19 - mavzu.Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq. Ikkichi tartibli chiziqning to`g`ri chiziq bilan kesishishi.

Reja:

1. Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq.
2. Ikkichi tartibli chiziqning to`g`ri chiziq bilan kesishishi.
3. Ikkinchi tartibli chiziqni uning tenglamasi bo’yicha yasash.

Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi

Tekislikda biror affin (yoki dekart) reperda koordinatalari

( 57.1)

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to’plami ikkinchi tartibli chiziq deb atalishi ma’lum[[1]](#footnote-1) (20–§). Bunda *a*11, *a*12, *a*22, *a*10, *a*20, *a*00 koyeffitsiyentlar haqiqiy sonlar bo’lib, *a*11, *a*12, *a*22 lardan kamida bittasi noldan farqlidir (bu shartni bundan buyon  ko’rinishida yozamiz).

Biz 40 – 55 – § larda uchta chiziq ellips, giperbola va parabolani o’rgandik, bu chiziqlar ham ikkinchi tartibli chiziqlardir, chunki (57.1) tenglamada  bo’lib, qolgan barcha koeffitsiyentlar nol bo’lsa, u ellipsning kanonik tenglamasi, shu shartlarda yana bo’lsa, (57.1) tenglama giperbolaning kanonik tenglamasi, *a10=r; a22=*1 bo’lib, qolgan koeffitsiyentlar nol bo’lsa, (57.1) tenglama parabolaning kanonik tenglamasidir.

Quydagi tabiiy savol tug’iladi: tekislikda ko’rilgan bu chiziqlardan boshqa yana ikkinchi tartibli chiziqlar bormi? Bu savolga quyida javob berishga harakat qilamiz. Avvalo shuni ta’kidlaymiz: 20–§ dan bizga ma’lumki, chiziqning tartibi koordinatalar sistemasining olinishiga bog’liq emas. Bundan foydalanib, koordinatalar sistemasini tegishlicha tanlash hisobiga barcha ikkinchi tartibli chiziqlarni to’la geometrik tavsiflab chiqamiz. Ikkinchi tartibli *γ* chiziq *Б =* dekart reperida (57.1) umumiy tenglamasi bilan ifodalangan bo’lsin. Shunday reperni tanlaymizki, unga nisbatan *γ* chiziqning (57.1) tenglamasi mumkin qadar sodda – «kanonik» ko’rinishga ega bo’lsin, ya’ni

1. o’zgaruvchi koordinatalar ko’paytmasi qatnashgan had bo’lmasin;
2. birinchi darajali hadlar soni eng oz bo’lsin (iloji bo’lsa, ular butunlay qatnashmasin);
3. mumkin bo’lsa, ozod had qatnashmasin.

Agar (57.1) tenglamada *a*12≠0 bo’lsa, soddalashtirishni quydagicha bajaramiz. B reperning o’qlarini 0 nuqta atrofida ixtiyoriy α burchakka burib, yangi *Б`*= Dekart reperini hosil qilamiz. *Б* reperdan *Б*`reperga o’tish formulalari (15–§)

 (57.2)

dan *x,y* ni (57.1) ga qo’ysak va o’xshash hadlarini ixchamlasak, γ chiziqni (57.1) tenglamasi B`reperda ushbu ko’rinishni oladi:

 (57.3)

бунда:

*a`11= a11cos2α+2a12cosα sinα+a12sin2α,*

*a`12= – a11sinα cosα+ a12cos2α– a12sin2α+ a22sinα cosα,*  (57.4)

*a`22= a11sin2α–2a12sinα cosα+a22cos2α,*

*a`10= a10cosα+ a20sinα, a`20= – a10sinα+ a20cosα, a`00=a00.*

(57.4) belgilashlardan ko’rinadiki, (57.3) tenglamadagi *a*`11, *a*`12, *a*`22 koeffitsiyentlar (57.1) tenglamadagi *a*11, *a*12, *a*22 koefitsiyentlarga va α burchakka bog’liq, shu bilan birga *a*`11, *a*`12, *a*`22 ning kamida biri noldan farqli, chunki



α burchakning ixtiyoriyligidan foydalanib, uni shunday tanlab olamizki, almashtirilgan (57.3) tenglamadagi *a`*12 koeffitsiyent nolga teng bo’lsin, ya’ni

*a`*12*= – a*11sinαcosα*+a*12cos2α *– a*12sin2α*+ a*22sinαcosα *=*

*= –(a*11cosα*+a*12sinα*)*sinα*+(a*21cosα*+ a*22sinα*)*cosα*=0*

yoki

 (57.5)

(57.5) munosabatni biror λ ga tenglab, uni quyidagi ko’rinishda yozish mumkin:

(57.6)

Bu sistema bir jinsli, shuning uchun uning determinanti nolga teng ya’ni

 yoki  (57.7)

bo’lgandagina sistema noldan farqli yechimga ega bo’ladi.

(57.7) tenglama γ chizisning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

(57.7) tenglamaning ildizlari.



 bo’lgani uchun uning diskriminanti:



Demak, (57.7) tenglamaning λ1, λ2 ildizlari turli va haqiqiydir.

(57.5) dan (57.8)

tengliklarni yoza olamiz. Ularning har birini cosα≠0 ga bo’lib  va

*a`12= – (a11cosα+a12sinα)sinα+(a21cosα+a22sinα)cosα=0⇒a12=0*, (ya’ni *a12*azaldan *0* ga teng ekan) ushbuni hosil qilamiz:

. (57.9)

munosabatga navbat bilan (57.7) xarakteristik tenglamaning λ1, λ2 ildizlarini qo’yamiz:

 (57.10)

Viyet teoremasiga ko’ra (57.7) dan

λ1+λ2=*a*11+*a*22, λ1λ2=*a*11*a*22–*a*212. (57.11)

(57.11) va (57.10) formulalardan ushbuga ega bo’lamiz: 

Shunga ko’ra *tg*α O*x*` o’qning *B* dagi burchak koeffitsiyenti bo’lganda  o’qining shu reperdagi burchak koeffitsiyenti bo’ladi. U holda *Ox`* o’qining birlik vektorining koordinatalari bo’lmish cosα1, sinα1,



formulalardan, *Oy`* o’qning birlik vektorining koordinatalari cosα2, sinα2 tengliklardan aniqlanadi. λ=λ2 bo’lganda (57.8) dan

*a*11cosα1+*a*12sinα1=λ1cosα1,

*a*21cosα1+ *a*22sinα1=λ1sinα1,

u holda

*a`*11*=*(*a*11cosα1+*a*12sinα1)cosα1+(*a*21cosα1+*a*22sinα1)sinα1=λcosα1cosα1+λsinα1sinα1=λ.

(57.4) munosabatda 1- va 3- tengliklarni hadlab qo’shsak,

*a`*11+ *a`*22= *=a*11(sin2α+cos2α)+ *a*22(sin2α+cos2α) yoki (*a`*11+ *a`*22= *=a*11+ *a*22. (57.11) dan *a*11+ *a*22=λ1­+λ2 va *a`*11=λ1 ekanini hisobga olsak, *a`*22=λ2 kelib chiqadi. Shunday qilib, koordinatalar sistemasini (57.10) formuladan aniqlanuvchi α=α1 burchakka (bu yerda α1 yangi Ox` o’qining eski Ox o’qqa og’ish burchagi) burish bilan *Б*=() reperdan *Б`*=() reperga o’tish mumkinki, unga nisbatan (57.1) tenglama soddalashib, ushbu ko’rinishga ega bo’ladi:

λ1*x` 2+*λ2*y` 2*+2*a`*10*x*`+2*a*`20*y*`+*a*00. (57.12)

Agar Ox` o’qining burchak koeffitsiyenti uchun  ni qabul qilinsa, u holda *a`*11=λ2, *a`*22=λ1 ekanini aynan yuqoridagi kabi ko’rsatish mumkin. Shuni aytish lozimki, agar (57.1) tenglamada *a*12=0 bo’lsa, koordinatalar sistemasini burish bilan almashtirishga hojat qolmaydi.

*Б*`=() reperdan shunday reperga o’tamizki, unga nisbatan *γ* chiziqning (57.12) tenglamasida birinchi darajali hadlar qatnashmasin. Bu ishni koordinatalar boshini ko’chirish bilan bajarish mumkin.

(57.12) tenglamada λ1, λ2 koeffitsiyentlarning kamida biri noldan farqli, chunki agar λ1=λ2=0 bo’lsa (57.12) tenglama birinchi darajali tenglamaga aylanar edi. Demak, bu yerda quydagi uch hol bo’lishi mumkin:

1. λ1≠0, λ2≠0 (λ1λ1≠0)

Bu holda λ1λ1=*a*11*a*22 – *a*212⇒*a*11*a*22 – *a*212≠0. (57.12) tenglamaning chap tomonidagi hadlarni *x*`, *y*` ga nisbatan to’liq kvadratga keltiramiz:



bundan

(57.13)

bu yerda 

Endi () ni u quyidagi formula bilan aniqlanadigan parallel ko’chirishni bajaraylik:

 (\*)

U holda yangi () reper hosil bo’lib, chiziqning tenglamasi soddalashadi:

λ1Х2+λ2Y2+*a*``10=0. (I)

2. λ1=0 (λ2­≠0), *a*`10≠0 yoki λ2=0 (λ1­≠0), *a*`20≠0.

Bu hollardan birini ko’rsatish yetarli; chunki



almashtirish yordamida ularning birini ikkinchisiga keltirish mumkin.

Birinchi holni qaraymiz:

λ1=0 (λ2­≠0) ni hisobga olib, (57.11) tenglamaning chap tomonidagi hadlarini *y*` ga nisbatan to’liq kvadratga keltiramiz:



yoki



bunda  belgilashni kiritdik.

Ushbu 

formulalar bo’yicha koordinatalar sistemasini almashtiramiz, ya’ni koordinatalar boshi *0* ni *0*`() nuqtaga ko’chiramiz. U holda hosil bo’lgan

() reperga nisbatan chiziqning tenglamasi Ushbu sodda ko’rinishni qabul qiladi:

λ2*Y*2+2*a*`10*X*=0. (II)

3. λ1=0, *a*`10=0 yoki λ2=0, *a*`20=0.

Bu hollarda ham bir-biriga o’xshash bo’lib, shuning uchun ularning birini qarash yetarli.

Birinchi holni qaraymiz. λ1=0, *a*`10=0 da (57.12) tenglama ushbu ko’rinishni oladi:

λ2*у*`2+2*a*`10*y*`+*a*00=0, (57.14)

bu yerda λ2≠0 bo’lgani uchun (57.14) ni quydagicha yozish mumktn:



yoki



bunda



Ushbu  formulalar bo’yicha () reperda () reperga o’tamiz, ya’ni koordinatalar boshi *0* ni *0*`() nuqtaga ko’chiramiz. Yangi reperda γ chiziqning sodda tenglamasi hosil bo’ladi.

λ2Y2+*a*``00=0. (III)

X u l o s a. Agar ikkinchi tartibli γ chiziq biror dekart reperda (57.1) tenglama bilan berilgan bo’lsa, yangi dekart reperini tegishlicha tanlash bilan γ ning tenglamasini I, II, III tenglamalarning biriga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli chiziqlarning tasnifi (klassifikatsiyasi).

Yuqoridagi qaralgan (I, II, III) ko’rinishdagi tenglamalarni mufassalroq tekshiramiz.

I. λ1*x*2+λ2*y*2+*a*``00=0.

I tenglamada λ1≠0, λ2≠0, lekin *a*``00 – ixtiyoriy. Quydagi ikki hol bo’lishi mumkin:

a) *a*``00≠0. I dan:

 (58.1)

Agar λ1, λ2 bir xil ishorali, *a*``00 esa ular bilan qarama – qarshi ishorali bo’lsa, u holda >0, >0.

Endi  belgilashni kiritsak, (58.1) dan



ni, ya’ni ellipsning kanonik tenglamasini hosil qilinadi.

Agar λ1, λ2, *a*``00 ning uchvlvsi ham bir xil ishorali bo’lsa, u holda <0, <0, bu yerda  belgilash kiritsak,  tenglamaga ega bo’lamiz. Bu tenglamani qanoatlantiruvchi bita ham haqiqiy nuqta mavjud emas, lekin bu tenglama ellips tenglamasiga o’xshashligi sababli, u *mavhum ellipsni* aniqlaydi, deb aytiladi. Agar λ1, λ2 qarama – qarshi ishorali va *a*``00≠0 bo’lsa, u holda  va  lar qarama – qarshi ishorali bo’ladi. >0, lekin <0 bo’lib, ularni mos ravishda *a*2 va – *b*2 deb belgilasak, (58.1) tenglama  ko’rinishda bo’lib, bu giperbolaning kanonik tenglamasidir; xudi shunga o’xshash, <0, >0 bo’lsa, ularni ham mos ravishda – *a*2 va *b*2 deb belgilasak, (58.1) tenglama ushbu ko’rinishni oladi:  bu ham giperbolaning kanonik tenglamasidir.

b) *a*``00=0 bo’lsin. U holda

(58.2)

λ1, λ2 qarama – qarshi ishorali bo’lsa, tegishli belgilashni kiritish bilan (58.2) ni ushbu ko’rinishda yozish mumkin:

 (58.3)

(58.3)  bu tenglamalar koordinatalar boshida kesishuvchi ikkita haqiqiy to’g’ri chiziqni aniqlaydi. Agar λ1, λ2 bir xil ishorali, masalan, λ1<0, λ2<0 bo’lsa, u holda  belgilashni kiritish bilan (58.2) ni quyidagi ko’rinishda yozish mumkin:



bu tenglamalarning har biri birinchi darajali bo’lgani uchun ular to’g’ri chiziqni aniqlaydi, lekin bu ikki to’g’ri chiziq faqat bita haqiqiy nuqtaga egadir (koordinatalar boshi). Shuning uchun ularni bita haqiqiy nuqtada kesishuvchi ikkita mavhum to’g’ri chiziq tenglamasi deb aytish mumkin. Shunday qilib, ikkinchi tartibli γ chiziqning (57.6) xarakteristik tenglamasining ildizlari λ1≠0, λ2≠0 bo’lsa, quydagi besh tur chiziq hosil bo’ladi: ellips, mavhum ellips, giperbola, kesishuvchi mavhum ikki to’g’ri chiziq, kesishuvchi haqiqiy ikki to’g’ri chiziq.

2. λ2*y*2+2*a*`10*x*=0

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarga o’tamiz. II tenglamada λ2≠0, *a*`10≠0 bo’lgani uchun uni quydagicha yozib olamiz: belgilashni kiritsak, *y*2=*2px*, bu parabolaning kanonik tenglamasidir.

3. λ2*у*2+*a*``00=0

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni tasniflashga o’tamiz. Bu tenglamada λ2≠0, *a*``10 – har qanday son. Quyidagi hollar bo’lishi mumkin.

1. *a*``00≠ 0·λ2 bilan *a*``00 har xil ishorali bo’lsa, >0 bo’ladi.

Tenglamani  faraz qilib,

*y*2=*a*2 yoki (*y – a*)(*y+a*)=0

ga keltiramiz. Bu tenglama esa o’zaro parallel ikki to’g’ri chiziqni aniqlaydi. λ2 bilan *a*``0 bir xil ishorali, ya’ni λ2>0, *a*`00>0 (λ2<0, *a*``00<0) bo’lgan holda

III ⇒*y*2= – *a*2 yoki (*y – ia*)(*y+ia*)=0,

bu tenglama ikkita mavhum parallel to’g’ri chiziqni aniqlaydi, deb yuritiladi.

b) *a*``00=0. U holda III⇒λ2y2=0 va λ2≠0 bo’lgani uchun *y2=0* yoki *y=0, y=0*⇒ ikki karra olingan to’g’ri chiziq hosil qilinadi. Shunday qilib, III tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq quydagi uch turga bo’linadi: haqiqiy parallel ikki to’g’ri chiziq, mavhum parallel ikki to’g’ri chiziq, ustma – ust tushuvchi ikki to’g’ri chiziq.

I, II, III tenglamalar bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi to’qqizta turga bo’linadi:

|  |  |
| --- | --- |
| Kanonik tenglamalar | Chiziqlarning nomlari |
| 1 | 2 |
| 1.  2.  3.  4.  5.  6.  7.  8.  9. | ellips  mavhum ellips  giperbola  kesishuvchi ikki to’g’ri chiziq  nuqta (koordinata boshida kesishuvchi mavhum ikki to’g’ri chiziq)  parabola  turli parallel ikki to’g’ri chiziq  mavhum parallel ikki to’g’ri chiziq  ustma – ust tushgan ikki to’g’ri chiziq |

Ikkinchi tartibli chiziqni uning tenglamasi bo’yicha yasash.

Ikkinchi tartibli chiziq dekart reperida (57.1) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo’lsin. Uni yasash uchun tenglamasini oldingi paragrafda bayon qilingan usullar bo’yicha soddalashtiramiz:

1) (57.1) tenglamada *a*12≠0 bo’lsa, chiziqning

λ2 – (*a*11+*a*22)λ+*a*11*a*22 – *a*212=0

2) tgα1= formula bo’yicha tgα1 ni, so’ngra

sin α1=

ni hosil qilamiz. Bu bilan reperni α1 burchakka burishdan hosil qilingan () reperning  koordinatavektorlari aniqlanadi:



3) Yangi reperda chiziqning tenglamasi

*λ1х`2+λ2y`2+2a`10 x`+2a`20 y`+a00=0* (57.11)

ko’rinishda bo’lib, bunda *a*`10, *a*`20 koeffitsiyentlar ushbu formulalardan topiladi: B` reperning koordinatalariboshi  ni 53-§ dagi (\*) formuladan topiladigan *O`* nuqtaga ko’chirish bilan B` reperdan B`` reperga o’tamiz. B`` reperda chiziqning tenglamasi kanonik ko’rinishga keladi. Agar (57.1) tenglamada *a*12=0 bo’lsa, soddalashtirish koordinatalar boshini ko’chirishdan iborat, xolos. Bu ishlarni misollarda ko’ramiz.

Ikkinchi tartibli chiziqning to’g’ri chiziq bilan kesishishi.

Dekart reperida

*a*11*x*2+2*a*12*xy*+*a*22*u*2+*2a*10*x*+2*a*20*y* +*a*00=0 (57.1)

ikkinchi tartibli chiziq va

(61.1 74)

to’g’ri chiziq berilgan bo’lsin. Bu egri chiziqning shu to’g’ri chiziq bilan kesishish masalasiga o’tamiz. (57.1) va (61.1) dan:

*a*11(*x*0+*a*1*t*)2+2*a*12(*x*0+*a*1*t*)(*y*0+*a*2*t*)+*a*22(*y*0+*a*2*t*)2+*2a*10(*x*0+*a*1*t*)+2*a*20(*y*0+*a*2*t*) +*a*00=0

yoki

*Pt2+2Qt+r=0*. (61.2)

Bu yerda quyidagi belgilashlar kiritilgan:

*P=a*11*a*

*Q=a*11*a*1*x*0*+a*12*a*1*y*0+*a*21*a*2*x*0*+a*22*a*2*y*0*+a*10*a*1*+a*20*a*2*=*

*a*1(*a*11*x*0*+a*12*y*0*+a*10)*+a*2(*a*21*x*0*+a22y0+a*20); (61.3)

*R=a*11 

(61.2) tenglamani yechib, *t* ning topilgan qiymatlarini (61.1) ga qo’ysak, chiziq bilan to’g’ri chiziqning kesishgan nuqtalari topiladi. Quydagi hollarni tekshiraylik.

1. *P*≠0. Bu holda (61.2) tenglama ikkita ildizga ega.



Bu yerning o’zida uchta hol bo’lishi mumkin:

a) *D=Q*2-*PR*>0; (61.2) tenglama ikkita haqiqiy turli ildizlarga ega – chiziq bilan to’g’ri chiziq ikkita haqiqiy turli nuqtalarda kesishadi.

b) *D=Q*2-*PR<*0; (61.2) tenglama ikkita qo’shma kompleks ildizga ega, shuning uchun (57.1) chiziq bilan (61,1) to’g’ri chiziq ikkta qo’shma kompleks nuqtalarda kesishadi, demak, to’g’ri chiziq bilan (57.1) chiziq umumiy haqiqiy nuqtalarga ega bo’lmaydi.

v) *D=Q*2-*PR*=0; (61.2) tenglama ustma – ust tushgan ikkita ildizga ega – chiziq bilan to’g’ri chiziq ustma – ust tushgan ikkita nuqtada kesishadi. Bu vaqtda *u* to’g’ri chiziq γ chiziqqa *urinma* deb ataladai.

2. *P*=0. Bu holda (61.2) tenglama

*2Qt+R=0* (61.4)

ko’rinishni oladi.

a) *Q*≠0, *R –* ixtiyoriy son. (61.4) tenglama yagona ildizga ega:

;

b) *Q*=0, *R*≠0. (61.4) tenglama yechimga ega emas. Chiziq to’g’ri chiziq bilan bitta ham umumiy haqiqiy yoki mvhum nuqtaga ega emas.

v) *Q*=0, *R*=0 bu holda *t* ning har qanday qiymati (61.4) tenglamani qanoatlantiradi⇒chiziq va to’g’ri chiziq cheksiz ko’p umumiy nuqtalarga ega, ya’ni (61.1) to’g’ri barcha nuqtalari bilan (57.1) chiziqqa tegishli: *u*⊂γ. Shunday qilib, (61.2) tenglamada *R*=0 bo’lsa, γ chiziq *u* to’g’ri chiziq bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega yoki bitta ham umumiy nuqtaga ega emas, yoki *u*⊂γ.

1. Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy nazariyasini dekart reperida qaraymiz. [↑](#footnote-ref-1)