0,z\notin[0,2i]\}$.

15.2. $D=\{\operatorname{Re}z<0,z\notin[-2,0]\}$.

15.3. $D=\left\{|z|<2,0<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right\}$.

15.4. $D=\left\{|z|>2,0<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right\}$.

15.5. $D=\{|z|<2,|z-2i|<2\}$.

15.6. $D=\{|z|>2,|z-2i|>2\}$.

15.7. $D=\{z\notin[-2,3]\}$.

15.8. $D=\{z\notin[-2i,2i]\}$.

15.9. $D=\{z\notin\{(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\}\}$.

15.10. $D=\{z\notin\{(-i\infty,-i)\cup(i,+i\infty)\}\}$.

Упражнение 13. Решить уравнение.

13.1. $z^5+2=i$.
13.2. $z^4-1=i$.
13.3. $z^3+2i=2$.
13.4. $z^2-z+1=i$.
13.5. $z^2-4i=2$.
13.6. $z^5+32=0$.
13.7. $z^3+81=0$.
13.8. $z^5+1=0$.
13.9. $z^4+z^2+1=0$.
13.10. $z^7+1=0$.
13.11. $z^2+4i=3$.
13.12. $z^8=1-i$.
13.13. $z^2=i$.
13.14. $z^2+i=1$.
13.15. $z^3-1=0$.
13.16. $z^4+1=0$.
13.17. $z^3+2=2i$.
13.18. $z^3-i=0$.
13.19. $z^6+8=0$.
13.20. $z^2-4i=3$.
13.21. $z^5+4=3i$.

Упражнение 14. Найти образ области D при отображении функцией $w=\sqrt{z}$ при заданном значении в одной точке.

14.1. $D=\{\operatorname{Re} z>0\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.2. $D=\{\operatorname{Re} z<0\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.3. $D=\{z\notin(-\infty,2]\}$, $\sqrt{4}=2$.

14.4. $D=\{z\notin[-2,+\infty)\}$, $\sqrt{4}=2i$.

14.5. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{\dfrac{i}{2}}=\dfrac{1+i}{2}$.

14.6. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z<0\}$, $\sqrt{-\dfrac{i}{2}}=\dfrac{1-i}{2}$.

14.7. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{i}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

14.8. $D=\left\{|z|>1, \dfrac{3\pi}{4}<\arg z<\dfrac{5\pi}{4}\right\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.9. $D=\{z\notin[-i\infty,-2i)\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.10. $D=\{(\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.11. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{i}=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

14.12. $D=\left\{|z|>1, \dfrac{3\pi}{4}<\arg z<\dfrac{5\pi}{4}\right\}$, $\sqrt{-1}=-i$.

14.13. $D=\{z\notin[2i,+i\infty)\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.14. $D=\{(\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1\}$, $\sqrt{-1}=-i$.

14.15. $D=\{z\notin[1,+\infty)\}$, $\sqrt{-1}=i$.

14.16. $D=\{|z|<1, \operatorname{Re} z>0\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.17. $D=\{|z|<1, \operatorname{Re} z>0\}$, $\sqrt{1}=-1$.

14.18. $D=\{|z|<4, \operatorname{Re} z<0\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.19. $D=\{|z|<4, \operatorname{Re} z<0\}$, $\sqrt{1}=-1$.

14.20. $D=\{\operatorname{Re} z>0, |z|>1\}$, $\sqrt{1}=1$.

14.21. $D=\{\operatorname{Im} z>0, (\operatorname{Im} z)^2>4\operatorname{Re} z+4\}$, $\sqrt{-1}=i$.

Упражнение 15. Найти функцию $w(z)$, отображающую область D на верхнюю полуплоскость.

15.1. $D=\{\operatorname{Im} z>0, z\notin[0,2i]\}$.

15.2. $D=\{\operatorname{Re} z<0, z\notin[-2,0]\}$.

15.3. $D=\left\{|z|<2, 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

15.4. $D=\left\{|z|>2, 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

15.5. $D=\{|z|<2, |z-2i|<2\}$.

15.6. $D=\{|z|>2, |z-2i|>2\}$.

15.7. $D=\{z\notin[-2,3]\}$.

15.8. $D=\{z\notin[-2i,2i]\}$.

15.9. $D=\{z\notin\{(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\}\}$.

15.10. $D=\{z\notin\{(-i\infty,-i)\cup(i,+i\infty)\}\}$.

15.11. $D=\{|z-1|<2, |z+1|<2\}$.

15.12. $D=\left\{\operatorname{Im}z>0, z\notin\left\{|z|=1, \frac{3\pi}{4}\le\arg z\le\pi\right\}\right\}$.

15.13. $D=\{|z-1|>2, |z+1|>2\}$.

15.14. $D=\left\{\operatorname{Im}z>0, z\notin\left\{|z|=1,\ 0\le\arg z\le\frac{\pi}{4}\right\}\right\}$.

15.15. $D=\{\operatorname{Im}z>0, |z-i|<2\}$.

15.16. $D=\{\operatorname{Im}z>0, (\operatorname{Im}z)^2>2\operatorname{Re}z+1\}$.

15.17. $D=\{z\notin\{|z|=1, 0\le\arg z\le\pi\}\}$.

15.18. $D=\left\{\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}, z\notin[i,+i\infty)\right\}$.

15.19. $D=\{\operatorname{Im}z>0, z\notin[2i,+i\infty)\}$.

15.20. $D=\{\operatorname{Re}z<0, z\notin(-\infty,-1]\}$.

15.21. $D=\{z\notin\{|z|\le1, 0\le\arg z\le\pi\}, z\notin[-i,0]\}$.

Упражнение 16. Построить конформное отображение $w(z)$ области D на верхнюю полуплоскость.

16.1. $D=\{z\notin[-2i,2i]\}$.

16.2. $D=\{z\notin\{(-\infty;-2]\cup[4,+\infty)\}\}$.

16.3. $D=\{|z|>1, z\notin\{[-2,-1]\cup[1,2]\}\}$.

16.4. $D=\{|z|>1, z\in(-\infty,-2]\}$.

16.5. $D=\{|z|>4, z\notin\{[-4,-2]\cup[-1,4]\}\}$.

16.6. $D=\left\{\operatorname{Im}z>0, z\notin\left\{|z|=1, \frac{\pi}{2}\le\arg z\le\pi\right\}\right\}$.

16.7. $D=\left\{|z|<1, \operatorname{Im}z>0, z\notin\left[0,\frac{i}{2}\right]\right\}$.

16.8. $D=\{-\pi<\operatorname{Im}z<\pi, z\notin[0,+\infty)\}$.

16.9. $D=\left\{|z|>1, 0<\arg z<\frac{\pi}{2}, z\notin\left\{\arg z=\frac{\pi}{4}, |z|\ge2\right\}\right\}$.

16.10. $D=\left\{\operatorname{Re}z>0, \operatorname{Im}z>0, z\notin\left\{|z|=2, \frac{\pi}{4}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\right\}\right\}$.

16.11. $D=\{(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2\ge4, z\notin[2i,3i]\}$.

16.12. $D=\left\{\frac{\pi}{2}<\arg z<2\pi, z\notin\left\{|z|=1, \frac{\pi}{2}\le\arg z\le\pi\right\}\right\}$.

16.13. $D=\left\{z\notin[0,+\infty), z\notin\left\{|z|<1, \frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{3\pi}{2}\right\}\right\}$.

16.14. $D=\left\{\operatorname{Im}z>0, z\notin\left\{|z|\le1, \frac{\pi}{4}\le\arg z\le\frac{3\pi}{4}\right\}\right\}$.

16.15. $D=\left\{|z|<1, 0<\arg z<\frac{\pi}{2}, z\notin\left\{\arg z=\frac{\pi}{4}, 0\le|z|\le\frac{1}{4}\right\}\right\}$.

16.16. $D=\{-\pi<\operatorname{Im}z<\pi, z\notin\{(-\infty,0]\cup[\pi,+\infty)\}\}$.

16.17. $D=\{-\pi<\operatorname{Im}z<\pi, z\notin[-\pi i,0]\}$.

16.18. $D=\left\{-\pi<\operatorname{Im}z<\pi, z\notin\left\{[-\pi i,-\frac{2\pi}{2}]\cup[0,\pi i]\right\}\right\}$.

16.19. $D=\{-1<\operatorname{Re}z<1, \operatorname{Im}z>0, z\notin[0,i]\}$.

16.20. $D=\{-1<\operatorname{Re}z<1, \operatorname{Im}z>0, z\notin[i,+i\infty)\}$.

16.21. $D=\{|z-2i|>2, |z+2i|>2, z\notin[-2,2]\}$.

Упражнение 17. Найти все значения многозначной функции.

17.1. $\operatorname{Ln}5$.

17.2. $\operatorname{Ln}(-1)$.

17.3. $\operatorname{Ln}i$.

17.4. $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17.5. $\ln i$.

17.6. $\operatorname{Ln}(1+i\sqrt{3})$.

17.7. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i$.

17.8. $(-1)^i$.

17.9. $(-3+4i)^{1+i}$.

17.10. 2^{-i}.

17.11. $(-i)^i$.

17.12. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

17.13. $\operatorname{Arcsin}1$.

17.14. $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}$.

17.15. $\operatorname{Arccos}2$.

17.16. $\operatorname{Arccos}i$.

17.17. $\operatorname{Arcctg}1$.

17.18. $\operatorname{Arcctg}(1+2i)$.

17.19. $\operatorname{Arcsin}\frac{4i}{3}$.

17.20. $\operatorname{Arccos}\frac{3i}{4}$.

17.21. $\operatorname{Arcsin}2$.

Упражнение 18. Найти образ области D при отображении $w=\operatorname{Ln}z$ и заданной нормировке.

18.1. $D=\{\operatorname{Im}z>0\}$, $w(i)=\frac{\pi i}{2}$.

18.2. $D=\{\operatorname{Im}z<0\}$, $w(-i)=-\frac{\pi i}{2}$.

18.3. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(1)=4\pi i$.

18.4. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-i)=-\frac{\pi i}{2}$.

18.5. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(1)=4\pi i$.

18.6. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(-i)=-\frac{\pi i}{2}$.

18.7. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(i)=\frac{5\pi i}{2}$.

18.8. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(i)=\frac{5\pi i}{2}$.

18.9. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(-i)=\pi i$.

18.10. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-1)=\pi i$.

18.11. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(-i)=-\frac{\pi i}{2}$.

18.12. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-i)=-\frac{\pi i}{2}$.

18.13. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(i)=\frac{\pi i}{2}$.

18.14. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{10\pi i}{3}$.

18.15. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(i)=\frac{\pi i}{2}$.

18.16. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{10\pi i}{3}$.

18.17. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(-1)=-\pi i$.

18.18. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-1)=-\pi i$.

18.19. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-i)=-\frac{\pi i}{2}$.

18.20. $D=\{|z|<1, z\notin[0,1]\}$, $w(-1)=-\pi i$.

18.21. $D=\{z\notin(-\infty,0], z\notin[1,+\infty)\}$, $w(i)=\frac{\pi i}{2}$.

Упражнение 19. Применяя принцип симметрии, найти образ единичного круга $\{|z|<1\}$ при заданном отображении.

19.1. $w=\frac{z}{\sqrt[20]{(1+z^{20})^2}}$.

19.2. $w=\frac{z}{\sqrt[19]{(1+z^{19})^2}}$.

19.3. $w=\frac{z}{\sqrt[18]{(1+z^{18})^2}}$.

19.4. $w=\frac{z}{\sqrt[17]{(1+z^{17})^2}}$.

19.5. $w=\frac{z}{\sqrt[16]{(1+z^{16})^2}}$.

19.6. $w=\frac{z}{\sqrt[15]{(1+z^{15})^2}}$.

19.7. $w=\frac{z}{\sqrt[14]{(1+z^{14})^2}}$.

19.8. $w=\frac{z}{\sqrt[13]{(1+z^{13})^2}}$.

19.9. $w=\frac{z}{\sqrt[12]{(1+z^{12})^2}}$.

19.10. $w=\frac{z}{\sqrt[11]{(1+z^{11})^2}}$.

19.11. $w=\dfrac{z}{\sqrt[10]{(1+z^{10})^2}}$.

19.12. $w=\dfrac{z}{\sqrt[9]{(1+z^{9})^2}}$.

19.13. $w=\dfrac{z}{\sqrt[8]{(1+z^{8})^2}}$.

19.14. $w=\dfrac{z}{\sqrt[7]{(1+z^{7})^2}}$.

19.15. $w=\dfrac{z}{\sqrt[6]{(1+z^{6})^2}}$.

19.16. $w=\dfrac{z}{\sqrt[5]{(1+z^{5})^2}}$.

19.17. $w=\dfrac{z}{\sqrt[4]{(1+z^{4})^2}}$.

19.18. $w=\dfrac{z}{\sqrt[3]{(1+z^{3})^2}}$.

19.19. $w=\dfrac{z}{\sqrt[21]{(1+z^{21})^2}}$.

19.20. $w=\dfrac{z}{\sqrt[22]{(1+z^{22})^2}}$.

19.21. $w=\dfrac{z}{\sqrt[n]{(1+z^{n})^2}}$.

Упражнение 20. Применяя принцип симметрии отобразить область D на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w>0\}$.

20.1. $D=\{z\notin\{[-1,2]\cup[-i,i]\}\}$.

20.2. $D=\{z\notin\{[-2,1]\cup[-i,i]\}\}$.

20.3. $D=\{z\notin\{[-1,1]\cup[-i,2i]\}\}$.

20.4. $D=\{z\notin\{[-1,1]\cup[-2i,i]\}\}$.

20.5. $D=\{z\notin\{[-1,1]\cup[-i,0]\}\}$.

20.6. $D=\{z\notin\{[-1,1]\cup[0,i]\}\}$.

20.7. $D=\{z\notin\{[0,1]\cup[-i,i]\}\}$.

20.8. $D=\{z\notin\{[-1,0]\cup[-i,i]\}\}$.

20.9. $D=\{|z|>1,\ z\notin\{[-2,-1]\cup[-2i,-i]\cup[i,2i]\}\}$.

20.10. $D=\{|z|<2,\ z\notin\{[-1,2]\cup[-i,i]\}\}$.

20.11. $D=\{|z|>1,\ z\notin\{[1,2]\cup[-2i,-i]\cup[i,2i]\}\}$.

20.12. $D=\{|z|<2, z\notin\{[-2,1]\cup[-i,i]\}\}$.

20.13. $D=\{|z|>1, z\notin\{[-2,-1]\cup[1,2]\cup[i,2i]\}\}$.

20.14. $D=\{|z|<2, z\notin\{[-1,1]\cup[-i,2i]\}\}$.

20.15. $D=\{|z|>1, z\notin\{[-2,-1]\cup[1,2]\cup[-2i,-i]\}\}$.

20.16. $D=\{|z|<2, z\notin\{[-1,1]\cup[-2i,i]\}\}$.

20.17. $D=\left\{0<\operatorname{Re} z<1, z\notin\left\{\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}, -\infty<\operatorname{Im} z\le -2\right\}\right\}$.

20.18. $D=\{z\notin\{[-2,2]\cup[0,2i]\}\}$.

20.19. $D=\left\{-1<\operatorname{Re} z<0, z\notin\left\{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}, 2<\operatorname{Im} z<\infty\right\}\right\}$.

20.20. $D=\{z\notin\{[0,2]\cup[-2i,2i]\}\}$.

20.21. $D=\left\{0<\operatorname{Re} z<1, z\notin\left\{\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}, 2\le\operatorname{Im} z<\infty\right\}\right\}$.

– В –

Решения образцовых вариантов

Приведём решение 21 вариантов упражнений.

Задача 1.21. Найти образ области $D=\{|z-1-i|<\sqrt{2}\}$ при отображении $w=iz+1+i$.

◁ Выразим z из равенства $w=iz+1+i$, тогда

$$z=-iw+i-1 \Rightarrow |z-1-i|=|-iw-2|=|-i(w-2i)|=|-i|\cdot|w-2i|=|w-2i|,$$

поэтому образом круга D будет круг $G=w(D)=\{|w-2i|<\sqrt{2}\}$ (рис. 2.41).

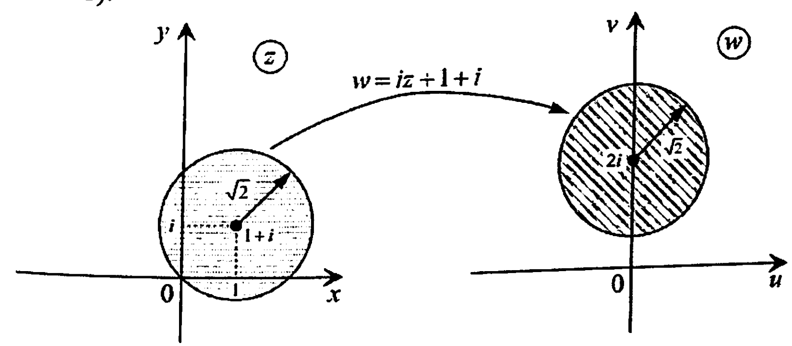


Рисунок 2.41. Образ области D при отображении $w=iz+1+i$ ▷

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

> with(plots) :

> $w = I \cdot z + 1 + I$

$$w = \mathrm{I}z + 1 + \mathrm{I}$$

> solve($\{w = I \cdot z + 1 + I\}, z$)

$$\{z = \mathrm{I}(-w + 1 + \mathrm{I})\}$$

> $z := I \cdot (-w + 1 + I)$

$$z := \mathrm{I}(-w + 1 + \mathrm{I})$$

> $a :=$ evalc(z)

$$a := -1 + \mathrm{I}(-w + 1)$$

> $b := a - 1 - I$

$$b := -2 - \mathrm{I} + \mathrm{I}(-w + 1)$$

> $c :=$ evalc(b)

$$c := -2 - \mathrm{I}w$$

> $I \cdot c$

$$\mathrm{I}(-2 - \mathrm{I}w)$$

> evalc($I \cdot c$)

$$-2\mathrm{I} + w$$

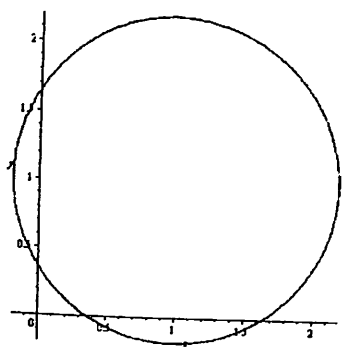
> $|-2 \cdot I + w|$

$$|-2\mathrm{I} + w|$$

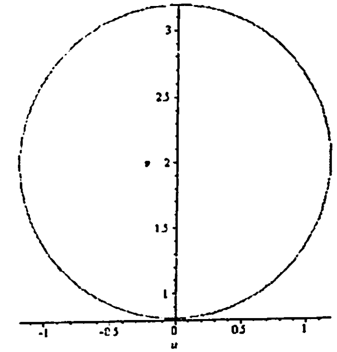
> $|-2 \cdot I + w| < \sqrt{2}$

$$|-2\mathrm{I} + w| < \sqrt{2}$$

> implicitplot($(x-1)^2 + (y-1)^2 < \sqrt{2}, x = -1..3, y = -1..3$, grid = [50, 50], color = blue)



> implicitplot($u^2 + (v-2)^2 < \sqrt{2}, u = -2..2, v = -1..5$, grid = [50, 50], color = red)



Задача 2.21. Найти линейную функцию $w = w(z)$, для которой $z_0 = 1 + 2i$ неподвижная точка и $z_1 = i$ переходит в $w_1 = -i$.

$\triangleleft$ Общий вид линейного отображения имеет вид $w = az + b$, для нахождения $a, b \in \mathbb{C}$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a(1+2i) + b = 1 + 2i, \\ ai + b = -i. \end{cases} \Rightarrow a = 2 + i,\ b = 1 - 3i.$$

Поэтому $w = (2+i)z + 1 - 3i$. $\triangleright$

Задача 3.21. Для функции $w = 2z + 1 - 3i$ найти неподвижную точку z_0 (если она есть), угол поворота, коэффициент растяжения и канонический вид $w - z_0 = \lambda(z - z_0)$.

$\triangleleft$ Для нахождения неподвижной точки решаем уравнение:

$$2z_0 + 1 - 3i = z_0 \Rightarrow z_0 = -1 + 3i \Rightarrow$$

$$w - z_0 = 2z + 1 - 3i - z_0 = 2z + 1 - 3i + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i).$$

Поэтому $w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$. Следовательно,

$$z_0 = -1 + 3i,\ \varphi = 0,\ k = 2,\ w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i). \triangleright$$

Задача 4.21. Построить линейную функцию, отображающую область $D=\{|z-i|<2\}$ на область $G=\{|w-2|<4\}$.

◁ Функция $w_1=z-i$ отображает круг D в круг $\{|w_1|<2\}$. Затем отображения $w_2=2w_1$ и $w=w_2+2$ увеличивают радиус круга в два раза и переносят центр, тем самым решают поставленную задачу (рис. 2.42).

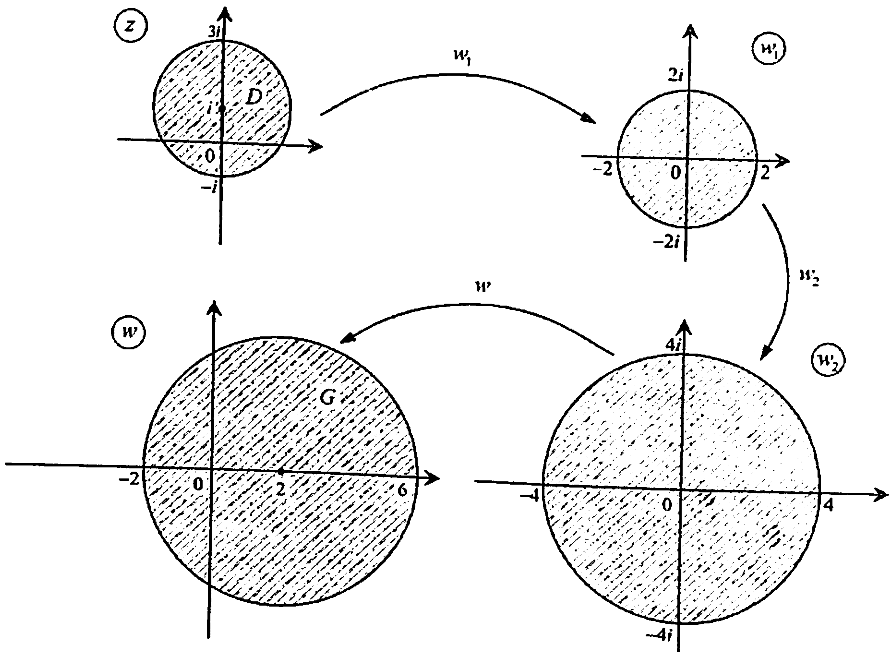


Рисунок 2.42. Последовательность отображений

Итак, $w=2(z-i)+2=2z+2-2i$. ▷

Задача 5.21. Найти образ области $D=\{0<\operatorname{Re}z<1\}$ при заданном отображении $w=\dfrac{z-1}{z}$.

◁ Для решения этой задачи воспользуемся принципом сохранения области и круговым свойством дробно-линейного

отображения. Если $G=w(D)$, то $\partial G=w(\partial D)$. Граница области D состоит из двух прямых $\operatorname{Re}z=0$ и $\operatorname{Re}z=1$.

Так как $w(0)=\infty$, $w(i)=1+i$, $w(-i)=1-i$, то образом первой прямой будет прямая $\operatorname{Re}w=1$.

Так как на прямой $\operatorname{Re}z=1$ нет точек, переходящих в ∞, то образом этой прямой будет окружность. Для её нахождения нам нужно выразить z из уравнения $w=\dfrac{z-1}{z}$. Имеем

$$z=\frac{-1}{w-1}=\frac{-1}{u+iv-1}=\frac{-(u-1-iv)}{(u-1)^2+v^2}=\frac{1-u}{(u-1)^2+v^2}+i\frac{v}{(u-1)^2+v^2},$$

из последнего выражения и равенства $\operatorname{Re}z=1$ получим

$$\frac{1-u}{(u-1)^2+v^2}=1 \Rightarrow (u-1)^2+v^2=1-u \Rightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

Следовательно (рис. 2.43),

$$\partial G=\{\operatorname{Re}w=1\}\cup\left\{\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow G=\left\{\operatorname{Re}w<1,\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}.$$

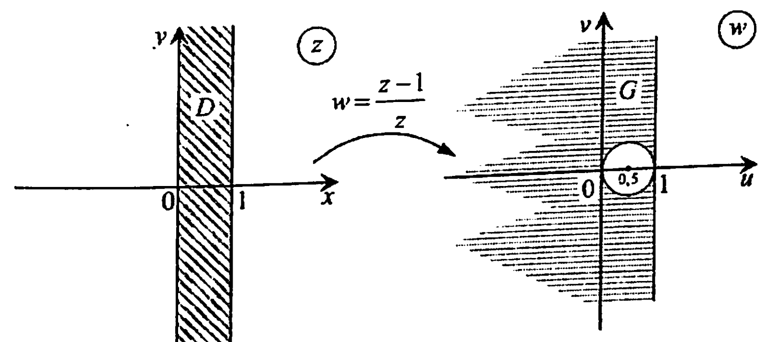


Рисунок 2.43. Образ области D при отображении $w=\dfrac{z-1}{z}$ ▷

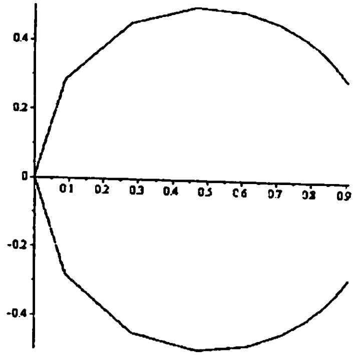
Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

```
> with(plots) :
```

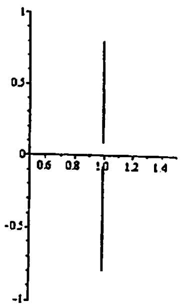
$> w := \frac{z-1}{z}$

$$w := \frac{z-1}{z}$$

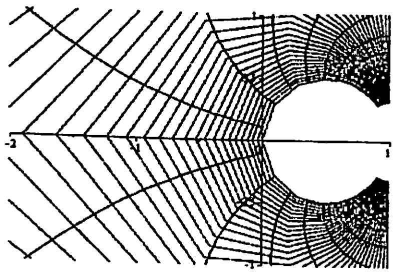
$> conformal(w, z = 1 - \pi \cdot I..1 + \pi \cdot I, grid = [30, 30])$



$> conformal(w, z = 0 - 4 \cdot \pi \cdot I..0 + 4 \cdot \pi \cdot I, 1 - I..1 + I, grid = [30, 30])$



$> conformal(w, z = 0 - \pi \cdot I..1 + \pi \cdot I, -2 - I..1 + I, grid = [30, 30])$



Задача 6.21. Построить дробно-линейное отображение $w = w(z)$ по трем условиям: $w(-1) = i$, $w(i) = \infty$, $w(1+i) = 1$.

◁ Для решения этой задачи используем ангармоническое отношение

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

В нашем случае $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_3 = 1+i$, $w_1 = i$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$, учитывая что $w_2 = \infty$, то ангармоническое отношение имеет вид

$$\frac{w-i}{1-i} = \frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{1+i-i}{1+i+1}.$$

Откуда

$$w = \frac{(1+2i)z + 6 - 3i}{5(z-i)}. \ \triangleright$$

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

$> solve\left(\left\{\frac{w-I}{1-I} = \frac{z+1}{z-I} \cdot \frac{1+I-I}{1+I+1}\right\}, \{w\}\right)$

$$\left\{w = \frac{1}{5} \frac{9 + 3I - z + 3Iz}{Iz + 1 - I + z}\right\}$$

Задача 7.21. Построить отображение области $D = \{|z| < 2\}$ на область $G = \{\mathrm{Re}\, w > 0\}$ с нормировкой $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

◁ Используя формулу (2.5), построим дробно-линейную функцию, конформно отображающую область G на область D. Для этого необходимо последовательно применить следующие отображения

$$z_1 = iw, \ z_2 = e^{i\theta} \frac{z_1 - a}{z_1 - \bar{a}}, \ z = 2z_2.$$

Следовательно,

$$z_2 = 2z_2 = 2e^{i\theta} \frac{z_1 - a}{z_1 - \bar{a}} = 2e^{i\theta} \frac{iw - a}{iw - \bar{a}}.$$

Решив это уравнение относительно w, получим общий вид отображения области D на область G

$$w=-i\frac{\bar{a}z-2ae^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}.$$

Из первого условия нормировки имеем

$$w(0)=1 \Rightarrow -i\cdot\frac{-2ae^{i\theta}}{-2e^{i\theta}}=-ai=1 \Rightarrow a=i \Rightarrow$$

$$w=-i\cdot\frac{-iz-2ie^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}=-\frac{z+2e^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}.$$

Из второго условия нормировки следует, что

$$\frac{\pi}{2}=\arg w'(0)=\arg\left(-\frac{4e^{i\theta}}{(z-2e^{i\theta})^2}\right)\Bigg|_{z=0}=\arg\frac{-1}{e^{i\theta}}=\pi-\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$e^{i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$$

Следовательно, функция

$$w=-\frac{z+2i}{z-2i}$$

удовлетворяет условиям задачи. ▹

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

> $z1 := I\cdot w$

$$z1 := \mathrm{I}\,w$$

> $z2 := e^{I\cdot\theta}\cdot\frac{z1-a}{z1-conjugate(a)}$

$$z2 := \frac{e^{\mathrm{I}\theta}(\mathrm{I}\,w-a)}{\mathrm{I}\,w-\bar{a}}$$

> $z3 := 2\cdot z2$

$$z3 := \frac{2\,e^{\mathrm{I}\theta}(\mathrm{I}\,w-a)}{\mathrm{I}\,w-\bar{a}}$$

> $solve(\{z=z3\},\{w\})$

$$\left\{w=-\frac{\mathrm{I}\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}a-\bar{a}\,z\right)}{2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z}\right\}$$

> $w(z) := -\frac{\mathrm{I}\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}a-\bar{a}\,z\right)}{2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z}$

$$w := z\to-\frac{\mathrm{I}\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}a-\bar{a}\,z\right)}{2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z}$$

> $w(0)$

$$-\mathrm{I}\,a$$

> $solve(\{-I\cdot a=1\},\{a\})$

$$\{a=\mathrm{I}\}$$

> $w(z) := -\frac{I\cdot\left(2\cdot I\cdot e^{I\cdot\theta}+I\cdot z\right)}{2\cdot e^{I\cdot\theta}-z}$

$$w := z\to-\frac{\mathrm{I}\left(2\,\mathrm{I}\,e^{\mathrm{I}\theta}+\mathrm{I}\,z\right)}{2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z}$$

> $\frac{d}{dz}\,w(z)$

$$\frac{1}{2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z}-\frac{\mathrm{I}\left(2\,\mathrm{I}\,e^{\mathrm{I}\theta}+\mathrm{I}\,z\right)}{\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z\right)^2}$$

> $simplify\left(\frac{1}{2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z}-\frac{\mathrm{I}\left(2\,\mathrm{I}\,e^{\mathrm{I}\theta}+\mathrm{I}\,z\right)}{\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z\right)^2}\right)$

$$\frac{4\,e^{\mathrm{I}\theta}}{\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z\right)^2}$$

> $h(z) := \frac{4\,e^{\mathrm{I}\theta}}{\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z\right)^2}$

$$h := z\to\frac{4\,e^{\mathrm{I}\theta}}{\left(2\,e^{\mathrm{I}\theta}-z\right)^2}$$

> $h(0)$

$$\frac{1}{e^{\mathrm{I}\theta}}$$

> argument($h(0)$)

$$\mathrm{argument}\left(\frac{1}{e^{\mathrm{I}\theta}}\right)$$

> $simplify\left(\mathrm{argument}\left(\frac{1}{e^{\mathrm{I}\theta}}\right)\right)$

Решив это уравнение относительно w, получим общий вид отображения области D на область G

$$w = -i\frac{\overline{a}z - 2ae^{i\theta}}{z - 2e^{i\theta}}.$$

Из первого условия нормировки имеем

$$w(0) = 1 \Rightarrow -i \cdot \frac{-2ae^{i\theta}}{-2e^{i\theta}} = -ai = 1 \Rightarrow a = i \Rightarrow$$

$$w = -i \cdot \frac{-iz - 2ie^{i\theta}}{z - 2e^{i\theta}} = -\frac{z + 2e^{i\theta}}{z - 2e^{i\theta}}.$$

Из второго условия нормировки следует, что

$$\frac{\pi}{2} = \arg w'(0) = \arg\left(-\frac{4e^{i\theta}}{(z - 2e^{i\theta})^2}\right)\Bigg|_{z=0} = \arg\frac{-1}{e^{i\theta}} = \pi - \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Следовательно, функция

$$w = -\frac{z + 2i}{z - 2i}$$

удовлетворяет условиям задачи. ▹

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

$> z1 := I \cdot w$

$$z1 := \mathrm{I}\, w$$

$> z2 := e^{I\cdot\theta} \cdot \frac{z1 - a}{z1 - conjugate(a)}$

$$z2 := \frac{e^{\mathrm{I}\theta}(\mathrm{I}\, w - a)}{\mathrm{I}\, w - \overline{a}}$$

$> z3 := 2 \cdot z2$

$$z3 := \frac{2\, e^{\mathrm{I}\theta}(\mathrm{I}\, w - a)}{\mathrm{I}\, w - \overline{a}}$$

$> solve(\{z = z3\}, \{w\})$

$$\left\{ w = -\frac{\mathrm{I}\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} a - \overline{a}\, z\right)}{2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z} \right\}$$

$> w(z) := -\frac{\mathrm{I}\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} a - \overline{a}\, z\right)}{2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z}$

$$w := z \to -\frac{\mathrm{I}\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} a - \overline{a}\, z\right)}{2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z}$$

$> w(0)$

$$-\mathrm{I}\, a$$

$> solve(\{-I \cdot a = 1\}, \{a\})$

$$\{a = \mathrm{I}\}$$

$> w(z) := -\frac{I \cdot \left(2 \cdot I \cdot e^{I\cdot\theta} + I \cdot z\right)}{2 \cdot e^{I\cdot\theta} - z}$

$$w := z \to -\frac{\mathrm{I}\left(2\,\mathrm{I}\, e^{\mathrm{I}\theta} + \mathrm{I}\, z\right)}{2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z}$$

$> \frac{d}{dz} w(z)$

$$\frac{1}{2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z} - \frac{\mathrm{I}\left(2\,\mathrm{I}\, e^{\mathrm{I}\theta} + \mathrm{I}\, z\right)}{\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z\right)^2}$$

$> simplify\left(\frac{1}{2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z} - \frac{\mathrm{I}\left(2\,\mathrm{I}\, e^{\mathrm{I}\theta} + \mathrm{I}\, z\right)}{\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z\right)^2}\right)$

$$\frac{4\, e^{\mathrm{I}\theta}}{\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z\right)^2}$$

$> h(z) := \frac{4\, e^{\mathrm{I}\theta}}{\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z\right)^2}$

$$h := z \to \frac{4\, e^{\mathrm{I}\theta}}{\left(2\, e^{\mathrm{I}\theta} - z\right)^2}$$

$> h(0)$

$$\frac{1}{e^{\mathrm{I}\theta}}$$

$> \mathrm{argument}(h(0))$

$$\mathrm{argument}\left(\frac{1}{e^{\mathrm{I}\theta}}\right)$$

$> simplify\left(\mathrm{argument}\left(\frac{1}{e^{\mathrm{I}\theta}}\right)\right)$

$$\operatorname{argument}(e^{-I\theta})$$

$> evalc(\operatorname{argument}(e^{-I\cdot\theta}))$

$$-\theta$$

$> \theta := -\frac{\pi}{2}$

$$\theta := -\frac{1}{2}\pi$$

$> e^{-I\cdot\theta}$

$$e^{\frac{1}{2}I\pi}$$

$> w(z) := -\frac{I\cdot(2\cdot I\cdot I+z\cdot I)}{2\cdot I-z}$

$$w := z \to -\frac{I(-2+Iz)}{2I-z}$$

Задача 8.21. Найти образ множества $D=\left\{|z|=2, \frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{3}\right\}$ для функции $w=z^6$.

◁ Если положить $z=re^{i\varphi}$ и $w=\rho e^{i\psi}$, то для $w=z^6$ имеем $\rho=r^6$ и $\psi=6\varphi$. Тогда $G=w(D)=\{|w|=64, \pi<\arg w<2\pi\}$ (рис. 2.44). ▷

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

$> with(plots):$

$> conformal\left(z^6, z=0+\frac{\pi}{6}\cdot I..2+\frac{\pi}{3}\cdot I, -10-10\cdot I..10+I, grid=[30,30], coords=\text{polar}\right)$

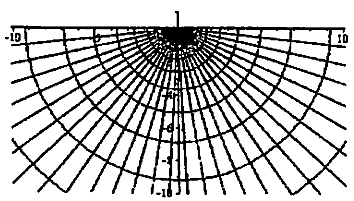


Рисунок 2.44. Образ множества D при отображении $w=z^6$

Задача 9.21. Найти образ множества

$$D=\{\operatorname{Im} z>0\}\setminus\left\{|z|=1, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\right\}$$

при отображении функцией Жуковского.

◁ Исходная область изображена на рис. 2.45. Для решения используем принцип сохранения границы $w(\partial D)=\partial G$ формулы (2.11).

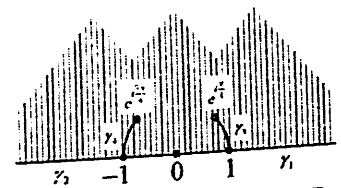


Рисунок 2.45. Область D

Если обозначить $\gamma_1=[0,+\infty)$, $\gamma_2=(-\infty,0]$, $\gamma_3=\left\{r=1, 0<\varphi<\frac{\pi}{4}\right\}$, $\gamma_4=\left\{r=1, \frac{3\pi}{4}<\varphi<\pi\right\}$, то $\partial D=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$. Используя (2.11) получим

$$w(\gamma_1)=[1,+\infty),\ w(\gamma_2)=(-\infty,-1],\ w(\gamma_3)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right],\ w(\gamma_4)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial G=w(\gamma_1)\cup w(\gamma_2)\cup w(\gamma_3)\cup w(\gamma_4)=\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right).$$

Поэтому $G=w(D)=\left\{w\notin\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right], w\notin\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)\right\}$. ▷

Задача 10.21. Найти образ множества $D=\{0<\operatorname{Re} z<2, \pi<\operatorname{Im} z<2\pi\}$ при отображении функцией $w=e^z$.

$$\mathrm{argument}\left(e^{-I\theta}\right)$$

> $evalc\left(\mathrm{argument}\left(e^{-I\cdot\theta}\right)\right)$

$$-\theta$$

> $\theta := -\frac{\pi}{2}$

$$\theta := -\frac{1}{2}\pi$$

> $e^{-I\cdot\theta}$

$$e^{\frac{1}{2}I\pi}$$

> $w(z) := -\frac{I\cdot(2\cdot I\cdot I+z\cdot I)}{2\cdot I-z}$

$$w := z \to -\frac{I(-2+Iz)}{2I-z}$$

Задача 8.21. Найти образ множества $D=\left\{|z|=2, \frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{3}\right\}$ для функции $w=z^6$.

◁ Если положить $z=re^{i\varphi}$ и $w=\rho e^{i\psi}$, то для $w=z^6$ имеем $\rho=r^6$ и $\psi=6\varphi$. Тогда $G=w(D)=\{|w|=64, \pi<\arg w<2\pi\}$ (рис. 2.44). ▷

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

> $conformal\left(z^6, z=0+\frac{\pi}{6}\cdot I..2+\frac{\pi}{3}\cdot I, -10-10\cdot I..10+I, grid=[30,30], coords=\mathrm{polar}\right)$

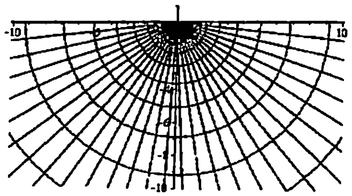


Рисунок 2.44. Образ множества D при отображении $w=z^6$

Задача 9.21. Найти образ множества

$$D=\{\operatorname{Im} z>0\}\setminus\left\{|z|=1, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\right\}$$

при отображении функцией Жуковского.

◁ Исходная область изображена на рис. 2.45. Для решения используем принцип сохранения границы $w(\partial D)=\partial G$ формулы (2.11).

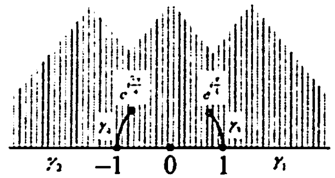


Рисунок 2.45. Область D

Если обозначить $\gamma_1=[0,+\infty)$, $\gamma_2=(-\infty,0]$, $\gamma_3=\left\{r=1, 0<\varphi<\frac{\pi}{4}\right\}$, $\gamma_4=\left\{r=1, \frac{3\pi}{4}<\varphi<\pi\right\}$, то $\partial D=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$. Используя (2.11) получим

$$w(\gamma_1)=[1,+\infty),\ w(\gamma_2)=(-\infty,-1],\ w(\gamma_3)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right],\ w(\gamma_4)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial G=w(\gamma_1)\cup w(\gamma_2)\cup w(\gamma_3)\cup w(\gamma_4)=\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right).$$

Поэтому $G=w(D)=\left\{w\notin\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right], w\notin\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)\right\}$. ▷

Задача 10.21. Найти образ множества $D=\{0<\operatorname{Re} z<2, \pi<\operatorname{Im} z<2\pi\}$ при отображении функцией $w=e^z$.

◁ Если положить $z = x + iy$, $w = \rho e^{i\psi}$, то $\rho = e^x$, $\psi = y$, то в области D

$$e^0 < \rho < e^2,\ \pi < \psi < 2\pi.$$

Исходя из этого получим, что образ $w(D) = \{1 < |w| < e^2, \pi < \arg w < 2\pi\}$ (рис. 2.46).

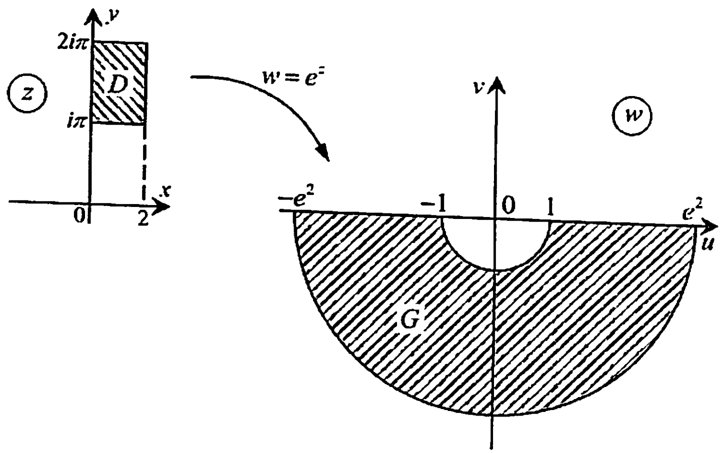
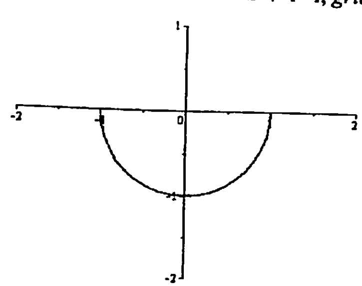


Рисунок 2.46. Образ области D при отображении функцией $w = e^z$ ▷

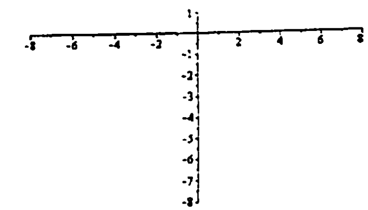
Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

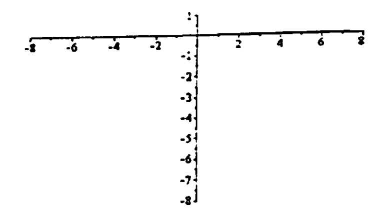
> $conformal(e^z, z = 0 + \pi \cdot I..0 + 2 \cdot \pi \cdot I, -2 - 2 \cdot I..2 + 1 \cdot I, grid = [30, 30])$



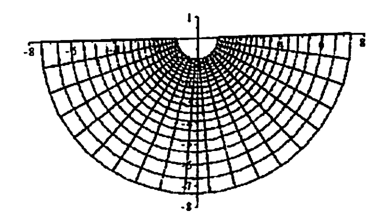
> $conformal(e^z, z = 0 + \pi \cdot I..2 + \pi \cdot I, -8 - 8 \cdot I..8 + 1 \cdot I, grid = [30, 30])$



> $conformal(e^z, z = 0 + 2 \cdot \pi \cdot I..2 + 2 \cdot \pi \cdot I, -8 - 8 \cdot I..8 + 1 \cdot I, grid = [30, 30])$



> $conformal(e^z, z = 0 + \pi \cdot I..2 + 2 \cdot \pi \cdot I, -8 - 8 \cdot I..8 + 1 \cdot I, grid = [20, 20])$



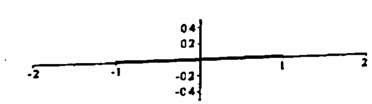
Задача 11.21. Найти образ множества $D = \left\{-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$ для функции $w = \sin z$.

◁ Этот пример рассмотрен в пункте 6 данного раздела. ▷

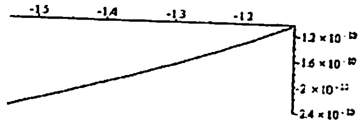
Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

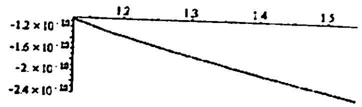
> $conformal\left(\sin(z), z = -\dfrac{\pi}{2}..\dfrac{\pi}{2}, -2 - 0.5 \cdot I..2 + 0.5 \cdot I, grid = [20, 20]\right)$



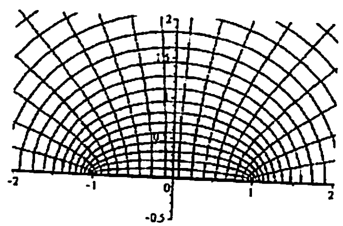
> $conformal\left(\sin(z), z = -\dfrac{\pi}{2} + 1 \cdot I..-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot I, grid = [20, 20]\right)$



> $conformal\left(\sin(z), z = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot I .. \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot I, grid = [20, 20]\right)$



> $conformal\left(\sin(z), z = -\frac{\pi}{2} + 0.01 \cdot I .. \frac{\pi}{2} + 2 \cdot I, -2 - 0.5 \cdot I .. 2 + 2 \cdot I, grid = [20, 20]\right)$



Задача 12.21. Построить конформное отображение $w(z)$ области $D = \{\operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на область $G = \{\operatorname{Im} w > 0\}$.

◁ Такого типа задачи можно решать с помощью отображений из пункта 9 настоящего раздела. Используем отображение из параграфа V 5.1. Последовательность отображений $w_1 = iz$, $w_2 = \frac{w_1}{2}$, $w = \sin w_2$ (рис. 2.47) решает данную задачу.

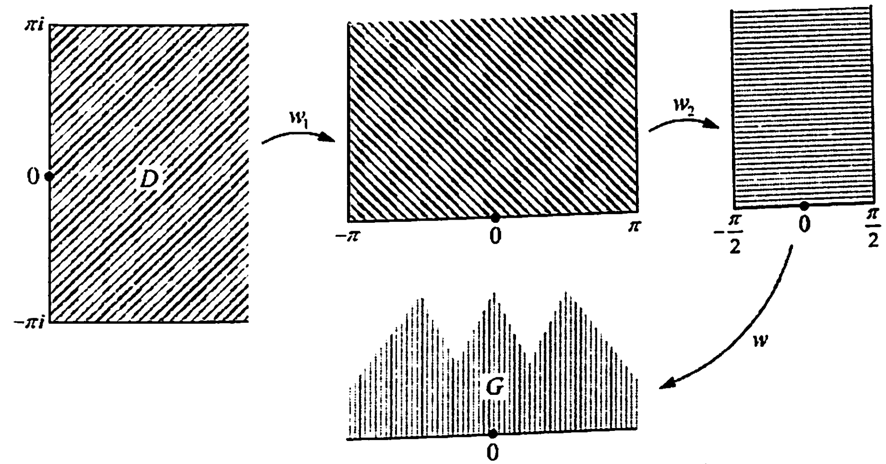


Рисунок 2.47. Последовательность отображений

Поэтому

$$w = \sin w_2 = \sin\frac{w_1}{2} = \sin\frac{iz}{2} = \frac{e^{i\frac{iz}{2}} - e^{-i\frac{iz}{2}}}{2i} = i\frac{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}{2} = i \operatorname{sh}\frac{z}{2}. \ ▷$$

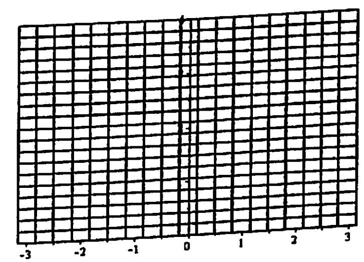
Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

> $with(plots):$

> $w1 := I \cdot z$

$$w1 := \mathrm{I} z$$

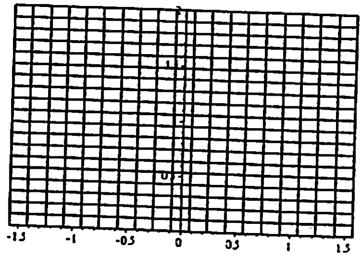
> $conformal(w1, z = 0 - \pi \cdot I .. 4 + \pi \cdot I, grid = [20, 20])$



> $w2 := \frac{w1}{2}$

$$w2 := \frac{1}{2}\mathrm{I} z$$

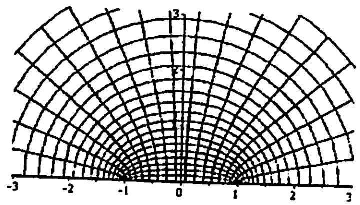
> $conformal(w2, z = 0 - \pi \cdot I .. 4 + \pi \cdot I, grid = [20, 20])$



> $w := \sin(w2)$

$$w := \mathrm{I}\sinh\left(\frac{1}{2}z\right)$$

> $conformal(w, z = 0 - \pi\cdot I..4 + \pi\cdot I, -3..3 + 3\cdot I, grid = [20, 20])$



Задача 13.21. Решить уравнение $z^5+4=3i$.

◁ $z^5+4=3i \;\Rightarrow\; z^5=-4+3i \;\Rightarrow\; z=\sqrt[5]{-4+3i}$. Поэтому из формулы (2.17) получаем

$$z=\sqrt[5]{|-4+3i|}\cdot\left[\cos\frac{\arg(-4+3i)+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\arg(-4+3i)+2k\pi}{5}\right]=$$

$$=\sqrt[5]{5}\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}+i\sin\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}\right],\ k=0,1,2,3,4.\ \triangleright$$

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

> $n := 5; z := -4 + 3\cdot I;$

$$n := 5$$

$$z := -4 + 3\,\mathrm{I}$$

> $evalc\left(z^{\frac{1}{n}}\right)$

$$5^{1/5}\sin\left(\frac{1}{5}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{10}\pi\right)+\mathrm{I}\,5^{1/5}\sin\left(-\frac{1}{5}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{5}\pi\right)$$

> $w := (r, \mathrm{phi}, k, n) \to r^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\text{'cos'}\frac{\mathrm{phi}+2\cdot\mathrm{Pi}\cdot k}{n}+I\cdot\text{'sin'}\frac{\mathrm{phi}+2\cdot\mathrm{Pi}\cdot k}{n}\right):$

> $r := \mathrm{abs}(z) : \mathrm{phi} := \mathrm{argument}(z) :$

> $w0 := w(r, \mathrm{phi}, 0, n); w1 := w(r, \mathrm{phi}, 1, n); w2 := w(r, \mathrm{phi}, 2, n); w3 := w(r, \mathrm{phi}, 3, n); w4 := w(r, \mathrm{phi}, 4, n);$

$$w0 := 5^{1/5}\left(\frac{1}{5}\cos\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\pi\right)+\frac{1}{5}\mathrm{I}\sin\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\pi\right)\right)$$

$$w1 := 5^{1/5}\left(\frac{1}{5}\cos\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+3\pi\right)+\frac{1}{5}\mathrm{I}\sin\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+3\pi\right)\right)$$

$$w2 := 5^{1/5}\left(\frac{1}{5}\cos\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+5\pi\right)+\frac{1}{5}\mathrm{I}\sin\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+5\pi\right)\right)$$

$$w3 := 5^{1/5}\left(\frac{1}{5}\cos\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+7\pi\right)+\frac{1}{5}\mathrm{I}\sin\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+7\pi\right)\right)$$

$$w4 := 5^{1/5}\left(\frac{1}{5}\cos\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+9\pi\right)+\frac{1}{5}\mathrm{I}\sin\left(-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+9\pi\right)\right)$$

> $with(plots):$

> $n := 5$

$$n := 5$$

> $z := -4 + 3\cdot I;$

$$z := -4 + 3\,\mathrm{I}$$

> $s := fsolve(u^n = z, u, complex):$

> $s1 := s[1]$

$$s1 := -1.36831867865765 + 0.177081710948499\,\mathrm{I}$$

> $s2 := s[2]$

$$s2 := -0.591248440540153 - 1.24662713762966\,\mathrm{I}$$

> $s3 := s[3]$

$$s3 := -0.254419010311623 + 1.35606965378182\,\mathrm{I}$$

> $s4 := s[4]$

$$s4 := 1.00290704660847 - 0.947539653301621\,\mathrm{I}$$

> $s5 := s[5]$

$$s5 := 1.21107908290096 + 0.661015426200965\,\mathrm{I}$$

> $pict[1] := arrow(\langle \mathrm{Re}(s1), \mathrm{Im}(s1)\rangle, shape = arrow, color = blue):$

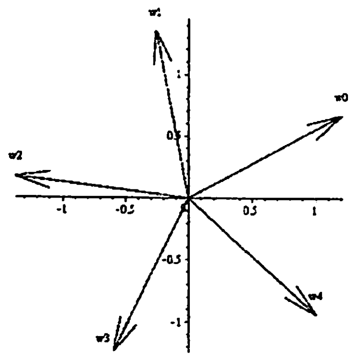
> $pict[2] := arrow(\langle \mathrm{Re}(s2), \mathrm{Im}(s2)\rangle, shape = arrow, color = blue):$

> $pict[3] := arrow(\langle \mathrm{Re}(s3), \mathrm{Im}(s3)\rangle, shape = arrow, color = blue):$

> $pict[4] := arrow(\langle \mathrm{Re}(s4), \mathrm{Im}(s4)\rangle, shape = arrow, color = blue):$

> $pict[5] := arrow(\langle \mathrm{Re}(s5), \mathrm{Im}(s5)\rangle, shape = arrow, color = blue):$

```
> p1 := textplot([Re(s[1]), Im(s[1]) + 0.1, "w2"], align = ABOVE) :
> p2 := textplot([Re(s[2]), Im(s[2]) + 0.1, "w3"], align = LEFT) :
> p3 := textplot([Re(s[3]), Im(s[3]) + 0.1, "w1"], align = ABOVE) :
> p4 := textplot([Re(s[4]), Im(s[4]) + 0.1, "w4"], align = ABOVE) :
> p5 := textplot([Re(s[5]), Im(s[5]) + 0.1, "w0"], align = ABOVE) :
> display(seq(pict[i], i = 1 ..n), p1, p2, p3, p4, p5);
```



Задача 14.21. Найти образ области $D=\{\operatorname{Im} z>0,(\operatorname{Im} z)^2>4\operatorname{Re} z+4\}$ при отображении функцией $w=\sqrt{z}$ при значении $\sqrt{-1}=i$.

◁ Область D изображена на рис. 2.48.

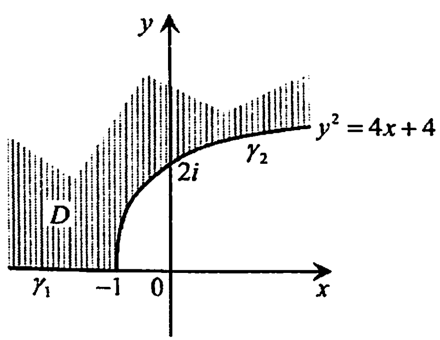


Рисунок 2.48. Область D

Если $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\psi}$, то

$$w=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right)\ (k=0,1)$$

и так как

$$\sqrt{-1}=\sqrt{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)=i$$

при $k=0$, поэтому $w=\sqrt{z}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ и следовательно,

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{r},\\ \psi=\dfrac{\varphi}{2}.\end{cases} \qquad (*)$$

Граница области D состоит из двух линий $\gamma_1=(-\infty,-1]=\{\varphi=\pi,1\le r<+\infty\}$ и $\gamma_2=\{(\operatorname{Im} z)^2=4\operatorname{Re} z+4,\operatorname{Im} z\ge 0\}$, т.е. $\partial D=\gamma_1\cup\gamma_2$.

Используя (*), получим $w(\gamma_1)=\left\{\psi=\frac{\pi}{2},1\le\rho<+\infty\right\}$. Найдём теперь $w(\gamma_2)$: $w=\sqrt{z}\ \Rightarrow\ w^2=z\ \Rightarrow\ (u+iv)^2=x+iy\ \Rightarrow$

$$\begin{cases}x=u^2-v^2,\\ y=2uv.\end{cases} \qquad (**)$$

Из равенств (**) получаем

$$y^2=4x+4\ \Rightarrow\ 4u^2v^2=4u^2-4v^2+4\ \Rightarrow\ u^2v^2-u^2+v^2-1=0\ \Rightarrow$$
$$(v^2-1)(u^2+1)=0\ \Rightarrow\ v=1,\ u\ge 0,$$

что дает $w(\gamma_2)=\{u\ge 0,v=1\}$. Следовательно,

$$\partial G=w(\gamma_1)\cup w(\gamma_2)=\left\{\arg w=\frac{\pi}{2},1\le|w|<+\infty\right\}\cup\{\operatorname{Im} w=1,\operatorname{Re} w\ge 0\}$$

Поэтому $G=\{\operatorname{Re} w>0,\operatorname{Im} w>1\}$ (рис. 2.49).

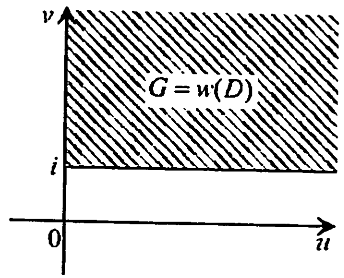


Рисунок 2.49. Образ области D ▷

Задача 15.21. Найти функцию $w(z)$, отображающую область $D=\{z \notin \{|z|\le 1, 0\le \arg z \le \pi\}, z\notin[-i,0]\}$ на верхнюю полуплоскость.

◁ Функция, осуществляющая нужное отображение, является композицией следующих отображений:

$$w_1 = \frac{1-z}{1+z},\ w_2 = w_1^{\frac{2}{3}},\ w_3 = \frac{w_2-1}{w_2+1},\ w_4 = w_3^2,\ w_5 = w_4 + \frac{1}{3},$$

$$w = \sqrt{w_5}\quad (\sqrt{-1} = i).$$

Эта композиция отображений отражена на рис. 2.50.

Поэтому, функция

$$w = \sqrt{w_5} = \sqrt{w_4 + \frac{1}{3}} = \sqrt{w_3^2 + \frac{1}{3}} = \sqrt{(\frac{w_2-1}{w_2+1})^2 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\left(\frac{w_1^{\frac{2}{3}}-1}{w_1^{\frac{2}{3}}+1}\right)^2 + \frac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(1-z)^{\frac{2}{3}} - (1+z)^{\frac{2}{3}}}{(1-z)^{\frac{2}{3}} + (1+z)^{\frac{2}{3}}}\right]^2 + \frac{1}{3}},\ (\sqrt{-1} = i)$$

решает поставленную задачу.

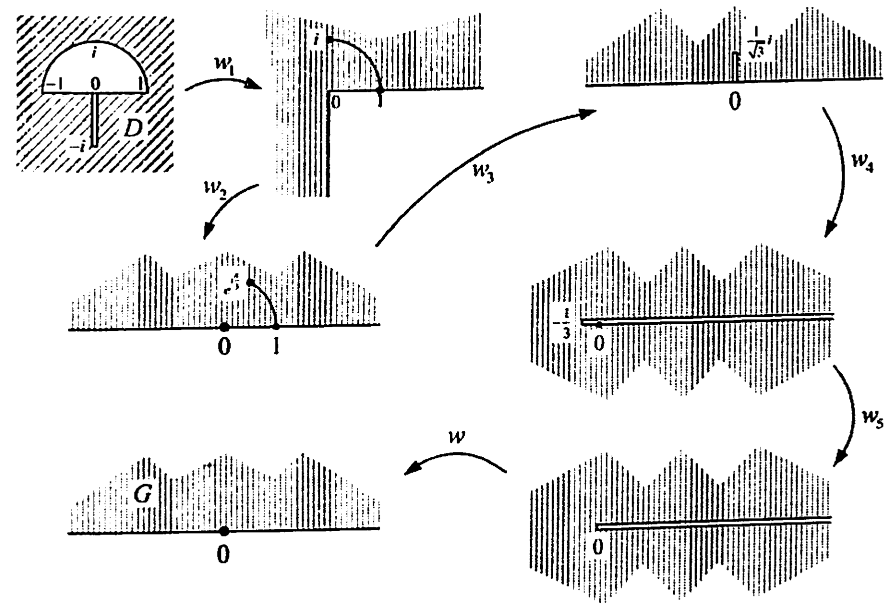


Рисунок 2.50. Последовательность отображений ▷

Задача 16.21. Построить конформное отображение $w(z)$ области $D=\{|z-2i|>2, |z+2i|>2, z\notin[-2,2]\}$ на верхнюю полуплоскость.

◁ Для решения задачи достаточно выполнить последовательность следующих отображений (рис. 2.51):

$$w_1 = \frac{1}{z},\ w_2 = 4\pi w_1,\ w_3 = e^{w_2},\ w_4 = \frac{e^{2\pi} - w_3}{e^{-2\pi} - w_3},\ w = \sqrt{w_4},\ \sqrt{-1} = i.$$

Следовательно,

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{\frac{e^{2\pi} - w_3}{e^{-2\pi} - w_3}} = \sqrt{\frac{e^{2\pi} - e^{\frac{4\pi}{z}}}{e^{-2\pi} - e^{\frac{4\pi}{z}}}},\ \sqrt{-1} = i.$$

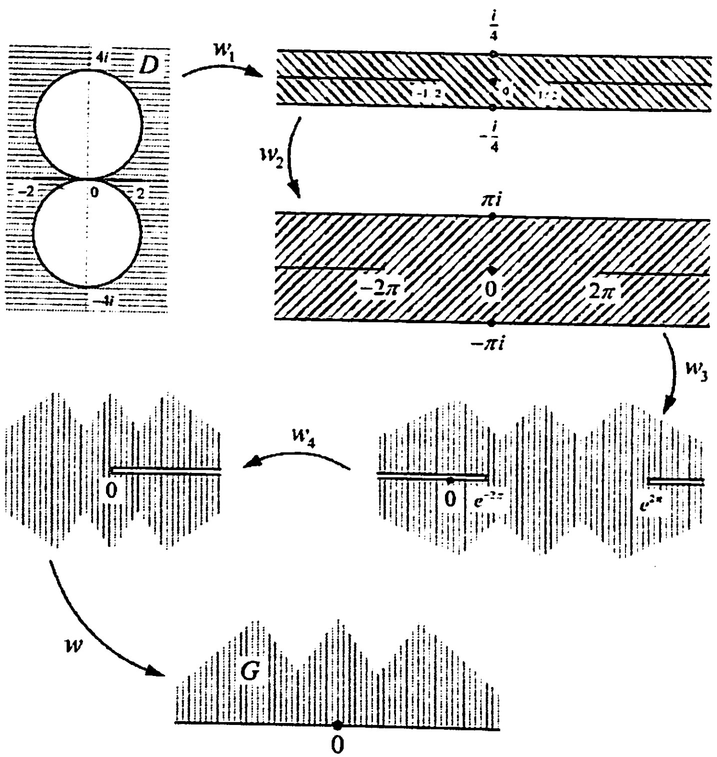


Рисунок 2.51. Последовательность отображений ⊳

Задача 17.21. Найти все значения многозначной функции Arcsin 2.

⊲ Используя формулы (2.24) и (2.20), получим

$$\operatorname{Arcsin} 2 = -i\operatorname{Ln} i(2+\sqrt{2^2-1}) = -i\operatorname{Ln}(2\pm\sqrt{3})i =$$

$$= -i\left[\ln(2\pm\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{(4k+1)\pi}{2} - i\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z}\ .\ ⊳$$

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

```
> Arcsin := (z) → arcsin(z) + 2·Pi·k: `Arcsin(z)` = Arcsin(z)
```

$$Arcsin(z) = \arcsin(z) + 2\pi k$$


```
> `Arcsin(z)` = convert(Arcsin(z), ln)
```

$$Arcsin(z) = -\mathrm{I}\ln\left(\sqrt{-z^2+1} + \mathrm{I}z\right) + 2\pi k$$

```
> `Arcsin(z)` = evalc(Arcsin(2))
```

$$Arcsin(z) = \frac{1}{2}\pi + 2\pi k - \mathrm{I}\ln(2+\sqrt{3})$$

```
> `Arcsin(z)` = evalf(evalc(Arcsin(2)))
```

$$Arcsin(z) = 1.570796327 - 1.316957897\,\mathrm{I} + 6.283185308\,k$$

Задача 18.21. Найти образ области $D=\{z\notin(-\infty,0], z\notin[1,+\infty)\}$ при отображении $w=\operatorname{Ln} z$ и нормировке $w(i)=\dfrac{\pi i}{2}$.

⊲ Из равенства

$$w=(\operatorname{Ln} z)_k = \ln z + 2k\pi i\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

и условия $w(i)=\dfrac{\pi i}{2}$, определим необходимую ветвь функции $w=\operatorname{Ln} z$:

$$\frac{\pi i}{2} = \ln i + 2k\pi i = \ln|i| + i\arg i + 2k\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i,$$

откуда $k=0$. Следовательно, необходимой ветвью функции $w=\operatorname{Ln} z$ будет $w=(\operatorname{Ln} z)_0=\ln z$. Если положить $z=re^{i\varphi}$, $w=u+iv$, то

$$\begin{cases} u=\ln r, \\ v=\varphi. \end{cases} \qquad (*)$$

Если обозначить $l_1=(-\infty,0]$, $l_2=[1,+\infty)$, то $\partial D=l_1\cup l_2$. Используя (*), получим $w(l_2)=\{v=0, 0\le u<+\infty\}$, верхний край разреза l_1 перейдет прямую $\{v=\pi\}$, а нижний край — в прямую $\{v=-\pi\}$. Следовательно, (рис. 2.52)

$$G=\{-\pi<\operatorname{Im} w<\pi, w\notin[0,+\infty)\}.$$

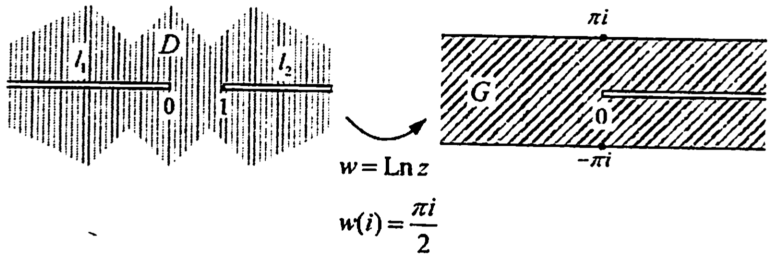


Рисунок 2.52. Отображение функцией $w = \operatorname{Ln} z$ ▷

Задача 19.21. Применяя принцип симметрии, найти образ единичного круга $\{|z|<1\}$ при отображении $w = \dfrac{z}{\sqrt[n]{(1+z^n)^2}}$.

◁ Обозначим $D=\{|z|<1\}$ и разделим круг D на n равных секторов $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ с центром в точке $z=0$ и углом $\dfrac{2\pi}{n}$. Ясно, что

$$D_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z|<1, -\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n} \right\}.$$

Преобразуем исходную функцию

$$w = \frac{z}{\sqrt[n]{(z^n+1)^2}} = \sqrt[n]{\frac{z^n}{z^{2n}+2z^n+1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{z^n+2+\dfrac{1}{z^n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)+1\right)}}.$$

Тогда данная функция будет композицией следующих функций $w_1 = z^n$, $w_2 = \dfrac{1}{2}\left(w_1 + \dfrac{1}{w_1}\right)$, $w_3 = w_2+1$, $w_4 = \dfrac{1}{2w_3}$ и $w = (\sqrt[n]{w_4})_0$.

Используя эти отображения, найдём образ области D_0 (рис. 2.53)

$$G_0 = w(D_0) = \left\{ w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{n} < \arg w < \frac{\pi}{n}, w \notin \left[\frac{1}{\sqrt[n]{4}}, +\infty\right) \right\}.$$

Применяя принцип симметрии n раз, получим, что функция $w = \dfrac{z}{\sqrt[n]{(z^n+1)^2}}$ отображает область $D=\{|z|<1\}$ на область

$$G = \mathbb{C} \setminus \left\{ \arg w = \frac{2\pi k}{n}, |w| \ge \frac{1}{\sqrt[n]{4}}, k = 0,1,2,\ldots,n-1 \right\},$$

т.е. на комплексную плоскость с разрезами по n лучам.

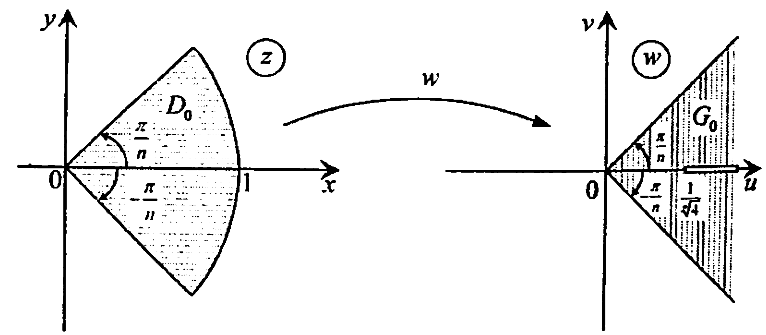


Рисунок 2.53. Отображение области D_0 ▷

Задача 20.21. Применяя принцип симметрии отобразить область

$$D = \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < 1, z \notin \left\{ \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}, 2 \le \operatorname{Im} z < \infty \right\} \right\}$$

на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

◁ Последовательность функций $w_1 = iz$, $w_2 = 2\pi w_1$, $w_3 = e^{w_2}$ отображает область $D_1 = \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{1}{2} \right\}$ на $G_1 = \{\operatorname{Im} w_3 > 0\}$, что отражено на рис. 2.54.

Применяя принцип симметрии для функции $w_3 = e^{2\pi i z}$, получим

$$w_3(D) = G = \{w_3 \notin [e^{-4\pi}, +\infty)\}.$$

Полученная область G с помощью функций $w_4 = w_3 + e^{-4\pi}$ и $w = \sqrt{w_4}$ $(\sqrt{-1} = i)$ отображается на верхнюю полуплоскость.

Итак,

$$w=\sqrt{w_4}=\sqrt{e^{2\pi iz}+e^{-4\pi}}\,,\ \sqrt{-1}=i\,.$$

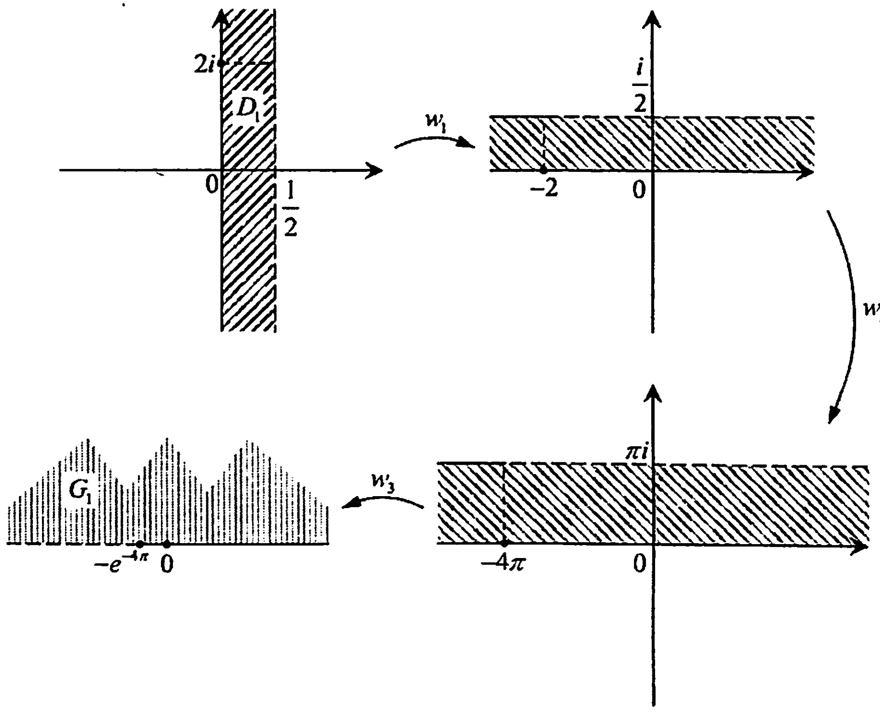


Рисунок 2.54. Отображение области D_1 ▹

§ 3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

- Определение интеграла от функции комплексного переменного.
- Интегральная теорема Коши.
- Интегральная формула Коши.
- Степенные ряды.
- Свойства голоморфных функций.
- Ряды Лорана.
- Особые точки функций.
- Вычеты и их вычисление.
- Вычисление интегралов с помощью вычетов.

– A –

Основные определения и теоремы

1. Понятие интеграла

Пусть $\gamma=\breve{AB}$ спрямляемая кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с заданной ориентацией. Точки $z_0,z_1,\dots,z_n$ разбивают дугу $\breve{AB}$ на n дуг $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ (рис. 3.1). Дуги γ_k $(k=1,2,\dots,n)$ имеют длины l_k, $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n} l_k$. И пусть на γ определена функция $f(z)$. Для произвольного $\xi_k\in\gamma_k$ определим сумму

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(z_k-z_{k-1}), \tag{3.1}$$

которая называется *интегральной суммой*.

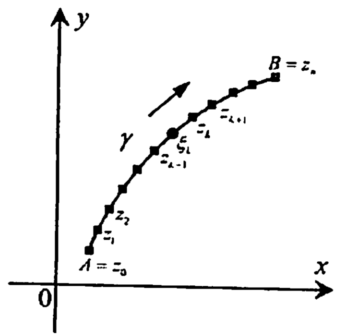


Рисунок 3.1. Разбиение кривой γ

Определение 3.1. *Если при* $\lambda \to 0$ *для функции* $f(z)$ *существует предел интегральной суммы (1), независящий от способа разбиения* γ *на части* γ_k *и от выбора средних точек* ξ_k, *то функция* $f(z)$ *называется интегрируемой по* γ *и этот предел называется интегралом от* $f(z)$ *по* γ, *который записывается следующим образом*

$$\int_\gamma f(z)dz. \tag{3.2}$$

Следовательно,

$$\int_\gamma f(z)dz := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(z_k - z_{k-1}). \tag{3.3}$$

Если положить $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + i(x,y) = u + iv$, то получим следующее равенство

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy). \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Функция* $f(z)$ *является интегрируемой по спрямляемой кривой* γ, *т.е.* $\int_\gamma f(z)dz$ *существует, тогда и только тогда, когда существуют интегралы* $\int_\gamma udx - vdy$ *и* $\int_\gamma vdx + udy$.

В частности, если функция $f(z)$ — непрерывна, то она — интегрируема.

Теорема 3.2. *Если* $f(z)$ *определена и непрерывна на спрямляемой кривой* γ, *которая имеет параметризацию*

$$z = z(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$$

и $z'(t) \ne 0$, *то*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt. \tag{3.5}$$

Эта формула позволяет вычислять интегралы от функций комплексного аргумента.

Пример. Вычислить интеграл

$$I_n = \int_\gamma (z-a)^n dz \ (n \text{ — целое число})$$

по кривой $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho, \rho > 0\}$ (окружность проходимая один раз против часовой стрелки).

◁ Запишем уравнение окружности γ следующим образом

$$z = z(t) = a + \rho \cdot e^{it} \ (0 \le t \le 2\pi).$$

Поэтому $dz = i\rho e^{it}dt$ и формула (3.5) дает

$$I_n = \int_\gamma (z-a)^n dz = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt.$$

Если $n \ne -1$, то

$$I_n = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt = i\rho^{n+1}\cdot \left.\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Если $n = -1$, то

$$I_{-1} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Следовательно,

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \ne -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \ ▷$$

2. Интегральная теорема Коши

Одним из фундаментальных результатов в теории функции комплексного переменного является интегральная теорема Коши.

Теорема 3.3 (Интегральная теорема Коши). *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в односвязной области* $D\subset\mathbb{C}$. *Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой* $\gamma\Subset D$ *интеграл*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz=0.$$

В примере первого пункта интеграл от функции $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$, взятый по окружности $\gamma:|z-a|=\rho$ равен $2\pi i$. В этом примере функция $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, но эта область не является односвязной. Поэтому $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz\neq 0$. Следовательно, условие односвязности области D является важным.

Теорема 3.4. *Пусть область* $D\subset\mathbb{C}$ *является односвязной и её граница является спрямляемой кривой, функция* $f(z)$ *голоморфна в области* D *и непрерывна в* $\overline{D}$, *т.е.* $f(z)\in\mathcal{O}(D)\cap C(\overline{D})$, *тогда*

$$\oint_{\partial D} f(z)dz=0.$$

Теорема 3.5 (Интегральная теорема Коши для многосвязной области). *Пусть граница* Γ *области* $D\subset\mathbb{C}$ *состоит из замкнутых спрямляемых кривых* $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ *(рис. 3.2). Если* $f(z)\in\mathcal{O}(D)\cap C(\overline{D})$, *то*

$$\int_{\partial D} f(z)dz=\int_{\Gamma\cup\gamma_1^-\cup\ldots\cup\gamma_n^-} f(z)dz=0.$$

Последнее равенство можно записать в следующем виде

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz. \qquad (3.6)$$

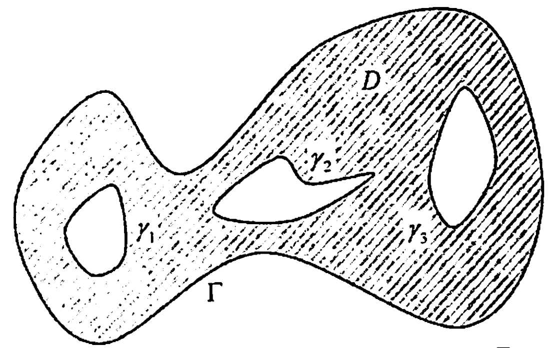


Рисунок 3.2. Многосвязная область D

Следствие. *Пусть* $D\subset\mathbb{C}$ *односвязная область, спрямляемые кривые* γ_1 *и* γ_2 *лежат в* D *и имеют общее начало* z_1 *и общий конец* z_2 *(рис. 3.3). Если* $f(z)\in\mathcal{O}(D)$, *то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_{\gamma_2} f(z)dz. \qquad (3.7)$$

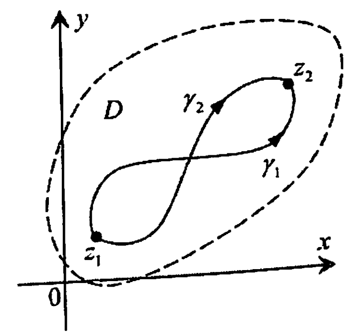


Рисунок 3.3. Кривые с общими началом z_1 и концом z_2

Равенство (3.7) означает, что интеграл не зависит от формы кривой соединяющей точки z_1 и z_2, а зависит только от этих точек, поэтому этот интеграл можно записать в виде

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz. \qquad (3.8)$$

2. Интегральная теорема Коши

Одним из фундаментальных результатов в теории функции комплексного переменного является интегральная теорема Коши.

Теорема 3.3 (Интегральная теорема Коши). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \Subset D$ интеграл*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

В примере первого пункта интеграл от функции $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$, взятый по окружности $\gamma: |z-a| = \rho$ равен $2\pi i$. В этом примере функция $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, но эта область не является односвязной. Поэтому $\oint_{\gamma} f(z)dz \neq 0$. Следовательно, условие односвязности области D является важным.

Теорема 3.4. *Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ является односвязной и её граница является спрямляемой кривой, функция $f(z)$ голоморфна в области D и непрерывна в $\bar{D}$, т.е. $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\bar{D})$, тогда*

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Теорема 3.5 (Интегральная теорема Коши для многосвязной области). *Пусть граница Γ области $D \subset \mathbb{C}$ состоит из замкнутых спрямляемых кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (рис. 3.2). Если $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\bar{D})$, то*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\Gamma \cup \gamma_1^- \cup \ldots \cup \gamma_n^-} f(z)dz = 0.$$

Последнее равенство можно записать в следующем виде

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz. \tag{3.6}$$

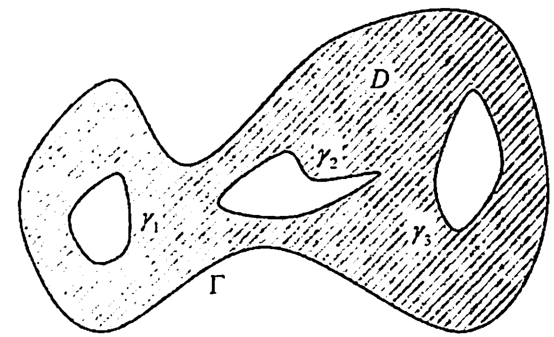


Рисунок 3.2. Многосвязная область D

Следствие. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ односвязная область, спрямляемые кривые γ_1 и γ_2 лежат в D и имеют общее начало z_1 и общий конец z_2 (рис. 3.3). Если $f(z) \in \mathcal{O}(D)$, то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz. \tag{3.7}$$

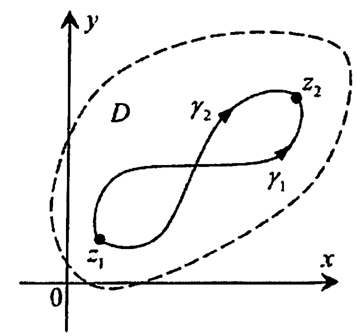


Рисунок 3.3. Кривые с общими началом z_1 и концом z_2

Равенство (3.7) означает, что интеграл не зависит от формы кривой соединяющей точки z_1 и z_2, а зависит только от этих точек, поэтому этот интеграл можно записать в виде

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz. \tag{3.8}$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_2^{2+i} z^2 dz.$$

◁ Данная функция голоморфна всюду, поэтому интеграл не зависит от формы пути и, следовательно, можно взять отрезок прямой (рис. 3.4) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2, 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$. $z = 2 + iy$, $dz = idy$, поэтому

$$\int_2^{2+i} z^2 dz = \int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (2+iy)^2 \cdot idy =$$

$$= i\int_0^1 (4+4iy-y^2)dy = i\left(4y+2iy^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -2+\frac{11}{3}i.$$

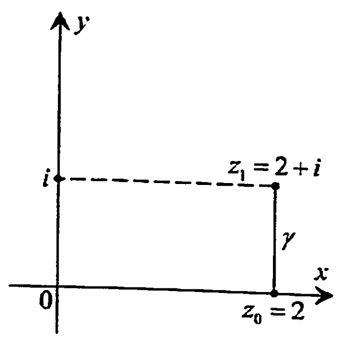


Рисунок 3.4. Путь интегрирования γ ▷

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} \quad (z \ne 0),$$

где путь интегрирования не проходит через начало координат.

◁ Ясно, что функция

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

голоморфна в области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В данном случае это не односвязная область, поэтому мы не можем воспользоваться интегральной теоремой Коши. Рассмотрим две кривые (рис. 3.5)

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le \operatorname{Re} z \le 2, \operatorname{Im} z = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \gamma_1,$$

соединяющие точки $z_0 = 1$ и $z_1 = 2$.

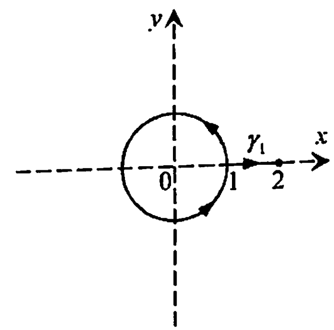


Рисунок 3.5. Пути интегрирования γ_1 и γ_2

На кривой γ_1 $z = x$, $dz = dx$, тогда

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2.$$

На окружности $|z| = 1$ $z = e^{i\varphi}$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, тогда

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi + \int_1^2 \frac{dx}{x} = 2\pi i + \ln 2,$$

то есть $\int_{\gamma_1} f(z)dz \ne \int_{\gamma_2} f(z)dz$. Следовательно, интеграл зависит от пути интегрирования. ▷

Если в интеграле (3.8) точка z_0 фиксирована, а z_1 заменим на произвольное z, то получим интеграл с переменным верхним пределом

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

Теорема 3.6. *Если функция $f(z)$ голоморфна в односвязной области $D\subset\mathbb{C}$, то функция $F(z)$ также является голоморфной функцией в области D и выполняется равенство*

$$F'(z)=f(z),\ z\in D.$$

Из теоремы видно, что в односвязной области голоморфная функция имеет первообразную.

Теорема 3.7 (формула Ньютона—Лейбница). *Если функция $F(z)$ является первообразной для функция $f(z)$ в области $D\subset\mathbb{C}$, то имеет место формула Ньютона—Лейбница*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}=F(z_1)-F(z_0), \tag{3.9}$$

где точки z_0, z_1 — произвольные точки из области D.

3. Интегральная формула Коши

Рассмотрим область $D\subset\mathbb{C}$ со спрямляемой границей. При обходе границы область должна оставаться с левой стороны.

Теорема 3.8. *Если $f(z)\in\mathcal{O}(D)\cap C(\bar{D})$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases} f(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin D.\end{cases} \tag{3.10}$$

Формула (3.10) называется интегральной формулой Коши. Она определяет значения голоморфной функции в области D через значения этой функции на границе области.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4},$$

где γ — произвольная замкнутая кривая на комплексной плоскости, не проходящая через точки $\pm 2i$.

◁ Множество, ограниченное кривой γ обозначим через D. Рассмотрим следующие случаи:

а) $\pm 2i\notin\bar{D}$, тогда

$$\varphi(z)=\frac{1}{z^2+4}\in\mathcal{O}(D),$$

поэтому, согласно интегральной формуле Коши,

$$\oint_\gamma \varphi(z)dz=\oint_\gamma\frac{dz}{z^2+4}=0.$$

б) $2i\in D$, $-2i\notin\bar{D}$. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}=\frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}$$

и применим формулу Коши для $f(z)=\dfrac{1}{z+2i}$, $a=2i$

$$\oint_\gamma\frac{dz}{z^2+4}=\oint_\gamma\frac{f(z)}{z-2i}dz=2\pi i\cdot f(2i)=\frac{2\pi i}{2i+2i}=\frac{\pi}{2}.$$

в) $-2i\in D$, $2i\notin\bar{D}$. Аналогично случаю б), получим:

$$\oint_\gamma\frac{dz}{z^2+4}=\oint_\gamma\frac{\frac{1}{z+2i}}{z+2i}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{z-2i}\Big|_{z=-2i}=-\frac{\pi}{2}.$$

г) $\pm 2i\in D$. Разложим подынтегральную функцию на простые дроби

$$\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}=\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{z+2i}\right).$$

Тогда

$$\oint_\gamma\frac{dz}{z^2+4}=\frac{1}{4i}\left[\oint_\gamma\frac{dz}{z-2i}-\oint_\gamma\frac{dz}{z+2i}\right]=\frac{1}{4i}\cdot 2\pi i(1-1)=0.\ \triangleright$$

Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ в формуле (3.10) называется *интегралом Коши*. В интеграле Коши контур ∂D является границей области, а функция $f(\zeta)$ — голоморфна в области D. Рассмотрим, теперь, произвольный спрямляемый контур Γ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна на Γ. Интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

называется *интегралом типа Коши.*

Теорема 3.9. *Интеграл типа Коши определяет функцию в области* $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ *и обладает следующими свойствами:*

а) $F(z)$ *голоморфная функция на* $\mathbb{C}\setminus\Gamma$*;*

б) $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$*;*

в) $F(z)$ *имеет производные любого порядка*

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

Следствие. *Голоморфная функция имеет производные любого порядка.*

Действительно, голоморфную функцию можно выразить с помощью интеграла Коши. Из того что интеграл типа Коши имеет производные любого порядка следует, что данная функция имеет производные произвольного порядка

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \qquad (3.11)$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\oint_{\gamma}\frac{e^{2z}}{(z+3)^4}dz,$$

где γ произвольный замкнутый контур комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащий внутри себя точку $z=-3$.

$\lhd$ Множество, ограниченное кривой γ обозначим через D. Очевидно, для функции $f(z)=e^{2z}$ и области D выполняются условия теоремы 3.9. Тогда, используя формулу (3.11), получим

$$\oint_{\gamma}\frac{e^{2z}}{(z+3)^4}dz=\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z+3)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\cdot f'''(-3)=\frac{2\pi i}{6}\cdot 2^3\cdot e^{-6}=\frac{8\pi i}{3e^6}. \rhd$$

4. Степенные ряды

Степенным рядом называется выражение вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots, \qquad (3.12)$$

где z, a и c_n $(n=0,1,2,\ldots)$ — комплексные числа.

Если в ряде (3.12) положить $\zeta=z-a$, то получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$.

В дальнейшем нам достаточно изучать этот ряд.

Теорема 3.10 (теорема Абеля). *Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots, \qquad (3.13)$$

сходится при $z=z_0\neq 0$, *то он сходится абсолютно в круге* $\{z\in\mathbb{C}:|z|<|z_0|\}$. *Если ряд (3.13) расходится при* $z=z_1$, *то ряд расходится на множестве* $\{z\in\mathbb{C}:|z|>|z_1|\}$.

Областью сходимости степенного ряда является круг

$$U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\},$$

радиус которого можно найти по *формуле Коши—Адамара*

$$\frac{1}{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}. \qquad (3.14)$$

Степенной ряд (3.13) сходится равномерно в любом замкнутом круге $\{z\in\mathbb{C}:|z|<\rho\}$, $\rho<r$.

Сумма степенного ряда является голоморфной функцией внутри круга сходимости.

Одной из основных задач в теории рядов является разложение функции в степенной ряд. Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.11. *Если функция* $f(z)$ *голоморфна в области* $D\subset\mathbb{C}$, *то в любом круге*

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \quad (a \in D),$$

лежащим в D, она разлагается в сходящийся степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.15}$$

где коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \ 0 < \rho < r, \quad n = 0,1,2\ldots. \tag{3.16}$$

Ряд (3.15), коэффициенты которого определяются по формулам (3.16), называется *рядом Тейлора*.

Приведём ряды Тейлора для основных элементарных функций с указанием области сходимости U:

1) $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $U = \{|z| < 1\}$;

2) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $U = \mathbb{C}$;

3) $\sin z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $U = \mathbb{C}$;

4) $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $U = \mathbb{C}$;

5) $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $U = \mathbb{C}$;

6) $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $U = \mathbb{C}$;

7) $(1+z)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} z^n$, $U = \{|z| < 1\}$;

8) $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n}$, $U = \{|z| < 1\}$.

Теорема 3.12 (неравенства Коши). *Если в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ функция $f(z) \in \mathcal{O}(U)$, $M = \max\limits_{z \in \partial U} |f(z)|$ и ряд Тейлора $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ сходится в U, то коэффициенты ряда Тейлора удовлетворяют неравенствам (неравенствам Коши)*

$$|c_n| \le \frac{M}{r^n}, \ n = 0,1,2\ldots. \tag{3.17}$$

5. Свойства голоморфных функций

Теорема 3.13. *Если функция $f(z)$ голоморфна в области D, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует производная $f^{(n)}(z)$ и она голоморфная в области D.*

Теорема 3.14 (Лиувилль). *Если функция голоморфна и ограничена во-всей комплексной плоскости, то она постоянна.*

Пусть функция голоморфна в окрестности некоторой точки $a \in \mathbb{C}$, если $f(a) = 0$, то число a называется *нулём функции* $f(z)$. Если же $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, а $f^{(n)}(a) \ne 0$, то a называется нулём кратности (порядка) n. При $n = 1$ нуль называется простым.

Если функция $f(z)$ голоморфна в точке $z = \infty$ и $f(\infty) = 0$, то $z = \infty$ называется нулём функции $f(z)$. Порядок нуля в точке $z = \infty$ определяется порядком нуля для функции

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

в точке $z = 0$.

Теорема 3.15. *Если функция $f(z)$ $(f(z) \not\equiv 0)$ голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $z = a$ является нулём порядка n, то*

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ голоморфна в окрестности точки a и $\varphi(a) \ne 0$.

Теорема 3.16 (теорема единственности). *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в области $D \subset \mathbb{C}$ и $f(z) = g(z)$ на множестве $E \subset D$, имеющем хотя бы одну предельную точку в данной области. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ в области D.*

Теорема 3.17 (принцип максимума модуля). *Если функция* $f(z)$ *голоморфна в области* $D\subset\mathbb{C}$ *и максимум её модуля* $|f(z)|$ *достигается в некоторой внутренней точке* $z_0\in D$, *то* $f(z)\equiv\text{const}$.

6. Ряд Лорана

Бесконечный ряд вида:

$$\ldots+c_{-n}\cdot\frac{1}{(z-a)^n}+\ldots+c_{-1}\cdot\frac{1}{z-a}+$$

$$+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots$$

называется *рядом Лорана* и обозначается

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n.$$

Он распадается на два ряда: регулярная (правильная) часть ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n. \tag{3.18}$$

и главная часть ряда Лорана

$$\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n. \tag{3.19}$$

Ряд (3.18) сходится в области $\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<R\}$, где

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{3.20}$$

Ряд (3.19) сходится в области $\{z\in\mathbb{C}:|z-a|>r\}$, где

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}. \tag{3.21}$$

Поэтому ряд Лорана сходится в кольце

$$\{z\in\mathbb{C}:r<|z-a|<R\}.$$

Теорема 3.18. *Если функция* $f(z)$ *голоморфна в кольце* $U=\{r<|z-a|<R\}$, *то она разлагается в ряд Лорана*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n, \tag{3.22}$$

сходящийся в этом кольце, и его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots,\ r<\rho<R. \tag{3.23}$$

Ряд Лорана можно почленно дифференцировать и интегрировать в кольце сходимости.

7. Особые точки функций

Рассмотрим функцию $f(z)$. Если для этой функции в точке $a\in\overline{\mathbb{C}}$ не выполняется условие голоморфности, то точка a называется *особой точкой* функции $f(z)$.

Определение 3.2. *Если функция* $f(z)$ *голоморфна в некоторой проколотой окрестности*

$$\mathring{U}(a)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-a|<\varepsilon\}$$

точки a, *то* $z=a$ *называется изолированной особой точкой однозначного характера.*

Пусть точка a является изолированной особой точкой функции $f(z)$.

1) Если

$$\lim_{z\to a}f(z)=A,\ (A\ \text{— конечная точка})$$

то точка a называется *устранимой особой точкой.*

2) Если

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty,$$

то точка a называется *полюсом.*

3) Если при $z\to a$ предел функции $f(z)$ не существует, то точка a называется *существенно особой точкой.*

Замечание. В случае устранимой особой точки, если доопределить функцию в точке $z=a$ как $f(a)=\lim_{z\to a} f(z)$, то можно сделать $f(z)$ голоморфной в $\{|z-a|<\varepsilon\}$ {|z-a|<ε}.

Если $z=a$ является полюсом функции $f(z)$, то порядком этого полюса называется кратность нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$ в той же точке.

Тип особой точки связан с видом ряда Лорана в окрестности этой точки.

Теорема 3.19. *Изолированная особая точка $z=a$ функции $f(z)$ является устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Теорема 3.20. *Изолированная особая точка $z=a$ функции $f(z)$ является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид*

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n \ (m>0).$$

Теорема 3.21. *Изолированная особая точка $z=a$ функции $f(z)$ является существенно особой точкой тогда и только тогда, когда ряд Лорана в окрестности этой точки содержит бесконечно много ненулевых слагаемых с отрицательными степенями.*

8. Вычеты и их вычисление

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $\{0<|z-a|<\delta\}$ и точка a является изолированной особой точкой $f(z)$.

Определение 3.3. *Вычетом функции $f(z)$ относительно точки a называется интеграл*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz \ (0<\rho<\delta).$$

Причем этот интеграл не зависит от ρ.

Очевидно, если функция $f(z)$ голоморфна в точке a, то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=0$.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $\{r<|z|<\infty\}$.

Определение 3.4. *Вычетом функции относительно точки ∞ называется интеграл*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz \ (\rho>r).$$

Причем этот интеграл не зависит от ρ.

Теорема 3.22. *Если функция $f(z)$ разлагается в $\{0<|z-a|<r\}$ в ряд Лорана*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n ,$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=c_{-1}. \tag{3.24}$$

Если ряд Лорана в $\{r<|z|<\infty\}$ имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n ,$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}. \tag{3.25}$$

Теорема 3.23 (теорема о сумме вычетов). *Если функция $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, то*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{3.26}$$

Приведём некоторые правила вычисления вычетов.

1) Если $z=a$ является полюсом первого порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z). \tag{3.27}$$

Замечание. В случае устранимой особой точки, если доопределить функцию в точке $z=a$ как $f(a)=\lim_{z\to a} f(z)$, то можно сделать $f(z)$ голоморфной в $\{|z-a|<\varepsilon\}$ {|z-a|<ε}.

Если $z=a$ является полюсом функции $f(z)$, то порядком этого полюса называется кратность нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$ в той же точке.

Тип особой точки связан с видом ряда Лорана в окрестности этой точки.

Теорема 3.19. *Изолированная особая точка $z=a$ функции $f(z)$ является устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Теорема 3.20. *Изолированная особая точка $z=a$ функции $f(z)$ является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид*

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (m>0).$$

Теорема 3.21. *Изолированная особая точка $z=a$ функции $f(z)$ является существенно особой точкой тогда и только тогда, когда ряд Лорана в окрестности этой точки содержит бесконечно много ненулевых слагаемых с отрицательными степенями.*

8. Вычеты и их вычисление

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $\{0<|z-a|<\delta\}$ и точка a является изолированной особой точкой $f(z)$.

Определение 3.3. *Вычетом функции $f(z)$ относительно точки a называется интеграл*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz \quad (0<\rho<\delta).$$

Причем этот интеграл не зависит от ρ.

Очевидно, если функция $f(z)$ голоморфна в точке a, то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=0$.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $\{r<|z|<\infty\}$.

Определение 3.4. *Вычетом функции относительно точки ∞ называется интеграл*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz \quad (\rho>r).$$

Причем этот интеграл не зависит от ρ.

Теорема 3.22. *Если функция $f(z)$ разлагается в $\{0<|z-a|<r\}$ в ряд Лорана*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n ,$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=c_{-1}. \tag{3.24}$$

Если ряд Лорана в $\{r<|z|<\infty\}$ имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n ,$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}. \tag{3.25}$$

Теорема 3.23 (теорема о сумме вычетов). *Если функция $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, то*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{3.26}$$

Приведём некоторые правила вычисления вычетов.

1) Если $z=a$ является полюсом первого порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z). \tag{3.27}$$

2) Если для функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ числитель и знаменатель голоморфны в точке a и $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{3.28}$$

3) Если $z=a$ является полюсом n-ого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}. \tag{3.29}$$

4) Если $z=\infty$ устранимая особая точка, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty} z[f(\infty)-f(z)]. \tag{3.30}$$

5) Если $f(z)=\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)$ и $\varphi(z)$ голоморфная функция в $z=0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-\varphi'(0). \tag{3.31}$$

9. Вычисление интегралов с помощью вычетов

С помощью вычетов можно вычислять различные интегралы. Для этого важную роль играет следующая теорема.

Теорема 3.24 (Коши). *Пусть*

1) *функция* $f(z)$ *голоморфна в области* $D\setminus\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$, ($D\subset\mathbb{C}$, $z_1,z_2,\dots,z_n\in D$);

2) *функция* $f(z)$ *определена на границе области* D *и непрерывна в* $\bar{D}\setminus\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$;

3) ∂D *— простая замкнутая спрямляемая кривая.*

Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{3.32}$$

Замечание. Формула (3.32) имеет место и в случае когда $\infty\in D$. В этом случае точка $z=\infty$ рассматривается как особая точка функции $f(z)$ и направление обхода ∂D меняется на противоположное.

Теорема Коши позволяет вычислять интеграл по замкнутому контуру без нахождения первообразной.

10. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Теория вычетов позволяет упростить вычисление целого ряда определенных интегралов (собственных и несобственных).

А) Вычислить интеграл

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx, \tag{3.33}$$

где $R(u,v)$ рациональная функция двух переменных.

Согласно формулам Эйлера

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Сделаем замену переменных

$$z=e^{ix},$$

тогда

$$x\in[0,2\pi]\ \Rightarrow\ z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\},$$

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin x=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ dx=\frac{1}{iz}dz.$$

Поэтому интеграл (3.33) примет вид

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx=\oint_{|z|=1}\tilde{R}(z)dz,$$

где

$$\tilde{R}(z)=\frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right).$$

Последний интеграл вычисляется с помощью формулы (3.32).

Б) Вычисление несобственных интегралов.

Теорема 3.25. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ *за исключением конечного числа полюсов* $\{z_k\}$ *и непрерывна в* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. *Если*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0, \tag{3.34}$$

где $\gamma_r = \{|z| = r, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$, *то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{3.35}$$

Лемма 3.26 (первая лемма Жордана). *Если*

$$\lim_{r\to\infty} r \max_{z\in\gamma_r} |f(z)| = 0, \tag{3.36}$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0. \tag{3.37}$$

Лемма 3.27 (вторая лемма Жордана). *Если*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{z\in\gamma_r} |f(z)| = 0. \tag{3.38}$$

то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0. \tag{3.39}$$

Если $\lim\limits_{r\to\infty} \max\limits_{z\in\gamma} |R(z)| = 0$, то теорема 3.25 и лемма 3.27 позволяют вычислять следующие интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos \lambda x\, dx = -2\pi \cdot \operatorname{Im}\left\{\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k}[e^{i\lambda z}R(z)]\right\}, \tag{3.40}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin \lambda x\, dx = 2\pi \cdot \operatorname{Re}\left\{\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k}[e^{i\lambda z}R(z)]\right\}. \tag{3.41}$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

◁ Положим

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} = \frac{e^{iz}}{[z-(1+i)]\cdot[z-(1-i)]}.$$

У этой функции есть две особые точки $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 1-i$, из них $z_1 = 1+i \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

Для функции $R(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 2}$ при $z \to \infty$ $R(z) \sim \dfrac{1}{z^2}$. Согласно лемме 3.27 и формуле (3.41), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi \cdot \operatorname{Re}[\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)].$$

Применим формулу (3.27) для вычисления вычета

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to 1+i} \left\{\frac{e^{iz}}{[z-(1+i)]\cdot[z-(1-i)]} \cdot [z-(1+i)]\right\} =$$

$$= \frac{e^{i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2}(\sin 1 - i\cos 1).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{e^{-1}}{2}(\sin 1 - i\cos 1)\right] = \frac{\pi \sin 1}{e}. \ \triangleright$$

Контрольные вопросы

1. Определение интеграла от функции комплексного аргумента.
2. Связь комплексного интеграла с криволинейными интегралами второго рода.
3. Интегральная теорема Коши.
4. Теорема Коши для многосвязной области.
5. Интеграл с переменным верхним пределом.
6. Формула Ньютона—Лейбница.
7. Интегральная формула Коши.
8. Интеграл Коши и интеграл типа Коши.
9. Степенной ряд и его сходимость.
10. Разложение элементарных функций в степенной ряд.
11. Теорема Лиувилля.

12. Нули голоморфных функций.
13. Теорема единственности.
14. Принцип максимума модуля.
15. Ряд Лорана и его сходимость.
16. Особые точки функций.
17. Особые точки и вид ряда Лорана.
18. Определение вычета.
19. Вычисление вычета через нахождение коэффициента ряда Лорана.
20. Теорема о сумме вычетов.
21. Формулы вычисления вычетов.
22. Вычисление интегралов по замкнутому контуру.
23. Вычисление интеграла $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$.
24. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
25. Леммы Жордана.
26. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$.
27. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$.

– Б –

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. Вычислить интеграл по определению, если a $(a \in \mathbb{C})$ начальная, а b $(b \in \mathbb{C})$ конечная точки непрерывной кривой γ.

1.1. $\int_\gamma (3z+1)dz$, $a = 1+i$, $b = 1-i$.

1.2. $\int_\gamma (z-i)dz$, $a = 1+i$, $b = 1+2i$.

1.3. $\int_\gamma (z+i)dz$, $a = 1+i$, $b = i$.

1.4. $\int_\gamma (3z-i)dz$, $a = 1+i$, $b = -1-i$.

1.5. $\int_\gamma (3z+i)dz$, $a = 2i$, $b = 1-i$.

1.6. $\int_\gamma (z+2i)dz$, $a = 2i$, $b = 1+i$.

1.7. $\int_\gamma (z-2i)dz$, $a = 2i$, $b = -1-i$.

1.8. $\int_\gamma (z-2)dz$б $a = 2$, $b = 1+i$.

1.9. $\int_\gamma (z+2)dz$, $a = 2$, $b = 1-i$.

1.10. $\int_\gamma (3z-1)dz$, $a = 2$, $b = -1+i$.

1.11. $\int_\gamma (3z-2)dz$, $a = 2$, $b = -1-i$.

1.12. $\int_\gamma (z+3)dz$, $a = 1+i$, $b = i$.

1.13. $\int_\gamma (z-3)dz$, $a = 1+i$, $b = -i$.

1.14. $\int_\gamma (z-3i)dz$, $a = 1-i$, $b = i$.

1.15. $\int_\gamma (z+3i)dz$, $a = 1-i$, $b = -i$.

1.16. $\int_\gamma (2z-3)dz$, $a = -1+i$, $b = i$.

1.17. $\int_\gamma (2z+3)dz$, $a = -1+i$, $b = -i$.

1.18. $\int_\gamma (2z-3i)dz$, $a = -1-i$, $b = i$.

1.19. $\int\limits_{\gamma}(2z+3i)dz$, $a=-1-i$, $b=-i$.

1.20. $\int\limits_{\gamma}(3z-i)dz$, $a=2+i$, $b=2-i$.

1.21. $\int\limits_{\gamma}(2z-1)dz$, $a=2+2i$, $b=i$.

Упражнение 2. Вычислить интеграл, если z_0 и z_1 — начало и конец прямолинейного пути γ.

2.1. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=2+3i$.

2.2. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz$, $z_0=2+2i$, $z_1=3+4i$.

2.3. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=2+3i$.

2.4. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz$, $z_0=2+2i$, $z_1=3+4i$.

2.5. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=2+3i$.

2.6. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz$, $z_0=2+2i$, $z_1=3+4i$.

2.7. $\int\limits_{\gamma}zdz$, $z_0=1+i$, $z_1=2+3i$.

2.8. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz$, $z_0=2+2i$, $z_1=3+4i$.

2.9. $\int\limits_{\gamma}\bar{z}dz$, $z_0=1+i$, $z_1=2+3i$.

2.10. $\int\limits_{\gamma}\bar{z}dz$, $z_0=2+2i$, $z_1=3+4i$.

2.11. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=3+2i$.

2.12. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz$, $z_0=2+2i$, $z_1=4+3i$.

2.13. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=3+2i$.

2.14. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz$, $z_0=2+2i$, $z_1=4+3i$.

2.15. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=3+2i$.

2.16. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz$, $z_0=1+2i$, $z_1=3+4i$.

2.17. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=3+2i$.

2.18. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy)dz$, $z_0=1+2i$, $z_1=3+4i$.

2.19. $\int\limits_{\gamma}zdz$, $z_0=1+i$, $z_1=3+2i$.

2.20. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy)dz$, $z_0=1+2i$, $z_1=3+4i$.

2.21. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz$, $z_0=1+i$, $z_1=2+3i$.

Упражнение 3. Вычислить интеграл по пути γ (рис. 3.6).

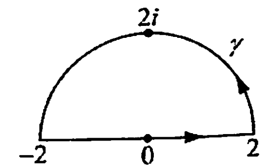


Рисунок 3.6. Путь интегрирования γ

3.1. $\oint\limits_{\gamma}\frac{\bar{z}}{z}dz$.

3.2. $\oint\limits_{\gamma}\frac{2z-\bar{z}}{\bar{z}}dz$.

3.3. $\oint\limits_{\gamma}\frac{2\bar{z}+z}{z}dz$.

3.4. $\oint\limits_{\gamma}\frac{3z-\bar{z}}{\bar{z}}dz$.

3.5. $\oint\limits_{\gamma}\frac{3\bar{z}+z}{z}dz$.

3.6. $\oint\limits_{\gamma}\frac{3\bar{z}-2z}{z}dz$.

3.7. $\oint_\gamma \frac{2z-3\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

3.8. $\oint_\gamma \frac{3\overline{z}-z}{z}dz$.

3.9. $\oint_\gamma \frac{2\overline{z}+3z}{z}dz$.

3.10. $\oint_\gamma \frac{5z-6\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

3.11. $\oint_\gamma \frac{6\overline{z}-5z}{z}dz$.

3.12. $\oint_\gamma \frac{4z-5\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

3.13. $\oint_\gamma \frac{4\overline{z}+5z}{z}dz$.

3.14. $\oint_\gamma \frac{5z-4\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

3.15. $\oint_\gamma \frac{5\overline{z}+4}{z}dz$.

3.16. $\oint_\gamma \frac{7z-8\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

3.17. $\oint_\gamma \frac{7\overline{z}+8z}{z}dz$.

3.18. $\oint_\gamma \frac{8z-5\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

3.19. $\oint_\gamma \frac{6\overline{z}-7z}{z}dz$.

3.20. $\oint_\gamma \frac{6z+7\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

3.21. $\oint_\gamma \frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz$.

Упражнение 4. Вычислить интеграл по эллипсу γ: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0<t\le 2\pi$.

4.1. $\int_\gamma y dz$, $a=2$, $b=3$.

4.2. $\int_\gamma z dz$, $a=2$, $b=3$.

4.3. $\int_\gamma \overline{z} dz$, $a=2$, $b=3$.

4.4. $\int_\gamma (2x-iy)dz$, $a=2$, $b=3$.

4.5. $\int_\gamma (x-iy)dz$, $a=2$, $b=3$.

4.6. $\int_\gamma x^2 dz$, $a=3$, $b=2$.

4.7. $\int_\gamma y^2 dz$, $a=3$, $b=2$.

4.8. $\int_\gamma (x^2-iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.9. $\int_\gamma (x-iy^2)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.10. $\int_\gamma (x+2iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.11. $\int_\gamma (2x+iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.12. $\int_\gamma (x-2iy)dz$, $a=2$, $b=3$.

4.13. $\int_\gamma (3x-iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.14. $\int_\gamma (x-3iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.15. $\int_\gamma (3x+iy)dz$, $a=2$, $b=3$.

4.16. $\int_\gamma (x+3iy)dz$, $a=2$, $b=3$.

4.17. $\int_\gamma (3x-2iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.18. $\int_\gamma (2x-3iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

4.19. $\int_\gamma (3x+2iy)dz$, $a=2$, $b=3$.

4.20. $\int_\gamma (2x+3iy)dz$, $a=2$, $b=3$.

4.21. $\int_\gamma (4x+3iy)dz$, $a=3$, $b=2$.

Упражнение 5. Вычислить интеграл.

5.1. $\int_{-3}^{-3+i} z dz$.

5.2. $\int_{i}^{2+i} z^2 dz$.

5.3. $\int_{1}^{1+i} z dz$.

5.4. $\int_{3i}^{1+3i} z dz$.

5.5. $\int_{3}^{3+i} z dz$.

5.6. $\int_{-2i}^{1-2i} z dz$.

5.7. $\int_{-2}^{1-2i} z^2 dz$.

5.8. $\int_{2}^{2+i} z dz$.

5.9. $\int_{2}^{2+i} z^2 dz$.

5.10. $\int_{1+2i}^{2+i} z dz$.

5.11. $\int_{1+i}^{2+i} z^2 dz$.

5.12. $\int_{-2}^{-2+3i} z dz$.

5.13. $\int_{-1+2i}^{2+2i} z dz$.

5.14. $\int_{-1+2i}^{2+2i} z^2 dz$.

5.15. $\int_{-2+i}^{1+i} z dz$.

5.16. $\int_{-2+i}^{1+i} z dz$.

5.17. $\int_{3-2i}^{3+i} z dz$.

5.18. $\int_{3-2i}^{3+i} z^2 dz$.

5.19. $\int\limits_{-3-i}^{4-i} z\,dz$.

5.20. $\int\limits_{-3-i}^{4-i} z^2 dz$.

5.21. $\int\limits_{-2+i}^{1+i} z^2 dz$.

Упражнение 6. Вычислить интеграл, применяя интегральную формулу Коши.

6.1. $\int\limits_{|z-1|=3} \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)(z+i)}$.

6.2. $\int\limits_{|z+1|=3} \frac{e^z dz}{(z-3)(z+3)(z+i)}$.

6.3. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{(z^2+1)(z-2i)} dz$.

6.4. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)(z+2i)} dz$.

6.5. $\int\limits_{|z|=2,5} \frac{\sin z}{(z-3i)(z^2-5z+6)} dz$.

6.6. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z+i)(z+2)(z+2i)} dz$.

6.7. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)(z+1)(z+3)} dz$

6.8. $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2)(z+i)(z+4i)} dz$.

6.9. $\int\limits_{|z|=2,5} \frac{e^z dz}{(z-3i)(z^2+3z+1)}$.

6.10. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{e^z}{z(z-2i)(z+2i)} dz$.

6.11. $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{\sin z}{(z+i)(z-2i)(z+3)} dz$.

6.12. $\int\limits_{|z-i|=2,5} \frac{\cos z}{z(z+i)(z+2i)} dz$.

6.13. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2i)(z+2i)} dz$.

6.14. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)} dz$.

6.15. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{\sin z}{(z-1)(z-2i)(z+3i)} dz$.

6.16. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{\cos z}{(z+1)(z-i)(z-2)} dz$.

6.17. $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-4i)(z-2i)(z-i)} dz$.

6.18. $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z^2+4)(z-5i)} dz$.

6.19. $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z^2-4)(z+4)} dz$.

6.20. $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z-2)(z+2i)(z+4i)} dz$.

6.21. $\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{(z+4)(z^2-6z)} dz$.

Упражнение 7. Вычислить интеграл, применяя интегральную формулу Коши.

7.1. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z+2)^2} dz$.

7.2. $\int\limits_{|z+1|=3} \frac{z-1}{(z-3)^2(z+i)^3} dz$.

7.3. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz$.

7.4. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z-2}{(z+i)^3(z+2)^2} dz$.

7.5. $\int\limits_{|z|=2,5} \frac{z-1}{(z-2)^3(z-3)} dz$.

7.6. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z+2}{z(z-1)^3(z-2)^2} dz$.

7.7. $\int\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{(z-i)^3(z+1)^2} dz$.

7.8. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z+1}{(z-2)^2(z+i)^3} dz$.

7.9. $\int\limits_{|z|=2,5} \frac{z-1}{(z+2)^2(z+1)^3} dz$.

7.10. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z+1}{z^3(z-2i)^2} dz$.

7.11. $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{z+1}{(z+i)^3(z-2i)^2} dz$.

7.12. $\int\limits_{|z-i|=4} \frac{z-1}{z^3(z+i)^2} dz$.

7.13. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-2i)^2} dz$.

7.14. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z+1)^3 z^2} dz$.

7.15. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z+1)^3(z-2i)^2} dz$.

7.16. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z+1)^3(z-i)} dz$.

7.17. $\int\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-2i)(z-i)^3} dz$.

7.18. $\int\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z+2)^3(z-2)^2} dz$.

7.19. $\int\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-2i)^3(z+i)^2} dz$.

7.20. $\int\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-2)^3(z+2i)^2} dz$.

7.21. $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^3(z-3)} dz$.

Упражнение 8. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a и указать область сходимости ряда.

8.1. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+i)}$, $a=-i$.

8.2. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a=2$.

8.3. $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$, $a=i$.

8.4. $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z+2)}$, $a=-2$.

8.5. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $a=2$.

8.6. $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z-i)}$, $a=i$.

8.7. $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z+1)}$, $a=-1$.

8.8. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z+i)}$, $a=2$.

8.9. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z+1)}$, $a=-1$.

8.10. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2i)}$, $a=0$.

8.11. $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2i)}$, $a=2i$.

8.12. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+i)}$, $a=0$.

8.13. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2i)}$, $a=1$.

8.14. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$, $a=0$.

8.15. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2i)}$, $a=-1$.

8.16. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-i)}$, $a=i$.

8.17. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z-i)}$, $a=i$.

8.18. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z+2i)}$, $a=2i$.

8.19. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$, $a=2$.

8.20. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2(1-i)z-4i}$, $a=-2i$.

8.21. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3iz-2}$, $a=2i$.

Упражнение 9. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в области V.

9.1. $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$, $V=\{0<|z|<\infty\}$.

9.2. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $V=\{0<|z|<1\}$.

9.3. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $V=\{2<|z|<\infty\}$.

9.4. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$, $V=\{0<|z|<2\}$.

9.5. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $V=\{2<|z|<3\}$.

9.6. $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$, $V=\{2<|z-1|<\infty\}$.

9.7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $V=\{1<|z|<3\}$.

9.8. $f(z)=\dfrac{1}{z+z^2}$, $V=\{0<|z|<1\}$.

9.9. $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$, $V=\{1<|z+2|<3\}$.

9.10. $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $V=\{0<|z-i|<2\}$.

9.11. $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $V=\{0<|z+i|<2\}$.

9.12. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $V=\{2<|z-1|<\infty\}$.

9.13. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$, $V=\{2<|z-1|<\infty\}$.

9.14. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.15. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.16. $f(z)=\dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.17. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4}$, $V=\{4<|z+2|<\infty\}$.

9.18. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$, $V=\{2<|z|<\infty\}$.

9.19. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.20. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.21. $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $V=\{0<|z-2|<1\}$.

Упражнение 10. Для функции $f(z)$ найти все особые точки, включая $z=\infty$, и определить их тип (для полюсов определить порядок).

10.1. $f(z)=\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$.

10.2. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2+1)^2}$.

10.3. $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin z-1}$.

10.4. $f(z)=\cos\dfrac{1}{1-z}$.

10.5. $f(z)=\dfrac{z^7}{(z^2-1)^2\cos\dfrac{1}{z-1}}$.

10.6. $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}$.

10.7. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$.

10.8. $f(z)=\dfrac{e^z}{z\cdot(1-e^{-z})}$.

10.9. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

10.10. $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$.

10.11. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}\cdot e^{\frac{1}{z+1}}$.

10.12. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$.

10.13. $f(z)=\dfrac{z^2+9}{e^z}$.

10.14. $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z-1)^3z\cdot(z+1)}$.

10.15. $f(z)=\dfrac{2}{(z^2-i)^3}$.

10.16. $f(z)=\dfrac{e^z}{4+z^2}$.

10.17. $f(z)=\operatorname{tg}2z$.

10.18. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z+i}$.

10.19. $f(z)=e^{\frac{2z}{2-z}}$.

10.20. $f(z)=e^{\frac{2}{z+3i}}$.

10.21. $f(z)=\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$.

Упражнение 11. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех конечных особых точках и в бесконечности (если это возможно).

11.1. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(z+4)}$.

11.2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{2z^2-\dfrac{\pi}{2}z}$.

11.3. $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$.

11.4. $f(z)=z^3\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$.

11.5. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

11.6. $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{2}{z}}$.

11.7. $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2-\dfrac{\pi z}{4}}$.

11.8. $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^2}$.

11.9. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

11.10. $f(z)=z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$.

11.11. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

11.12. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$.

11.13. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-e^{-z})}$.

11.14. $f(z)=z^3\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

11.15. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(z^2+4)}$.

11.16. $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{z^2\cdot(z^2+i)}$.

11.17. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2-z}$.

11.18. $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$.

11.19. $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z-2}$.

11.20. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2-\dfrac{\pi}{4}z}$.

11.21. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\cdot(z^2+9)}$.

Упражнение 12. Вычислить интеграл с помощью вычетов.

12.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^z dz}{z^3(z-1)}$.

12.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z+3}{(z^3+1)(z+5)}dz$.

12.3. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-3)}$.

12.4. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^2}dz$.

12.5. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{z^3 dz}{z^4-2}$.

12.6. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3+z^5}{z^4+1}dz$.

12.7. $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{z+1}{(z-1)^2(z+i)}dz$.

12.8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-1}{(z-3)(z+i)}dz$.

12.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5}\frac{z-2}{(z+1)^2(z+2)}dz$.

12.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2,5}\frac{z-1}{(z-2)^2(z-3)}dz$.

12.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-1}{(z-i)^2(z+i)}dz$.

12.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{z+1}{(z-2)(z+i)^2}dz$.

12.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5}\frac{z-1}{(z+2)(z+1)^2}dz$.

12.14. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-1}{z^5(z+i)^2}dz$.

12.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5}\frac{z+1}{z(z-2i)(z-i)^2}dz$.

12.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=5}\frac{1}{(z+2)^2(z-3)^2}dz$.

12.17. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5}\frac{2z+5}{(z-2i)^3(z+i)^2}dz$.

12.18. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1,5}\frac{1}{z^2(z-2)^3(z+2i)}dz$.

12.19. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1}\frac{1}{(z^2+1)(z^4-1)}dz$.

12.20. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}dz$.

12.21. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz$.

Упражнение 13. Вычислить интеграл.

13.1. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}(2z-1)\cos\frac{z}{z-1}dz$, $D=\{|z|<2\}$.

13.2. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{\cos z}{z^3}dz$, $D=\{|z|<1\}$.

13.3. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}z^2\sin\frac{1}{z}dz$, $D=\{|z|<1\}$.

13.4. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{1}{e^z+1}dz$, $D=\{|z-2i|<2\}$.

13.5. $\int\limits_{\partial D} z^3 \sin\frac{1}{z}dz$, $D=\{|z|<2\}$.

13.6. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3}dz$, $D=\left\{\frac{x^2}{4}+y^2<1\right\}$.

13.7. $\int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$, $D=\{|z-i|<1\}$.

13.8. $\int\limits_{\partial D} z\cdot\sin\frac{z+1}{z-1}dz$, $D=\{|z|<2\}$.

13.9. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$, $D=\{|z-1-i|<2\}$.

13.10. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$, $D=\{|z|<2\}$.

13.11. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z^3-z)(z-i)}dz$, $D=\{|z-1|<3\}$.

13.12. $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{1}{z}dz$, $D=\{|z|<4\}$.

13.13. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3}dz$, $D=\{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}\}$.

13.14. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+2}e^{\frac{1}{2z}}dz$, $D=\{|z|>4\}$.

13.15. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz$, $D=\left\{|z-2|<\frac{1}{2}\right\}$.

13.16. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}dz$, $D=\{|z|<3\}$.

13.17. $\int\limits_{\partial D} \sin^2\frac{1}{z}dz$, $D=\{|z|<2\}$.

13.18. $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{1}{z-1}dz$, $D=\{|z-1|>1\}$.

13.19. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{\sin z\cdot(1-\cos z)}dz$, $D=\{|z|<5\}$.

13.20. $\int\limits_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}dz$, $D=\{|z|>2\}$.

13.21. $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1}dz$, $D=\{|z|>3\}$.

Упражнение 14. Вычислить интеграл с помощью вычетов.

14.1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin^2 x)^2}$.

14.2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos^2 x)^2}$.

14.3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\sin^2 x)^2}$.

14.4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^{2x} dx}{\frac{5}{4}-\cos x}$.

14.5. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{2-\cos x}$.

14.6. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{2+\sin x}$.

14.7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$.

14.8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos^2 x)^2}$.

14.9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

14.10. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$.

14.11. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}dx$.

14.12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

14.13. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+4\sin x}$.

14.14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5+4\cos x}dx$.

14.15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$

14.16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+2\cos x}$.

14.17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x+3}$.

14.18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4}-\sin x}$.

14.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2}$.

14.20. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4+3\cos x}dx$.

14.21. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{2-\sin^2 x}$.

Упражнение 15. Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.

15.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

15.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

15.3. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 dx$.

15.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

15.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

15.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+6x^2+25}$.

15.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$.

15.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+8)^2}$.

15.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4ix-5)^2}$.

15.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2ix-2)^2}$.

15.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

15.12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(2+3x^2)^4}$.

15.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

15.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$.

15.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^6+1} dx$.

15.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

15.17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}$.

15.18. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

15.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

15.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+2x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

15.21. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Упражнение 16. Вычислить интеграл, используя леммы Жордана.

16.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$.

16.2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+x^2+1} dx$.

16.3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2+4} dx$.

16.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^3} dx$.

16.5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2} dx$.

16.6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+9)^2} dx$.

16.7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4} dx$.

16.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dx$.

16.9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx$.

16.10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+9} dx$.

16.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx$.

16.12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} dx$.

16.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5} dx$.

16.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+10} dx$.

16.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9} dx$.

16.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3+13x)\sin x}{x^4+13x^2+36} dx$.

16.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20} dx$.

16.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$.

16.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx$.

16.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx$.

16.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx$.

– В –

Решение образцовых вариантов

Приведём решение 21 вариантов упражнений.

Задача 1.21. Вычислить интеграл $\int_\gamma (2z-1)dz$ по определению, если $a=2+2i$ начальная, а $b=i$ конечная точки непрерывной кривой γ.

◁ Рассмотрим разбиение кривой γ от точки $a=2+2i$ до точки $b=i$ на n дуг $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ с помощью точек $z_0,z_1,z_2,\dots,z_n$. Для произвольной точки $\zeta_k\in\gamma_k$ составим следующую интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}).$$

Тогда, по определению,

$$\int_\gamma (2z-1)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}). \qquad (*)$$

Так как $f(z)=2z-1\in C(\gamma)$, то предел $(*)$ не зависит от способа деления γ и выбора точек ζ_k, поэтому выберем $\zeta_k=\dfrac{z_{k-1}+z_k}{2}$, тогда

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}(2\zeta_k-1)\cdot(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left[2\cdot\frac{z_k+z_{k-1}}{2}-1\right]\cdot(z_k-z_{k-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[(z_k+z_{k-1})\cdot(z_k-z_{k-1})-(z_k-z_{k-1})]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(z_k^2-z_{k-1}^2)-\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=z_n^2-z_0^2-(z_n-z_0)=$$

$$=b^2-a^2-(b-a)=i^2-(2+2i)^2-(i-2-2i)=-1-4\cdot 2i+i+2=1-7i.$$

Следовательно,

$$\int_\gamma (2z-1)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=1-7i. \ ▷$$

Задача 2.21. Вычислить интеграл $\int_\gamma (x^2+iy^2)dz$, если $z_0=1+i$ и $z_1=2+3i$ — начало и конец прямолинейного пути γ.

◁ Найдём сначала уравнение пути γ. Очевидно, что γ: $y=2x-1$ $(1\le x\le 2)$ (рис. 3.7). Если $z=x+iy$, то $dz=dx+idy$, а на γ $dy=2dx$, тогда

$$\int_\gamma (x^2+iy^2)dz=\int_\gamma (x^2+iy^2)(dx+idy)=\int_\gamma (x^2dx-y^2dy)+i\int_\gamma (x^2dy+y^2dx)=$$

$$=\int_1^2[x^2-(2x-1)^2\cdot 2]dx+i\int_1^2[x^2\cdot 2+(2x-1)^2]dx=$$

$$=\int_1^2(-7x^2+8x-2)dx+i\int_1^2(6x^2-4x+1)dx=-\frac{19}{3}+9i.$$

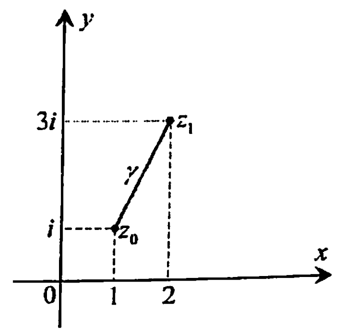
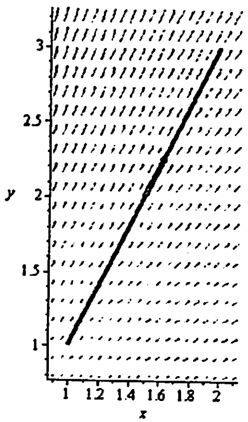


Рисунок 3.7. Путь интегрирования γ ▷

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

```
> with(Student[VectorCalculus]) :
> LineInt(VectorField(⟨x, y⟩), Line(⟨1, 1⟩, ⟨2, 3⟩), output=plot)
```



The path of integration, vector(s) tangent to the path, and vector-field arrows

> $LineInt(VectorField(\langle x^2,-y^2\rangle), Line(\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle), output = integral)$

$$\int_0^1 \left((1+t)^2-2\,(1+2\,t)^2\right)dt$$

> $K1 := LineInt(VectorField(\langle x^2,-y^2\rangle), Line(\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle))$

$$K1 := -\frac{19}{3}$$

> $LineInt(VectorField(\langle y^2, x^2\rangle), Line(\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle), output = integral)$

$$\int_0^1 \left((1+2\,t)^2+2\,(1+t)^2\right)dt$$

> $K2 := LineInt(VectorField(\langle y^2, x^2\rangle), Line(\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle))$

$$K2 := 9$$

> $K := K1 + I\cdot K2$

$$K := -\frac{19}{3}+9\,I$$

Задача 3.21. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma}\frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz$ по пути γ (рис. 3.6).

◁ Если

$\gamma_1=\{z=x+iy\in\mathbb{C}: y=0,-2\le x\le 2\}$, $\gamma_2=\{z\in\mathbb{C}:|z|=2,\operatorname{Im}z>0\}$,

то путь интегрирования $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, поэтому, согласно свойству интеграла,

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz.$$

Вычислим эти интегралы по отдельности:

$$\oint\limits_{\gamma_1}\frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz=\int_{-2}^{2}\frac{7x+6x}{x}dx=13\int_{-2}^{2}dx=13\cdot 4=52,$$

$$\int\limits_{\gamma_2}\frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz=\left(\begin{pmatrix} z=2e^{i\varphi}, & 0\le\varphi\le\pi, \\ \overline{z}=2e^{-i\varphi}, & dz=2ie^{i\varphi}d\varphi\end{pmatrix}\right)=$$

$$\int_0^{\pi}\frac{7\cdot 2e^{i\varphi}+6\cdot 2e^{-i\varphi}}{2e^{-i\varphi}}2ie^{i\varphi}d\varphi=2i\int_0^{\pi}(7e^{3i\varphi}+6e^{i\varphi})d\varphi=$$

$$=2\left(\frac{7}{3}e^{3i\varphi}+6e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{100}{3}.$$

Следовательно,

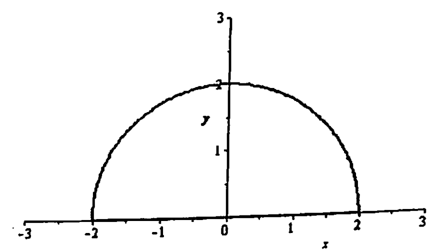
$$\oint\limits_{\gamma}\frac{7z+6\overline{z}}{\overline{z}}dz=52-\frac{100}{3}=\frac{56}{3}.\ \triangleright$$

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

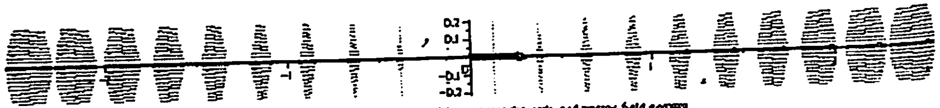
> $with(plots):$

> $with(Student[VectorCalculus]):$

> $plot([[2\cdot\cos(t), 2\cdot\sin(t), t=0..\pi], [t, 0, t=-2..2]], x=-3..3, y=0..3,$
$color=[blue], thickness=2, grid=[50, 50])$



> $LineInt(VectorField(\langle x, y\rangle), LineSegments(\langle -2, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle), output=plot)$

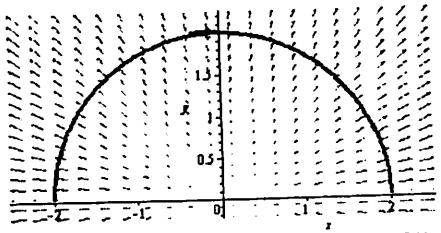


The path of integration, vector(s) tangent to the path, and vector-field arrows

$$> K1 := \int_{-2}^{2} \frac{7x + 6x}{x}\, dx$$

$$K1 := 52$$

$> LineInt(VectorField(\langle x, y\rangle), Path(\langle 2\cdot\cos(t), 2\cdot\sin(t)\rangle, t = 0..\pi), output = plot)$



The path of integration, vector(s) tangent to the path, and vector-field arrows

$$> K2 := \int_{0}^{\pi} \frac{7\cdot 2\cdot e^{I\cdot t} + 6\cdot 2\cdot e^{-I\cdot t}}{2\cdot e^{-I\cdot t}}\cdot 2\cdot I\cdot e^{I\cdot t} dt$$

$$K2 := -\frac{100}{3}$$

$> K := K1 + K2$

$$K := \frac{56}{3}$$

Задача 4.21. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}(4x+3iy)dz$ по эллипсу γ:

$x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 < t \le 2\pi$.

◁ Вычислим этот интеграл с помощью формулы (3.5):

$z = z(t) = x(t) + iy(t) = 3\cos t + 2i\sin t \Rightarrow z'(t) = -3\sin t + 2i\cos t$.

Поэтому

$$\int\limits_{\gamma}(4x+3iy)dz = \int\limits_{0}^{2\pi}(12\cos t + 6i\sin t)(-3\sin t + 2i\cos t)dt =$$

$$= 3\int\limits_{0}^{2\pi}[-16\sin t\cdot\cos t + i(8\cos^2 t - 6\sin^2 t)]dt =$$

$$= 3\int\limits_{0}^{2\pi}\left[-8\sin 2t + i\left(8\frac{1+\cos 2t}{2} - 6\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\right]dt =$$

$$= 3\int\limits_{0}^{2\pi}[-8\sin 2t + i(1 + 7\cos 2t)]dt =$$

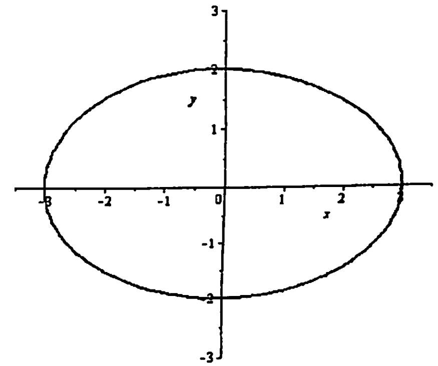
$$= 3\cdot\left[4\cos 2t + i\left(t + \frac{7}{2}\sin 2t\right)\right]\Bigg|_{0}^{2\pi} = 3\cdot 2\pi i = 6\pi i. \triangleright$$

Покажем решение этой задачи с помощью пакета Maple.

$> with(plots):$

$> with(Student[VectorCalculus]):$

$> plot([3\cdot\cos(t), 2\cdot\sin(t), t = 0..2\cdot\pi], x = -3.5..3.5, y = -3..3, color = [blue], thickness = 2, grid = [100, 100])$



$$> \int_{0}^{2\cdot\pi}(12\cdot\cos(t) + 6\cdot I\cdot\sin(t))\cdot(-3\cdot\sin(t) + 2\cdot I\cdot\cos(t))\, dt$$

$$6 I\pi$$

Задача 5.21. Вычислить интеграл $\int\limits_{-2+i}^{1+i} z^2 dz$.

⊲ В данном случае функция голоморфна, поэтому интеграл не зависит от формы пути и можно взять прямую, соединяющую точки $z_0 = -2+i$ и $z_1 = 1+i$ (рис. 3.8). Обозначим этот путь через γ

$$\gamma = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y = 1, -2 \le x \le 1\}.$$

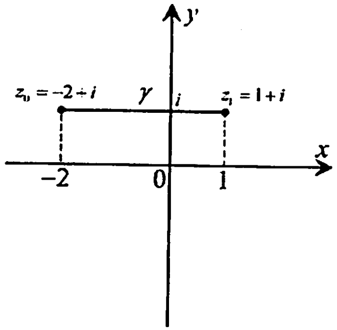


Рисунок 3.8. Путь интегрирования γ

На γ $z = x+i$, $dz = dx$, тогда

$$\int_{-2+i}^{1+i} z^2 dz = \int_\gamma z^2 dz = \int_{-2}^{1} (x+i)^2 dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^2+2ix-1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + ix^2 - x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -3i. \ ⊳$$

Задача 6.21. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{(z+4)(z^2-6z)}$, применяя интегральную формулу Коши.

⊲ Обозначим $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 5\}$, тогда путь интегрирования $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 5\}$ является границей круга D (рис. 3.9).

Если

$$F(z) = \frac{e^{z^2}}{(z+4)(z^2-6z)} = \frac{e^{z^2}}{z(z-6)(z+4)},$$

то точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 6$ принадлежат области D, а точка $z_3 = -4 \notin D$. Преобразуем функцию $F(z)$ следующим образом

$$F(z) = \frac{e^{z^2}}{6(z+4)}\left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z}\right) = \frac{f(z)}{z-6} - \frac{f(z)}{z},$$

где функция $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{6(z+4)} \in \mathcal{O}(D)$.

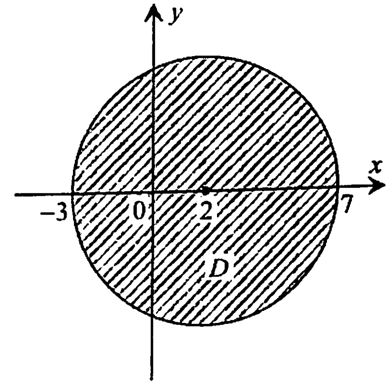


Рисунок 3.9. Круг D

Поэтому, применяя интегральную формулу Коши, получим

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{(z+4)(z^2-6z)} = \int_{|z-2|=5} F(z)dz = \int_{|z-2|=5} \frac{f(z)}{z-6}dz - \int_{|z-2|=5} \frac{f(z)}{z}dz =$$

$$= 2\pi i[f(6) - f(0)] = 2\pi i\left(\frac{e^{36}}{60} - \frac{1}{24}\right) = \frac{\pi i}{6}\left(\frac{e^{36}}{5} - \frac{1}{2}\right). \ ⊳$$

Задача 7.21. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^3(z-3)}dz$, применяя интегральную формулу Коши.

⊲ Точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$ лежат внутри круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, границей которой является окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$, а точка $z_2 = 3$

не принадлежит этому кругу. Окружим точки $z_0=0$ и $z_1=1$ замкнутыми кривыми γ_1 и γ_2, которые лежат в этом круге и не пересекаются. Обозначим через D трёхсвязную область, границей которой являются кривые γ_1, γ_2 и окружность $\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ (рис. 3.10).

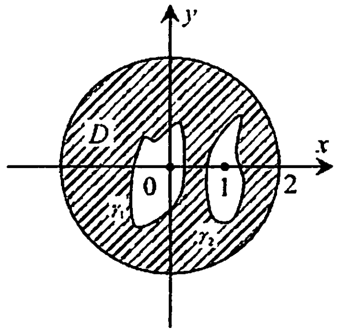


Рисунок 3.10. Область D

Подынтегральная функция голоморфна в области D. Поэтому по теореме Коши, интеграл по границе этой области равен нулю, следовательно,

$$\int\limits_{|z|=2} F(z)dz=\oint\limits_{\gamma_1}F(z)dz+\oint\limits_{\gamma_2}F(z)dz=I_1+I_2.$$

Если в интеграле

$$I_1=\oint\limits_{\gamma_1}F(z)dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{z+1}{z(z-1)^3(z-3)}dz$$

положить

$$f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)},$$

то по формуле (3.10) получим

$$I_1=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi i.$$

Если в интеграле

$$I_2=\oint\limits_{\gamma_2}F(z)dz=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{z+1}{z(z-1)^3(z-3)}dz$$

положить

$$\varphi(z)=\frac{z+1}{z(z-3)},$$

то по формуле (3.11) получим

$$I_2=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi(z)}{(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\varphi''(1),$$

$$\varphi(z)=\frac{z+1}{z(z-3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{z-3}-\frac{1}{z}\right)\Rightarrow\varphi'(z)=\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{(z-3)^2}+\frac{1}{z^2}\right)\Rightarrow$$

$$\varphi''(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{(z-3)^3}-\frac{2}{z^3}\right)\Rightarrow\varphi''(1)=\frac{1}{3}(-1-2)=-1\Rightarrow I_2=-\pi i.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{z\cdot(z-1)^3(z-3)}dz=I_1+I_2=\frac{2}{3}\pi i-\pi i=-\frac{\pi i}{3}.\ \triangleright$$

Задача 8.21. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3iz-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $a=2i$ и указать область сходимости ряда.

$\triangleleft$ Раскладывая функцию на простые дроби и применяя формулу суммы геометрической прогрессии, получим ряд Лорана

$$f(z)=\frac{1}{(z-2i)(z-i)}=\frac{-i}{z-2i}+\frac{i}{z-i}=$$

$$=\frac{-i}{z-2i}+\frac{1}{1+\dfrac{z-2i}{i}}=\frac{-i}{z-2i}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z-2i}{i}\right)^n.$$

Область сходимости полученного ряда Лорана $\{0<|z-2i|<1\}$. $\triangleright$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

```
> with(genfunc):
```

> $f := \dfrac{1}{z^2-3\cdot I\cdot z-2}$

$$f := \frac{1}{z^2-3\,\mathrm{I}\,z-2}$$

> $f := rgf\_pfrac(f, z)$

$$f := \frac{\mathrm{I}}{z-\mathrm{I}}-\frac{\mathrm{I}}{z-2\,\mathrm{I}}$$

> $series\left(\dfrac{I}{z-I}, z=2\,I\right)$

$$1+\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})-(z-2\,\mathrm{I})^2-\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^3+(z-2\,\mathrm{I})^4+\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^5 + \mathrm{O}\left((z-2\,\mathrm{I})^6\right)$$

> $series(f, z=2\,I, 20)$

$$-\frac{\mathrm{I}}{z-2\,\mathrm{I}}+1+\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})-(z-2\,\mathrm{I})^2-\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^3+(z-2\,\mathrm{I})^4+\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^5-(z-2\,\mathrm{I})^6-\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^7+(z-2\,\mathrm{I})^8+\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^9-(z-2\,\mathrm{I})^{10}-\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^{11}+(z-2\,\mathrm{I})^{12}+\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^{13}-(z-2\,\mathrm{I})^{14}-\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^{15}+(z-2\,\mathrm{I})^{16}+\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^{17}-(z-2\,\mathrm{I})^{18}-\mathrm{I}\,(z-2\,\mathrm{I})^{19}+\mathrm{O}\left((z-2\,\mathrm{I})^{20}\right)$$

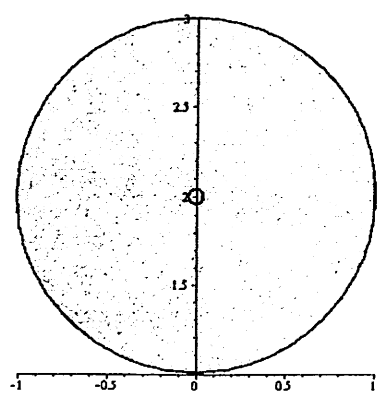
> *with*(*plottools*) :

> *with*(*plots*) :

> $p1 := disk([0, 2], 1, color=grey)$:

> $p2 := disk\left([0, 2], \dfrac{1}{25}, color=white\right)$:

> *display*(p2, p1)



Задача 9.21. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в ряд Лорана в области $V=\{0<|z-2|<1\}$.

◁ Также как в предыдущем примере, получим ряд Лорана

$$f(z)=\frac{2z-3}{(z-2)(z-1)}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-1}=$$

$$=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-2)^n,$$

который сходится в $V=\{0<|z-2|<1\}$. ▷

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> *with*(*genfunc*) :

> $f := \dfrac{2\cdot z-3}{z^2-3\cdot z+2}$

$$f := \frac{2\,z-3}{z^2-3\,z+2}$$

> $f := rgf\_pfrac(f, z)$

$$f := \frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-1}$$

> $f := series(f, z=2, 10)$

$$f := (z-2)^{-1}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+(z-2)^4-(z-2)^5+(z-2)^6-(z-2)^7+(z-2)^8-(z-2)^9+\mathrm{O}\left((z-2)^{10}\right)$$

> *with*(*numapprox*) :

> $f := \dfrac{2\,z-3}{z^2-3\,z+2}$

$$f := \frac{2\,z-3}{z^2-3\,z+2}$$

> $\Upsilon = laurent(f, z=2, 10)$

$$\frac{2\,z-3}{z^2-3\,z+2}=(z-2)^{-1}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+(z-2)^4-(z-2)^5+(z-2)^6-(z-2)^7+(z-2)^8+\mathrm{O}\left((z-2)^9\right)$$

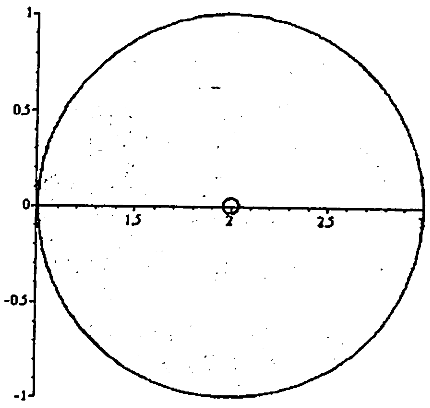
> *with*(*plottools*) :

> *with*(*plots*) :

> $p1 := disk([2,0], 1, color = grey):$

> $p2 := disk\left([2,0], \frac{1}{25}, color = white\right):$

> $display(p2, p1)$



Задача 10.21. Для функции $f(z)=\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$ найти все особые точки, включая $z=\infty$, и определить их тип (для полюсов определить порядок).

◁ Для нахождения полюсов функции $f(z)$, найдём нули функции

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=z^3(2-\cos z).$$

Точка $z=0$ является нулём 3 порядка, а точки где $\cos z = 2$, т.е.

$$z_k = \operatorname{Arccos}2 = -i\operatorname{Ln}(2\pm\sqrt{2^2-1}) =$$

$$=-i[\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi i]=2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3}) \quad (k\in\mathbb{N})$$

являются нулями 1 порядка для функции $\varphi(z)$. Поэтому исходная функция имеет полюс 3 порядка в точке $z=0$, полюса 1 порядка в точках $z_k = 2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3})$ $(k\in\mathbb{N})$, а $z=\infty$ — предельная точка для полюсов. ▷

Задача 11.21. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\cdot(z^2+9)}$ во всех конечных особых точках и в бесконечности (если это возможно).

◁ Преобразуем функцию

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2\cdot(z^2+9)}=\frac{e^z}{z^2(z-3i)(z+3i)}.$$

Точки $z_1=3i$, $z_2=-3i$ — полюса первого порядка, $z_3=0$ — полюс второго порядка, а $z=\infty$ — существенно особая точка. Поэтому, по формуле (3.27)

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)=\operatorname*{res}_{z=3i}(z-3i)f(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{e^z}{z^2(z+3i)}=$$

$$=e^{3i}\cdot\frac{1}{-9\cdot 6i}=-\frac{1}{54}(\sin 3 - i\cos 3),$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)=\operatorname*{res}_{z=-3i}(z+3i)f(z)=-\frac{1}{54}(\sin 3 + i\cos 3).$$

По формуле (3.29)

$$\operatorname*{res}_{z=z_3} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2\cdot f(z)]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{z^2+9}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z\cdot(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2}=\frac{1}{9}.$$

Наконец, по теореме 3.23 о сумме всех вычетов, получим:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)=\frac{1}{27}(\sin 3-3).\ ▷$$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $f := \dfrac{e^z}{z^2\cdot(z^2+9)}$

$$f := \frac{e^z}{z^2\,(z^2+9)}$$

> $a1 := residue(f, z=0)$

$$a1 := \frac{1}{9}$$

> $a2 := residue(f, z=3\cdot I)$

$$a2 := \frac{1}{54}\,\mathrm{I}\,(e^{\mathrm{I}})^3$$

> *simplify*(*a2*);

$$\frac{1}{54}\,\mathrm{I}\,e^{3\,\mathrm{I}}$$

> *a3* := *residue*(*f*, *z* = -3·*I*)

$$a3 := -\frac{\frac{1}{54}\,\mathrm{I}}{(e^{\mathrm{I}})^3}$$

> *a* := -(*a1* + *a2* + *a3*)

$$a := -\frac{1}{9} - \frac{1}{54}\,\mathrm{I}\,(e^{\mathrm{I}})^3 + \frac{\frac{1}{54}\,\mathrm{I}}{(e^{\mathrm{I}})^3}$$

> *b* := *evalc*(*a*)

$$\begin{aligned}b := &-\frac{1}{9} + \frac{1}{18}\cos(1)^2\sin(1) - \frac{1}{54}\sin(1)^3\\ &+\frac{1}{54}\,\frac{3\cos(1)^2\sin(1)-\sin(1)^3}{\left(-3\cos(1)\sin(1)^2+\cos(1)^3\right)^2+\left(3\cos(1)^2\sin(1)-\sin(1)^3\right)^2}\\ &+\mathrm{I}\left(\frac{1}{18}\cos(1)\sin(1)^2-\frac{1}{54}\cos(1)^3\right.\\ &\left.+\frac{1}{54}\,\frac{-3\cos(1)\sin(1)^2+\cos(1)^3}{\left(-3\cos(1)\sin(1)^2+\cos(1)^3\right)^2+\left(3\cos(1)^2\sin(1)-\sin(1)^3\right)^2}\right)\end{aligned}$$

> *simplify*(*b*)

$$\frac{4}{27}\cos(1)^2\sin(1) - \frac{1}{27}\sin(1) - \frac{1}{9}$$

Задача 12.21. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz$ с помощью вычетов.

◁ По формуле (3.32) для функции $f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ получим

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i[\operatorname*{res}_{z=3} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)].$$

Точка $z=3$ — полюс первого порядка, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to3}\frac{1}{z^5-1} = \frac{1}{242}.$$

Точка $z=\infty$ — устранимая особая точка, поэтому, учитывая

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\frac{1}{z^6}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^5}\right)},$$

разложим функцию в ряд Лорана

$$f(z)=\frac{1}{z^6}+\frac{c_{-7}}{z^7}+\frac{c_{-8}}{z^8}+\ldots,$$

тогда $c_{-1}=0$, т.е. $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$. Следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz = -2\pi i\left(\frac{1}{242}+0\right) = -\frac{\pi i}{121}\ ▷$$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $f := \frac{1}{(z-3)\cdot(z^5-1)}$

$$f := \frac{1}{(z-3)\,(z^5-1)}$$

> *a1* := *residue*(*f*, *z* = 3)

$$a1 := \frac{1}{242}$$

> *a2* := *residue*(*f*, *z* = ∞)

$$a2 := 0$$

> *a* := -2·π·*I*·(*a1* + *a2*)

$$a := -\frac{1}{121}\,\mathrm{I}\,\pi$$

> *solve*({$z^5 - 1 = 0$}, {*z*})

$$\begin{aligned}&\{z=1\},\ \left\{z=\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\},\ \left\{z=-\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\right.\\ &\left.+\frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\},\ \left\{z=-\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\},\ \left\{z\right.\\ &\left.=\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\}\end{aligned}$$

> *a1* := *residue*(*f*, *z* = 1)

$$a1 := -\frac{1}{10}$$

> $a2 := residue\left(f, z = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)$

$$a2 := residue\left(\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}, z = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)$$

Задача 13.21. Вычислить интеграл $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1}dz$, где $D = \{|z| > 3\}$.

$\lhd$ В данном случае из формулы (3.32) следует, что $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$ и так как $z = \infty$ устранимая особая точка, то согласно формуле (3.30)

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z[f(\infty) - f(z)] = \lim_{z\to\infty} z\left(\sin 1 - \sin\frac{z}{z+1}\right) =$$

$$= \lim_{z\to\infty} 2z\cdot\cos\frac{1+\frac{z}{z+1}}{2}\cdot\sin\frac{1-\frac{z}{z+1}}{2} =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\frac{2z}{2\cdot(z+1)}\cdot\cos\frac{2z+1}{2(z+1)}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2(z+1)}}{\frac{1}{2(z+1)}}\right] = \cos 1.$$

Следовательно, $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1}dz = 2\pi i\cdot\cos 1$. $\rhd$

Покажем решение этого примера с помощью пакета Maple.

> $f := \sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$

$$f := \sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$$

> $a := 2\cdot\pi\cdot I\cdot residue(f, z = \infty)$

$$a := 2\,I\,\pi\cos(1)$$

> $\lim\limits_{z\to\infty} f$

$$\sin(1)$$

> $a1 := \lim\limits_{z\to\infty} z\cdot(\sin(1) - f)$

$$a1 := \cos(1)$$

> $a := 2\,\pi I\cdot a1$

$$a := 2\,\pi I\cos(1)$$

Задача 14.21. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{2-\sin^2 x}dx$ с помощью вычетов.

$\lhd$ Сделав замену переменных $z = e^{2ix}$, получим

$$x\in[0,\pi] \Rightarrow z\in\{|z|=1\},\ dx = \frac{1}{2iz}dz,$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2 x dx}{2-\sin^2 x} = \frac{1}{2i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z}\cdot\frac{\frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}}{2-\frac{1-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}}dz = \frac{1}{2i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z}\cdot\frac{(z+1)^2}{z^2+6z+1}dz.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z^2+6z+1)} = \frac{(z+1)^2}{z\cdot[z-(-3+2\sqrt{2})]\cdot[z-(-3-2\sqrt{2})]}.$$

Эта функция имеет простые полюса $z_0 = 0$, $z_1 = -3+2\sqrt{2}$, $z_2 = -3-2\sqrt{2}$. В круг $\{|z|<1\}$ попадают два из них $z_0 = 0$ и $z_1 = -3+2\sqrt{2}$, поэтому по формуле (3.32) получим:

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_1}\cdot\frac{(z_1+1)^2}{z_1 - z_2}\right] =$$

$$=2\pi i\left[1+\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{(-3+2\sqrt{2}+1)^2}{4\sqrt{2}}\right]=2\pi i\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{2-\sin^2 x}dx=\pi\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}. \ \triangleright$$

Задача 15.21. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ ($n\in\mathbb{N}$) с помощью вычетов.

$\triangleleft$ Учитывая четность функции, получим:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Если обозначить

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{(z+i)^n\cdot(z-i)^n},$$

то в верхней полуплоскости есть одна особая точка $z=i$, которая является полюсом n-ого порядка. Кроме того,

$$\lim_{r\to\infty} r\cdot\max_{\gamma_r} f(z)=0 \quad (\gamma_r=\{|z|=r, 0\le\arg z\le\pi\}),$$

поэтому, согласно первой лемме Жордана,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz=0,$$

и по теореме 3.25 получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=i} f(z).$$

Используя формулу (3.29) найдём

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-i)^n f(z)=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z+i)^n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\pi$$

и исходный интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \ \triangleright$$

Задача 16.21. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$, используя леммы Жордана.

$\triangleleft$ Для решения этой задачи используем вторую лемму Жордана и формулу (3.41). Обозначим

$$f(z)=\frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}=\frac{(z+1)\cdot e^{2iz}}{[z-(-1+i)]\cdot[z-1-i)]}.$$

Эта функция имеет два полюса первого порядка $z_1=-1+i$ и $z_2=-1-i$, из них только $z_1=-1+i$ лежит в верхней полуплоскости. Кроме того, для функции $R(z)=\frac{z+1}{z^2+2z+2}$ при $z\to\infty$ $R(z)\sim\frac{1}{z}$, поэтому, учитывая вторую лемму Жордана, получим

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} R(z)e^{2iz}dz=\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz=0,$$

где $\gamma_r=\{|z|=r, 0<\arg z<\pi\}$. По формуле (3.41)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx=2\pi\cdot\mathrm{Re}\left[\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)\right].$$

Вычислим вычет по формуле (3.27):

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)\cdot\frac{(z+1)e^{2iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]=$$

$$=\frac{(z_1+1)e^{2iz_1}}{(z_1-z_2)}=\frac{ie^{-2-2i}}{2i}=\frac{e^{-2}}{2}(\cos 2-i\sin 2).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx = 2\pi \cdot \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-2}}{2}(\cos 2 - i\sin 2)\right] = \frac{\pi\cos 2}{e^2}. \triangleright$$

Список литературы

1. **Ablowitz M. J., Fokas A. S.** *Complex Variables. Introduction and Applications.* — 2nd edition. — Cambridge University Press, 2003. — 647 p.

2. **Brown J. W., Churchill R. V.** *Complex Variables and Applications.* — 9th edition. — McGraw-Hill Education, 2013. — 480 p.

3. **Eakin P., Eberhart C.** *Visual Problem Solving with Maple.* — Department of Mathematics, University of Kentucky, 2009. — 161 p.

4. **Mathews J. H, Howell R. W.** *Complex Analysis for Mathematics and Engineering.* — 6th edition. — Jones & Bartlett Learning, 2011. — 650 p.

5. **Palka B. P.** *An Introduction to Complex Function Theory.* — Springer-Verlag New York, 1991. — 560 p.

6. **Stewart J.** *Calculus.* — 7th edition. — Brooks Cole, 2012. — 1368 p.

7. **Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.** *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* — 4-е издание. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 312 с.

8. **Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.** (Под ред.: Евграфов М. А.) *Сборник задач по теории аналитических функций.* — 2-е издание. — М.: Наука, 1972. — 415 с.

9. **Касюк С. Т., Логвинова А. А.** *Высшая математика на компьютере в программе Maple 14.* — Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2011. — 57 с.

10. **Клочко Т. В., Парфёнова Н. Д.** *Решение задач комплексного анализа средствами Maple.* — Харьков: Харьковский национальный университет, 2009. — 68 с.

11. **Лаврентьев М.А., Шабат Б. В.** *Методы теории функций комплексного переменного.* — М.: Лань, 2002. — 688 с.

12. **Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.** *Введение в теорию аналитических функций.* — М.: Просвещение, 1977. — 320 с.

13. **Привалов И. И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Ленанд, 2015. — 440 с.

14. **Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.** *Лекции по теории функций комплексного переменного.* — М.: Наука, 1976. — 480 с.

15. **Шабат Б. В.** *Введение в комплексный анализ. Ч.1: Функции одного переменного.* — 5-е издание. — М.: Ленанд, 2015. — 336 с.

Учебное пособие

Джумабаев Давлатбай Халиллаевич
Каримов Жасурбек Алишерович
Кытманов Александр Мечиславович
Тишабаев Журабай Каримович
Туйчиев Тахир Турсунбаевич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ)

Редактор издательства: Махкам Махмудов
Корректор: Шахло Алимджанова
Технический редактор: Бехзод Болтабоев

Издательство ООО «MUMTOZ SO‘Z»
Ташкент, ул. Навои, 69. Тел.: +998 71 241 60 33
E-mail: mumtoz_soz@mail.ru
Лицензия издательства AI № 103. 15.07.2008

Подписано к печати 10.10.2018
Формат 60х84 1/16 Офсетная бумага
Гарнитура Times New Roman
Усл. печ. л. 12,5. Уч. изд. л. 11,5

Отпечатано в типографии Национального университета Узбекистана
имени Мирзо Улугбека
Заказ № 196. Тираж 200 экз.

ISBN 978-9943-5561-0-2
9 789943 556102