

877.53
Д-67

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



100 ЛЕТ



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY



Д.Х. Джумабаев, Ж.А. Каримов, А.М. Кытманов,
Ж.К. Тишабаев, Т.Т. Туйчиев

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
(САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ)**

517.53
Д-67

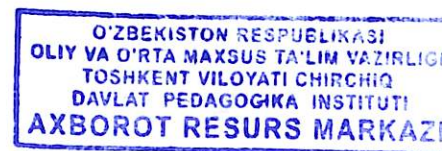
Министерство высшего и среднего специального образования
Республики Узбекистан
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

Д.Х. Джумабаев, Ж.А. Каримов, А.М. Кытманов,
Ж.К. Тишабаев, Т.Т. Туйчиев

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
(САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ)**

Разрешено к печати Министерством высшего и среднего
специального образования Республики Узбекистан
(приказ № 531 от 14 июня 2018 года) в качестве
учебного пособия для студентов университетов



Ташкент
«MUMTOZ SO'Z»
2018

УДК 517.53
ББК 22.16

Джумабаев Д.Х., Каримов Ж.А., Кытманов А.М., Тишабаев Ж.К.,
Туйчиев Т.Т. Теория функций комплексного переменного
(самостоятельные работы). — Учебное пособие. — Ташкент: MUMTOZ
SO‘Z, 2018. — 210 с.

Учебное пособие предназначено студентам университетов для
выполнения самостоятельных работ по предмету теории функций
комплексного переменного и соответствует Государственным
образовательным стандартам Республики Узбекистан по направлениям
5130100 – Математика, 5140200 – Физика, 5140300 – Механика, 5140400 –
Астрономия. Пособие включает следующие темы: комплексные числа и
функции комплексного переменного, элементарные функции и
выполняемые ими конформные отображения, интегралы от функции
комплексного переменного и теория вычетов. Пособие содержит 3
самостоятельные работы, 1092 примеров и задач, 52 из которых снабжены
подробными решениями. Решения этих примеров и задач приведены с
помощью системы компьютерной математики Maple.

Рецензенты: Н.М.Жабборов, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Национального университета Узбекистана;

Ш.Т.Пирматов, кандидат физико-математических
наук, доцент кафедры высшей математики
Ташкентского государственного технического
университета.

ISBN 978-9943-5561-0-2

© «MUMTOZ SO‘Z», 2018

© Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2018

© Сибирский федеральный университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
§ 1. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА	6
Основные определения и теоремы	6
Задачи и упражнения для самостоятельной работы	26
Решение образцовых вариантов	39
§ 2. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЫПОЛНЯЕМЫЕ ИМИ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	58
Основные определения и теоремы	58
Задачи и упражнения для самостоятельной работы	103
Решения образцовых вариантов	123
§ 3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ	149
Основные определения и теоремы	149
Задачи и упражнения для самостоятельной работы	170
Решение образцовых вариантов	188
Список литературы	209

*Посвящается 100-летию
Национального университета Узбекистана
имени Мирзо Улугбека*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для реализации требований Закона Республики Узбекистан «Об образовании», Национальной программы по подготовке кадров, постановлений Президента Республики Узбекистан о развитии высшего образования коллектив кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана поставил перед собой несколько задач.

В современном мире почти все сферы жизни человека развиваются быстрыми темпами. В том числе наука и образование. В современных условиях взрывного увеличения информации и бурного развития новых технологий специалисту нужно со студенческой скамьи обучаться умению самому разбираться в потоке информации, учиться самостоятельности. В частности, специалисту-математику, в образовании которого теория функций комплексного переменного играет фундаментальную роль, нужно учиться самостоятельному мышлению на примерах и задачах. Поэтому в учебную программу включены самостоятельные работы и для них предусмотрены специальные часы.

Данное пособие предназначено студентам университетов для выполнения самостоятельных работ и соответствует государственным стандартам Республики Узбекистан по специальностям «Математика», «Физика», «Механика» и «Астрономия».

Пособие состоит из 3 параграфов. В каждом параграфе изложены рекомендуемые самостоятельные работы по следующим темам: «Комплексные числа и функции комплексного аргумента», «Элементарные функции и выполняемые ими отображения, конформные отображения», «Интегралы от функций комплексного

переменного и теория вычетов». Каждой теме предпосланы основные понятия и утверждения, необходимые для успешного выполнения самостоятельной работы (раздел А). В разделе (Б) приведены упражнения, состоящие из 21 варианта, предназначенные студентам для выполнения и последующей сдачи. В помощь студенту в разделе (В) даются подробные решения одного варианта из каждого задания (вариант 21). При этом большинство задач решены двумя способами. Сначала приведено аналитическое решение задачи, после этого приведено решение задачи с рисунками в системе компьютерной математики Maple для более глубокого понимания темы.

При подготовке пособия авторы старались не перегружать его информацией, а дать только необходимую, но достаточную для квалифицированного понимания предмета, старались полнее учесть опыт, накопленный за годы преподавания теории функций комплексного переменного на математическом и физическом факультетах Национального университета Узбекистана. Мы надеемся, что данное учебное пособие будет полезным для понимания методов комплексного анализа и формирования навыков самостоятельного решения задач.

Авторы

§1. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

- Комплексные числа и действия с ними.
- Геометрическое представление комплексных чисел. Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме.
- Кривые и области на комплексной плоскости.
- Стереографическая проекция.
- Функции комплексного переменного.
- Дифференцирование функций. Условия Коши—Римана.
- Гармонические функции.
- Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения.

— А —

Основные определения и теоремы

1. Комплексные числа и действия над ними

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где x и y — вещественные числа, а i — мнимая единица такая, что $i^2 = -1$.

Число x называется вещественной частью, а y — мнимой частью комплексного числа z , это записывается следующим образом

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Если в (1.1) $y = 0$, то $z = x$ — вещественное число. Если в (1) $x = 0$, то $z = iy$ — мнимое число. Если в (1.1) $x = y = 0$, то комплексное число z равно 0.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Они называются комплексно сопряженными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$, это записывается следующим образом $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$. Например, если $z = 2 + \frac{1}{3}i$, то $\bar{z} = 2 - \frac{1}{3}i$.

Арифметические операции для двух комплексных чисел определяются следующим образом:

- 1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
- 2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$;
- 3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$;
- 4) $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}}$.

Замечание. Определение произведения комплексных чисел можно объяснить следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Деление комплексных чисел объясняется с помощью умножения числителя и знаменателя на комплексно сопряженное число $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

2. Геометрическое представление комплексных чисел

На декартовой плоскости Oxy комплексное число $z = x + iy$ представляется точкой $M(x, y)$ (рис. 1.1).

Точка $M(x, y)$ называется геометрическим представлением комплексного числа $z = x + iy$. Следовательно, каждому комплексному числу соответствует точка плоскости. И наоборот,